Université de Montréal

À propos du Lemme de Jack

par

Marius Şerban

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maîtrise (M.Sc.) en mathématiques

Août 2006

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

À propos du lemme de Jack

présenté par :

Marius Şerban

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Paul Arminjon
(président-rapporteur)

Richard Fournier
(directeur de recherche)

Paul M. Gauthier
(membre du jury)

Mémoire accepté le: 14 septembre 2006

Sommaire

Soit $w(z)$ une fonction holomorphe non constante dans le disque unité U telle que $w(0)=0$. Alors, si $|w|$ atteint sa valeur maximale sur le cercle $|z|=r<1$ en un point z_0 avec $|z_0|=r$, on peut écrire $z_0 w'(z_0)=kw(z_0)$ où k est un nombre réel et $k\geq 1$. Cette propriété, connue sous le nom de lemme de Jack, sera démontrée et plusieurs applications seront données.

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Richard Fournier, mon directeur de recherche, pour son encadrement exceptionnel. L'aboutissement de ce mémoire doit beaucoup à sa confiance, à son soutien incessant aussi bien scientifique que matériel et à ses encouragements permanents.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Paul M. Gauthier pour ses conseils judicieux et pour son soutien. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Table de matières

Introduction

Ce mémoire porte sur un lemme publié par I. S. Jack dans « *Functions starlike and convex of order* α », J. London Math. Soc., 3, pp. 469-474, (1971), qui a beaucoup d'applications dans le domaine de la théorie des fonctions. Le mémoire est composé essentiellement de trois parties. La première partie porte sur la démonstration du lemme de Jack. En 1979 Sanford S. Miller et Petru T. Mocanu ont affirmé dans un article intitulé «*Second order differential inequalities in the complex plane* », J. Math. Anal. Appl., 65, pp. 289-305, (1978), qu'il y avait une erreur dans la démonstration de Jack. Un autre but de cette première partie est de trouver s'il existe vraiment une erreur dans cette démonstration et de présenter plusieurs démonstrations comme par exemple celle due à Sanford S. Miller et Petru T. Mocanu, qui utilise des arguments propres à l'analyse réelle, ou celle basée sur un lemme énoncé par K. Löwner et qui utilise des méthodes plus géométriques. On montre aussi qu'au moment où Jack publiait son lemme, il existait dans la littérature spécialisée des résultats plus faibles, comme par exemple la proposition anti-calcul due à Erdös (qui met en évidence les différences entre le calcul réel et l'analyse complexe), des résultats qui contenaient implicitement le lemme dans un article de Valiron et des lemmes plus généraux, par exemple St. Ruscheweyh a utilisé le lemme de Julia pour la démonstration.

La deuxième partie traite de certaines applications du lemme de Jack : un théorème publié par Jack dans lequel on trouve une relation entre la convexité d'une fonction complexe et la propriété d'être étoilée, quatre théorèmes publiés par Miller et Mocanu, un résultat dû à Richard Fournier sur le comportement des fonctions analytiques dans un point ou elles atteignent leur valeur absolue minimale et un théorème portant sur la relation de subordination dû à Hallenbeck et Ruscheweyh.

Finalement on présente une extension nouvelle du lemme de Jack pour les polynômes de degré fixe.

Chapitre 1

Démonstrations du lemme de Jack

1. Le lemme de Jack

En 1979, Sanford S. Miller et Petru T. Mocanu ont affirmé dans un article intitulé «*Second order differential inequalities in the complex plane* » [11] qu'il y avait une erreur dans la démonstration de Jack. Le but de cette section est de trouver s'il existe vraiment une erreur dans cette démonstration. Pour ce faire, on commence par introduire le lemme de Jack tel qu'il a été présenté et démontré en 1969 par Jack et publié subséquemment dans [6] :

Lemme. Soit $w(z)$ une fonction holomorphe non constante dans le disque unité U telle que $w(0)=0$. Alors, si $|w|$ atteint sa valeur maximale sur le cercle $|z|=r<1$ en un point z_0 avec $|z_0|=r$, on peut écrire :

$$z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$$

où k est un nombre réel et $k \geq 1$.

Démonstration.

Jack commence la démonstration du lemme en définissant la fonction $M(r,w)$ comme étant la valeur maximale de $|w(z)|$ sur le cercle $|z|=r$. Il affirme, en citant Valiron [16], que $\log M(r,w)$ est une fonction continue, croissante et convexe de $\log r$. Il continue en remarquant qu'en chaque point sur le cercle $|z|=r$ où $|w(z)|=M(r,w)$ on doit avoir:

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \text{ où } z = re^{i\theta} \text{ et } w(z) = Re^{i\phi}.$$

Alors, pour $R \neq 0$ il obtient:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial}{\partial \theta}(\log R) = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\log w)\right] = -\mathrm{Im}\left[\frac{re^{i\theta}w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right].$$

Il en conclut que :

$$\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = k(|z_0|)$$

où k est réel et z_0 est un des points sur le cercle $|z| = r$ où $|w(z)|$ prend la valeur maximale. Donc $\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}$ serait une fonction de $|z_0|$ seulement et ne dépendrait pas de $\arg(z_0)$. On montrera ici que cette dernière affirmation est fausse : en prenant une fonction de la forme

$$w(z) = z\frac{z-a}{1-z},\ a \in (0,1),$$

l'on voit bien qu'elle est analytique dans le disque $|z| < 1$ et que $w(0) = 0$. On calcule ensuite la fonction $R(r,\theta)$:

$$R(r,\theta) = |z|\frac{|z-a|}{|1-z|} = r\sqrt{\frac{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}}$$

Pour obtenir les points de maximum, on calcule la première dérivée par rapport à θ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial\theta} &= r\frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{\frac{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{1 - 2r\cos\theta + r^2}{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \\
&= \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{1 - 2r\cos\theta + r^2}{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}}\frac{2ar\sin\theta\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right) - 2r\sin\theta\left(a^2 - 2ar\cos\theta + r^2\right)}{\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{1 - 2r\cos\theta + r^2}{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}}\frac{2r\sin\theta\left(a - 2ar\cos\theta + ar^2 - a^2 + 2ar\cos\theta - r^2\right)}{\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^2} \\
&= \frac{(1-a)\sin\theta}{2}r^2\sqrt{\frac{1 - 2r\cos\theta + r^2}{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}}\frac{\left(a - r^2\right)}{\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

On obtient donc $\frac{\partial R}{\partial\theta} = 0$ pour $\theta = k\pi$, $r = 0$ et pour $r^2 = a$. En prenant $r = \sqrt{a}$, par exemple, on a que

$$R(\sqrt{a},\theta) = \sqrt{a}\sqrt{\frac{a^2 - 2a\sqrt{a}\cos\theta + a}{1 - 2\sqrt{a}\cos\theta + a}} = a$$

ce qui nous conduit à conclure que l'image du cercle de rayon $\sqrt{a}$ centré à l'origine par $w(z)$ est un cercle de rayon a aussi centré à l'origine. Maintenant, si on calcule la valeur de k aux deux points $z_1 = -\sqrt{a}$ et $z_2 = \sqrt{a}$ nous arrivons à:

$$k(z_1)=\frac{z_1 w'(z_1)}{w(z_1)}=1+z_1\frac{1-a}{(1-z_1)(z_1-a)}=\frac{2}{1-\sqrt{a}}$$

$$k(z_2)=\frac{z_2 w'(z_2)}{w(z_2)}=1+z_2\frac{1-a}{(1-z_2)(z_2-a)}=\frac{2}{1+\sqrt{a}}$$

et on en conclut que $k=k(r,\theta)$. Plus généralement soit $B(\varsigma)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\varsigma-a_j}{1-\bar{a}_j\varsigma}$ un produit de Blaschke fini non-constant. Il est clair que $\forall\phi\in\mathbf{R}$, $|B(e^{i\phi})|=\max_{|\varsigma|=1}|B(\varsigma)|=1$ et évidement $B\in H(\overline{U})$. Par ailleurs

$$\varsigma\frac{B'(\varsigma)}{B(\varsigma)}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\varsigma}{\varsigma-a_j}+\frac{\bar{a}_j\varsigma}{1-\bar{a}_j\varsigma}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varsigma\left(1-|a_j|^2\right)}{(\varsigma-a_j)(1-\bar{a}_j\varsigma)}$$

$$e^{i\phi}\frac{B'(e^{i\phi})}{B(e^{i\phi})}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1-|a_j|^2}{\left|1-\bar{a}_je^{i\phi}\right|^2}=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{1+\bar{a}_je^{i\phi}}{1-\bar{a}_je^{i\phi}}.$$

Supposons que cette dernière expression ne dépende point de ϕ, i.e.,

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{1+\bar{a}_je^{i\phi}}{1-\bar{a}_je^{i\phi}}\equiv K,\ K\in\mathbf{R},\ K\geq 0.$$

On considère une fonction

$$F(\varsigma)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1+\bar{a}_j\varsigma}{1-\bar{a}_j\varsigma}.$$

En tenant compte des répétions possibles de certains des a_j, on peut écrire

$$F(\varsigma)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\frac{1+\bar{a}_j\varsigma}{1-\bar{a}_j\varsigma}$$

où les λ_j sont des entiers positifs non nuls avec $\lambda=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j$, a_j distincts. On peut écrire alors qu'une fonction de la forme

$$G(\varsigma)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{\lambda}\frac{1+\bar{a}_j\varsigma}{1-\bar{a}_j\varsigma}=\sum_{j=1}^{N}l_j\frac{1+\bar{a}_j\varsigma}{1-\bar{a}_j\varsigma},$$

où $a_j \in U$ sont distincts et $\sum_{j=1}^{N} l_j = 1$, $l_j > 0$, $l_j \in \mathbf{Q}$, a sa partie réelle constante sur $|\varsigma| = 1$; puisque cette fonction est holomorphe pour $|\varsigma| \leq 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il suit du principe du minimum (maximum) pour les fonctions harmoniques que

$$G(\varsigma) \equiv \text{constante} \equiv \sum_{j=1}^{N} l_j \frac{1+\bar{a}_j\varsigma}{1-\bar{a}_j\varsigma} \equiv 1,$$

donc $\sum_{j=1}^{N} \bar{a}_j^{\,k} l_j = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$ i.e.

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \ldots & \bar{a}_N \\ \bar{a}_1^{\,2} & \bar{a}_2^{\,2} & \ldots & \bar{a}_N^{\,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_1^{\,N} & \bar{a}_2^{\,N} & \ldots & \bar{a}_N^{\,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est impossible car le déterminant de la matrice est non nul, les a_j étant distincts. Il est donc impossible que même deux a_j soient distincts et alors

$$B(\varsigma) = \left(\frac{\varsigma - a}{1-\bar{a}\varsigma}\right)^n \text{ et } e^{i\phi}\frac{B'(e^{i\phi})}{B(e^{i\phi})} = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\phi}|^2} + n = \frac{1-|a|^2}{1-2\operatorname{Re}(\bar{a}e^{i\phi})+|a|^2} + n.$$

Comme cette dernière expression ne dépend pas de ϕ on déduit que $a = 0$, donc tout produit de Blaschke fini avec au moins un zéro non nul pourrait servir de contre-exemple. Pour finir la démonstration, Jack obtient $k \geq n$ où n est la puissance du premier terme non nul du développement de la fonction $w(z)$ en série de Taylor autour de l'origine. Il montre que la condition $w(0) = 0$ implique que le terme constant est nul et que $n \geq 1$. De ceci et du fait que $k(r) = k(|z_1|)$ est une fonction convexe et croissante de $\log r$, il en découle le résultat cherché.

Puisque $\log M(r,w)$ est une fonction convexe et croissante de $\log r$, il déduit que

$$\frac{d \log M(r,w)}{d \log r} = \frac{rM'(r,w)}{M(r,w)}$$

est une fonction croissante de $\log r$ et implicitement de r là où la dérivée

$$\frac{d \log M(r,w)}{d \log r}$$

existe. Aux points où la dérivée n'existe pas, en se basant sur le théorème de Hadamard sur la croissance de la fonction $M(r,w)$ (Valiron [16], [17]) qui dit que la dérivée à gauche et la dérivée à droite existent et la dérivée à droite est supérieure ou égale à la dérivée à gauche, il en déduit que

$$\frac{rM'(r,w)}{M(r,w)}$$

est une fonction croissante même si elle n'est pas continue. Mais, dit-il,

$$k(r)=\frac{z_1 w'(z_1)}{w(z_1)}=\mathrm{Re}\left[\frac{z_1 w'(z_1)}{w(z_1)}\right]=r\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\log w)\,|_{z=z_1}\right]=r\frac{\partial \log R}{\partial r}\,|_{z=z_1}=\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}\,|_{z=z_1}$$

et alors le lemme est démontré puisque $R\,|_{z=z_1}=M(r,w)$. On remarque que cette dernière affirmation est aussi fausse puisque, prenant en considération l'exemple que l'on a donné plus haut,

$$k(\sqrt{a},0)\neq k(\sqrt{a},\pi)$$

même si

$$R\,|_{z=\sqrt{a}}=R\,|_{z=-\sqrt{a}}=M(\sqrt{a},w)$$

et en général

$$k(r,\theta)\neq\frac{rM'(r,w)}{M(r,w)}.$$

Pour conclure, l'idée essentielle de la démonstration étant incorrecte, on doit trouver une autre façon de prouver ce lemme.

2. Démonstration de Miller et Mocanu

Ce sous-chapitre porte sur la démonstration du lemme de Jack due à Sanford S. Miller et Petru T. Mocanu [11] et aussi sur un théorème qui généralise le lemme de Jack.

Lemme 1. Soit $n\geq 1$ et

$$g(z)=g_n z^n+g_{n+1}z^{n+1}+\ldots$$

une fonction complexe régulière dans le disque unité U telle que $g(z)$ n'est pas identiquement nulle dans U et $n\geq 1$. Si $z_0=r_0e^{i\theta_0}$, $r_0<1$ et $|g(z_0)|=\max\limits_{|z|\leq r_0}|g(z)|$, alors

a) $\dfrac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)} = m$

et

b) $\operatorname{Re}\dfrac{z_0 g''(z_0)}{g'(z_0)} + 1 \geq m$ où $m \geq n \geq 1$.

Démonstration.

a) On prend $g(z) = R(r_0, \theta) e^{i\phi(r_0,\theta)}$ pour $z = r_0 e^{i\theta}$. Alors

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{i}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

Comme z_0 est un point de maximum de R on doit avoir $\dfrac{\partial R}{\partial \theta}(z_0) = 0$ et on obtient que $\dfrac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)} = m$ où m est un nombre réel. Maintenant il faut démontrer que $m \geq n$. Soit

$$h(z) = \frac{g(z_0 z)}{g(z_0) z^{n-1}}.$$

Alors

$$h(z) = \frac{g_n z_0^n z^n + g_{n+1} z_0^{n+1} z^{n+1} + \ldots}{g(z_0) z^{n-1}} = \frac{1}{g(z_0)}\left(g_n z_0^n z + g_{n+1} z_0^{n+1} z^2 + \ldots\right).$$

Puisque $g(z)$ n'est pas identiquement nulle dans le disque unité, $g(z_0) \neq 0$. Autrement, si $g(z_0) = 0$, alors $g(z) = 0$ pour $|z| = r_0$ et par le principe de maximum $g(z) = 0$ pour $|z| \leq r_0$ donc $g_n = g_{n+1} = \ldots = 0$, d'où $g(z) \equiv 0$ pour tout $z \in U$, ce qui contredit l'hypothèse.

