

Université de Montréal

Effet Josephson et bosons pseudo-Goldstone

par

Louis-Philippe Guay

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Juin, 2005

©Louis-Philippe Guay, 2005



QC

3

U54

2005

V. 019

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Effet Josephson et bosons pseudo-Goldstone

présenté par:

Louis-Philippe Guay

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard MacKenzie, président-rapporteur
Manu Paranjape, directeur de recherche
Michel Côté, membre du jury

Mémoire accepté le:15/06/05.....

Sommaire

Le but de la recherche est l'analyse de l'effet Josephson et de l'étendre à des symétries non-abéliennes. Dans les supraconducteurs, où Josephson avait découvert l'effet, la symétrie d'origine est $U(1)$. Pour une compréhension historique de l'effet Josephson, une méthode hamiltonienne est utilisée. Un formalisme lagrangien est utilisé, selon un modèle de brisure de symétrie général, pour reformuler et étendre l'analyse aux situations non-abéliennes. Quelques modèles de brisure de symétrie sont analysés, soit les modèles $SO(2) \times SO(2)$, $U(2) \times SO(3)$, $SO(5) \times SO(5)$. Une attention particulière est donnée aux directions, dans la symétrie du modèle de jonction, que l'on peut qualifier de pseudo-Goldstone.

Mots clés : effet Josephson, bosons pseudo-Goldstone, brisure de symétrie

Summary

We study the Josephson effect and show how to generalize it to non-abelian symmetries. The original Josephson effect was discovered for superconductors, where the symmetry in question is $U(1)$, which is spontaneously broken. The effect is most easily understood in an effective Hamiltonian formalism. We adapt this analysis to a Lagrangian formalism and study models with more general, non-abelian symmetries, which are also spontaneously broken. We study explicitly models with the symmetries $SO(2) \times SO(2)$, $U(2) \times SO(3)$, $SO(5) \times SO(5)$. We show that the Josephson effect corresponds to oscillations along directions which correspond to pseudo-Goldstone bosons.

Keywords: Josephson effect, spontaneous symmetry breaking, pseudo-Goldstone bosons, $SO(5)$ superconductivity

TABLE DES MATIERES

Sommaire **i**

Summary **ii**

TABLE DES MATIERES **iii**

Contribution personnelle **v**

CHAPITRE 1: Introduction : l'effet Josephson **1**

1.1 Avant propos 1

1.2 L'effet Josephson de base 2

1.3 Formalisme hamiltonien 3

1.3.1 Equation de Josephson avec approximation standard 3

1.3.2 Equation de Josephson sans approximation 6

CHAPITRE 2: Système général de brisure de symétrie **10**

<i>TABLE DES MATIERES</i>	iv
2.1 Ouverture vers d'autres symétries	10
2.2 Vérification du procédé lagrangien	11
2.3 Tentative de nouvelles symétries, méthode de poser le couplage	21
2.4 Modèle de jonction d'un modèle de symétries $U(2) \times SO(3)$	21
CHAPITRE 3: Article	33
3.1 The abelian and non-abelian Josephson effect and pseudo-goldstone bosons	33
CHAPITRE 4: Conclusion	49
BIBLIOGRAPHIE	vi

Contribution personnelle

L'auteur a personnellement contribué à la totalité des chapitres du présent mémoire et à l'élaboration d'une théorie de couplage pour des éléments de modèles de symétries brisées $U(2) \times SO(3)$ et $SO(5) \times SO(5)$.

CHAPITRE 1

Introduction : l'effet Josephson

1.1 Avant propos

L'effet dit de Josephson [1] est décrit comme l'apparition d'un courant, oscillant ou continu, lorsque l'on met à une extrême proximité deux supraconducteurs. Il y a deux possibilités à considérer pour cette jonction, dite de Josephson, soit qu'il n'y ait pas de différence de potentiel entre les supraconducteurs participants à cette jonction, ou soit qu'il y ait une différence de potentiel entre ces mêmes supraconducteurs. La nouveauté lors de sa découverte par Josephson en 1962 est l'existence d'un courant, qui est continu (pour un certain intervalle de temps), entre les deux supraconducteurs et ce, même s'il n'y a pas de différence de potentiel entre les deux états supraconducteurs. En présence d'une différence de potentiel entre les supraconducteurs, on observe un courant de dépendance sinusoïdale. Dans le cas où il n'y a pas de différence de potentiel, le courant serait dû à une différence de phase des paramètres d'ordre supraconducteur entre les deux états supraconducteurs (facteur de $\sin \Delta\theta$). Dans le cas où il y a une différence de potentiel entre les supraconducteurs de la jonction Josephson, la dépendance sinusoïdale du courant entre les supraconducteurs serait due à une évolution linéaire de la différence des phases $\Delta\theta$ de ces mêmes paramètres d'ordre supraconducteur. D'un point de vue plus général, cet effet est dû à une brisure de symétrie $U(1)$. Il y aura alors une brisure spontanée d'une des symétries dans l'établissement de la jonction. L'intérêt ici réside dans le fait que, puisque l'effet Josephson n'est pas trivial à première vue, nous pourrions obtenir des effets similaires avec des objets de symétrie interne autre que $U(1)$. On pourrait penser aux systèmes de haute densité se produisant au coeur

des étoiles à neutrons avec une symétrie QPL(Quantum Phase Lock)/supraconducteur-couleur protons/neutrons ou des systèmes de très faible densité où chaque particule de matière a une longueur d'onde suffisante pour se superposer à ses voisines et ainsi créer une sorte d'état hyper lié. Une théorie intéressante à regarder dans cette optique est une théorie $SO(5)$ de Zhang [2] combinant paramètre d'ordre supraconducteur et vecteur antiferromagnétique dans une même entité.

1.2 L'effet Josephson de base

Une bonne connaissance de l'effet Josephson est souhaitable et même nécessaire à l'étude de brisure de groupe de symétrie par effet de proximité. Un des premiers éléments à conceptualiser pour comprendre cet effet est le paramètre d'ordre supraconducteur ψ (ci-après nommé paramètre d'ordre) introduit par la théorie de Ginzburg-Landau [3]. Ce paramètre d'ordre pour cette théorie, pour décrire un supraconducteur, veut que ce paramètre tombe à zéro où il n'y a pas de supraconductivité et soit dépendant de la densité (de paires de Cooper) en grandeur dans un milieu supraconducteur. Dans la théorie microscopique de la supraconductivité BCS , on peut voir ce paramètre d'ordre comme une fonction d'onde sous forme d'un nombre complexe [3]. Elle peut représenter la fonction d'onde au centre de masse d'une paire de Cooper. Les paires de Cooper se superposant l'une sur l'autre de manière extrêmement jointes, cette fonction d'onde représentera alors aussi bien les paires voisines (macroscopiquement) qu'elle-même. Cette fonction d'onde, ne dépendant plus de la position intrinsèque d'une simple paire de Cooper en particulier, peut définir le supraconducteur dans sa totalité. Il n'y a pas de dépendance spatiale pour cette fonction d'onde. Pour le reste de l'étude, nous ne considérerons que les cas où la supraconductivité est considérée parfaite, sans dépendance spatiale à l'intérieur de chaque supraconducteur et où la grandeur de la fonction d'onde/paramètre d'ordre est normalisée à la densité d'électrons $|\psi|^2 = \rho$ du supraconducteur. Ici, seule la grandeur du paramètre d'ordre est fixée (par la normalisation), sa phase est, à priori, aléatoire, mais fixée. On considérera ce paramètre d'ordre comme un champ macroscopique décrivant l'ensemble d'un supraconducteur avec les mêmes

caractéristiques que décrites précédemment. La conservation du paramètre de la phase dans ce paramètre d'ordre indique la conservation de sa quantité conjuguée, le nombre de particules (paires de Cooper). Cette conservation donne au supraconducteur une portée macroscopique. Voilà donc pour le paramètre d'ordre représenté par un nombre complexe de modèle de symétrie $U(1)$:

$$\psi = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}. \quad (1.1)$$

1.3 Formalisme hamiltonien

1.3.1 Equation de Josephson avec approximation standard

Une manière plutôt directe pour découvrir analytiquement cet effet est d'utiliser les fonctions hamiltoniennes pour les supraconducteurs [4, 5, 6]. Dans un montage pour obtenir l'effet Josephson, on se rappelle que l'on place à proximité, sans contact important (c'est important car sinon il y aurait condensation complète et égalisation des phases des paramètres d'ordre de chaque état supraconducteur), deux supraconducteurs distincts (techniquement par une mince couche isolante d'oxyde par exemple). On a donc deux supraconducteurs décrits chacun par un paramètre d'ordre ψ qui lui est propre. Chaque supraconducteur aura donc, pris isolément, un hamiltonien général de la forme :

$$H\psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt} = E\psi \quad (1.2)$$

où E est l'énergie propre de la fonction d'onde du supraconducteur (normalisé).

Pris en système global, ces deux supraconducteurs se perturbent quelque peu.

Leurs fonctions d'onde s'entrelacent en partie dû à leur proximité. Cette perturbation est très faible mais non négligeable (puisqu'on peut observer l'effet Josephson si les deux supraconducteurs sont placés suffisamment près l'un de l'autre). Notons ce facteur de couplage K et prenons le réel (rien ne nous empêche de le prendre ainsi). Le facteur K possède des unités d'énergie et on considérera le terme $\frac{K\Delta t}{\hbar}$ très petit pour un intervalle important de temps Δt . On nomme un supraconducteur G et l'autre D pour fin d'analyse. Les équations deviennent, avec $\psi_G = \sqrt{\rho_G}e^{i\theta_G}$ et $\psi_D = \sqrt{\rho_D}e^{i\theta_D}$ pour la normalisation :

$$i\hbar\frac{d\psi_G}{dt} = E_G\psi_G + K\psi_D \quad (1.3)$$

$$i\hbar\frac{d\psi_D}{dt} = E_D\psi_D + K\psi_G. \quad (1.4)$$

Avec la résolution seule de ces deux équations, il y a production d'un courant entre les deux états supraconducteurs. On va considérer deux nouvelles variables du système, E et V , où $E_G = E + eV$ et $E_D = E - eV$ pour simplifier le cheminement. E correspond à une énergie moyenne du système où l'on observe une différence de potentiel de $2eV$ (ici $2e$ correspond à la charge d'une paire de Cooper (2 électrons) et V la différence de potentiel entre ces paires d'un côté à l'autre de la jonction de Josephson). Une façon rapide de calculer ce courant est de considérer la partie réelle et imaginaire de chaque équation et en considérant une variation temporelle sur chacun des $\rho_{G,D}$ et $\theta_{G,D}$. Les résultats sont :

$$-\hbar\left(\sin\theta_G\frac{\dot{\rho}_G}{2\sqrt{\rho_G}} + \sqrt{\rho_G}\cos\theta_G\dot{\theta}_G\right) = (E + eV)\sqrt{\rho_G}\cos\theta_G + K\sqrt{\rho_D}\cos\theta_D \quad (1.5)$$

$$i\hbar\left(\cos\theta_G\frac{\dot{\rho}_G}{2\sqrt{\rho_G}} - \sqrt{\rho_G}\sin\theta_G\dot{\theta}_G\right) = i(E + eV)\sqrt{\rho_G}\sin\theta_G + iK\sqrt{\rho_D}\sin\theta_D \quad (1.6)$$

$$-\hbar \left(\sin \theta_D \frac{\dot{\rho}_D}{2\sqrt{\rho_D}} + \sqrt{\rho_D} \cos \theta_D \dot{\theta}_D \right) = (E - eV) \sqrt{\rho_D} \cos \theta_D + K \sqrt{\rho_G} \cos \theta_G \quad (1.7)$$

$$i\hbar \left(\cos \theta_D \frac{\dot{\rho}_D}{2\sqrt{\rho_D}} - \sqrt{\rho_D} \sin \theta_D \dot{\theta}_D \right) = i(E - eV) \sqrt{\rho_D} \sin \theta_D + iK \sqrt{\rho_G} \sin \theta_G. \quad (1.8)$$

Par une algèbre de base, on réussit aisément à isoler les termes de dérivée. On obtient alors comme équations utiles qui sont :

$$\dot{\rho}_G = -\dot{\rho}_D = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_G \rho_D} \sin(\theta_D - \theta_G) \quad (1.9)$$

et

$$\dot{\theta}_D - \dot{\theta}_G = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (1.10)$$

Cette dernière équation s'intègre comme :

$$\theta_D - \theta_G = \frac{2eV}{\hbar} t + \Delta\theta_0 \quad (1.11)$$

où $\Delta\theta_0$ est la différence initiale à $t = 0$ des angles $\theta_D - \theta_G$.

La dernière astuce consiste au fait qu'expérimentalement, on prend souvent le même matériel ou des matériaux de densité semblable pour chacun des superconducteurs lors de l'expérience. On approxime alors $\rho_G \approx \rho \approx \rho_D$, où ρ est une constante. Les grandeurs $\frac{\dot{\rho}_G}{\rho_G}$, $\frac{\dot{\rho}_D}{\rho_D}$ étant d'un ordre de $\frac{K}{\hbar}$ très petite pour l'expérience, on peut

considérer l'approximation des densités constantes valide. On obtient donc les équations de Josephson avec différence de potentiel entre les supraconducteurs ($V \neq 0$) ou sans potentiel entre les supraconducteurs ($V = 0$) suivantes :

$$\dot{\rho}_G = -\dot{\rho}_D = \frac{2K}{\hbar} \rho \sin \left(\frac{2eV}{\hbar} t + \Delta\theta_0 \right). \quad (1.12)$$

Il faut noter que l'on considère l'absence de champs magnétiques à la jonction sinon l'utilisation d'un terme K imaginaire entre chaque couplage serait favorisé et posé [5, 6], on ne s'occupe pas de ce cas ici. Dans un cas où un champ magnétique est appliqué à la jonction de Josephson, les équations ne sont pas complètement les mêmes que l'on a décrit précédemment.

