

Université de Montréal

Suites spectrales et exemples d'applications

par

Olivier Cyr

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

octobre 2006



QA

3

U54

2006

V021

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Suites spectrales et exemples d'applications

présenté par

Olivier Cyr

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Prof. K. Benabdallah

(président-rapporteur)

Prof. A. Broer

(directeur de recherche)

Prof. O. Cornea

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

18 octobre 2006

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous étudierons les suites spectrales, un outil algébrique développé au milieu du siècle précédent qui sert à calculer les groupes d'homologies et de cohomologies. Elles apparaissent de façon naturelle dans des situations purement algébriques. Par exemple, dans les complexes différentiels simples filtrés et gradués, les complexes différentiels doubles gradués ou les couples exacts. (chapitre 2)

L'existence de deux suites spectrales pour les complexes différentiels doubles gradués possède des applications fort intéressantes dans des domaines fort variés, notamment en géométrie et dans la théorie des invariants. Nous en donnerons ainsi deux exemples, le premier étant une preuve au théorème de De Rham qui fait le lien entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie singulière d'une variété (chapitre 3). Le second est un critère qui utilise la cohomologie d'un groupe fini G qui agit sur un anneau R pour déterminer si l'anneau des invariants R^G est Cohen-Macaulay ou non (chapitre 4).

MOTS CLÉS

Suites spectrales, complexe filtré, couple exact, complexe double, théorème de De Rham, cohomologie de De Rham, cohomologie singulière, cohomologie de Čech, théorie des invariants, complexe de Koszul, cohomologie des groupes.

SUMMARY

ABSTRACT AND KEY WORDS

In this thesis, we will study spectral sequences, an algebraic tool developed in the middle of the previous century which is used to compute groups of homology and cohomology. They arise naturally in some algebraic situations. Some examples are filtered simple differential graded complexes, double differential graded complexes and exact couples.

The existence of two spectral sequences for double differential graded complexes implies some interesting applications in many different subject, especially in geometry and in invariant theory. We will present two examples. The first will be a proof of De Rham's theorem which links the De Rham cohomology and the singular cohomology of a manifold. The second is a condition about the Cohen-Macaulayness of the invariant ring R^G , R being a ring and G a finite group acting on R , that uses the cohomology of the groups G .

KEY WORDS

Spectral sequences, filtered complex, exact couple, double complex, De Rham theorem, De Rham cohomology, singular cohomology, Čech cohomology, invariant theory, Koszul complex, cohomology of groups

TABLE DES MATIÈRES

Résumé et mots clés	i
Résumé	i
Mots clés	i
Summary	ii
Abstract and key words	ii
Key words	ii
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Cohomologie d'un point de vue algébrique	4
1.1. Complexe différentiel simple	4
1.2. Complexe différentiel double	15
Chapitre 2. Suites spectrales	21
2.1. Définitions	21
2.2. Suite spectrale d'un complexe simple filtré	24
2.3. Suite spectrale d'un couple exact	32
2.4. Équivalence des suites spectrales provenant d'un couple exact et d'un complexe filtré	36
2.5. Suite spectrale d'un complexe double	38

Chapitre 3. Théorème de De Rham	45
3.1. Cohomologie de Čech	45
3.1.1. Les préfaisceaux	45
3.1.2. Limite directe.....	46
3.1.3. Définition de la cohomologie	47
3.2. Cohomologie de De Rham.....	53
3.2.1. Définition pour \mathbb{R}^n	53
3.2.2. Définition pour une variété différentielle quelconque.....	59
3.2.3. Le complexe de De Rham-Čech	63
3.3. Cohomologie singulière.....	67
3.3.1. Homologie singulière à coefficients entiers	67
3.3.2. Cohomologie singulière à coefficients dans un groupe abélien ...	72
Chapitre 4. Théorie des invariants	78
4.1. Définitions préalables	78
4.2. Cohomologie des groupes	82
4.3. Théorie des invariants.....	87
Bibliographie	92
Annexe A.	A-i
A.1. Existence d'une partition d'unité	A-i
A.2. Équivalence en homologie des complexes $S_q(X)$ et $S_q^u(X)$	A-iv
A.3. Existence d'un bon recouvrement pour un espace topologique triangularisable.....	A-xiii

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais remercier Abraham Broer, mon directeur de recherche, pour avoir été si compréhensif. Ce fut un bonheur d'avoir pu travailler avec lui.

Je veux également remercier le CRSNG et le FQRNT, ces organismes qui m'ont fourni le support financier nécessaire afin que je puisse étudier sans avoir eu à me tracasser avec un quelconque souci matériel.

Finalement, je tiens également à remercier ce quelqu'un tout spécial pour moi, que je viens tout juste d'épouser et sans qui, je ne me serais pas rendu jusqu'au bout de ce travail...

INTRODUCTION

Supposons que nous avons deux matrices, f et g dont le produit est zéro et nous voulons savoir, pour un vecteur v vérifiant $g \cdot v = 0$ s'il existe toujours un vecteur u qui satisfait $v = f \cdot u$. La réponse est évidemment non et nous pouvons "quantifier" le nombre de vecteurs qui font défaut par

$$d = n - \text{rang}(f) - \text{rang}(g)$$

C'est sous cette forme que l'algèbre homologique a fait son apparition au début du XIXe siècle et c'est dans le chapitre 1 que nous décrirons les bases de ce domaine dans un langage plus moderne, bien entendu. Le livre de Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra* [3], s'est révélé bien utile pour construire ce chapitre et le serait encore plus, si le lecteur veut approfondir ce domaine.

Plus tard, au début du XXe siècle, plusieurs topologistes algébriques, dont Henri Poincaré, (celui-là même qui émit il y a un peu plus d'un siècle, une de ces fameuses conjectures qui a fait réfléchir bon nombre de mathématiciens et qui vient tout juste d'être résolue), ont utilisé ces idées pour tenter de décrire les "trous de dimension n " dans les complexes simpliciaux. Puis, graduellement, les mathématiciens se sont rendus compte qu'ils pouvaient substituer les espaces vectoriels par des R -modules, R étant un anneau.

Au milieu du XX-ième siècle, pendant la deuxième guerre mondiale, les suites spectrales ont fait timidement leur apparition. Le premier à les développer est un nantais, Jean Leray. Il l'a fait alors qu'il était prisonnier dans un camp d'officier autrichien. Ces idées, mal reçues au départ par les mathématiciens américains, furent bien développées par Jean-Pierre Serre, Henri Cartan et Jean-Louis Koszul. Ainsi, ce sera au chapitre 2 que nous introduirons la notion de suite spectrale tout

en s'inspirant du livre de John McCleary. *A user's guide for spectral sequences*. [2].

En 1931, un suisse, George De Rham a réussi à montrer que les groupes de la cohomologie de De Rham sont des invariants topologiques et ce, en prouvant le théorème qui porte son nom. Nous reproduirons son exploit dans le chapitre 3, mais en nous servant des suites spectrales pour faire la preuve, tout en suivant le livre de Raoul Bott et de Loring W. Tu, *Differential forms in algebraic topology* [1].

La théorie des invariants quant à elle, a été un domaine de recherche très important vers la fin du XIX-ième siècle. Plusieurs domaines y sont reliés, notamment les groupes et les fonctions symétriques, l'algèbre commutative, la cohomologie des groupes et la représentation des groupes de Lie. C'est un article de Gregor Kemper ([10]) qui m'a inspiré le contenu du chapitre 4. Un de ses résultats y est présenté, mais avec une preuve alternative qui utilise encore une fois les suites spectrales.

Chapitre 1

COHOMOLOGIE D'UN POINT DE VUE ALGÈBRIQUE

Dans ce chapitre, nous faisons une introduction à l'algèbre homologique, version cohomologique. Nous définirons les notions de bases, c'est-à-dire les complexes différentiels et les opérateurs différentiels desquels vient la cohomologie. Nous montrerons également le caractère fonctoriel de la cohomologie et nous finirons par l'introduction des complexes doubles avec lesquels nous travaillerons beaucoup dans les chapitres suivants.

1.1. COMPLEXE DIFFÉRENTIEL SIMPLE

Un complexe différentiel simple C sur un anneau R ou un R -module différentiel est un R -module C muni d'une application R -linéaire $D : C \rightarrow C$ qui vérifie $D^2 = 0$ et que nous appellerons opérateur différentiel ou, simplement, la différentielle de C . Si le contexte est suffisamment clair, nous appellerons C tout simplement un complexe.

La cohomologie d'un tel complexe C est définie par

$$H(C) = \ker D / \operatorname{im} D$$

que nous noterons également $H_D(C)$ si le contexte n'est pas clair quant à la différentielle utilisée. Remarquons que $H(C)$ est un R -module bien défini car $D(D(C)) = 0$ implique $D(C) = \operatorname{im} D \subset \ker D$. Dans le cas où C est gradué, nous avons $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$ où chaque C^k est un R -module et où nous demandons que

la différentielle $D : C^k \rightarrow C^{k+1}$ soit de degré un. La cohomologie de C s'écrit

$$H(C) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H(C^k)$$

où $H(C^k) = \text{Ker } D \cap C^k / \text{Im } D \cap C^k$. D'ailleurs, nous pourrions noter dans ce cas $H(C^k)$ par $H^k(C)$ ce qui fait que $H(C)$ est également gradué.

Exemple 1.1.1. *Considérons le \mathbb{Z} -module gradué $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ avec la multiplication par p^r comme opérateur d :*

$$\dots \xrightarrow{\times p^r} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p^r} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p^r} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p^r} \dots$$

avec p un nombre premier et r et n des entiers naturels qui vérifient $n/2 \leq r \leq n$.

C est un complexe différentiel sur \mathbb{Z} , puisque

$$d^2 = 0 \iff p^{2r} \equiv 0 \pmod{p^n} \iff r \geq n/2.$$

Nous pouvons donc en calculer la cohomologie. Pour chaque composante, nous avons $\text{im } d \simeq p^r \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ et $\text{ker } d \simeq p^{n-r} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. D'où

$$H(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^{2r-n} \mathbb{Z}$$

pour tout degré k du complexe C .

Définition 1.1.2. *Soit C un complexe différentiel sur un anneau R et D son opérateur différentiel. Alors, $B \subset C$ est un sous-complexe différentiel de C sur R (ou seulement un sous-complexe de C) s'il en est un sous- R -module et s'il est fermé sous D , c'est-à-dire $D(B) \subset B$. Ainsi, son opérateur différentiel sera $D|_B$ induit par celui de C et nous pourrions définir*

$$H(B) = \text{ker } D|_B / \text{im } D|_B.$$

De plus, le quotient C/B sera bien défini comme quotient de R -module et dans le cas gradué, nous aurons $(C/B)^n = C^n/B^n$.

Exemple 1.1.3. *Considérons le complexe C de l'exemple 1.1.1 et son sous-complexe $B = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} p^m \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. $D(B) \subset B$ puisque $p^r p^m \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = p^{r+m} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \subset p^m \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. Ainsi, pour chaque composante de B , nous avons $\text{ker } D|_B \simeq p^{n-m-r} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ et $\text{im } D|_B \simeq p^{m+r} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$, ce qui implique que $H(B^k) \simeq \mathbb{Z}/p^{2(m+r)-n} \mathbb{Z}$.*

Définition 1.1.4. Un R -module différentiel C est dit acyclique si $H(C) = 0$ ou, si $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$ est gradué, $H(C^k) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.1.5. Le complexe de l'exemple 1.1.1 est acyclique pour n pair et $r = n/2$.

Définition 1.1.6. Un homomorphisme de complexes est un homomorphisme de R -modules $f : B \rightarrow C$ entre deux complexes B et C tel que f commute avec les deux différentielles c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{D_B} & B \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{D_C} & C \end{array}$$

Lemme 1.1.7. Un homomorphisme de complexes induit un homomorphisme de R -modules bien défini entre la cohomologie des complexes.

DÉMONSTRATION. Soient B et C , deux complexes différentiels avec D_B et D_C , leurs opérateurs respectifs et $f : B \rightarrow C$ un homomorphisme de complexes. Nous définissons l'homomorphisme induit en cohomologie \bar{f} par

$$\begin{aligned} \bar{f} : H(B) &\rightarrow H(C) \\ b + \text{im } D_B &\mapsto f(b) + \text{im } D_C \end{aligned}$$

\bar{f} respecte bien la structure de R -module puisque f le fait. De plus, pour s'assurer que \bar{f} est bien définie, c'est-à-dire que deux représentants différents du même élément de $H(B)$ ont la même image, il suffit de montrer que

$$f(\text{im } D_B) \subset \text{im } D_C.$$

Ainsi, pour $a \in B$, $D_B(a) \in \text{im } D_B$ et $f(D_B(a)) = D_C(f(a)) \in \text{im } D_C$. \square

Remarque 1.1.8. Nous noterons également par $H(f)$ l'homomorphisme induit en cohomologie par f .

Remarque 1.1.9. Nous dirons que f est un quasi-isomorphisme, si $H(f)$ est un isomorphisme de R -module.

Exemple 1.1.10. Soient B et C , deux R -modules différentiels avec leurs différentielles respectives D_B et D_C et soit $f : B \rightarrow C$, un homomorphisme de

R -modules. Supposons qu'il existe $K : B \rightarrow C$ tel que nous pouvons écrire f sous la forme

$$f = (\pm K D_B \pm D_C K)$$

où K est une application de complexes (c'est-à-dire un homomorphisme qui respecte la structure de R -modules de B et C , mais qui ne commute pas nécessairement avec leurs différentielles). Alors, f est bien un homomorphisme de complexes puisqu'il commute avec les différentielles :

$$\begin{aligned} D_C f &= D_C(\pm K D_B \pm D_C K) \\ &= \pm D_C K D_B \pm D_C^2 K \\ &= (\pm K D_B^2 \pm D_C K D_B) \\ &= (\pm K D_B \pm D_C K) D_B \\ &= f D_B \end{aligned}$$

et nous appellerons f un opérateur d'homotopie.

Il induit donc un homomorphisme de R -modules entre $H(B)$ et $H(C)$, $H(f)$. En fait, $H(f) = 0$ puisque

$$f(\ker D_B) = \pm K D_B \pm D_C K(\ker D_B) = \pm D_C(K(\ker D_B)) \subset \text{im } D_C,$$

l'image de D_C étant le zéro de $H(C)$.

Lemme 1.1.11. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux homomorphismes de complexes, alors

- 1) $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$ et
- 2) Si $B = A$ et f est l'identité de A , alors $H(f)$ est l'identité de $H(A)$.

DÉMONSTRATION. Pour 1, considérons $x \in H(A)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} H(g \circ f)(x) &= g \circ f(x) + \text{im } D_C \\ &= H(g)(f(x) + \text{im } D_B) \\ &= H(g) \circ H(f)(x). \end{aligned}$$

Pour 2. juste considérer $H(\text{Id})(x + \text{im } D_A) = \text{Id}(x) + \text{im } D_A = x + \text{im } D_A$ pour $x \in \ker D_A$. \square

Remarque 1.1.12. H . comme il est défini et grâce au lemme 1.1.11 peut être considéré comme un foncteur de la catégorie des complexes différentiels à celle des R -modules.

Définition 1.1.13. Une courte suite exacte de R -modules est une suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

pour laquelle A , B et C sont des R -modules et f et g sont des homomorphismes de R -modules respectivement injectif et surjectif qui vérifient

$$\ker g = \text{im } f.$$

Une longue suite exacte de R -modules est une suite de R -modules $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ avec des homomorphismes de R -modules $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ qui vérifient en chaque R -module A_n que

$$\ker f_n = \text{im } f_{n-1}$$

Une longue suite exacte peut être représentée par un schéma de ce type :

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Remarque 1.1.14. Les définitions pour les courtes et longues suites exactes de complexes sont les mêmes que pour celles de R -modules, mais avec des R -modules différentiels et des homomorphismes de complexes.

Exemple 1.1.15. Soit $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$, un R -module différentiel gradué avec D pour différentielle. Supposons que C est acyclique et définissons les homomorphismes de R -modules d_n par

$$d_n = D|_{C^n}.$$

Alors, la suite

$$\cdots \longrightarrow C^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} C^m \xrightarrow{d_m} C^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots$$

est une longue suite exacte de R -modules. En effet, $H(C) = 0$ implique

$$H(C^k) = \ker d_k / \text{im } d_{k-1} = 0$$

et donc, $\ker d_k = \text{im } d_{k-1}$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.1.16. *Toute courte suite exacte de complexes différentiels gradués*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

induit une longue suite exacte de R -modules

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^n(A) \xrightarrow{H(f)} H^n(B) \xrightarrow{H(g)} H^n(C) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H(f)} \dots$$

avec ∂ un homomorphisme de R -modules appelé également un opérateur de bord ou connectant.

Avant de donner la preuve de cette proposition, nous allons commencer par prouver le lemme suivant, appelé lemme du serpent :

Lemme 1.1.17 (lemme du serpent). *Soit le diagramme commutatif suivant de R -modules*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \xrightarrow{q} & B' & \xrightarrow{p} & C' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C \end{array}$$

Si les lignes sont exactes, alors la suite suivante est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker q & \longrightarrow & \ker f & \xrightarrow{q'} & \ker g & \xrightarrow{p'} & \ker h \\ & & & & & \searrow \partial & & & \\ & & \text{coker } f & \xrightarrow{i'} & \text{coker } g & \xrightarrow{j'} & \text{coker } h & \longrightarrow & \text{coker } j & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec les applications q' , p' , i' et j' induites de p , q , i et j respectivement et ∂ l'opérateur de bord défini par

$$\partial(c') = i^{-1} \circ g \circ p^{-1}(c') \quad c' \in \ker h.$$

De plus, l'injectivité de q implique celle de q' ; la surjectivité de j implique celle de j' .

Ce lemme est un exemple typique de chasse de diagramme qui se comprend mieux avec un diagramme sur lequel nous pourrions écrire, mais nous pouvons quand même en donner une preuve sous forme standard qui sera plutôt exhaustive :

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, les applications q' , p' , i' et j' sont bien des homomorphismes de R -modules puisqu'ils sont induits de p , q , i et j respectivement, des homomorphismes de R -modules.

(1) Montrer que $\ker f \xrightarrow{q'} \ker g \xrightarrow{p'} \ker h$ est exacte.

(a) D'abord, p' et q' sont bien définis puisque, pour q' , $f(x) = 0$ implique $0 = i \circ f(x) = g \circ q(x)$ d'où $q(x) \in \ker g$ pour $x \in \ker f$. Même chose pour p' .

(b) Ensuite, montrons $\ker p' = \text{im } q'$.

$\ker p' = \ker p \cap \ker g = \text{im } q \cap \ker g \supset \text{im } q'$. Pour l'inclusion inverse, considérons $x \in \text{im } q \cap \ker g$. Ainsi, $\exists a' \in A'$ $q(a') = x$. Mais $g(x) = 0$ implique $g \circ q(a') = i \circ f(a') = 0$. i est injectif, donc $a' \in \ker f$ et x est bien dans l'image de q' .

(2) Montrer que $A/f(A') \xrightarrow{i'} B/g(B') \xrightarrow{j'} C/h(C')$ est exacte.

(a) i' et j' sont bien définis.

En effet, si nous prenons par exemple i' , nous devons vérifier que $i(f(A')) \subset g(B')$. Mais puisque $i \circ f(a') = g \circ q(a') \in g(B') \forall a' \in A'$, alors l'inclusion est vérifiée.

(b) $\ker j' = \text{im } i'$.

D'abord, nous vérifions facilement que $j' \circ i'(a + f(A')) = j \circ i(a) + h(C') = 0$.

Quant à l'autre inclusion, nous avons

$$\begin{aligned} x + g(B') \in \ker j' &\Rightarrow j(x) \in h(C') = h \circ p(B') \quad (p \text{ surjectif}) \\ &\Rightarrow \exists b' \in B' \text{ tel que } j(x) = h \circ p(b') = j \circ g(b') \\ &\Rightarrow \exists b' \in B' \text{ tel que } x - g(b') \in \ker j = \text{im } i \\ &\Rightarrow \exists b' \in B' \exists a \in A \quad i(a) = x - g(b') \\ &\Rightarrow \exists a \in A \quad i(a + f(A')) = i(a) + g(B') = x + g(B'). \end{aligned}$$

(3) Montrer que $\ker g \xrightarrow{p'} \ker h \xrightarrow{\partial} A/f(A') \xrightarrow{i'} B/f(B')$ est exacte.

(a) En premier lieu, vérifions que l'opérateur de bord $\partial(c') = i^{-1} \circ g \circ p^{-1}(c')$ est bien défini, car la surjectivité de p nous assure qu'il existe un élément dans $p^{-1}(c')$, mais pas de son unicité et l'injectivité de i nous assure de l'unicité d'un élément $i^{-1}(b)$, mais seulement lorsqu'il existe. Mais ces conditions sont vérifiées puisque :

$$\begin{aligned} p(b') = c' \in \ker h &\Rightarrow h \circ p(b') = j \circ g(b') = 0 \\ &\Rightarrow g(b') \in \ker j = \text{im } i \end{aligned}$$

Donc, $i^{-1}(g')$ existe et quant à l'unicité :

$$\begin{aligned} p(b') = c' = p(b'') &\Rightarrow b' - b'' \in \ker p = \text{im } q \\ &\Rightarrow \exists a' \in A' \quad q(a') = b' - b'' \\ &\Rightarrow \exists a' \in A' \quad i^{-1} \circ g(b' - b'') = i^{-1} \circ g \circ q(a') \\ &= i^{-1} \circ i \circ f(a') = f(a') = 0 \in A/f(A') \\ &\Rightarrow i^{-1} \circ g(b') = i^{-1} \circ g(b''). \end{aligned}$$

(b) De plus, ∂ est également un homomorphisme de R -modules puisque, pour $r \in R$, $c' \in C'$, $b' \in B'$, $p(b') = c'$ implique que $r \cdot c' = r \cdot p(b') = p(r \cdot b')$ et donc que

$$g \circ p^{-1}(r \cdot c') = g(r \cdot b') = r \cdot g(b').$$

parce que g est un R -homomorphisme, et de même façon pour i , nous avons

$$i^{-1}(r \cdot g(b')) = r \cdot (i^{-1} \circ g(b')).$$

D'où, finalement, $\partial(r \cdot c') = r \cdot \partial(c')$. Et pour $c_1, c_2 \in C'$, $b_1, b_2 \in B'$ qui vérifient $p(b_1) = c_1$ et $p(b_2) = c_2$, puisque p est un R -homomorphisme, nous avons

$$c_1 + c_2 = p(b_1 + b_2)$$

et donc,

$$g \circ p^{-1}(c_1 + c_2) = g(b_1 + b_2) = g(b_1) + g(b_2).$$

Nous appliquons encore le même principe pour i^{-1} pour avoir

$$i^{-1}(g(b_1) + g(b_2)) = i^{-1} \circ g(b_1) + i^{-1} \circ g(b_2),$$

ce qui nous donne $\partial(c_1 + c_2) = \partial(c_1) + \partial(c_2)$.

(c) Maintenant, $\ker \partial = \text{im } p'$.

D'un côté, nous avons $\partial \circ p(b') = i^{-1} \circ g(b') = 0$ puisque $b' \in \ker g$ et de l'autre, nous avons

$$\begin{aligned} c' \in \ker \partial &\Rightarrow \partial(c') \in f(A') \\ &\Rightarrow \exists a' \in A' \quad f(a') = \partial(c') = i^{-1} \circ g \circ p^{-1}(c') \\ &\Rightarrow \exists a' \in A' \quad i \circ f(a') = g \circ q(a') = g \circ p^{-1}(c') \\ &\Rightarrow \exists a' \in A' \quad p^{-1}(c') - q(a') \in \ker g \\ &\Rightarrow \exists a' \in A' \quad p'(p^{-1}(c') - q(a')) \in p'(\ker g) = \text{im } p' \\ &\Rightarrow p \circ p^{-1}(c') - p \circ q(a') = c' \in \text{im } p'. \end{aligned}$$

(d) Et finalement, $\text{im } \partial = \ker i'$

Pour une inclusion, $i' \circ \partial(c') = g(b') = 0 \in B/g(B')$ pour $p(b') = c'$ et pour l'autre, $i'(a + f(A')) = 0 \in B/g(B')$ implique l'existence de $b' \in B'$ qui vérifie $i(a) = g(b')$ et du coup, $\partial(p(b')) = i^{-1} \circ g(b') = a$.

(4) Et pour la dernière partie du lemme, nous voulons montrer que

$$0 \longrightarrow \ker q \longrightarrow \ker q' \xrightarrow{q'} \ker g$$

et

$$\text{coker } g \xrightarrow{j'} \text{coker } h \xrightarrow{\pi} \text{coker } j \longrightarrow 0$$

sont exactes, avec $\pi : C/h(C') \rightarrow C/j(B)$ défini par

$$\pi(c + h(c')) = c + j(g(b')),$$

b' vérifiant $p(b') = c'$ et existant à cause de la surjectivité de p .

- (a) Vérifier $\ker q \subseteq \ker f$: si $q(a') = 0$ pour $a' \in A'$, alors $g \circ q(a') = i \circ f(a') = 0$ et $f(a') = 0$ à cause de l'injectivité de i .
- (b) Montrer $\ker q = \ker q'$: puisque $q' = q|_{\ker f}$, alors

$$\ker q' = \ker q \cap \ker f = \ker q$$

à cause de l'inclusion démontrée juste précédemment.