Pour tout $z \in U$ on a que $z_0 z \in U$ et alors la série de Taylor $g_n (z_0 z)^n + g_{n+1}(z_0 z)^{n+1} + \ldots$ converge. On en déduit que $h(z)$ est analytique dans U. En appliquant le principe du maximum on obtient

$$|h(z)| \leq \frac{1}{|g(z_0)| r^{n-1}} \max_\theta \left|g\left(z_0 r e^{i\theta}\right)\right| \text{ pour } |z| \leq r < 1.$$

Comme $\left|z_0 r e^{i\theta}\right| = |z_0 r| = |z_0| r \leq r_0$ et $|g(z_0)| = \max\limits_{|z| \leq r_0} |g(z)|$ il suit que :

$$\max_\theta \left|g\left(z_0 r e^{i\theta}\right)\right| \leq |g(z_0)|$$

d'où

$$|h(z)| \le \frac{1}{r^{n-1}} \text{ et aussi } |h(z)| \le \lim_{r\to 1} \frac{1}{r^{n-1}} = 1.$$

En appliquant le lemme de Schwarz on obtient que $|h(z)| \le |z|$ et que

$$\left|\frac{g(z_0 z)}{g(z_0)}\right| \le |z|^n.$$

En particulier, en n'importe quel point $z = r$, $0 \le r \le 1$, on a que

$$\operatorname{Re}\frac{g(z_0 r)}{g(z_0)} \le r^n.$$

Comme

$$m = \frac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)}$$

on a que

$$m = \frac{d}{dr}\left[\frac{g(z_0 r)}{g(z_0)}\right]_{r=1} = \lim_{r\to 1} \frac{\frac{g(z_0 r)}{g(z_0)} - 1}{r-1} = \lim_{r\to 1}\left[1 - \frac{g(z_0 r)}{g(z_0)}\right]\frac{1}{1-r}$$

et aussi, puisque m est réel,

$$m = \lim_{r\to 1}\left[1 - \operatorname{Re}\frac{g(z_0 r)}{g(z_0)}\right]\frac{1}{1-r} \ge \lim_{r\to 1}\frac{1-r^n}{1-r} = n$$

b) En partant de

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\operatorname{Re}^{i\theta}}{re^{i\varphi}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)$$

et en dérivant encore une fois on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{g}{z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)\right] = \frac{zg' - g}{z^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) + \frac{g}{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{zg' - g}{z^2}\frac{g'z}{g} + \frac{g}{z}\left[-\frac{i}{z}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)\right] \\
&= \frac{z(g')^2 - gg'}{zg} - \frac{ig}{z^2}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{i}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} + \frac{i}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

et ensuite

$$i\left[\frac{zg'}{g}\left(\frac{zg''}{g'}+1\right)-\left(\frac{zg'}{g}\right)^2\right]=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{i}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}+\frac{i}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2.$$

Puisque z_0 est un point de maximum de $R(r_0,\varphi)$ nous avons que $\frac{\partial R}{\partial\theta}(z_0)=0$ et aussi que $\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}(z_0)\leq 0$. Alors, comme

$$\frac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)}=m\geq 1,$$

on en déduit que :

$$i\left[m\left(\frac{z_0 g''(z_0)}{g'(z_0)}+1\right)-m^2\right]=\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(z_0)-\frac{i}{R(z_0)}\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}(z_0).$$

En prenant les parties imaginaires on arrive à :

$$\mathrm{Re}\left[m\left(\frac{z_0 g''(z_0)}{g'(z_0)}+1\right)\right]-m^2=-\frac{1}{R(z_0)}\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}(z_0)\geq 0$$

d'où :

$$\mathrm{Re}\frac{z_0 g''(z_0)}{g'(z_0)}+1\geq m.$$

Lemme 2. Soit $\varphi(z)$ une application injective du disque unité fermé $\overline{U}$ dans $\overline{\Omega}$ telle que $\varphi(0)=0$ et telle que $\varphi(z)$ soit régulière sur $\overline{U}$ à l'exception d'au plus un pôle sur ∂U. On note par $\eta(w)$ l'argument de la normale extérieure à $\partial\Omega$ en $w\in\partial\Omega$. Soit

$$w(z)=a+w_n z^n+w_{n+1}z^{n+1}+\ldots$$

telle que $w(z)$ soit régulière dans U et $w(z)\not\equiv a$ pour $n\geq 1$. On suppose qu'il existe un point $z_0=r_0 e^{i\theta_0}\in U$ tel que $w_0=w(z_0)\in\partial\Omega$ et $w(|z|<r_0)\subset\Omega$. Si $\varsigma_0=\varphi^{-1}(w_0)$ alors :

a) $\arg(z_0 w'(z_0))=\arg(\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0))=\eta(w_0)$,

b) $|z_0 w'(z_0)|=m|\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)|>0$ et

c) $\mathrm{Re}\left[\frac{z_0 w''(z_0)}{w'(z_0)}+1\right]\geq m\,\mathrm{Re}\left[\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)}+1\right]$ où $m\geq n\geq 1$.

Démonstration.

a) Comme w_0 est fini et $\varphi(\varsigma)$ est univalente on a que $\varphi'(\varsigma_0) \neq 0$ et $\eta(w_0) = \eta(\varphi(\varsigma_0))$. Puisque $\partial\Omega = \varphi(\partial\overline{U})$ on peut écrire $\partial\Omega = \varphi(1,\theta)$ et alors le vecteur tangent en w_0 sera

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\varsigma_0)$$

et le vecteur normal extérieur sera

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\varsigma_0) = \varsigma_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\varsigma_0).$$

Ceci conduit à

$$\eta(w_0) = \arg(\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)).$$

On définit

$$g(z) = \varphi^{-1}(w(z)).$$

Alors $g(z)$ est régulière dans $|z_0| \leq r_0$ et $|g(z_0)| = 1$. Aussi

$$g(0) = \varphi^{-1}(w(0)) = \varphi^{-1}(a) = 0$$

et

$$|g(z)| \leq 1 \text{ pour tout } |z| \leq r_0.$$

On calcule ensuite les dérivées d'ordre k de g. En sachant que $\varphi(g(z)) = w(z)$ on obtient que

$$g'(z_0)\varphi'(g(z_0)) = w'(z_0) = 0$$

et, puisque $\varphi'(g(z_0)) \neq 0$, on en déduit que

$$g'(z_0) = 0.$$

Pour la deuxième dérivée on a

$$g''(z_0)\varphi'(g(z_0)) + [g'(z_0)]^2\varphi''(g(z_0)) = g''(z_0)\varphi'(g(z_0)) = w''(z_0) = 0$$

d'où

$$g''(z_0) = 0.$$

On montre de la même manière que

$$g^{(k)}(z_0) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n-1.$$

Alors les conditions du lemme 1 sont satisfaites et on a que $w'(z) = \varphi'(\varsigma)g'(z)$ et

$$zw'(z) = g(z)\varphi'(\varsigma)\frac{zg'(z)}{g(z)} = \varsigma\varphi'(\varsigma)\frac{zg'(z)}{g(z)}.$$

Puisque z_0 est un point de maximum de $|g(z)|$ pour $|z| \le r_0$, on peut appliquer le lemme1 et alors

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = m \ge n,$$

d'où

$$z_0 w'(z_0) = m\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0).$$

Donc

$$\arg(z_0 w'(z_0)) = \arg(\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)) = \eta(w_0).$$

b) En utilisant la même argumentation on vérifie directement que

$$|z_0 w'(z_0)| = m|\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)| \ge |\varphi'(\varsigma_0)| > 0.$$

c) En calculant la dérivée de

$$\log w'(z) = \log\varphi'(g(z)) + \log g'(z)$$

on obtient

$$\frac{w''(z)}{w'(z)} = \frac{\varphi''(g(z))}{\varphi'(g(z))}g'(z) + \frac{g''(z)}{g'(z)}$$

et ensuite

$$\frac{zw''(z)}{w'(z)} + 1 = \frac{g(z)\varphi''(g(z))}{\varphi'(g(z))}\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{zg''(z)}{g(z)} + 1.$$

En utilisant le lemme 1 on a que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left[\frac{z_0 w''(z_0)}{w'(z_0)}\right] + 1 &= m\operatorname{Re}\left[\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{z_0 g''(z_0)}{g'(z_0)}\right] + 1 \\
&\ge m\operatorname{Re}\left[\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)}\right] + m \\
&= m\operatorname{Re}\left[\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)} + 1\right].
\end{aligned}$$

Théorème. Soit $w(z) = a + w_n z^n + w_{n+1}z^{n+1} + \ldots$ régulière dans le disque unité U telle que $w(z) \not\equiv a$ et $n \ge 1$. Si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $0 < r_0 < 1$ et $|w(z_0)| = \max\limits_{|z|\le r_0}|w(z)|$ alors

a) $\dfrac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = m$

b) $\operatorname{Re}\dfrac{z_0 w''(z_0)}{w'(z_0)} + 1 \geq m$ où $m \geq n\dfrac{|w_0 - a|^2}{|w_0|^2 - |a|^2} \geq n\dfrac{|w_0| - |a|}{|w_0| + |a|}$.

Démonstration.

a) On définit l'application conforme

$$\varphi(\varsigma) = w_0 \frac{\overline{w_0}\varsigma + a}{w_0 + \overline{a}\varsigma}$$

où

$$w_0 = w(z_0).$$

Pour $\varsigma = e^{i\theta}$ on a

$$\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right| = |w_0| \left| \frac{e^{i\theta} + \dfrac{a}{\overline{w_0}}}{1 + \dfrac{\overline{a}}{w_0} \cdot e^{i\theta}} \right| = |w_0| \left| \frac{e^{i\theta} + \dfrac{a}{\overline{w_0}}}{e^{-i\theta} + \dfrac{\overline{a}}{w_0}} \right| = |w_0|.$$

Donc φ transforme le disque unité U en un disque de rayon $|w_0|$. Donc si $\Omega = \{\varphi(\varsigma) \mid |\varsigma| \leq 1\}$ alors $w(|z| < r_0) \subset \Omega$.

On note $\varsigma_0 = \varphi^{-1}(w_0)$. Alors

$$\frac{\overline{w_0}\varsigma_0 + a}{w_0 + \overline{a}\varsigma_0} = 1$$

implique que

$$\varsigma_0 = \frac{w_0 - a}{\overline{w_0} - \overline{a}}.$$

Comme

$$\varphi'(\varsigma) = w_0 \left(\frac{\overline{w_0}\varsigma_0 + a}{w_0 + \overline{a}\varsigma_0} \right)' = w_0 \frac{|w_0|^2 - |a|^2}{\left(w_0 + \overline{a}\varsigma\right)^2}$$

on obtient

$$\varphi'(\varsigma_0)=w_0\frac{|w_0|^2-|a|^2}{\left(w_0+\overline{a}\dfrac{-w_0-a}{\overline{w_0}-\overline{a}}\right)^2}=w_0\frac{|w_0|^2-|a|^2}{\left(\dfrac{|w_0|^2-w_0\overline{a}+w_0\overline{a}-|a|^2}{\overline{w_0}-\overline{a}}\right)^2}=w_0\frac{\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)^2}{|w_0|^2-|a|^2}.$$

Ensuite

$$\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)=w_0\frac{w_0-a}{\overline{w_0}-\overline{a}}\frac{\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)^2}{|w_0|^2-|a|^2}=w_0\frac{|w_0-a|^2}{|w_0|^2-|a|^2}$$

et en utilisant le lemme 2 on obtient

$$\arg[z_0w'(z_0)]=\arg[\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)]=\arg(w_0)$$

et on en déduit que

$$\arg\left[\frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}\right]=\arg[w_0]-\arg[w_0]=0.$$

On a aussi que

$$\frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}=k\frac{\varsigma_0\varphi'(\varsigma_0)}{w_0}=k\frac{|w_0-a|^2}{|w_0|^2-|a|^2}$$

où $k\geq n$, donc

$$\frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}=m\geq n\frac{|w_0-a|^2}{|w_0|^2-|a|^2}\geq n\frac{\left(|w_0|-|a|\right)^2}{|w_0|^2-|a|^2}=n\frac{|w_0|-|a|}{|w_0|+|a|}.$$

b) Pour démontrer la deuxième partie on calcule

$$\varphi''(\varsigma)=w_0\left(|w_0|^2-|a|^2\right)\left[\frac{1}{\left(w_0+\overline{a}\varsigma\right)^2}\right]'=-2w_0\left(|w_0|^2-|a|^2\right)\frac{\overline{a}}{\left(w_0+\overline{a}\varsigma\right)^3}$$

et en $\varsigma=\varsigma_0$ on obtient

$$\varphi''(\varsigma_0)=-2w_0\left(|w_0|^2-|a|^2\right)\frac{\overline{a}}{\left(w_0+\overline{a}\dfrac{-w_0-a}{\overline{w_0}-\overline{a}}\right)^3}=-2w_0\left(|w_0|^2-|a|^2\right)\frac{\overline{a}\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)^3}{\left(|w_0|^2-|a|^2\right)^3}$$

$$=-2w_0\frac{\overline{a}\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)^3}{\left(|w_0|^2-|a|^2\right)^2}.$$

Alors

$$\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)}=\frac{-2\varsigma_0 w_0\dfrac{\overline{a}\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)^3}{\left(|w_0|^2-|a|^2\right)^2}}{w_0\dfrac{\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)^2}{|w_0|^2-|a|^2}}=-2\varsigma_0\frac{\overline{a}\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)}{|w_0|^2-|a|^2}=-2\frac{w_0-a}{\overline{w_0}-\overline{a}}\frac{\overline{a}\left(\overline{w_0}-\overline{a}\right)}{|w_0|^2-|a|^2}$$

$$=-2\overline{a}\frac{w_0-a}{|w_0|^2-|a|^2}=2\frac{|a|^2-\overline{a}w_0}{|w_0|^2-|a|^2}.$$

Ainsi

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)}\right]+1=\frac{|w_0|^2+|a|^2-2\cdot\operatorname{Re}\left[\overline{a}w_0\right]}{|w_0|^2-|a|^2}=\frac{|w_0-a|^2}{|w_0|^2-|a|^2}\geq\frac{\left(|w_0|-|a|\right)^2}{|w_0|^2-|a|^2}=\frac{|w_0|-|a|}{|w_0|+|a|}$$

On applique ensuite le lemme 2 et

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_0w''(z_0)}{w'(z_0)}\right]+1\geq k\operatorname{Re}\left[\frac{\varsigma_0\varphi''(\varsigma_0)}{\varphi'(\varsigma_0)}+1\right]\geq k\frac{|w_0|-|a|}{|w_0|+|a|}=m$$

où $k\geq n$.

3. Le lemme de Löwner

Dans ce sous-chapitre on donne une démonstration du lemme de Jack à l'aide d'un lemme énonce par K. Löwner [13]. Ensuite on présente le cas d'égalité pour le lemme de Jack, un résultat dû à Richard Fournier [3].