1.3.2 Equation de Josephson sans approximation

Dans la section précédente, l'approximation des densités équivalentes, du point de vue expérimental, est très pratique. Elle permet d'arriver à des résultats vérifiables et rapidement dans des cas divers d'expérience jusqu'à maintenant. Mais qu'en est-il si l'approximation ne tient plus. Comme par exemple si l'on considère une situation où la densité varie grandement (exemple imaginé) une couche supraconductrice de proton/superfluide de neutron à l'intérieur d'une étoile à neutron qui est couplée à une couche interne plus dense comportant une symétrie interne (Quantum Phase Lock ou autre réarrangement de matière plus compact), semblable ou différente que la couche supraconductrice de protons/superfluide de neutron.

Une solution exacte est alors nécessaire pour analyser les répercussions d'une telle différence de densité. Reprenons alors nos équations différentielles hamiltoniennes sous forme matricielle :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_G \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E+V & K \\ K & E-V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_G \\ \psi_D \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

qui ont une solution sous la forme exponentielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \psi_G(t) \\ \psi_D(t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} E+V & K \\ K & E-V \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} \psi_{G_0} \\ \psi_{D_0} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Il est bien entendu que si on considère l'objet $\begin{pmatrix} \psi_{G_0} \\ \psi_{D_0} \end{pmatrix} = \Psi$ comme étant un vecteur de fonction d'onde (paramètre d'ordre dans sa globalité), nous ne retrouverons pas l'effet Josephson. En effet, si on considère le $\Psi^\dagger \Psi$ comme une densité, la dépendance temporelle sera anulée par la multiplication de deux exponentielles inverses. C'est un cas qu'il fallait prévoir puisque $\Psi^\dagger \Psi$ nous donne une densité $\rho_G + \rho_D$. Un premier corollaire nous donne que $\dot{\rho}_G = -\dot{\rho}_D$. Dans cette optique, on ne peut donc pas considérer Ψ dans sa totalité puisque l'effet Josephson est décrit par des courants internes d'un tel objet. Il faut donc sortir la solution élément par élément. On obtient comme solution pour la densité de l'état G (pour la densité de l'état D similairement à des signes moins(-) près) :

$$\begin{aligned} \rho_G(t) = & \rho_{G_0} + \frac{K}{\sqrt{V^2 + K^2}} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \sin(\theta_{D_0} - \theta_{G_0}) \sin\left(2 \frac{\sqrt{V^2 + K^2}}{\hbar} t\right) \\ & + \frac{2KV}{V^2 + K^2} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \cos(\theta_{D_0} - \theta_{G_0}) \sin^2\left(\frac{\sqrt{V^2 + K^2}}{\hbar} t\right) \\ & + \frac{K^2}{V^2 + K^2} (\rho_{D_0} - \rho_{G_0}) \sin^2\left(\frac{\sqrt{V^2 + K^2}}{\hbar} t\right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le courant qui est le changement de la densité par unité de temps pour l'état G

(similairement pour l'état D à un signe moins(-) près) est :

$$\begin{aligned}
 j_G = \dot{\rho}_G(t) = & \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \sin(\theta_{D_0} - \theta_{G_0}) \cos\left(2\frac{\sqrt{V^2 + K^2}}{\hbar}t\right) \\
 & + \frac{2KV}{\hbar\sqrt{V^2 + K^2}} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \cos(\theta_{D_0} - \theta_{G_0}) \sin\left(2\frac{\sqrt{V^2 + K^2}}{\hbar}t\right) \\
 & + \frac{K^2}{\hbar\sqrt{V^2 + K^2}} (\rho_{D_0} - \rho_{G_0}) \sin\left(2\frac{\sqrt{V^2 + K^2}}{\hbar}t\right). \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

Ces résultats, bien que solution de l'hamiltonien, ne sont pas très esthétiques. Il faut se rappeler que l'on considère K très très petit dans ses unités (on a posé $\frac{K\Delta t}{\hbar}$ très petit). On peut donc le négliger d'une certaine façon (mais pas trop!) dans les équations, et ce, dépendant dans lequel des cas limites on est en présence, dépendant de la valeur du potentiel V . En effet, il y a deux cas possibles pour le potentiel V , soit il est nul ($V = 0$) ou soit il n'est pas nul ($V \neq 0$). S'il n'est pas nul, on le considérera alors d'un ordre de grandeur supérieur à la constante de couplage K (qui est très faible). On a donc deux cas différents.

Pour le cas sans potentiel, l'équation devient :

$$\begin{aligned}
 j_G = & \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \sin(\theta_{D_0} - \theta_{G_0}) \cos\left(2\frac{K}{\hbar}t\right) \\
 & + K (\rho_{D_0} - \rho_{G_0}) \sin\left(2\frac{K}{\hbar}t\right). \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Les termes $\frac{K}{\hbar}t$ étant très petits dans les fonctions cosinusoidales, on les néglige. Donc, $\cos\left(2\frac{K}{\hbar}t\right) \approx 1$ et $K \sin\left(2\frac{K}{\hbar}t\right) \approx 2\frac{K^2}{\hbar}t \approx 0$.

L'équation

$$j_G = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \sin(\theta_{D_0} - \theta_{G_0}) \quad (1.18)$$

est celle de Josephson du courant du supraconducteur G.

Dans le cas avec potentiel, on obtient :

$$j_G = \dot{\rho}_G(t) = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_{G_0} \rho_{D_0}} \sin\left(\theta_{D_0} - \theta_{G_0} + 2\frac{V}{\hbar}t\right). \quad (1.19)$$

Alors maintenant, on a montré que la différence de densité entre les états n'a pas vraiment de répercussion vérifiable sur les courants que l'on obtient, et ce, pour des temps courts (à l'exception qui si on réussisse à maintenir sur de très longs temps cette jonction sans la perturber).

On peut considérer un "contact" plus intense entre les deux systèmes. On ne pourra plus considérer le terme de couplage K du système comme étant très petit (par rapport aux variables du système) alors il faut garder tout de même les équations générales hamiltoniennes en tête. Au moins pour tenir compte des cas atypiques qui ne se produisent pas dans les supraconducteurs. Il faut se rappeler que si les supraconducteurs sont suffisamment proches l'un de l'autre avec une surface de contact suffisamment grande, les deux supraconducteurs condenseront complètement dans un seul et même état de minimum, donc d'une même phase et que l'on ne pourra plus parler de jonction de Josephson. En effet, il n'y aura plus de différence de phase, donc l'équation du courant pour le cas où il n'y a pas de différence de potentiel entre les supraconducteurs de part et d'autre de la jonction de Josephson tombera à zéro. S'il y avait une différence de potentiel, elle sera redistribuée uniformément sur l'ensemble des deux supraconducteurs par un courant électrodynamique classique et ainsi annihiler toute différence de potentiel, auquel cas on revient au cas où il n'y a pas de différence de potentiel et avec une différence de phase nulle, il n'y a tout simplement pas de courant de Josephson.

CHAPITRE 2

Système général de brisure de symétrie

2.1 Ouverture vers d'autres symétries

On a vu précédemment des manières de concevoir l'effet de Josephson produit par une jonction de Josephson sous une théorie supraconductrice avec un paramètre d'ordre comme on a défini. On a utilisé le formalisme hamiltonien qui comprend une fonction d'onde qui décrit les deux côtés. Il est important de reconnaître que le paramètre d'ordre, en effet, n'est pas une fonction d'onde, mais la valeur moyenne d'un champ effectif. Cela donne l'indice comment généraliser l'effet de Josephson aux situations plus complexes, non-abéliennes par exemple. Un champ effectif devrait capter la symétrie sous-jacente. Selon la théorie Ginzburg-Landau, on développe l'énergie libre[7] en fonction du paramètre d'ordre. Avec l'ajout des termes cinétiques, le paramètre d'ordre devient un champ dynamique. Cela nous amène inévitablement vers un formalisme lagrangien de champ effectif.

Pour un champ réel, on prend :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_t \psi)^2 + 2a^2 \lambda \psi^2 - \lambda \psi^4 - a^4 \lambda = (\partial_t \psi)^2 - \lambda (\psi^2 - a^2)^2. \quad (2.1)$$

Pour un champ complexe, on prend :

$$\mathcal{L} = (\partial_t \psi)^\dagger (\partial_t \psi) - \lambda (\psi^\dagger \psi - a^2)^2. \quad (2.2)$$

Ici le champ effectif ψ n'est visiblement pas à son minimum lorsqu'il atteint une valeur nulle. Il a plutôt tendance à se maintenir à une grandeur de a . On se rappelle que le paramètre d'ordre supraconducteur, selon les théories, apparaît (dans un sens, en grandeur) avec la supraconductivité et comporte une phase. Cela ressemble bien aux caractéristiques de la fonction ψ de cette densité lagrangienne. Le paramètre d'ordre a une grandeur fixe (rappelons qu'on l'a normalisé à la densité, $\rho = \psi^\dagger \psi$ dans une théorie de symétrie $U(1)$). La phase du paramètre d'ordre se perd dans le carré du champ, elle n'est donc pas spécifiquement définie. En fixant la phase, sa symétrie est brisée. Cette théorie est plutôt intéressante du point de vue où l'on peut permettre les symétries que l'on veut bien imposer dans un modèle de paramètre d'ordre. Seule la grandeur est contrainte au minimum et le(s) phase(s) n'est (ne sont) pas spécifiquement définie(s). On va toujours considérer que le paramètre λ est très grand, tel que les fluctuations de l'amplitude de ψ sont très massives.

2.2 Vérification du procédé lagrangien

Pour arriver à obtenir l'effet Josephson avec ce cheminement, il faut modéliser une jonction. On prendra pour commencer une symétrie supraconductrice de type $U(1)$. Il faudra obtenir des équations équivalentes pour le courant produit pour valider ce procédé. Pour ce faire, on considère un premier supraconducteur, que l'on nommera G défini par la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L}_G = (\partial_t \psi_G)^\dagger (\partial_t \psi_G) - \lambda (\psi_G^\dagger \psi_G - a^2)^2. \quad (2.3)$$

On considère un deuxième supraconducteur, que l'on nommera D défini par la densité

lagrangienne comme étant :

$$\mathcal{L}_D = (\partial_t \psi_D)^\dagger (\partial_t \psi_D) - \lambda \left(\psi_D^\dagger \psi_D - a^2 \right)^2. \quad (2.4)$$

Les paramètres λ , a , sont les paramètres décrivant chacun de ces supraconducteurs. On prendra les mêmes paramètres pour les deux systèmes ; on les prend au même potentiel. Les champs ψ_G et ψ_D sont définis de la même manière que dans le formalisme hamiltonien soit par une description des champs par $\psi_G = \sqrt{\rho_G} e^{i\theta_G}$ et $\psi_D = \sqrt{\rho_D} e^{i\theta_D}$.

Le modèle comprenant ces deux termes lagrangiens comporte une symétrie double $U(1) \times U(1)$. Pour décrire l'effet Josephson dans cette théorie, on ajoute un terme d'interaction entre les champs en jeu posés par la densité lagrangienne d'interaction suivante :

$$\mathcal{L}_{int} = K^2 \left(\psi_G^\dagger \psi_D + \psi_D^\dagger \psi_G \right) \quad (2.5)$$

où le terme K^2 est la constante de couplage entre les deux états supraconducteurs et est définie positive, d'unité $1/\text{temps}^2$ (les facteurs \hbar sont absorbés dans ce terme). La grandeur de K est telle que le scalaire $K\Delta t$ est très petit pour un Δt de l'ordre de la durée de l'expérience.

La jonction de Josephson sera définie par la densité lagrangienne totale suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Josephson} &= \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int} \\ &= (\partial_t \psi_G)^\dagger (\partial_t \psi_G) - \lambda \left(\psi_G^\dagger \psi_G - a^2 \right)^2 \\ &\quad + (\partial_t \psi_D)^\dagger (\partial_t \psi_D) - \gamma \left(\psi_D^\dagger \psi_D - a^2 \right)^2 \\ &\quad + K^2 \left(\psi_G^\dagger \psi_D + \psi_D^\dagger \psi_G \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

La symétrie de base du système non couplé $U(1) \times U(1)$ est brisée par le terme d'interaction en une symétrie $U(1)$. Le minimum effectif du potentiel suit, pour chaque champs ψ , les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \quad (2.7)$$

où V sont les termes de potentiels de la densité lagrangienne.

On réécrit les champs sous forme :

$$\psi_G = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{G_{Re}} + i\psi_{G_{Im}}) \quad (2.8)$$

$$\psi_D = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{D_{Re}} + i\psi_{D_{Im}}) \quad (2.9)$$

où $\psi_{G_{Re}}, \psi_{G_{Im}}, \psi_{D_{Re}}, \psi_{D_{Im}}$ sont réels.

