

Université de Montréal

Étude d'un système prédateur-proie avec fonction  
de réponse Holling de type III généralisée

par

Yann Lamontagne

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques

juin 2006



QA

3

L154

2006

v. 009



## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Étude d'un système prédateur-proie avec fonction  
de réponse Holling de type III généralisée**

présenté par

**Yann Lamontagne**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Marlène Frigon*

---

(président-rapporteur)

*Christiane Rousseau*

---

(directeur de recherche)

*Jacques Bélair*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*22/06/2006*

---

# SOMMAIRE

---

Dans ce mémoire on étudie le système prédateur-proie de Gause généralisé de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x))\end{aligned}$$

avec la fonction de réponse de Holling de type III généralisée

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

Le système a sept paramètres où  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $k$ ,  $m$  et  $r$  sont positifs mais un changement d'échelle permet de se ramener à 4 paramètres. On étudie le cas  $b$  positif et négatif. Le chapitre 1 présente une étude préliminaire basée sur les résultats de Coutu [C]. On enchaîne avec une étude complète de la bifurcation de Hopf dans le chapitre 2. On donne ensuite une validation numérique dans le chapitre 3. On calcule numériquement la courbe de la bifurcation de Hopf et la courbe de bifurcation de la boucle homoclinique. On conclut avec le chapitre 4 où on donne les diagrammes de bifurcation et une interprétation biologique des comportements possibles en fonction des paramètres et des conditions initiales.

**MOTS CLÉS :** Système dynamique, Système prédateur-proie, Fonction de réponse, Bifurcation, Bifurcation de Bogdanov-Takens, Bifurcation de Hopf, Cycles limites, Boucle homoclinique.

# ABSTRACT

---

In this thesis we study a generalised Gause predator-prey system of the following form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x))\end{aligned}$$

with a generalised Holling response function of type III

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

The system has seven parameters, where  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $k$ ,  $m$  and  $r$  are positive. A scaling allows to reduce to 4 parameters. We study the cases where  $b$  is positive or negative. In chapter 1 we give preliminary results which are based on the work of Coutu [C]. In chapter 2 we proceed with a complete study of Hopf bifurcation. We continue with a numerical validation in chapter 3 where we calculate the curve of the Hopf bifurcation and the curve of homoclinic bifurcation. We conclude with chapter 4 in which we give the bifurcation diagrams together with a biological interpretation of the behavior of the solution depending on the parameters and the initial conditions.

KEY WORDS : Dynamical system, Predator-prey system, Response function, Bifurcation, Bogdanov-Takens bifurcation, Hopf bifurcation, Limit cycles, Homoclinic orbit.

# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	iv
<b>Table des figures</b> .....	ix
<b>Liste des tableaux</b> .....	xiii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	2
0.1. Système de Gause généralisé.....	4
0.2. Le système étudié.....	6
0.3. Interprétation biologique de la fonction de réponse.....	7
0.3.1. Lorsque $b$ est positif.....	7
0.3.2. Lorsque $b$ est négatif.....	9
<b>Chapitre 1. Étude préliminaire</b> .....	12
1.1. Simplification du système de sept à quatre paramètres.....	12
1.2. Relations d'équivalence entre champs de vecteurs et diagramme de bifurcations.....	13
1.3. Les points singuliers et les surfaces de bifurcation des points singuliers.....	15
1.4. Type des points singuliers.....	20
1.4.1. Type de l'origine.....	21

1.4.2.	Type du point singulier $(1, 0)$ .....	21
1.4.2.1.	Type du point singulier $(1, 0)$ , si les paramètres sont au-dessus de la surface $\mathcal{S}_1$ .....	21
1.4.2.2.	Type du point singulier $(1, 0)$ , si les paramètres sont sous la surface $\mathcal{S}_1$ .....	22
1.4.2.3.	Étude du point singulier $(1, 0)$ , si les paramètres sont sur la surface $\mathcal{S}_1$ .....	22
1.4.3.	Type de points singuliers dans le premier quadrant .....	23
1.5.	Étude du point singulier double lorsque les paramètres sont sur $\mathcal{S}_d$ .....	25
1.6.	Bifurcation de Bogdanov-Takens .....	26
<b>Chapitre 2.</b>	<b>Bifurcation de Hopf</b> .....	<b>34</b>
2.1.	Introduction de la bifurcation de Hopf .....	35
2.2.	Conditions nécessaires pour une bifurcation de Hopf .....	37
2.3.	Analyse de la trace du linéarisé lorsque $\beta \geq 0$ .....	41
2.4.	Analyse de la trace du linéarisé lorsque $\beta < 0$ .....	56
2.5.	Réduction à un système polynomial .....	64
2.6.	La méthode de Lyapunov .....	68
2.7.	Simplification et analyse des constantes de Lyapunov .....	71
2.7.1.	Simplification et analyse de la constante $L_0$ de Lyapunov .....	71
2.7.2.	Simplification et analyse de la première constante de Lyapunov .....	72
2.7.3.	Simplification et analyse de la deuxième constante de Lyapunov quand la première constante de Lyapunov est nulle .....	74
2.8.	Analyse de la submersion .....	78
2.9.	Conclusion .....	81

<b>Chapitre 3. Étude et validation numérique du diagramme de bifurcations</b> .....	83
3.1. Le cas $\beta = 6$ .....	85
3.2. Le cas $\beta = -3.5$ .....	87
3.3. Condition d'existence de la boucle homoclinique dans le cas limite de perturbation singulière .....	93
3.4. Le cas $\beta = -4$ .....	98
3.5. Calcul de la boucle homoclinique de codimension 2 .....	102
3.6. Le cas $\beta = -5$ .....	104
<b>Chapitre 4. Diagrammes de bifurcations et interprétation biologique</b> .....	108
4.1. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta \geq 0$ .....	109
4.2. Diagramme de bifurcations lorsque $-2 < \beta < 0$ .....	110
4.3. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta = -2$ .....	111
4.4. Diagramme de bifurcations lorsque $-3 \leq \beta < -2$ .....	112
4.5. Diagramme de bifurcations lorsque $-4 < \beta < -3$ .....	113
4.6. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta = -4$ .....	115
4.7. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ .....	117
4.8. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	121
4.9. Diagramme de bifurcations lorsque $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	123
4.10. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta \leq -6$ .....	125
4.11. Interprétation biologique .....	128

<b>Conclusion.....</b>	<b>135</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>137</b>

## Table des figures

---

0.1	Graphe des différentes fonctions de réponse de Holling.....	6
0.2	La fonction de réponse Holling de type III généralisée lorsque $b = 0$ ou $b > 0$ .....	8
0.3	La fonction de réponse Holling de type III généralisée lorsque $b < 0$ ...	10
1.1	La fonction $p(x)$ lorsque $\beta = 0$ ou $\beta > 0$ .....	16
1.2	La fonction $p(x)$ lorsque $\beta < 0$ .....	17
1.3	Courbes de paramètres et points singuliers lorsque $\beta \geq 0$ .....	19
1.4	Courbes de paramètres et points singuliers lorsque $-1 \leq \beta < 0$ .....	19
1.5	Courbes de paramètres et points singuliers lorsque $\beta < -1$ .....	20
1.6	Comportement des trajectoires dans le voisinage de $(0, 1)$ lorsque les paramètres sont sur $\mathcal{S}_1$ et près de $\beta = -2$ .....	23
1.7	Diagramme de la bifurcation du col-noeud $(1, 0)$ de codimension 2....	24
1.8	Diagramme de la bifurcation de Bogdanov-Takens lorsque $s = 1$ .....	28
1.9	Surfaces de bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 par Coutu [C].....	32
1.10	Diagramme de bifurcation et portraits de phase dans le régions ouvertes pour la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3.....	33
2.1	La fonction $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $0 \leq \beta \leq 2$ ou $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ .....	46
2.2	La fonction $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $\beta > 2$ et $\beta \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ .....	47
2.3	Les positions relatives de $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ lorsque $0 \leq \beta \leq 2$ .....	49
2.4	Les positions relatives de $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ .....	51

2.5	Le diagramme de $\mathcal{H}$ lorsque $\beta \geq 0$ .....	56
2.6	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $-1 < \beta < 0$ .....	58
2.7	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $\beta = -1$ .....	58
2.8	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $-2 < \beta < -1$ .....	59
2.9	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $\beta = -2$ .....	60
2.10	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $-4 < \beta < -2$ .....	62
2.11	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $\beta = -4$ .....	63
2.12	$P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ et $Q(\alpha, \beta)$ lorsque $\beta < -4$ .....	64
2.13	Le diagramme de bifurcation partiel lorsque $\beta < 0$ .....	65
2.14	Le diagramme de bifurcation pour la bifurcation de Hopf lorsque $L_0 = L_1 = 0$ .....	75
2.15	Diagramme de la bifurcation de Hopf de codimension 2.....	82
3.1	Diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = 6$ ).....	85
3.2	Certains champs de vecteurs ( $\beta = 6$ ).....	87
3.3	Diagramme de bifurcations ( $\beta = -3.5$ ) numérique et topologique.....	88
3.4	Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -3.5$ )...	89
3.5	Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -3.5$ )...	90
3.6	Certains champs de vecteurs ( $\beta = -3.5$ ).....	92
3.7	Isocline $\dot{x} = 0$ .....	93
3.8	Cycle limite d'un champ de vecteurs dans le cas limite de perturbation singulière.....	94
3.9	Exemples de champs de vecteurs.....	97
3.10	Diagramme de bifurcations ( $\beta = -4$ ) numérique et topologique.....	99
3.11	Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -4$ )...	100
3.12	Certains champs de vecteurs ( $\beta = -4$ ).....	101

3.13	Diagramme des courbes $\mathcal{PS}$ , $\mathcal{H}$ et $\mathcal{BH}$ .....	103
3.14	Diagramme de bifurcations ( $\beta = -5$ ) numérique et topologique.....	105
3.15	Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -5$ ). ...	106
3.16	Quelques champs de vecteurs ( $\beta = -5$ ).....	107
4.1	Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $\beta \geq 0$ .....	109
4.2	Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $-2 < \beta < 0$ ....	110
4.3	Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $\beta = -2$ .....	111
4.4	Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $-3 \leq \beta < -2$ ..	112
4.5	Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $-4 < \beta < -3$ ..	113
4.6	Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $\beta = -4$ .....	115
4.7	Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ .....	117
4.8	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lors des bifurcations pour $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ .....	118
4.9	Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	121
4.10	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lors des bifurcations pour $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	122
4.11	Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	123
4.12	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lors des bifurcations pour $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	124
4.13	Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour $\beta \leq -6$ .....	125
4.14	Diagramme de bifurcations et portrait de phase lors des bifurcations pour $\beta \leq -6$ .....	127

4.15	Champs de vecteurs de type $\Lambda = \{REP\}$ .....	128
4.16	Champ de vecteurs de type $\Omega = \{REM\}$ .....	129
4.17	Champ de vecteurs de type $\Theta = \{RO\}$ .....	129
4.18	Champs de vecteurs de type $\Xi = \{REM, REP\}$ .....	129
4.19	Champ de vecteurs de type $\Upsilon = \{RO, REP\}$ .....	129
4.20	Champ de vecteurs de type $\Psi = \{RO, REM\}$ .....	130
4.21	Champ de vecteurs de type $\Phi = \{RO, REM, REP\}$ .....	130
4.22	Types de régimes lorsque $\beta \geq 0$ . ....	132
4.23	Types de régimes lorsque $-2 \leq \beta < 0$ . ....	132
4.24	Types de régimes lorsque $-3 \leq \beta < -2$ .....	132
4.25	Types de régimes lorsque $-4 < \beta < -3$ .....	133
4.26	Types de régimes lorsque $\beta = -4$ .....	133
4.27	Types de régimes lorsque $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ .....	133
4.28	Types de régimes lorsque $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	134
4.29	Types de régimes lorsque $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .....	134
4.30	Types de régimes lorsque $\beta \leq -6$ .....	134

## Liste des tableaux

---

0.1	Différents comportements de population.....	5
0.2	Types de fonctions de réponses de Holling.....	6
1.1	Description des courbes de bifurcation de la figure 1.9.....	32
3.1	Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = 6$ ).....	85
3.2	Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = -3.5$ ).....	90
3.3	Paramètres des exemples de champs de vecteurs.....	96
3.4	Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = -4$ ).....	98
3.5	Calculs numériques de $\mathcal{BH}_2$ .....	104
3.6	Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = -5$ ).....	106

# REMERCIEMENTS

---

J'aimerais remercier Christiane Rousseau pour le projet de recherche, les conseils, la correction, et le financement. J'aimerais aussi remercier Benoit Dionne de l'Université d'Ottawa pour m'avoir initié aux équations différentielles.