Lemme. Soit $f(z)$ une fonction régulière telle que $|f(z)|<1$ dans le disque unité U et régulière en $z=1$ avec $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Alors $f'(1)$ est nécessairement réelle et $f'(1)\geq 1$.

Démonstration.

La fonction $f(z)$ satisfait aux conditions du lemme de Schwarz et alors $|f(z)|\leq|z|$ pour $z\in U$. Si on prend z sur la droite réelle positive, $0<z<1$, on a que $|f(z)|\leq z$ et ensuite

$$|1-f(z)|\geq 1-|f(z)|\geq 1-z,$$

donc

$$\left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right|\geq 1.$$

En prenant la limite $z \to 1$ on obtient

$$\lim_{z\to 1}\left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right| = |f'(1)| \geq 1.$$

Soit Γ un chemin analytique qui passe par 1 tel que $\Gamma \subset U$. Alors le vecteur tangent à Γ en 1 aura une direction ϑ

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}.$$

On considère Γ paramétrisé par

$$\Gamma = \{(x(s), y(s)) \mid s \in [a,b]\},\ x(c)=1,\ y(c)=0, \text{ avec } a<c<b$$

Alors le vecteur tangent à Γ en 1 sera

$$t(c) = (x'(c), y'(c))$$

où t a la direction ϑ. Aussi $f(\Gamma)$ est aussi un chemin analytique, $f(1)=1$ et $f(\Gamma)$ est entièrement contenu dans U. Le vecteur tangent à $f(\Gamma)$ a la forme

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \left(\frac{du}{ds} + i\frac{dv}{ds}\right) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\right] = \\ &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}\right)\end{aligned}$$

et en 1, $\theta(c) = f'(1)t(c)$.

Alors

$$\arg\theta(c) = \arg f'(1) + \arg t(c) = \alpha + \vartheta.$$

Évidement, puisque $f(\Gamma)$ reste dans U, la direction du vecteur tangent en 1 sera

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \vartheta < \frac{3\pi}{2}$$

pour tout $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. On en déduit que $\alpha = 0$.

Remarque Soit $w(z)$ une fonction régulière dans le disque unité U telle que $w(0)=0$. Alors si $|w(z)|$ atteint sa valeur maximale sur le cercle $|z|=r$ en un point z_0, $|w(z_0)| = \max_{|z|=r}|(z)|$, on définit la fonction

$$f(z)=\frac{w(z_0 z)}{w(z_0)}$$

et pour $|z|\leq 1$

$$|f(z)|=\frac{|w(z_0 z)|}{|w(z_0)|}\leq 1,\ f(0)=0,\ |f(1)|=\frac{|w(z_0)|}{|w(z_0)|}=1.$$

Donc les conditions du lemme sont satisfaites et $f'(1)\geq 1$, $f'(1)$ réelle.

Comme

$$f'(z)=\frac{z_0 w'(z_0 z)}{w(z_0)}$$

on obtient

$$f'(1)=\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}\geq 1$$

donc le lemme de Jack est une conséquence directe du lemme de Löwner.

Proposition. Soit $f(z)$ régulière dans le disque unité U telle que $f(z)$ ait un zéro d'ordre $n\geq 1$ en origine. Si z_0 est tel que $|z_0|=r$, $0<r<1$, et que $|f(z_0)|=\max_{|z|=r}|f(z)|$ alors

$$z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\geq n$$

avec égalité si et seulement si

$$f(z)=Kz^n.$$

Démonstration.

La première partie de cette proposition a déjà été démontrée. Pour démontrer la deuxième partie on définit une fonction $w(z)$ régulière dans $U\cup\{1\}$ telle que $w(z)=a_n z^n+\ldots$, $w(U)\subset U$ et $w(1)=1$. On a déjà démontré que $w'(1)\geq n$ et on veut démontrer que $w'(1)=n$ si et seulement si $w(z)=z^n$.

Soit

$$w(z)=z^n w_1(z)$$

où $w_1(z)$ est régulière dans $U \cup \{1\}$, $w_1(U) \subset U$, $w_1(1)=1$ et $w_1(0)=a_n$. À cause de cette dernière condition, si on suppose que $w_1(z)$ n'est pas constante dans U alors $|a_n|<1$. Ensuite on définit une autre fonction

$$w_2(z)=\frac{w_1(z)-a_n}{1-\overline{a_n}w_1(z)}\frac{1-\overline{a_n}}{1-a_n}$$

qui est régulière dans U, $w_2(U) \subset U$, $w_2(0)=0$ et $w_1(1)=1$. On peut donc appliquer le lemme de Löwner et on obtient que $w_2(1)$ est réel et $w_2'(1) \geq 1$. Alors

$$w_2'(z)=\frac{1-\overline{a_n}}{1-a_n}\frac{w_1'(z)\left[1-\overline{a_n}w_1(z)\right]+\overline{a_n}w_1'(z)\left[w_1(z)-a_n\right]}{\left[1-\overline{a_n}w_1(z)\right]^2}=\frac{1-\overline{a_n}}{1-a_n}\frac{w_1'(z)\left(1-|a_n|^2\right)}{\left[1-\overline{a_n}w_1(z)\right]^2}$$

et en $z=1$ on a

$$w_2'(1)=w_1'(1)\frac{1-|a_n|^2}{1-2\operatorname{Re}[a_n]+|a_n|^2}=w_1'(1)\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^2}\geq 1$$

ou encore

$$w_1'(1)\geq\frac{|1-a_n|^2}{1-|a_n|^2}>0.$$

En dérivant $w(z)$ on obtient

$$w'(z)=\left[z^n w_1(z)\right]'=nz^{n-1}w_1(z)+z^n w_1'(z)$$

et alors

$$n=w'(1)=nw_1(1)+w_1'(1)\geq n+\frac{|1-a_n|^2}{1-|a_n|^2}>n$$

ce qui est une contradiction, donc $w_1(z)$ est constante et $w(z)=z^n$. Autrement dit $w'(1)=n \Leftrightarrow w(z)=z^n$ et le résultat de cette proposition en découle immédiatement si on prend

$$w(z)=\frac{f(z_0 z)}{f(z_0)}.$$

En dérivant $w(z)$ on a

$$w'(z) = z_0 \frac{f'(z_0 z)}{f(z_0)}$$

et pour $z = 1$

$$w'(1) = z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = n$$

ce qui est équivalent a $f(z) = Kz^n$, $K \in \mathbf{C}$.

4. Le lemme de Hayman

Dans ce sous-chapitre on introduit un résultat plus faible que le résultat du lemme de Jack. Il s'agit d'un lemme énoncé par W. K. Hayman, [9].

Lemme. Soit $f(z)$ régulière sur le disque $|z| \leq r$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = 0 \text{ en } \theta = \theta_0 .$$

Alors, si $z_0 = re^{i\theta_0}$ et $f(z_0) \neq 0$, $z_0 \dfrac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ est réel.

Démonstration.
Soit

$$u(z) = \log|f(z)|.$$

Alors $u(z)$ est harmonique en $z = z_0$, puisque $f(z_0) \neq 0$, et aussi

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(re^{i\theta_0}\right) = 0 .$$

On exprime, par la suite, $u(z)$ en termes de x et y et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} u(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial u}{\partial(r\cos\theta)}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial(r\sin\theta)}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) = \\ &= r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\right).\end{aligned}$$

En $\theta = \theta_0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}u\left(re^{i\theta}\right)|_{\theta=\theta_0}=r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\right)|_{\theta=\theta_0}=0\,.$$

Par ailleurs on a que

$$re^{i\theta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(r\cos\theta_0+ir\sin\theta_0\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$=r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta_0+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta_0\right)-ir\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta_0-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta_0\right).$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Im}\left[re^{i\theta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=0\,.$$

Maintenant si on écrit

$$f(z)=|f(z)|e^{i\arg[f(z)]}$$

on a que

$$\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg[f(z)]=u(z)+i\arg[f(z)]=u(z)+iv(z)$$

où $u(z)$ et $v(z)$ sont des fonctions réelles, donc en utilisant les relations de Cauchy – Riemann on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial z}[f(z)]=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Alors on peut écrire

$$\mathrm{Im}\left\{z_0\frac{d}{dz}[\log f(z)]\right\}=0$$

ce qui est équivalent à

$$z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\in\mathbf{R}\,.$$

5. Raffinement de Fournier

Le but de ce sous-chapitre est de présenter un résultat dû à Richard Fournier [3]. Le théorème utilise le lemme de Jack pour obtenir plus d'information sur le comportement des fonctions analytiques en un point où elles atteignent leur valeur absolue minimale.

Théorème. Soient $n \geq 1$, $r > 0$, $f(z) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ régulière dans le disque unité fermé $\overline{U}$ et $r\alpha_j$ $(0 < |\alpha_j| < 1, j = 1,2,...,N)$ les zéros non nuls de $f(z)$ avec les multiplicités dans le disque de rayon r centré à l'origine. Si on prend z_0 tel que $|z_0| = r$ et que $|f(z_0)| = \min_{|z|=r} |f(z)|$ alors

$$z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \leq n + \sum_{j=1}^{N} \frac{1+|\alpha_j|}{1-|\alpha_j|}.$$

Démonstration.

On considère le produit de Blaschke

$$b(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}$$

et la fonction analytique dans $\overline{U}$

$$F(z) = z^{n+1} \frac{b\left(\frac{z}{r}\right)}{f(z)}.$$

Il est évident que $F(z)$ a un zéro d'ordre au moins 1 en origine et que

$$\max_{|z| \leq r} |F(z)| = \max_{|z|=r} |F(z)| = r^{n+1} \max_{|z|=r} \frac{\left|b\left(\frac{z}{r}\right)\right|}{|f(z)|}.$$

On sait aussi que le produit de Blaschke a la propriété que pour $|\varsigma| = 1$

$$|b(\varsigma)| = \left|\prod_{j=1}^{n} \frac{\varsigma - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j \varsigma}\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{\varsigma - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j \varsigma}\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{\varsigma - \alpha_j}{\overline{\varsigma} - \overline{\alpha}_j}\right| = 1,$$

donc

$$\max_{|z| \leq r} |F(z)| = r^{n+1} \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z)|} = r^{n+1} \frac{1}{\min_{|z|=r} |f(z)|} = \frac{r^{n+1}}{|f(z_0)|},$$

et autrement dit z_0 est un point de maximum de $|F(z)|$ dans le disque $|z| \leq r$. On peut alors appliquer le lemme de Jack et on obtient

$$z_0 \frac{F'(z_0)}{F(z_0)} \in \mathbf{R}$$

et aussi

$$z_0 \frac{F'(z_0)}{F(z_0)} \geq 1 .$$

En développant cette dernière expression on obtient

$$z_0 \frac{F'(z_0)}{F(z_0)} = z_0 \left[\frac{d}{dz} \ln F(z) \right]_{z=z_0} =$$

$$= z_0 \left\{ \frac{d}{dz} \left[(n+1) \ln z + \ln b\left(\frac{z}{z_0} \right) - \ln f(z) \right] \right\}_{z=z_0} =$$

$$= z_0 \left[\frac{n+1}{z_0} + \frac{1}{z_0} \frac{b'(1)}{b(1)} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right] =$$

$$= n+1+\frac{b'(1)}{b(1)} - z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \geq 1$$

et puisque pour $|\varsigma| = 1$

$$\frac{b'(1)}{b(1)} = \left[\varsigma \frac{b'(\varsigma)}{b(\varsigma)} \right]_{\varsigma=1} = \left[\varsigma \frac{d}{d\varsigma} \ln b(\varsigma) \right]_{\varsigma=1} = \left(\varsigma \frac{d}{d\varsigma} \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{\varsigma - \alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j \varsigma} \right)_{\varsigma=1} =$$

$$= \left[\varsigma \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\varsigma - \alpha_j} + \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j \varsigma} \right) \right]_{\varsigma=1} = \left[\varsigma \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\overline{\varsigma}}{1-\alpha_j \overline{\varsigma}} + \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j \varsigma} \right) \right]_{\varsigma=1} =$$

$$= \left[\varsigma \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\overline{\varsigma} - \overline{\alpha}_j + \overline{\alpha}_j - |\alpha_j|^2 \overline{\varsigma}}{|1-\overline{\alpha}_j \varsigma|^2} \right) \right]_{\varsigma=1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1-|\alpha_j|^2}{|1-\overline{\alpha}_j|^2} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1-|\alpha_j|^2}{(1-|\alpha_j|)^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1+|\alpha_j|}{1-|\alpha_j|}$$

on déduit que

$$z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \leq n + \sum_{j=1}^{N} \frac{1+|\alpha_j|}{1-|\alpha_j|} .$$

6. La proposition de Erdös

Dans ce sous-chapitre on introduit un résultat plus faible que le résultat du lemme de Jack. Il s'agit d'une proposition que Bak et Newman atribuent à Erdös (« La proposition anti-calcul », [2, p.73]). Le cas d'égalité atribué plus haut à Fournier est aussi une conséquence de cette proposition.

Proposition. Soit $f(z)$ régulière dans un disque fermé telle qu'elle atteigne son module maximum en un point α sur la frontière du disque. Alors $f'(\alpha)\neq 0$ si f n'est pas constante.

Démonstration.