Les équations qui respectent le minimum sont :

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_{G_{Re}}} = 2\lambda \left(\frac{\psi_{G_{Re}}^2 + \psi_{G_{Im}}^2}{2} - a^2 \right) \psi_{G_{Re}} - K^2 \psi_{D_{Re}} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_{G_{Im}}} = 2\lambda \left(\frac{\psi_{G_{Re}}^2 + \psi_{G_{Im}}^2}{2} - a^2 \right) \psi_{G_{Im}} - K^2 \psi_{D_{Im}} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_{D_{Re}}} = 2\lambda \left(\frac{\psi_{D_{Re}}^2 + \psi_{D_{Im}}^2}{2} - a^2 \right) \psi_{D_{Re}} - K^2 \psi_{G_{Re}} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_{D_{Im}}} = 2\lambda \left(\frac{\psi_{D_{Re}}^2 + \psi_{D_{Im}}^2}{2} - a^2 \right) \psi_{D_{Im}} - K^2 \psi_{D_{Im}} = 0. \quad (2.13)$$

Les minimums se trouvent à :

$$\psi_G = \left(a + \frac{K^2}{2\lambda a} \right) e^{i\theta} \quad (2.14)$$

$$\psi_D = \left(a + \frac{K^2}{2\lambda a} \right) e^{i\theta} \quad (2.15)$$

ou θ est un angle (le même pour les deux équations) qui brise la symétrie en privilégiant une direction dans le système.

Bien sûr, les systèmes que l'on traite avec une jonction de Josephson n'ont pas la même différence de phase en général. On va considérer que le système initial (à différence de phases quelconque) est près du minimum du système combiné des deux supraconducteurs, les deux systèmes étant préalablement à leur minimum (non couplés) respectif. On choisit ce minimum dans la direction $\theta = 0$. En développement de Taylor près du minimum, il ne reste que les termes d'ordre zéro et deux. On aura donc droit au système quadratique :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\psi_{G_{Re}} \partial_t^2 \psi_{G_{Re}} + \psi_{G_{Im}} \partial_t^2 \psi_{G_{Im}} + \psi_{D_{Re}} \partial_t^2 \psi_{D_{Re}} + \psi_{D_{Im}} \partial_t^2 \psi_{D_{Im}}) \\
 & - \left(2\lambda \left(\frac{\psi_{G_{Re},min}^2 + \psi_{G_{Im},min}^2}{2} - a^2 \right) + 2\lambda \psi_{G_{Re},min}^2 \right) \frac{(\psi_{G_{Re}} - \psi_{G_{Re},min})^2}{2!} \\
 & - \left(2\lambda \left(\frac{\psi_{G_{Re},min}^2 + \psi_{G_{Im},min}^2}{2} - a^2 \right) + 2\lambda \psi_{G_{Im},min}^2 \right) \frac{(\psi_{G_{Im}} - \psi_{G_{Im},min})^2}{2!} \\
 & - \left(2\lambda \left(\frac{\psi_{D_{Re},min}^2 + \psi_{D_{Im},min}^2}{2} - a^2 \right) + 2\lambda \psi_{D_{Re},min}^2 \right) \frac{(\psi_{D_{Re}} - \psi_{D_{Re},min})^2}{2!} \\
 & - \left(2\lambda \left(\frac{\psi_{D_{Re},min}^2 + \psi_{D_{Im},min}^2}{2} - a^2 \right) + 2\lambda \psi_{D_{Im},min}^2 \right) \frac{(\psi_{D_{Im}} - \psi_{D_{Im},min})^2}{2!} \\
 & + K^2 \frac{(\psi_{G_{Re}} - \psi_{G_{Re},min})(\psi_{D_{Re}} - \psi_{D_{Re},min})}{2!} \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

$$+ K^2 \frac{(\psi_{G_{Im}} - \psi_{G_{Im},min})(\psi_{D_{Im}} - \psi_{D_{Im},min})}{2!}. \tag{2.17}$$

On a posé la direction $\theta = 0$. On prendra alors $\psi_{G_{Im}} = 0$ et $\psi_{D_{Im}} = 0$. Les équations au minimum sont (à l'ordre K^2) :

$$\psi_{G_{Re},min}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{K^2}{\lambda}$$

$$\psi_{D_{Re},min}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{K^2}{\lambda}.$$

Il suffit de trouver les valeurs et vecteurs propres afin de trouver les modes propres et leurs fréquences respectives de ce système. On peut réécrire alors les équations du second ordre des potentiels sous la forme matricielle :

$$\begin{array}{c} \tilde{\psi}_{G_{Re}} \\ \tilde{\psi}_{G_{Im}} \\ \tilde{\psi}_{D_{Re}} \\ \tilde{\psi}_{D_{Im}} \end{array} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{G_{Re}} & \tilde{\psi}_{G_{Im}} & \tilde{\psi}_{D_{Re}} & \tilde{\psi}_{D_{Im}} \\ \frac{K^2}{2} + \lambda\psi_{G_{Re},min}^2 & 0 & -\frac{K^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{K^2}{2} & 0 & -\frac{K^2}{2} \\ -\frac{K^2}{2} & 0 & \frac{K^2}{2} + \lambda\psi_{D_{Re},min}^2 & 0 \\ 0 & -\frac{K^2}{2} & 0 & \frac{K^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

avec la notation $\tilde{\psi}_{X_N} = \psi_{X_N} - \psi_{X_N,min}$ où $\psi_{X_N,min}$ est une valeur constante et $X = \{G, D\}$, $N = \{Re, Im\}$. Il va de soit qu'avec une telle notation que l'on ait :

$$\tilde{\psi}_{G_{Im}} = \psi_{G_{Im}} \quad (2.19)$$

$$\tilde{\psi}_{D_{Im}} = \psi_{D_{Im}}. \quad (2.20)$$

Le système à valeurs et vecteurs propres sera le suivant :

$$\begin{array}{c} v_1 = \tilde{\psi}_{G_{Re}} - \tilde{\psi}_{D_{Re}} \\ v_2 = \tilde{\psi}_{G_{Im}} - \tilde{\psi}_{D_{Im}} \\ v_3 = \tilde{\psi}_{G_{Re}} + \tilde{\psi}_{D_{Re}} \\ v_4 = \tilde{\psi}_{G_{Im}} + \tilde{\psi}_{D_{Im}} \end{array} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{G_{Re}} - \tilde{\psi}_{D_{Re}} & \tilde{\psi}_{G_{Im}} - \tilde{\psi}_{D_{Im}} & \tilde{\psi}_{G_{Re}} + \tilde{\psi}_{D_{Re}} & \tilde{\psi}_{G_{Im}} + \tilde{\psi}_{D_{Im}} \\ 2\lambda a^2 + 2K^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda a^2 + K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

De ce système à valeurs propres et vecteurs propres, il faut ajouter les termes des dérivées temporelles des champs qu'on a mis en suspens. On n'a alors qu'à remodeler ces termes comme :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\psi_i\partial_t^2\psi_i &= -\frac{1}{4}(\psi_{G_{Re}} + \psi_{D_{Re}})\partial_t^2(\psi_{G_{Re}} + \psi_{D_{Re}}) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\psi_{G_{Re}} - \psi_{D_{Re}})\partial_t^2(\psi_{G_{Re}} - \psi_{D_{Re}}) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\psi_{G_{Im}} + \psi_{D_{Im}})\partial_t^2(\psi_{G_{Im}} + \psi_{D_{Im}}) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\psi_{G_{Im}} - \psi_{D_{Im}})\partial_t^2(\psi_{G_{Im}} - \psi_{D_{Im}})
\end{aligned} \tag{2.22}$$

pour $i \in \{G_{Re}, G_{Im}, D_{Re}, D_{Im}\}$.

Les équations du mouvement pour chaque partie du lagrangien \mathcal{L} sont :

$$0 = \frac{1}{4}\partial_t^2(\tilde{\psi}_{G_{Re}} - \tilde{\psi}_{D_{Re}}) + (4\lambda a^2 + 2K^2)(\tilde{\psi}_{G_{Re}} - \tilde{\psi}_{D_{Re}}) \tag{2.23}$$

$$0 = \frac{1}{4}\partial_t^2(\tilde{\psi}_{G_{Im}} - \tilde{\psi}_{D_{Im}}) + K^2(\tilde{\psi}_{G_{Im}} - \tilde{\psi}_{D_{Im}}) \tag{2.24}$$

$$0 = \frac{1}{4}\partial_t^2(\tilde{\psi}_{G_{Re}} + \tilde{\psi}_{D_{Re}}) + (4\lambda a^2 + K^2)(\tilde{\psi}_{G_{Re}} + \tilde{\psi}_{D_{Re}}) \tag{2.25}$$

$$0 = \frac{1}{4}\partial_t^2(\tilde{\psi}_{G_{Im}} + \tilde{\psi}_{D_{Im}}) \tag{2.26}$$

qui possèdent des solutions de la forme :

$$v_1 = \tilde{\psi}_{G_{Re}} - \tilde{\psi}_{D_{Re}} \sim \sin\left(2\sqrt{4\lambda a^2 + 2K^2}t - t_0\right) \quad (2.27)$$

$$v_2 = \tilde{\psi}_{G_{Im}} - \tilde{\psi}_{D_{Im}} \sim \sin(2Kt - t_0) \quad (2.28)$$

$$v_3 = \tilde{\psi}_{G_{Re}} + \tilde{\psi}_{D_{Re}} \sim \sin\left(2\sqrt{4\lambda a^2 + K^2}t - t_0\right) \quad (2.29)$$

$$v_4 = \tilde{\psi}_{G_{Im}} + \tilde{\psi}_{D_{Im}} \sim At + B \quad (2.30)$$

où A et B sont des constantes.

On observe que les vecteurs propres $v_1 = \tilde{\psi}_{G_1} - \tilde{\psi}_{D_1}$ et $v_3 = \tilde{\psi}_{G_1} + \tilde{\psi}_{D_1}$ oscillent d'une fréquence près de $4\sqrt{\lambda}a$. Ces fréquences sont trop rapides pour qu'on puisse les considérer dans le formalisme avec des champs effectifs, le λ étant toujours pris très grand. Le quatrième vecteur propre ne permet que des déplacements linéaires. C'est dans cette direction, v_4 , que la symétrie $U(1)$ restante du modèle intervient. Il y a création de bosons de Goldstone qui ne correspondent pas à une oscillation. En fait, ce boson de Goldstone est incorporé par le mécanisme de Higgs dans le photon qui devient massif lors d'une interaction entre le supraconducteur et un champ électromagnétique. Cela se manifeste physiquement dans l'effet Meissner.

Dans la direction du vecteur v_2 , il y a une très faible variation dans le temps (d'ordre relatif à K), mais elle n'est pas nulle. Le fait que la fréquence d'oscillation est très faible, on peut qualifier la direction du vecteur v_2 de pseudo-Goldstone, c'est la symétrie qui a été explicitement brisée dans le modèle lors du couplage. De $U(1) \times U(1)$ on est tombé à seulement $U(1)$ avec la présence de l'interaction. C'est de cette direction, par cette faible oscillation, que l'effet Josephson naît.

De ces éléments, il faut tirer les quantités physiques que l'on peut observer, soit la densité de charge et le courant. La densité de charge se définit comme :

$$Q_G = q \left(\psi_{G_{Re}} \dot{\psi}_{G_{Im}} - \psi_{G_{Im}} \dot{\psi}_{G_{Re}} \right) \quad (2.31)$$

$$Q_D = q \left(\psi_{D_{Re}} \dot{\psi}_{D_{Im}} - \psi_{D_{Im}} \dot{\psi}_{D_{Re}} \right) \quad (2.32)$$

où q est la grandeur de couplage de la charge.

Les oscillations des termes v_1 et v_3 , près de leur fréquence normale, ne peuvent pas vraiment être excitées, le formalisme du lagrangien effectif étant valable seulement pour des basses énergies. Seuls les termes v_2 et v_4 possèdent des oscillations de fréquence d'ordre observable. De la conservation de la quantité de paires de Cooper, on a que $\dot{Q}_G + \dot{Q}_D = 0$ alors $Q = Q_G + Q_D = \text{const.}$ On posera la charge totale nulle, donc $Q = 0$.

Les équations de charge deviennent:

$$Q_G = q \left(\tilde{\psi}_{G_{Re}} + \psi_{G_{Re,\min}} \right) \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} - q \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Re}} \tilde{\psi}_{G_{Im,\min}} \rightarrow q \psi_{G_{Re,\min}} \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} \quad (2.33)$$

$$Q_D = q \left(\tilde{\psi}_{D_{Re}} + \psi_{D_{Re,\min}} \right) \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}} - q \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Re}} \tilde{\psi}_{D_{Im,\min}} \rightarrow q \psi_{D_{Re,\min}} \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}}. \quad (2.34)$$

On a trouvé que $\psi_{G_{Re,\min}} = \psi_{D_{Re,\min}}$, alors on considère l'équation :

$$\begin{aligned} Q &= q \psi_{G_{Re,\min}} \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} + q \psi_{D_{Re,\min}} \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}} \\ &= q \psi_{G_{Re,\min}} \left(\dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} + \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}} \right) \\ &= 0 \Rightarrow \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} = -\dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

On peut alors trouver la forme explicite des vecteurs propres v_2 et v_4 par les calculs suivant :

$$v_4 = \tilde{\psi}_{G_{Im}} + \tilde{\psi}_{D_{Im}} = At + B \rightarrow \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} + \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}} = A \Rightarrow A = 0 \quad (2.36)$$

$$v_2|_0 = \tilde{\psi}_{G_{Im}}|_0 - \tilde{\psi}_{D_{Im}}|_0 = (\psi_{G_{Im}}|_0 - \psi_{D_{Im}}|_0)$$

$$\Rightarrow v_2 = \tilde{\psi}_{G_{Im}} - \tilde{\psi}_{D_{Im}} = |\psi_{G_{min}}| \sin(2Kt - t_0) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{v}_2 &= \dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} - \dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}} = 2K|\psi_{G_{min}}| \cos(2Kt - t_0) \\ &= 2\dot{\tilde{\psi}}_{G_{Im}} = -2\dot{\tilde{\psi}}_{D_{Im}} = 2K|\psi_{G_{min}}| \cos(2Kt - t_0) \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $|\psi_{G_{min}}|$ est la grandeur du champ au minimum et $|\psi_{G_{min}}| \sin(-t_0) = \psi_{G_{Im}}|_0 - \psi_{D_{Im}}|_0$.