Dernièrement je remercie Émilie pour avoir relu plusieurs fois ce mémoire et mes parents Mario et Nicole et ma soeur Ève pour leur support.

# INTRODUCTION

---

On fait l'étude d'un système prédateur-proie dans le but de prédire le comportement futur des populations de prédateurs et de proies. Elle comprend

- (1) l'observation du phénomène,
- (2) la formulation du modèle mathématique,
- (3) l'analyse du modèle mathématique,
- (4) la validation du modèle, avec éventuellement reformulation du modèle, si le modèle ne suit pas les observations du phénomène,
- (5) la prédiction du phénomène à l'aide du modèle.

Les systèmes prédateur-proie sont souvent observés et formulés par des équipes multi-disciplinaires. L'analyse mathématique requiert des connaissances en analyse et/ou en analyse numérique. Depuis le modèle de Lotka-Volterra (1925,1926) il y a un plus grand intérêt pour l'étude des systèmes prédateur-proie car ils ont une dynamique riche. On raffine de plus en plus la modélisation des interactions entre les prédateurs et les proies pour y intégrer des caractéristiques propres à certaines populations de prédateurs ou de proies. L'étude mathématique théorique est souvent faite à l'aide de la théorie des bifurcations, laquelle donne le comportement de solutions de façon qualitative en fonction des paramètres du modèle et des conditions initiales. Une étude numérique est souvent donnée pour compléter là où la théorie ne prédit pas complètement le comportement des solutions. Dans ce mémoire on donne à la fois une étude théorique et une étude numérique d'un modèle.

Une des raisons principales pour étudier de tels modèles est d'être capable de prédire le comportement d'un système face à des influences externes, par exemple

la présence des êtres humains. Le comportement du système qui subit une influence peut être, en général, regroupé en deux catégories selon Bazykin [BA], soit

**comportement constant en dessous d'un certain seuil:** Un système a ce type de comportement, si son comportement ne change pas en présence d'influences externes en dessous d'un certain seuil. Si le seuil est atteint le comportement du système change.

**comportement contre-intuitif:** Ce type de comportement peut-être bien illustré par l'avertissement de Rosenzweig (1971) qui dit : On doit faire attention lorsque l'être humain essaie d'enrichir un écosystème avec l'objectif de faire croître une récolte. Il y a une chance que l'enrichissement ait un effet opposé sur l'écosystème, et entraîne la perte de la récolte. [R] Un exemple souvent cité est la remarque de Tener (1965) : Le loup peut vaincre le boeuf musqué mais lorsque le boeuf musqué est en troupeau de deux à six bêtes le loup va rarement vaincre un boeuf musqué. Le loup a encore moins de chance lorsque le troupeau est plus grand. [TJS] Dans ce cas, l'influence externe serait l'enrichissement de l'écosystème avec des boeufs musqués en vue de récolter plus de loups. Donc un comportement contre-intuitif est observé lorsque le comportement du système n'est pas ce que l'on a a priori déterminé dans une étude préliminaire du système.

Ces deux types de comportement du système lorsqu'il subit des influences externes sont présents dans le modèle étudié dans ce mémoire.

Les systèmes prédateur-proie utilisent souvent deux ou trois variables pour la modélisation. Un système peut avoir un très grand nombre d'interactions. Est-ce que le modèle peut bien prédire le comportement du phénomène ? Bazykin [BA] répond à cette question avec les trois affirmations suivantes :

- (1) Il y a de bonnes raisons de croire que le comportement d'un système dépend plus de sa non-linéarité que de son nombre de variables.

- (2) L'analyse d'un système à plusieurs variables près d'un seuil peut être étudié par un système à moins de variables.
- (3) L'étude à l'aide de deux ou trois variables semble être bien justifiée par une perspective pratique.

Bazykin [BA] énonce aussi des questions intéressantes à considérer dans l'étude d'un modèle biologique. On donne les trois plus importantes questions selon Bazykin et le modèle que l'on va étudier.

- (1) De quelle façon le modèle biologique se comporte t-il lorsqu'il n'y a pas d'influences externes? Quelles sortes de régimes existent (stationnaire, périodique, chaotique)?
- (2) De quelle manière le comportement du modèle biologique dépend-il des conditions initiales?
- (3) De quelle façon le modèle réagit-il aux influences environnementales? Quel est l'effet d'une perturbation sur un intervalle de temps sur le modèle (se matérialisant par exemple, un changement de position dans le portrait de phase)? Quel est l'effet d'une influence permanente sur le modèle (par exemple, un changement des paramètres)?

On va répondre à ces questions dans l'étude de notre modèle.

Dans les sections qui suivent on introduit le système qui est étudié dans ce mémoire.

## 0.1. SYSTÈME DE GAUSE GÉNÉRALISÉ

Le système de Gause généralisé [G], [F80] est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x) - yp(x) \\ \dot{y} &= y(-d + q(x)). \end{aligned} \tag{0.1.1}$$

où  $x$  représente la population des proies,  $y$  représente la population des prédateurs et  $d$  est le taux de décès des prédateurs. La fonction  $g(x)$  représente le

$g(x) = x(1 - x)$	Verhülst, Verhülst-Pearl, logistique [THR]
$g(x) = x(1 - x^\theta)$	Bernoulli [THR]
$g(x) = x \frac{1-x}{1+\alpha x}$	Smith, Beverton-Holt [THR]
$g(x) = x \frac{e^{\gamma(1-x)} - 1}{e^\gamma - 1}$	Ricker [THR]
$g(x) = -x \ln x$	Gompertz [THR]

TAB. 0.1. Différents comportements de population.

comportement de la population des proies en absence de prédateurs. Dans la littérature il y a plusieurs fonctions qui représentent le comportement des proies. Le tableau 0.1 donne une liste de possibilités. La fonction  $p(x)$  représente la *fonction de réponse* des prédateurs en fonction des proies. Le tableau 0.2 donne une liste de possibilités, il s'agit des fonctions de réponse de Holling. La figure 0.1 donne des graphes qualitatifs pour les types I, II, IV lorsque  $a$ ,  $b$ ,  $m$  sont positifs. La figure 0.2 donne le graphe qualitatif de type III lorsque  $a$ ,  $m$  sont positifs et  $b$  est positif ou zéro. La figure 0.3 donne le graphe qualitatif de type III lorsque  $a$ ,  $m$  sont positifs et  $b$  est négatif.

La fonction  $q(x)$  indique la croissance des prédateurs en fonction de la proportion des proies consommées par les prédateurs. En général, la fonction  $q(x)$  est

$$q(x) = cp(x) \quad (0.1.2)$$

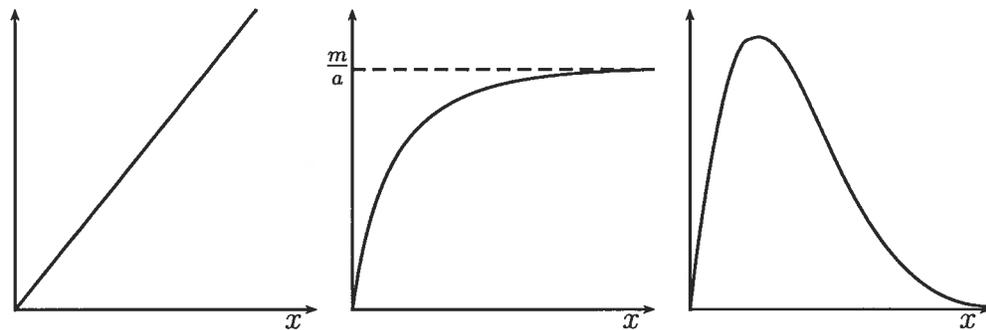
où la constante  $c$  est le ratio du nombre de proies consommées par les prédateurs sur le nombre de prédateurs nés. Dans un tel système on a linéarité en  $y$ . Il existe d'autres modèles avec comportement non-linéaire en  $y$ . Un exemple de modèle généralisé [BA] est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) - B(x, y) \\ \dot{y} &= -C(x) + D(x, y). \end{aligned} \quad (0.1.3)$$

Types	Fonctions	Référence biologique	Référence mathématique
I (Lotka-Volterra)	$p(x) = ax$	Étudié dans [H].	Étudié dans [BA].
II (Michaelis-Menten)	$p(x) = \frac{bx}{1+ax}$	Étudié dans [H].	Étudié dans [BA].
III	$p(x) = \frac{mx^2}{1+ax^2}$	Étudié dans [H].	Étudié dans [F79].
III généralisée (sigmoïde)	$p(x) = \frac{mx^2}{1+bx+ax^2}$	Étudié dans [JDTF].	Étudié partiellement pour $b < 0$ dans [C] et partiellement pour $b \geq 0$ dans [F79].
IV (Monod-Haldane simplifié)	$p(x) = \frac{mx}{1+ax^2}$	Étudié dans [SH].	Étudié dans [RX].
IV généralisée (Monod-Haldane)	$p(x) = \frac{mx}{1+bx+ax^2}$	Étudié dans [AJF].	Étudié dans [FW], [W], [RX], [ZCW].

TAB. 0.2. Types de fonctions de réponses de Holling.

Les graphes des différents  $p(x)$  apparaissent aux figures 0.1, 0.2, 0.3.



0.1(a) Type I

0.1(b) Type II

0.1(c) Type IV

FIG. 0.1. Graphe des différentes fonctions de réponse de Holling.

## 0.2. LE SYSTÈME ÉTUDIÉ

Le système étudié est le système de Gause généralisé dont la fonction  $g(x)$  est celle de l'équation logistique, soit

$$g(x) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right). \quad (0.2.1)$$

La constante  $k$  est la capacité de l'environnement à supporter les proies et  $r$  est le taux de croissance des proies lorsque la population des prédateurs est nulle. La fonction de réponse  $p(x)$  est une fonction de Holling III généralisée [BA] donnée par

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}. \quad (0.2.2)$$

où  $m$  et  $a$  sont des constantes positives et  $b$  est une constante positive ou négative. Leurs rôles respectifs dans le modèle sont discutés dans la section suivante.

### 0.3. INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE DE LA FONCTION DE RÉPONSE

#### 0.3.1. Lorsque $b$ est positif

Jost et al. ont publié en 1973 [JDFT] une étude d'un prédateur d'une espèce bactérienne et de proies protozoaires. Plus spécifiquement, la prédation de *Tetrahymena pyriformis* sur *Escherichia coli* ou *Azotobacter vinelandii* en culture continue, dans un chemostat. Le système qu'ils ont étudié est

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{\theta}(s_f - s) - \beta \frac{vbs}{L + s} \\ \dot{b} &= -\frac{1}{\theta}b + \frac{vbs}{L + s} - \alpha \frac{\mu pb^2}{(K_1 + b)(K_2 + b)} \\ \dot{p} &= -\frac{1}{\theta}p + \frac{\mu pb^2}{(K_1 + b)(K_2 + b)} \end{aligned} \quad (0.3.1)$$

où  $\theta$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $s_f$ ,  $\beta$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  sont des paramètres et  $s$ ,  $b$ ,  $p$  représentent le substrat, les proies et les prédateurs, respectivement. Ils ont essayé de modéliser les résultats obtenus à l'aide de la fonction de réponse Holling de type II. Ils ont remarqué que le modèle ne prédisait pas ce qui était observé, pour les deux raisons suivantes :

- (1) Le modèle donne des résultats erronés lorsque la densité de proie est basse. Le taux de prédation ne diminue pas assez rapidement.
- (2) Le modèle donne aussi des résultats erronés sur la quantité de substrat ( $s$ ) de la culture continue.