- (c) π est clairement surjectif puisqu'il envoie la classe dans $C/h(C')$ de c vers la classe de c dans $C/j(B)$.
- (d) Montrer $\ker \pi = \text{im } j'$: $\pi \circ j' = 0$ puisque

$$\pi(j'(b + g(b'))) = \pi(j(b) + h(p(b'))) = j(b) + j(g(b')) = 0 \in C/j(B).$$

Et de l'autre côté,

$$\begin{aligned} \pi(c + h(c')) = 0 \in C/j(B) &\Rightarrow \exists b \in B \quad \pi(c + h(c')) = j(b) \\ &\Rightarrow \exists b \in B \exists b' \in B' \quad c + j(g(b')) = j(b) \\ &\Rightarrow c \in \text{im } j \end{aligned}$$

□

Maintenant, nous avons les outils nécessaires pour démontrer la proposition 1.1.16 :

DÉMONSTRATION. Considérons la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de complexes différentiels gradués et définissons $Z^n(A) = \ker d \cap A^n$ qui est bien un R -module parce qu'il est l'intersection de deux R -modules. Ainsi, la courte suite exacte implique que les lignes du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{f} & B^n & \xrightarrow{g} & C^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{n+1} & \xrightarrow{f} & B^{n+1} & \xrightarrow{g} & C^{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sont exactes. En appliquant le lemme du serpent à ce diagramme, nous obtenons que les suites suivantes sont exactes :

$$0 \longrightarrow Z^n(A) \xrightarrow{f'} Z^n(B) \xrightarrow{g'} Z^n(C)$$

$$A^{n+1}/d(A^n) \xrightarrow{f''} B^{n+1}/d(B^n) \xrightarrow{g''} C^{n+1}/d(C^n) \longrightarrow 0$$

L'application $d : A^n/d(A^{n-1}) \rightarrow Z^{n+1}A$ induite par d est un homomorphisme de R -modules parce que d en est un et est bien défini parce que $d(A^{n-1}) \subset \ker d$. Ainsi, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} A^n/d(A^{n-1}) & \xrightarrow{f'} & B^n/d(B^{n-1}) & \xrightarrow{g'} & C^n/d(C^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^{n+1}(A) & \xrightarrow{f''} & Z^{n+1}(B) & \xrightarrow{g''} & Z^{n+1}(C) \end{array}$$

a un sens et ses lignes sont exactes. En appliquant une seconde fois le lemme du serpent, nous trouvons

$$H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(A) \longrightarrow H^{n+1}(B) \longrightarrow H^{n+1}(C)$$

exact pour n'importe quel n . En effet, en prenant par exemple pour A ,

$$(\ker d : A^n/d(A^{n-1}) \rightarrow Z^{n+1}(A)) = Z^n(A)/d(A^{n-1}) = H^n(A)$$

et que

$$(\text{coker } d : A^n/d(A^{n-1}) \rightarrow Z^{n+1}(A)) = Z^{n+1}(A)/d(A^n) = H^{n+1}(A).$$

En collant bout à bout, les suites obtenues, nous trouvons la longue suite exacte attendue. \square

Corollaire 1.1.18. *Soit*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

une courte suite exacte de complexes. Alors, nous avons

- (1) *L'acyclicité de deux des complexes implique celle du troisième.*
- (2) *Si C est acyclique, alors $H(f)$ est un isomorphisme et $H(A) \simeq H(B)$.*

DÉMONSTRATION. Ces résultats sont une conséquence directe de la proposition 1.1.16. \square

Exemple 1.1.19. Soit A , un complexe, et $B \subset A$, un sous-complexe. Alors,

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/B \longrightarrow 0$$

est exacte avec i , l'inclusion et π la projection canonique. Il y a donc une longue suite exacte

$$\dots \xrightarrow{H(i)} H^n(A) \xrightarrow{H(\pi)} H^n(A/B) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(B) \xrightarrow{H(i)} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H(\pi)} \dots$$

où en fait, l'opérateur de bord est donné par

$$\partial((a + B) + d((A/B)^{n-1})) = da + d(B^n)$$

puisque

$$\begin{aligned} i^{-1} \circ d \circ \pi^{-1}(a + B) &= i^{-1} \circ d(a) \in A \\ &= d(a) \in B \subset A. \end{aligned}$$

1.2. COMPLEXE DIFFÉRENTIEL DOUBLE

Un double complexe différentiel C est un R -module C muni de deux homomorphismes de R -modules δ et d , appelés également les différentielles de C qui vérifient

$$d^2 = \delta^2 = d\delta - \delta d = 0.$$

Ainsi, il y aura deux cohomologies associées à C , soit une pour chaque différentielle. Elles sont évidemment définies par

$$H_\delta(C) = \ker \delta / \operatorname{im} \delta$$

$$H_d(C) = \ker d / \operatorname{im} d$$

Dans le cas où C est un double complexe différentiel gradué, il peut s'écrire

$$C = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} C^{p,q}$$

avec $C^{p,q}$ des R -modules et est donc un R -module bigradué muni de deux différentielles. Ces différentielles, $d : C^{p,q} \rightarrow C^{p,q+1}$ et $\delta : C^{p,q} \rightarrow C^{p+1,q}$, ont leurs bidegrés respectifs définis par $(0, 1)$ et $(1, 0)$ et vérifient toujours

$$d^2 = \delta^2 = d\delta - \delta d = 0.$$

De plus, d pourra être appelée la différentielle verticale et δ , la différentielle horizontale en référence au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \dots & & \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & C^{p,q+1} & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1,q+1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & C^{p,q} & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1,q} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ & & \dots & & \dots & & \end{array}$$

Les cohomologies de $C = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} C^{p,q}$ par rapport à d et δ sont, respectivement,

$$H_d(C) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} H_d(C^{p,q})$$

et

$$H_\delta(C) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} H_\delta(C^{p,q})$$

où sont définis $H_\delta(C^{p,q})$ et $H_d(C^{p,q})$ par

$$H_\delta(C^{p,q}) = (\ker \delta : C^{p,q} \rightarrow C^{p+1,q}) / (\text{im } \delta : C^{p-1,q} \rightarrow C^{p,q})$$

$$H_d(C^{p,q}) = (\ker d : C^{p,q} \rightarrow C^{p,q+1}) / (\text{im } d : C^{p,q-1} \rightarrow C^{p,q}).$$

D'un complexe double, nous pouvons construire un complexe simple gradué en sommant les bidegrés

$$Tot(C)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q},$$

noté $Tot(C)$. Ainsi, nous pouvons munir le complexe $Tot(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Tot(C)^n$ d'un homomorphisme de R -modules

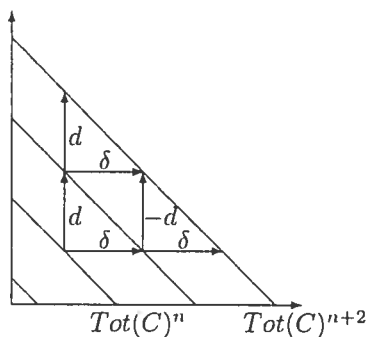
$$D = Tot(C)^n \rightarrow Tot(C)^{n+1}$$

défini comme suit : si $x \in C^{p,q} \subset Tot(C)^n$, alors

$$D(x) = \delta(x) + (-1)^p d(x).$$

Ainsi, puisque $\delta(x) \in C^{p+1,q}$ et $d(x) \in C^{p,q+1}$, alors

$$\begin{aligned} D^2(x) &= D(\delta(x)) + (-1)^p D(d(x)) \\ &= (\delta^2(x) + (-1)^{p+1} d\delta(x)) + (-1)^p (\delta d(x) + (-1)^p d^2(x)) \\ &= (-1)^p (\delta d(x) - d\delta(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$



Ce dernier calcul montre que D est bien un opérateur différentiel et donc $Tot(C)$ est un complexe différentiel pour lequel nous pouvons calculer la cohomologie par rapport à D , $H_D(Tot(C))$.

Un double complexe est dit borné lorsque chacune de ses diagonales contient un nombre fini de composantes non-nulles, c'est-à-dire que nous pouvons écrire

$$Tot(C)^n = \bigoplus_{p=s_n}^{t_n} C^{p,n-p}$$

où s_n et t_n sont des entiers qui vérifient $s_n \leq t_n$. Un exemple d'un tel double complexe est donné par $C = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} C^{p,q}$, un double complexe du premier quadrant, c'est-à-dire un complexe pour lequel $C^{p,q} = 0$ pour $p < 0$ ou pour $q < 0$ que nous pouvons écrire sous la forme

$$Tot(C)^n = \bigoplus_{i=0}^n C^{n-i,i}$$

ou représenter par le dessin suivant :

$$C = \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Par la prochaine proposition, nous voulons illustrer qu'il existe des liens entre la cohomologie des lignes et des colonnes d'un double complexe C et celle de $Tot(C)$.

Proposition 1.2.1. *Soit $C = \bigoplus C^{p,q}$ un complexe double borné avec δ pour différentielle horizontale et d pour différentielle verticale. Si toutes les lignes de C sont exactes (resp. ses colonnes), alors $Tot(C)$ est acyclique.*

DÉMONSTRATION. Considérons un cas particulier de cette proposition et nous donnerons un argument plus général à la fin du chapitre suivant, après avoir développé de puissants outils.

Considérons C , un double complexe de premier quadrant avec d et δ ses opérateurs différentiels. Supposons que $H_d(C) = 0$ (le cas $H_\delta(C) = 0$ se traitant de la même façon) et considérons

$$x = (x_0, \dots, x_n) \in Tot(C)^n = \bigoplus_{i=0}^n C^{i, n-i}$$

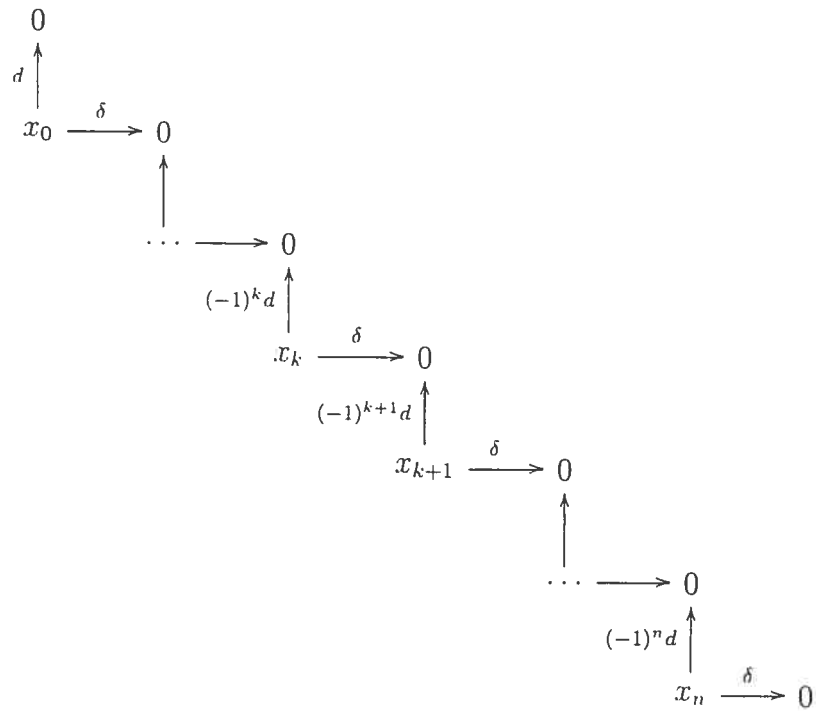
avec $x_i \in C^{i, n-i}$ pour $i = 0, \dots, n$.

Ce que nous voulons démontrer, c'est que $\ker D \subseteq \text{im } D$. En effet, à ce moment, nous aurions bien $H_D(C) = 0$.

$Dx = 0$ implique les $n + 1$ équations suivantes que nous retrouvons dans chacune des $n + 1$ composantes non-nulles de $Tot(C)^{n+1}$:

$$\begin{cases} dx_0 = 0 \\ \delta x_k + (-1)^{k+1} dx_{k+1} = 0 \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ \delta x_n = 0 \end{cases}$$

et que nous pouvons illustrer par le diagramme suivant :



Puisque $x_0 \in \ker d = \text{im } d (H_d(C) = 0)$,

$$\exists y_0 \in C^{0,n-1} \text{ tel que } dy_0 = x_0.$$

que nous pouvons représenter par le schéma suivant :

$$\begin{array}{c} x_0 \\ d \uparrow \\ y_0 \end{array}$$

De cette équation, nous trouvons

$$\delta x_0 = \delta dy_0 = d\delta y_0$$

et quand nous comparons avec $\delta x_0 - dx_1 = 0$, nous trouvons $d\delta y_0 - dx_1 = d(\delta y_0 - x_1) = 0$ d'où $(\delta y_0 - x_1) \in \ker d$ et donc.

$$\exists y_1 \in C^{1,n-2} \text{ tel que } x_1 = \delta y_0 - dy_1.$$

que nous représentons par

$$\begin{array}{ccc}
 & x_0 & \\
 d \uparrow & & \\
 y_0 & \xrightarrow{\delta} & x_1 \\
 & & -d \uparrow \\
 & & y_1
 \end{array}$$

De cette dernière équation, nous trouvons

$$\delta x_1 = \delta^2 y_0 + \delta dy_1 = \delta dy_1 = d\delta y_1.$$

En réitérant ce procédé, nous obtenons l'existence d'éléments $y_k \in C^{k, n-k-1}$ qui vérifient chacune l'équation

$$x_k = \delta y_{k-1} + (-1)^k dy_k$$

pour $1 \leq k \leq n-1$.

De plus, en appliquant δ à chaque côté de l'équation pour $k = n-1$, nous obtenons

$$\delta x_{n-1} = d\delta y_{n-1}$$

et en comparant avec $\delta x_{n-1} + (-1)^n dx_n = 0$, nous avons $d(\delta y_{n-1} + x_n) = 0$. De plus, puisque $(\text{im } d : 0 \rightarrow C^{n,0}) = 0$, $\ker d : C^{n,0} \rightarrow C^{n,1} = 0$ et alors, $x_n = \delta y_{n-1}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & x_0 & & & & & \\
 d \uparrow & & & & & & \\
 y_0 & \xrightarrow{\delta} & x_1 & & & & \\
 & & -d \uparrow & & & & \\
 & & y_1 & \xrightarrow{\delta} & \dots & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \dots & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & & & & & (-1)^{n-1} d \uparrow \\
 & & & & & & y_{n-1} \xrightarrow{\delta} x_n
 \end{array}$$

Ainsi, l'élément $y = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \text{Tot}(C)^{n-1}$ vérifie bien $Dy = x$.

□

Chapitre 2

SUITES SPECTRALES

Nous commencerons tout d'abord par donner une définition générale pour une suite spectrale et ensuite, nous en montrerons leur existence dans deux cas différents : pour un complexe filtré et également pour les couples exacts. Nous montrerons l'équivalence des suites spectrales dans les deux cas et nous utiliserons des éléments des deux techniques pour montrer l'existence de deux suites spectrales sur un double complexe. Ces dernières seront notre principal outil de travail pour les sections subséquentes.

De plus, nous définirons les suites spectrales seulement pour la cohomologie étant donné que ce sont celles-là que nous utiliserons. Il est bon de savoir qu'il existe également une version pour l'homologie et, en général, il est possible de la retrouver en pensant que c'est une notion duale à celle reliée à la cohomologie.

2.1. DÉFINITIONS

Définition 2.1.1. *Un module différentiel bigradué sur un anneau R est une collection de R -modules $\{E^{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ avec une application R -linéaire $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, la différentielle, de bidegré $(s, 1-s)$ pour un certain entier s et qui satisfait $d^2 = 0$.*

Avec cette différentielle, nous pouvons considérer la cohomologie d'un tel module :

$$H(E^{p,q}, d) = (\ker d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+s, q-s+1}) / (\operatorname{im} d : E^{p-s, q+s-1} \rightarrow E^{p,q}).$$

Ainsi, nous pourrions définir une suite spectrale de la façon suivante :

Définition 2.1.2. Une suite spectrale est une collection de R -modules différentiels bigradués

$$\{E_r^{p,q}, d_r\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

avec $r \in \mathbb{N}$. Chaque différentielle est de bidegré $(r, 1 - r)$. Ainsi, pour tout p, q, r , nous aurons un isomorphisme de R -modules

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq H_{d_r}(E_r^{p,q}).$$

Maintenant, supposons qu'une différentielle est nulle à partir d'un certain N , soit $d_r = 0$ pour $r \geq N$. Ceci impliquerait que

$$(\ker d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}) \simeq E_r^{p,q}$$

et

$$(\text{im } d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}) \simeq 0$$

et donc,

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq E_r^{p,q} \quad \text{pour } r \geq N$$

ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.1.3. Une suite spectrale $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ dégénère au N -ième terme si $d_r = 0$ pour $r \geq N$.

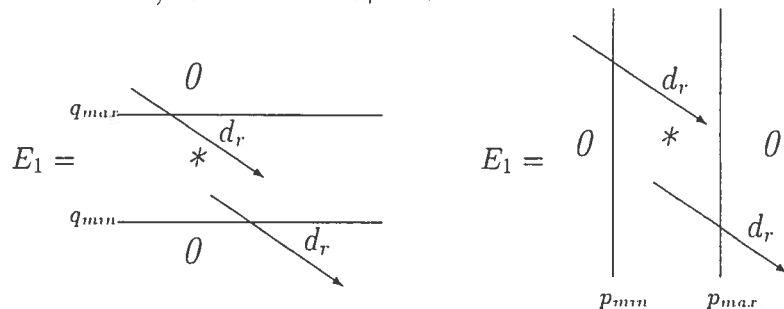
Exemple 2.1.4. S'il existe des entiers (p_{\min}, p_{\max}) ou (q_{\min}, q_{\max}) qui vérifient soit

$$E_m^{p,q} = 0 \quad p \leq p_{\min} \text{ et } p_{\max} \leq p$$

ou

$$E_m^{p,q} = 0 \quad q \leq q_{\min} \text{ et } q_{\max} \leq q.$$

pour $m \geq 1$, alors pour $r \geq p_{\max} - p_{\min}$ dans le premier cas et $r \geq q_{\max} - q_{\min} + 1$ dans le deuxième cas, nous aurons $d_r = 0$.



De plus, nous pourrions également définir $E_\infty^{p,q} := E_N^{p,q}$ dans le cas d'une suite spectrale qui dégénère au N -ième terme, $E_\infty^{p,q}$ étant la limite de la suite spectrale. Mais, nous aurions besoin d'une définition plus générale.

Pour l'explication qui suit, nous ne noterons pas les bidegrés afin d'alléger le texte et de favoriser la clarté.

Considérons E_1 comme étant notre point de départ avec d_1 comme différentielle et définissons $Z_1 := \ker d_1$ et $B_1 := \text{im } d_1$. Nous avons la première tour évidente d'inclusions

$$B_1 \subset Z_1 \subset E_1$$

qui est une conséquence de la condition $(d_1)^2 = 0$. Par définition, $E_2 \simeq Z_1/B_1$. Si nous considérons $\overline{Z_2}$ comme le noyau de d_2 , alors $\overline{Z_2}$ est un sous-module de E_2 et peut être écrit sous la forme Z_2/B_1 avec Z_2 un sous-module de Z_1 . De même façon, nous définissons $\overline{B_2} = \text{im } d_2$ isomorphe à B_2/B_1 et nous aurons l'isomorphisme

$$E_3 \simeq \overline{Z_3}/\overline{B_3} \simeq (Z_2/B_1)/(B_2/B_1) \simeq Z_2/B_2$$

et la tour d'inclusions suivantes

$$B_1 \subset B_2 \subset Z_2 \subset Z_1 \subset E_1.$$

Ainsi, en répétant le procédé nous pourrions voir la suite spectrale comme une tour infinie d'inclusions de sous-modules de E_1

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset E_1.$$

avec la propriété que $E_n \simeq Z_n/B_n$ et que la différentielle est une application $Z_n/B_n \rightarrow Z_n/B_n$ ayant pour noyau Z_{n+1}/B_n et comme image B_{n+1}/B_n . La courte suite exacte induite par la différentielle d_{n+1}

$$0 \longrightarrow Z_{n+1}/B_n \xrightarrow{i} Z_n/B_n \xrightarrow{d_{n+1}} B_{n+1}/B_n \longrightarrow 0$$

fait apparaître l'isomorphisme $Z_n/Z_{n+1} \simeq B_{n+1}/B_n$ pour tout n .

Maintenant, en regardant cette tour, nous pouvons définir les sous-modules de E_1 suivants : $B_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $Z_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. Ainsi, les éléments de Z_∞ sont ceux qui se retrouvent dans les noyaux de toutes les différentielles et ceux

de B_∞ sont les éléments qui seront pour un certain n dans l'image de d_n . Nous avons donc $B_\infty \subset Z_\infty$ et, naturellement, nous pouvons définir

$$E_\infty := Z_\infty / B_\infty.$$

E_∞ est donc le module bigradué limite obtenu lorsque nous calculons successivement et indéfiniment la cohomologie de E_1 .

Ainsi, nous pouvons voir que dans le cas d'une suite spectrale qui dégénère au N -ième terme, nous avons $B_{r+1} = B_r$ et $Z_{r+1} = Z_r$ pour $r \geq N$. Ainsi, $B_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n=1}^N B_n = B_N$ et $Z_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n = \bigcap_{n=1}^N Z_n = Z_N$ à cause de la tour d'inclusions.

Et du coup,

$$E_\infty = Z_\infty / B_\infty = Z_N / B_N = E_N$$

ce qui est cohérent avec la définition précédente.

2.2. SUITE SPECTRALE D'UN COMPLEXE SIMPLE FILTRÉ

Définition 2.2.1. Une filtration F^* sur un R -module A est une famille de sous-modules $\{F^p A\}_{p \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\dots \subset F^{p+1} A \subset F^p A \subset F^{p-1} A \subset \dots \subset A \quad (\text{filtration décroissante})$$

Le module gradué associé $GA = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} GA^p$ au module filtré A est donné par

$$GA^p = F^p A / F^{p+1} A$$

Remarque 2.2.2. En fait, si nous considérons un R -module gradué H^* et sa filtration F^* , alors F^* respecte la graduation de H^* , et le module gradué associé GH sera bigradué :

$$GH^{p,q} = F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$$

où nous définissons $F^p H^n = F^p H^* \cap H^n$.

Exemple 2.2.3. Une filtration pour un complexe double $C = \bigoplus_{p,q} C^{p,q}$ peut être donnée par

$$F_{col}^r C = \bigoplus_{p \geq r} \bigoplus_{q \geq 0} C^{p,q} \quad \text{ou} \quad F_{lig}^r C = \bigoplus_{q \geq r} \bigoplus_{p \geq 0} C^{p,q}$$

où évidemment $F_{col}^{r+1}C \subset F_{col}^r C$ et $F_{lig}^{r+1}C \subset F_{lig}^r C \forall r \in \mathbb{Z}$. F_{col} est appelée la filtration par rapport aux colonnes de C et F_{lig} par rapport aux lignes.

De plus, ces filtrations en induisent chacune une sur $Tot(C)$:

$$F^r Tot(C)^t = \begin{cases} Tot(C)^t \cap F_{col}^r C = \bigoplus_{r \geq p} C^{r,t-r} & \text{par rapport aux colonnes} \\ Tot(C)^t \cap F_{lig}^r C = \bigoplus_{r \geq p} C^{t-r,r} & \text{par rapport aux lignes} \end{cases}$$

Définition 2.2.4. Une suite spectrale $\{E^{*,*}, d_r\}$ converge vers H^* , un R -module gradué, s'il y a une filtration F sur H^* tel que

$$E_{\infty}^{p,q} \simeq GH^{p,q}.$$

Définition 2.2.5. Nous dirons qu'un R -module différentiel A est filtré si A possède une filtration F fermée sous la différentielle, c'est-à-dire $d(F^p A) \subset F^p A$ pour chaque p . Ainsi, $F^p A$ sera un sous-complexe de A pour chaque p et ainsi, $H(F^p A)$ sera bien défini en prenant $d|_{F^p A}$ comme différentielle.

De plus, si A est gradué alors, par définition, $F^p A$ l'est également pour chaque p .

Lemme 2.2.6. Si A est un module gradué différentiel filtré, alors il y a une filtration associée à $H(A)$ définie par

$$F^p H(A) = H(i)(H(F^p A))$$

où $H(i)$ est l'application induite en cohomologie par l'inclusion $i : F^p A \rightarrow A$.

DÉMONSTRATION. Définissons les inclusions $i_p : F^p A \rightarrow A$ et $H(i_p)$ les applications associées en cohomologie. La seule chose à montrer, c'est que les inclusions sont respectées, c'est-à-dire que

$$H(i_p)(H(F^p A, d)) \subset H(i_{p-1})(H(F^{p-1} A, d)).$$

Considérons l'inclusion $i : F^p A \rightarrow F^{p-1} A$ et prenons $\bar{x} \in H(F^p A)$. Alors, il peut s'écrire ainsi : $\bar{x} = x + d(F^p A)$ avec $x \in F^p A$.

Donc, nous avons $H(i)(\bar{x}) = i(x) + D(F^{p-1} A) \in H(i)(H(F^p A))$ et

$$H(i)H(F^p A) \subset H(F^{p-1} A).$$

Et appliquant $H(i_{p-1})$ de chaque côté de l'inclusion, nous trouvons

$$H(i_{p-1}) \circ H(i)H(F^p A) = H(i_p)H(F^p A) \subset H(i_{p-1})H(F^{p-1})$$

puisque $H(i_{p-1}) \circ H(i) = H(i_{p-1} \circ i)$ (lemme 1.1.11). \square

Théorème 2.2.7. *Chaque module différentiel filtré gradué (A, d, F^*) détermine une suite spectrale, $\{E^{*,*}, d_r\}$, $r \in \mathbb{N}$ avec d_r de bidegré $(r, 1-r)$ et*

$$E_1^{p,q} \simeq H_d^{p+q}(F^p A / F^{p+1} A).$$

Supposons de plus que la filtration est bornée, c'est-à-dire que pour chaque dimension n , il y a des valeurs s et t qui dépendent de n telle que

$$\{0\} \subset F^s A^n \subset F^{s-1} A^n \subset \dots \subset F^{t+1} A^n \subset F^t A^n = A^n,$$

alors nous avons

$$E_\infty^{p,q} \simeq F^p H_d(A^{p+q}) / F^{p+1} H_d(A^{p+q}),$$

c'est-à-dire que la suite spectrale converge vers $H_d(A)$.