La densité de charge aura donc la forme :

$$Q_G = -Q_D = 2Kq|\psi_{G_{min}}|^2 \cos(2Kt - t_0) \quad (2.39)$$

et le courant de charge aura la forme (en dérivant) :

$$\dot{Q}_G = -\dot{Q}_D = -4K^2q|\psi_{G_{min}}|^2 \sin(2Kt - t_0). \quad (2.40)$$

Le terme $2Kt$ est considéré très petit $\sin(2Kt - t_0) \rightarrow \sin t_0$.

On a alors retrouvé les équations de Josephson pour un courant de charge dans le cas sans potentiel. Les oscillations des directions pseudo-Goldstone en sont la cause.

2.3 Tentative de nouvelles symétries, méthode de poser le couplage

Le premier problème pour analyser les systèmes de symétrie supérieure est la façon de poser le couplage. De base, on a considéré le couplage comme $K^2 (\psi_G^\dagger \psi_D + \psi_D^\dagger \psi_G)$ qui s'exprime comme $K^2 (\vec{\psi}_G \cdot \vec{\psi}_D)$. Pour le système de symétrie $SO(2)$, on a utiliser un terme $K^2 \psi_G \cdot \psi_D$ tout simplement. Une première méthode de couplage arbitraire serait de généraliser cela à $K \psi_{G_i} M_{ij} \psi_{D_j}$ où M_{ij} est un tenseur quelconque. Par contre, les deux états de symétrie étant très près l'un de l'autre physiquement, le tenseur M devrait être, à priori, le plus simple possible. Dans le cas où les deux symétries (constitutrices du système non couplé) sont les mêmes, l'utilisation du produit scalaire sous sa forme la plus simple est alors de mise. Dans un système où la symétrie n'est pas la même de part et d'autre, il faut penser à une forme d'interaction la plus simple pour espérer approximer la physique d'une telle jonction.

2.4 Modèle de jonction d'un modèle de symétries $U(2) \times SO(3)$

Afin de voir ce qui pourrait se passer dans un système de modèle où d'autres symétries entrent en jeu, on va considérer un nouveau cas de jonction. Cette jonction comportera deux états représentés chacun dans un modèle de symétrie (supraconducteur ou autre ayant les caractéristiques présentées) pouvant être représentés par des champs indépendants de l'espace (dans leur milieu respectif) et ayant une valeur non nulle à leur minimum respectif. Ces états de modèles de symétries seront placés dans une position de leur minimum. Bref, les mêmes conditions que l'on a posées auparavant. On supposera que le premier état, que l'on appellera G et représenté par un champ ψ (doublet complexe), s'inclut dans un modèle de symétrie que l'on dit $U(2)$ et que le deuxième état, que l'on appellera D et représenté par un champ ϕ (triplet réel), s'inclut dans un modèle de symétrie que l'on dit $SO(3)$.

Le premier modèle de symétrie, pour l'état G, aura un lagrangien de la forme :

$$\mathcal{L}_G = (\partial_t \psi)^\dagger (\partial_t \psi) - \lambda (\psi^\dagger \psi - a^2)^2. \quad (2.41)$$

Le deuxième modèle de symétrie, pour l'état D, de la forme :

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} |\partial_t \vec{\phi}|^2 - \gamma (|\vec{\phi}|^2 - v^2)^2. \quad (2.42)$$

Les constantes λ , γ , v et a sont les paramètres décrivant indépendamment chaque modèle.

On place maintenant ces deux états, G et D, très près l'un de l'autre. Il y aura alors un terme d'interaction (faible) entre ces deux états. On posera ce terme K^2 où $K^2 a \Delta t$ négligeable pour un intervalle de temps Δt appréciable. Il faut maintenant définir la forme du terme de couplage la plus appropriée. On va définir un couplage entre les deux termes du doublet ψ et les trois termes du triplet ϕ . On prendra un couplage de type :

$$\mathcal{L}_{int} = -K^2 (\psi^\dagger \vec{\sigma} \psi) \cdot \vec{\phi} \quad (2.43)$$

où $\vec{\sigma}$ est le vecteur des matrices de Pauli.

Un terme d'interaction comme celui-là a l'avantage de garder ce terme réel et de coupler le système de façon simple et complet sur chaque élément des champs. Il permet aussi de garder une symétrie $U(1)$ au système G, en effet, tout changement de la phase $e^{i\theta} \psi$ traverse le vecteur des matrices de Pauli $\vec{\sigma}$ pour s'annuler ($K^2 (\psi^\dagger e^{-i\theta} \vec{\sigma} e^{i\theta} \psi) \cdot \vec{\phi} = K^2 (\psi^\dagger (1) \vec{\sigma} \psi) \cdot \vec{\phi}$). Il y a donc là une première symétrie $U(1)$ du système G qui est

conservée après la jonction.

Le lagrangien représentant le système de jonction est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{tot} &= \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int} \\
&= (\partial_t \psi)^\dagger (\partial_t \psi) - \lambda (\psi^\dagger \psi - a^2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} |\partial_t \vec{\phi}|^2 - \gamma (|\vec{\phi}|^2 - v^2)^2 \\
&\quad - K^2 (\psi^\dagger \vec{\sigma} \psi) \cdot \vec{\phi}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

On prendra $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{1r} + i\psi_{1i} \\ \psi_{2r} + i\psi_{2i} \end{pmatrix}$ et $\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ où $\psi_{1r}, \psi_{1i}, \psi_{2r}, \psi_{2i}, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ tous réels. On utilisera la notation $\vec{\psi} = (\psi_{1r}, \psi_{1i}, \psi_{2r}, \psi_{2i})^T$.

On obtient les équations pour trouver le minimum effectif du potentiel et elles sont :

$$\frac{\partial_t V}{\partial \psi_{1r}} = 2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}|^2 - a^2 \right) \psi_{1r} + K^2 (\psi_{2r} \phi_1 + \psi_{2i} \phi_2 + \psi_{1r} \phi_3) = 0 \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial_t V}{\partial \psi_{1i}} = 2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}|^2 - a^2 \right) \psi_{1i} + K^2 (\psi_{2i} \phi_1 - \psi_{2r} \phi_2 + \psi_{1i} \phi_3) = 0 \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial_t V}{\partial \psi_{2r}} = 2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}|^2 - a^2 \right) \psi_{2r} + K^2 (\psi_{1r} \phi_1 - \psi_{1i} \phi_2 - \psi_{2r} \phi_3) = 0 \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial_t V}{\partial \psi_{2i}} = 2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}|^2 - a^2 \right) \psi_{2i} + K^2 (\psi_{1i} \phi_1 + \psi_{1r} \phi_2 - \psi_{2i} \phi_3) = 0 \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial_i V}{\partial \phi_1} = 4\gamma \left(|\vec{\phi}|^2 - v^2 \right) \phi_1 + K^2 (\psi_{1r} \psi_{2r} + \psi_{1i} \psi_{2i}) = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial_i V}{\partial \phi_2} = 4\gamma \left(|\vec{\phi}|^2 - v^2 \right) \phi_2 + K^2 (\psi_{1r} \psi_{2i} - \psi_{2r} \psi_{1i}) = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial_i V}{\partial \phi_3} = 4\gamma \left(|\vec{\phi}|^2 - v^2 \right) \phi_3 + \frac{K^2}{2} (\psi_{1r}^2 + \psi_{1i}^2 - \psi_{2r}^2 - \psi_{2i}^2) = 0. \quad (2.51)$$

On peut prendre, au minimum des champs, les paramètres ψ_{1r} , ψ_{1i} , ψ_{2i} , ϕ_1 , ϕ_2 nuls. Au minimum, les champs non nuls restants sont, en négligeant les termes d'ordre supérieur à K^2 :

$$|\vec{\psi}|^2 = \psi_{2r}^2 = 2a^2 + \frac{K^2 v}{\lambda} \quad (2.52)$$

$$|\vec{\phi}|^2 = \phi_3^2 = v^2 + \frac{K^2 a^2}{4\gamma v}. \quad (2.53)$$

On développe le potentiel du système de jonction en série de Taylor près du minimum. On suppose que les champs sont près de leurs valeurs minimales de telle manière que l'on peut négliger les termes d'ordre supérieur à 2 dans un développement de Taylor. On obtiendra alors les fréquences des modes propres pour des petites oscillations du système de jonction. Le potentiel effectif devient alors (avec simplification pour les termes de champs nuls au minimum):

$$\begin{aligned}
 V = & \left(2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}_{min}|^2 - a^2 \right) + K^2 \phi_{3min} \right) \frac{(\psi_{1r})^2}{2!} \\
 & \left(2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}_{min}|^2 - a^2 \right) + K^2 \phi_{3min} \right) \frac{(\psi_{1i})^2}{2!} \\
 & \left(2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}_{min}|^2 - a^2 \right) + 2\lambda \psi_{2r}^2 - K^2 \phi_{3min} \right) \frac{(\psi_{2r} - \psi_{2rmin})^2}{2} \\
 & \left(2\lambda \left(\frac{1}{2} |\vec{\psi}_{min}|^2 - a^2 \right) - K^2 \phi_{3min} \right) \frac{(\psi_{2i})^2}{2} \\
 & 4\gamma \left(|\vec{\phi}_{min}|^2 - v^2 \right) \frac{(\phi_1)^2}{2!} \\
 & 4\gamma \left(|\vec{\phi}_{min}|^2 - v^2 \right) \frac{(\phi_2)^2}{2!} \\
 & \left(4\gamma \left(|\vec{\phi}_{min}|^2 - v^2 \right) + 8\gamma \phi_{3min}^2 \right) \frac{(\phi_3 - \phi_{3min})^2}{2!} \\
 & K^2 \psi_{2rmin} \frac{2(\psi_{1r})(\phi_1)}{2!} \\
 & - K^2 \psi_{2rmin} \frac{2(\psi_{1i})(\phi_2)}{2!} \\
 & - K^2 \psi_{2rmin} \frac{2(\psi_{2r} - \psi_{2rmin})(\phi_3 - \phi_{3min})}{2!}. \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

On prend la notation $\tilde{\psi}_{Nx} = \psi_{Nx} - \psi_{Nxmin}$ et $\tilde{\phi}_N = \phi_N - \phi_{Nmin}$. De l'équation (2.54) on constate que l'on peut former quatre (4) sous-groupes d'équation. Les champs $\{\psi_{1r}$ et $\phi_1\}$, $\{\psi_{1i}$ et $\phi_2\}$, $\{\psi_{2r}$ et $\phi_3\}$, $\{\psi_{2i}\}$ n'interagissent qu'entre eux sans toucher les autres champs. On peut, de même, séparer les termes de dérivée que l'on a mis de côté pour chacun des éléments des champs définis par :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} |\partial_t \vec{\psi}|^2 + \frac{1}{2} |\partial_t \vec{\phi}|^2 = & \frac{1}{2} \psi_{1r} \partial_t^2 \psi_{1r} + \frac{1}{2} \psi_{1i} \partial_t^2 \psi_{1i} + \frac{1}{2} \psi_{2r} \partial_t^2 \psi_{2r} + \frac{1}{2} \psi_{2i} \partial_t^2 \psi_{2i} \\
 & + \frac{1}{2} \phi_1 \partial_t^2 \phi_1 + \frac{1}{2} \phi_2 \partial_t^2 \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_3 \partial_t^2 \phi_3. \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Il va de soit que les termes de forme $\partial_t^2 \tilde{\Psi} = \partial_t^2 \tilde{\Psi}$ où $\tilde{\Psi}$ est un champ. On va séparer le potentiel effectif obtenu en plusieurs potentiels effectifs de ces sous-systèmes (on peut

le faire, le lagrangien peut se séparer de la même manière). On va considérer que les valeurs caractéristiques de chaque état de modèle de symétrie isolé soient les mêmes ; $v = a$, $\gamma = \lambda$. Les sous-systèmes de potentiel sont, sous forme matricielle :

$$V_{1r,1} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1r} & \tilde{\phi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^2 a & \frac{1}{\sqrt{2}} K^2 a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} K^2 a & \frac{1}{2} K^2 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1r} \\ \tilde{\phi}_1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$V_{1i,2} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1i} & \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^2 a & -\frac{1}{\sqrt{2}} K^2 a \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} K^2 a & \frac{1}{2} K^2 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1i} \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$V_{2r,3} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{2r} & \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda a^2 + K^2 a & -\frac{1}{\sqrt{2}} K^2 a \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} K^2 a & 4\lambda a^2 + 2K^2 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{2r} \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$V_{2i} = 0. \quad (2.59)$$

Le système à vecteurs propres et fréquence est :

$$v_1 = \tilde{\psi}_{1r} - \sqrt{2}\tilde{\phi}_1 \quad (2.60)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad (2.61)$$

$$v_2 = \sqrt{2}\tilde{\psi}_{1r} + \tilde{\phi}_1 \quad (2.62)$$

$$\lambda_2 = K^2 a \quad (2.63)$$

$$v_3 = \tilde{\psi}_{1i} + \sqrt{2}\tilde{\phi}_2 \quad (2.64)$$

$$\lambda_3 = 0 \quad (2.65)$$

$$v_4 = \sqrt{2}\tilde{\psi}_{1i} - \tilde{\phi}_2 \quad (2.66)$$

$$\lambda_4 = K^2 a \quad (2.67)$$

$$v_5 = 2\sqrt{2}\lambda a\tilde{\psi}_{2r} + K^2\tilde{\phi}_3 \quad (2.68)$$

$$\lambda_5 = 2\lambda a^2 + K^2 a - \frac{K^4}{4\lambda} \quad (2.69)$$

$$v_6 = -K^2\tilde{\psi}_{2r} + 2\sqrt{2}\lambda a\tilde{\phi}_3 \quad (2.70)$$

$$\lambda_6 = 4\lambda a^2 + 2K^2 a + \frac{K^4}{4\lambda} \quad (2.71)$$

$$v_7 = \tilde{\psi}_{2i} \quad (2.72)$$

$$\lambda_7 = At + B \quad (2.73)$$

où A et B sont des constantes.