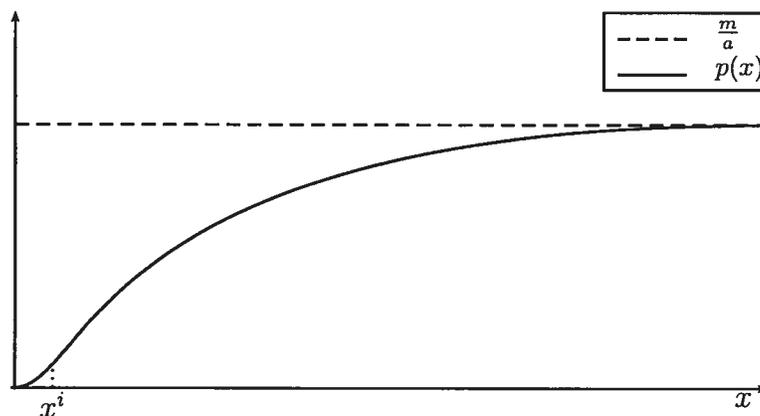


FIG. 0.2. La fonction de réponse Holling de type III généralisée lorsque  $b = 0$  ou  $b > 0$ .

L'article de Jost et al. [JDTF] suggère d'utiliser la fonction de Holling de type III généralisée. Ils dérivent la nouvelle fonction de réponse à l'aide de la fonction de réponse Holling de type II. Avec l'hypothèse que les prédateurs ont trois stades de croissance soient : "enfant", "juvénile", et "adulte", ils dérivent un nouveau modèle avec trois types de prédateurs. Ils utilisent une réduction pour revenir à un modèle avec un seul type de prédateurs, qui combine de manière globale l'information obtenue pour chacun des stades de croissance. Ils obtiennent la fonction de réponse des prédateurs suivante :

$$\frac{\mu x^2}{(K_1 + x)(K_2 + x)} \quad (0.3.2)$$

où, en général,  $K_1$  et  $K_2$  ne sont ni nécessairement positifs et ni nécessairement réels. On remarque que ceci est en fait la fonction de réponse de Holling de type III généralisée. La principale différence entre la fonction de type II et III est que l'une a une pente positive et l'autre a une pente nulle en  $x = 0$ , respectivement. Dans les deux cas, la fonction  $p(x)$  est monotone et on a une asymptote horizontale quand  $x$  est grand. Ils suggèrent aussi une façon de généraliser la fonction pour tenir compte d'un nombre arbitraire de stades pour les prédateurs. Ils énoncent que les expérimentations prèchent en faveur du nouveau modèle mais ne permettent pas de trancher définitivement en sa faveur.

### 0.3.2. Lorsque $b$ est négatif

On étudie le modèle sous l'hypothèse

$$b^2 - 4a < 0, \quad (0.3.3)$$

i.e. le dénominateur n'a pas de racine positive. On donne une interprétation biologique lorsque  $b$  est négatif. Cette interprétation utilise l'idée de la défense de groupe des proies. Cette idée est de plus en plus étudiée (voir [FW], [RX], [W], [ZCW]). Pour cette interprétation la fonction de réponse des prédateurs n'est pas monotone.

La première dérivée de la fonction de réponse de Holling de type III généralisée (0.2.2) par rapport à  $x$  est

$$p'(x) = \frac{x(bx + 2)}{(ax^2 + bx + 1)^2}. \quad (0.3.4)$$

On remarque qu'il existe deux points critiques, soient  $x_0 = 0$  et  $x_0 = -\frac{2}{b}$ . Le premier point critique est un minimum global et le deuxième est un maximum global. On continue l'analyse pour trouver les points d'inflexion, on détermine la dérivée seconde de  $p(x)$  par rapport à  $x$  :

$$p''(x) = \frac{-2(abx^3 + 3ax^2 - 1)}{(ax^2 + bx + 1)^3} \quad (0.3.5)$$

À l'aide du discriminant du numérateur par rapport à  $x$ ,

$$\Delta = 432a^2(-b^2 + 4a) \quad (0.3.6)$$

(où  $-b^2 + 4a > 0$ , voir (0.3.3)) on observe qu'il y a deux racines positives et une racine négative. On nomme les racines  $x_1^i$  et  $x_2^i$  telles que  $0 < x_1^i < x_2^i$ . Voir la figure 0.3.

On donne une interprétation possible de la fonction de réponse lorsque  $b$  est négatif pour différents niveaux de la population des proies, illustrés sur la figure 0.3.

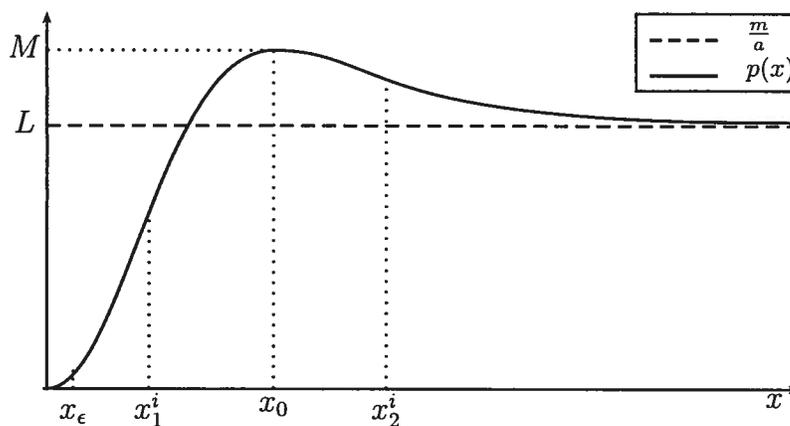


FIG. 0.3. La fonction de réponse Holling de type III généralisée lorsque  $b < 0$ .

$(0, x_\epsilon)$ : La réponse des prédateurs est faible (tangente à  $x = 0$ ) lorsque la population des proies est faible. Ceci peut être attribué aux proies qui ont une façon de se cacher des prédateurs lorsque leur population est assez petite.

$(x_\epsilon, x_1^i)$ : La réponse des prédateurs continue de croître.

$(x_1^i, x_0)$ : Le taux de croissance de la réponse des prédateurs commence à diminuer. Ce phénomène se produit aussi dans les modèles avec  $p(x)$  monotone où la fonction de réponse se stabilise, c'est-à-dire la fonction atteint un plateau, voir la figure 0.1(b) et la figure 0.2.

$(x_0, x_2^i)$ : La défense de groupe débute lorsque la population des proies  $x$  atteint  $x_0$  et la monotonie de la fonction de réponse est brisée. Donc la réponse des prédateurs décroît car les proies ont un mécanisme de défense contre les prédateurs lorsque leur population est assez élevée.

$(x_2^i, \infty)$ : La défense de groupe des proies peut être limitée. C'est-à-dire lorsque la population des proies atteint  $x_0$  la défense de groupe commence et diminue la réponse des prédateurs mais la réponse des prédateurs tend vers une constante non nulle lorsque la population de proie continue à croître.

On remarque que la fonction de réponse de Holling de type III généralisée est différente de celle de Holling de type IV généralisée. Les deux représentent une défense de groupe. Lorsque la population des proies continue de croître, la fonction de Holling de type III généralisée tend vers  $\frac{m}{a}$  mais la fonction de Holling de type IV généralisée tend vers 0.

La deuxième remarque porte sur la façon de déterminer les paramètres de la fonction de réponse. Les trois paramètres peuvent déterminer la courbe de la manière suivante : la position de  $x_0$ , le maximum de la fonction de réponse  $M$ , et la limite  $L$  de la fonction de réponse lorsque la population des proies tend vers l'infini. Voir la figure 0.3. Voici les paramètres en fonction de  $x_0$ ,  $M$ ,  $L$  :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-M}{x_0^2(L - M)}, \\ b &= \frac{-2}{x_0}, \\ m &= \frac{-ML}{x_0^2(L - M)}. \end{aligned} \tag{0.3.7}$$

Dans les chapitres suivants on étudie les deux cas,  $b$  positif et  $b$  négatif. L'organisation du mémoire est la suivante. Le chapitre 1 présente une étude préliminaire basée sur les résultats de Coutu [C]. On enchaîne avec une étude complète de la bifurcation de Hopf dans le chapitre 2. Ensuite on donne une validation numérique dans le chapitre 3. On calcule numériquement la courbe de la bifurcation de Hopf et la courbe de bifurcation de boucle homoclinique. On conclut avec le chapitre 4 où on donne les diagrammes de bifurcation et une interprétation biologique des comportements possibles en fonction des paramètres.

# Chapitre 1

---

## ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre on résume plusieurs résultats démontrés par Coutu [C] pour le cas  $b < 0$ . On complète avec les résultats correspondants lorsque  $b$  est positif.

### 1.1. SIMPLIFICATION DU SYSTÈME DE SEPT À QUATRE PARAMÈTRES

Le système initial

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) \quad (1.1.1)$$

$$\dot{y} = y(-d + cp(x)) \quad (1.1.2)$$

avec

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1} \quad (1.1.3)$$

a sept paramètres. Coutu [C] a observé qu'avec une transformation linéaire et un changement d'échelle sur le temps, il est possible de réduire le nombre de paramètres à quatre. La transformation linéaire est donnée par

$$X = \frac{1}{k}x \quad (1.1.4)$$

$$Y = \frac{1}{ck}y \quad (1.1.5)$$

et le changement d'échelle sur le temps

$$T = cmk^2t. \quad (1.1.6)$$

On obtient que le système se simplifie à

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \rho X(1 - X) - \frac{Y X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \\ \frac{dY}{dT} &= Y \left( -\delta + \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \right)\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

où

$$(\alpha, \beta, \delta, \rho) = \left( ak^2, bk, \frac{d}{cmk^2}, \frac{r}{cmk^2} \right).\tag{1.1.8}$$

À partir de maintenant on va limiter notre étude à celle du système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho x(1 - x) - \frac{y x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \\ \dot{y} &= y \left( -\delta + \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \right).\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

## 1.2. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ENTRE CHAMPS DE VECTEURS ET DIAGRAMME DE BIFURCATIONS

On s'intéresse à savoir lorsque les portraits de phase sont topologiquement les mêmes pour des valeurs distinctes des paramètres. Le diagramme de bifurcation est la partition de l'espace des paramètres en régions où les portraits de phase sont topologiquement les mêmes. Pour représenter le diagramme de bifurcations dans l'espace à trois paramètres  $(\alpha, \beta, \delta)$  on prend des tranches  $\beta$  constantes où on donne le diagramme de bifurcations dans le plan  $(\alpha, \delta)$ . Les valeurs de  $\beta$ , soit appartiennent à des intervalles de valeurs régulières (génériques) ou encore sont des valeurs de bifurcation. Les valeurs de bifurcation seront celles où se produit un changement dans le diagramme de bifurcation sur la tranche.

On introduit les concepts d'équivalence topologique, d'équivalence topologique orbitale, de déploiement, et de codimension. Ces concepts sont utilisés dans ce mémoire.

**Définition 1.2.1. [KY]** Deux champs de vecteurs sont topologiquement équivalents (resp. topologiquement orbitalement équivalents) si il existe un homéomorphisme qui envoie les trajectoires d'une région  $U$  d'un champ de vecteurs sur les trajectoires d'une région  $V$  de l'autre champ de vecteurs en préservant l'orientation et la paramétrisation par le temps (resp. mais pas nécessairement la paramétrisation par le temps).