DÉMONSTRATION. Gardons en tête la filtration décroissante bornée suivante :

$$\{0\} \subset F^{s(p+q)} A^{p+q} \dots \subset F^p A^{p+q} \subset F^{p-1} A^{p+q} \subset \dots \subset F^{t(p+q)} A^{p+q} \subset \{0\}$$

avec s et t des entiers qui dépendent de $p+q$, qui est stable sous la différentielle $d(F^p A^{p+q}) \subset F^p A^{p+q+1}$ et considérons ces définitions :

$$Z_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$$

$$B_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1})$$

$$Z_\infty^{p,q} = \ker d \cap F^p A^{p+q}$$

$$B_\infty^{p,q} = \operatorname{im} d \cap F^p A^{p+q}.$$

Pour chaque p et q fixés, nous avons dans $F^p A^{p+q}$ cette tour d'inclusion

$$B_0^{p,q} \subset B_1^{p,q} \subset \dots \subset B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q} \subset \dots \subset Z_1^{p,q} \subset Z_0^{p,q}.$$

En effet.

$$\begin{aligned} d^2 = 0 &\Rightarrow \ker d \subset \operatorname{im} d \\ &\Rightarrow B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{p-r} A^{p+q-1} \subset F^{p-r-1} A^{p+q-1} &\Rightarrow d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \subset d(F^{p-r-1} A^{p+q-1}) \\ &\Rightarrow B_r^{p,q} \subset B_{r+1}^{p,q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{p+r} A^{p+q-1} \supset F^{p+r+1} A^{p+q-1} &\Rightarrow d(F^{p+r} A^{p+q-1}) \supset d(F^{p+r+1} A^{p+q-1}) \\ &\Rightarrow Z_r^{p,q} \supset Z_{r+1}^{p,q} \end{aligned}$$

et ce, pour $r \geq 0$.

De plus, $B_r^{p,q}$ est précisément l'image de $Z_r^{p-r, q+r-1}$ par d :

$$\begin{aligned} d(Z_r^{p-r, q+r-1}) &= d(F^{p-r} A^{p+q-1} \cap d^{-1}(F^p A^{p+q})) \\ &= F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \\ &= B_r^{p,q} \end{aligned}$$

Ensuite, puisque la filtration est bornée, la convergence des suites $\{Z_r^{p,q}\}_{r \in \mathbb{Z}}$ et $\{B_r^{p,q}\}_{r \in \mathbb{Z}}$ est assurée. En effet,

$$\begin{aligned} r + p > s(p + q + 1) &\Rightarrow F^{p+r} A^{p+q+1} = 0 \\ &\Rightarrow d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) = d^{-1}(0) = \ker d \\ &\Rightarrow Z_r^{p,q} = F^{p+q} A \cap \ker d = Z_\infty^{p,q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - r \leq t(p + q - 1) &\Rightarrow F^{p-r} A^{p+q-1} = A^{p+q-1} \\ &\Rightarrow d(F^{p-r} A^{p+q-1}) = d(A^{p+q-1}) = \operatorname{im} d \cap A^{p+q} \\ &\Rightarrow B_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap \operatorname{im} d = B_\infty^{p,q} \end{aligned}$$

et donc, pour $r \geq \max \{s(p + q + 1) - p + 1, p - t(p + q - 1)\}$, nous avons

$$B_r^{p,q} = B_\infty^{p,q} \text{ et } Z_r^{p,q} = Z_\infty^{p,q}.$$

Maintenant, définissons pour $0 \leq r \leq \infty$, les ensembles suivants :

$$E_r^{p,q} := Z_r^{p,q} / (Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q})$$

accompagnés des projections canoniques $\eta_r^{p,q} : Z_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p,q}$ qui vérifient $\ker \eta_r^{p,q} = (Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q})$. Notons que $Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}$ est bien un sous-ensemble de $Z_r^{p,q}$ puisque la tour d'inclusion ci-haut nous confirme que $B_{r-1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$ et que

$$Z_{r-1}^{p+1,q-1} = F^{p+1}A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r}A^{p+q+1}) \subset F^pA^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r}A^{p+q+1}) = Z_r^{p,q}.$$

Observons que $d(Z_r^{p,q}) = B_r^{p+1,q-1} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$ et également que

$$\begin{aligned} d(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) &= d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) + d(B_{r-1}^{p,q}) \\ &\subset B_{r-1}^{p+r,q-r+1} + 0 \\ &\subset Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}. \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $d(\ker \eta_r^{p,q}) \subset \ker \eta_r^{p+r,q-r+1}$. Ainsi, d passe bien au quotient $Z_r^{p,q} / \ker \eta_r^{p,q} \rightarrow Z_r^{p+r,q-r+1} / \ker \eta_r^{p+r,q-r+1}$ et induit donc une application bien définie $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\ \downarrow \eta_r^{p,q} & & \downarrow \eta_r^{p+r,q-r+1} \\ E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

d_r est bien une différentielle puisque $d^2 = 0 \Rightarrow (d_r)^2 = 0$ et est de degré $(r, 1-r)$ pour les ensembles $E_r^{*,*}$.

Et maintenant, pour compléter la preuve, il nous reste à vérifier que les modules $E_r^{p,q}$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. H_{d_r}(E_r^{p,q}) \simeq E_{r+1}^{p,q} \\ 2. E_1^{p,q} \simeq H_d(F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q}) \\ 3. E_\infty^{p,q} \simeq F^pH_d^{p+q}(A)/F^{p+1}H_d^{p+q}(A). \end{array} \right.$$

(1) Montrer $H_{d_r}(E_r^{p,q}) \simeq E_{r+1}^{p,q}$.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q} & \xrightarrow{\subset} & Z_{r+1}^{p,q} & \xrightarrow{\subset} & Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\
 & & \downarrow \eta_r^{p,q} & & \downarrow \eta_r^{p,q} & & \downarrow \eta_r^{p+r,q-r+1} \\
 & & \ker d_r & \longrightarrow & E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,q-r+1} \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_{d_r}(E_r^{p,q}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

et tâchons d'abord de montrer

$$\eta_r^{p,q}(Z_{r+1}^{p,q}) = \ker d,$$

ce qui nous permettra de donner un sens à $\eta_r^{p,q} : Z_{r+1}^{p,q} \rightarrow \ker d_r$. Puisque les différentielles commutent avec les projections, c'est-à-dire que $d_r \circ \eta_r^{p,q} = \eta_r^{p+r,q-r+1} \circ d$ alors, pour $z \in Z_{r+1}^{p,q}$,

$$d_r(\eta_r^{p,q}z) = \eta_r^{p+r,q-r+1}(dz) = 0$$

$$\iff dz \in \ker \eta_r^{p+r,q-r+1} = Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}.$$

Nous avons déjà montré que $d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) = B_{r-1}^{p+r,q-r+1}$ et que $d(Z_{r+1}^{p,q}) = B_{r+1}^{p+r+1,q-r} \subset Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. De plus,

$$\begin{aligned}
 d^{-1}(Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}) &= d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1} \cap d^{-1}(F^{p+2r}A^{p+q+2})) \\
 &= F^{p+2r}A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1}) \\
 &\subset F^pA^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1}) \\
 &= Z_{r+1}^{p,q}
 \end{aligned}$$

puisque $d^2 = 0 \Rightarrow (d^{-1})^2(F^{p+r+1}A^{p+q+2}) = F^{p+r+1}A^{p+q}$. Ainsi, $d^{-1}(Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}) = Z_{r+1}^{p,q}$ et nous avons

$$dz \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1} \iff z \in Z_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}.$$

D'où, $\ker d_r = \eta_r^{p,q}(Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) = \eta_r^{p,q}(Z_{r+1}^{p,q})$ puisque $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset \ker \eta_r^{p,q}$.

Maintenant, cherchons à démontrer l'égalité suivante :

$$Z_{r+1}^{p,q} \cap (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{im } d_r) = Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}.$$

D'abord, toujours parce que le diagramme ci-haut commute et que $\eta_r^{p,q}$ est surjective, $\text{im } d_r = \eta_r^{p,q}(d(Z_r^{p-r,q+r-1})) = \eta_r^{p,q}(B_r^{p,q})$ et donc

$$\begin{aligned} (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{im } d_r) &= B_r^{p,q} + \ker \eta_r^{p,q} \\ &= B_r^{p,q} + B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} \\ &= B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} \end{aligned}$$

puisque $B_{r-1}^{p,q} \subset B_r^{p,q}$.

Ensuite, puisque nous avons

$$\begin{aligned} Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} &= F^{p+1}A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r}A^{p+q+1}) \cap F^pA^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1}) \\ &= F^{p+1}A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1}) \\ &= Z_r^{p+1,q-1} \end{aligned}$$

vrai à cause des inclusions reliées à la filtration $F^{p+r+1}A^{p+q+1} \subset F^{p+r}A^{p+q+1}$ et $F^{p+1}A^{p+q} \subset F^pA^{p+q}$ et que nous avons $B_r^{p,q} \subset B_{r+1}^{p,q} \subset Z_{r+1}^{p,q}$,

alors,

$$\begin{aligned} Z_{r+1}^{p,q} \cap (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{im } d_r) &= Z_{r+1}^{p,q} \cap (B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\ &= Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}. \end{aligned}$$

Dernière étape pour démontrer le point 1, considérons l'application $\gamma : Z_{r+1}^{p,q} \rightarrow H(E_r^{p,q}, d_r)$ qui n'est rien d'autre que la composition de $\eta_r^{p,q}$ et de la projection canonique $\ker d_r \rightarrow H(E_r^{p,q}, d_r)$. Nous aurons donc

$$\ker \gamma = Z_{r+1}^{p,q} \cap (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{im } d_r) = Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}$$

et comme γ est un épimorphisme, nous avons donc le résultat suivant qui fait de nos ensembles une suite spectrale :

$$H_d(E_r^{p,q}) \cong Z_{r+1}^{p,q} / (Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}) = E_{r+1}^{p,q}.$$

(2) Montrer $E_1^{p,q} \cong H_d(F^p A / F^{p+1} A^{p+q})$.

Tout d'abord, de la définition nous avons $E_0^{p,q} = Z_0^{p,q} / (Z_{-1}^{p+1,q-1} + B_{-1}^{p,q})$ où nous définissons

$$Z_{-1}^{p+1,q-1} = F^{p+1} A^{p+q} \quad \text{et} \quad B_{-1}^{p,q} = d(F^{p+1} A^{p+q-1}).$$

Étant donné que d respecte la filtration, $d : F^p A^{p+q} \rightarrow F^p A^{p+q+1}$ implique $d^{-1}(F^p A^{p+q+1}) = F^p A^{p+q}$ et $d(F^{p+1} A^{p+q-1}) \subset F^{p+1} A^{p+q}$ implique $F^{p+1} A^{p+q} + d(F^{p+1} A^{p+q-1}) = F^{p+1} A^{p+q}$ d'où

$$\begin{aligned} E_0^{p,q} &= F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^p A^{p+q+1}) / (F^{p+1} A^{p+q} + d(F^{p+1} A^{p+q-1})) \\ &= F^p A^{p+q} / F^{p+1} A^{p+q}. \end{aligned}$$

Finalement, $d_0 : E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+1}$ étant induite de la différentielle $d : F^p A^{p+q} \rightarrow F^p A^{p+q+1}$ nous trouvons

$$E_1^{p,q} \cong H_d(F^p A^{p+q} / F^{p+1} A^{p+q}).$$

(3) Montrer $E_\infty^{p,q} \simeq F^p H_d^{p+q}(A) / F^{p+1} H_d^{p+q}(A)$.

Considérons $\eta_\infty^{p,q} : Z_\infty^{p,q} \rightarrow E_\infty^{p,q}$ et $\pi : \ker d \rightarrow H_d(A)$ les projections canoniques, ainsi que les inclusions $i_p : F^p A \rightarrow A$.

$$F^p H_d(A^{p+q}) = H(i_p)H(F^p A^{p+q}) = \pi(F^p A^{p+q} \cap \ker d) = \pi(Z_\infty^{p,q}).$$

L'égalité du centre est vraie parce qu'un élément $\bar{x} \in H(i_p)H_d(F^p A^{p+q})$ peut s'écrire $\bar{x} = i_p(x) + d(A)$ avec $i_p(x)$ un élément du noyau de d et un élément de $F^p A^{p+q} \subset A$ ce qui est exactement la définition de $\pi(F^p A^{p+q} \cap \ker d)$. Ensuite, parce que $B_\infty^{p,q} \subset \text{im } d \subset \ker \pi$, alors $\pi(\ker \eta_\infty^{p,q}) = \pi(Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}) = \pi(Z_\infty^{p+1,q-1}) = F^{p+1} H_d(A^{p+q})$. La dernière équation implique que

l'application $d_\infty : E_\infty \rightarrow F^p H(A^{p+q})/F^{p+1} H(A^{p+q})$ induite par π et qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Z_\infty^{p,q} & \xrightarrow{\eta_\infty^{p,q}} & E_\infty^{p,q} & \xrightarrow{d_\infty} & F^p H_d(A^{p+q})/F^{p+1}(A^{p+q}) \\ \downarrow \subset & & & & \downarrow \subset \\ \ker d & \xrightarrow{\pi} & H_d(A) & \xrightarrow{p} & H_d(A)/F^{p+1}(A^{p+q}) \end{array}$$

où $p : H_d(A) \rightarrow H_d(A)/F^{p+1}A^{p+q}$ est la projection canonique, est bien définie.

Nous pouvons donc calculer le noyau de d_∞ :

$$\begin{aligned} \ker d_\infty &= \eta_\infty^{p,q}(\pi^{-1}(F^{p+1}H(A^{p+q})) \cap Z_\infty^{p,q}) \\ &= \eta_\infty^{p,q}((Z_\infty^{p+1,q-1} + d(A)) \cap Z_\infty^{p,q}) \\ &\subset \eta_\infty^{p,q}(Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Ainsi, d_∞ est un isomorphisme. □

2.3. SUITE SPECTRALE D'UN COUPLE EXACT

En fait, une autre façon d'obtenir une suite spectrale se trouve dans les courtes suites exactes ou plutôt dans les couples exacts. Elle se voit beaucoup plus facilement ici que pour les complexes filtrés puisqu'elle fait presque partie intégrante de la définition.

Définition 2.3.1. *Nous considérons D et E des R -modules. Ils forment un couple exact s'il existe des homomorphismes i , j et k tels que*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

est exact, c'est-à-dire exact à chaque sommet. Nous le noterons $\mathcal{C} = \{D, E, i, j, k\}$.

Dans un couple exact, si nous définissons l'opérateur différentiel $d = j \circ k$, alors E deviendra un R -module différentiel. En effet, d vérifie bien $d^2 = j(kj)k = 0$ ($\text{im } j = \ker k$) ce qui implique que la cohomologie de E , $H(E) = \ker d / \text{im } d$ sera bien définie.

La principale opération à réaliser avec un couple exact est d'obtenir son couple dérivé.

Définition 2.3.2. Le couple dérivé de $\mathcal{C} = \{D, E, i, j, k\}$ est $\mathcal{C}' = \{D', E', i', j', k'\}$ avec $D' = i(D) = \ker j$ et $E' = H(E)$

$$\begin{array}{ccc} i(D) & \xrightarrow{i'} & i(D) \\ & \swarrow k' & \searrow j' \\ & H(E) & \end{array}$$

avec $i' = i|_{i(D)}$, $k'(e + \text{im } d) = k(e)$ et $j'(i(e)) = j(e) + \text{im } d$.

Lemme 2.3.3. Les homomorphismes i' , j' et k' dans la définition précédente sont bien définis.

DÉMONSTRATION. Pour montrer que $j' : i(D) \rightarrow H(E)$ est bien défini, il suffit de montrer que $i(e) = i(e') \Rightarrow j(e) - j(e') \in \text{im } d$. Ainsi,

$$\begin{aligned} i(e) = i(e') &\Rightarrow e - e' \in \ker i = \text{im } k \\ &\Rightarrow \exists y \in E \text{ tel que } k(y) = e - e' \\ &\Rightarrow d(y) = j \circ k(y) = j(e - e') \\ &\Rightarrow j(e) - j(e') \in \text{im } d. \end{aligned}$$

Quant à $k' : H(E) \rightarrow i(D)$, il faut vérifier que pour $e - e' \in \text{im } d$, nous avons $k(e) = k(e')$:

$$\begin{aligned} e - e' \in \text{im } d = \text{im } j \circ k &\Rightarrow e - e' \in \text{im } j = \ker k \\ &\Rightarrow k(e - e') = 0 \\ &\Rightarrow k(e) = k(e') \end{aligned}$$

et que $k(e) \in i(D)$:

$$\begin{aligned} e \in \ker d &\Rightarrow k(e) \in \ker j = \operatorname{im} i \\ &\Rightarrow k(e) \in i(D). \end{aligned}$$

Et i' est bien définie puisque ce n'est que la restriction de i à $i(D)$. \square

Proposition 2.3.4. *Le couple dérivé $C' = \{D', E', i', j', k'\}$ du couple exact $C = \{D, E, i, j, k\}$ est un couple exact.*

DÉMONSTRATION. 1) $\ker i' = \operatorname{im} k'$:

$$\begin{aligned} i(x) \in \ker i' &\iff i'(i(x)) = i(i(x)) = 0 \\ &\iff i(x) \in \ker i = \operatorname{im} k \\ &\iff \exists z \in E \quad i(x) = k(z) = k'(z + \operatorname{im} d) \\ &\iff i(x) \in \operatorname{im} k' \end{aligned}$$

2) $\ker k' = \operatorname{im} j'$

$$\begin{aligned} k'(x + \operatorname{im} d) = k(x) = 0 &\Rightarrow \exists y \in D \quad j(y) = x \\ &\Rightarrow x + \operatorname{im} d = j(y) + \operatorname{im} d = j'(i(y)) \\ &\Rightarrow \ker k' \subset \operatorname{im} j' \end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} x + \operatorname{im} d = j'(i(y)) = j(y) + \operatorname{im} d &\Rightarrow k'(x + \operatorname{im} d) = k'(j(y) + \operatorname{im} d) = k(j(y)) = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{im} j' \subset \ker k' \end{aligned}$$

3) $\ker j' = \operatorname{im} i'$

$$\begin{aligned} j'(i(x)) = j(x) + \operatorname{im} d = 0 &\Rightarrow \exists e \in E \quad j(x) = j(k(e)) \\ &\Rightarrow \exists e \in E \quad x - k(e) \in \ker j = \operatorname{im} i \\ &\Rightarrow \exists e \in E \exists y \in D \quad i(y) = x - k(e) \\ &\Rightarrow i'(i(y)) = i(i(y)) = i(x) - i \circ k(e) = i(x) \\ &\Rightarrow \ker j' \subset \operatorname{im} i' \end{aligned}$$

Et pour l'autre inclusion :

$$\begin{aligned}
 \exists y \in D \quad i(x) = i'(i(y)) = i(i(y)) &\Rightarrow \exists y \in D \quad x - i(y) \in \ker i = \operatorname{im} k \\
 &\Rightarrow \exists y \in D \exists z \in E \quad x = i(y) + k(z) \\
 &\Rightarrow j'(i(x)) = j(x) + \operatorname{im} d = j \circ i(x) + j \circ k(z) \\
 &= 0 + \operatorname{im} d \\
 &\Rightarrow \operatorname{im} i' \subset \ker j'
 \end{aligned}$$

□

Ainsi, nous pouvons itérer le procédé de dérivation à l'infini et le n -ième couple dérivé $C^{(n)} = \{D^{(n)}, E^{(n)}, i^{(n)}, j^{(n)}, k^{(n)}\} = (C^{(n-1)})'$ sera bien défini.

Proposition 2.3.5. *Supposons que $D = \{D^{p,q}\}$ et $E = \{E^{p,q}\}$ sont des R -modules bigradués sur R avec des homomorphismes i de bidegré $(-1,1)$, j de bidegré $(0,0)$ et k de bidegré $(1,0)$.*

Alors, ces données déterminent complètement une suite spectrale $\{E_r, d_r\}$ pour $r = 1, 2, \dots$ avec $E_r = (E)^{(r-1)}$, le $(r-1)$ -ième module dérivé de E et $d_r = j^{(r)} \circ k^{(r)}$.

DÉMONSTRATION. Il nous suffit seulement de vérifier que la différentielle d_r est bien de bidegré $(r, 1-r)$ étant donné que nous avons déjà par définition $E_{r+1} = H(E_r)$. Tout d'abord, posons $E_1 = E$, $d_1 = j \circ k$ et donc d_1 a bidegré $(1,0) + (0,0)$.

Maintenant, supposons que $j^{(r-1)}$ et $k^{(r-1)}$ ont chacun un bidegré de $(r-2, 2-r)$ et $(1, 0)$ respectivement. Puisque $j^{(r)}(i^{(r-1)}(x)) = j^{(r-1)}(x) + d^{(r-1)}E^{(r-1)}$, l'image dans $(E^{p,q})^{(r)}$ doit venir de $i^{(r-1)}(D^{p-r+2, q+r-2})^{(r-1)} = (D^{p-r+1, q+r-1})^{(r)}$, puisque le bidegré de $i^{(r-1)}$ est égal au bidegré de i , soit $(1, -1)$, d'où $j^{(r)}$ a bidegré de $(r-1, 1-r)$.

De plus, puisque $k^{(r)}(e + d^{(r-1)}E^{(r-1)}) = k^{(r-1)}(e)$ et que $k^{(r-1)}$ a bidegré $(1, 0)$, alors $k^{(r)}$ a également bidegré $(1, 0)$.

En combinant ces deux résultats avec l'hypothèse d'induction, nous obtenons que $d^{(r)}$ est de bidegré $(r, 1-r)$. □

2.4. ÉQUIVALENCE DES SUITES SPECTRALES PROVENANT D'UN COUPLE EXACT ET D'UN COMPLEXE FILTRÉ

Dans cette section, nous présenterons le théorème qui affirme que la suite spectrale issue d'un complexe filtré comme vu à la section 2.2 et celle du couple exact associé au complexe filtré sont équivalentes.

Ainsi, si A est un R -module filtré (A, F, d) , alors la courte suite

$$0 \rightarrow F^{p+1}A \rightarrow F^pA \rightarrow F^pA/F^{p+1}A \rightarrow 0$$

est exacte. Comme la différentielle respecte la filtration, il s'agit donc d'une courte suite exacte de R -module gradué différentiel auquel nous pouvons appliquer le foncteur de cohomologie pour chaque degré p et obtenir la longue suite exacte suivante (proposition 1.1.16) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H(F^{p+1}A^{p+q}) & \xrightarrow{i} & H(F^pA^{p+q}) & \xrightarrow{j} & H(F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q}) \\ & & & & & \nearrow & \\ & & H(F^{p+1}A^{p+q+1}) & \xrightarrow{i} & H(F^pA^{p+q+1}) & \xrightarrow{j} & \dots \end{array}$$

k

où k est l'opérateur de bord (k est défini comme dans l'exemple 1.1.19) et i et j sont les applications induites de, respectivement, l'inclusion $F^{p+1}A \hookrightarrow F^pA$ et de la projection canonique $F^pA \twoheadrightarrow F^pA/F^{p+1}A$. Ainsi, en définissant les R -modules bigradués $E_1^{p,q} = H(F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q})$ et $D_1^{p,q} = H(F^pA^{p+q})$.

Nous obtenons donc le couple exact suivant

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

ou bien, avec les bidegrés

$$\begin{array}{ccc}
 D^{p+1,q-1} & \xrightarrow{i} & D^{p,q} \\
 & & \searrow j \\
 D^{p+1,q} & \xleftarrow{k} & E^{p,q}
 \end{array}$$

qui sera le couple exact associé à A . Ainsi, les bidegrés de i , j et k sont, respectivement, de $(1, -1)$, $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Les conditions du théorème 2.3.5 sont donc rencontrées et nous avons une suite spectrale qui en découle.

Proposition 2.4.1. *Pour un R -module gradué différentiel filtré (A, d, F) , la suite spectrale associée à la filtration (théorème 2.2.7) et celle associée au couple exact (proposition 2.3.5) sont les mêmes.*

DÉMONSTRATION. Nous constatons tout d'abord que les termes E_1 sont les mêmes pour les deux suites spectrales (par définition de la suite spectrale du couple exact).

Maintenant, avec les notations de la suite spectrale induite par un couple exact, nous voulons démontrer que E_r , en terme de sous-quotient de $F^p A / F^{p+1} A$, corresponde à celui donné par le théorème 2.2.7, qui est, en utilisant ses notations :

$$E_r^{p,q} = Z_r / (B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}).$$

Supposons $z \in H(F^p A^{p+q} / F^{p+1} A^{p+q}) = E_1^{p,q}$. Alors, z peut être représenté par $(x + F^{p+1} A^{p+q}) + d(F^p A^{p+q-1} / F^{p+1} A^{p+q-1})$ avec $x \in F^p A^{p+q}$ et $d(x) \in F^{p+1} A^{p+q+1}$ puisque $z \in \ker d$. L'application de bord k , peut être explicitement donné par

$$k((x + F^{p+1} A^{p+q}) + d(F^p A^{p+q-1} / F^{p+1} A^{p+q-1})) = d(x) + d(F^{p+1} A^{p+q})$$

comme le montre l'exemple 1.1.19.