Les vecteurs v_1, v_3, v_7 , ayant des fréquences nulles, il y a donc création de 3 bosons de Goldstone dans le système, un pour chacune de ces directions vectorielles. Les vecteurs v_2, v_4 , possèdent des fréquences très faibles. On peut considérer que dans ces directions, il y a presque la création de bosons de Goldstone. On dira de leur direction qu'elle est pseudo-Goldstone. Il n'y a que dans deux directions, v_5 et v_6 , où l'on n'obtient pas de tels bosons. Comme pour le système $SO(2) \times SO(2)$ étudié dans une section précédente, on s'attend à ce que le courant (de Josephson), entre les états G et D, provienne des directions pseudo-Goldstone.

Les équations de la charge s'obtiennent par le théorème de Noether. Le courant de Josephson est un courant interne du système de jonction. Il faut donc alors considérer les transformations infinitésimales des champs ψ et ϕ séparément sur le lagrangien représentant la jonction. Les lagrangiens étant scalaires, toutes transformations de rotation (dans un 4-directions ou 3-directions selon les champs) appropriées produisent une charge, on se rappelle que l'on ne considère pas d'espace pour le système. On pose la charge totale nulle, $Q_{totale} = 0$. La rotation peut se faire selon différentes directions. On considérera les quatre rotations ou bases de rotations du système suivantes :

$$\vec{\psi} \rightarrow e^{(1_2 \otimes (-i\sigma^2))\theta_1} \vec{\psi}' \quad \vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' \quad (2.74)$$

$$\vec{\psi} \rightarrow e^{(\sigma^3 \otimes (-i\sigma^2))\theta_2} \vec{\psi}' \quad \vec{\phi} \rightarrow e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 2\theta_2} \vec{\phi}' \quad (2.75)$$

$$\vec{\psi} \rightarrow e^{(i\sigma^2 \otimes 1_2)\theta_3} \vec{\psi}' \quad \vec{\phi} \rightarrow e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} 2\theta_3} \vec{\phi}' \quad (2.76)$$

$$\vec{\psi} \rightarrow e^{(\sigma^1 \otimes (-i\sigma^2))\theta_4} \vec{\psi}' \quad \vec{\phi} \rightarrow e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} 2\theta_4} \vec{\phi}'. \quad (2.77)$$

On considère des rotations infinitésimales sur chacun des systèmes de rotations précédents pour déterminer la forme de la charge. De l'équation (2.74) on obtient les équations de charges :

$$Q_{1_\psi} = -\dot{\tilde{\psi}}_{1r}\tilde{\psi}_{1i} + \dot{\tilde{\psi}}_{1i}\tilde{\psi}_{1r} - \dot{\tilde{\psi}}_{2r}\tilde{\psi}_{2i} + \dot{\tilde{\psi}}_{2i}\tilde{\psi}_{2r} \quad (2.78)$$

$$Q_{1_\phi} = 0. \quad (2.79)$$

En développant les dérivées, on obtient :

$$Q_{1_\psi} = -2\sqrt{K^2}\alpha\dot{\tilde{\psi}}_{1r}^*\tilde{\psi}_{1i} + 2\sqrt{K^2}\alpha\dot{\tilde{\psi}}_{1i}^*\tilde{\psi}_{1r} + 2A\dot{\tilde{\psi}}_{2r} = 2A\dot{\tilde{\psi}}_{2r} \quad (2.80)$$

$$Q_{1_\phi} = 0. \quad (2.81)$$

Le fait que la charge totale soit nulle impose que $A = 0$.

Du système (2.75), on trouve les équations de charges suivantes :

$$Q_{2_\psi} = -\dot{\tilde{\psi}}_{1r}\tilde{\psi}_{1i} + \dot{\tilde{\psi}}_{1i}\tilde{\psi}_{1r} + \dot{\tilde{\psi}}_{2r}\tilde{\psi}_{2i} - \dot{\tilde{\psi}}_{2i}\tilde{\psi}_{2r} \quad (2.82)$$

$$Q_{2_\phi} = 2\dot{\tilde{\phi}}_1\tilde{\phi}_2 - 2\dot{\tilde{\phi}}_2\tilde{\phi}_1. \quad (2.83)$$

En développant les dérivées, on obtient :

$$Q_{2_\psi} = -2\sqrt{K^2 a} \tilde{\psi}_{1r}^* \tilde{\psi}_{1i} + 2\sqrt{K^2 a} \tilde{\psi}_{1i}^* \tilde{\psi}_{1r} = 0 \quad (2.84)$$

$$Q_{2_\phi} = 4\sqrt{K^2 a} \tilde{\phi}_1^* \tilde{\phi}_2 - 4\sqrt{K^2 a} \tilde{\phi}_2^* \tilde{\phi}_1 = 0 \quad (2.85)$$

où la notation * indique la partie restante des termes où elle est appliquée après dérivation. De plus, on a que *×* donne un facteur -1 au terme appliqué. La notation peut représenter le changement d'un sinus au cos (et vice-versa) lors d'une dérivation.

Les deux systèmes de rotation précédents ne permettent pas de charge, donc pas de courant non plus. Pour la rotation suivant la transformation de (2.76), on obtient les équations de charges :

$$Q_{3_\psi} = \dot{\tilde{\psi}}_{1r} \psi_{2r} - \dot{\tilde{\psi}}_{2r} \tilde{\psi}_{1r} + \dot{\tilde{\psi}}_{1i} \tilde{\psi}_{2i} - \dot{\tilde{\psi}}_{2i} \tilde{\psi}_{1i} \quad (2.86)$$

$$Q_{3_\phi} = -2\dot{\tilde{\phi}}_1 \phi_3 + 2\dot{\tilde{\phi}}_3 \tilde{\phi}_1. \quad (2.87)$$

En développant les dérivées, on obtient :

$$Q_{3_\psi} = 2\sqrt{K^2 a} \tilde{\psi}_{1r}^* \psi_{2r} + 2\sqrt{K^2 a} \tilde{\psi}_{1i}^* \tilde{\psi}_{2i} \quad (2.88)$$

$$Q_{3_\phi} = -4\sqrt{K^2 a} \tilde{\phi}_1^* \phi_3. \quad (2.89)$$

Puisqu'on a posé la charge totale nulle, alors on doit avoir $Q_{3_\psi} + Q_{3_\phi} = 0$. Les termes ψ_{2r} et ϕ_3 doivent être très près de leur minimum et on a que $\psi_{2r_{min}} \approx \sqrt{2} \phi_{3_{min}}$. De plus,

on a que $\tilde{\psi}_{1r} - \sqrt{2}\tilde{\phi}_1 = \text{const.} = 0$ par (2.60) et par le fait qu'au minimum complet, $\tilde{\psi}_{1r}$ et $\tilde{\phi}_1$ sont nuls. Alors la charge totale est :

$$Q_{total3} = Q_{3\psi} + Q_{3\phi} = 2\sqrt{K^2}a\tilde{\psi}_{1i}^*\tilde{\psi}_{2i} = 0 \Rightarrow \tilde{\psi}_{2i} = 0. \quad (2.90)$$

Ici on n'a pas considéré $\tilde{\psi}_{1i} = 0$ parce qu'on peut en tenir compte dans le dernier système de rotation (2.77) qu'il reste à voir. Le courant de charge d'un état à l'autre est (en dérivant) :

$$\dot{Q}_{3\psi} = -\dot{Q}_{3\phi} = -4K^2a\tilde{\psi}_{1r}\psi_{2r} \quad (2.91)$$

où on a considéré que $\psi_{2r} \approx \psi_{2r_{min}} \approx a\sqrt{2}$ et $\tilde{\psi}_{1r} = \tilde{\psi}_{1r_{max}} \sin((K\sqrt{a})t + t_0) \approx \tilde{\psi}_{1r_{max}} \sin(t_0)$ sont valide. On a pris que t_0 soit une condition initiale et que $\tilde{\psi}_{1r_{max}}$ soit la plus grande valeur que l'on peut prendre pour $\tilde{\psi}_{1r}$ sans briser d'approximations.

C'est donc l'équation du courant Josephson sans potentiel que l'on obtient pour le système de rotation considéré. Pour le dernier système de rotation à considérer ; (2.77), la charge est définie comme :

$$Q_{4\psi} = -\dot{\tilde{\psi}}_{1r}\tilde{\psi}_{2i} + \dot{\tilde{\psi}}_{2i}\tilde{\psi}_{1r} + \dot{\tilde{\psi}}_{1i}\psi_{2r} - \dot{\psi}_{2r}\tilde{\psi}_{1i} \quad (2.92)$$

$$Q_{4\phi} = 2\dot{\phi}_2\phi_3 - 2\dot{\phi}_3\tilde{\phi}_2. \quad (2.93)$$

En développant les dérivées, on obtient :

$$Q_{4_\psi} = 2\sqrt{K^2 a} \tilde{\psi}_{1i}^* \psi_{2r} \quad (2.94)$$

$$Q_{4_\phi} = 4\sqrt{K^2 a} \tilde{\phi}_2^* \phi_3. \quad (2.95)$$

En se rappelant de l'équation (2.64) et des mêmes équations que pour le cas de l'étude du système de rotation (2.76), on constate sans problème que $\tilde{\psi}_{1i} + \sqrt{2}\tilde{\phi}_2 = 0$ et que la charge totale Q_{total_4} est nulle. L'équation du courant pour ce système de rotation est l'évolution en temps (dérivée) de la charge :

$$\dot{Q}_{4_\psi} = -\dot{Q}_{4_\phi} = -4aK^2 \tilde{\psi}_{1i} \psi_{2r} \quad (2.96)$$

où $\psi_{2r} \approx a\sqrt{2}$ et $\tilde{\psi}_{1i} = \tilde{\psi}_{1i_{max}} \sin(2(K\sqrt{a})t + t_0) \approx \tilde{\psi}_{1i_{max}} \sin(t_0)$. t_0 est une condition initiale et $\tilde{\psi}_{1i_{max}}$ est la plus grande valeur que l'on peut prendre pour $\tilde{\psi}_{1i}$ sans briser d'approximations. C'est une deuxième équation de Josephson sans potentiel pour le courant de charge entre les champs ψ et ϕ .

CHAPITRE 3

Article

On a traité la jonction de Josephson en considérant chaque partie de la jonction sous les types de symétrie $SO(2) \times SO(2)$ et $U(2) \times SO(3)$. En s'inspirant de l'article de Zhang [2], on considérera aussi deux modèles qui relieront la supraconductivité et l'antiferromagnétisme. On tiendra compte de la supraconductivité en termes de symétrie $SO(2)$ et du vecteur antiferromagnétique en termes de symétrie $SO(3)$. On va considérer des symétries uniques dépendantes de la sorte des matériaux : soit $SO(2)$ pour représenter la supraconductivité ou $SO(3)$ pour représenter l'antiferromagnétisme. On va aussi considérer une symétrie combinée et explicitement brisée de chacune des deux précédemment définies. Il est bien entendu que l'on gardera le modèle lagrangien. L'esquisse d'article suivant est dans cette voie. Dans cet article, on y traitera, en plus d'un résumé de l'effet Josephson, de cette façon de voir la jonction en considérant ces nouveaux types de symétrie. L'article est rédigé en anglais pour fins de diffusion à plus grande échelle.

3.1 The abelian and non-abelian Josephson effect and pseudo-goldstone bosons

Contents

1. Abelian Josephson Effect	2
2. Non-abelian Josephson Effect	4
2.1 $SO(3)$ Model	5
2.2 $SO(5)$ Model	8
3. Conclusions	13
4. Acknowledgments	14

1. Abelian Josephson Effect

The abelian Josephson effect [1] concerns two macroscopic superconductors that are brought into weak contact with one another. Each superconductor is described by a separate macroscopic state. The two superconductors are brought into contact, and interact weakly with one another. Physically, the wave function of the Cooper pairs, which have Bose condensed to form the superconducting liquids on either side of the junction, start to interact with one another. The interaction allows for tunneling across the junction which is at the heart of the Josephson effect. The effect can be succinctly described in terms of effective fields. The formulation given by Feynman[2] is the most convenient.