**Définition 1.2.2. [GS]** Soit  $f(x)$  un champ de vecteurs de classe  $C^r$  où  $r \geq 1$ , et  $x_0$  un point singulier. Soit  $F(x, \lambda)$  une famille de champs de vecteurs de classe  $C^r$  en  $\lambda \in U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $f(x) = F(x, \lambda_0)$ . On dit que  $F(x, \lambda)$  est un déploiement (complet) au point singulier  $x_0$  si pour toute perturbation  $\epsilon p(x, \epsilon)$  de classe  $C^r$  du champ  $f(x)$  dans un voisinage de  $x_0$  il existe  $\epsilon_0 > 0$ , un voisinage  $V$  de  $x_0$  et une fonction  $\lambda: (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow U$  tel que  $f(x) + \epsilon p(x, \epsilon)$  est topologiquement orbitalement équivalent à  $F(x, \lambda(\epsilon))$  sur  $V$  pour  $|\epsilon| < \epsilon_0$ .

Si  $n$  est le nombre minimum de paramètres pour avoir un déploiement complet, alors  $n$  est la codimension du point singulier  $x_0$  de  $f(x)$ .

On utilise parfois le terme déploiement complet au lieu de déploiement pour mettre l'accent que toutes les perturbations possibles sont atteintes, à équivalence près, par les paramètres.

Pour montrer qu'une bifurcation se déploie, on utilise le concept de submersion.

**Définition 1.2.3. [BWM]** Une application  $F: N \rightarrow M$  est une submersion si pour tout  $x \in N$  le Jacobien de  $F$  évalué en  $x$  est surjectif.

### 1.3. LES POINTS SINGULIERS ET LES SURFACES DE BIFURCATION DES POINTS SINGULIERS

On cherche les points singuliers du système (1.1.9). Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{aligned} 0 &= \rho x(1-x) - \frac{yx^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \\ 0 &= y \left( -\delta + \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \right). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

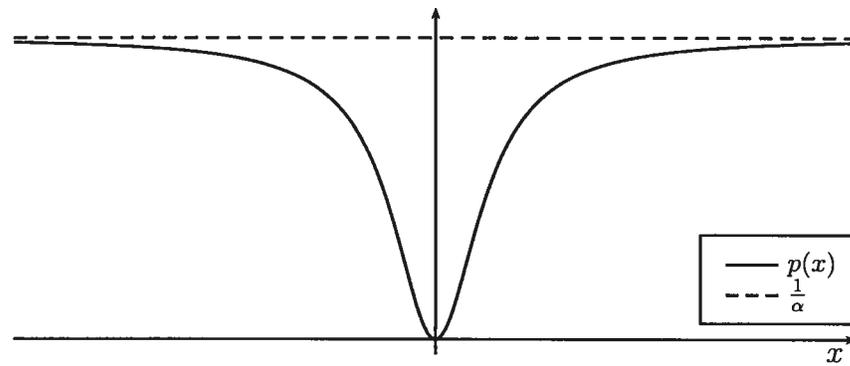
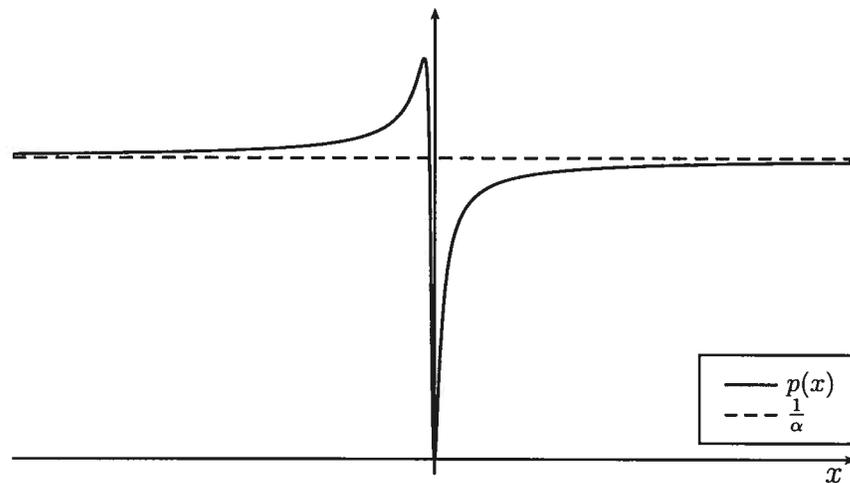
Il est évident que  $(0,0)$  et  $(1,0)$  sont des points singuliers. Les autres points singuliers sont les solutions de  $p(x) = \delta$  avec  $y = \frac{\rho}{\delta}x(1-x)$  dans le premier quadrant. On doit d'une part vérifier le nombre de solutions positives de  $p(x) = \delta$  et d'autre part vérifier pour lesquelles  $\frac{\rho}{\delta}x(1-x) \geq 0$  :

- (1) Le nombre de solutions réelles de  $p(x) = \delta$  est étudié en regardant le discriminant  $\Delta$  de l'équation quadratique correspondante.
- (2) Il est difficile d'étudier le signe de la valeur correspondante de  $y$ . Mais elle ne peut changer de signe qu'en s'annulant (puisqu'elle ne peut passer à l'infini). Ceci ne peut se faire que si le point traverse l'axe  $x$  et il ne peut traverser qu'en  $(1,0)$  (car l'origine est toujours un point simple). On va donc étudier cette bifurcation.

Dans le cas  $\beta$  positif ou nul, on remarque que  $p'(x) > 0$  pour  $x > 0$ . Donc il existe au plus une solution  $x_0$  de  $p(x_0) = \delta$ . Si un tel  $x_0$  existe, il existe un troisième point singulier  $(x_0, y_0)$  où

$$y_0 = \frac{\rho}{\delta}x_0(1-x_0). \tag{1.3.2}$$

Il est possible que ce point singulier ne soit pas dans le premier quadrant. On considère les points singuliers seulement lorsque qu'ils sont dans le premier quadrant, car on étudie le modèle lorsqu'il y a une interprétation biologique.

1.1(a)  $\beta = 0$ 1.1(b)  $\beta > 0$ FIG. 1.1. La fonction  $p(x)$  lorsque  $\beta = 0$  ou  $\beta > 0$ .

Dans le cas  $\beta$  négatif, il y a la possibilité de deux autres points singuliers en plus de ceux sur les axes. C'est-à-dire le modèle a deux, trois ou quatre points singuliers. À l'aide des graphes (voir la figure 1.1 lorsque  $\beta \geq 0$  et la figure 1.2 lorsque  $\beta < 0$ ) de la fonction de réponse on calcule le nombre de points singuliers du système selon la valeur du paramètre  $\delta$ .

On définit des surfaces de bifurcation décrivant lorsque le nombre de points singuliers change : ce sont des hypersurfaces dans l'espace des paramètres.

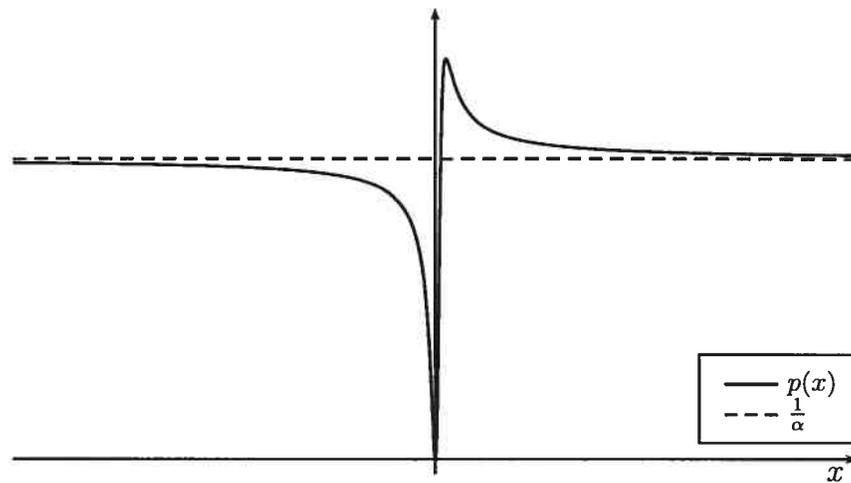


FIG. 1.2. La fonction  $p(x)$  lorsque  $\beta < 0$ .

$\mathcal{S}_1$ : Cette surface représente le passage d'un point singulier par le point  $(1, 0)$ .

Cette surface est donnée par

$$\mathcal{S}_1 : \quad \delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}.$$

Donc  $(1, 0)$  est un point double lorsque les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_1$ , ou même possiblement un point singulier triple dans le cas  $\beta$  négatif. En plus on remarque qu'en passant par  $(1, 0)$ , un point singulier change de quadrant (voir (1.3.2)). Coutu [C] a vérifié que si

$$\delta < \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \tag{1.3.3}$$

le point singulier est dans le premier quadrant et lorsque

$$\delta > \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \tag{1.3.4}$$

le point singulier n'est pas dans le premier quadrant.

$\mathcal{S}_d$ : Cette surface représente une surface de paramètres où on a un point double. Elle n'existe que pour  $\beta < 0$ . On remarque que  $p(x) = \delta$  si et seulement si

$$(\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta = 0. \tag{1.3.5}$$

La surface  $\mathcal{S}_d$  correspond à  $\Delta = 0$  où  $\Delta$  est le discriminant de (1.3.5),

$$\Delta = \delta(\delta\beta^2 - 4\alpha\delta + 4). \quad (1.3.6)$$

Il s'annule sur la surface  $\mathcal{S}_d$  définie par

$$\mathcal{S}_d : \quad \delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2},$$

et (1.3.5) a une racine double lorsque  $\beta < 0$ . On remarque qu'il est possible d'avoir un point singulier triple à l'intersection de  $\mathcal{S}_d$  et  $\mathcal{S}_1$ . Ceci se produit pour  $\beta = -2$  (voir Coutu [C]).

$\mathcal{S}_m$ : Cette surface représente la frontière des paramètres où le modèle a un sens biologique. C'est-à-dire lorsque la fonction de réponse Holling de type III généralisée est bien définie (i.e. le dénominateur de  $p(x)$  ne s'annule pas). La condition est  $\beta^2 - 4\alpha < 0$  lorsque  $\beta < 0$  et donc la surface est définie de la façon suivante

$$\mathcal{S}_m : \quad \beta^2 = 4\alpha.$$

$\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ : Cette surface que l'on définit représente le cas où l'abscisse d'un point singulier est  $\frac{1}{2}$ . Même si ce n'est pas une surface de bifurcation elle nous sera utile pour l'analyse de la bifurcation de Hopf lorsque  $\beta$  est positif. On nomme la surface  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  et on la définit comme ceci

$$\mathcal{S}_{\frac{1}{2}} : \quad \delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}.$$

$\mathcal{S}_\infty$ : Cette surface représente lorsque un point singulier passe à l'infini car son abscisse devient infinie. Son équation est

$$\mathcal{S}_\infty : \quad \delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.3.7)$$

On résume les positions relatives des surfaces de paramètres à l'aide des figures suivantes : la figure 1.3 lorsque  $\beta$  est positif et les figures 1.4 et 1.5 lorsque  $\beta$  est négatif. De plus, le nombre de points singuliers dans le premier quadrant est indiqué dans les régions entre les courbes et sur les courbes. Le nombre de

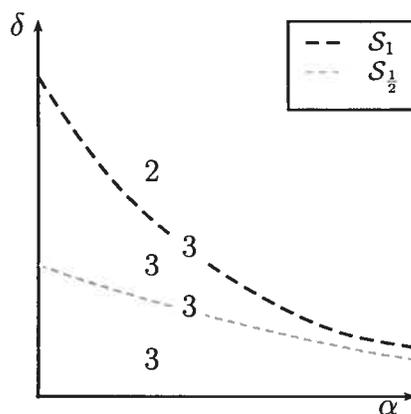
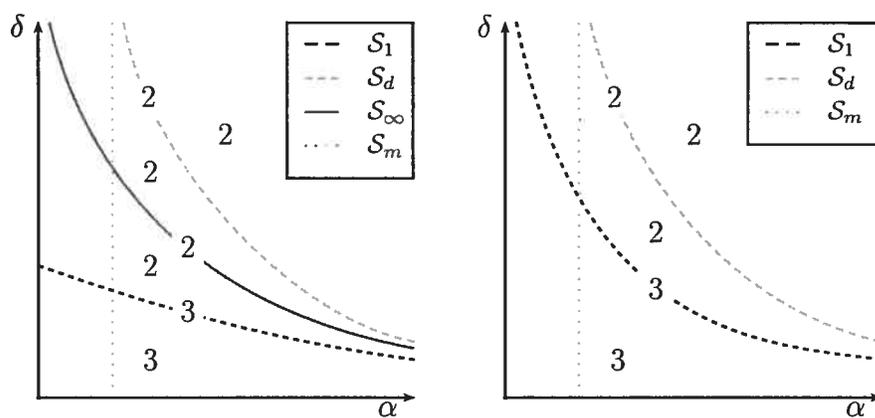


FIG. 1.3. Courbes de paramètres et points singuliers lorsque  $\beta \geq 0$ .