Alors,

$$\begin{aligned}
 (x + F^{p+1}A^{p+q}) + d(F^p A^{p+q-1}/F^{p+1}A^{p+q-1}) &\in k^{-1}(\text{im } i^{r-1}) \\
 \iff d(x) + d(F^{p+1}A^{p+q}) &\in \text{im } i^{r-1} \\
 \iff d(x) \in F^{p+r}A^{p+q+1} &
 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $x \in F^p A^{p+q}$, alors $x \in F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r}A^{p+q+1}) = Z_r^{p,q}$ et

$$k^{-1}(\text{im } i^{r-1}) = Z_r^{p,q} / F^{p+1}A^{p+q}.$$

Quant à $\ker i^{r-1} : H(F^p A^{p+q}) \rightarrow H(F^{p-r+1}A^{p+q})$, nous avons

$$u + d(F^p A^{p+q-1}) \in \ker i^{r-1} \iff u \in F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r+1}A^{p+q-1}) = B_{r-1}^{p,q}$$

et comme j est l'application induite en cohomologie de quotienter par $F^{p+1}A^{p+q}$, alors $j(\ker i^{r-1}) = B_{r-1} / F^{p+1}A^{p+q}$.

Ainsi, parce que nous travaillons dans $E_1^{p,q}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \ker j^{r-1} \circ k^{r-1} &= \ker j^{r-1} \circ (k|_{E_{r-1}}) = k^{-1}(\ker j^{r-1}) = k^{-1}(\text{im } i^{r-1}) \\
 \text{im } j^{r-1} \circ k^{r-1} &= \text{im } (j|_{D_{r-1}}) \circ k^{r-1} = j(\text{im } k^{r-1}) = j(\ker i^{r-1})
 \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
 E_r^{p,q} &= \ker j^{r-1} \circ k^{r-1} / \text{im } j^{r-1} \circ k^{r-1} \\
 &= k^{-1}(\text{im } i^{r-1}) / j(\ker i^{r-1}) \\
 &= (Z_r^{p,q} / F^{p+1}A^{p+q}) / (B_{r-1}^{p,q} / F^{p+1}A^{p+q}) \\
 &= (Z_r^{p,q} / F^{p+1}A^{p+q}) / ((B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) / F^{p+1}A^{p+q}) \\
 &\simeq Z_r^{p,q} / (B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})
 \end{aligned}$$

parce que, par définition, $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset F^{p+1}A^{p+q}$. □

2.5. SUITE SPECTRALE D'UN COMPLEXE DOUBLE

Un complexe double possède deux filtrations naturelles : une par rapport à ses colonnes et l'autre par rapport à ses lignes. De ces deux filtrations sont issues deux suites spectrales convergeant vers le même objet. C'est le fait qu'elles soient deux et qu'elles convergent toutes deux vers la même chose qui donnent beaucoup

d'applications. Nous en verrons quelques-unes après le théorème et dans les deux derniers chapitres.

Théorème 2.5.1. *Soit un double complexe, $C^{p,q}$ et son opérateur différentiel $D = \delta + (-1)^p d$. Alors, il existe deux suites spectrales $\{ {}_I E_r^{p,q}, d_r^I \}$ et $\{ {}_{II} E_r^{p,q}, d_r^{II} \}$ avec*

$${}_I E_1^{p,q} = H_d(C^{p,q}) \quad \text{et} \quad {}_{II} E_1^{p,q} = H_\delta(C^{p,q})$$

$${}_I E_2^{p,q} \simeq H_\delta H_d(C^{p,q}) \quad \text{et} \quad {}_{II} E_2^{p,q} \simeq H_d H_\delta(C^{p,q})$$

De plus, si $C^{p,q} = \{0\}$ pour $p < 0$ ou $q < 0$ alors les deux suites spectrales convergent vers $H_D(\text{Tot}(C))$.

DÉMONSTRATION. L'outil de prédilection sera le théorème 2.2.7. Nous n'avons qu'à définir une filtration sur C et ensuite appliquer le théorème pour obtenir le résultat voulu. Considérons donc les filtrations de l'exemple 2.2.3, c'est-à-dire

$$F_I^p(\text{Tot}(C)^t) = \bigoplus_{r \geq p} C^{r,t-r}$$

$$F_{II}^p(\text{Tot}(C)^t) = \bigoplus_{r \geq p} C^{t-r,r}$$

où nous appellerons F_I la filtration par rapport aux colonnes et F_{II} , la filtration par rapport aux lignes de C . Ainsi, si C a ses composantes non-nulles seulement dans le premier quadrant, alors il est borné et les deux filtrations le seront également. Le théorème 2.2.7 nous indique donc qu'il existe pour chaque filtration, respectivement $\{ {}_I E_r^{p,q} \}$ et $\{ {}_{II} E_r^{p,q} \}$ une suite spectrale qui converge vers $H_D(\text{Tot } C)$ et pour lesquelles

$$\begin{aligned} {}_I E_1^{p,q} &= H_D(F^p \text{Tot}(C)^{p+q} / F^{p+1} \text{Tot}(C)^{p+q}) \\ &= H_d(F^p \text{Tot}(C)^{p+q} / F^{p+1} \text{Tot}(C)^{p+q}) \\ &= H_d(C^{p,q}). \end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifiée parce que $\delta(F^p \text{Tot}(C)^{p+q}) \subset F^{p+1} \text{Tot}(C)^{p+q}$ et donc $\delta|_{F^p \text{Tot}(C)^{p+q} / F^{p+1} \text{Tot}(C)^{p+q}} = 0$ d'où $D = d$ sur $F^p \text{Tot}(C)^{p+q} / F^{p+1} \text{Tot}(C)^{p+q}$.

De la même manière, nous trouvons pour la deuxième filtration

$${}_{II} E_1^{p,q} = H_\delta(C^{p,q}).$$

Maintenant, considérons le diagramme suivant où nous avons écrit F^p pour $F_I^p(\text{Tot } C)$ et pour lequel nous considérons les notations utilisées pour la suite spectrale d'un couple exact :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_D^{p+q+1}(F^{p+2}) & \xrightarrow{i} & H_D^{p+q+1}(F^{p+1}) & \xrightarrow{i} & H_D^{p+q+1}(F^p) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \swarrow j & & \swarrow k & & \\
 & & H_D^{p+q+1}(F^{p+1}/F^{p+2}) & & & & H_D^{p+q}(F^p/F^{p+1}) & & \\
 & & \parallel & & & & \parallel & & \\
 & & H_d(C^{p+1,q}) & \xleftarrow{d_1} & & & H_d(C^{p,q}) & &
 \end{array}$$

Prenons un élément $z + d(C^{p-1,q}) \in H_d(C^{p,q})$ et tâchons de calculer $d_1(z + d(C^{p-1,q})) = j \circ k(z + d(C^{p-1,q}))$. Cette expression a du sens puisque $z \in C^{p,q} \subset F^p(\text{Tot } C^{p+q})$ et que $Dz = \delta z \in F^{p+1}\text{Tot } C^{p+q}$ ($z \in \ker d$), ce qui est confirmé par l'égalité $H_d(C^{p,q}) = H_D^{p+q}(F^p/F^{p+1})$ que nous avons montré dans la première partie.

Puisque k est donné par

$$k(z + D(F^p/F^{p+1})) = Dz + D(F^{p+1})$$

(voir exemple 1.1.19), nous aurons

$$\begin{aligned}
 k(z + d(C^{p-1,q})) &= Dz + D(F^{p+1}) = \delta z + D(F^{p+1}) \\
 \Rightarrow j(\delta z + D(F^{p+1})) &= \delta z + D(F^{p+1}/F^{p+2})
 \end{aligned}$$

et $d_1 = j \circ k$ est égale à δ induite sur la cohomologie, d'où

$${}_I E_2^{p,q} = H_{d_1}({}_I E_1^{p,q}) = H_\delta({}_I E_1^{p,q}) = H_\delta H_d(C^{p,q}).$$

Pour la deuxième suite spectrale, nous pouvons tout simplement réindexer le double complexe par son transposé : $T(C^{p,q}) = C^{q,p}$, $T(d) = \delta$ et $T(\delta) = d$. Ainsi, nous avons $\text{Tot } T(C) = \text{Tot } C$ et $F_{II}\text{Tot } C = F_I\text{Tot } T(C)$ et la preuve est la même que pour ${}_I E_r^{p,q}$. \square

Et maintenant, quelques exemples simples d'applications qui découlent de ce théorème.

Lemme 2.5.2. *Théorème 2.5.1 implique la proposition 1.2.1*

DÉMONSTRATION. Supposons les lignes du double complexe $C^{p,q}$ exactes. c'est-à-dire $H_\delta(C^{p,q}) = 0$. C étant borné. alors une filtration sur $Tot C$ le sera également. Ainsi. le théorème 2.5.1 nous dit que ${}_I E_1^{p,q} = 0$ ce qui implique

$${}_I E_\infty^{p,q} = F_I^p H_D(Tot C^{p+q}) / F_I^{p+1} H_D(Tot C^{p+q}) = 0$$

et donc

$$F_I^p H_D(Tot C^{p+q}) = F_I^{p+1} H_D(Tot C^{p+q}) \quad \forall p.$$

Et puisque la filtration est bornée, nous obtenons

$$0 = F_I^{t(p+q)} H_D(Tot C^{p+q}) = \dots = F_I^{s(p+q)} H_D(Tot C^{p+q}) = H_D(Tot C^{p+q}).$$

D'où, $Tot C$ acyclique. Et dans le cas où les colonnes sont exactes, nous appliquons le même raisonnement, mais avec $H_d(C^{p,q}) = 0$. \square

Remarque 2.5.3. Si nous considérons la suite spectrale ${}_I E_r^{p,q}$ du théorème 2.5.1 pour un complexe double C sur un corps R du premier quadrant avec la filtration $F_I^p(Tot(C)^t) = \bigoplus_{r \geq p} C^{r,t-r}$, alors le théorème dit qu'elle converge vers $H_D(Tot(C)^{p+q})$, c'est-à-dire que

$${}_I E_\infty^{p,q} = F_I^p H_D(Tot C^{p+q}) / F_I^{p+1} H_D(Tot(C)^{p+q})$$

Posons $i_p : F_I^p Tot(C)^{p+q} \rightarrow Tot(C)^{p+q}$ l'inclusion pour chaque $p+q$. Ainsi.

$$\begin{aligned} \bigoplus_{p+q=n} {}_I E_\infty^{p,q} &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_I^p H_D(Tot C^{p+q}) / F_I^{p+1} H_D(Tot(C)^{p+q}) \\ &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H(i_p) H_D(F_I^p Tot(C)^{p+q}) / H(i_{p+1}) H_D(F_I^{p+1} Tot(C)^{p+q}) \\ &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \left(\left(\bigoplus_{k \geq p} H_D(C^{k,n-k}) \right) / \left(\bigoplus_{k \geq p+1} H_D(C^{k,n-k}) \right) \right) \\ &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_D(C^{p,n-p}) \\ &= H_D(Tot(C)^n) \end{aligned}$$

où $H_D(C^{k,n-k})$ doit être vu comme $\ker D \cap C^{k,n-k} / \operatorname{im} D \cap C^{k,n-k}$. Évidemment, nous avons le phénomène réciproque pour ${}_{II}E_r^{p,q}$ ce qui donne

$$\bigoplus_{p+q=n} {}_I E_\infty^{p,q} = H_D(\operatorname{Tot}(C)^n) = \bigoplus_{p+q=n} {}_{II} E_\infty^{p,q}.$$

Notons que R soit un corps est très important pour avoir l'égalité. En effet, si par exemple $R = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont deux \mathbb{Z} -modules qui ne sont pas isomorphes, mais pourtant, ils sont tous les deux filtrés par

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

et leurs \mathbb{Z} -modules gradués associés respectifs sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cette remarque contient seulement le côté pratique pour utiliser le théorème 2.5.1 dans certains cas, comme par exemple, pour trouver la cohomologie d'un produit tensoriel de R -modules différentiels, lorsque R est un corps, celui-là étant défini comme suit :

Définition 2.5.4. Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux R -modules différentiels gradués. Le produit tensoriel de ces deux R -modules, $(A \otimes_R B, d_\otimes)$ est donné par

$$(A \otimes_R B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (A \otimes_R B)^n$$

avec

$$(A \otimes_R B)^n = \bigoplus_{p+q=n} A^p \otimes_R B^q$$

La différentielle d_\otimes est définie par

$$d_\otimes(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes d_B(b).$$

et est bien une différentielle puisque

$$d_\otimes^2(a \otimes b) = d_A^2(a) \otimes b + ((-1)^{\deg d_A a} + (-1)^{\deg d_A(a)}) d_A a \otimes d_B b + a \otimes d_B^2(b) = 0.$$

Ainsi, $A \otimes_R B$ est également un R -module différentiel gradué.

Un exemple de double complexe peut être donné par le produit tensoriel de deux R -modules gradués. Posons

$$C^{m,n} = A^m \otimes_R B^n$$

avec comme opérateur différentiel $D = \delta + (-1)^m d$ où $\delta = d_A \otimes 1$ et $d = 1 \otimes d_B$. Ainsi, $(Tot(C) = \bigoplus C^{m,n}, D) = (A \otimes_R B, d_{\otimes})$ et calculer la cohomologie de $A \otimes_R B$ revient à calculer $H_D(Tot(C))$, ce que le théorème 2.5.1 nous aide à faire lorsque R est un corps.

Lemme 2.5.5. *Soit R un corps, alors nous avons*

$$H_D(A \otimes_R B) = H_{\delta}(A) \otimes_R H_d(B)$$

avec $D(a \otimes b) = \delta a \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes db$, la différentielle.

En fait, ce lemme est un cas particulier de la formule de Künneth. Voir par exemple [2] pour plus de détails.

DÉMONSTRATION. En gardant les mêmes notations que dans l'exemple ci-haut, le théorème 2.5.1 nous assure qu'il existe une suite spectrale telle que

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H_{\delta} H_d(A^p \otimes_R B^q) \\ &= H_{\delta}(A^p \otimes_R H_d(B^q)) \\ &= H_{\delta}(A^p) \otimes_R H_d(B^q) \end{aligned}$$

puisque $\delta = d_A \otimes 1$ et $d = 1 \otimes d$.

Ensuite, pour $a \otimes b \in H_{\delta}(A^p) \otimes_R H_d(B^q)$, nous avons

$$D(a \otimes b) = \delta a \otimes b \pm a \otimes db = 0$$

puisque $a \in \ker \delta$ et $b \in \ker d$. Ainsi, les différentielles suivantes seront également nulles et la suite spectrale dégénère à E_2 , d'où

$$E_{\infty}^{p,q} = H_{\delta}(A^p) \otimes_R H_d(B^q).$$

Ainsi, avec la précédente remarque et parce que R est un corps, nous avons

$$\begin{aligned} H_D(A \otimes_R B) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_D((A \otimes_R B)^n) \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{p+q=n} H_\delta(A^p) \otimes_R H_d(B^q) \\ &= \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} H_\delta(A^p) \otimes_R H_d(B^q) \\ &= H_\delta(A) \otimes_R H_d(B). \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

THÉORÈME DE DE RHAM

Dans cette section, nous démontrerons le théorème de De Rham en utilisant les suites spectrales.

Ce théorème fait le lien entre deux différentes cohomologies : l'une concernant les formes différentielles existant sur une variété, cohomologie de De Rham, et l'autre la structure topologique de la variété, la cohomologie singulière.

Afin de faire le lien entre ces deux cohomologies, nous aurons besoin d'un objet combinatoire induit par la topologie : la cohomologie de Čech. Nous verrons dans un premier temps que les suites spectrales du double complexe issues de cette cohomologie nous serviront à calculer la cohomologie de De Rham et également la cohomologie singulière.

Ensuite, il ne restera plus qu'à comparer les deux résultats obtenus pour obtenir l'isomorphisme entre ces deux cohomologies.

3.1. COHOMOLOGIE DE ČECH

3.1.1. Les préfaisceaux

Tout d'abord, nous commencerons par donner la définition d'un préfaisceau. En général, un préfaisceau sur un espace topologique X dans une catégorie C est un foncteur contravariant \mathcal{F} de la catégorie des ouverts de X dans C . Ceci revient donc à se donner un objet $\mathcal{F}(U)$ de C pour chaque ouvert U et chaque fois que $V \subset U$, un morphisme $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ dit de restriction qui répond

aux deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1. r_{V,V} = Id \\ 2. r_{V,U} \circ r_{U,W} = r_{V,W} \quad \text{pour } W \subset U \subset V \end{cases}$$

Exemple 3.1.1. Soit X et Y , deux espaces topologiques. Un exemple de préfaisceau de X dans la catégorie des groupes est la donnée pour chaque ouvert U de X de l'ensemble des fonctions continues de U vers Y .

Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux préfaisceaux sur une catégorie \mathcal{C} d'un espace topologique X , alors un morphisme de préfaisceau $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une collection de morphismes de \mathcal{C}

$$f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

définis de telle sorte qu'ils commutent avec les inclusions, c'est-à-dire que pour $V \subset U$, deux ouverts quelconques de X , le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow r_{U,V} & & \downarrow r'_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Dans la section qui suit, nous utiliserons les préfaisceaux dans la catégorie des groupes abéliens.

Définition 3.1.2. Le préfaisceau trivial avec un groupe G abélien est le préfaisceau \mathcal{F} qui associe à tout ouvert connexe le groupe G et à chaque inclusion, l'application identité $id : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. Nous dirons qu'un préfaisceau est constant s'il est isomorphe à préfaisceau trivial avec un groupe G pour un certain groupe G abélien.

3.1.2. Limite directe

Définition 3.1.3. Un ensemble direct I est un ensemble avec un ordre partiel \succ tel que pour chaque couple $a, b \in I$, il existe un troisième élément $c \in I$ qui vérifie $a \succ c$ et $b \succ c$.

Définition 3.1.4. Un système direct de groupe est une collection de groupe $\{G_i\}_{i \in I}$ indexé par un ensemble direct I muni de son ordre partiel \succ , tel que

pour chaque paire $a \succ b$ il existe un homomorphisme de groupe $f_b^a : G_a \rightarrow G_b$ qui satisfait

$$\begin{cases} 1. f_a^a = Id \\ 2. f_c^a = f_c^b \circ f_b^a \quad \text{pour } a \succ b \succ c \end{cases}$$

Sur l'union disjointe $\coprod_{i \in I} G_i$, on introduit la relation d'équivalence \sim en disant que $g \sim h$ avec $g \in G_a$ et $h \in G_b$ s'il existe $c \in I$ tel que $f_c^a(g) = f_c^b(h)$.

Définition 3.1.5. La limite directe d'un système direct $\{G_i\}_{i \in I}$ notée $\lim_{i \in I} G_i$ est définie comme étant l'union disjointe quotientée par \sim .

La limite directe d'un système direct $\{G_i\}_{i \in I}$ muni de ses homomorphismes de groupe $f_b^a : G_a \rightarrow G_b$ possède une propriété universelle. Considérons X comme étant le limite direct de notre système, alors X est équipé avec des homomorphismes de groupes $\phi_j : G_j \rightarrow X$ qui satisfont $\phi_i = \phi_j \circ f_j^i$. La paire (X, ϕ_j) est universelle dans le sens que pour n'importe quelle autre paire (Y, ψ_j) , il existe un unique homomorphisme de groupe $u : X \rightarrow Y$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{f_j^i} & G_j \\ & \searrow \phi_i & \swarrow \phi_j \\ & X & \\ & \searrow \psi_i & \swarrow \psi_j \\ & Y & \end{array}$$

pour tout i, j .

3.1.3. Définition de la cohomologie

Soit X un espace topologique avec un recouvrement d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ où I est un ensemble ordonné dénombrable. Nous noterons les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$ par $U_{\alpha\beta}$. Pour chaque intersection $U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$, on définit $n+1$ inclusions comme suit :

$$\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \rightarrow U_{\alpha_0 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_n}$$

Soit \mathcal{F} , un préfaisceau de groupes abéliens et définissons les ensembles

$$C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_j} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_j})$$

ainsi que la différentielle $\delta : C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{j+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ comme étant la somme alternée des $\mathcal{F}(\delta_i)$

$$\delta = \mathcal{F}(\partial_0) - \mathcal{F}(\partial_1) + \cdots + (-1)^j \mathcal{F}(\partial_j).$$

Remarque 3.1.6. *Pour s'assurer que $C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ soit bien défini, nous établirons les règles suivantes pour la notation : si $\omega \in \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_j) \in I^{j+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_j})$, alors notons par $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_j}$ la composante de ω qui appartient à $\mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_j})$ (ou par $\omega(U_{\alpha_0 \dots \alpha_j})$ lorsqu'il peut y avoir une ambiguïté) et nous définissons*

$$\begin{cases} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_j} = 0 \text{ s'il y a une répétition des indices} \\ \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_j} = \text{signe}(\pi) \omega_{\pi(\alpha_0) \dots \pi(\alpha_j)} \text{ pour } \pi \text{ une permutation.} \end{cases}$$

Ceci a pour conséquence que nous pouvons toujours ordonner les indices d'une composante $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_j}$ de ω au en ajoutant possiblement un signe moins devant et ainsi un élément quelconque de $\prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_j) \in I^{j+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_j})$ pourra toujours s'écrire de façon à clairement appartenir à $C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. De plus, nous aurons également

$$C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0 \text{ si } j > |I|.$$

Proposition 3.1.7. $\delta^2 = 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $\omega \in C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, nous avons

$$(\delta\omega)(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{j+1}}) = \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \omega(U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{j+1}})$$

où la restriction de $\omega(U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{j+1}})$ à $U_{\alpha_0 \dots \alpha_{j+1}}$ est supprimée. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\delta^2\omega)(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{j+2}}) \\ &= \sum_{i=0}^{j+2} (-1)^i \delta\omega(U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{j+2}}) \\ &= \sum_{i=0}^{j+2} (-1)^i \left(\sum_{k < i} (-1)^k \omega(U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_k \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{j+2}}) + \sum_{k > i} (-1)^{k-1} \omega(U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \widehat{\alpha}_k \dots \alpha_{j+2}}) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

parce que, pour chaque terme, deux indices ont été retirés avec pour chacun des signes opposés, dépendamment si l'indice le plus petit a été retiré le premier ou pas et que la transitivité des restrictions nous assure que les termes sont réellement égaux.

□

Ainsi, le complexe $C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{j \geq 0} C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est un complexe différentiel avec la différentielle δ . La cohomologie de ce complexe, appelée la cohomologie de Čech du recouvrement \mathfrak{U} à valeur dans \mathcal{F} , est notée $H_\delta C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ou tout simplement $H(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Nous avons donc maintenant une définition de la cohomologie de Čech pour un recouvrement d'un espace topologique et non pour l'espace en lui-même. Instinctivement, si, en raffinant le recouvrement, nous pouvions imaginer une application entre la cohomologie d'un recouvrement et celle de son raffinement, nous pourrions espérer trouver celle de l'espace au complet en raffinant "à l'infini". C'est ce que nous formaliserons dans la fin de cette sous-section.

Définition 3.1.8. *Un recouvrement d'ouverts $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ est un raffinement d'un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ s'il existe une application $\phi : J \rightarrow I$ telle que $V_\beta \subset U_{\phi(\beta)}$ et qui préserve l'ordre de J et I . Nous noterons $\mathfrak{U} > \mathfrak{B}$.*

Exemple 3.1.9. *Considérons deux recouvrements d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ et $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ et définissons $\mathfrak{R} = \{R_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in (I \times J)}$ par $R_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap V_\beta$. Les deux projections $p_{\mathfrak{U}} : I \times J \rightarrow I$ et $p_{\mathfrak{B}} : I \times J \rightarrow J$ définissent donc chacune un raffinement de leur recouvrement respectif. Nous pouvons donc écrire $\mathfrak{U} > \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{B} > \mathfrak{R}$.*

Ainsi, un raffinement ϕ induit une application

$$\phi^\# : C^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^j(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

définie de la manière suivante :

$$(\phi^\# \omega)(V_{\beta_0 \dots \beta_j}) = \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_j)})$$

Lemme 3.1.10. $\phi^\#$ est une application de complexe, c'est-à-dire qu'elle commute avec δ . Donc, ϕ induit une application en cohomologie

$$H(\phi^\#) : H^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^j(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

qui sera bien définie.