The superconductor on each side is described by one, macroscopic state $\psi(t)$ and $\chi(t)$ respectively. The spatial dependence of the states, although important to define the volume occupied by the superconductor and indeed how it is positioned facilitating the interaction with the other side, is actually irrelevant for the effect. With no coupling, the states each obey a free Schrodinger equation:

$$i\hbar\partial_t\psi(t) = E_L\psi(t) \tag{1.1}$$

$$i\hbar\partial_t\chi(t) = E_R\chi(t) \tag{1.2}$$

where E_L and E_R are the chemical potentials on either side. These equations admit a doubled symmetry, $U(1) \times U(1)$, corresponding to independent rotations of the fields $\psi(t) \rightarrow e^{i\zeta}\psi(t)$ and $\chi(t) \rightarrow e^{i\eta}\chi(t)$. Evidently this enhanced symmetry is fictive, a consequence of treating the two superconductors as independent uncoupled entities. Only the simultaneous identical rotation of both fields, the diagonal $U_D(1)$, is truly a symmetry. The phases θ and ζ may be taken time dependent, at the expense of adding the temporal component of the gauge field $A_0(t)$ with the appropriate transformation property. In the superconducting state, each $U(1)$ symmetry is spontaneously broken giving rise to two Goldstone[3] bosons. The attendant Higgs mechanism gives the photon a mass, which physically manifests itself in the Meissner effect. However, it should be stressed that there is actually only one photon, only the diagonal $U_D(1)$ is gauged and only the corresponding Goldstone boson is incorporated in the Higgs mechanism. Thus the Goldstone boson associated with the spontaneous breaking of $U_D(1)$ is swallowed by the Higgs mechanism giving rise to the massive photon, while the Goldstone boson associated with the spontaneous breaking of the off-diagonal $U_{OD}(1)$ symmetry appears to be an undesirable consequence of treating the system as two independent superconductors.

Coupling the two superconductors together allows them to exchange charge with one another. The coupled system is described by adding the simplest interaction which preserves the diagonal $U_D(1)$ symmetry. Since the interaction is weak, the corresponding coupling constant is taken to be a small parameter. If the coupling were not weak, it would be incorrect to treat the system as two coupled superconductors, we would just have one, albeit bigger, superconductor. The coupling explicitly, softly, breaks the enhanced $U(1) \times U(1)$ to the diagonal $U_D(1)$. The explicit symmetry breaking gives the putative second Goldstone boson a small

mass and as such it is called a pseudo-Goldstone[4] boson. The classic example of pseudo-Goldstone bosons in particle physics corresponds to the pions. In QCD, the pions would be the Goldstone bosons arising from spontaneous breaking of chiral symmetry. However, chiral symmetry is explicitly, softly broken by the quark mass terms. Correspondingly, here, the would be massless Goldstone bosons acquire a small mass and are called pseudo-Goldstone bosons. The simplest coupling of the two superconductors gives the equations:

$$i\hbar\partial_t\psi(t) = E_L\psi(t) + K\chi(t) \quad (1.3)$$

$$i\hbar\partial_t\chi(t) = E_R\chi(t) + K\psi(t) \quad (1.4)$$

This system is evidently exactly solvable. Writing $E_L = E + V$ and $E_R = E - V$ the solution is

$$\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \chi(t) \end{pmatrix} = e^{-iEt/\hbar} \left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \begin{pmatrix} \frac{V}{\sqrt{V^2+K^2}} & \frac{K}{\sqrt{V^2+K^2}} \\ \frac{K}{\sqrt{V^2+K^2}} & \frac{-V}{\sqrt{V^2+K^2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

where $\omega = \frac{\sqrt{V^2+K^2}}{\hbar}$. The conserved charge in the system is $Q = \psi^*(t)\psi(t) + \chi^*(t)\chi(t)$, such that $\dot{Q} = 0$. This means that $Q_\psi = \psi^*(t)\psi(t)$ and $Q_\chi = \chi^*(t)\chi(t)$ satisfy $\dot{Q}_\psi = -\dot{Q}_\chi$. The overall charge of the junction is conserved, however due to tunnelling, the two superconductors can exchange charge. Indeed, calculating Q_ψ yields

$$\begin{aligned} Q_\psi &= \psi^*(t)\psi(t) = \cos^2(\omega t) \psi_0^* \psi_0 \\ &+ \sin^2(\omega t) \left(\frac{K}{\sqrt{V^2+K^2}} \chi_0^* + \frac{V}{\sqrt{V^2+K^2}} \psi_0^* \right) \left(\frac{K}{\sqrt{V^2+K^2}} \chi_0 + \frac{V}{\sqrt{V^2+K^2}} \psi_0 \right) \\ &+ i \cos(\omega t) \sin(\omega t) \left(\left(\frac{K}{\sqrt{V^2+K^2}} \chi_0^* + \frac{V}{\sqrt{V^2+K^2}} \psi_0^* \right) \psi_0 - c.c. \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Replacing $\psi_0 = \sqrt{\rho}e^{i\theta_\psi}$ and $\chi_0 = \sqrt{\rho}e^{i\theta_\chi}$ (the amplitude of the effective field is the same on both sides, the phase can differ) gives

$$Q_\psi = \rho \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \left(1 + \frac{2KV}{V^2+K^2} \cos(\theta_\psi - \theta_\chi) \right) - \sin(2\omega t) \frac{K}{\sqrt{V^2+K^2}} \sin(\theta_\psi - \theta_\chi) \right). \quad (1.7)$$

There are two interesting cases to consider, first with $V = 0$ we get the dc Josephson effect

$$Q_\psi = \rho (1 - \sin(2\omega t) \sin(\theta_\psi - \theta_\chi)). \quad (1.8)$$

The Josephson current is given by

$$\dot{Q}_\psi = \rho (2\omega \cos(2\omega t) \sin(\theta_\chi - \theta_\psi)). \quad (1.9)$$

Replacing for $\omega = K/\hbar$ and that the dc current is valid for only short times, implying $\cos Kt/\hbar \approx 1$, yields

$$\dot{Q}_\psi = \rho (2K/\hbar \sin(\theta_\chi - \theta_\psi)) \quad (1.10)$$

the familiar expression for the dc Josephson effect.

For the ac effect we take $V \gg K$ which yields

$$Q_\psi = \rho \left(1 - \frac{K}{V} \cos(2Vt/\hbar + (\theta_\chi - \theta_\psi)) \right) \quad (1.11)$$

and consequently

$$\dot{Q}_\psi = \rho \frac{2K}{\hbar} \sin(2Vt/\hbar + (\theta_\chi - \theta_\psi)). \quad (1.12)$$

The Josephson acceleration equation follows straightforwardly from the equations of motion for the time dependent phases $\psi(t) = \sqrt{\rho_\psi(t)} e^{i\theta_\psi(t)}$ and $\chi = \sqrt{\rho_\chi(t)} e^{i\theta_\chi(t)}$

$$\dot{\theta}_\chi(t) - \dot{\theta}_\psi(t) = 2V/\hbar. \quad (1.13)$$

An effective Lagrangian description of the situation is useful. It is important to realize that it is not really a wavefunction, but a quantum field, that describes each superconductor and are placed into interaction in a Josephson junction. The effective Lagrangian in the above analysis is given by

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger i\hbar\dot{\psi} + \chi^\dagger i\hbar\dot{\chi} - (\psi^\dagger \chi^\dagger) \begin{pmatrix} E+V & 0 \\ 0 & E-V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} - (\psi^\dagger \chi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

In the absence of the coupling term, $K = 0$, the symmetry of this model corresponds to independent phase transformations of the two fields $\psi \rightarrow e^{i\zeta}\psi$ and $\chi \rightarrow e^{i\eta}\chi$. The fact that physically the amplitude on either side of the effective fields are equal and vary very little means that the $U(1)$ symmetry is spontaneously broken. The photon, which we have not included in our analysis, will then absorb the attendant Goldstone boson and becomes massive giving the Meissner effect. However, there really are not two independent photons. The doubling of the symmetry is only an artefact of our effective description of two disjoint superconductors. The field that describes the fluid of Cooper pairs is just one single albeit local field, that takes on one value over the position of one superconductor and another over the position of the second. The true symmetry of the theory corresponds to $U(1)$ transformations of this field not the $U(1) \times U(1)$ symmetry that we have found. The coupling of the two superconductors together explicitly breaks the symmetry $U(1) \times U(1) \rightarrow U(1)$. Symmetries that spontaneously break give rise to massless Goldstone bosons. Explicitly, but softly breaking the symmetry no longer produces Goldstone bosons, but slightly massive particles called pseudo-Goldstone bosons. In the effective Lagrangian, the parameter K is the soft breaking parameter. The phase transformation that is equal and opposite on either side of the junction corresponds exactly to excitations in the direction of the pseudo-Goldstone bosons. The frequency associated with these oscillations is correspondingly small, $\omega = \frac{K}{\hbar}$. The ac effect can be seen as an accumulation of the phase $(\theta_\chi - \theta_\psi) \rightarrow 2Vt/\hbar + (\theta_\chi - \theta_\psi)$.

2. Non-abelian Josephson Effect

The non-abelian Josephson effect can now be formulated, in terms of a junction of two effective systems which interact with one another very weakly. Each system should have the same

symmetry or at least one symmetry should be a subset of the other. Each system should exhibit spontaneous symmetry breaking. For those generators that correspond to the same symmetry, this doubling of that symmetry and the corresponding doubling of the Goldstone bosons that are produced, must be an artifact of the description. And indeed, coupling the two systems together, so that only the diagonal action of the symmetry generators is preserved, will give rise to pseudo-Goldstone bosons. These excitations will correspond to the non-abelian generalization of the Josephson effect.

We are not aware of such a description of the Josephson effect neither in condensed matter physics nor in particle physics. The only direct reference to pseudo-Goldstone bosons and the Josephson effect is in a paper of Zhang[5], where he is considering the $SO(5)$ model for the high temperature superconductivity/anti-ferromagnet system. However he does not consider junctions, and the pseudo-Goldstone bosons arising there, are a consequence of explicit $SO(5)$ symmetry breaking terms that are added to the effective Lagrangian to push the system away from the $SO(5)$ invariant critical point. The Josephson effect is considered in a paper by E. Demler et al[6] within the context of the $SO(5)$ theory their analysis is complementary to ours.

There is some reference to non-abelian Josephson effect in the paper of Ambegoakar et al[7] which formulates the problem for the A phase of liquid Helium³. However the emphasis is not on the symmetry considerations but on the geometrical and physical layout that could give rise to a junction. In any case, we feel that in the condensed matter literature, there is some understanding that the Josephson effect, abelian or non-abelian, does correspond to the excitation of pseudo-Goldstone bosons, however it is not explicitly and simply spelled out, as we attempt to do here. We will give two examples of the non-abelian generalization.

2.1 $SO(3)$ Model

Here we present a model with $SO(3)$ symmetry as the common symmetry. We take a complex doublet representation, ψ , on one side and a real triplet representation, $\vec{\phi}$, on the other. The effective Lagrangian is given by

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{\vec{\phi}} + \mathcal{L}_I \tag{2.1}$$

with

$$\mathcal{L}_\psi = \dot{\psi}^\dagger \dot{\psi} - \lambda(\psi^\dagger \psi - a^2)^2 \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\phi}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\phi}} \cdot \dot{\vec{\phi}} - \gamma(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - v^2)^2 \tag{2.3}$$

$$\mathcal{L}_I = -K \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi \cdot \vec{\phi} \tag{2.4}$$

where $\vec{\sigma}$ are the usual Pauli matrices and λ, γ, a and v are positive constants. The symmetry of this model is given by $U(2) \times SO(3)$ when the interaction term is removed. Then the symmetry will break spontaneously to $U(1) \times SO(2)$. The complex doublet breaks the original $U(2) \sim U(1) \times SU(2)$, to a particular combination of one generator in the $SU(2)$ subgroup and the generator of the $U(1)$ sub-group, not unlike the symmetry breaking in the standard model

of the electro-weak interaction. The real triplet spontaneously breaks the $SO(3)$ symmetry to $SO(2)$ the sub-group corresponding to rotations about the vacuum direction.

With the interaction term, the symmetry is reduced to $U(1) \times SO_D(3)$ where the subscript D stands for the diagonal sub-group. Some of the Goldstone bosons that are produced in the spontaneous symmetry breaking now become pseudo-Goldstone bosons. To understand the breaking pattern, we must find the minimum of the potential (the part of the Lagrangian which does not depend on the time derivatives) and find the spectrum of the small oscillations about this minimum. This is completely equivalent to finding the normal modes of a classical coupled system. The Goldstone bosons will have zero frequencies, the pseudo-Goldstone bosons will have frequencies that vanish as the coupling constant of the interaction terms is taken to zero, and finally there will be massive modes, whose frequencies will be proportional to the other parameters of the model, and as such will correspond to arbitrarily heavy excitations in the limit that λ and γ go to infinity. To find the location of the minimum, we take the variational derivative with respect to the fields and set it equal to zero:

$$2\lambda(\psi^\dagger\psi - a^2)\psi + K\vec{\sigma}\psi \cdot \vec{\phi} = 0 \quad (2.5)$$

$$4\gamma(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - v^2)\vec{\phi} + K\psi^\dagger\vec{\sigma}\psi = 0 \quad (2.6)$$