On suppose que $f(z)$ n'est pas constante dans le disque. La fonction $f(z)$ étant analytique dans le disque fermé, on peut la développer en une série de Taylor en α

$$f(z)=f(\alpha)+f'(\alpha)(z-\alpha)+f''(\alpha)\frac{(z-\alpha)^2}{2}+\ldots$$

Si on suppose que $f'(\alpha)=0$ alors

$$f(z)=f(\alpha)+f''(\alpha)\frac{(z-\alpha)^2}{2}+f'''(\alpha)\frac{(z-\alpha)^3}{6}+\ldots\,.$$

On suppose ensuite que $f''(\alpha)\neq 0$ et on prend à l'intérieur du disque un point $\omega=\alpha+\delta e^{i\theta}$ tel que les premiers deux termes du développement en série de Taylor, $f(\alpha)$ et $f''(\alpha)\frac{(z-\alpha)^2}{2}$ respectivement, aient le même argument

$$\arg[f(\alpha)]=\arg\left[f''(\alpha)\frac{(z-\alpha)^2}{2}\right].$$

On obtient

$$\theta=\frac{\arg[f(\alpha)]-\arg[f''(\alpha)]}{2}$$

et si $\theta\neq\arg[\alpha]\pm\frac{\pi}{2}$ on a que

$$\left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2e^{2i\theta}}{2}\right|=|f(\alpha)|+\frac{|f''(\alpha)|\delta^2}{2}$$

et alors

$$\left|f(\omega)\right| = \left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta}}{2}+\frac{f'''(\alpha)\delta^3 e^{3i\theta}}{6}+\ldots\right| \geq$$

$$\geq \left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta}}{2}\right| - \left|\frac{f'''(\alpha)\delta^3 e^{3i\theta}}{6}+\ldots\right| =$$

$$= \left|f(\alpha)\right| + \frac{\left|f''(\alpha)\right|\delta^2}{2} - \left|\frac{f'''(\alpha)\delta^3 e^{3i\theta}}{6}+\ldots\right|$$

Mais, pour δ assez petit,

$$\left|\sum_{n=3}^{\infty} f^{(n)}(\alpha)\frac{\delta^n e^{ni\theta}}{n!}\right| \leq \frac{\left|f''(\alpha)\right|\delta^2}{4}$$

et on obtient

$$\left|f(\omega)\right| \geq \left|f(\alpha)\right| + \frac{\left|f''(\alpha)\right|\delta^2}{4} > \left|f(\alpha)\right|$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Dans le cas ou $\theta = \arg[\alpha] \pm \frac{\pi}{2}$ le point ω sera positionné à l'extérieur du disque $|z| \leq 1$ pour tout δ positif. On peut alors, en modifiant légèrement θ et en ajustant convenablement δ, obtenir ω à l'intérieur du disque. On définit $\theta_1 = \theta + \frac{\varepsilon}{2}$ et alors

$$\left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta}}{2}e^{i\varepsilon}\right| = \left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta}}{2}\cos\varepsilon + i\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta}}{2}\sin\varepsilon\right|$$

$$\geq \left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta}}{2}\cos\varepsilon\right| - \frac{\left|f''(\alpha)\right|}{2}\left|\sin\varepsilon\right|\delta^2$$

$$= \left|f(\alpha)\right| + \frac{\left|f''(\alpha)\right|}{2}\left(\left|\cos\varepsilon\right|\delta^2 - \left|\sin\varepsilon\right|\right)\delta^2$$

Pour des valeurs petites de ε $\left|\cos\varepsilon\right|\delta^2 - \left|\sin\varepsilon\right| \geq \frac{1}{2}$ et alors

$$\left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2 e^{2i\theta_1}}{2}\right| \geq \left|f(\alpha)\right| + \frac{\left|f''(\alpha)\right|\delta^2}{4}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|f(\omega)| &= \left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2e^{2i\theta_1}}{2}+\frac{f'''(\alpha)\delta^3e^{3i\theta_1}}{6}+\ldots\right| \\ &\geq \left|f(\alpha)+\frac{f''(\alpha)\delta^2e^{2i\theta_1}}{2}\right|-\left|\frac{f'''(\alpha)\delta^3e^{3i\theta_1}}{6}+\ldots\right| \\ &\geq |f(\alpha)|+\frac{|f''(\alpha)|\delta^2}{4}-\left|\frac{f'''(\alpha)\delta^3e^{3i\theta}}{6}+\ldots\right|\end{aligned}$$

En prenant un δ assez petit,

$$\left|\sum_{n=3}^{\infty} f^{(n)}(\alpha)\frac{\delta^n e^{ni\theta}}{n!}\right| \leq \frac{|f''(\alpha)|\delta^2}{8},$$

on obtient

$$|f(\omega)| \geq |f(\alpha)|+\frac{|f''(\alpha)|\delta^2}{8} > |f(\alpha)|$$

et on arrive de nouveau à une contradiction puisque α est un point de maximum. On en conclut que $f'(\alpha)\neq 0$.

7. Démonstration de Ruscheweyh

Dans ce sous-chapitre on donne une version plus générale du lemme de Jack due à S. Ruscheweyh [15]. Pour la démonstration on utilise le lemme de Julia [6].

Lemme. La région

$$W_k = \left\{\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k \mid k>0\right\}$$

est un disque dans le disque unité U tangent a ∂U en $z=1$ appelé horocycle. Soit $f\in H(U)$ telle que $f(U)\subset U$. On suppose qu'il existe une suite $\{z_n\}$ dans U telle que $z_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$, $f(z_n)\underset{n\to\infty}{\to} 1$, et

$$\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|}\underset{n\to\infty}{\to} A<\infty .$$

Alors $f(W_k)\subset W_{Ak}$ pour tout $k>0$. De même:

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq A\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$$

pour $z \in U$.

En particulier $A > 0$.

Démonstration.
On prend autour de chaque z_n un disque non-euclidien $K(z_n, r_n)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|z_n|}{1-r_n} = k.$$

On voit bien que $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$.

Le disque $K(z_n, r_n)$ est défini à l'aide de la distance pseudo-hyperbolique :

$$\rho(z, z_n) = \left| \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z} \right|.$$

Donc $K(z_n, r_n) = \{z \in U \mid \rho(z, z_n) < r_n\}$. $K(z_n, r_n)$ est un disque euclidien qui est obtenu à partir de l'application inverse du disque $|\varsigma| < r_n$ par la transformation de Möbius :

$$\varsigma = \tau(z) = \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}.$$

Donc $K(z_n, r_n)$ est aussi un disque euclidien de rayon R_n et de centre C_n. On pose

$$z = x + iy, \; z_n = x_n + y_n$$

et en partant de la condition

$$\left| \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right| < r_n$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|^2 &= \left| \frac{x + iy - x_n - iy_n}{1 - (x + iy)(x_n - iy_n)} \right|^2 = \left| \frac{(x - x_n) + i(y - y_n)}{1 - (x + iy)(x_n - iy_n)} \right|^2 = \\
&= \frac{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(1 - xx_n - yy_n)^2 + (y_n x - x_n y)^2} = \\
&= \frac{(x^2 + y^2) + (x_n^{\ 2} + y_n^{\ 2}) - 2(xx_n + yy_n)}{1 + x^2(x_n^{\ 2} + y_n^{\ 2}) + y^2(x_n^{\ 2} + y_n^{\ 2}) - 2(xx_n + yy_n)} = \\
&= \frac{|z|^2 + |z_n|^2 - 2(xx_n + yy_n)}{1 + |z|^2 |z_n|^2 - 2(xx_n + yy_n)} < r_n^{\ 2}
\end{aligned}$$

et ensuite:

$$|z|^2+|z_n|^2-2(xx_n+yy_n)<r_n^2+r_n^2|z|^2|z_n|^2-2r_n^2(xx_n+yy_n),$$

$$|z|^2-r_n^2|z|^2|z_n|^2-2(xx_n+yy_n)+2r_n^2(xx_n+yy_n)<r_n^2-|z_n|^2,$$

$$|z|^2\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)+2\left(r_n^2-1\right)(xx_n+yy_n)<r_n^2-|z_n|^2,$$

$$|z|^2-2\frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2}(xx_n+yy_n)<\frac{r_n^2-|z_n|^2}{1-r_n^2|z_n|^2}.$$

Mais

$$\frac{r_n^2-|z_n|^2}{1-r_n^2|z_n|^2}=\frac{r_n^2-|z_n|^2+r_n^2|z_n|^4-r_n^4|z_n|^2}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2}=\frac{r_n^2\left(1-2|z_n|^2+|z_n|^4\right)-|z_n|^2\left(1-2r_n^2+r_n^4\right)}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2}=$$

$$=r_n^2\frac{\left(1-|z_n|^2\right)^2}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2}-|z_n|^2\frac{\left(1-r_n^2\right)^2}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2}$$

et alors

$$|z|^2-2\frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2}(xx_n+yy_n)+|z_n|^2\frac{\left(1-r_n^2\right)^2}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2}<r_n^2\frac{\left(1-|z_n|^2\right)^2}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2},$$

$$\left|z-z_n\frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2}\right|^2<r_n^2\frac{\left(1-|z_n|^2\right)^2}{\left(1-r_n^2|z_n|^2\right)^2},$$

$$\left|z-z_n\frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2}\right|<r_n\frac{1-|z_n|^2}{1-r_n^2|z_n|^2}.$$

On en conclut que

$$C_n=z_n\frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2}\quad\text{et}\quad R_n=r_n\frac{1-|z_n|^2}{1-r_n^2|z_n|^2}.$$

Alors on peut calculer les points $\{\alpha_n,\beta_n\}$de valeur absolue minimale et maximale respectivement sur le cercle $\partial K(z_n,r_n)$ de rayon R_n et de centre C_n :

$$\alpha_n=C_n-R_n\frac{z_n}{|z_n|}=z_n\frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2}-r_n\frac{1-|z_n|^2}{1-r_n^2|z_n|^2}\frac{z_n}{|z_n|}=\frac{z_n}{1-r_n^2|z_n|^2}\left(1-r_n^2-r_n\frac{1-|z_n|^2}{|z_n|}\right)=$$

$$=\frac{z_n}{1-r_n^2|z_n|^2}\frac{|z_n|-|z_n|r_n^2-r_n+r_n|z_n|^2}{|z_n|}=\frac{z_n}{1-r_n^2|z_n|^2}\frac{\left(|z_n|-r_n\right)\left(1+r_n|z_n|\right)}{|z_n|}=\frac{|z_n|-r_n}{1-r_n|z_n|}\frac{z_n}{|z_n|}$$

$$\beta_n = C_n + R_n \frac{z_n}{|z_n|} = z_n \frac{1-r_n^2}{1-r_n^2|z_n|^2} + r_n \frac{1-|z_n|^2}{1-r_n^2|z_n|^2}\frac{z_n}{|z_n|} = \frac{z_n}{1-r_n^2|z_n|^2}\left(1-r_n^2 + r_n \frac{1-|z_n|^2}{|z_n|}\right) =$$

$$= \frac{z_n}{1-r_n^2|z_n|^2}\frac{|z_n|-|z_n|r_n^2 + r_n - r_n|z_n|^2}{|z_n|} = \frac{z_n}{1-r_n^2|z_n|^2}\frac{(|z_n|+r_n)(1-r_n|z_n|)}{|z_n|} = \frac{|z_n|+r_n}{1+r_n|z_n|}\frac{z_n}{|z_n|}$$

En calculant la limite pour $n \to \infty$ on obtient :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|-r_n}{1-r_n|z_n|}\frac{z_n}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|-r_n}{1-r_n|z_n|}\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|z_n|-r_n}{1-r_n}}{\dfrac{1-r_n|z_n|}{1-r_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1-|z_n|}{1-r_n}}{r_n\dfrac{1-|z_n|}{1-r_n}+1} = \frac{1-k}{1+k}$$

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|+r_n}{1+r_n|z_n|}\frac{z_n}{|z_n|} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} K(z_n, r_n)$ est un disque euclidien dont la frontière est un cercle de diamètre égal au segment de droite $\left[\dfrac{1-k}{1+k}, 1\right]$. De même $\lim\limits_{n\to\infty} K(f(z_n), r_n)$ est un disque euclidien dont la frontière est un cercle de diamètre le segment de droite $\left[\dfrac{1-Ak}{1+Ak}, 1\right]$.

On considère maintenant les deux horocycles

$$W_k = \left\{ z \mid \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k, k > 0 \right\} \text{ et } W_{A\cdot k} = \left\{ z \mid \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < Ak, k > 0 \right\}$$

et on calcule l'équation de leur frontière. Alors pour W_k on a que :

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} = \frac{|(1-x)-iy|^2}{1-|x+iy|^2} = \frac{(1-x)^2+y^2}{1-(x+y)^2} < k$$

d'où

$$1-2x+x^2+y^2 < k(1-x^2-y^2),$$

$$x^2(k+1)+y^2(k+1)-2x < k-1,$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{k+1} < \frac{k-1}{k+1},$$

$$x^2 - \frac{2x}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + y^2 < \frac{k-1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2},$$

$$\left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{k}{k+1}\right)^2.$$

On en conclut que la frontière de l'horocycle W_k est un cercle de rayon $r = \frac{k}{k+1}$ et de centre $c = \frac{1}{k+1}$. Il s'ensuit que le segment de droite $\left[\frac{1-k}{1+k}, 1\right]$ est un diamètre du cercle euclidien W_k ; même chose pour l'horocycle $W_{A \cdot k}$ pour lequel on obtient comme diamètre le segment de droite $\left[\frac{1-Ak}{1+Ak}, 1\right]$.

Puisque deux cercles avec le même diamètre sont identiques on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} K(z_n, r_n) = W_k \text{ et } \lim_{n\to\infty} K(f(z_n), r_n) = W_{Ak}.$$

Par ailleurs on a que [6, lemme 1.2]

$$\left|\frac{f(z) - f(z_n)}{1 - \bar{f}(z_n) f(z)}\right| \le \left|\frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}\right|, \; z \ne z_n$$

ou autrement dit pour tout $z \in K(z_n, r_n)$, $\rho(f(z), f(z_n)) \le r_n$ donc pour tout $z \in K(z_n, r_n)$ $f(z) \in K(f(z_n), r_n)$ d'où on conclut que

$$f(K(z_n, r_n)) \subset K(f(z_n), r_n)$$

et par la suite

$$f(W_k) \subset W_{Ak}.$$

Remarque. Soit $f(z)$ bornée et analytique dans l'angle

$$\Gamma = \left\{ z \in U \mid \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\}, \; \alpha > 1.$$

Si $\lim_{x\to 1} f(z) = a$ alors dans un angle plus petit Γ' on a

$$\lim_{x \in \Gamma', x\to 1} f(z) = a.$$

En effet si on prend

$$f_n(z) = f\left(1 + \frac{1}{n}(z-1)\right) \text{où } z \in \Gamma$$

on a que

$$\frac{\left|1 - 1 - \frac{1}{n}(z-1)\right|}{1 - \left|1 - \frac{1}{n}(z-1)\right|} = \frac{\frac{1}{n}|z-1|}{1 - \left|1 - \frac{1}{n}(z-1)\right|} < \frac{\frac{1}{n}|z-1|}{1 - \left|1 - \frac{1}{n}\right| - \frac{1}{n}|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|} < \alpha .$$

Puisque f_n converge ponctuellement pour tout $z \in \Gamma$ on applique le théorème de Vitali et on obtient que f_n converge uniformément sur tout compact de Γ et donc

$$\lim_{z\in\Gamma', n\to\infty} f_n(z) = \lim_{x\in(0,1), x\to 1} f(x) = a .$$

On en déduit que $\lim\limits_{z\in\Gamma', z\to 1} f(z) = a$.