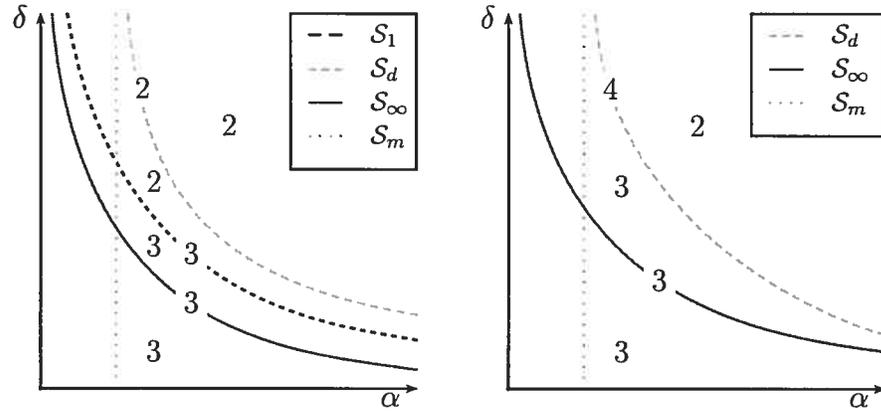
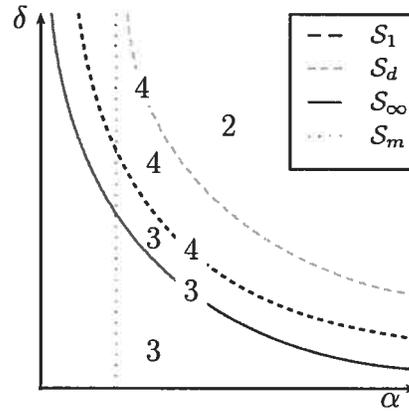


1.4(a)  $-1 < \beta < 0$

1.4(b)  $\beta = -1$

FIG. 1.4. Courbes de paramètres et points singuliers lorsque  $-1 \leq \beta < 0$ .

points singuliers inclut la multiplicité. On voit que dans tous les cas  $\mathcal{S}_\infty$  n'est pas pertinente pour le modèle biologique. Elle ne change pas le nombre de points singuliers dans le premier quadrant. En effet lorsqu'un point  $(x_0, y_0)$  passe à l'infini ( $x_0$  tend vers l'infini), ceci se produit toujours avec  $y_0 < 0$ .

1.5(a)  $-2 < \beta < -1$ 1.5(b)  $\beta = -2$ 1.5(c)  $\beta < -2$ FIG. 1.5. Courbes de paramètres et points singuliers lorsque  $\beta < -1$ .

#### 1.4. TYPE DES POINTS SINGULIERS

On remarque que le linearisé du système (1.1.9) est

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \rho - 2\rho x - \frac{xy(\beta x+2)}{(\alpha x^2+\beta x+1)^2} & \frac{-x^2}{\alpha x^2+\beta x+1} \\ \frac{xy(\beta x+2)}{(\alpha x^2+\beta x+1)^2} & -\delta + \frac{x^2}{\alpha x^2+\beta x+1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

### 1.4.1. Type de l'origine

Si on évalue le linéarisé à l'origine on obtient

$$A_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \quad (1.4.2)$$

ce qui nous permet de conclure que l'origine est un point de selle car  $\rho, \delta > 0$ . De plus, ses deux valeurs propres, avec leur vecteur propre respectif, sont  $\rho$  avec  $(1, 0)$  et  $-\delta$  avec  $(0, 1)$ . Donc l'origine est un point de selle avec un sous espace stable qui est l'axe des  $y$  et un sous espace instable qui est l'axe des  $x$ .

### 1.4.2. Type du point singulier $(1, 0)$

Si on évalue le linéarisé au point singulier  $(1, 0)$  on obtient

$$A_{(1,0)} = \begin{bmatrix} -\rho & -\frac{1}{\alpha+\beta+1} \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (1.4.3)$$

où

$$\gamma = -\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1}. \quad (1.4.4)$$

Il y a trois possibilités pour le type du point singulier.

1.4.2.1. *Type du point singulier  $(1, 0)$ , si les paramètres sont au-dessus de la surface  $\mathcal{S}_1$*

Si les paramètres sont au-dessus de la surface  $\mathcal{S}_1$ , c'est-à-dire  $\delta > \frac{1}{\alpha+\beta+1}$  et

$$\gamma = -\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} < 0, \quad (1.4.5)$$

alors les deux valeurs propres du linéarisé sont négatives, soit  $-\rho$  avec le vecteur propre  $(1, 0)$  et  $\gamma$  avec le vecteur propre  $(-1, (\rho - \delta)(\alpha + \beta + 1) + 1)$ . Le point singulier est un noeud attractif lorsque les paramètres sont au-dessus de la surface  $\mathcal{S}_1$ .

1.4.2.2. *Type du point singulier (1, 0), si les paramètres sont sous la surface  $\mathcal{S}_1$*

De façon semblable, si les paramètres sont sous la surface  $\mathcal{S}_1$ , c'est-à-dire  $\delta < \frac{1}{\alpha+\beta+1}$  et

$$\gamma = -\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad (1.4.6)$$

alors une valeur propre du linéarisé est négative et l'autre positive. La valeur propre négative est  $-\rho$  avec le vecteur propre  $(1, 0)$  et la valeur propre positive est  $\gamma$  avec le vecteur propre  $(-1, (\rho - \delta)(\alpha + \beta + 1) + 1)$ . Le point singulier est un point de selle lorsque les paramètres sont sous la surface  $\mathcal{S}_1$ .

1.4.2.3. *Étude du point singulier (1, 0), si les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_1$*

Si les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_1$  ceci implique que  $\delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$ . Alors le linéarisé au point singulier  $(1, 0)$  devient

$$A_{(1,0)} = \begin{bmatrix} -\rho & -\frac{1}{\alpha+\beta+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4.7)$$

Donc nous avons une valeur propre qui est zéro. Pour déterminer le type du point il faut continuer l'analyse. On diagonalise la partie linéaire. On obtient un système de la forme

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\rho X + o(|X, Y|) \\ \dot{Y} &= AY^2 + o(|X, Y|^2) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

avec

$$A = -\frac{2+\beta}{\rho(\alpha+\beta+1)^3} \quad (1.4.9)$$

(détails dans [C]). Donc le point est un col-noeud attractif. Pour déterminer le comportement des trajectoires dans son voisinage il faut se ramener sur la variété

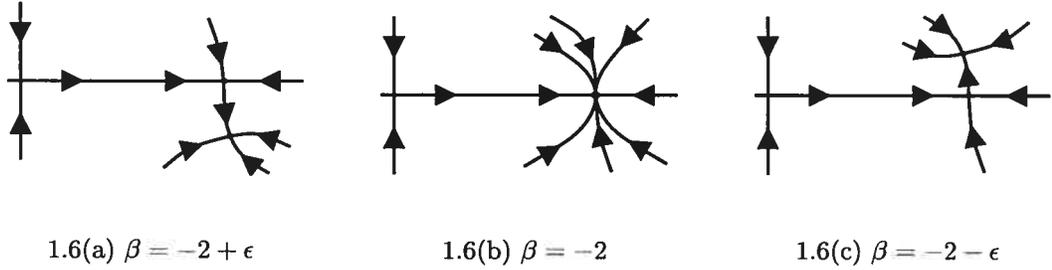


FIG. 1.6. Comportement des trajectoires dans le voisinage de  $(0, 1)$  lorsque les paramètres sont sur  $\mathcal{S}_1$  et près de  $\beta = -2$ .

centre et étudier le coefficient du terme en  $Y^2$ . Or le terme  $AY^2$  de (1.4.8) ne change pas si on se ramène sur la variété centre.

Lorsque  $\beta > -2$ ,  $A$  est négatif et le premier quadrant contient la partie noeud du col-noeud  $(1, 0)$ . Lorsque  $\beta < -2$ ,  $A$  est positif et le premier quadrant contient la partie col (voir la figure 1.6).

Si  $\beta = -2$  on remarque que l'on a un point singulier triple car  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$  coïncident. Il suit que le coefficient  $A$  est nul. Pour déterminer le type du point singulier  $(1, 0)$  lorsque  $\beta = -2$ , on doit déterminer le coefficient  $B$  de  $Y^3$  de l'équation  $\dot{Y}$  sous forme normale. On obtient [C]

$$B = \frac{-1}{(\alpha-1)^4 \rho^2} \quad (1.4.10)$$

et on remarque que le coefficient est toujours négatif. On remarque que calculer  $B$  en se mettant sous forme normale est équivalent à se ramener sur la variété centre. Donc lorsque  $(1, 0)$  est un point singulier triple, c'est-à-dire lorsque les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_1$  et  $\beta = -2$  on a un noeud attractif. Voir la figure 1.6.

### 1.4.3. Type de points singuliers dans le premier quadrant

On veut déterminer le type de points singuliers dans le premier quadrant (ceux qui ne sont pas sur un des axes).

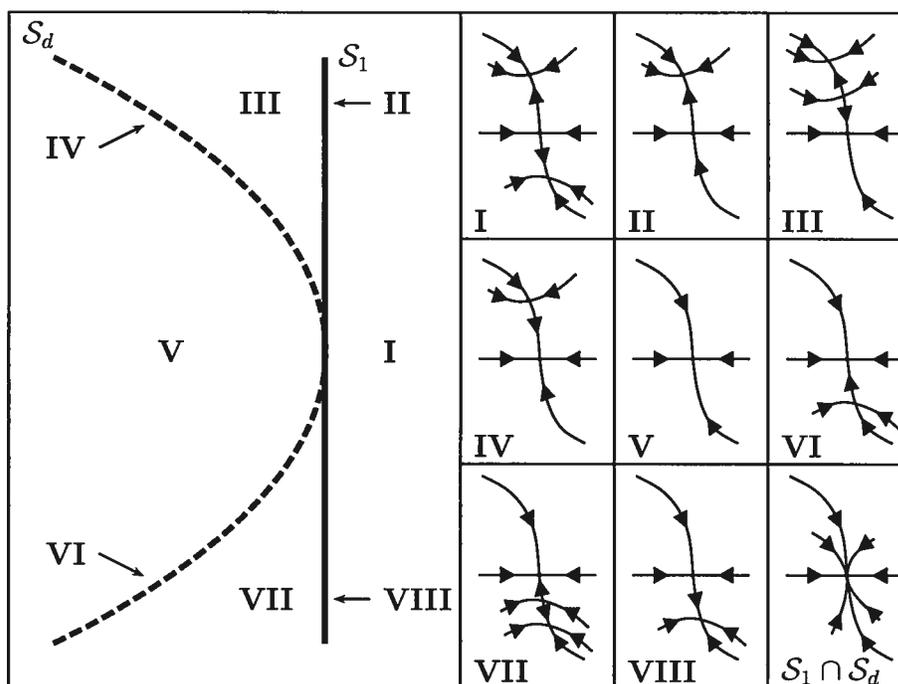


FIG. 1.7. Diagramme de la bifurcation du col-noeud  $(1,0)$  de codimension 2.