Any solution of this system is mapped to another solution by the action of the group that is spontaneously broken. Hence we can find one solution, and obtain all others related to it by an appropriate gauge transformation. Since with a transformation within $SU(2)$ we can take ψ from one point to any other point with the same amplitude, we can choose without loss of generality

$$\psi = \psi_R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

where ψ_R is real. Then the second equation implies that $\phi = \phi_3(0, 0, 1)$, where ϕ_3 is of course real. This yields two equations in two variables, which are tractable,

$$2\lambda(\psi_R^2 - a^2)\psi_R - K\psi_R\phi_3 = 0 \quad (2.8)$$

$$4\gamma(\phi_3^2 - v^2)\phi_3 - K\psi_R^2 = 0. \quad (2.9)$$

These equations yield cubic equations for each variable. These are easily solved using a computer, however, it is not very important to have the exact solution. We are happy with a perturbative solution. We take

$$\psi_R = a + \alpha K \quad (2.10)$$

$$\phi_3 = v + \beta K. \quad (2.11)$$

Substituting in the equations and keeping terms to first order in K yields

$$2\lambda(2a\alpha K) - Kv = 0 \quad (2.12)$$

$$4\gamma(2v\beta K)v - Ka^2 = 0. \quad (2.13)$$

We easily find α and β to give

$$\psi_R = a + \frac{a^2}{8\gamma v^2} K \quad (2.14)$$

$$\phi_3 = v + \frac{v}{4\lambda a} K. \quad (2.15)$$

Now we must find the second variation of the potential evaluated at this minimum, and then diagonalise it to find the eigenfrequencies and the normal modes. It is easier to work with real fields, we write $\psi = \begin{pmatrix} \psi_{1R} + i\psi_{1I} \\ \psi_{2R} + i\psi_{2I} \end{pmatrix}$. The minimum is found above at $\psi_{1R} = \psi_{1I} = \psi_{2I} = 0$. The matrix of second partial derivatives is 7×7 , however it is very sparse, and breaks up into 3 groups of 2×2 matrices and one singlet. We find to first order in K (here f_i represents any of the fields)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial f_i \partial f_j} = \begin{pmatrix} 4Kv & 0 & 0 & 0 & 2Ka & 0 & 0 \\ 0 & 4Kv & 0 & 0 & 0 & -2Ka & 0 \\ 0 & 0 & 8\lambda a^2 + 4vK & 0 & 0 & 0 & -2Ka \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2Ka & 0 & 0 & 0 & Ka^2/v & 0 & 0 \\ 0 & -2Ka & 0 & 0 & 0 & Ka^2/v & 0 \\ 0 & 0 & -2Ka & 0 & 0 & 0 & 8\gamma v^2 + 3Ka^2/v \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Diagonalization of the matrix reveals the following frequencies and corresponding eigenvectors (not normalized):

$$\omega = 0; \psi_{2I} \sim v_1 \quad (2.17)$$

$$\omega = 0; (\psi_{1R}, \phi_1) = (a, -2v) \sim v_2 \quad (2.18)$$

$$\omega = (4v + a^2/v)K; (\psi_{1R}, \phi_1) = (2v, a) \sim v_3 \quad (2.19)$$

$$\omega = 0; (\psi_{1I}, \phi_2) = (a, 2v) \sim v_4 \quad (2.20)$$

$$\omega = (4v + a^2/v)K; (\psi_{1I}, \phi_2) = (-2v, a) \sim v_5 \quad (2.21)$$

$$\omega = 8\lambda a^2; (\psi_{2R}, \phi_3) = (1, 0) \sim v_6 \quad (2.22)$$

$$\omega = 8\gamma v^2; (\psi_{2R}, \phi_3) = (0, 1) \sim v_7 \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

The final two eigenvalues and eigenvectors v_6 and v_7 have corrections of $\mathcal{O}(K)$ but these are simply uninteresting, the modes correspond to the massive radial oscillations, and decouple in the limit $\lambda, \gamma \rightarrow \infty$. The interesting modes are the light modes, the massless Goldstone modes and the light pseudo-Goldstone modes. We observe that there are three Goldstone modes and two pseudo-Goldstone modes. The uncoupled system is expected to have five Goldstone bosons, one for each spontaneously broken symmetry. However, two of those modes no longer correspond to a symmetry once the interaction is added. The two independent rotations of

the triplet that do not leave ϕ_3 invariant are no longer symmetries. Only if simultaneously we act on the complex doublet by the $SU(2)$ matrix corresponding to the same group element, we preserve a symmetry. These correspond to the two Goldstone bosons v_2 and v_4 . The transformations corresponding to v_3 and v_5 rotate the fields $\vec{\phi}$ and ψ in opposite directions in group space, and no longer correspond to symmetries. Hence they give rise to pseudo-Goldstone bosons. The transformation corresponding to a rotation about ϕ_3 of just the field $\vec{\phi}$ and of the transformation of just the field ψ that is the combination of the $U(1)$ and the $SU(2)$ generator which leave ψ_{2R} invariant are still symmetries. They are not spontaneously broken and do not give rise to Goldstone or pseudo-Goldstone bosons.

2.2 $SO(5)$ Model

In this section we will analyze the $SO(5)$ model that has been put forward by Zhang[5] to describe the complete complex of phases of the materials exhibiting high temperature superconductivity/anti-ferromagnetism. The system is to be described by an order parameter consisting of a real scalar field with five components $\vec{\varphi}$. The first two components $\vec{\phi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$ are equivalent to the real and imaginary parts of a complex field, and describe the superconductivity. The last three components $\vec{n} \equiv (\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$ correspond to a real triplet field which is a good order parameter for the anti-ferromagnetism. The five vector is normalized to unity however we will not impose this constraint from the beginning. We will obtain it as we decouple the massive excitations by taking certain coupling constants to infinity. The critical point is described by an $SO(5)$ invariant effective Lagrangian, and corresponds to the point in the phase diagram where we have the coexistence of the the superconductivity and the anti-ferromagnetism. It is described by a Lagrangian of the symmetry breaking type

$$\mathcal{L}_{SO(5)}(\vec{\varphi}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}} \cdot \dot{\vec{\varphi}} - \lambda(\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} - a^2)^2 \quad (2.25)$$

Modifying the doping of the material can drive the system into the superconducting phase or the anti-ferromagnetic phase. The critical point corresponds exactly to a half filled band, adjusting the doping pushes the system into one phase or the other. At the level of the effective Lagrangian we add the explicit symmetry breaking terms

$$\mathcal{L}_{\text{doping}}(g, \vec{\varphi}) = -g(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - \vec{n} \cdot \vec{n}). \quad (2.26)$$

For g positive, this potential drives the minimum into the vector \vec{n} hence anti-ferromagnetic while for g negative the minimum is in the vector $\vec{\phi}$ hence superconducting. Zhang had imposed the constraint that the five vector is normalized and had added only the first term or the second term to drive the system into one phase or the other. We find our treatment is completely equivalent, and due to the enhanced symmetric treatment of the $\vec{\phi}$ variables and the \vec{n} variables, more easily tractable. The doping terms break the symmetry explicitly from $SO(5) \rightarrow SO(3) \times SO(2)$. The $SO(3)$ symmetry describes the anti-ferromagnet while the $SO(2)$ describes the superconductor.

Without the doping terms, the spontaneous symmetry breaking is from $SO(5) \rightarrow SO(4)$. As $SO(5)$ has ten generators while $SO(4)$ has six, this would give rise to four Goldstone bosons. The excitations of the real five vector would correspond to four massless modes and one massive mode, obviously coming from oscillations of the orientation and of the length respectively of the order parameter. With the explicit symmetry breaking terms, on the superconducting side, only one Goldstone boson while three pseudo-Goldstone bosons are produced. This is because the generator of $SO(2)$ is spontaneously broken and a symmetry of the theory giving rise to the one Goldstone boson, while the three generators of the $SO(3)$ symmetry are part of the unbroken $SO(4)$ symmetry of the $SO(5)$ symmetric situation and do not give rise to any Goldstone bosons. The three other generators that would be spontaneously broken in the $SO(5)$ symmetric situation, are explicitly broken here, and give rise to pseudo-Goldstone bosons. On the anti-ferromagnetic side, the $SO(3)$ symmetry is spontaneously broken to $SO(2)$ giving rise to two Goldstone bosons. The unbroken $SO(2)$ is part of the unbroken $SO(4)$ symmetry (when $SO(5)$ is not explicitly broken) as are the generators of the $SO(2)$ which acts on the superconductor variables $\vec{\phi}$ and do not give rise to any Goldstone or pseudo-Goldstone bosons. Hence there are two generators of $SO(5)$ which would rotate \vec{n} into $\vec{\phi}$ which are explicitly broken here and give rise to two pseudo-Goldstone bosons. Zhang in his article[5] is referring to these pseudo-Goldstone bosons, which in fact have nothing to do with the Josephson effect.

A Josephson type junction is modeled with the consideration of two independent systems described by a $SO(3) \times SO(2)$ invariant Lagrangian for each system. This combined system would have a doubled symmetry $(SO(3) \times SO(2)) \times (SO(3) \times SO(2))$ and spontaneous symmetry breaking would give a double number of Goldstone bosons and pseudo-Goldstone bosons, depending on the case as in the previous paragraph. The addition of an interaction term that preserves only the diagonal $SO(3) \times SO(2)$ symmetry and would give rise to a number of new pseudo-Goldstone bosons, which would be responsible for the Josephson tunneling between the two systems. The Lagrangian of the system is

$$\mathcal{L}_{\text{Josephson}} = \mathcal{L}_{SO(5)}(\vec{\varphi}_1) + \mathcal{L}_{\text{doping}}(g_1, \vec{\varphi}_1) + \mathcal{L}_{SO(5)}(\vec{\varphi}_2) + \mathcal{L}_{\text{doping}}(g_2, \vec{\varphi}_2) + K \vec{\varphi}_1 \cdot \vec{\varphi}_2 \quad (2.27)$$

The coupling term is the simplest term invariant under the diagonal $SO_D(5)$ symmetry. The choice of a positive coupling constant K drives the system to want to align the two five vectors $\vec{\varphi}_1$ and $\vec{\varphi}_2$. If we pick the parameters g_1, g_2 on both sides to be superconducting, for example, then Josephson effect that we would describe, would be a straightforward generalization of the usual abelian Josephson effect between two superconductors. Similarly, a junction between two anti-ferromagnets would yield a straightforward application of the analysis of the non-abelian Josephson effect of the previous sub-section. Hence we would like to consider the junction corresponding to a superconductor on one side but an anti-ferromagnet on the other taking $g_1 > 0$ while $g_2 < 0$. As the coupling term between the two systems respects the diagonal $SO(3) \times SO(2)$ invariance, the position of the minimum of the potential can be moved arbitrarily via the action of this group. This will have no effect on the spectrum of oscillations about the minimum. It is the position of the amplitude of the vectors $\vec{\phi}_1, \vec{n}_1 \vec{\phi}_2 \vec{n}_2$ which are

more interesting. As we are interested in Josephson tunneling between the superconductor and the antiferromagnet we can reduce the model further to include the dynamics for just the norms of these four vectors. Using the notation $|\vec{\phi}_1| = \phi_1$, $|\vec{\phi}_2| = \phi_2$, $|\vec{n}_1| = n_1$, $|\vec{n}_2| = n_2$ we get the following effective Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Josephson, reduced}} = & \frac{1}{2}(\phi_1^2 + n_1^2) - \lambda(\phi_1^2 + n_1^2 - a^2)^2 + \frac{1}{2}(\phi_2^2 + n_2^2) - \lambda(\phi_2^2 + n_2^2 - a^2)^2 \\ & - g_1(\phi_1^2 - n_1^2) + g_2(\phi_2^2 - n_2^2) \\ & + K(\phi_1\phi_2 + n_1n_2). \end{aligned} \quad (2.28)$$

We take, for convenience, the same parameters λ and a on both sides, this corresponds to an identical system on either side before the explicit symmetry breaking is added with the constants g_1, g_2 . All the parameters are positive. The explicit symmetry breaking drives the system to the anti-ferromagnetic side for the variables 1 and to the superconducting side for the variable 2. The equations for the minimum are

$$(4\lambda(\phi_1^2 + n_1^2 - a^2) + 2g_1)\phi_1 - K\phi_2 = 0 \quad (2.29)$$

$$(4\lambda(\phi_2^2 + n_2^2 - a^2) - 2g_2)\phi_2 - K\phi_1 = 0 \quad (2.30)$$

$$(4\lambda(\phi_1^2 + n_1^2 - a^2) - 2g_1)n_1 - Kn_2 = 0 \quad (2.31)$$

$$(4\lambda(\phi_2^2 + n_2^2 - a^2) + 2g_2)n_2 - Kn_1 = 0. \quad (2.32)$$

These equations have the following matricial form

$$\begin{pmatrix} A + 2g_1 & -K \\ -K & B - 2g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{pmatrix} A - 2g_1 & -K \\ -K & B + 2g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.34)$$

where $A = 4\lambda(\phi_1^2 + n_1^2 - a^2)$ and $B = 4\lambda(\phi_2^2 + n_2^2 - a^2)$. To have a non-trivial solution the two determinants must vanish:

$$(A + 2g_1)(B - 2g_2) - K^2 = 0 \quad (2.35)$$

$$(A - 2g_1)(B + 2g_2) - K^2 = 0 \quad (2.36)$$

Adding and subtracting these two equations gives

$$AB = K^2 + 4g_1g_2 \quad (2.37)$$

$$Ag_2 - Bg_1 = 0 \quad (2.38)$$

which has the solution

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \pm \sqrt{4 + (K^2/g_1g_2)} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Thus the values of A and B are fixed functions of the coupling constants K, g_1, g_2 and are independent of the coupling constant λ , especially in the limit which decouples the massive excitations, $\lambda \rightarrow \infty$. The solution for the minimum then is

$$\phi_1 = \frac{K}{A + 2g_1} \phi_2 \quad (2.40)$$

$$n_1 = \frac{K}{A - 2g_1} n_2 \quad (2.41)$$

with the values of ϕ_2 and n_2 determined from by self consistency

$$\begin{aligned} A &= 4\lambda \left(\left(\frac{K}{A+2g_1} \phi_2 \right)^2 + \left(\frac{K}{A-2g_1} n_2 \right)^2 - a^2 \right) = \sqrt{4 + (K^2/g_1 g_2)} g_1 \\ B &= \frac{4\lambda(\phi_2^2 + n_2^2 - a^2)}{4\lambda(\phi_2^2 + n_2^2 - a^2)} = \sqrt{4 + (K^2/g_1 g_2)} g_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Since the variables represent the amplitudes of the superconducting or anti-ferromagnetic order parameter, they must be positive. This requires $A \pm 2g_1 > 0$, which in turn requires $A > 0$. Hence the positive sign is chosen in equation 2.39. This system is an inhomogeneous system of linear equations for the variables ϕ_2^2 and n_2^2 which can be written in matrix form as