Remarque. Soit $f \in \mathbf{B}$ et on suppose qu'il existe une suite $\{z_n\}$ dans U telle que $z_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$, $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$, et

$$B = \sup_z \frac{\dfrac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}}{\dfrac{|1-z|^2}{1-|z|^2}}.$$

Alors

a) si $B = \infty$ on suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} = A < \infty$$

et en appliquant le lemme de Julia on obtient

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \le A \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \; z \in U$$

d'où on déduit que $B \le A$ et donc $A = \infty$. Par conséquent dans un angle

$$\Gamma = \left\{ z \in U \mid \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\},\ \alpha > 1$$

on a que

$$\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} \leq \alpha \frac{|1-f(z_n)|}{|1-z_n|}.$$

On en conclut que

$$.\ \lim_{z\in\Gamma, z\to 1} \frac{|1-f(z)|}{|1-z|} = \lim_{z\in\Gamma, z\to 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \infty$$

b) si $B < \infty$ alors $B > 0$ et par le lemme de Julia si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} = A$$

alors

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq A \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2},\ z \in U.$$

On en conclut que

$$\underline{\lim}_{z\to 1} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geq B.$$

Ainsi si on prend $z_n = x_n$ réel et $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$ on a que

$$|1-f(x_n)|^2 \leq B\left[1-|f(x_n)|^2\right]\frac{(1-x_n)^2}{1-x_n{}^2} = B\left[1-|f(x_n)|^2\right]\frac{1-x_n}{1+x_n} \text{ et } f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

et alors

$$\begin{aligned} \frac{1-|f(x_n)|}{1-x_n}\frac{1+x_n}{1+|f(x_n)|} &\leq \frac{|1-f(x_n)|}{1+|f(x_n)|}\frac{1-|f(x_n)|}{1-|f(x_n)|}\frac{1-x_n{}^2}{(1-x_n)^2} \\ &\leq \frac{|1-f(x_n)|^2}{1-|f(x_n)|^2}\frac{1-x_n{}^2}{(1-x_n)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \leq B.$$

Il découle que, pour $z_n = x_n$ réel, $A = B$ et ensuite on peut écrire

$$B = \lim_{n\to\infty}\frac{1-|f(x_n)|}{1-x_n} \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{|1-f(x_n)|}{1-x_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{|1-f(x_n)|}{1-x_n} \le A^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-|f(x_n)|^2}{1-x_n}\right]^{\frac{1}{2}} = B$$

donc

$$\left|\frac{1-f(x_n)}{1-x_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$$

et

$$\frac{|1-f(x_n)|}{1-|f(x_n)|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Il s'ensuit que $\arg[1-f(x)] \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et en conséquence

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{1-|f(x)|}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{|1-f(x)|}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-f(x)}{1-x} = f'(1).$$

c) si $B<\infty$ alors dans un angle $\Gamma = \left\{ z\in U \mid \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\}$, $\alpha > 1$ on a

$$\frac{|1-f(z)|}{|1-z|} \le \frac{1-|f(z)|^2}{(1+|z|)|1-f(z)|}\frac{|1-z|}{1-|z|}B = \frac{1+|f(z)|}{1+|z|}\frac{|1-z|}{1-|z|}B \le 2\alpha B.$$

Donc $\frac{1-f(z)}{1-z}$ est bornée et analytique dans un angle Γ et en utilisant la remarque précédente on obtient

$$.\ \lim_{z\in\Gamma, z\to 1}\frac{1-f(z)}{1-z} = B \text{ et } \lim_{z\in\Gamma, z\to 1} f'(z) = B$$

pour tout angle Γ.

Corollaire. Soit $w(z)$ analytique dans le disque unité U, telle que $w^{(k)}(0)=0$ pour tout $0\le k\le n$. Soit $z_0\in U$ tel que $|w(z)|<|w(z_0)|$ pour tout $|z|<|z_0|$. Alors

$$k = \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}$$

est réel et $k\ge n$.

Démonstration.

Le résultat est une conséquence directe du théorème de Julia. Soit $q(z)$ analytique dans U et dans un voisinage de $z=1$. On suppose que $|q(z)|<1$ dans U et que $q(1)=1$. Alors en utilisant le lemme de Julia

$$\frac{|1-q(z)|^2}{1-|q(z)|^2} \leq q'(1)\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$

En particulier, lorsque $q(0)=0$, $q'(1)$ est réel et $q'(1)\geq 1$.

On prend

$$q(z)=\frac{w(z_0 z)}{w(z_0)z^{n-1}}$$

et en calculant la première dérivée on obtient

$$q'(z)=\frac{z_0 z w'(z_0 z)-(n-1)w(z_0 z)}{w(z_0)z^n}.$$

Il s'ensuit que

$$q'(1)=\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}-(n-1)\geq 1$$

donc $k \geq n$.

Chapitre 2
Applications du lemme de Jack

1. Le théorème de Jack

Dans cette section on présente un théorème publié par I. S. Jack [10] dans lequel on trouve une relation entre la convexité d'une fonction complexe et la propriété d'être étoilée. Jack inventa son fameux lemme précisément pour obtenir ce résultat. La fonction

$$f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$$

régulière dans le disque unité U est étoilée d'ordre α ($0 \leq \alpha < 1$) si

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq \alpha\,,\ |z| < 1$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $z_0 \in U$ tel que

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right] < \alpha + \varepsilon\,.$$

On dit que $f(z)$ est convexe d'ordre α si

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq \alpha\,,\ |z| < 1$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $z_0 \in U$ tel que

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right] < \alpha + \varepsilon\,.$$

Le lecteur trouvera dans [12] des informations pertinentes concernant ces fonctions. Nous reproduirons maintenant la preuve de Jack :

Théorème. Soit $f(z)$ convexe d'ordre α ; alors $f(z)$ est étoilée d'ordre $\beta(\alpha)$, où

$$\beta(\alpha) \geq \frac{2\alpha - 1 + \sqrt{9 - 4\alpha + \alpha^2}}{4}$$

Démonstration.

Pour faciliter les calculs on peut énoncer le théorème de la façon suivante: si $f(z)$ est convexe d'ordre

$$\alpha_1 = \frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2(\alpha+1)}$$

alors elle est étoilée d'ordre au moins

$$\beta_1 \geq \frac{2\alpha_1 - 1 + \sqrt{9 - 4\alpha_1 + \alpha_1^{\,2}}}{4} = \frac{\alpha+1}{2}.$$

Soit la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1-\alpha z}{1-z}.$$

Si on écrit explicitement $z = x + iy$, on obtient pour $|z| = 1$

$$\varphi(z) = \frac{1-\alpha(x+iy)}{(1-x)-iy} = \frac{[1-\alpha(x+iy)][(1-x)+iy]}{(1-x)^2+y^2} = \frac{(1-x)(1+\alpha)+iy(1-\alpha)}{2(1-x)} =$$
$$= \frac{1+\alpha}{2} + i\frac{y(1-\alpha)}{2(1-x)}$$

on voit bien que $\varphi(z)$ transforme le disque unité U en demi-plan à droite de la ligne $\operatorname{Re} z = \frac{1+\alpha}{2}$. Maintenant si on définit la fonction

$$h(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}$$

on obtient immédiatement le résultat si on peut démontrer que $h(z)$ est subordonnée à la fonction $\varphi(z)$ ce qui est équivalent à dire que $|w(z)| < 1$, $|z| < 1$. On écrit donc

$$h(z)f(z) = zf'(z)$$

et, en dérivant, on obtient

$$h'(z)f(z) + h(z)f'(z) = f'(z) + zf''(z)$$

et ensuite

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{h'(z)f(z)}{f'(z)}+h(z)=\frac{zh'(z)f(z)}{zf'(z)}+h(z)=\frac{zh'(z)}{h(z)}+h(z)=$$
$$=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}+\frac{z}{h(z)}\frac{w'(z)[1-\alpha w(z)]-\alpha w'(z)[1-w(z)]}{[1-w(z)]^2}=$$
$$=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}+\frac{zw'(z)}{1-w(z)}-\frac{\alpha zw'(z)}{1-\alpha w(z)}.$$

Soit $z_0\in U$, $|z_0|=r$, tel que $|w(z_0)|=\max_{|z|=r}|w(z)|$. En appliquant le lemme de Jack on a que

$$z_0w'(z_0)=kw(z_0),\ k\in\mathbf{R},\ k\geq 1.$$

Il s'ensuit que

$$1+\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}=\frac{1-\alpha w(z_0)}{1-w(z_0)}+\frac{z_0w'(z_0)}{1-w(z_0)}-\frac{\alpha z_0w'(z_0)}{1-\alpha w(z_0)}=$$
$$=\frac{1-\alpha w(z_0)}{1-w(z_0)}+\frac{kw(z_0)}{1-w(z_0)}-\frac{k\alpha w(z_0)}{1-\alpha w(z_0)}.$$

Si on suppose que pour un certain $r<1$ $|w(z_0)|=1,\ w(z_0)\neq 1$, alors

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1-\alpha w(z_0)}{1-w(z_0)}\right]=\frac{\alpha+1}{2},$$
$$\mathrm{Re}\left[\frac{kw(z_0)}{1-w(z_0)}\right]=\mathrm{Re}\left[k\frac{1-1+w(z_0)}{1-w(z_0)}\right]=\mathrm{Re}\left[k\frac{1}{1-w(z_0)}\right]+\mathrm{Re}(-k)=\frac{k}{2}-k=-\frac{k}{2},$$
$$\mathrm{Re}\left[\frac{k\alpha w(z_0)}{1-\alpha w(z_0)}\right]=\mathrm{Re}\left[k\frac{1-1+\alpha w(z_0)}{1-\alpha w(z_0)}\right]=\mathrm{Re}\left[k\frac{-1}{1-\alpha w(z_0)}\right]+\mathrm{Re}\left[k\frac{1+\alpha w(z_0)}{1-\alpha w(z_0)}\right]\geq$$
$$\geq -\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Re}\left[1+\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}\right]\leq\frac{\alpha+1}{2}-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}-\frac{k}{2}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=\frac{\alpha+1}{2}-\frac{k}{2}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\leq\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=$$
$$=\frac{\alpha^2+2\alpha+1-1+\alpha}{2(1+\alpha)}=\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(1+\alpha)}$$

ce qui contredit le fait que $f(z)$ soit convexe d'ordre $\alpha_1=\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)}$. Donc $|w(z)|<1$, $|z|<1$ et $h(z)$ est subordonnée à la fonction $\varphi(z)$.

2. Applications de Miller et Mocanu

Dans ce sous-chapitre on présente quatre théorèmes publiés par Miller et Mocanu [11]. Plusieurs résultats similaires peuvent aussi être trouvés dans leur livre [12] plus récent. Ces théorèmes sont des conséquences directes du lemme de Jack.

Définition. Soient $r = r_1 + r_2 i$, $s = s_1 + s_2 i$, et $t = t_1 + t_2 i$. On définit $\Psi_n(a)$, où n est un nombre entier positif et a un nombre complexe tel que $\operatorname{Re} a > 0$, comme étant l'ensemble de fonctions $\psi(r,s,t): \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $\psi(r,s,t)$ est continue dans un domaine D de $\mathbf{C}^3$,

b) $(a,0,0) \in D$ et $\operatorname{Re}\psi(a,0,0) > 0$,

c) $\operatorname{Re}\psi(r_2 i, s_1, t_1 + t_2 i) \le 0$ lorsque $\psi(r_2 i, s_1, t_1 + t_2 i) \in D$, $s_1 \le -\dfrac{n|a - r_2 i|^2}{2\operatorname{Re} a}$ et $s_1 + t_1 \le 0$

Théorème. Soit $\psi \in \Psi_n(a)$ continue dans D et soit $p(z) = a + p_n z^n + p_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ une fonction régulière dans U telle que $p(z) \not\equiv a$ et $n \ge 1$. Si $(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)) \in D$ lorsque $z \in U$ et si $\operatorname{Re}\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)) > 0$ lorsque $z \in U$ alors $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour tout $z \in U$.

Démonstration.

On suppose qu'il existe un point

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in U,\ 0 < r_0 < 1$$

tel que

$$0 = \operatorname{Re} p(z) = \min_{|z| \le r_0} \operatorname{Re} p(z).$$

Alors on obtient [11, p298]

$$z_0 p'(z_0) \le -\frac{n|a - p(z_0)|^2}{2\operatorname{Re}[a - p(z_0)]}$$

et

$$\operatorname{Re} z_0^{\,2} p''(z_0) + z_0 p'(z_0) \le 0.$$

En utilisant la partie (c) de la définition de $\Psi_n(a)$ on doit avoir

$$\operatorname{Re}\psi\left(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)\right) \leq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse, donc

$$\operatorname{Re} p(z) > 0 \text{ pour tout } z \in U.$$

Théorème. Soit $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ régulière dans U. Alors

a) $\inf\limits_{z\in U} \operatorname{Re}\left[\dfrac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right] \geq 0$ implique que $\inf\limits_{z\in U} \operatorname{Re}\left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq \dfrac{1}{2}$,

b) $\inf\limits_{z\in U} \operatorname{Re}\left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq \dfrac{1}{2}$ implique que $\inf\limits_{z\in U} \operatorname{Re}\left[\dfrac{f(z)}{z}\right] \geq \dfrac{1}{2}$,

et ces bornes sont les meilleures possibles.

Démonstration.

a) Soit

$$p(z) = \frac{2zf'(z)}{f(z)} - 1.$$

Alors $p(z)$ est régulière dans U, $p(0) = 1$, $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = \dfrac{p(z)+1}{2}$ et

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 = \frac{p(z)+1}{2} + \frac{zp'(z)}{p(z)+1} = \psi\left(p(z), zp'(z)\right)$$

où

$$\psi(r,s) = \frac{r+1}{2} + \frac{s}{r+1}.$$

Si on prend $n = 1$ et $D = (\mathbf{C} \setminus \{-1\}) \times \mathbf{C}^2$ dans la définition de $\Psi_n(a)$ alors $\psi \in \Psi_1$ et on a

$$\operatorname{Re}\psi\left(p(z), zp'(z)\right) > 0, \text{ pour tout } z \in U$$

et en utilisant le théorème précédent on doit avoir

$$\operatorname{Re} p(z) > 0, \text{ pour tout } z \in U.$$

On en conclut que

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}, \text{ si } z \in U.$$

b) Soit

$$p(z)=2\frac{f(z)}{z}-1.$$

Alors $p(z)$ est régulière dans U , $p(0)=1$ et

$$\frac{zf'(z)}{f'(z)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{zp'(z)}{p(z)+1}=\psi(p(z),zp'(z))$$

où

$$\psi(r,s)=\frac{1}{2}+\frac{s}{r+1}.$$

Si on prend $n=1$ et $D=(\mathbf{C}\setminus\{-1\})\times\mathbf{C}^2$ dans la définition de $\Psi_n(a)$ alors $\psi\in\Psi_1$ et on a

$$\operatorname{Re}\psi(p(z),zp'(z))>0, \text{ pour tout } z\in U$$

et en utilisant le théorème précédent on doit avoir

$$\operatorname{Re}p(z)>0, \text{ pour tout } z\in U.$$

On en conclut que

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2},\quad z\in U.$$

Pour prouver que $\frac{1}{2}$ est la meilleure borne inférieure possible, on considère la fonction

$$f(z)=\frac{z}{1+z}$$

et on obtient

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{1+z}.$$

Puisque

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2} \text{ pour } |z|=1,\ z\neq-1$$

on en déduit que la borne donnée est la meilleure possible.

Théorème. Soient $M(z)$ et $N(z)$ régulières dans U telles que $M(0)=N(0)=0$, et soit γ réel. Si $N(U)$ est étoilé par rapport à l'origine alors

a) $\operatorname{Re}\dfrac{M'(z)}{N'(z)}>\gamma$, $z\in U$, implique $\operatorname{Re}\dfrac{M(z)}{N(z)}>\gamma$, $z\in U$,

b) $\operatorname{Re}\dfrac{M'(z)}{N'(z)}<\gamma$, $z\in U$, implique $\operatorname{Re}\dfrac{M(z)}{N(z)}<\gamma$, $z\in U$.

Démonstration.

a) On définit la fonction

$$p(z)=\frac{M(z)}{N(z)}-\gamma.$$

Alors

$$p(0)=\frac{M(0)}{N(0)}-\gamma=\frac{M'(0)}{N'(0)}-\gamma$$

et il en découle que

$$\operatorname{Re} p(0)=\operatorname{Re}\frac{M(0)}{N(0)}-\gamma=\operatorname{Re}\frac{M'(0)}{N'(0)}-\gamma>0.$$

Puisque $N(z)$ est étoilé par rapport à $z=0$, $z\in U$, et une fonction f est étoilée par rapport a l'origine si et seulement si $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ et $\operatorname{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>0$, $z\in U$, on a que $p(z)$ est une fonction entière.