**Définition 1.4.1.** *Un point singulier est simple si le déterminant du linéarisé  $A$  ne s'annule pas en ce point. On dit que le point est de type selle (resp. anti-selle) si le déterminant de  $A_{(x_0, y_0)}$  est négatif (resp. le déterminant de  $A_{(x_0, y_0)}$  est positif).*

On associe au point singulier le type selle ou le type anti-selle. Un point singulier *anti-selle* est soit de type : centre, foyer ou noeud. La proposition suivante donne le type du point singulier dans le premier quadrant en fonction du nombre de points singuliers dans le premier quadrant.

**Proposition 1.4.1.** *S'il y a exactement un point singulier dans le premier quadrant il est de type anti-selle. S'il y a exactement deux points singuliers dans le premier quadrant alors le point singulier de gauche est de type anti-selle et celui de droite est un point de selle.*

On n'a pas les outils nécessaires pour démontrer ce résultat mais il sera possible de le démontrer dans le prochain chapitre (voir la Proposition 2.2.3).

### 1.5. ÉTUDE DU POINT SINGULIER DOUBLE LORSQUE LES PARAMÈTRES SONT SUR $\mathcal{S}_d$

Le seul moment où  $\mathcal{S}_d$  est pertinente biologiquement (pertinente dans le premier quadrant) est  $\beta < -2$  [C]. Ailleurs le point double a une coordonnée  $y < 0$  et se trouve donc en dehors du premier quadrant. Si les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_d$  et si  $\beta < -2$  on a un point singulier double dans le premier quadrant. Le point double est donné explicitement par

$$(x_0, y_0) = \left( -\frac{2}{\beta}, -\frac{2\rho(\beta+2)}{\delta\beta^2} \right). \quad (1.5.1)$$

Si on évalue le linéarisé  $A$  au point double on obtient

$$A_{(x_0, y_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(\beta+4)}{\beta} & \frac{4}{\beta^2-4\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.2)$$

en utilisant la relation  $\delta = \frac{4}{4\alpha-\beta^2}$  car les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_d$ . On remarque que le linéarisé a une valeur propre nulle et une non-nulle si  $\beta \neq -4$ . Si  $\beta < -4$ , on a un col-noeud répulsif car la valeur propre non-nulle est positive. Si  $\beta > -4$  on a un col-noeud attractif car la valeur propre non-nulle est négative. Pour déterminer le portrait de phase local du point singulier double, il est nécessaire de continuer l'analyse. On centre le système à l'origine afin de le diagonaliser. Le changement de variables est le suivant

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0 \\ y_1 &= y - y_0. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Ensuite on utilise la matrice suivante

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\rho(4\alpha-\beta^2)(\beta+4)}{4\beta} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5.4)$$

pour diagonaliser la partie linéaire du système et on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{(\beta + 4)\rho}{\beta} x_2 + o(|x, y|) \\ \dot{y}_2 &= \frac{8\beta^4(\beta + 2)}{\rho(\beta + 4)^2(4\alpha - \beta^2)^3} (y_2^2 - 2x_2y_2 + x_2^2) + o(|x, y|^2). \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Le coefficient de  $y_2^2$  donne l'information nécessaire pour déterminer le portrait de phase local de  $(x_0, y_0)$ . Le coefficient est toujours négatif lorsque  $\beta \neq -4$  et  $\beta < -2$ . Le cas  $\beta = -4$  sera discuté dans la prochaine section.

## 1.6. BIFURCATION DE BOGDANOV-TAKENS

Lorsque les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_d$  et  $\beta = -4$ , on a un point singulier double (1.5.1) dans le premier quadrant. Si on évalue le linéarisé à ce point singulier on obtient

$$A_{(x_0, y_0)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4-\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6.1)$$

On remarque que les deux valeurs propres sont nulles et que  $\frac{1}{4-\alpha} < 0$  (car  $\beta^2 - 4\alpha < 0$ ). Ceci implique que le linéarisé n'est pas diagonalisable et il y a une bifurcation de Bogdanov-Takens. On suit l'étude et les calculs de Coutu [C] dans cette section. Mais avant de procéder on introduit le théorème de la bifurcation de Bogdanov-Takens.

**Théorème 1.6.1. [KY]** *On considère un système  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda)$  de classe  $C^r$  où  $r \geq 2$  et  $\mathbf{x} = (x, y)$ , de la forme*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{00}(\lambda) + a_{10}(\lambda)x + y + \sum_{i+j=2} a_{ij}(\lambda)x^i y^j + o(|x, y|^2) \\ \dot{y} &= b_{00}(\lambda) + b_{10}(\lambda)x + b_{01}(\lambda)y + \sum_{i+j=2} b_{ij}(\lambda)x^i y^j + o(|x, y|^2) \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

*qui a un point singulier à l'origine avec ses deux valeurs propres associées nulles en  $\lambda = \lambda_0$ . Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

*BT.0 le linéarisé évalué à l'origine est nilpotent en  $\lambda = \lambda_0$ ,*

*BT.1*  $a_{20}(\lambda_0) + b_{11}(\lambda_0) \neq 0$ ,

*BT.2*  $b_{20}(\lambda_0) \neq 0$ ,

*BT.3* l'application

$$(\mathbf{x}, \lambda) \mapsto \left( f(\mathbf{x}, \lambda), \text{trace} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} \right), \text{déterminant} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} \right) \right)$$

est une submersion à l'origine en  $\lambda = \lambda_0$ .

Alors le système  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda)$  est topologiquement orbitalement équivalent au système

$$X' = Y \tag{1.6.3}$$

$$Y' = \mu_1 + \mu_2 Y + X^2 + sXY + o(|X, Y|^2)$$

où  $s = \text{signe}(b_{20}(\lambda_0)(a_{20}(\lambda_0) + b_{11}(\lambda_0))) = \pm 1$ . De plus, le diagramme de bifurcation est donné par la figure 1.8 lorsque  $s = 1$ . Pour le cas  $s = -1$  on applique la transformation

$$(x_2, y_2, t, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (x_2, -y_2, -t, \mu_1, -\mu_2) \tag{1.6.4}$$

à la figure 1.8.

La théorie de la bifurcation de Bogdanov-Takens est présentée dans [BRI], [CLW], [GH], [KY]. Dans le cas où les conditions *BT.1* ou *BT.2* ne sont pas satisfaites on a une bifurcation de codimension supérieure à 2. Le cas  $b_{20}(\lambda_0) \neq 0$ ,  $a_{20}(\lambda_0) + b_{11}(\lambda_0) = 0$  est appelé bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension supérieure. On donne la définition d'une bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3.

**Définition 1.6.1. [DRS]** Un champ de vecteurs de classe  $C^r$  où  $r \geq 5$  a une bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 si il existe un changement de variables de classe  $C^5$  et un changement d'échelle sur le temps qui ramènent le système à la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 \pm x^3 y + o(|x, y|^4). \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

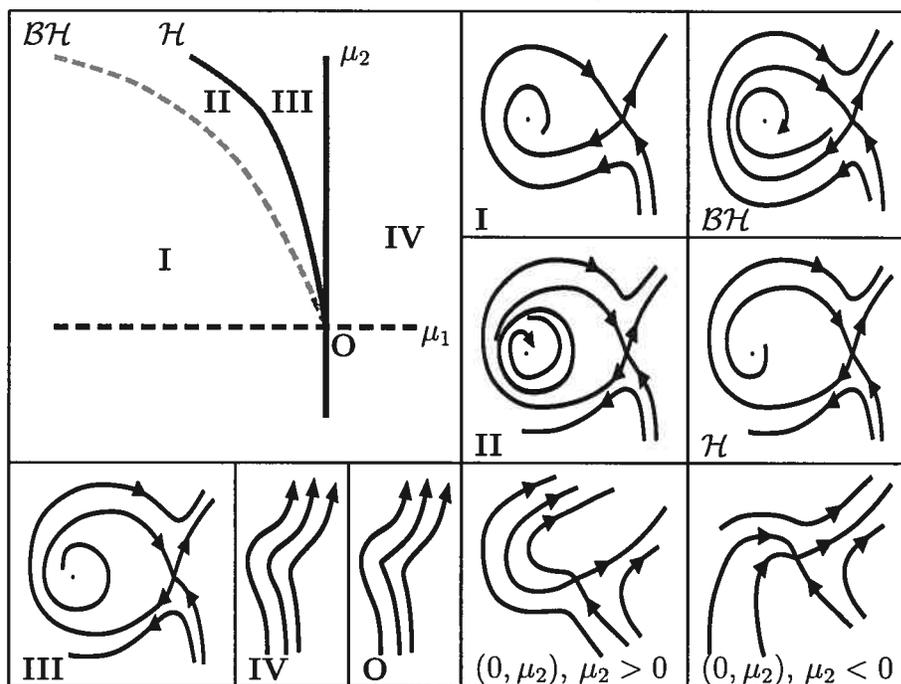


FIG. 1.8. Diagramme de la bifurcation de Bogdanov-Takens lorsque  $s = 1$ .

Dans cette section on va remarquer qu'il existe une bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3. Donc les calculs de changements de variables de la bifurcation de Bogdanov-Takens seront utiles afin d'étudier la bifurcation de codimension plus grande.

Pour étudier la bifurcation de Bogdanov-Takens on doit mettre le système sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= Ax_2^2 + Bx_2y_2 + o(|x_2, y_2|^2). \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

On obtient cette forme en faisant deux changements de variables. Le premier changement ramène le point singulier à l'origine en utilisant le changement de variables (1.5.3). Ensuite par la théorie des formes normales on peut effectuer le

changement de variables suivant

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 \\
 y_2 &= \frac{1}{4-\alpha}y_1 + \frac{8-\alpha}{4-\alpha}x_1^2 + \frac{16\rho}{4-\alpha}x_1^3 + \frac{16}{(\alpha-4)^2}x_1^2y_1 \\
 &\quad + \frac{16(3\alpha-16)\rho}{(\alpha-4)^2}x_1^4 + \frac{-64}{(\alpha-4)^2}x_1^3y_1 + o(|x_1, y_1|^4)
 \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

tel qu'on obtient le système de la forme (1.6.6). On remarque que la valeur de  $y_2$  est le membre de droite de l'équation donnant  $\dot{x}_1$ . En simplifiant on a

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4\rho}{(\alpha-4)^2} \\
 B &= \frac{2\rho(8-\alpha)}{\alpha-4}
 \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

et on remarque que  $A > 0$  car  $\alpha > 4$  par la restriction de la surface de paramètres  $\mathcal{S}_m$ . On continue l'analyse avec  $B$ ,

$$B \begin{cases} > 0 & \text{si } \alpha \in (4, 8) \\ = 0 & \text{si } \alpha = 8 \\ < 0 & \text{si } \alpha > 8 \end{cases} \tag{1.6.9}$$

Si  $B \neq 0$  et si il existe un déploiement de (1.6.6) on a un système de la forme suivante

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= \mu_1 + \mu_2 y_2 + Ax_2^2 + Bx_2 y_2 + o(|x_2, y_2|^2).
 \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

par le Théorème 1.6.1. C'est-à-dire, si on suppose qu'il y a un déploiement, la condition *BT.3* du théorème est satisfaite donc on a le système (1.6.10). On peut en partie supposer un tel déploiement. On peut garantir le déploiement du point double car il a déjà été étudié dans ce mémoire et garantir le déploiement de la bifurcation de Hopf car on va l'étudier dans le prochain chapitre. On s'aperçoit a posteriori que les courbes qui devraient exister dans le déploiement sont bien présentes puisqu'on les a calculées.