DÉMONSTRATION. En fait, il est seulement nécessaire de démontrer que $\phi^\# \delta = \delta \phi^\#$ puisque le reste en découle grâce au lemme 1.1.7. En utilisant les notations ci-haut,

$$\begin{aligned} (\delta(\phi^\# \omega))(V_{\beta_0 \dots \beta_{j+1}}) &= \sum_{i=0}^{i+1} (-1)^i (\phi^\# \omega) \left(V_{\beta_0 \dots \widehat{\beta}_i \dots \beta_{j+1}} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{i+1} (-1)^i \omega \left(U_{\phi(\beta_0) \dots \widehat{\phi(\beta_i)} \dots \phi(\beta_{j+1})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi^\# \delta \omega)(V_{\beta_0 \dots \beta_{j+1}}) &= (\delta \omega) \left(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_{j+1})} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{i+1} (-1)^i \omega \left(U_{\phi(\beta_0) \dots \widehat{\phi(\beta_i)} \dots \phi(\beta_{j+1})} \right) \end{aligned}$$

et nous avons bien $\delta \phi^\# = \phi^\# \delta$. Ainsi, le lemme 1.1.7 nous assure que l'application

$$H(\phi^\#) : H^j(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^j(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

est bien définie. □

Lemme 3.1.11. Soit $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement d'ouverts et $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ un raffinement de \mathfrak{U} . Si $\phi : J \rightarrow I$ et $\psi : J \rightarrow I$ sont deux applications de raffinement, alors il existe un opérateur d'homotopie entre $\psi^\#$ et $\phi^\#$ ce qui implique l'égalité suivante en cohomologie $H(\psi^\#) = H(\phi^\#)$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, s'il existe un tel opérateur, l'exemple 1.1.10 nous indique que $H(\delta K + K \delta)$ vaut 0 en cohomologie, d'où

$$H(\psi^\#) - H(\phi^\#) = H(\psi^\# - \phi^\#) = H(\delta K + K \delta) = 0.$$

Maintenant, prouvons que cet opérateur existe. Définissons

$$K : C^j(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{j-1}(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

de la façon suivante :

$$(K\omega)(V_{\beta_0 \dots \beta_{j-1}}) = \sum_{i=0}^j (-1)^i \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_i) \psi(\beta_{i+1}) \dots \psi(\beta_{j-1})})$$

Ce qui implique, après calculs, que

$$\begin{aligned} (K(\delta\omega))(V_{\beta_0 \dots \beta_j}) &= \sum_{i=0}^j (\delta\omega)(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_i) \psi(\beta_{i+1}) \dots \psi(\beta_j)}) \\ &= \sum_{i=0}^j (-1)^i \left(\sum_{k=0}^i (-1)^k \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \widehat{\phi(\beta_k)} \dots \phi(\beta_i) \psi(\beta_{i+1}) \dots \psi(\beta_j)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=i}^j (-1)^{k+1} \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_i) \psi(\beta_{i+1}) \dots \widehat{\psi(\beta_k)} \dots \psi(\beta_j)}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta(K\omega))(V_{\beta_0 \dots \beta_j}) &= \sum_{i=0}^j (-1)^i (K\omega)(V_{\beta_0 \dots \widehat{\beta_i} \dots \beta_j}) \\ &= \sum_{i=0}^j (-1)^i \left(\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_k) \psi(\beta_{k+1}) \dots \widehat{\psi(\beta_i)} \dots \psi(\beta_j)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=i+1}^j (-1)^{k-1} \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \widehat{\phi(\beta_i)} \dots \phi(\beta_k) \psi(\beta_{k+1}) \dots \psi(\beta_j)}) \right) \end{aligned}$$

En additionnant les deux résultats, nous constatons qu'il y a $j(j+1)$ termes qui apparaissent tous deux fois chacun avec un signe opposé qui dépend de l'ordre dans lequel les indices sont ajoutés et retirés. Il ne reste donc plus que $2(j+1)$ termes qui s'éliminent entre eux dans une somme télescopique comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} &((\delta K + K\delta)(\omega))(V_{\beta_0 \dots \beta_j}) \\ &= \sum_{i=0}^j (\omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_{i-1}) \psi(\beta_i) \dots \psi(\beta_j)}) - \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_i) \psi(\beta_{i+1}) \dots \psi(\beta_j)})) \\ &= \omega(U_{\psi(\beta_0) \dots \psi(\beta_j)}) - \omega(U_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_j)}) \\ &= ((\psi^\# - \phi^\#)(\omega))(V_{\beta_0 \dots \beta_j}) \end{aligned}$$

où nous prendrons pour convention que si nous retrouvons des indices négatifs où supérieur à j pour les β_i , alors ces β sont omis.

□

Proposition 3.1.12. *Soit U , l'ensemble des recouvrements de X , un espace topologique, alors $\{H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}_{\mathcal{U} \in U}$ sera un système direct de groupe avec les applications induites par un raffinement en cohomologie*

$$H(\phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}) : H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathfrak{B}, \mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, l'exemple 3.1.9 nous assure que U est bien un ensemble direct avec $>$ pour ordre partiel. Ensuite, le lemme 3.1.11 nous indique que pour $\mathfrak{U} > \mathfrak{B}$ et le raffinement $\phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$, il existe une application unique et bien définie

$$H(\phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}) : H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

induite par $\phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$. Maintenant, il ne reste qu'à démontrer que ces applications satisfont bien les critères d'un système direct. Pour ce faire, nous pouvons utiliser la fonctorialité de H (lemme 1.1.11). En effet, puisque $\phi_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}}$ est l'application identité alors, l'application induite $H(\phi_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}})$ est également l'identité. Quant à la transitivité, si nous avons $\mathfrak{U} > \mathfrak{B} > \mathfrak{C}$, alors les applications $\phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{U}}$ et $\phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \circ \phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ définissent toutes deux un raffinement de \mathfrak{U} vers \mathfrak{C} , et, toujours par le lemme 3.1.11, les applications induites coïncident en cohomologie d'où l'égalité

$$H(\phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{U}}) = H(\phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \circ \phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}) = H(\phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}) \circ H(\phi_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}).$$

□

Ainsi, nous aurons la définition finale pour la cohomologie de Čech :

Définition 3.1.13. *La cohomologie de Čech de l'espace topologique X à valeur dans le préfaisceau \mathcal{F} est*

$$H^*(X, \mathcal{F}) = \lim_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

3.2. COHOMOLOGIE DE DE RHAM

Les groupes de cohomologie de De Rham s'avèrent fort utiles en géométrie différentielle. Ils sont, en fait, les invariants les plus simples pour différencier deux variétés différentielles qui ne sont pas difféomorphes. La base de ces groupes reposent sur deux principes simples. Le premier est qu'ils sont invariants à une homotopie près (remarque 3.2.27) et le deuxième, c'est que nous pouvons décomposer une variété en variétés plus simples pour lesquelles la cohomologie est connue (par exemple, c'est ce que permet la suite de Mayer-Vietoris).

3.2.1. Définition pour \mathbb{R}^n

Soit x_1, \dots, x_n , les coordonnées linéaires de \mathbb{R}^n . On définit Ω comme étant l'algèbre sur \mathbb{R} engendrée par dx_1, \dots, dx_n avec les relations

$$\begin{cases} (dx_i)^2 = 0 \\ dx_i dx_j = -dx_j dx_i \quad i \neq j \end{cases}$$

Comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , Ω a

$$1, dx_i, dx_i dx_j, dx_i dx_j dx_k, \dots, dx_1 \dots dx_n \\ i < j \quad i < j < k$$

comme base.

Les formes différentiables C^∞ sur \mathbb{R}^n sont les éléments de

$$\Omega(\mathbb{R}^n) = \{\text{fonctions } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^n\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega$$

Ainsi, pour $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique représentation telle que $\omega = \sum f_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \dots dx_{i_q}$ où les coefficients $f_{i_1 \dots i_q}$ sont des fonctions C^∞ , notée aussi $\omega = \sum f_I dx_I$. L'algèbre $\Omega(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre graduée avec $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des éléments s'écrivant seulement avec q dx_i , soit les q -formes C^∞ . Nous dirons pour un élément de $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ qu'il est de degré q .

Remarque 3.2.1. *En fait, Ω est l'algèbre extérieure sur les dx_i et $\Omega^p = \bigwedge^p(dx_1, \dots, dx_n)$ pour chaque p .*

Définition 3.2.2. *Soit*

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

un opérateur différentiel défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{Si } f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n), \text{ alors } df = \sum \partial f / \partial x_i dx_i \\ \text{Si } \omega = \sum f_I dx_I, \text{ alors } d\omega = \sum df_I dx_I. \end{cases}$$

Remarque 3.2.3. d ne dépend pas du système de coordonnées choisi. En effet, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme qui amène le système de coordonnées standard x_1, \dots, x_n vers u_1, \dots, u_n , c'est-à-dire que $u_i = x_i \circ f$. Ainsi, grâce à la règle de dérivée en chaîne, nous avons pour g une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j.$$

d est appelé une différentielle extérieure et ne représente rien d'autre que des concepts de calculs différentiels sur \mathbb{R} comme ceux de divergence et de rotationnel que nous retrouvons l'exemple suivant.

Exemple 3.2.4. Soit $\alpha = Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} d\alpha &= (\partial B / \partial x_1 - \partial A / \partial x_2) dx_1 dx_2 + (\partial C / \partial x_2 - \partial B / \partial x_3) dx_2 dx_3 + \\ &\quad (\partial A / \partial x_3 - \partial C / \partial x_1) dx_3 dx_1 \end{aligned}$$

et $\beta = Pdx_1 dx_2 + Qdx_1 dx_3 + Rdx_2 dx_3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, alors

$$d\beta = (\partial P / \partial x_1 + \partial Q / \partial x_2 + \partial R / \partial x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Définition 3.2.5. Le produit extérieur de deux formes différentielles, $\tau = \sum f_I dx_I$ et $\omega = \sum g_J dx_J$, est défini comme suit :

$$\tau \cdot \omega = \sum f_I g_J dx_I dx_J.$$

Remarque 3.2.6. Nous noterons que $\tau \cdot \omega = (-1)^{\deg \tau \deg \omega} \omega \cdot \tau$. En effet, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} &dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q \\ &= (-1)^q dx_1 \dots dx_{p-1} dy_1 \dots dy_q dx_p \\ &= (-1)^{2q} dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q dx_{p-1} dx_p \\ &= \dots \\ &= (-1)^{pq} dy_1 \dots dy_q dx_1 \dots dx_p \end{aligned}$$

d'où $dx_I dx_J = (-1)^{\deg dx_I \deg dx_J} dx_J dx_I$.

Proposition 3.2.7. d est une antiderivation, c'est-à-dire

$$d(\tau \cdot \omega) = d\tau \cdot \omega + (-1)^{\deg \tau} \tau \cdot d\omega.$$

DÉMONSTRATION. Par linéarité de l'opérateur d , nous n'avons qu'à faire des vérifications sur des monômes $\tau = f_I dx_I$ et $\omega = g_J dx_J$.

$$\begin{aligned} d(\tau \cdot \omega) &= d(f_I g_J) dx_I dx_J \\ &= (df_I) g_J dx_I dx_J + f_I dg_J dx_I dx_J \\ &= (df_I) g_J dx_I dx_J + f_I (-1)^{\deg \tau} dx_I dg_J dx_J \\ &= (d\tau) \cdot \omega + (-1)^{\deg \tau} \tau \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Concernant les fonctions, $d(fg) = (df)g + f(dg)$ est la règle de Leibniz. \square

Proposition 3.2.8. $d^2 = 0$.

DÉMONSTRATION. Puisque les fonctions sont C^∞ , leurs dérivées partielles mixtes commutent et donc

$$d^2 f = d \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i = 0$$

puisque les dx_i, dx_j sont anti-symétriques. Et pour une forme $\omega = f_I dx_I$,

$$d^2 \omega = d(df_I dx_I) = d^2(f_I) \cdot dx_I - df_I \cdot d(dx_I) = 0$$

par antiderivation. \square

Définition 3.2.9. Le complexe $\Omega(\mathbb{R}^n)$ avec l'opérateur d est un complexe différentiel appelé le complexe de De Rham sur \mathbb{R}^n . Ainsi, la cohomologie de De Rham de \mathbb{R}^n sera définie naturellement par

$$H_{DR}(\mathbb{R}^n) = \ker d / \text{im } d$$

Remarque 3.2.10. Toutes les définitions données pour cette cohomologie s'appliquent également pour un ouvert U de \mathbb{R}^n dans quel cas, nous écrirons $H_{DR}(U)$ pour la cohomologie de U .

Maintenant, nous aimerions démontrer le caractère fonctoriel de Ω . Posons x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_m comme les coordonnées standards sur, respectivement, \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . Une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit une fonction $f^* : \Omega^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^0(\mathbb{R}^m)$ définie par

$$f^*(g) = g \circ f.$$

où $f^*(g)$ est appelé l'image réciproque de g par f . Pour étendre cette fonction à toutes les formes différentielles $f^* : \Omega(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^m)$ afin qu'elle commute avec la différentielle extérieure d , nous la définissons comme suit :

$$f^*\left(\sum g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}\right) = \sum (g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q}$$

où $f_i = y_i \circ f$ est la i -ème composante de f .

Proposition 3.2.11. $f^* : \Omega(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^m)$ commute avec la différentielle d .

DÉMONSTRATION. La preuve de cette proposition découle de la règle de la dérivée en chaîne $d(g \circ f) = (dg \circ f)df$:

$$\begin{aligned} df^*(g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}) &= d((g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q}) \\ &= d(g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q} \\ &= \sum \left(\left(\frac{\partial (g_I \circ f)}{\partial y_i} dy_i \right) df_{i_1} \dots df_{i_q} \right) \\ &= \sum \left(\left(\frac{\partial (g_I)}{\partial y_i} \circ f \right) df_i \right) df_{i_1} \dots df_{i_q} \\ &= f^* \left(\sum \frac{\partial (g_I)}{\partial x_i} dy_i dy_{i_1} \dots dy_{i_q} \right) \\ &= f^* d(g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}). \end{aligned}$$

□

Ainsi, f^* est bien une application de complexe, puisqu'elle commute avec d .

Remarque 3.2.12. Ω est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces euclidiens avec les applications C^∞ vers la catégorie des algèbres différentielles graduées et de leurs homomorphismes. En effet, les applications $*$ vérifient bien $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ et $1^* = 1$.

Maintenant, nous aimerions calculer la cohomologie de De Rham pour tout \mathbb{R}^n , ce à quoi nous servira la proposition suivante.

Proposition 3.2.13. $H(\mathbb{R}^n) \simeq H(\mathbb{R}^{n+1})$.

DÉMONSTRATION. Considérons les deux applications $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ définies par $\pi(x, t) = x$ et $s(x) = (x, 0)$ (π étant la projection sur \mathbb{R}^n et s , la section zéro).

Ces applications induisent des applications de complexe sous le foncteur Ω

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) & & \\ \pi^* \uparrow & & \downarrow s^* \\ \Omega(\mathbb{R}^n) & & \end{array}$$

et nous voulons démontrer que ces dernières sont des quasi-isomorphismes.

Tout d'abord, nous avons $s^* \circ \pi^* = 1$ puisque $\pi \circ s = 1$ et donc, $H(s^* \circ \pi^*) = 1$. Ensuite, pour $\pi^* \circ s^*$, nous aurons besoin de trouver un opérateur d'homotopie entre 1 et $\pi^* \circ s^*$. Remarquons d'abord, que toute forme sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de formes du type $(\pi^* \phi)f(x, t)$ et $(\pi^* \phi)f(x, t)dt$ où ϕ est une forme de $\Omega(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, définissons l'opérateur $K : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\begin{aligned} (\pi^* \phi)f(x, t) &\mapsto 0 \\ (\pi^* \phi)f(x, t)dt &\mapsto (\pi^* \phi) \int_0^t f dt \end{aligned}$$

et vérifions que c'est bien un opérateur d'homotopie.

Tout d'abord, sur les formes du type $\omega = (\pi^*\phi)f(x, t)$, $\deg \omega = q$.

$$\begin{aligned}
 (1 - \pi^* \circ s^*)\omega &= (\pi^*\phi)f(x, t) - (\pi^*\phi)f(x, 0). \\
 (dK - Kd)\omega &= -Kd\omega \\
 &= -K \left((\pi^*d\phi)f + (-1)^q \pi^*\phi \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \right) \\
 &= -K \left((-1)^q \pi^*\phi \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \right) \\
 &= (-1)^{q-1} \pi^*\phi \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \\
 &= (-1)^{q-1} \pi^*\phi (f(x, t) - f(x, 0))
 \end{aligned}$$

d'où,

$$1 - \pi^* \circ s^* = (-1)^{q-1} (dK - Kd)$$

pour le premier type de forme différentielle.

Pour le deuxième type, considérons $\omega = (\pi^*\phi)f(x, t)dt$ avec $\deg \omega = q$. $d\omega$ est donné par

$$d\omega = (\pi^*d\phi)f(x, t)dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dt$$

et ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
 Kd\omega &= (\pi^*d\phi) \int_0^t f(x, t)dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \left(\sum_i dx_i \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
 dK\omega &= d \left((\pi^*\phi) \int_0^t f(x, t)dt \right) \\
 &= (\pi^*d\phi) \int_0^t f(x, t)dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \left(\left(\sum_i dx_i \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + f(x, t)dt \right)
 \end{aligned}$$

d'où. $(dK - Kd)\omega = (-1)^{q-1}\omega = (-1)^{q-1}(1 - \pi^* \circ s^*)\omega$ puisque $s^*(dt) = d(s^*t) = d(0) = 0$ et donc

$$(1 - \pi^* \circ s^*) = (-1)^{q-1} (dK - Kd) \quad \text{sur } \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

ce qui montre que $H(\pi^* \circ s^*) = H(1)$. □

Corollaire 3.2.14 (lemme de Poincaré).

$$H^q(\mathbb{R}^n) = H^q(\text{point}) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. $H^q(\mathbb{R}^n) = H^q(\text{point})$ est clair de la proposition précédente. Ensuite, puisque

$$\Omega^q(\text{point}) = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

et que l'ensemble des fonctions d'un point vers \mathbb{R} est égal à \mathbb{R} , alors nous avons

$$H^q(\text{point}) = \begin{cases} 1 \otimes \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 \otimes \mathbb{R} & q > 0 \end{cases}$$

et le résultat suit. □

3.2.2. Définition pour une variété différentielle quelconque

Dans cette sous-section, nous généraliserons la définition précédente de la cohomologie de De Rham à toutes variétés C^∞ . Commençons donc par rappeler quelques définitions concernant ces variétés.

Définition 3.2.15. *Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé (ou Hausdorff) dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .*

Remarque 3.2.16. *Bien que si nous demandons seulement d'être Hausdorff à une variété topologique est suffisant pour la munir d'une structure différentielle, nous supposons pour les définitions de variétés différentielles qu'elles sont également localement compact et qu'elle possède une base topologique dénombrable. Ces conditions impliquent entre autres choses la paracompacité (voir lemme A.1.2) et également l'existence de partitions d'unité.*

Définition 3.2.17. (1) *Une carte d'une variété topologique X est la donnée d'un couple (U, ϕ) formé d'un ouvert U de X (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ où D est un ouvert de \mathbb{R}^n .*

(2) *Un atlas de X est une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes pour lesquels $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ et où I n'est pas nécessairement fini.*

Définition 3.2.18. (1) *Deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) d'une variété topologique X sont compatibles d'ordre k ($1 \leq k \leq \infty$) si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou si la*

fonction de transition

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un difféomorphisme de classe C^k .

(2) Un atlas de classe C^k d'une variété topologique X est un atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de X dont deux cartes quelconques sont toujours compatibles.

Définition 3.2.19. (1) Un atlas de classe C^k d'une variété topologique X est dit maximal si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle-même à l'atlas. Nous appellerons également un tel atlas structure différentielle de classe C^k .

(2) Une variété différentielle de classe C^k est une variété topologique munie d'une structure différentielle de classe C^k .

Définition 3.2.20. Soient M et N deux variétés de classe C^k . Une application continue $f : M \rightarrow N$ est dite de classe C^k si quel que soit $a \in M$, il existe une carte (U, ϕ) de M , avec $a \in U$, une carte (V, ψ) de N , avec $f(a) \in V$, telle que l'application

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(V)$$

soit de classe C^k .

Définition 3.2.21. Si f est une fonction de classe C^k , avec $k \geq 1$, sur la carte (U_α, ϕ_α) , alors la dérivé partielle $\partial f / \partial x_i$ au point $p \in M$ est définie comme la i -ème dérivé de la fonction $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ sur $\phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial u_i}(\phi_\alpha(p))$$

où (u_1, \dots, u_n) sont les coordonnées standards sur \mathbb{R}^n et (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées sur U_α qui vérifient $x_i = u_i \circ \phi_\alpha$.

Définition 3.2.22. Une forme différentielle ω sur X est une collection de formes ω_U pour U dans l'atlas définissant X qui sont compatibles entre elles, c'est-à-dire que pour

$$i : U \cap V \rightarrow U$$

$$j : U \cap V \rightarrow V$$

deux inclusions, alors $i^* \omega_U = j^* \omega_V$ dans $\Omega^*(U \cap V)$.

Ainsi, par la functorialité de Ω^* , la dérivée extérieure et le produit alterné s'étendent aux formes différentielles sur une variété différentiable quelconque et $\Omega(M)$ et $H(M)$ sont bien définis pour toutes variétés différentiables M .

Définition 3.2.23. Une partition d'unité sur une variété M est une collection $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de fonctions C^∞ sur M qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) La collection des supports $\{\text{supp } \phi_i\}_{i \in I}$ est localement finie.
- (2) $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$ pour chaque point $p \in M$ et $\phi_i(p) \geq 0$ pour tout $p \in M$ et $i \in I$.

L'importance des partitions d'unité est contenue dans le théorème suivant pour lequel nous en avons mis la preuve en annexe (voir A.1).

Théorème 3.2.24. Soit M une variété différentiable et $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement d'ouverts de M . Alors, il existe une partition d'unité $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ subordonnée au recouvrement d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avec au plus, un nombre dénombrable de ϕ_α qui n'est pas identiquement zéro.

Pour le reste de cette section, nous nous intéresserons à une propriété fort intéressante de la cohomologie de De Rham : c'est qu'elle est invariante sous l'homotopie.

Mais avant, nous avons besoin des deux définitions suivantes :

Définition 3.2.25. Deux fonctions $f : M \rightarrow N$ et $g : M \rightarrow N$ entre deux variétés M et N de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) sont homotopes de classes C^k (noté $f \simeq^{C^k} g$) s'il existe une fonction $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ de classe C^k qui vérifie

$$\begin{cases} F(x, t) = f(x) & t \geq 1 \\ F(x, t) = g(x) & t \leq 0 \end{cases}$$

F sera appelée une homotopie de classe C^k .

Définition 3.2.26. Soient M et N , deux variétés de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Nous dirons qu'elles ont le même type d'homotopie dans le sens C^k s'il existe des applications C^k $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow M$ qui vérifient

$$f \circ g \simeq^{C^k} 1_N \text{ et } g \circ f \simeq^{C^k} 1_M.$$

Ainsi, la notation "opérateur d'homotopie" prend son sens avec la cohomologie de De Rham puisque deux applications de variétés homotopes l'une à l'autre

induisent la même application en cohomologie.

En effet, s'il existe une homotopie de classe C^∞ entre deux applications C^∞ $f : M \rightarrow N$ et $g : M \rightarrow N$, M et N étant deux variétés C^∞ , c'est-à-dire une application C^∞ $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ qui vérifie

$$\begin{cases} F(x, t) = f(x) & t \geq 1 \\ F(x, t) = g(x) & t \leq 0. \end{cases}$$

Alors, en considérant les sections

$$s_0, s_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R},$$

définies par $s_0(m) = (m, 0)$ et $s_1(m) = (m, 1)$, nous avons

$$f^* = s_1^* \circ F^* = s_0^* \circ F^* = g^*$$

puisque s_1^* et s_0^* sont tous les deux l'inverse de π^* (Lemme de Poincaré 3.2.14). D'où, $H(f) = H(g)$.

En fait, nous pouvons dire plus sur la cohomologie des variétés qui, en fait, est invariante sous l'homotopie.

Théorème 3.2.27. *Soient deux variétés M et N qui sont homotopes dans le sens C^∞ ($M \simeq^{C^\infty} N$), alors leurs cohomologies coïncident.*

DÉMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned} M \simeq^{C^\infty} N &\Rightarrow \exists f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow M \text{ } C^\infty \text{ tel que } f \circ g \simeq^{C^\infty} 1_N \text{ et } g \circ f \simeq^{C^\infty} 1_M \\ &\Rightarrow \exists f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow M \text{ } C^\infty \text{ tel que } H(f) \circ H(g) = H(1_N) \\ &\quad \text{et } H(g) \circ H(f) = H(1_M) \\ &\Rightarrow H(M) = H(N). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.28. *En fait, deux variétés ont le même type d'homotopie dans le sens C^∞ si et seulement si elles l'ont dans le sens usuel, c'est-à-dire de façon continue. Ceci est dû au fait qu'il existe une homotopie continue entre chaque*

fonction continue entre deux variétés C^∞ et une fonction C^∞ . (Pour une preuve, voir [1] p.213)

3.2.3. Le complexe de De Rham-Čech

Maintenant, nous allons introduire le double complexe qui nous montrera les éléments qui lient les cohomologies de De Rham et celle de Čech.

Définition 3.2.29. *Un bon recouvrement d'ouverts sur une variété M de dimension n est un recouvrement d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de M pour lequel, chaque intersection finie $U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}$ est difféomorphe à \mathbb{R}^n .*

L'importance d'un bon recouvrement est confirmée par le théorème suivant pour lequel nous avons fournis une preuve dans l'annexe.

Théorème 3.2.30. *Toute variété possède un bon recouvrement.*

DÉMONSTRATION. Voir section A.3 □

La cohomologie de De Rham pourra être vu dans certains cas comme un cas particulier de la cohomologie de Čech. Pour le comprendre nous allons introduire le double complexe suivant :

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) = \bigoplus_{p, q \geq 0} C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$$

où $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ est un bon recouvrement d'ouverts d'une variété différentielle M et J est un ensemble dénombrable ordonné.

Ω^q est un préfaisceau pour chaque q . En effet, pour $U \subset V$ deux ouverts d'une variété M , les restrictions du préfaisceau sont données par la restriction des fonctions, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} r_{V,U} : \Omega^q(V) &\rightarrow \Omega^q(U) \\ f|_V dx_I &\mapsto f|_U dx_I \end{aligned}$$

Évidemment, nous avons $r_{U,V} \circ d = d \circ r_{U,V}$.

Ainsi, nous pouvons donc considérer la différentielle

$$\delta : C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}, \Omega^q)$$

définie à la section 3.1.3 comme différentielle horizontale de $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ et l'extension de la dérivée extérieure

$$d : \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^{q+1}(U)$$

définie à la section 3.2.2 aux ensembles $C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$. Pour alléger les notations, nous la noterons également $d : C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}, \Omega^q)$.

Proposition 3.2.31 (Suite de Mayer-Vietoris généralisée). *Considérons $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un bon recouvrement, alors la suite*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0 \in I} \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

est exacte, c'est-à-dire que la cohomologie de ce complexe est nulle partout.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, calculons le noyau de l'application

$$\delta : \prod_{\alpha \in I} \Omega^*(U_\alpha) \rightarrow \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}).$$

Si $\omega \in \Omega^*(U_\alpha)$, alors

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \alpha_1} = 0 \iff \omega_{\alpha_0} = \omega_{\alpha_1}.$$

Autrement dit, $\omega \in \ker \delta$ si et seulement si les restrictions sur n'importe quels deux ouverts du recouvrement coïncident. Comme $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ est un bon recouvrement, il peut être vu comme un atlas. Ainsi, ω est une forme sur M comme définie au point 3.2.22 et nous avons donc $\ker \delta = \text{im } r$.