Ensuite on définit $\alpha(z)$ telle que

$$\frac{1}{\alpha(z)}=\frac{zN'(z)}{N(z)}$$

ayant la propriété que

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\alpha(z)}>0 \text{ et } \operatorname{Re}\alpha(z)>0,\ z\in U,$$

et on écrit

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}-\gamma=\frac{M'(z)N(z)}{N'(z)N(z)}-\gamma=$$
$$=\frac{M'(z)N(z)-M(z)N'(z)+M(z)N'(z)}{N'(z)N(z)}-\gamma=$$
$$=p(z)+\frac{N(z)}{N'(z)}p'(z)=$$
$$=p(z)+\alpha(z)zp'(z)$$

donc on peut écrire

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}-\gamma=\psi(p(z),zp'(z))$$

où

$$\psi(r,s)=r+\alpha s\,.$$

Alors

$$\operatorname{Re}\psi(p(0),0)=\operatorname{Re}p(0)>0$$

et

$$\operatorname{Re}\psi(r_2 i,s_1)\leq 0 \text{ lorsque } s_1\leq 0,$$

puisque $\operatorname{Re}\alpha>0$. Donc $\psi\in\Psi_1$ et en utilisant l'hypothèse $\operatorname{Re}\frac{M'(z)}{N'(z)}>\gamma$, $z\in U$, on conclut que

$$\operatorname{Re}\psi(p(z),zp'(z))>0\,.$$

Il s'ensuit en utilisant le premier théorème que

$$\operatorname{Re}p(z)>0,\ z\in U,$$

ou, autrement dit

$$\operatorname{Re}\frac{M(z)}{N(z)}>\gamma,\ z\in U\,.$$

b) La deuxième partie de ce théorème peut être démontrée de la même façon que la première partie en remplaçant $M(z)$ par $-M(z)$.

Théorème. Si $f(z)=z(1+a_n z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots)$, $n\geq 1$, est régulière et univalente dans U et $f(U)$ est étoilé par rapport à l'origine alors

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}} > \frac{1}{2}.$$

Démonstration.

Soit

$$p(z) = 2\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}} - 1.$$

Alors $p(z)$ est régulière dans U et en dérivant on obtient

$$p'(z) = \frac{n}{2}\frac{2\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}}}{\frac{f(z)}{z}}\frac{f'(z)z - f(z)}{z^2} = \frac{n}{2}\frac{zf'(z)}{f(z)}\frac{p(z)+1}{z} - \frac{n}{2}\frac{p(z)+1}{z}$$

donc

$$\frac{n}{2}\frac{zf'(z)}{f(z)}\frac{p(z)+1}{z} = p'(z) + \frac{n}{2}\frac{p(z)+1}{z}$$

et on a

$$\frac{n}{2}\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{zp'(z)}{p(z)+1} + \frac{n}{2} = \psi(p(z), zp'(z))$$

où

$$\psi(r,s) = \frac{s}{r+1} + \frac{n}{2}.$$

Puisque $\psi(1,0) = \frac{n}{2} > 0$ et

$$\operatorname{Re}\psi(r_2 i, s_1) = \operatorname{Re}\frac{s_1}{r_2{}^2 + 1} + \frac{n}{2} \le \frac{-n(1+r_2{}^2)}{2(1+r_2{}^2)} + \frac{n}{2} \le 0$$

lorsque $s_1 \le -n\frac{1+r_2{}^2}{2}$ on a $\psi \in \Psi_n$. Puisque $f(z)$ est régulière et univalente dans U et $f(U)$ est étoilée par rapport à l'origine $\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ et alors $\operatorname{Re}\psi(p(z), p'(z)) > 0$. En appliquant le premier théorème on a $\operatorname{Re} p(z) > 0$, le résultat cherche.

3. Application du lemme de Jack à la résolution partielle d'une conjecture de S. Miller

Théorème. Soit $w(z)=\sum_{k=N}^{\infty} a_k z^k$ une fonction analytique dans U et $N \geq 0$.

a) Si $|w(z)+zw'(z)| \leq 1,\ z \in U$, alors $|w(z)| \leq \dfrac{1}{N+1},\ z \in U$,

b) Si $|w(z)+zw'(z)+z^2 w''(z)| \leq 1,\ z \in U$ alors $|w(z)| \leq \dfrac{1}{N^2+1},\ z \in U$,

les bornes étant exactes.

Démonstration.

a) Si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $r_0 < 1$, tel que

$$w(z_0) = \max_{|z| \leq r_0} |w(z)|$$

on a par le lemme de Jack

$$z_0 w'(z_0) = m w(z_0),\ m \in \mathbf{R},\ m \geq N$$

et ensuite

$$w(z_0) + z_0 w'(z_0) = (m+1) w(z_0),$$

$$w(z_0) = \frac{w(z_0) + z_0 w'(z_0)}{m+1},$$

$$|w(z_0)| = \frac{|w(z_0) + z_0 w'(z_0)|}{m+1} \leq \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{N+1},$$

donc

$$|w(z)| \leq \frac{1}{N+1},\ z \in U.$$

Pour montrer que la borne est optimale on considère la fonction

$$w(z) = \frac{e^{i\phi}}{N+1} z^N, \phi \in \mathbf{R}$$

et on vérifie que

$$|w(z) + zw'(z)| = \left| \frac{e^{i\phi}}{N+1} z^N + \frac{N e^{i\phi}}{N+1} z^N \right| = |z^N| < 1,\ |z| < 1.$$

Puisque

$$\sup_{z\in U}|w(z)| = \frac{1}{N+1}$$

la borne est la meilleure possible.

b) Si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $r_0 < 1$, tel que

$$w(z_0) = \max_{|z|\le r_0}|w(z)|$$

on a par le lemme de Jack (version de Miller et Mocanu)

$$\left|w(z_0) + z_0 w'(z_0) + z_0{}^2 w''(z_0)\right| = \left|w(z_0)\left\{1 + \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}\left[1 + \frac{z_0 w''(z_0)}{w'(z_0)}\right]\right\}\right| =$$

$$= \left|w(z_0)\left\{1 + m\left[1 + \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}\right]\right\}\right| \ge$$

$$\ge |w(z_0)|\left|1 + m\,\mathrm{Re}\left[1 + \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}\right]\right| \ge |w(z_0)|(1+m^2)$$

et alors

$$|w(z_0)| = \frac{\left|w(z_0) + z_0 w'(z_0) + z_0{}^2 w''(z_0)\right|}{m^2+1} \le \frac{1}{m^2+1} \le \frac{1}{N^2+1},$$

donc

$$|w(z)| \le \frac{1}{N^2+1},\ z \in U.$$

Pour montrer que la relation est optimale on considère la fonction

$$w(z) = \frac{e^{i\phi}}{N^2+1} z^N$$

et on vérifie que

$$\left|w(z) + zw'(z) + z^2 w''(z)\right| = \left|\frac{e^{i\phi}}{N^2+1} z^N + \frac{Ne^{i\phi}}{N^2+1} z^N + \frac{N(N-1)e^{i\phi}}{N^2+1} z^N\right| = \left|z^N\right| < 1,\ |z| < 1.$$

Puisque

$$\sup_{z\in U}|w(z)| = \frac{1}{N^2+1}$$

cette borne est la meilleure possible.

Ces deux résultats sont en fait des cas particuliers d'une conjecture due à Sanford Miller et ensuite généralisée (et résolue!) par Goldstein, Hall, Sheil-Small et Smith [7]. Les moyens mis en œuvre pour la résolution de cette conjecture impliquent cependant des résultats plus profonds et généraux que le lemme de Jack.

4.Application de Hallenbeck et Ruscheweyh

Dans cette section on présente une application du lemme de Jack due à D. J. Hallenbeck et Stephan Ruscheweyh [8]. On dit qu'une fonction $f \in H(U)$ est subordonnée à une fonction univalente $F \in H(U)$, on écrit cela $f(z) \prec F(z)$, si $f(z) = F(w(z))$ avec $w \in H(U)$ et $|w(z)| \leq |z|, z \in U$.

Lemme. Soit $F(z)$ une fonction analytique, convexe et univalente dans le disque ouvert unité U telle que $F(0) = 1$. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans U telle que $f(0) = 1$ et $f(z) \prec F(z)$ dans U. Alors pour tout $\gamma \neq 0$, $\operatorname{Re}\gamma \geq 0$ on a $g(z) \prec F(z)$ où

$$g(z) = \gamma z^{-\gamma} \int_0^z \tau^{\gamma-1} f(\tau) d\tau .$$

Démonstration.

$f(z)$ étant analytique dans U on peut écrire:

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, z \in U$$

et ensuite

$$\begin{aligned} g(z) &= \gamma z^{-\gamma} \int_0^z \tau^{r-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau^k \right) d\tau = \\ &= \gamma z^{-\gamma} \int_0^z \left(\tau^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau^{k+\gamma-1} \right) d\tau = \\ &= \gamma z^{-\gamma} \left(\frac{z^r}{\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^{k+\gamma}}{k+\gamma} \right) = \\ &= \gamma z^{-\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+\gamma}}{k+\gamma} \right) * \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) = \\ &= \gamma z^{-\gamma} \int_0^z \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tau^{k+\gamma-1} \right) d\tau * \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) = \\ &= h(z) * f(z) \end{aligned}$$

où $*$ dénote le produit d'Hadamard des fonctions *h* et *f*. Ici

$$h(z)=\gamma z^{-\gamma}\int_0^z\left(\sum_{k=0}^{\infty}\tau^{k+\gamma-1}\right)d\tau=\gamma z^{-\gamma}\int_0^z\frac{\tau^{\gamma-1}}{1-\tau}d\tau$$

et

$$h(0)=\left[\gamma z^{-\gamma}\int_0^z\left(\sum_{k=0}^{\infty}\tau^{k+\gamma-1}\right)d\tau\right]_{z=0}=\left(\gamma z^{-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+\gamma}}{k+\gamma}\right)_{z=0}=1.$$

Soit $w(z)$ une fonction méromorphe dans U telle que

$$h(z)=\frac{1}{1-w(z)}.$$

Alors $w(z)$ sera analytique dans le disque D_R ou $R=\min\{|z_k|:h(z_k)=0\}$. Soit z^* un point tel que $|z^*|=R$ et $h(z^*)=0$. Alors z^* est un pôle de $w(z)$ et donc il existe un voisinage de z^* dans lequel $w(z)>1$. Il suit que l'on peut trouver un point z_0 tel que $|z_0|<R$ $w(z_0)=1$ et $w(z_0)\leq 1$ pour tout $|z|\leq|z_0|$. En dérivant $h(z)$ on obtient

$$h'(z)=\frac{w'(z)}{[1-w(z)]^2}$$

d'un côté et

$$h'(z)=-\gamma^2 z^{-(\gamma+1)}\int_0^z\frac{\tau^{\gamma-1}}{1-\tau}d\tau+\gamma z^{-\gamma}\frac{z^{\gamma-1}}{1-z}=-\frac{\gamma}{z}h(z)+\frac{\gamma}{z(1-z)}$$

de l'autre côté. Donc

$$-\frac{\gamma}{z}h(z)+\frac{\gamma}{z(1-z)}=\frac{w'(z)}{[1-w(z)]^2}$$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{z}{\gamma}\frac{\gamma}{z}\frac{1}{1-w(z)}+\frac{z}{\gamma}\frac{w'(z)}{[1-w(z)]^2}$$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-w(z)}+\frac{1}{\gamma}\frac{zw'(z)}{w(z)}\frac{w(z)}{[1-w(z)]^2}.$$

Puisque la fonction de Köbe envoie le cercle unité ∂U sur le segment de droite réelle $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$ et $|w(z_0)|=1$ on a que

$$\frac{w(z_0)}{[1-w(z_0)]^2}\in\mathbf{R},\text{ et }\frac{w(z_0)}{[1-w(z_0)]^2}\leq-\frac{1}{4}.$$

En utilisant le lemme de Jack on a aussi que

$$\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \in \mathbf{R}, \text{ et } \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \geq 1.$$

Donc

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \frac{w(z_0)}{[1-w(z_0)]^2} \leq 0$$

et comme

$$\operatorname{Re} \frac{1}{1-w(z_0)} = \operatorname{Re} \frac{1}{1-\cos\theta - i\sin\theta} = \operatorname{Re} \frac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

on déduit que $\operatorname{Re} \frac{1}{1-z_0} \leq \frac{1}{2}$. Il en découle que $|z_0| \geq 1$ donc $w(U) \subset U$. Puisque $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ envoie le disque unité U dans le demi-plan $\operatorname{Re} \varsigma \geq 1/2$ on a que $\operatorname{Re} \frac{1}{1-w(z)} \geq 1/2, \forall z \in U$, donc $\operatorname{Re} h(z) \geq 1/2$. Par conséquence, en utilisant la formule de Herglotz, il existe une mesure de probabilité $\mu(\theta)$ telle que

$$h(z) = \int_0^{2\pi} \frac{du(\theta)}{1-ze^{-i\theta}} \text{ et } g(z) = \int_0^{2\pi} f\left(ze^{-i\theta}\right) d\mu(\theta),$$

ce qui implique le résultat.

Chapitre 3

Extension du lemme de Jack

Dans ce chapitre on présente une extension nouvelle du lemme de Jack pour les polynômes de degré fixe. Les résultats de ce chapitre sont nouveaux et feront ultérieurement l'objet d'une publication.

Soit P_n l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients complexes. Soit R l'ensemble des fonctions holomorphes F dans le disque unité U telles que $F(0)=1$ et $\operatorname{Re} F(z) > 1/2$ si $z \in U$. Pour $q \in P_{n-1} \cap R$, on pose $\widetilde{q}(z) = z^n \overline{q}\left(1/\overline{z}\right)$ et on remarque que $\widetilde{q} \in P_n$, $q(0)=0$ et $\widetilde{q}(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots$. Dans ce qui suit on démontre le théorème suivant:

Théorème. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $z \in \partial U$ tels que, étant donnés $p \in P_n$ non constant et $q \in P_{n-1} \cap R$,

$$\left|p(\varsigma) * \left[q(\varsigma) + e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)\right]\right|_{\varsigma = z} = \max_{\varsigma \in U}\left|p(\varsigma)\right|.$$

Alors

$$p(z) * \widetilde{q}(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad e^{-i\theta}\frac{p(z) * q(z)}{p(z) * \widetilde{q}(z)} \geq 0.$$

L'égalité ne peut tenir que si p est un monôme de degré n.

Démonstration.