Le diagramme de bifurcation est donné par la figure 1.8 dans le cas  $B > 0$ . Dans le cas  $B < 0$  le diagramme de bifurcation est donné en appliquant la transformation (1.6.4) à la figure 1.8.

Lorsque  $\alpha = 8$  on remarque que le système devient

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= Ax_2^2 + o(|x_2, y_2|^2).\end{aligned}\tag{1.6.11}$$

et on a une bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension plus grande que deux. On doit continuer l'analyse pour déterminer si on a une bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3. C'est-à-dire, lorsque les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_d$  et  $\beta = -4$ ,  $\alpha = -8$  on veut que le système soit de la forme

$$\begin{aligned}x'_5 &= y_5 \\ y'_5 &= x_5^2 + Cx_5^3y_5 + \dots\end{aligned}\tag{1.6.12}$$

Les calculs viennent de Coutu [C]. La première étape est de normaliser à 1, le coefficient de  $X^2$  du système (1.6.11) à l'aide du changement de variables suivant

$$(x_2, y_2) = \left( \frac{4}{\rho}x_3, \frac{4}{\rho}y_3 \right).\tag{1.6.13}$$

Ensuite on veut éliminer le terme en  $x_3^2y_3$ , i.e. mettre le système sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= x_4^2 + c_{30}x_4^3 + c_{40}x_4^4 + c_{31}x_4^3y_4 + \dots \\ &= f(x_4) + y_4(c_{31}x_4^3 + o(|x_4|^3)) + O(|y_4|)\end{aligned}\tag{1.6.14}$$

ceci ce fait en effectuant le changement de variables suivant

$$\begin{aligned}x_3 &= x_4 + ax_4y_4 + bx_4^3 \\ y_3 &= x_4 + ay_4^2 + ax_4^3 + cx_4^2y_4 + dx_4^4\end{aligned}\tag{1.6.15}$$

où

$$(a, b, c, d) = \left( -\frac{16(1+12\rho)}{3\rho^2}, -\frac{64}{3\rho^2}, -\frac{64}{\rho^2}, \frac{256(1+12\rho)}{3\rho^3} \right).\tag{1.6.16}$$

Le système a maintenant la forme (1.6.14) et les coefficients suivants

$$(c_{30}, c_{40}, c_{31}) = \left( -\frac{16}{\rho}, \frac{256}{4\rho^2}, -\frac{1024}{\rho^2} \right). \quad (1.6.17)$$

Soit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + c_{30}x^2 + c_{40}x^4 + o(|x^4|), \\ F(x) &= \int_0^x f(z)dz. \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

Finalement on effectue un changement de variables et un changement d'échelle sur le temps pour obtenir le système de la forme (1.6.12). Le changement de variables est donné par

$$\begin{aligned} x_5 &= (3F(x_4))^{\frac{1}{3}} = x_4 + o(|x_4|) \\ y_5 &= y_4 \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

et le changement d'échelle est obtenu en divisant le champ de vecteurs par

$$(3F(x_5))^{-\frac{2}{3}} f(x_5) = 1 + O(|x_5|). \quad (1.6.20)$$

On obtient le système de la forme (1.6.12) où

$$C = \frac{-1024}{\rho^2}. \quad (1.6.21)$$

Le signe de  $C$  est donc négatif et un système de cette forme a déjà été étudié dans [DRS] et [CLW]. Le diagramme de bifurcation d'un tel système est connu. S'il existe un déploiement complet du système (1.6.12) le système est topologiquement orbitalement équivalent au système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 xy + x^2 - x^3 y. \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Les courbes de bifurcation sont données par la figure 1.9 et la description des courbes de bifurcation est donnée par le tableau 1.1. On remarque que la droite  $\mu_3$  est le lieu des bifurcations  $\mathcal{BT}^-$  et  $\mathcal{BT}^+$  séparées par la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3. La droite correspond à  $\mathcal{S}_d \cap \{\beta = -4\}$ .

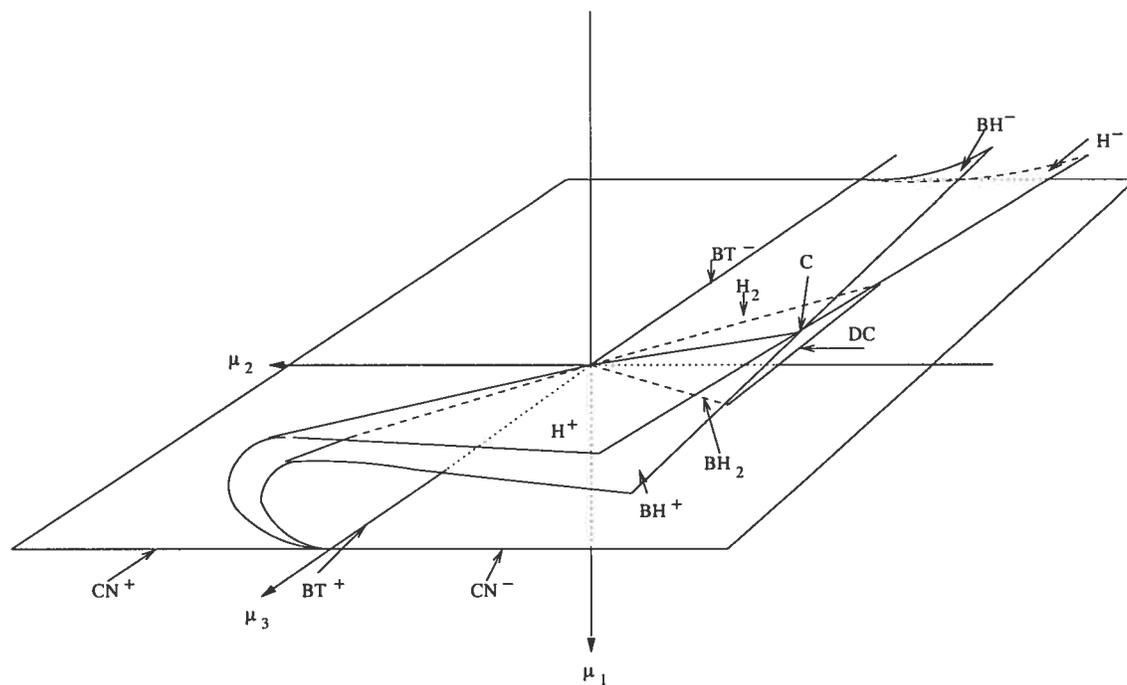


FIG. 1.9. Surfaces de bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 par Coutu [C].

- $\mathcal{H}^+$  bifurcation de Hopf répulsive
- $\mathcal{H}^-$  bifurcation de Hopf attractive
- $\mathcal{BH}^+$  boucle homoclinique répulsive
- $\mathcal{BH}^-$  boucle homoclinique attractive
- $\mathcal{H}_2$  bifurcation de Hopf de codimension deux
- $\mathcal{BH}_2$  boucle homoclinique de codimension deux
- $\mathcal{DC}$  double cycle
- $\mathcal{C}$  intersection entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{BH}$
- $\mathcal{BT}^+$  bifurcation de Bogdanov-Takens avec coefficient de  $xy$  positif
- $\mathcal{BT}^-$  bifurcation de Bogdanov-Takens avec coefficient de  $xy$  négatif
- $\mathcal{CN}^+$  col-noeud répulsif
- $\mathcal{CN}^-$  col-noeud attractif

TAB. 1.1. Description des courbes de bifurcation de la figure 1.9.

Pour pouvoir visualiser les régions ouvertes du diagramme de bifurcation on remarque que lorsque  $\mu_1 > 0$  il n'y a pas de point singulier. Donc les bifurcations

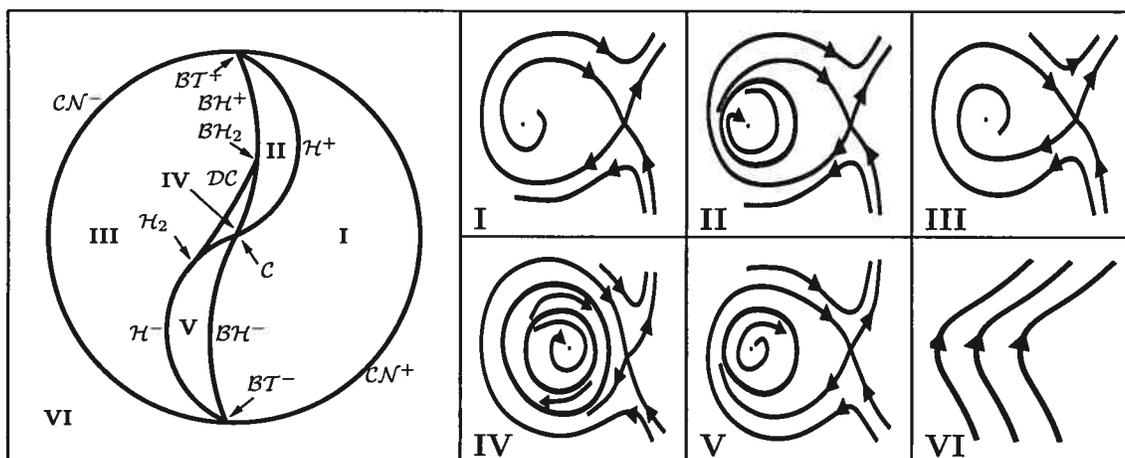


FIG. 1.10. Diagramme de bifurcation et portraits de phase dans les régions ouvertes pour la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3.

sont dans les octants où  $\mu_1 < 0$ . On prend une sphère de rayon  $\epsilon$

$$S_\epsilon = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \mid \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \epsilon^2\} \quad (1.6.23)$$

et on l'intersecte avec les surfaces de bifurcation de la figure 1.9. On enlève un point de la sphère dans la région  $\mu_1 > 0$ , ce qui permet de représenter le diagramme de bifurcation sur un plan. On obtient le diagramme de bifurcation représenté par la figure 1.10.

# Chapitre 2

---

## BIFURCATION DE HOPF

Dans ce chapitre on étudie le système

$$\begin{aligned}\dot{x} = R(x, y) &= \rho x(1 - x) - \frac{yx^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \\ \dot{y} = S(x, y) &= y \left( -\delta + \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \right),\end{aligned}\tag{2.0.1}$$

avec le but de décrire les bifurcations de Hopf du modèle. Il y a une bifurcation de Hopf lorsque  $\beta < 0$  partiellement étudiée par Coutu [C]. De plus, il existe une bifurcation de Hopf lorsque  $\beta \geq 0$  qui sera étudiée dans l'une des sections suivantes. Pour étudier la bifurcation de Hopf, on utilise des méthodes ad hoc et la méthode de Lyapunov. Il est suffisant de réduire le système (2.0.1) à un système polynomial pour utiliser la méthode de Lyapunov. Ensuite on cherche à déterminer les constantes de Lyapunov en vue d'établir une borne sur la codimension de la bifurcation. Finalement la troisième étape consiste à vérifier que la famille contient un déploiement complet de la bifurcation de Hopf, quelque soit sa codimension. On pourra donc conclure à la fin du chapitre le résultat suivant.

**Théorème 2.0.2.** *Le système (2.0.1) a une bifurcation générique de Hopf de codimension 1 et 2 avec un déploiement complet lorsque  $\beta < 0$  et une bifurcation générique de Hopf de codimension 1 avec un déploiement complet lorsque  $\beta \geq 0$ .*

## 2.1. INTRODUCTION DE LA BIFURCATION DE HOPF

La bifurcation de Hopf<sup>1</sup> est une bifurcation locale où le point singulier change de stabilité lorsque deux valeurs propres traversent l'axe imaginaire. Ceci s'accompagne généralement de la création ou disparition de solutions périodiques autour du point singulier.