Considérons maintenant une partition d'unité $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subordonnée au recouvrement d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. La section A.1 de l'annexe nous confirme qu'elle existe bien. Définissons un opérateur d'homotopie

$$\begin{aligned} K : \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) &\rightarrow \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}) \\ \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &\mapsto \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(\delta K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (K\omega)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\
&= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\
(K\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha (\delta\omega)_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_p} \\
&= \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \left(\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \right) \\
&= \left(\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \right) \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} - \sum_{\alpha \in I} \sum_{i=0}^p (-1)^i \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\
&= \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} - (\delta K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p}
\end{aligned}$$

D'où, $(\delta K + K\delta) = 1$. Ainsi, l'identité sur $\Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ induit l'application nulle sur $H^*(\Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}))$ ce qui implique que $H(1) = H(0)$ et donc

$$H\left(\prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})\right) = 0 \quad \forall p \geq 1.$$

□

Dans ce qui suit, nous noterons la cohomologie de De Rham d'une variété M explicitement par $H_{DR}(M)$. Maintenant, nous allons regarder les deux suites spectrales associées à ce complexe double $C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$.

Puisque la suite de Mayer-Vietoris est exacte (proposition 3.2.31) alors, le terme ${}_I E_1$ sera donné par

$${}_I E_1 = H_\delta(C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \Omega^3(M) & 0 & & \\ \hline \Omega^2(M) & 0 & & \\ \hline \Omega^1(M) & 0 & & \\ \hline \Omega^0(M) & 0 & & \\ \hline \end{array}$$

et, par définition de la cohomologie de De Rham,

$${}_I E_2 = H_d H_\delta(C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline H_{DR}^3(M) & 0 & & \\ \hline H_{DR}^2(M) & 0 & & \\ \hline H_{DR}^1(M) & 0 & & \\ \hline H_{DR}^0(M) & 0 & & \\ \hline \end{array}$$

Cette suite dégénère donc au rang 2 (voir l'exemple 2.1.4), d'où

$${}_I E_\infty^{p,q} = \begin{cases} H_{DR}^q(M) & p = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

Déjà, à cette étape, nous comprenons que ce complexe nous aide à calculer la cohomologie de De Rham puisque

$$H_D(\text{Tot}(C(\mathfrak{U}, \Omega))^n) = \bigoplus_{p+q=n} {}_I E_\infty^{p,q} = H_{DR}^n(M).$$

et donc

Théorème 3.2.32. *Le double complexe $C(\mathfrak{U}, \Omega)$ calcule la cohomologie de De Rham de M pour un recouvrement \mathfrak{U} de M , qu'il soit bon ou non, c'est-à-dire*

$$H_{DR}(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_D(\text{Tot}(C(\mathfrak{U}, \Omega))^n).$$

Quant à la deuxième suite spectrale, nous avons

$$\begin{aligned} {}_{II} E_1^{p,q} &= H_d \left(\prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \right) \\ &= \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \\ &= \begin{cases} 0 & q \neq 0 \\ C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) & q = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

puisque $U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}$ est diffeomorphe à \mathbb{R}^n par définition de bon recouvrement et la cohomologie de De Rham de \mathbb{R}^n est celle d'un point (lemme de Poincaré, corollaire

3.2.14) et donc, nous avons

$${}_{II}E_2 = H_\delta H_d(C(\mathcal{U}, \mathbb{R})) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline H^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & H^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & H^3(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \\ \hline \end{array}$$

Cette suite dégénère également au rang 2, d'où

$${}_{II}E_\infty^{p,q} = \begin{cases} 0 & q \neq 0 \\ H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & q = 0 \end{cases}$$

et nous avons donc

$$H_{DR}^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} {}_{II}E_r^{p,q} = \bigoplus_{p+q=n} {}_{II}E_r^{p,q} = H^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \quad \forall n$$

ce qui implique le théorème suivant

Théorème 3.2.33. *Pour \mathcal{U} un bon recouvrement,*

$$H_{DR}(M) = H(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

3.3. COHOMOLOGIE SINGULIÈRE

Avant de travailler avec la cohomologie singulière, nous allons d'abord définir l'homologie singulière à coefficients entiers. Ensuite, à partir de ces définitions et du théorème de Mayer-Vietoris, nous pourrons adapter ces définitions et résultats pour avoir une cohomologie à coefficients dans n'importe quel groupe abélien G et après, utiliser un complexe similaire au complexe De Rham-Čech pour calculer la cohomologie singulière.

3.3.1. Homologie singulière à coefficients entiers

Nous définissons $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}^n$ avec chaque \mathbb{R}^i vu comme un sous-espace de \mathbb{R}^n pour chaque $i < n$ sous l'inclusion

$$(t_1, \dots, t_i) \mapsto (t_1, \dots, t_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Notons P_i un vecteur de \mathbb{R}^∞ de la base standard avec 1 à la i -ème coordonnée et 0 ailleurs. P_0 étant l'origine. Les q -simplexes standards $\Delta_q \subset \mathbb{R}^\infty$ sont définis de la façon suivante :

$$\Delta_q = \left\{ \sum_{j=0}^q t_j P_j \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{j=0}^q t_j = 1 \text{ et } 0 \leq t_j \leq 1 \right\}.$$

Si X est un espace topologique, un q -simplexe singulier de X est une application continue $s : \Delta_q \rightarrow X$ et une q -chaîne singulière dans X est une combinaison linéaire avec coefficients entiers de q -simplexes singuliers. L'ensemble de ces q -chaînes forment un groupe abélien que nous noterons $S_q(X)$.

Nous définissons les applications

$$\partial_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$$

par

$$\partial_q^i \left(\sum_{j=0}^{q-1} t_j P_j \right) = \sum_{j=0}^{i-1} t_j P_j + \sum_{j=i}^{q-1} t_j P_{j+1}$$

où $\partial_q^i(\Delta_{q-1})$ est appelée la i -ème face du q -simplexe. Nous remarquons qu'elle représente une région du bord du q -simplexe.

Le groupe gradué des chaînes singulières $S_*(X) = \bigoplus_{q \geq 0} S_q(X)$ peut être transformé en complexe différentiel avec l'opérateur $\partial : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ défini ainsi :

$$\partial s = \sum_{i=0}^q (-1)^i s \circ \partial_q^i.$$

Proposition 3.3.1. $\partial^2 = 0$

DÉMONSTRATION. La preuve se fait de la même façon que celle de la proposition 3.1.7 :

$$\begin{aligned}
\partial^2 s \left(\sum_{j=0}^{q-1} t_j P_j \right) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial s \left(\sum_{j=0}^{i-1} t_j P_j + \sum_{j=i}^{q-1} t_j P_{j+1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{k<i} (-1)^k s \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j P_j + \sum_{j=k}^{i-1} t_j P_{j+1} + \sum_{j=i}^{q-1} t_j P_{j+2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k>i} (-1)^{k-1} s \left(\sum_{j=0}^{i-1} t_j P_j + \sum_{j=i}^{k-1} t_j P_{j+1} + \sum_{j=k}^{q-1} t_j P_{j+2} \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Ainsi, l'homologie du complexe $S_*(X)$ avec son opérateur différentiel se nomme l'homologie singulière avec coefficients entiers de X , notée $H_*(X; \mathbb{Z})$ ou tout simplement, $H_*(X)$. Remarquons que, si au lieu de \mathbb{Z} , nous prenons un groupe abélien quelconque G , nous obtiendrions $H(X; G)$, l'homologie singulière de X à coefficient dans G .

De plus, le degré d'une 0-chaîne $\sum_i n_i s(P_i)$ est défini par $\sum_i n_i$. Ainsi, si nous supposons que X est connexe par arc et que pour P et Q , deux points de X , $-P$ et Q sont dans une 0-chaîne, alors n'importe quel chemin de P à Q est un 1-simplexe avec $Q - P$ comme bord. Donc, une 0-chaîne est le bord d'un 1-simplexe si et seulement si il a degré 0. D'où, l'exactitude de la suite suivante

$$0 \longrightarrow \partial S_1(X) \longrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Cette dernière implique que pour X connexe par arc, $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et que

$$\dim H_0(X) = \text{nombre de composantes connexes par arc de } X.$$

Maintenant, calculons l'homologie de \mathbb{R}^n . Pour ce faire, nous définissons un opérateur d'homotopie entre l'identité et l'application nulle. Soit $K : S_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow S_{q+1}(\mathbb{R}^n)$, l'application appelée cône pour son sens géométrique et définie par

$$Ks \left(\sum_{j=0}^{q+1} t_j P_j \right) = (1 - t_{q+1}) s \left(\sum_{j=0}^q \frac{t_j}{1 - t_{q+1}} P_j \right)$$

si la variable t_{q+1} est vue comme le temps, nous pouvons imaginer le $(q+1)$ -simplexe Ks comme étant le q -simplexe s qui va jusqu'à l'origine quand t_{q+1} va

de 0 jusqu'à 1. Ainsi,

$K(\text{point}) = \text{segment de droite}$;

$K(\text{segment de droite}) = \text{triangle}$;

$K(\text{triangle}) = \text{tetrahèdre} \dots$

Proposition 3.3.2. $\partial K - K\partial = (-1)^{q+1}$

DÉMONSTRATION. Soit $s \left(\sum_{j=0}^q t_j P_j \right) \in S_q(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}
 K\partial s \left(\sum_{j=0}^q t_j P_j \right) &= (1 - t_q) \partial s \left(\sum_{j=0}^{q-1} \frac{t_j}{1 - t_q} P_j \right) \\
 &= (1 - t_q) \sum_{i=0}^q (-1)^i s \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_j}{1 - t_q} P_j + \sum_{j=i+1}^q \frac{t_{j-1}}{1 - t_q} P_j \right) \\
 \partial K s \left(\sum_{j=0}^q t_j P_j \right) &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i K s \left(\sum_{j=0}^{i-1} t_j P_j + \sum_{j=i+1}^{q+1} t_{j-1} P_j \right) \\
 &= (1 - t_q) \sum_{i=0}^q (-1)^i s \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_j}{1 - t_q} P_j + \sum_{j=i+1}^q \frac{t_{j-1}}{1 - t_q} P_j \right) \\
 &\quad + (-1)^{q+1} s \left(\sum_{j=0}^q t_j P_j \right) \\
 &= K\partial s \left(\sum_{j=0}^q t_j P_j \right) + (-1)^{q+1} s \left(\sum_{j=0}^q t_j P_j \right).
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\partial K - K\partial = (-1)^{q+1}$$

valable pour $k \geq 1$. □

Ainsi, de ce qui précède, nous avons

$$H_q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & q \geq 1 \\ \mathbb{Z} & q = 0. \end{cases}$$

Pour des raisons techniques dans la preuve de l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris, nous avons besoin d'introduire un raffinement du complexe $S_*(X)$ que nous appellerons \mathcal{U} -petites chaînes dans X et que nous noterons $S_*^{\mathcal{U}}(X)$. Une \mathcal{U} -petite chaîne de X est une chaîne de X pour laquelle tous ses simplexes sont

contenus dans un des ouverts $U \in \mathfrak{U}$.

L'inclusion $i : S_*^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ commute avec la différentielle et s'avère être une application d'équivalence de complexes. (voir la section A.2 de l'annexe)

Définissons l'opérateur de Čech pour l'homologie singulière associé au recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$:

$$\delta : \bigoplus_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} S_q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}) \rightarrow \bigoplus_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{p-1}} S_q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}})$$

par la formule de somme alternée :

$$(\delta c)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_{\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}}$$

où l'échange de deux indices consécutifs donne un négatif :

$$c_{\alpha_0, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p} = -c_{\alpha_0, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_p}$$

ce qui implique que δ est bien une différentielle puisque

$$(\delta^2 c)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p-2}} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{\beta \in \Lambda} c_{\alpha, \beta, \alpha_0, \dots, \alpha_{p-2}} = 0.$$

δ sur $\bigoplus_{\alpha} S_q(U_\alpha) \rightarrow S_q(X)$ est simplement la somme des éléments et est dénotée par ϵ .

Proposition 3.3.3 (Suite de Mayer-Vietoris pour les chaînes singulières). *La suite suivante est exacte*

$$0 \longleftarrow S_q^{\mathfrak{U}}(X) \xleftarrow{\epsilon} \bigoplus S_q(U_{\alpha_0}) \xleftarrow{\delta} \bigoplus_{\alpha_0 < \alpha_1} S_q(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xleftarrow{\delta} \dots$$

DÉMONSTRATION. Pour deux ouverts, la suite de Mayer-Vietoris est

$$0 \longleftarrow S^{\mathfrak{U}}(U_0 \cup U_1) \xleftarrow{\epsilon} S(U_0) \oplus S(U_1) \xleftarrow{\delta} S(U_{01}) \longleftarrow 0$$

et est exacte par définition de ϵ et δ . En effet, si $\epsilon(c_0, c_1) = 0$, alors, $c_0 = -c_1 \in S(U_1)$ et en fait, $(c_0, c_1) = (c_{01}, -c_{01}) = \delta(c_{01})$. La suite de Mayer-Vietoris pour deux ouverts s'injecte dans celle pour trois ouverts comme le montre le diagramme

commutatif suivant qui a ses colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & S^{\mathfrak{U}_1}(U_0 \cup U_1) & \longleftarrow & S(U_0) \oplus S(U_1) & \longleftarrow & S(U_{01}) \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & S^{\mathfrak{U}_2}(\bigcup_{i=0}^2 U_i) & \longleftarrow & \bigoplus_{i=0}^2 S(U_i) & \longleftarrow & \bigoplus_{0 \leq i < j \leq 2} S(U_{ij}) \longleftarrow S(U_{012}) \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & \frac{S^{\mathfrak{U}_1}(\bigcup_{i=0}^2 U_i)}{S^{\mathfrak{U}_2}(U_0 \cup U_1)} & \xleftarrow{\beta} & S(U_2) & \xleftarrow{\alpha} & S(U_{02}) \oplus S(U_{12}) \longleftarrow S(U_{012}) \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où \mathfrak{U}_1 est le recouvrement pour U_0 et U_1 , et \mathfrak{U}_2 est le recouvrement pour U_0 , U_1 et U_2 .

Ainsi, $S^{\mathfrak{U}_2}(\bigcup_{i=0}^2 U_i) / S^{\mathfrak{U}_1}(\bigcup_{i=0}^1 U_i)$ est engendré par les simplexes dans U_2 qui ne sont pas entièrement dans U_0 ou dans U_1 . Maintenant, démontrons que les lignes sont exactes. La première est la suite de Mayer-Vietoris pour U_0 et U_1 et la troisième l'est presque pour les ouverts U_{02} et U_{12} . Il n'y a donc qu'en $S(U_2)$ où il faut vérifier l'exactitude de la suite.

Clairement, $\alpha \circ \beta = 0$ puisque $\text{im } \alpha \subset U_0 \cup U_1$. Réciproquement, si $\beta(c) = 0$ alors c est une chaîne de U_2 pour laquelle ses simplexes sont entièrement dans U_0 ou dans U_1 c'est-à-dire, c est dans l'image de $S(U_0) \oplus S(U_1)$. Ainsi, la troisième ligne est bien exacte. Par le corollaire 1.1.18, la deuxième ligne est également exacte (pour l'appliquer, nous n'avons qu'à voir chaque ligne comme des complexes différentiels pour lesquels l'homologie de la première et dernière ligne est 0).

Le procédé utilisé pour démontrer l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris pour trois ouverts peut être utilisé avec l'induction pour démontrer que la suite est exacte pour un nombre dénombrable d'ouverts. \square

3.3.2. Cohomologie singulière à coefficients dans un groupe abélien

Tous les résultats de l'homologie singulière à coefficients entiers peuvent être adaptés pour l'homologie singulière à coefficients dans G . G étant un groupe

abélien. Ainsi, nous définirons la cohomologie singulière à coefficients dans G . Pour ce faire, nous devons commencer par considérer les q -cochaînes définies comme étant les fonctions linéaires sur le G -module $S_q(X)$. Ainsi, nous avons $S^q(X) = \text{Hom}(S_q(X), G)$. L'opérateur différentiel est défini par

$$\begin{aligned} d : \text{Hom}(S_q(X), G) &\rightarrow \text{Hom}(S_{q+1}(X), G) \\ \omega(c) &\mapsto \omega(\partial c) \end{aligned}$$

et ainsi, la cohomologie de ce complexe est la cohomologie singulière de X avec coefficients dans le groupe G , notée $H^*(X; G)$. La cohomologie singulière pour \mathbb{R}^n se calcule à l'aide de l'opérateur adjoint à celui du cône. Soit

$$L : S^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

que nous définissons par

$$(L\sigma)(c) = \sigma(Kc)$$

pour $\sigma \in S^q(\mathbb{R}^n)$ et $c \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi, pour $\sigma \in S^q(\mathbb{R}^n)$ et $c \in S_q(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} ((dL - Ld)\sigma)c &= (d(L\sigma))c - (L(d\sigma))(c) \\ &= (L\sigma)(\partial c) - (d\sigma)(Kc) \\ &= \sigma(K\partial c) - \sigma(\partial Kc) \\ &= \sigma((K\partial - \partial K)c) \\ &= ((-1)^{q+1}\sigma)c \quad \text{proposition 3.3.2} \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$1 = (-1)^{q+1}(dL - Ld) \quad \text{sur } S^q(\mathbb{R}^n), q \geq 1$$

ce qui montre que L est un opérateur d'homotopie entre l'identité et l'application nulle sur les q -cochaînes pour $q \geq 1$. Nous pouvons donc en conclure que

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases}$$

En appliquant le foncteur $\text{Hom}(\cdot, G)$ à la suite de Mayer-Vietoris des chaînes singulières nous obtenons la suite de Mayer-Vietoris pour les cochaînes singulières :

$$0 \longrightarrow S_{\mathbb{U}}^q(X) \xrightarrow{\epsilon^*} \bigoplus S^q(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta^*} \bigoplus_{\alpha_0 < \alpha_1} S^q(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta^*} \dots$$

Maintenant, au lieu de démontrer directement l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris pour les cochaînes, nous allons démontrer une proposition plus générale :

Proposition 3.3.4. *Soit*

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

une suite exacte de G -modules libres, G un groupe abélien, alors la suite

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(A_1, G) \xleftarrow{f_1^*} \text{Hom}(A_2, G) \xleftarrow{f_2^*} \text{Hom}(A_3, G) \xleftarrow{f_3^*} \dots$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Posons $\{a_k^i\}_{i \in I}$ pour l'ensemble de générateurs de A_k , définissons l'application $f_0 : 0 \rightarrow A_1$ et montrons que $\ker f_n^* = \text{im } f_{n+1}^*$ pour tout $n \geq 0$.

Tout d'abord, $f_{n+1}^* \circ f_n^* = 0$ puisque $f_{n+1}^* \circ f_n^* s = f_n \circ f_{n+1} \circ s = 0$ par hypothèse. Pour l'autre inclusion, supposons que $f_n^* \alpha_n = 0$, alors

$$\text{im } f_n = \ker f_{n+1} \subset \ker \alpha_n.$$

Ainsi, nous voudrions montrer l'existence d'un élément β_{n+1} de $\text{Hom}(A_{n+1}, G)$ qui ferait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & G \\ \downarrow f_n & \nearrow \beta_{n+1} & \uparrow \\ A_{n+1} & & \end{array}$$

Définissons β_{n+1} sur les générateurs de A_{n+1} de la manière suivante :

$$\beta_{n+1}(a_{n+1}^i) = \begin{cases} \alpha_n \circ f_n^{-1}(a_{n+1}^i) & \text{si } a_{n+1}^i \in \text{im } f_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque le noyau de f_n est inclus dans le noyau de α_n , alors β_{n+1} est bien défini et vérifie bien

$$f_n^* \beta_{n+1} = \beta_{n+1} \circ f_n = \alpha_n$$

et ce. pour $n \geq 0$. □

Corollaire 3.3.5. *La suite de Mayer-Vietoris pour les cochaînes est exacte.*

DÉMONSTRATION. $S_q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p})$ défini pour un groupe abélien G est, par définition, un G -module libre et la suite de Mayer-Vietoris pour les chaînes singulières à coefficients dans G est exacte (c'est exactement la même preuve que pour la proposition 3.3.3). Ainsi, nous obtenons le résultat en appliquant la proposition précédente sur la suite de Mayer-Vietoris pour les chaînes singulières. □

Lemme 3.3.6. *Les applications ϵ^* et δ^* sont respectivement données par la restriction et par*

$$(\delta^* \omega)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}}$$

comme les applications définies pour la cohomologie de Čech.

DÉMONSTRATION. Soit $c \in \bigoplus_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{p+1}} S_q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}})$, $\omega \in \bigoplus_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} S^q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p})$ et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ le recouvrement, alors nous avons

$$\begin{aligned} (\delta^* \omega)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} c_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} &= (\omega \circ \delta)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} c_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} \omega_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} (\delta c)_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} \omega_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} c_{\alpha, \alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} c_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} \end{aligned}$$

parce que $\omega_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} c_{\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}} \in S_q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}})$ si et seulement si $\alpha = \alpha_i$.
 Pour ϵ^* , considérons $c \in \bigoplus_{\alpha} S_q(U_{\alpha})$ et $\omega \in S^q(X)$. Alors.

$$\begin{aligned} (\epsilon^* \omega)_{\alpha} c_{\alpha} &= (\omega \circ \epsilon)_{\alpha} c_{\alpha} \\ &= \omega(\epsilon c)_{\alpha} \\ &= \omega c_{\alpha} \\ &= \omega|_{U_{\alpha}} \end{aligned}$$

□

Avec la suite de Mayer-Vietoris, nous pouvons regarder le double complexe $A = \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} A^{p, q}$ défini par

$$A^{p, q} = C^p(\mathcal{U}, S^q)$$

muni des différentielles

$$d : C^p(\mathcal{U}, S^q) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, S^{q+1}) \text{ et } \delta^* : C^p(\mathcal{U}, S^q) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, S^q)$$

et ensuite appliquer le même argument que pour la cohomologie de De Rham.

Nous aurons donc les deux suites spectrales associées au double complexe A , ${}_I E_r$ et ${}_{II} E_r$, qui dégèneront toutes deux au deuxième rang et qui seront données par

$${}_I E_1^{p, q} = \begin{cases} S^q(X) & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

puisque la suite de Mayer-Vietoris est exacte et donc,

$${}_I E_{\infty}^{p, q} = {}_I E_2^{p, q} = \begin{cases} H^q(X; G) & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

Dans l'autre sens, si \mathcal{U} est un bon recouvrement, alors

$${}_{II} E_1^{p, q} = \begin{cases} C^p(\mathcal{U}, G) & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

la cohomologie de Čech dans le préfaisceau constant G et

$${}_{II} E_{\infty}^{p, q} = {}_{II} E_2^{p, q} = \begin{cases} H^p(\mathcal{U}, G) & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

Alors, comme dans la preuve du complexe De Rham-Čech, ceci implique

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^p(\mathcal{U}, G) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_{sing}^p(X; G)$$

ce qui nous amène au théorème final :

Théorème 3.3.7 (Théorème de De Rham).

$$H_{DR}(X) \simeq H_{sing}(X; \mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà démontré que

$$H_{DR}(X) = H(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

avec \mathcal{U} un bon recouvrement qui existe sur toute variété. Ainsi, en prenant \mathbb{R} comme groupe abélien, nous avons l'égalité

$$H_{sing}(X; \mathbb{R}) = H(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

□

Chapitre 4

THÉORIE DES INVARIANTS

Un des problèmes de la théorie des invariants est de savoir si, pour un espace vectoriel V donné, un groupe fini $G \leq Gl(V)$ agissant sur V et un corps k avec caractéristique $p > 0$, l'anneau des invariants $k[V]^G \hookrightarrow k[V]$ est Cohen-Macaulay. En fait, il est déjà connu que pour p ne divisant pas l'ordre du groupe, ce sera toujours le cas. (Voir le théorème de Hochster et Eagon pour une preuve [14].) Notre but sera de démontrer une condition nécessaire sur les groupes de cohomologies de G sur $k[V]$ pour que $k[V]^G$ soit Cohen-Macaulay que Kemper a déjà démontré [10] en mentionnant que c'était possible de le faire avec les suites spectrales. C'est cette preuve-ci que nous donnerons dans ce chapitre.

4.1. DÉFINITIONS PRÉALABLES

Nous allons commencer par introduire quelques notions d'algèbre commutative en suivant le livre de R. Y. Sharp [6]. Il a une approche peu standard, notamment pour la définition d'anneau Cohen-Macaulay, mais qui a le mérite d'être plutôt brève.

Soit R un anneau et a_1, \dots, a_r des éléments de R . Nous dirons qu'ils forment une suite régulière sur R (ou une R -suite) de longueur r si a_1 n'est pas un diviseur de zéro de R , si a_i n'est pas un diviseur de zéro de $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$ pour $2 \leq i \leq r$ et si $(a_1, \dots, a_r) \neq R$.

La profondeur de R , noté $prof(R)$, est définie comme étant la longueur maximale que peut atteindre une R -suite régulière c'est-à-dire

$$prof(R) = \max\{k \mid a_1, \dots, a_k \text{ est une suite régulière de } R\}$$

Si aucune suite régulière n'existe dans R , nous noterons $\text{prof}(R) = 0$. Pour un idéal I de R , nous en définissons la profondeur comme suit :

$$\text{prof}(I) = \max\{k \mid a_1, \dots, a_k \text{ est une suite régulière de } R \text{ et pour } a_i \in I\}$$

Soit $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n = P$, une chaîne d'idéaux premiers d'un anneau R . Elle est dite maximale s'il est impossible d'insérer un autre idéal premier $P_0 \subset P' \subset P$ dans la chaîne différent des P_i . Ainsi, la hauteur d'un idéal premier P , notée $\text{ht}(P)$, peut être définie comme suit :

$$\text{ht}(P) = \sup \{n \mid P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n = P \text{ est une chaîne maximale d'idéaux premiers}\}$$

et si le supremum n'existe pas, nous noterons $\text{ht}(P) = \infty$.