Il suit d'un théorème de Ruscheweyh [15, p.128] que

$$\left|p(\varsigma) * q(\varsigma)\right| + \left|p(\varsigma) * \widetilde{q}(\varsigma)\right| \leq \max_{z \in U}\left|p(z)\right|, \ |\varsigma| \leq 1.$$

D'après les hypothèses énoncées plus haut

$$\begin{aligned}\max_{\varsigma \in U}\left|p(\varsigma)\right| &= \left|p(z) * \left[q(z) + e^{i\theta}\widetilde{q}(z)\right]\right| \\ &\leq \left|p(z) * q(z)\right| + \left|p(z) * \widetilde{q}(z)\right| \\ &\leq \max_{\varsigma \in U}\left|p(\varsigma)\right|,\end{aligned}$$

d'où

$$\max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)| = \left|p(z)*q(z)+e^{i\theta}p(z)*\tilde{q}(z)\right| = |p(z)*q(z)|+|p(z)*\tilde{q}(z)|.$$

On suppose maintenant que $p(z)*\tilde{q}(z)=0$. Alors

$$\max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)*q(\varsigma)| = |p(z)*q(z)| = \max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)|$$

Mais un résultat de Fournier et Lesage [5, Lemme 5] dit que cela est possible que si le polynôme $p(\varsigma)$ est constant, ce qui contredit l'hypothèse du théorème. Il suit donc que

$$p(z)*\tilde{q}(z)\neq 0$$

et que

$$\left|1+e^{-i\theta}\frac{p(z)*q(z)}{p(z)*\tilde{q}(z)}\right| = 1+\left|\frac{p(z)*q(z)}{p(z)*\tilde{q}(z)}\right|.$$

Par conséquent

$$e^{-i\theta}\frac{p(z)*q(z)}{p(z)*\tilde{q}(z)}\geq 0.$$

Si on suppose maintenant que $\dfrac{p(z)*q(z)}{p(z)*\tilde{q}(z)}=0$, alors on obtient évidement que $p(z)*q(z)=0$ et ainsi

$$|p(z)*\tilde{q}(z)| = \max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)*\tilde{q}(\varsigma)| = \max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)|.$$

Mais comme

$$\widetilde{[\tilde{p}(z)*q(z)]} = p(z)*\tilde{q}(z) \text{ et } \max_{\varsigma\in U}|\tilde{p}(\varsigma)| = \max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)|,\ p\in P_n,$$

on a

$$\max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)*\tilde{q}(\varsigma)| = \max_{\varsigma\in U}|\tilde{p}(\varsigma)*q(\varsigma)| = \max_{\varsigma\in U}|\tilde{p}(\varsigma)|.$$

Il suit du même résultat de Fournier et Lesage que $\tilde{p}(\varsigma)$ est constant, c'est-à-dire que $p(\varsigma)$ est un monôme de degré n.

Remarque. Ce théorème contient le lemme de Jack pour les polynômes. En effet il est bien connu [14, p. 508] que

$$q(\varsigma)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}\varsigma^{k}\in P_{n-1}\cap R$$

et on peut calculer

$$\tilde{q}(\varsigma)=\varsigma^{n}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}\frac{1}{\varsigma^{k}}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}\varsigma^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\varsigma^{k};$$

ainsi

$$q(\varsigma)+\tilde{q}(\varsigma)=\sum_{k=0}^{n}\varsigma^{k}.$$

L'énoncé de notre théorème sera alors, avec $\theta=0$,

$$\left|p(\varsigma)*[q(\varsigma)+\tilde{q}(\varsigma)]\right|_{\varsigma=z}=|p(z)|=\max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)|>0$$

implique

$$0\le\frac{p(z)*q(z)}{p(z)*\tilde{q}(z)}=\frac{zp'(z)}{np(z)}\le 1$$

avec égalité si et seulement si respectivement $p(\varsigma)$ est constant ou $p(\varsigma)$ est un monôme de degré n.

Remarque. Les polynômes de la forme

$$g_n(z)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\alpha}{2(k+\alpha)}\varsigma^{k}$$

appartiennent a $P_{n-1}\cap R$ pour $-1<\alpha\le 4{,}567\ldots$. Ceci est un résultat dû à Young-Rogosinski-Szegő-Gasper [1]. Le théorème présenté plus haut peut dans ce cas être énoncé de la façon suivante:

Soit $p(\varsigma)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varsigma^{k}\in P_n$ un polynôme non constant tel que

$$\left|a_0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+\alpha}+\frac{e^{i\theta}}{n-k+\alpha}\right)\frac{1+\alpha}{2}a_k z^{k}+a_n z^{n}\right|=\max_{\varsigma\in U}|p(\varsigma)|$$

pour certains $z\in\partial U$, $\theta\in\mathbf{R}$ et α « admissible ». Alors

a) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\alpha}{2(n-k+\alpha)}a_k z^{k}+a_n z^{n}\neq 0$,

b) $$e^{-i\theta}\frac{a_0+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\alpha}{2(k+\alpha)}a_k z^k + a_n z^n}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\alpha}{2(n-k+\alpha)}a_k z^k + a_n z^n} \geq 0$$ avec égalité si et seulement si $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

Remarque. On peut montrer que le lemme de Jack « polynomial » implique le lemme de Jack plus général pour les fonctions holomorphes et même une version légèrement améliorée du lemme de Jack.

Soit d'abord $f(\varsigma) \in H(\overline{U})$ dont on suppose que, pour un $\theta \in \mathbf{R}$,

$$|f(\varsigma)| < |f(e^{i\theta})|, \ \forall \varsigma \in \overline{U} \setminus \{e^{i\theta}\}.$$

Il existe alors une suite $\{p_n\}$ de polynômes tels que

$$p_n(\varsigma) \underset{n\to\infty}{\to} f(\varsigma), \text{ uniformément sur } |\varsigma| \leq 1+\varepsilon,$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Soit en particulier

$$|p_n(e^{i\theta_n})| = \max_{\varsigma\in U}|p_n(\varsigma)|$$

où on suppose sans perte de généralité que $\theta_n \underset{n\to\infty}{\to} \widetilde{\theta}$. Alors

$$|f(e^{i\theta})| = \lim_{n\to\infty}|p_n(e^{i\theta})| \leq \lim_{n\to\infty}|p_n(e^{i\theta_n})| = |f(e^{i\widetilde{\theta}})|.$$

Il suit de l'hypothèse sur $f(\varsigma)$ que $e^{i\theta} = e^{i\widetilde{\theta}}$ et par conséquent

$$0 \leq e^{i\theta_n}\frac{p_n'(e^{i\theta_n})}{p_n(e^{i\theta_n})} \underset{n\to\infty}{\to} e^{i\theta}\frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}.$$

Soit maintenant $f(\varsigma) \in H(\overline{U})$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $|f(e^{i\theta})| = \max_{\varsigma\in U}|f(\varsigma)|$. On peut facilement montrer que ou bien $f(\varsigma)$ est un multiple d'un produit de Blaschke fini ou bien il n'existe qu'un nombre fini de points sur ∂U où $f(\varsigma)$ atteint son module maximum. On peut donc géométriquement considérer la situation suivante :

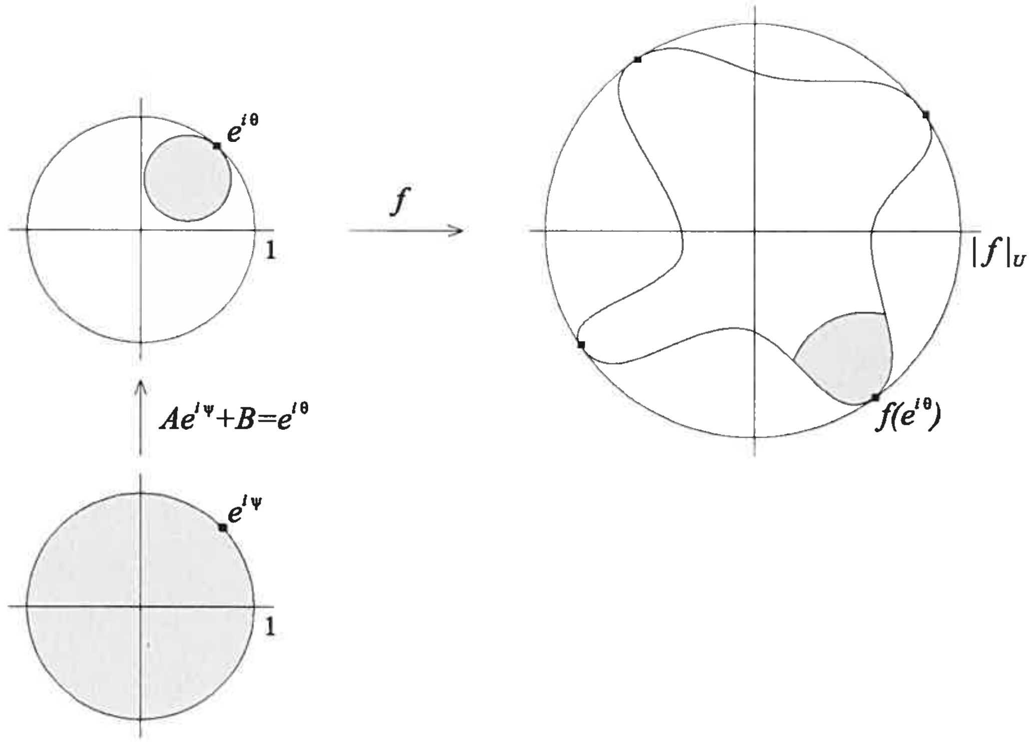

Figure 1

Donc une fonction $f_*(\varsigma) = f(A\varsigma + B)$ est du type décrit plus haut avec $\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| = \max_{\varsigma\in U}|f(\varsigma)|$. Ainsi

$$0 \le e^{i\psi}\frac{f_*'\left(e^{i\psi}\right)}{f_*\left(e^{i\psi}\right)} = Ae^{i\psi}\frac{f'\left(Ae^{i\psi}+B\right)}{f\left(Ae^{i\psi}+B\right)} = e^{i\theta}\frac{f'\left(e^{i\theta}\right)}{f\left(e^{i\theta}\right)}\frac{Ae^{i\psi}}{Ae^{i\psi}+B}.$$

On remarque maintenant que

$$\left|Ae^{i\psi}+B\right| = |A| + |B| = 1$$

donc

$$Arg\left(Ae^{i\psi}\right) = Arg\left(Ae^{i\psi}+B\right) = Arg(B) = \theta$$

et alors

$$0 \le e^{i\theta}\frac{f'\left(e^{i\theta}\right)}{f\left(e^{i\theta}\right)}.$$

Finalement soit $f \in H\left(U \cup \left\{e^{i\theta}\right\}\right)$ avec $\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| = \max_{\varsigma\in U}|f(\varsigma)|$

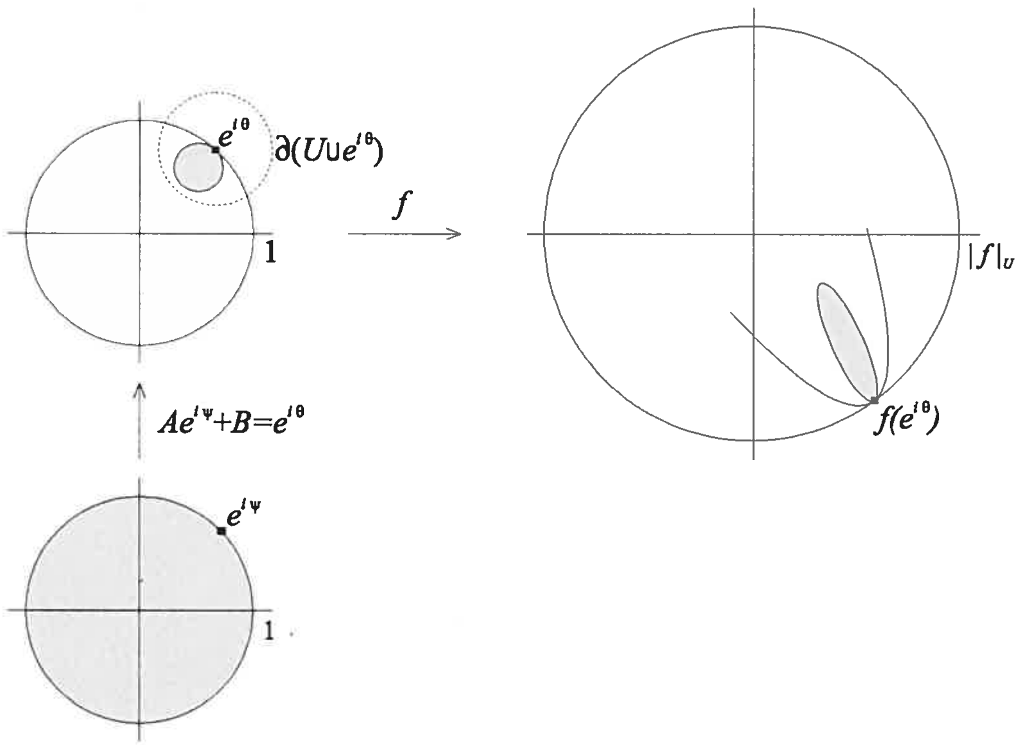

Figure 2

et $f(A\varsigma + B)$ est comme dans le cas précédent.

Remarque. En ce qui concerne l'extension du lemme de Jack, il conviendrait d'établir qu'il existe « assez » de polynômes $q \in P_{n-1} \cap R$ et de polynômes p non-triviaux tels que $\left|p(\varsigma) * \left[q(\varsigma) + e^{i\theta}\tilde{q}(\varsigma)\right]\right|_{\varsigma=z} = \max_{\varsigma \in U}|p(\varsigma)|$ car autrement cette extension n'aurait pas vraiment de sens. Par « polynômes non-triviaux » on veut dire des polynômes p pour lesquels l'égalité plus haut tient et qui ne sont pas de la forme $p(\varsigma) \equiv A\varsigma^n + B$ (pour ces polynômes-ci l'égalité tient pour tout choix de $q \in P_{n-1} \cap R$). Il est connu [4, Théorème 1] aussi que la représentation

$$q(\varsigma) + e^{i\theta}\tilde{q}(\varsigma) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{l_j}{1 - e^{i\frac{\theta}{n}} w_j \varsigma} + o(\varsigma^n)$$

(ici $o(\varsigma^n)$ est une fonction du type $\varsigma^{n+1}g(\varsigma)$ avec $g \in H(U)$) est valide avec $w_j = e^{\frac{2ij\pi}{n}}$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, et $l_j = \frac{2}{n}\left[\operatorname{Re} q\left(\overline{w}_j e^{-i\frac{\theta}{n}}\right) - \frac{1}{2}\right]$, $j = 0,1,\ldots,n-1$. On sait en particulier que si $l_j > 0$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, les seuls polynômes p pour lesquels l'égalité peut tenir sont les polynômes triviaux ; ceci est en particulier toujours le cas si $\inf_{|\varsigma|<1} \operatorname{Re} q(z) > \frac{1}{2}$. On sait aussi que si tous les l_j sont strictement positifs sauf possiblement un et $n > 1$, il en est de même. On remarque aussi que dans le cas extrême où tous les l_j sont nuls, sauf un, tout polynôme p est en quelque sorte extrémal (il s'agit du lemme de Jack usuel) et on peut montrer que cela ne peut arriver essentiellement qu'en choisissant $q(\varsigma) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\varsigma^k$.