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{K}{A+2g_1} \right)^2 & \left(\frac{K}{A-2g_1} \right)^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2^2 \\ n_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4+(K^2/g_1 g_2)} g_1}{4\lambda} + a^2 \\ \frac{\sqrt{4+(K^2/g_1 g_2)} g_2}{4\lambda} + a^2 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

The solution is obtained by multiplying by the inverse of the 2×2 matrix, this yields

$$\begin{pmatrix} \phi_2^2 \\ n_2^2 \end{pmatrix} = \frac{K^2 g_1}{-8A g_2^2} \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{K}{A-2g_1} \right)^2 \\ -1 & \left(\frac{K}{A+2g_1} \right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4+(K^2/g_1 g_2)} g_1}{4\lambda} + a^2 \\ \frac{\sqrt{4+(K^2/g_1 g_2)} g_2}{4\lambda} + a^2 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

The solution for ϕ_2 and n_2 requires taking the square root. Again the positivity of these fields imply that the positive root must be taken. The solutions are valid only for a range of the parameters, they are certainly valid for $K \ll g_1, g_2$. In the other limit, $K \gg g_1, g_2$ they are only valid for $g_1 \approx g_2$. We are not interested in the solution for arbitrary values of the coupling constants but in the large λ limit. In this limit we get

$$\begin{pmatrix} \phi_2^2 \\ n_2^2 \end{pmatrix} = \frac{K^2 g_1}{-8A g_2^2} \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{K}{A-2g_1} \right)^2 \\ -1 & \left(\frac{K}{A+2g_1} \right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \end{pmatrix} = \frac{a^2 K^2 g_1}{8A g_2^2} \begin{pmatrix} \left(\frac{K}{A-2g_1} \right)^2 - 1 \\ 1 - \left(\frac{K}{A+2g_1} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Thus we get the solution

$$\phi_1 = \frac{K}{A + 2g_1} \sqrt{\frac{a^2 K^2 g_1}{8A g_2^2} \left(\left(\frac{K}{A - 2g_1} \right)^2 - 1 \right)} \quad (2.46)$$

$$n_1 = \frac{K}{A - 2g_1} \sqrt{\frac{a^2 K^2 g_1}{8A g_2^2} \left(1 - \left(\frac{K}{A + 2g_1} \right)^2 \right)} \quad (2.47)$$

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{a^2 K^2 g_1}{8A g_2^2} \left(\left(\frac{K}{A - 2g_1} \right)^2 - 1 \right)} \quad (2.48)$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{a^2 K^2 g_1}{8A g_2^2} \left(1 - \left(\frac{K}{A + 2g_1} \right)^2 \right)}. \quad (2.49)$$

The solution is again not particularly illuminating. We can indeed check that $\phi_i^2 + n_i^2 = a^2$ for example. This solution represents the minimum of the potential. It is easy to see that the order parameter is largely in the n_1 direction on the anti-ferromagnetic side while it is largely in the ϕ_2 direction on the superconductor side. To find the frequencies of the oscillations about this minimum, we need the matrix of second partial derivatives of the potential. This is given by

$$V'' = \begin{pmatrix} A + 2g_1 + 8\lambda\phi_1^2 & 8\lambda\phi_1 n_1 & -K & 0 \\ 8\lambda\phi_1 n_1 & A - 2g_1 + 8\lambda n_1^2 & 0 & -K \\ -K & 0 & B - 2g_2 + 8\lambda\phi_2^2 & 8\lambda\phi_2 n_2 \\ 0 & -K & 8\lambda\phi_2 n_2 & B + 2g_2 + 8\lambda n_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

where all the fields are evaluated at their values at the minimum. The frequencies are obtained by diagonalizing this matrix. This is actually not that difficult, it can be done analytically or by computer. On the other hand this diagonalization is not very illuminating. It is possible to work in perturbation theory. We split the matrix $V'' = V_0'' + V_1''$ into a zero order part and a perturbation. The zeroth order part is given by the parts which scale like λ

$$V_0'' = \begin{pmatrix} 8\lambda\phi_1^2 & 8\lambda\phi_1 n_1 & 0 & 0 \\ 8\lambda\phi_1 n_1 & 8\lambda n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8\lambda\phi_2^2 & 8\lambda\phi_2 n_2 \\ 0 & 8\lambda\phi_2 n_2 & 8\lambda\phi_2 n_2 & 8\lambda n_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

while the perturbation is given by the terms of $o(1)$

$$V_1'' = \begin{pmatrix} A + 2g_1 & 0 & -K & 0 \\ 0 & A - 2g_1 & 0 & -K \\ -K & 0 & B - 2g_2 & 0 \\ 0 & -K & 0 & B + 2g_2 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Now finding the eigenvalues and eigenvectors of V_0'' is trivial. There are two heavy, massive modes and two Goldstone modes, indeed the Goldstone modes that would be there if all symmetry breaking terms were absent. It is these Goldstone modes that become the pseudo-Goldstone bosons which interest us. The perturbation then acts on the degenerate subspace of the two Goldstone modes, lifting the degeneracy and giving both modes a small mass. They become the pseudo-Goldstone bosons that we are looking for. Degenerate perturbation theory corresponds simply to diagonalizing the perturbation in the subspace of the degenerate

modes. These normalized zero modes are given by

$$v_1 = (1/a) \begin{pmatrix} n_1 \\ -\phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = (1/a) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_2 \\ -\phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Then we must compute the matrix elements of the perturbation in the subspace spanned by v_1 and v_2 , this is given by

$$V''_{\Delta} = \begin{pmatrix} v_1^T V''_{\Delta} v_1 & v_1^T V''_{\Delta} v_2 \\ v_2^T V''_{\Delta} v_1 & v_2^T V''_{\Delta} v_2 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$= (1/a^2) \begin{pmatrix} n_1^2(A + 2g_1) + \phi_1^2(A - 2g_1) & -K(n_1 n_2 + \phi_1 \phi_2) \\ -K(n_1 n_2 + \phi_1 \phi_2) & n_2^2(B - 2g_2) + \phi_2^2(B + 2g_2) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

This matrix is also trivial to diagonalize. Once again, it is not particularly illuminating to see the eigenspectrum. It is clear that the mixing between the modes is controlled by K . If we take $K \rightarrow 0$, there is no mixing. The spectrum is given by

$$\omega^2 = \alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \quad (2.56)$$

where

$$\alpha = (1/2a^2) (n_1^2(A + 2g_1) + \phi_1^2(A - 2g_1) + n_2^2(B - 2g_2) + \phi_2^2(B + 2g_2)) \quad (2.57)$$

$$\beta = (1/2a^2) (n_1^2(A + 2g_1) + \phi_1^2(A - 2g_1) - n_2^2(B - 2g_2) - \phi_2^2(B + 2g_2)) \quad (2.58)$$

$$\gamma = -(1/2a^2) K(n_1 n_2 + \phi_1 \phi_2). \quad (2.59)$$

The excitation of these pseudo-Goldstone modes correspond to tunneling across the junction of the electron fluid. On the superconducting side, it might comprise of standard Cooper pairs, however the mechanism of high temperature superconductivity is not presently understood. On the anti-ferromagnetic side it is an spin ordered state of the electron fluid which is being excited. It would be interesting to observe the currents corresponding to this exchange.

3. Conclusions

We have shown how to formulate the Josephson effect in the field theoretic language of effective Lagrangians. This allowed for a straightforward generalization to the theatre of non-abelian symmetries and the corresponding non-abelian Josephson effect. We find that the Josephson effect corresponds to excitations of pseudo-Goldstone bosons. The field theoretic description of a superconductor requires that the symmetry is spontaneously broken, which gives rise to Goldstone bosons. For two uncoupled superconductors, or generalized systems which could undergo the Josephson effect, there is a doubling of the symmetries, simply because all the symmetries of the model occur separately in each distinct superconductor.

Since there is a doubling of the symmetry, there is a consequent doubling of the number of Goldstone bosons produced. Coupling the two superconductors together explicitly breaks the doubled symmetry to its diagonal subgroup. This coupling is assumed to be weak, as is the case in the usual Josephson effect. Hence the would be Goldstone bosons of the softly broken symmetry become slightly massive, and are called pseudo-Goldstone bosons.

We have demonstrated our formalism for the usual abelian Josephson effect and for two generalizations to non-abelian symmetries. The first is $U(2) \times SO(3)$ and the second application is to the $SO(5)$ model for the complex of the high temperature superconductivity and anti-ferromagnetism.

4. Acknowledgments

We thank NSERC of Canada for financial support.

References

- [1] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962)
- [2] R. P. Feynman, R. Leighton, M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics, Volume 3," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA, (1963)
- [3] J. Goldstone, *Nuovo Cimento.* **19**, 1 (1961)
- [4] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1698 (1972).
- [5] S.C. Zhang, *Science* **275**, 1089 (1997)
- [6] E. Demler, A. J. Berlinsky, C. Kallin, G. B. Arnold, M. R. Beasley *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2917 (1998)
- [7] V. Ambegoakar, P. G. deGennes, D. Rainer *Phys. Rev.* **A9**, 2676 (1974)

CHAPITRE 4

Conclusion

L'étude de l'effet Josephson a permis de comprendre certains de ses principes. La possibilité de considérer l'ensemble des paires de Cooper d'un supraconducteur par un champ qui lui est proprement défini a été bien utile. Les paires de Cooper étant entrelacées et liées les unes dans les autres dans un supraconducteur parfait, cette approximation est sans aucun doute valide. Ce champ supraconducteur $|\Psi\rangle$, que l'on a représenté par un paramètre d'ordre supraconducteur Ψ dans un modèle de symétrie $U(1)$, possède une grandeur à son minimum (très près du minimum, c'est une condition pour l'existence de la supraconductivité et de la formation des paires de Cooper) que l'on a normalisée à $\langle\Psi|\Psi\rangle \approx \Psi^\dagger\Psi = \rho$ où ρ est la densité des paires de Cooper dans le supraconducteur. L'effet Josephson provient d'une faible interaction entre deux de ces supraconducteurs par effet de proximité. Une interaction de la forme $K|\Psi_G\rangle\langle\Psi_D|$ pour deux champs distincts G et D et avec une valeur de K très faible par rapport aux valeurs du système (on avait posé $\frac{K\Delta}{\hbar}$ négligeable) produit un courant observable en analysant l'hamiltonien pour chacun des champs. L'hamiltonien deviendra :

$$H = E_G \langle\Psi_G| + E_D \langle\Psi_D| + K |\Psi_G\rangle \langle\Psi_D| + K |\Psi_D\rangle \langle\Psi_G|. \quad (4.1)$$

Ce courant est constant dans un laps de temps appréciable s'il n'y a pas de différence de potentiel entre les supraconducteurs G et D et il est oscillant et de fréquence $2eV$ s'il y a une différence de potentiel de $2eV$ entre les supraconducteurs G et D. La grandeur de ce courant est de l'ordre de $K\rho \sin \Delta\theta$, variable définie dans les chapitres précédents.

Avec l'utilisation d'un formalisme lagrangien, on a montré qu'il y a une direction effective où il y a création de bosons de Goldstone et une autre que l'on peut qualifier de pseudo-Goldstone. On a aussi vu que le courant de Josephson provenait directement de la cinétique dans la direction pseudo-Goldstone. Pour des systèmes où leur modèle de symétrie est supérieur à $U(1)$ (on a montré pour un modèle $U(2) \times SO(3)$), il y a plusieurs de ces directions Goldstone/pseudo-Goldstone dans un système de jonction. Un courant dans cette jonction est produit par les mêmes mécanismes, soit par les directions pseudo-Goldstone. L'équation de ce courant pour des modèles de symétries supérieures à $U(1)$ peuvent posséder les mêmes caractéristiques pour les conditions où il y ait ou non une différence de potentiel entre chaque état de modèle de symétrie de part et d'autre de la jonction. Le formalisme ne faisant pas état de la nature des paires de Cooper d'électrons autre que celle qu'elles puissent être décrites par un champ macroscopique, on peut supposer qu'il peut exister d'autres états "supraconducteurs", avec des constituants autres que des électrons, qui permettent de tels courants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JOSEPHSON, B.D., *Phys. Lett.*, 1:251, 1962.
- [2] ZHANG, Shou-Cheng, *A Unified Theory Based on $SO(5)$ Symmetry of Superconductivity and Antiferromagnetism*, *Science*, vol. 275, 1997.
- [3] ASHCROFT, Neil W., MERMIN, N. David, *Solid state physics*, Thomson Learning Inc., 1976.
- [4] FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B. and SANDS, Matthew, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley Pub. Co., 1963-65.
- [5] BARONE, Antonio, *Physics and applications of the Josephson effect*, Wiley, 1982.
- [6] TINKHAM, Michael, *Introduction to superconductivity 2nd ed.*, McGraw-Hill Inc., 1996.
- [7] KADANOFF, Leo. P., *Statistical physics : statics, dynamics and renormalization*, World Scientific, 2000.
- [8] ANDERSON, P.W., *Concepts in solids : lectures on the theory of solids*, Benjamin, 1963.
- [9] FETTER, Alexander L., WALECKA, John Dirk, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill Inc., 1971.