Pour un idéal quelconque $I \neq R$, nous aurons :

$$\text{ht}(I) = \min \{\text{ht}(P) \mid I \subseteq P \text{ et } P \text{ un idéal premier de } R\}.$$

Définition 4.1.1. Un anneau R est dit Cohen-Macaulay si tout idéal I de R vérifie $\text{ht}(I) = \text{prof}(I)$.

Exemple 4.1.2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est Cohen-Macaulay. En effet, un idéal $k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est premier si et seulement si il est maximal puisque

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

et que $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si il est un corps. Donc, toute chaîne d'idéaux premiers ne peut en contenir qu'un et $\text{ht}(I) = 0$ pour tout idéal $I \subset R$. De plus, si $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un diviseur de zéro, alors $\text{pgcd}(a, n) = 1$ à cause de la relation

$$\frac{n}{\text{pgcd}(n, a)} \cdot a = \text{ppcm}(a, n) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Donc, a est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $(ka) = (k) \forall ka \in k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il n'y a donc pas de suites régulières possibles dans un idéal propre $k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'où, $\text{prof}(k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

Définition 4.1.3. Soit A une algèbre graduée commutative et a_1, \dots, a_n sont des éléments de A homogènes. Le complexe de Koszul $\mathcal{K} = \mathcal{K}[a_1, \dots, a_n; A]$ est l'algèbre graduée différentielle :

$$\mathcal{K} = A \otimes \bigwedge (sa_1, \dots, sa_n)$$

où $\mathcal{K}^p = A \otimes \bigwedge^p(sa_1, \dots, sa_n)$, où $\bigwedge(h_1, \dots, h_n)$ est l'algèbre extérieure sur les éléments h_1, \dots, h_n , et avec la différentielle ∂ définie par

$$\partial|_A = 0$$

$$\partial(sa_i) = a_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\partial(x \cdot y) = \partial(x)y + (-1)^{\deg(x)}x\partial(y)$$

et $\deg(sa_i) = \deg(a_i)$.

Ainsi, le complexe de Koszul $\mathcal{K} = \mathcal{K}[a_1, \dots, a_n; A]$ peut être représenté par

$$0 \rightarrow A \rightarrow A^{\binom{n}{n-1}} \rightarrow \dots \rightarrow A^{\binom{n}{p}} \rightarrow \dots \rightarrow A^{\binom{n}{1}} \rightarrow A \rightarrow 0$$

puisque $\dim(\bigwedge^p(a_1, \dots, a_n)) = \binom{n}{p}$, et la différentielle $\partial : \mathcal{K}^p \rightarrow \mathcal{K}^{p-1}$ est donnée par

$$\partial(e_{i_1, \dots, i_p}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} a_{i_j} e_{i_1, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_p}$$

où $e_{i_1, \dots, i_p} = sa_{i_1} \wedge \dots \wedge sa_{i_p}$ est un élément de la base de $A^{\binom{n}{p}}$.

∂ vérifie bien $\partial^2 = 0$ (voir, par exemple, la preuve de la proposition 3.1.7).

Proposition 4.1.4. *Soit a_1, \dots, a_n une suite régulière, alors le complexe de Koszul $\mathcal{K} = \mathcal{K}[a_1, \dots, a_n; A]$ est exact sauf en \mathcal{K}^0 où $H^0(\mathcal{K}) = A/(a_1, \dots, a_n)$.*

DÉMONSTRATION. D'abord, puisque $\partial(e_i) = a_i \forall i$, alors $\text{im}(\partial : A^n \rightarrow A) = (a_1, \dots, a_n)$ et $H^0(\mathcal{K}) = A/(a_1, \dots, a_n)$. Pour le reste de la proposition, nous procéderons par induction et nous utiliserons les suites spectrales sur un double complexe.

Introduisons le double complexe

$$C^{p,q} = \begin{cases} \mathcal{K}^p(a_1, \dots, a_{i-1}) & q = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec la multiplication par a_i comme différentielle verticale. Évidemment, la différentielle du complexe de Koszul commute avec la multiplication par a_i et nous

avons donc bien. un double complexe différentiel. Le complexe $Tot(C)$ est isomorphe à $\mathcal{K}(a_1, \dots, a_i)$ puisque

$$\begin{aligned} Tot(C)^m &= \mathcal{K}^{m-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) \oplus \mathcal{K}^m(a_1, \dots, a_{i-1}) \\ &\simeq A^{\binom{i-1}{m}} \oplus A^{\binom{i-1}{m-1}} \\ &\simeq A^{\binom{i}{m}} \\ &\simeq \mathcal{K}^m(a_1, \dots, a_i) \end{aligned}$$

De plus, la différentielle de $Tot(C)$ $D = \partial + (-1)^{m-1}a_i$ qui a pour ensemble de départ $A^{\binom{i-1}{m}} \oplus A^{\binom{i-1}{m-1}}$ agit de la même façon que la différentielle de $\mathcal{K}(a_1, \dots, a_i)$

$$\partial : A^{\binom{i}{m}} \rightarrow A^{\binom{i}{m-1}}$$

Maintenant, nous savons qu'il existe une suite spectrale $E^{p,q}$ qui vérifie

$$E_1^{p,q} = H_{\partial}(C^{p,q}) = \begin{cases} A/(a_1, \dots, a_{i-1}) & q = 0, 1 \text{ et } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

à cause de l'hypothèse d'induction. Maintenant, en regardant bien l'application

$$A/(a_1, \dots, a_{i-1}) \xrightarrow{\cdot a_i} A/(a_1, \dots, a_{i-1}),$$

nous remarquons que $\ker \cdot a_i = 0$ puisque (a_1, \dots, a_n) est une suite régulière et $\text{im } \cdot a_i = (a_i)$ et, du coup, nous avons

$$E_2^{p,q} = H_{\cdot a_i} H_{\partial}(C^{p,q}) = \begin{cases} A/(a_1, \dots, a_i) & q = 0 \text{ et } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La suite, bien évidemment, dégénère au rang 2. Ainsi, pour $Tot(C)^m$, $m \neq 0$, nous utilisons la même technique que dans la preuve du lemme 2.5.2 et nous trouvons

$$H_D(Tot(C)^m) = H_{\partial}(\mathcal{K}^m(a_1, \dots, a_i)) = 0.$$

Pour $m = 0$, nous devons y apporter une petite variante. Nous avons

$$F^0 H_D(Tot(C)^0) / F^1 H_D(Tot(C)^0) = E_{\infty}^{0,0} \simeq A/(a_1, \dots, a_i).$$

Mais, puisque la filtration est bornée et que tous les autres termes de $E_{\infty}^{p,q}$ sont nuls, nous avons

$$F^k H_D(Tot(C)^0) / F^{k+1} H_D(Tot(C)^0) = 0 \quad k \neq 0$$

et également

$$F^1 H_D(\text{Tot}(C)^0) = F^2 H_D(\text{Tot}(C)^0) = \dots = H_D(\text{Tot}(C)^0)$$

$$F^0 H_D(\text{Tot}(C)^0) = F^{-1} H_D(\text{Tot}(C)^0) = \dots = 0$$

et nous retrouvons donc

$$H_D(\text{Tot}(C)^0)/0 = H_\partial(\text{Tot}(C)^0) \simeq A/(a_1, \dots, a_r).$$

□

4.2. COHOMOLOGIE DES GROUPES

Définition 4.2.1. (1) M est un $\mathbb{Z}G$ -module s'il est un \mathbb{Z} -module et s'il existe une action $G \times M \rightarrow M$ compatible avec la structure de \mathbb{Z} -module. Un $\mathbb{Z}G$ -module M est dit trivial si l'action de G sur M est triviale, c'est-à-dire que

$$g \cdot m = m \quad \forall g \in G \quad \forall m \in M$$

(2) Un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ de $\mathbb{Z}G$ -modules est un homomorphisme de \mathbb{Z} -module qui vérifie $g \cdot f(m) = f(g \cdot m)$.

Remarque 4.2.2. Si M est un $\mathbb{Z}G$ -module, alors nous pouvons construire le complexe de Koszul de (a_1, \dots, a_n) à coefficients dans $M : \mathcal{K}(a_1, \dots, a_n; M)$. Nous pouvons doter d'une structure de G -module \mathcal{K} par

$$\begin{aligned} G \times M \otimes \bigwedge^r (sa_1, \dots, sa_n) &\rightarrow M \otimes \bigwedge^r (sa_1, \dots, sa_n) \\ (g, m \otimes \bigwedge (sa_{i_1} \wedge \dots \wedge sa_{i_r})) &\mapsto (gm \otimes (sa_{i_1} \wedge \dots \wedge sa_{i_r})) \end{aligned}$$

Soit G un groupe. Définissons $L_n(G)$ le groupe abélien libre engendré par les $(n+1)$ -uplets $(g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1}$. G agit sur $L_n(G)$ par $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$. Nous posons $L_{-1}(G) = \mathbb{Z}$, un $\mathbb{Z}G$ -module trivial, et $L_n(G) = 0$ pour $n < -1$. Ainsi, $L(G) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_n(G)$ est un $\mathbb{Z}G$ -module gradué.

Ainsi, définir une différentielle $d : L_n(G) \rightarrow L_{n-1}(G)$, pour $n \geq 0$, par

$$d(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n).$$

fait de $L(G)^+ = L(G)_{n \geq 0}$ un complexe différentiel.

Une $\mathbb{Z}G$ -base pour $L_n(G)$ peut être donnée par tous les éléments qui ont l'identité comme première composante puisqu'ils sont les représentants des G -orbites de $L_n(G)$. Ainsi, nous pouvons les écrire sous la forme $(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$ et ainsi introduire la notation bar ("bar notation" en anglais) :

$$[g_1|g_2|\dots|g_n] = (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$$

Avec cette notation, la différentielle devient

$$\begin{aligned} d[g_1|g_2|\dots|g_n] &= g_1[g_2|\dots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1|g_2|\dots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2} \dots |g_n] \\ &\quad + (-1)^n [g_1|g_2|\dots|g_{n-1}] \end{aligned}$$

Nous définissons également $\epsilon : L_0(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme d'augmentation par $\epsilon(g) = 1$.

Lemme 4.2.3. $L(G)^+ \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ est une suite exacte.

DÉMONSTRATION. Posons $c = \sum_{i \in I} n_i(g_0^i, \dots, g_n^i) \in L_n(G)$, $n \geq 0$, et définissons, pour $g \in G$, l'opérateur ϕ_g par

$$\phi_g(c) = \sum_{i \in I} n_i(g, g_0^i, \dots, g_n^i) \in L_{n+1}(G).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d \circ \phi_g(c) &= d \left(\sum_{i \in I} n_i(g, g_0^i, \dots, g_n^i) \right) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \sum_{i \in I} n_i(g, g_0^i, \dots, \widehat{g_j^i}, \dots, g_n^i) + \sum_{i \in I} n_i(g_0^i, \dots, g_n^i) \\ &= \phi_g \left(\sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \sum_{i \in I} n_i(g_0^i, \dots, \widehat{g_j^i}, \dots, g_n^i) \right) + \sum_{i \in I} n_i(g_0^i, \dots, g_n^i) \\ &= -\phi_g \circ d(c) + c \end{aligned}$$

D'où, $\phi_g \circ d + d \circ \phi_g = Id$ et l'acyclicité du complexe $L^+(G)$ en découle (comme dans la preuve de la proposition 3.2.31). Quant à l'exactitude en $L_0(G)$, considérons

un élément de $\ker \epsilon$. $\sum_i n_i(g_i) \in L_0(G)$ tel que $\sum_i n_i = 0$. Pour $n_{i_p} \neq 0$, nous avons $n_{i_p} = -\sum_{i \neq i_p} n_i$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_i n_i(g_i) &= n_{i_p}(g_{i_p}) + \sum_{i \neq i_p} n_i(g_i) \\ &= \left(-\sum_{i \neq i_p} n_i \right) (g_{i_p}) + \sum_{i \neq i_p} n_i(g_i) \\ &= \sum_{i \neq i_p} n_i((g_i) - (g_{i_p})) \\ &= d \left(\sum_{i \neq i_p} n_i(g_{i_p}, g_i) \right) \in \text{im } d \end{aligned}$$

□

Définition 4.2.4. Soit G un groupe et M un $\mathbb{Z}G$ -module, alors nous définissons le n -ième groupe de cohomologie à coefficients dans M par

$$H^n(G; M) = H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L(G)^+, M))$$

qui est ainsi la cohomologie du complexe suivant :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L_0(G), M) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L_1(G), M) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L_2(G), M) \xrightarrow{\delta} \dots$$

où $\delta\alpha = \alpha \circ d$.

Remarque 4.2.5. Nous faisons remarquer ici que la cohomologie peut être définie par une autre résolution, tant que cette dernière est projective et qu'en fait la définition ne dépend pas de la résolution choisie (voir par exemple [5]). En utilisant cette résolution avec la notation bar, nous pouvons voir un élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L_n(G), M)$ comme une fonction $f : G^n \rightarrow M$. De plus, nous noterons par $C^n(G, M)$, l'ensemble de ces fonctions. Ainsi, la différentielle $\delta : C^{n-1}(G, M) \rightarrow C^n(G, M)$ sera donnée explicitement par

$$\begin{aligned} (\delta f)(g_1, \dots, g_n) \\ = g_1 f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

Maintenant, nous aimerions calculer explicitement $H^0(G; M)$, mais pour ce faire, nous avons besoin des deux lemmes algébriques suivants.

Lemme 4.2.6. *La suite exacte de R -modules*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

implique la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(A, M)$$

avec M un R -module et $f^*\alpha = \alpha \circ f$.

DÉMONSTRATION. (1) $\ker g^* = 0$.

Supposons $g^*\alpha = \alpha \circ g = 0$, alors $\alpha \circ g(B) = \alpha(C) = 0$ puisque g est surjectif et $\alpha = 0$.

(2) $f^* \circ g^* = 0$

$$\begin{aligned} f^* \circ g^*(\alpha) &= f^*(g^*\alpha) \\ &= f^*(\alpha \circ g) \\ &= \alpha \circ g \circ f \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $g \circ f = 0$.

(3) $f^*\beta = 0 \Rightarrow \exists \alpha \beta = g^*\alpha$

$\beta(f(A)) = 0$ implique $\ker g = f(A) \subseteq \ker \beta$. Puisque g est surjectif, α peut être donné par $\alpha(c) = \beta(g^{-1}(c))$ et l'inclusion des noyaux nous assure qu'il est bien défini.

D'où, la deuxième suite est exacte. □

Lemme 4.2.7. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$

DÉMONSTRATION. Considérons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) &\rightarrow M^G \\ u &\mapsto u(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : M^G &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \\ m &\mapsto u : \mathbb{Z} \rightarrow M \\ &u(1) = m \end{aligned}$$

ψ est bien défini puisque $u(1) \in M^G : g \cdot u(1) = u(g \cdot 1) = u(1) \forall g \in G$. Ainsi.

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(m) &= \psi(u) \\ &= u(1) = m \\ \phi \circ \psi(u)(1) &= \phi(u(1))(1) \\ &= u(1) \end{aligned}$$

et $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = Id$ et le résultat suit. □

Lemme 4.2.8. $H^0(G; M) = M^G$.

DÉMONSTRATION. Ainsi, par le lemme 4.2.6, l'exactitude de la suite

$$L_1(G) \xrightarrow{d} L_0(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

implique celle de la suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\epsilon^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L_0(G), M) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(L_1(G), M) .$$

Par le lemme 4.2.7, nous avons $\text{im } \epsilon^* = M^G$, d'où

$$H^0(G; M) = \ker \delta = \text{im } \epsilon^* = M^G$$

□

Finalement, nous présentons un résultat fort pratique concernant l'annulation des groupes de cohomologie.

Proposition 4.2.9. *Si G est un groupe fini et M , un $\mathbb{Z}G$ -module, alors nous avons*

$$|G| \cdot H^n(G; M) = 0$$

pour tout $n > 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in C^n(G, M)$. Rappelons que la différentielle est donnée par

$$\begin{aligned} (\delta f)(g_1, \dots, g_{n+1}) \\ = g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

Notons $\sum_{g \in G} f(g_1, \dots, g_{n-1}, g)$ par $u(g_1, \dots, g_{n-1})$, ainsi, puisque

$$\sum_{g \in G} f(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n g) = u(g_1, \dots, g_{n-1}),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} (\delta f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 u(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i u(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ &\quad + (-1)^n u(g_1, \dots, g_{n-1}) + (-1)^{n+1} |G| f(g_1, \dots, g_n) \\ &= \delta u(g_1, \dots, g_n) + (-1)^{n+1} |G| f(g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

Donc, si $f \in \ker \delta$, alors $|G| f(g_1, \dots, g_n) = \pm \delta u(g_1, \dots, g_n) \in \text{im } \delta$.

□

4.3. THÉORIE DES INVARIANTS

Dans ce qui suit, G est un groupe fini, k , un corps de caractéristique p et V un espace vectoriel.

Définition 4.3.1. *Soit M un kG -module, alors nous définissons l'opérateur trace $Tr^G : M \rightarrow M$ par*

$$Tr^G(x) = \sum_{g \in G} g \cdot x$$

Lemme 4.3.2. *L'ensemble $I_G = Tr^G(k[V])$ est un idéal de $k[V]^G$.*

DÉMONSTRATION. Pour $g' \in G$.

$$g' \cdot \text{Tr}^G(x) = \sum_{g \in G} g'g \cdot x = \sum_{(g')^{-1}h \in G} h \cdot x = \sum_{h \in G} h \cdot x = \text{Tr}^G(x)$$

et pour $y \in k[V]^G$, $y\text{Tr}^G(x) = \text{Tr}^G(x) = \text{Tr}^G(yx)$. \square

Proposition 4.3.3. *Soit M un $k[V]^G$ -module et également un kG -module. alors $H^i(G, M)$ est un $k[V]^G$ -module pour tout i . De plus, nous aurons*

$$I_G \subseteq \text{Ann}_{k[V]^G}(H^i(G, M))$$

pour $i > 0$.

DÉMONSTRATION. En fait, cette proposition n'est qu'une généralisation de la proposition 4.2.9. Voir [13] pour une preuve. \square

Maintenant, considérons un corps k , de caractéristique $p > 0$, G qui agit sur V et définissons le nombre r par

$$r = ht(I_G)$$

Supposons $k[V]^G$ Cohen-Macaulay, alors $prof(I_G) = r$ et il existe donc une suite régulière f_1, \dots, f_r de longueur r dans I_G sur $k[V]^G$.

Considérons donc le complexe de Koszul relié à ces éléments $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f_1, \dots, f_r; K[V])$ gradué de telle façon que $\mathcal{K}^{-p} = k[V] \otimes \bigwedge^p (sa_1, \dots, sa_n)$ et posons le double complexe A suivant :

$$A^{p,q} = C^q(G, \mathcal{K}^p)$$

muni de la différentielle du complexe de Koszul, ∂ et de celle du complexe de cohomologie des groupes, δ . δ était déjà de bidegré (1,0) et ∂ devient de bidegré (0,1) avec cette façon de graduer le complexe de Koszul. Les deux différentielles

les mêmes conditions, les éléments suivants de la suite ${}_{II}E_k^{p,q}$ seront égaux à zéro. Ceci implique que les modules ${}_{II}E_k^{-r+k, s-k+1}$ et ${}_{II}E_k^{-r-k, s+k-1}$ sont également zéro puisque $-r - k < -r$ et que $(-r + k) + (s - k + 1) = s - r - 1 < 0$ par hypothèse. Ainsi, les deux différentielles d_k identifiées ci-dessus sont nulles et $H(E_k^{-r,s}) = E_k^{-r,s}$ pour $k \geq 2$. Ce qui implique

$$E_\infty^{-r,s} = E_2^{-r,s} = H^s(G, k[V]).$$

Ainsi, si $s < r - 1$ alors,

$$\begin{aligned} H^s(G, k[V]) &= \bigoplus_{p+q=s-r} {}_{II}E_\infty^{p,q} \\ &= \bigoplus_{p+q=s-r} {}_I E_\infty^{p,q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque ${}_I E_\infty^{p,q} \neq 0$ seulement pour $p + q \geq 0$.

De plus, comme nous travaillons les suites spectrales avec un corps, l'argument tient, toujours selon le chapitre 2. Nous avons donc $H^s(G, k[V]) = 0$ ce qui est une contradiction avec la définition de s .

Ainsi, $s \geq r - 1$ et nous avons donc démontré le théorème suivant :

Théorème 4.3.4. *Si $s = \min\{j > 0 \mid H^j(G, k[V]) \neq 0\}$, alors $\text{prof}(I_G) \leq s + 1$. En particulier, $k[V]^G$ n'est pas Cohen-Macaulay si $\text{ht}(I_G) > s + 1$.*

Exemple 4.3.5. *Si G est un p -groupe, il est connu que $H^1(G, k[V]) \neq 0$ (voir [10]). Ainsi, le théorème nous dit que dans ce cas, si $\text{ht}(I_G) > 2$, alors $k[V]^G$ n'est pas Cohen-Macaulay.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RAOUL BOTT, LORING W. TU, *Differential forms in algebraic topology*. GTM 82 Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] JOHN MCCLEARY, *A user's guide for spectral sequences*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [3] CHARLES A. WEIBEL, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, second edition, 1994.
- [4] JACQUES LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1996.
- [5] KENNETH S. BROWN, *Cohomology of groups*, GTM 87, Springer-Verlag, 1982.
- [6] R. Y. SHARP, *Steps in commutative algebra*, second edition, LMSST 51, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [7] NATHAN JACOBSON, *Basic algebra II*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
- [8] JAMES W. VICK, *Homology theory : an introduction to algebraic topology*. Academic Press, London, 1973.
- [9] HASSLER WHITNEY. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, New Jersey, 1957.
- [10] GREGOR KEMPER, *On the Cohen-Macaulay property of modular invariant rings*. J. of Algebra 215 (1999), 330-351.
- [11] LARRY SMITH, *Polynomial invariants of finite groups*. AK Peters, Wellesley, 1995.
- [12] F. W. WARNER. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. GTM 94, Scott, Foreman and Company, Glenview, 1971.

- [13] PETER FLEISCHMANN, GREGOR KEMPER AND R. JAMES SHANK. *On the Depth of Cohomology Modules*. Quarterly Journal of Mathematics 55 (2004). 167-184.
- [14] MELVIN HOCHSTER. JOHN A. EAGON, *Cohen-Macaulay Rings. Invariant Theory and the Generic Perfection of the Determinantal Loci*. Amer. J. of Math. **93** (1971). 1020-1058.

Annexe A

A.1. EXISTENCE D'UNE PARTITION D'UNITÉ

Les partitions d'unité sont plutôt utiles parce qu'elles permettent souvent de globaliser une propriété vérifiée localement. Elles sont utilisées notamment pour l'intégration de formes différentielles et ici, nous les utiliserons pour démontrer l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris pour la cohomologie de De Rham.

Commençons par rappeler la définition d'une partition d'unité :

Définition A.1.1. *Une partition d'unité sur une variété M est une collection $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de fonctions C^∞ sur M qui vérifient les propriétés suivantes :*

(1) *La collection des supports $\{\phi_i\}_{i \in I}$ est localement finie.*

(2) $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$ pour chaque point $p \in M$ et $\phi_i(p) \geq 0$ pour tout $p \in M$ et $i \in I$.

Lemme A.1.2. *Soit X un espace topologique qui est localement compact, Hausdorff et qui possède une base dénombrable. Alors, X est paracompact, c'est-à-dire que chaque recouvrement d'ouverts possède un recouvrement localement fini qui consiste d'ouverts pour lesquels la fermeture est compacte.*

DÉMONSTRATION. Nous prouvons d'abord qu'il existe une suite $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'ouverts qui vérifient

(1) $\overline{G_i}$ est compact,

(2) $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$.

(3) $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$.

Soit $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de X où chaque U_i est un ouvert et $\overline{U_i}$ est compact. Cette base peut-être obtenue en prenant n'importe quelle base dénombrable et en choisissant une sous-collection d'ensemble avec une adhérence compacte. Le fait que X soit Hausdorff et localement compact nous assure que cette sous-collection est elle-même une base.

Maintenant, posons $G_1 = U_1$ et supposons $G_k = U_1 \cup \dots \cup U_{j_k}$. Alors, soit j_{k+1} le plus petit entier positif plus grand que j_k tel que

$$\overline{G_k} \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$$

et définissons G_{k+1} par

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$$

Ainsi, nous avons défini une suite $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui satisfait les conditions ci-haut.

Considérons donc $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, un recouvrement d'ouverts quelconque. L'ensemble $\overline{G_i} - G_{i-1}$ est compact et est contenu dans l'ouvert $G_{i+1} - \overline{G_{i-2}}$. Pour chaque $i \geq 3$, nous pouvons choisir un sous-recouvrement fini du recouvrement d'ouverts $\{U_\alpha \cap (G_{i+1} - \overline{G_{i-2}})\}_{\alpha \in A}$ de $\overline{G_i} - G_{i-1}$ et en choisir également un pour le recouvrement d'ouverts $\{U_\alpha \cap G_3\}_{\alpha \in A}$ de l'ensemble compact G_2 .

Cette collection d'ouverts est dénombrable. C'est un raffinement de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ localement fini et chaque ouvert a son adhérence compact. \square

Remarque A.1.3. *Comme une variété possède une base dénombrable, est Hausdorff et est localement compacte, alors le lemme précédent peut être utilisé pour une variété.*

Lemme A.1.4. *Il existe une fonction $\phi \in C^\infty$ positive sur \mathbb{R}^d qui est égal à 1 sur le cube fermé $\overline{C(1)}$ centré à l'origine et d'arête 2 et 0 sur le complément du cube ouvert $C(2)$.*

DÉMONSTRATION. Nous voulons seulement définir une fonction

$$\phi = (h, \dots, h)$$

où h est une fonction C^∞ positive et qui prend la valeur 1 sur l'intervalle $[-1, 1]$ et 0 à l'extérieur de $(-2, 2)$.