En effet soit $q \in P_{n-1} \cap R$, $q(\varsigma) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varsigma^k$ avec $\operatorname{Re} q(\varsigma) > \frac{1}{2}$ si $|\varsigma| < 1$. On sait que

$$q(\varsigma) + e^{i\phi}\tilde{q}(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{1 - e^{i\frac{\phi}{n}} w_j \varsigma} + o(\varsigma^n)$$

où $\{w_j\}$ sont les racines d'ordre n de l'unité, $l_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} l_j = 1$. On voudrait savoir pour quels polynômes q on a un seul terme dans la somme de droite, i.e.,

$$q(\varsigma) + e^{i\phi}\tilde{q}(\varsigma) = \frac{1}{1 - e^{i\frac{\phi}{n}} w_j \varsigma} + o(\varsigma^n)$$

pour j et ϕ fixes. On aura alors

$$q(\overline{w}_j\varsigma) + e^{i\phi}\tilde{q}(\overline{w}_j\varsigma) = \frac{1}{1 - e^{i\frac{\phi}{n}}\varsigma} + o(\varsigma^n) = q(\overline{w}_j\varsigma) + e^{i\phi}\left(\widetilde{q(\overline{w}_j\varsigma)}\right),$$

donc on pourra supposer que $w_j = 1$ et

$$q(\varsigma) + e^{i\phi}\tilde{q}(\varsigma) = \frac{1}{1 - e^{i\frac{\phi}{n}}\varsigma} + o(\varsigma^n).$$

On vérifie aussi facilement que la condition précedente est maintenant équivalente à

$$a_k + e^{i\phi}\overline{a}_{n-k} = e^{ik\frac{\phi}{n}},$$

c'est-à-dire que

$$\left(e^{-i\frac{\phi}{n}}\right)^k a_k + \overline{\left(e^{-i\frac{\phi}{n}}\right)^{n-k} a_{n-k}} = 1$$

et on pourra aussi supposer que $\phi = 0$. Soit donc $q \in P_{n-1} \cap R$ avec $q(\varsigma) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varsigma^k$ et

$$q(\varsigma) + \widetilde{q}(\varsigma) = \frac{1}{1-\varsigma} + o(\varsigma^n).$$

Ceci est en fait équivalent à n'importe laquelle des conditions suivantes :

$$q(\varsigma) + \widetilde{q}(\varsigma) = 1 + \varsigma + \ldots + \varsigma^n,$$

$$a_k + \overline{a}_{n-k} = 1,\ 1 \le k \le n-1,$$

$$q(e^{i\phi}) + e^{in\phi}\overline{q(e^{i\phi})} = 1 + e^{i\phi} + \ldots + e^{in\phi} = \frac{1 - e^{i(n+1)\phi}}{1 - e^{i\phi}},$$

$$e^{-i\frac{n}{2}\phi} q(e^{i\phi}) + e^{i\frac{n}{2}\phi}\overline{q(e^{i\phi})} = e^{-i\frac{n}{2}\phi}\frac{1 - e^{i(n+1)\phi}}{1 - e^{i\phi}},$$

$$2\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\frac{n}{2}\phi} q(e^{i\phi})\right] = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\phi}{\sin\frac{\phi}{2}},$$

$$2\,\mathrm{Re}\left[e^{-in\varphi} q(e^{2i\varphi})\right] = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Posons $Q(\varsigma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n}\varsigma^k \in P_{n-1} \cap R$. On a

$$Q(\varsigma) + \widetilde{Q}(\varsigma) = 1 + \varsigma + \ldots + \varsigma^n,$$

$$2\,\mathrm{Re}\left[e^{-in\varphi} Q(e^{2i\varphi})\right] = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

et en particulier

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-in\varphi}\left[q(e^{2i\varphi}) - Q(e^{2i\varphi})\right]\right\} = 0.$$

Il suit de cela que

$$\mathrm{Im}\left\{ie^{-in\varphi}\left[q(e^{2i\varphi}) - Q(e^{2i\varphi})\right]\right\} = 0$$

donc le polynôme trigonométrique de degré au plus $n-2$

$$ie^{-in\varphi}\left[q\left(e^{2i\varphi}\right)-Q\left(e^{2i\varphi}\right)\right]$$

est réel et on peut l'écrire $\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ik\varphi}$ avec $\alpha_{-k}=\overline{\alpha}_k$, $0\le k\le n$. Il suit que

$$q\left(e^{2i\varphi}\right)-Q\left(e^{2i\varphi}\right)=-i\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{i(k+n)\varphi}$$

et on obtient que

$$q(\varsigma)-Q(\varsigma)=-iP(\varsigma) \text{ avec } P(\varsigma)=\varsigma^n\overline{P\left(\frac{1}{\overline{\varsigma}}\right)}.$$

Cette condition équivaut à la condition initiale car alors

$$(q\tilde{-}Q)(\varsigma)=\tilde{q}(\varsigma)-\tilde{Q}(\varsigma)=[-i\tilde{P}(\varsigma)]=\varsigma^n\overline{\left[-iP\left(\frac{1}{\overline{\varsigma}}\right)\right]}=i\varsigma^n\overline{P\left(\frac{1}{\overline{\varsigma}}\right)}=iP(\varsigma)$$

et ainsi

$$q(\varsigma)-Q(\varsigma)+\tilde{q}(\varsigma)-\tilde{Q}(\varsigma)=-iP(\varsigma)+iP(\varsigma)=0$$

$$q(\varsigma)+\tilde{q}(\varsigma)=Q(\varsigma)+\tilde{Q}(\varsigma)=1+\varsigma+\ldots+\varsigma^n.$$

On a donc

$$\varsigma^n\overline{P\left(\frac{1}{\overline{\varsigma}}\right)}=P(\varsigma),$$

$$e^{in\phi}\overline{P\left(e^{i\phi}\right)}=P\left(e^{i\phi}\right),$$

$$\cos(n\phi)\operatorname{Re}P\left(e^{i\phi}\right)+\sin(n\phi)\operatorname{Im}P\left(e^{i\phi}\right)=\operatorname{Re}P\left(e^{i\phi}\right),$$

$$\sin(n\phi)\operatorname{Im}P\left(e^{i\phi}\right)=[1-\cos(n\phi)]\operatorname{Re}P\left(e^{i\phi}\right),$$

$$2\sin\left(\frac{n\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\phi}{2}\right)\operatorname{Im}P\left(e^{i\phi}\right)=2\sin^2\left(\frac{n\phi}{2}\right)\operatorname{Re}P\left(e^{i\phi}\right),$$

$$\cos\left(\frac{n\phi}{2}\right)\operatorname{Im}P\left(e^{i\phi}\right)=\sin\left(\frac{n\phi}{2}\right)\operatorname{Re}P\left(e^{i\phi}\right).$$

En particulier si $\phi=\frac{2k\pi}{n}$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, on a $\sin\left(\frac{n\phi}{2}\right)=0$ et ainsi $\operatorname{Im}P\left(e^{i\phi}\right)=0$. En outre pour les mêmes valeurs de ϕ,

$$\operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right)-\frac{1}{2}=\operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right)-\operatorname{Re} Q\left(e^{i\phi}\right)=\operatorname{Im} P\left(e^{i\phi}\right)=0 .$$

Donc le polynôme trigonométrique $\operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right)-\frac{1}{2}$ de degré au plus $n-1$ a des zéros doubles distincts en $\phi=\frac{2k\pi}{n}$, $k=1, 2, ..., n-1$, (les zéros sont doubles car on sait que $q \in R$). Ainsi $\operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right)-\frac{1}{2}$ et $\operatorname{Re} Q\left(e^{i\phi}\right)-\frac{1}{2}$ ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. On peut en déduire que

$$\operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2}+c\left[\operatorname{Re} Q\left(e^{i\phi}\right)-\frac{1}{2}\right] \text{ où } c \geq 0 ,$$

et

$$1=q(0)=\operatorname{Re} q(0)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right) d\phi=\frac{1}{2}+c\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\left(\operatorname{Re} Q\left(e^{i\phi}\right)-\frac{1}{2}\right) d\phi\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+c\left[\operatorname{Re} Q(0)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}+\frac{c}{2}=1$$

donc $c=1$ et alors $\operatorname{Re} q\left(e^{i\phi}\right)=\operatorname{Re} Q\left(e^{i\phi}\right)$ et enfin $q(\varsigma)=Q(\varsigma)+Ki$ ou $K \in \mathbf{R}$, $|\varsigma| \leq 1$, donc $q(\varsigma)=Q(\varsigma)$.

Remarque. Considérons maintenant des entiers positifs K et N assez grands et $\theta \in \mathbf{R}$ fixé. On définit un polynôme $q(\varsigma) \in P_{(N-1)K} \subset P_{NK-1}$ par

$$2 \operatorname{Re} q(\varsigma)-1=C\left|\frac{\varsigma^{NK}-e^{-i\theta}}{\varsigma^{K}-e^{-\frac{i\theta}{N}}}\right|^{2}=C\left|\frac{\left(e^{\frac{i\theta}{NK}} \varsigma\right)^{NK}-1}{\left(e^{\frac{i\theta}{NK}} \varsigma\right)^{K}-1}\right|^{2} .$$

Ici la constante C est positive et on la choisit telle que

$$2q(0)-1=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\left[2 \operatorname{Re} q\left(e^{i\varphi}\right)-1\right] d\varphi=1$$

donc telle que $q(0)=1$. Il est clair qu'alors $q \in P_{NK-1} \cap R$. On obtient que

$$q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)=\sum_{j=0}^{NK-1}\frac{l_j}{1-e^{i\frac{\theta}{NK}}w_j\varsigma}+o(\varsigma^{NK})$$

où $w_j=e^{\frac{2ij\pi}{NK}}$, $j=0,1,...,NK-1$, et $l_j=\frac{2}{NK}\left[\operatorname{Re}q\left(\overline{w}_j e^{-i\frac{\theta}{NK}}\right)-\frac{1}{2}\right]$, $j=0,1,...,n-1$ et clairement

$$q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)=\sum_{j=0}^{K-1}\frac{\lambda_j}{1-\left(e^{i\frac{\theta}{N}}\right)^{\frac{1}{K}}w_j\varsigma}+o(\varsigma^{NK})$$

où $w_j=e^{\frac{2ij\pi}{K}}$, $j=0,1,...,K-1$, et $\lambda_j>0$, $j=0,1,...,n-1$. Cela signifie que

$$\left[q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)\right]*\left(A+B\varsigma^{NK}\right)=A+Be^{i\theta}\varsigma^{NK}$$

et aussi que

$$\left[q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)\right]*\left(\alpha+\beta\varsigma^{K}\right)=\alpha+\beta e^{\frac{i\theta}{N}}\varsigma^{K}.$$

Il est donc évidement possible de choisir des nombres complexes A,B,α,β tels que

$$\begin{aligned}&\left\|\left[q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)\right]*\left[tA+(1-t)\alpha+(1-t)\beta\varsigma^{K}+tB\varsigma^{NK}\right]\right\|_U\\&=\left|tA+(1-t)\alpha+(1-t)\beta\varsigma^{K}+tB\varsigma^{NK}\right|_U\end{aligned}$$

pour tout $t\in(0,1)$. Ceci montre que des polynômes extrémaux non triviaux existent

Il est possible de créer un exemple du même type mais avec une construction plus directe. Posons pour $n=2T$

$$q(\varsigma)=1+\frac{e^{i\varphi}}{2}\varsigma^{T}.$$

Alors $q(\varsigma)\in P_{n-1}\cap R$ et $\widetilde{q}(\varsigma)=\varsigma^{n}+\frac{e^{-i\varphi}}{2}\varsigma^{T}$ et

$$q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)=1+\frac{e^{i\varphi}+e^{i(\theta-\varphi)}}{2}\varsigma^{T}+e^{i\theta}\varsigma^{2T}$$

et si $\theta=2\varphi$ il suit que

$$q(\varsigma)+e^{i\theta}\widetilde{q}(\varsigma)=1+e^{i\varphi}\varsigma^{T}+e^{i\theta}\varsigma^{2T}$$

d'où il découle que les polynômes du type

$$\lambda\left(A + B\varsigma^{T}\right) + (1-\lambda)\left(C + D\varsigma^{2T}\right)$$

seront extrémaux en satisfaisant à la condition

$$\begin{aligned}&\left\|\left[q(\varsigma) + e^{i\theta}\tilde{q}(\varsigma)\right] * \left[\lambda\left(A + B\varsigma^{T}\right) + (1-\lambda)\left(C + D\varsigma^{2K}\right)\right]\right\|_{U} \\ &= \left|\lambda\left(A + B\varsigma^{T}\right) + (1-\lambda)\left(C + D\varsigma^{2K}\right)\right|_{U}\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Conclusion

Un but de ce mémoire était de trouver s'il existait une erreur dans la démonstration du lemme de Jack, de présenter plusieurs démonstrations des résultats soit plus faibles, soit équivalents, soit plus forts que celui du lemme de Jack et ensuite d'analyser quelques applications de ce lemme. Nous avons prouvé qu'il y avait des erreurs dans la démonstration de Jack et nous avons donné plusieurs démonstrations qui nous semblent correctes. Dans le dernier chapitre, nous avons introduit un résultat nouveau qui généralise le lemme de Jack aux polynômes de degré fixe.

Bibliographie

1. Askey, R., & Gasper, G. (1987). Inequalities for polynomials, in *The Bieberbach conjecture. Mathematical Surveys and Monographs, 21.*

2. Bak, J., & Newman, D. J. (1997). *Complex Analysis*. New York : Springer-Verlag.

3. Fournier, R. (2001). Some remarks on Jack's lemma. *Mathematica, 43(66), 1*, 43-50.

4. Fournier, R. (2004). Cases of equality for a class of bound-preserving operators over P_n. *Computational Methods and Function Theory, 4*, 183-188.

5. Fournier, R., & Lesage, F. (2006). Cases of equality for refinements of Bernstein's inequality. *Computational Methods and Function Theory, 6*, 51-58.

6. Garnett, J. B. (1981). *Bounded Analytic Functions*. New-York : Academic Press.

7. Goldstein, M., Hall, R. R., Sheil-Small, T., & Smith, H. L. (1982). Convexity preservation of inverse Euler operators and a problem of S. Miller. *Bulletin of London Mathematical Society, 14*, 537-541.

8. Hallenbeck, D. J. & Ruscheweyh, St. (1975). Subordination by convex functions. *Proceedings of the American Mathematical Society, 52*, 191-195.

9. Hayman, W. (1951). A characterisation of the maximum modulus of functions regular at the origin. *Journal d'Analyse Math., 1,* 135-154.

10. Jack, I. S. (1971). Functions starlike and convex of order α. *Journal of the London Mathematical Society (2), 3*, 469-474.

11. Miller, S. S., & Mocanu, P. T. (1978). Second order differential inequalities in the complex plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 65*, 289-305.

12. Miller, S. S., & Mocanu, P. T. (2000). *Differential Subordinations*. New-York : Marcel Dekker.

13. Pólya, G., & Szegő, G. (1972). *Problems and theorems in analysis*. New York : Springer-Verlag.

14. Rahman, Q. I., & Schmeisser, G. (2002). *Analytic Theory of Polynomials*. Oxford : Oxford University Press.

15. Ruscheweyh, St. (1981). Neighborhoods of univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society, 81, 4*, 521-527.

16. Valiron, G. (1949). *Lectures on the general theory of integral functions*. New York : Chelsea Publishing Company.

17. Valiron, G. (1954). *Fonctions analytiques*. Paris : Presses universitaires de France.