Pour construire une telle fonction, nous considérons

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

f est évidemment positive, C^∞ et strictement positive pour $t > 0$. Ainsi, la fonction

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

est également C^∞ , positive et elle prend la valeur 1 pour $t \geq 1$ et la valeur 0 pour $t \leq 0$. Finalement, nous n'avons qu'à poser

$$h(t) = g(t+2)g(2-t)$$

pour obtenir la fonction désirée. □

Théorème A.1.5. *Soit M une variété différentiable et $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement d'ouverts de M . Alors, il existe une partition d'unité $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ subordonnée au recouvrement d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avec au plus, un nombre dénombrable de ϕ_α qui n'est pas identiquement zéro.*

DÉMONSTRATION. Soit une suite $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ qui recouvre M comme dans la preuve du lemme A.1.2 et posons $G_0 = \emptyset$. Pour $p \in M$, définissons i_p le plus grand entier tel que $p \in M - \overline{G_{i_p}}$. Choisissons α_p tel que $p \in U_{\alpha_p}$ et considérons une carte (V, τ) qui vérifie $\tau(p) = 0$, $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}})$ et $\tau(V) \subset \overline{C(2)}$. Définissons

$$\psi_p = \begin{cases} \phi \circ \tau & \text{sur } V \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où ϕ est la fonction définie dans le lemme précédent.

Ainsi, ψ_p est une fonction C^∞ sur M qui vaut 1 sur un voisinage W_p de p et a un support compact dans $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}})$. Pour chaque $i \geq 1$, choisissons un ensemble fini de points $p \in M$ pour lesquels, les voisinages W_p correspondants recouvrent $\overline{G_i} - G_{i-1}$. Nous pouvons ordonner les fonctions correspondantes ψ_p

dans une suite $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Les supports de ψ_j forment une famille localement finie de sous-ensemble de M . Ainsi, la fonction

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$$

est une fonction C^∞ bien définie sur M et de plus, $\psi(p) > 0$ pour chaque $p \in M$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ définissons

$$\phi_i = \frac{\psi_i}{\psi}.$$

Ainsi définies, les fonctions ϕ_i forment une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$ avec $\text{supp } \phi_i$ compact pour chaque i .

Si nous laissons ϕ_α être zéro si aucun des ϕ_i a son support dans U_α et autrement, laissons ϕ_α être la somme des ϕ_i qui ont leur support dans U_α , alors $\{\phi_\alpha\}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avec au plus, un nombre dénombrable de ϕ_α qui ne sont pas zéro. Notons que le support de ϕ_α demeure dans U_α parce que M est localement finie. \square

A.2. ÉQUIVALENCE EN HOMOLOGIE DES COMPLEXES $S_q(X)$ ET $S_q^u(X)$

Nous présenterons ici une preuve concernant l'homologie singulière qui intervient dans la preuve de l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris pour les chaînes singulières, c'est-à-dire que

$$H(S_q^u(X)) = H(S_q(X)).$$

Pour ce faire, nous suivons le livre de J. W. Vick, Homology theory [8].

Définition A.2.1. *Un p -simplexe dans \mathbb{R}^n ayant pour sommets les points $\{a_0, \dots, a_p\}$ est le plus petit ensemble convexe contenant tous ces points. Les points doivent vérifier que $a_1 - a_0, \dots, a_p - a_0$ forment un ensemble linéairement indépendant.*

Ainsi, tout point x d'un p -simplexe ayant pour sommets les points (a_0, \dots, a_p) peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=0}^p t_i a_i$ avec $\sum_{i=0}^p t_i = 1$ et $t_i \geq 0$.

Définition A.2.2. *Si C est un sous-ensemble borné d'un certain \mathbb{R}^n , alors nous définissons le diamètre de C par*

$$\text{diam } C = \sup \{\|x - y\| \mid x, y \in C\}.$$

Si $C = \{C_i\}$ est une famille de sous-ensembles bornés de \mathbb{R}^n , alors nous définissons

$$\text{mesh } C = \sup \{\text{diam } C_i\}.$$

Proposition A.2.3. Si S_n est un n -simplexe avec a_0, \dots, a_n pour sommets, alors

$$\text{diam } S_n = \max \{\|a_i - a_j\| \mid i, j = 0, \dots, n\}$$

DÉMONSTRATION. Soit $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ et $y = \sum_{i=0}^n t'_i a_i$ avec $\sum_{i=0}^n t'_i = 1$ et $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, deux points de S_n , ainsi pour x fixé, nous avons

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| x - \sum_{i=0}^n t'_i a_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n t'_i (x - a_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |t'_i| \cdot \|x - a_i\| \leq \sum_{i=0}^n t'_i \cdot \max_i \|x - a_i\| \\ &= \max_i \|x - a_i\| \end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{y \in S_n} \|x - y\| = \sup_i \|x - a_i\|.$$

En répétant le procédé mais cette fois en faisant varier x , nous obtenons

$$\sup_{y \in S_n} \|x - y\| = \max_i \|x - a_i\| = \max_{i,j} \|a_j - a_i\|.$$

□

Définition A.2.4. Si S_n est un n -simplexe de sommets (a_0, \dots, a_n) , alors le barycentre $b(S_n)$ de S_n est le point de S_n tel que

$$b(S_n) = (a_0 + \dots + a_n)/(n + 1).$$

Lemme A.2.5. Si S_n est un n -simplexe de sommets (a_0, \dots, a_n) , alors les points $(b(S_n), a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n)$ sont les sommets d'un autre n -simplexe inclus dans S_n .

DÉMONSTRATION. Les points $(a_0 - b(S_n), \dots, a_i - \widehat{b(S_n)}, \dots, a_n - b(S_n))$ sont linéairement indépendants puisque

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \neq i} x_k (a_k - b(S_n)) &= \sum_{k \neq i} x_k ((a_k - a_i) + a_i - (a_0 + \dots + a_n)/(n+1)) \\
 &= \sum_{k \neq i} x_k (a_k - a_i) + \sum_{k \neq i} x_k (a_i - (a_0 + \dots + a_n)/(n+1)) \\
 &= \sum_{k \neq i} x_k (a_k - a_i) - \frac{1}{n+1} \sum_{k \neq i} x_k \left(\sum_{j \neq i} a_j - na_i \right) \\
 &= \sum_{k \neq i} x_k (a_k - a_i) - \frac{1}{n+1} \sum_{k \neq i} x_k \left(\sum_{j \neq i} (a_j - a_i) \right) \\
 &= \sum_{k \neq i} \left(x_k - \frac{1}{n+1} \sum_{j \neq i} x_j \right) (a_k - a_i),
 \end{aligned}$$

alors, $\sum_{k \neq i} x_k (a_k - b(S_n)) = 0$ implique $x_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j \neq i} x_j$ pour chaque k étant donné que les points $(a_0 - a_i, \dots, a_n - a_i)$ sont linéairement indépendants. Ainsi, tous les x_k égalent le même objet et sont donc égaux entre eux. Posons $x_k = x$, alors nous avons

$$x = \frac{1}{n+1} \sum_{j \neq i} x = \frac{n}{n+1} x \Rightarrow x = 0.$$

Donc, ces points engendrent bien un simplexe et ce dernier fait bien partie de S_n puisque chaque sommet en fait partie. \square

Maintenant, définissons la subdivision barycentrique $Sd(S_n)$ par induction sur la dimension du simplexe. Posons $Sd(S_0) = S_0$ pour un 0-simplexe. Supposons que Sd est définie sur tous les simplexes de dimensions $n-1$. Ainsi, pour n'importe quel $(n-1)$ -simplexe t_{n-1} , $Sd(t_{n-1})$ est une collection de $(n-1)$ -simplexes contenus dans t_{n-1} . En notant \dot{S}_n la collection de toutes les $(n-1)$ -faces de S_n et en définissant

$$Sd(\dot{S}_n) = \bigcup_{t_{n-1} \in \dot{S}_n} Sd(t_{n-1})$$

nous avons que $Sd(S_n)$ consistera de tous les n -simplexes de la forme $(b(S_n), t^0, \dots, t^{n-1})$ où (t^0, \dots, t^{n-1}) est un $(n-1)$ -simplexe de $Sd(\dot{S}_n)$.

Proposition A.2.6. *Si K est une collection de n -simplexes, alors*

$$\text{mesh } Sd(K) \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh}(K)$$

DÉMONSTRATION. Procédons par induction. Pour $n = 0$, les deux côtés de l'inégalité sont 0. Donc, supposons l'inégalité vérifiée pour n'importe quelle collection de $(n-1)$ -simplexes.

Soit t_n un n -simplexe de $Sd(K)$. Alors, $t_n = (b(S_n), u_0, \dots, u_{n-1})$ où $S_n \in K$ et (u_0, \dots, u_{n-1}) sont les sommets d'un $(n-1)$ -simplexe $\omega \in Sd(\dot{S}_n)$. Soit S_{n-1} , le $(n-1)$ -simplexe de \dot{S}_n contenant ω .

Par la proposition A.2.3,

$$\text{diam } t_n = \max \{ \|u_i - u_j\|, \|u_i - b(S_n)\| \}.$$

Par l'hypothèse d'induction, nous savons que

$$\|u_i - u_j\| \leq \text{diam } \omega \leq \frac{n-1}{n} \text{diam } S_{n-1}$$

et, puisque $(n-1)/n < n/(n+1)$ et que pour $U \subset V$, $\text{diam } U \leq \text{diam } V$, nous avons

$$\|u_i - u_j\| \leq \frac{n-1}{n} \text{diam } S_{n-1} \leq \frac{n}{n+1} \text{diam } S_n.$$

Quant aux termes $\|u_i - b(S_n)\|$, posons u'_0, \dots, u'_n pour les sommets de S_n . Puisque chaque u_i est un point de S_n , alors $\|u_i - b(S_n)\| \leq \|u'_j - b(S_n)\|$ pour tout j . Alors,

$$\|u'_j - b(S_n)\| = \left\| u'_j - \frac{1}{n+1} \sum_i u'_i \right\| = \left\| \sum_{i \neq j} \frac{u'_j - u'_i}{n+1} \right\|.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \neq j} \frac{u'_j - u'_i}{n+1} \right\| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} \|u'_j - u'_i\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \max \|u'_j - u'_i\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \text{diam } S_n \end{aligned}$$

□

Ainsi,

$$\text{diam } t_n = \max \{ \|u_i - u_j\|, \|u_i - b(S_n)\| \} \leq \frac{n}{n+1} \text{diam } S_n.$$

Corollaire A.2.7. *Si K est une collection de n -simplexes, posons $Sd^m(K)$ pour la m -ième itération de la subdivision barycentrique de K . Alors, pour un n -simplexe S_n et pour n'importe quel $\epsilon > 0$, il existe un entier m tel que*

$$\text{mesh } Sd^m(S_n) < \epsilon$$

DÉMONSTRATION. Grâce à la proposition précédente, nous avons

$$\text{mesh } Sd^m(K) \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^m \text{mesh } K$$

et puisque

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^m = 0,$$

la proposition suit. □

Avec ces propriétés sur la subdivision de simplexes, nous aimerions construire une opération analogue sur les simplexes singuliers. Si C et C' sont des ensembles convexes, une application $f : C \rightarrow C'$ est affine si pour $x, y \in C$ et $0 \leq t \leq 1$, alors

$$f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Ainsi, si nous avons $x_0, \dots, x_n \in C$ et $0 \leq t_0, \dots, t_n \leq 1$ qui vérifient $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=0}^n t_i x_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i f(x_i).$$

Si C est convexe, définissons $A_n(C) \subset S_n(C)$ le sous-groupe de $S_n(C)$ engendré par les n -simplexes singuliers affines $\phi : \sigma_n \rightarrow C$. Notons par v_0, \dots, v_n les sommets de σ_n et pour tout $\phi : \sigma \rightarrow C$ affine, posons $x_i = \phi(v_i)$. Alors, nous pouvons noter ϕ par $x_0 x_1 \dots x_n$. Avec cette notation, la différentielle ∂ est maintenant donnée par

$$\partial(x_0 \dots x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_n).$$

Puisque $(x_0 \dots \widehat{x}_i \dots x_n)$ est toujours affine, $\partial(A_n(C)) \subset A_{n-1}(C)$ et $A(C) = \bigoplus_n A_n(C)$ est un complexe différentiel.

Nous définissons maintenant une application de complexe

$$\mathcal{I}' : A_n(C) \rightarrow A_n(C)$$

qui est l'analogie algébrique de la subdivision barycentrique. La définition est encore par induction sur la dimension des simplexes singuliers.

Pour $n = 0$, \mathcal{I}' est l'identité. Supposons maintenant que \mathcal{I}' est défini pour les $(n - 1)$ -simplexes et considérons $\phi = x_0 \dots x_n$, un n -simplexe singulier affine de C . Son barycentre est le point

$$b(\phi) = \frac{x_0 + \dots + x_n}{n + 1}.$$

En définissant $C_b : A_{n-1}(C) \rightarrow A_n(C)$ pour $c \in C$, appelé le cône de c , par

$$C_c(y_0 \dots y_{n-1}) = (cy_0 \dots y_{n-1}),$$

nous définissons enfin \mathcal{I}' par

$$\mathcal{I}'(\phi) = C_{b(\phi)}(\mathcal{I}'(\partial\phi)).$$

Proposition A.2.8. $\mathcal{I}' \circ \partial = \partial \circ \mathcal{I}'$

DÉMONSTRATION. Considérons un n -simplexe $\phi = x_0 \dots x_n$. Si $n = 0$, l'affirmation est vérifiée. Supposons la vraie maintenant pour $n - 1$. Nous avons

$$\partial\mathcal{I}'(x_0 \dots x_n) = \partial C_{b(\phi)}(\mathcal{I}'(\partial(x_0 \dots x_n))).$$

En fait, le terme de droite peut être divisé en deux parties : les simplexes singuliers qui contiennent $b(\phi)$ et ceux qui ne le contiennent pas :

$$\partial\mathcal{I}'(x_0 \dots x_n) = \mathcal{I}'(\partial(x_0 \dots x_n)) - C_{b(\phi)}(\partial\mathcal{I}'\partial(x_0 \dots x_n)).$$

Mais, par induction, $\mathcal{I}'\partial(x_0 \dots x_n) = \partial\mathcal{I}'(x_0 \dots x_n)$ et donc

$$C_{b(\phi)}(\partial\mathcal{I}'\partial(x_0 \dots x_n)) = C_{b(\phi)}(\partial\partial\mathcal{I}'(x_0 \dots x_n)) = 0$$

et donc

$$\partial \circ \mathcal{I}' = \mathcal{I}' \circ \partial.$$

□

Ainsi, \mathcal{I}' est vraiment une application de complexe et elle est de degré 0. Nous aimerions maintenant démontrer qu'il existe un opérateur d'homotopie entre cette application et l'identité.

Soit $T' : A_n(C) \rightarrow A_{n+1}(C)$ défini par induction sur n pour avoir la propriété suivante :

$$\partial T' + T' \partial = \mathcal{I}' - 1.$$

Pour $n = 0$, posons $T' = 0$ puisque $\mathcal{I} = 1$. Ensuite, étant donné que

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{I}'\phi - \phi - T'\partial\phi) &= [\partial\mathcal{I}' - \partial - (\mathcal{I}' - 1 - T'\partial)]\phi \\ &= [(\partial\mathcal{I}' - \mathcal{I}'\partial) - (\partial - \partial) - (-T'\partial\partial)]\phi \\ &= 0, \end{aligned}$$

nous pouvons définir

$$T'(\phi) = C_{b(\phi)}(\mathcal{I}'\phi - \phi - T'\partial\phi).$$

Et pour calculer $\partial T'(\phi)$, nous divisons encore en deux termes : ceux qui contiennent $b(\phi)$ et les autres non. Autrement écrit,

$$\partial T'(\phi) = (\mathcal{I}'\phi - \phi - T'\partial\phi) - C_{b(\phi)}\partial(\mathcal{I}'\phi - \phi - T'\partial\phi).$$

et comme le deuxième terme vaut 0 lorsque T' a la propriété, alors la définition de T' est cohérente et T' vérifie bien

$$\partial T' + T' \partial = \mathcal{I}' - 1.$$

Si $f : C \rightarrow C'$ est une application affine entre ensemble convexe, alors

$$f^*(A_n(C)) \subset A_n(C')$$

puisque la composition de deux applications affines est affine. De plus, f^* commute avec ∂ et, en utilisant l'induction comme précédemment, nous pouvons montrer qu'elle commute également avec \mathcal{I}' et T' .

Maintenant, nous voulons construire une application de complexe

$$\mathcal{I} : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$$

pour n'importe quel espace X à l'aide de \mathcal{I}' .

Considérons $\psi : \sigma_n \rightarrow X$, un n -simplexe singulier et l'application induite $\psi^* : S_n(\sigma_n) \rightarrow S_n(X)$. L'élément $\tau_n \in S_n(\sigma_n)$ donné par l'identité est dans $A_n(\sigma_n)$. Alors, nous définissons

$$\mathcal{I}(\psi) = \mathcal{I}'\psi^*(\tau_n) = \psi^*\mathcal{I}'(\tau_n)$$

et similairement,

$$T(\psi) = T'\psi^*(\tau_n) = \psi^*T'(\tau_n).$$

Proposition A.2.9.

$$\partial T + T\partial = \mathcal{I} - 1$$

DÉMONSTRATION. En gardant les mêmes notations que ci-haut et en utilisant les propriétés démontrées sur T' et \mathcal{I}' , nous avons

$$\begin{aligned} (\partial T + T\partial)(\psi) &= (\partial T + T\partial)\psi^*(\tau_n) \\ &= \psi^*(\partial T' + T'\partial)(\tau_n) \\ &= \psi^*(\mathcal{I}' - 1)(\tau_n) \\ &= (\mathcal{I} - 1)\psi^*(\tau_n) \\ &= (\mathcal{I} - 1)(\psi) \end{aligned}$$

□

Théorème A.2.10. *Pour \mathfrak{U} un recouvrement d'ouverts d'un espace topologique X , alors l'inclusion $i : S_n^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_n(X)$ induit un isomorphisme en homologie*

$$H(i) : H(S_n^{\mathfrak{U}}(X)) \rightarrow H(S_n(X))$$

DÉMONSTRATION. L'idée de la preuve est de construire une application $\Phi : S_q(X) \rightarrow S_q^{\mathfrak{U}}(X)$ telle que $\Phi \circ i = 1$ et $i \circ \Phi$ est homotope à l'identité.

Soit $\phi : \sigma_n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier. L'ensemble d'ouverts $\mathfrak{B} = \{\phi^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ recouvre bien σ_n . Puisque σ_n est compact, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, si $C \subseteq \sigma_n$ et $\text{diam } C < \delta$, alors C est contenu dans $\phi^{-1}(U)$ pour un certain $U \in \mathfrak{U}$.

Par le corollaire A.2.7, il existe un entier $m \geq 0$ tel que

$$\text{mesh } Sd^m(\sigma_n) < \delta.$$

Ceci implique que

$$\mathcal{I}^m \phi \in S_n^{\mathfrak{U}}(X).$$

Maintenant, définissons pour n'importe quel simplexe singulier ϕ de X , l'entier $m(\phi)$ qui est le plus petit entier pour lequel

$$\mathcal{I}^{m(\phi)} \phi \in S_n^{\mathfrak{U}}(X).$$

Observons que pour $0 \leq i \leq n$, $m(\phi) \geq m(\partial_i \phi)$, puisque $\mathcal{I}^{m(\phi)}(\partial_i \phi) = \partial(\mathcal{I}^{m(\phi)} \phi)$ et $\partial_i(S^{\mathfrak{U}}(X)) \subset S^{\mathfrak{U}}(X)$.

Ensuite, puisque $\partial T + T\partial = \mathcal{I} - 1$, alors pour chaque entier $k > 0$,

$$\partial T(\mathcal{I}^{k-1}) + T(\mathcal{I}^{k-1})\partial = \mathcal{I}^k - \mathcal{I}^{k-1}.$$

Ainsi, en sommant ces équations, nous trouvons

$$\partial T(1 + \dots + \mathcal{I}^{k-1}) + T(1 + \dots + \mathcal{I}^{k-1})\partial = \mathcal{I}^k - 1.$$

Définissons \mathfrak{T} par

$$\mathfrak{T}(\phi) = T(1 + \mathcal{I} + \dots + \mathcal{I}^{m(\phi)-1})\phi$$

pour $\phi \in S_n(X)$ et calculons $(\partial \mathfrak{U} + \mathfrak{U} \partial)$:

$$\begin{aligned} (\partial \mathfrak{U} + \mathfrak{U} \partial)\phi &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i T(1 + \dots + \mathcal{I}^{m(\phi)-1})\phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i T(1 + \dots + \mathcal{I}^{m(\partial_i \phi)-1})\partial_i \phi \\ &= \mathcal{I}^{m(\phi)} \phi - \phi - T(1 + \dots + \mathcal{I}^{m(\phi)-1})\partial \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i T(1 + \dots + \mathcal{I}^{m(\partial_i \phi)-1})\partial_i \phi \\ &= \mathcal{I}^{m(\phi)} \phi - \phi - \sum_{i=0}^n (-1)^i T(\mathcal{I}^{m(\partial_i \phi)} + \dots + \mathcal{I}^{m(\phi)-1})\partial_i \phi \end{aligned}$$

Ce calcul nous incite à définir Φ par

$$\Phi(\phi) = \mathcal{I}^{m(\phi)}\phi - \sum_{i=0}^n (-1)^i T(\mathcal{I}^{m(\partial\phi)} + \dots + \mathcal{I}^{m(\phi)-1})\partial_i\phi.$$

Ainsi, par définition des entiers $m(\phi)$ et $m(\partial\phi)$, $\Phi(\phi)$ est bien un élément de $S_n^{\text{alt}}(X)$ et donc, $i \circ \Phi(\phi)$ est un élément de $S_n(X)$. Le calcul ci-haut montre que

$$\partial\mathcal{I} + \mathcal{I}\partial = i \circ \Phi - 1$$

et donc, $H(i \circ \Phi) = H(i) \circ H(\Phi) = H(1)$. De l'autre côté, $\Phi \circ i = 1$ puisque $\Phi = 1$ pour $m(\phi) = 0$. D'où,

$$H(i) \circ H(\Phi) = H(\Phi) \circ H(i) = H(1).$$

□

A.3. EXISTENCE D'UN BON RECOUVREMENT POUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE TRIANGULARISABLE

Dans cette annexe, nous montrerons l'existence d'un bon recouvrement pour tout espace triangularisable et, par conséquent, pour toute variété différentiable (voir [9]). Nous avons besoin de ce fait pour compléter la preuve de l'isomorphisme entre la cohomologie de De Rham et celle de Čech.

Définition A.3.1. *En géométrie, un complexe simplicial est un ensemble fini de simplexes $K = \{S^0, \dots, S^r\}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

(1) *Si $S^k \in K$, alors toutes les faces de S^k sont dans K .*

(2) *Si $S^k, S^j \in K$, alors soit $S^k \cap S^j = \emptyset$ ou soit $S^k \cap S^j \in K$.*

Définition A.3.2. *L'étoile $St(S_{n-1})$ d'un $(n-1)$ -simplexe S_{n-1} de K est définie par la réunion des int (S_n) où S_{n-1} est une face de S_n .*

Proposition A.3.3. *Soit K un complexe simplicial. Alors, $St(S_n)$ est un ouvert et $\{St(S_n)\}_{S_n \in K}$ est un bon recouvrement d'ouverts.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, nous constatons que pour deux $(n-1)$ -simplexes $S^{n-1} = p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_{n-1}}$ et $T^{n-1} = p_{\mu_0} \dots p_{\mu_{n-1}}$, ils peuvent être une face en même temps d'au plus un seul n -simplexe.

En effet, s'ils sont tous les deux les faces d'un n -simplexe, disons $p_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$, tous leurs sommets doivent se retrouver dans $p_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$ et par le principe de Dirichlet, S^{n-1} et t^{n-1} ont au moins $(n-2)$ sommets en commun.

S'ils sont la face d'un autre même n -simplexe, alors S_{n-1} et t_{n-1} ont encore $(n-2)$ sommets en commun. Soit ce sont les mêmes que pour le premier, alors le n -simplexe est le même que le premier : soit ce ne sont pas les mêmes et, à ce moment, ils auront leurs $(n-1)$ sommets en commun et seront donc le même simplexe.

Ainsi, il existe un unique n -simplexe σ_n tel que $St(S_{n-1}) \cap St(t_{n-1}) = \text{int } \sigma_n$ et

$$St(S_{n-1}) \cap St(t_{n-1}) \simeq \mathbb{R}^n$$

puisque $\text{int } \sigma_n \simeq \mathbb{R}^n$. En prenant, l'intersection avec $St(u_n)$, l'étoile d'un autre n -simplexe, soit $\text{int } \sigma_n \subset St(u_n)$ ou soit $\text{int } \sigma_n \cap St(u_n) = \emptyset$ et donc, la triple intersection est soit vide ou homéomorphe à \mathbb{R}^n . Ce sera donc le cas pour toutes intersections finies des éléments de $\{St(S_n)\}_{S_n \in K}$.

□

Définition A.3.4. Soit M , une variété k -différentiable. Une k -différentiable triangulation sur M consiste d'un complexe simplicial K et d'un homéomorphisme $\pi^* : K \rightarrow M$ qui vérifie la propriété suivante : pour chaque n -simplexe $S_n \in K$, il existe un système de coordonnées χ dans M tel que χ^{-1} est défini dans un voisinage de $\pi^*(S_n)$ dans M et $\chi^{-1}\pi^*$ est affine en S_n .

Théorème A.3.5. Toute variété M k -différentiable admet une triangulation k -différentiable.

DÉMONSTRATION. Voir [9]

□