La bifurcation de Hopf de codimension 1 est généralement appelée tout simplement bifurcation de Hopf. S'il y a un déploiement on a la création ou disparition d'une solution périodique autour du point singulier. On dit que la bifurcation est générique. La bifurcation de Hopf de codimension  $n$  est aussi appelée la bifurcation de Hopf généralisée d'ordre  $n$ . Si la bifurcation a un déploiement complet toutes les combinaisons de 0 à  $n$  solutions périodiques autour du point singulier sont possibles lorsque les paramètres sont au voisinage de la valeur de bifurcation. Dans ce cas on dit que la bifurcation de Hopf de codimension  $n$  est générique.

On continue, en donnant une idée intuitive du fonctionnement de la bifurcation de Hopf de codimension 1 et 2. Soit le système planaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

où l'origine est un point singulier tel que ses valeurs propres associées soient  $\alpha(\lambda) \pm \beta(\lambda)i$  et il existe un  $\lambda_0$  tel que  $\alpha(\lambda_0) = 0$  et  $\beta(\lambda_0) \neq 0$ . Il existe un changement de variables tel que le système a la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\lambda)x - \beta(\lambda)y + o(|x, y|) \\ \dot{y} &= \beta(\lambda)x + \alpha(\lambda)y + o(|x, y|). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

On prend  $\lambda = \lambda_0$  et on change le système en coordonnées complexes

$$\dot{z} = i\beta(\lambda_0)z + F(z, \bar{z}). \tag{2.1.3}$$

---

<sup>1</sup>La bifurcation de Hopf est parfois appelée : Hopf-Andronov ou Poincaré-Andronov-Hopf.

En utilisant la théorie des formes normales et la résonance des valeurs propres  $(\pm\beta(\lambda_0)i)$  il existe un changement de variables

$$z = Z + \sum_{2 \leq k+l \leq 5} a_{kl} Z^k \bar{Z}^l \quad (2.1.4)$$

qui transforme le système sous la forme

$$\dot{Z} = i\beta(\lambda_0)Z + C_1 Z^2 \bar{Z} + C_2 Z^3 \bar{Z}^2 + o(|Z, \bar{Z}|^6). \quad (2.1.5)$$

Ceci redresse le champ de vecteurs de manière presque symétrique sous toutes les rotations. On compose avec un changement en coordonnées polaires et on obtient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \operatorname{Re}(C_1)r^3 + \operatorname{Re}(C_2)r^5 + o(|r|^6) \\ \dot{\theta} &= \beta(\lambda_0) + o(|r|). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

On remarque que  $\operatorname{Re}(C_1)$  détermine la stabilité du point singulier en  $\lambda = \lambda_0$  si  $\operatorname{Re}(C_1) \neq 0$ . C'est le cas de codimension 1. Similairement,  $\operatorname{Re}(C_2)$  détermine la stabilité du point singulier en  $\lambda = \lambda_0$  si  $\operatorname{Re}(C_1) = 0$  et  $\operatorname{Re}(C_2) \neq 0$ . C'est le cas de codimension 2.

On peut montrer qu'il existe un voisinage  $W$  de  $\lambda_0$ , tel que pour  $\lambda \in W$  on peut effectuer les mêmes changements de variables déjà effectués et on obtient le système

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha(\lambda)r + a_1(r, \lambda)r^3 + a_2(r, \lambda)r^5 + o(|r|^6) \\ \dot{\theta} &= \beta(\lambda) + o(|r|). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Si  $\operatorname{Re}(C_1) \neq 0$  alors  $a_1(r, \lambda_0) = \operatorname{Re}(C_1)$  et pour  $\lambda \in W$  on a que  $a_1(r, \lambda)$  est du même signe que  $\operatorname{Re}(C_1)$ . En plus, si on inclut la condition générique  $\alpha'(\lambda_0) \neq 0$  on a le déploiement de la bifurcation. Cette condition force le point singulier à changer de stabilité (i.e. les deux valeurs propres traversent l'axe imaginaire), ce qui force la création ou la disparition d'une solution périodique.

Si  $\operatorname{Re}(C_1) = 0$  et  $\operatorname{Re}(C_2) \neq 0$  alors  $a_2(r, \lambda_0) = \operatorname{Re}(C_2)$  et pour  $\lambda \in W$  on a que  $a_2(r, \lambda)$  est du même signe que  $\operatorname{Re}(C_2)$ . En plus, si on inclut une condition

de généricité : l'application  $\lambda \mapsto (\alpha(\lambda), \text{Re}(C_1(\lambda)))$  est une submersion, on a que la bifurcation de Hopf de codimension 2 a un déploiement.

Les calculs de  $\text{Re}(C_1)$  et  $\text{Re}(C_2)$  se font à l'aide d'un logiciel de manipulation symbolique mais ils sont lourds. Dans ce mémoire on utilisera pour les calculs une méthode équivalente la méthode des constantes de Lyapunov pour laquelle les calculs se font plus aisément.

## 2.2. CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR UNE BIFURCATION DE HOPF

Dans cette section on dérive plusieurs expressions qui seront utiles pour étudier la bifurcation de Hopf. Si on suppose que  $(x_0, y_0)$  est un point singulier du système (2.0.1) qui n'est pas sur l'un des axes, ceci implique les relations suivantes :

$$\text{I : } \quad \delta = \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1}, \quad (2.2.1)$$

et

$$\text{II : } \quad y_0 = \frac{\rho}{\delta} x_0(1 - x_0). \quad (2.2.2)$$

La relation I est vraie car  $\dot{y}$  s'annule en  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} S(x_0, y_0) &= 0 \\ y_0 \left( -\delta + \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} \right) &= 0 \\ \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} &= \delta. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

La relation II est vraie car

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0) &= 0 \\ \rho x_0(1 - x_0) - \frac{y_0 x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

et par la substitution de I on obtient

$$\begin{aligned} \rho x_0(1 - x_0) - y_0 \delta &= 0 \\ \frac{\rho}{\delta} x_0(1 - x_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

On remarque aussi comme Coutu [C] à fait, qu'à partir de **II** on obtient

$$\frac{x_0}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} = \frac{\delta^2}{x_0^3} \quad (2.2.6)$$

car

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} &= \delta \\ \frac{x_0^4}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} &= \delta^2 \\ \frac{x_0}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} &= \frac{\delta^2}{x_0^3}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Soit  $A$  le linéarisé du système (voir (1.4.1)). Si le linéarisé est évalué à un point singulier qui n'est pas sur l'un des axes, en utilisant la relation **I** on obtient

$$\begin{aligned} A_{(x_0, y_0)} &= \begin{bmatrix} \rho - 2\rho x_0 - \frac{x_0 y_0 (\beta x_0 + 2)}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} & \frac{-x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} \\ \frac{x_0 y_0 (\beta x_0 + 2)}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} & -\delta + \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho - 2\rho x_0 - \frac{x_0 y_0 (\beta x_0 + 2)}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} & \frac{-x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} \\ \frac{x_0 y_0 (\beta x_0 + 2)}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Ceci implique que la trace du linéarisé évalué à un point singulier  $(x_0, y_0)$  qui n'est pas sur l'un des axes est nulle [C], si et seulement si

$$\rho - 2\rho x_0 - \frac{x_0 y_0 (\beta x_0 + 2)}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2} = 0 \quad (2.2.9)$$

et en substituant (2.2.6) on obtient

$$\rho - 2\rho x_0 - \frac{\delta^2 y_0 (\beta x_0 + 2)}{x_0^3} = 0. \quad (2.2.10)$$

On continue de simplifier l'expression en substituant **II**

$$\rho - 2\rho x_0 - \frac{\delta^2 \rho x_0 (1 - x_0) (\beta x_0 + 2)}{x_0^3 \delta} = 0 \quad (2.2.11)$$

ce qui implique

$$x_0^2 - 2x_0^3 - \delta \beta x_0 - 2\delta + \beta \delta x_0^2 + 2\delta x_0 = 0 \quad (2.2.12)$$

et en substituant **I** on obtient

$$\begin{aligned}
 & x_0^2 - 2x_0^3 - \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} \beta x_0 - \\
 & 2 \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} + \beta \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} x_0^2 + \\
 & 2 \frac{x_0^2}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} x_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

On peut ensuite simplifier et isoler le paramètre  $\alpha$ ,

$$\text{III : } \quad \alpha = \frac{1 + \beta x_0^2}{x_0^2(1 - 2x_0)}. \tag{2.2.14}$$

La proposition suivante sera utile pour déterminer pour quelle abscisse du point singulier des conditions nécessaires pour l'existence d'une bifurcation de Hopf sont satisfaites.

**Proposition 2.2.1.** *La trace du linéarisé est seulement nulle en  $x_0 = \frac{1}{2}$  si et seulement si  $\beta = -4$ .*

DÉMONSTRATION. On suppose que  $x_0 = \frac{1}{2}$ , ce qui implique que  $y_0 = \frac{\rho}{4\delta}$  par (2.2.2). On évalue la trace du linéarisé simplifié (2.2.10) en  $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{\rho}{4\delta})$ . On obtient

$$-2\delta\rho\left(\frac{\beta}{2} + 2\right) = 0 \tag{2.2.15}$$

donc la trace est nulle si et seulement si  $\beta = -4$ . □

On veut obtenir une fonction  $h(x)$  avec la propriété que le déterminant du linéarisé est nul si et seulement si  $h(x_0) = 0$  lorsque le linéarisé est évalué à un point singulier  $(x_0, y_0)$  qui n'est pas sur l'un des axes (2.2.8). On observe que le déterminant du linéarisé (2.2.8) évalué au point singulier  $(x_0, y_0)$  est

$$\text{déterminant}(A_{(x_0, y_0)}) = \frac{x_0^3 y_0 (\beta x_0 + 2)}{(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^3}. \tag{2.2.16}$$

Il est possible de simplifier le déterminant en substituant **II** et en substituant **I** pour obtenir

$$\text{déterminant}(A_{(x_0, y_0)}) = -\frac{(-1 + x_0)(x_0\beta + 2)\rho x_0^2}{(\alpha x_0^2 + x_0\beta + 1)^2}. \quad (2.2.17)$$

Ce qui est équivalent à

$$\text{déterminant}(A_{(x_0, y_0)}) = -\delta^2(-1 + x_0)(x_0\beta + 2)\rho \quad (2.2.18)$$

et

$$h(x) = \delta^2(1 - x)(x\beta + 2)\rho. \quad (2.2.19)$$

**Proposition 2.2.2.** *Le déterminant du linéarisé est nul si la trace du linéarisé est nulle en  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Ceci ce produit pour  $\beta = -4$ . On a alors une bifurcation Bogdanov-Takens.*

DÉMONSTRATION. Si la trace du linéarisé est nulle lorsqu'évaluée en  $x_0 = \frac{1}{2}$  alors  $\beta = -4$  par la Proposition 2.2.1 et le déterminant est donné par la formule (2.2.17). On observe le facteur  $(x_0\beta + 2)$  au numérateur du déterminant. Évalué en  $(x_0, \beta) = (\frac{1}{2}, -4)$ , le facteur est nul et donc le déterminant est nul.  $\square$

On a maintenant les outils nécessaires pour démontrer la Proposition 1.4.1, que l'on rappelle

**Proposition 2.2.3.** *S'il y a exactement un point singulier dans le premier quadrant il est de type anti-selle. S'il y a exactement deux points singuliers alors le point singulier de gauche est de type anti-selle et celui de droite est un point de selle.*

DÉMONSTRATION. À partir de l'analyse faite dans cette section on remarque que le déterminant s'annule seulement à un certain point singulier lorsque les paramètres sont sur la surface  $\mathcal{S}_1$  ou la surface  $\mathcal{S}_d$ . Les surfaces représentent respectivement, le cas où un point singulier entre ou sort du premier quadrant par une bifurcation d'un point double et le cas où les deux points singuliers dans le premier quadrant se confondent et deviennent un point double. Dans les régions

ouvertes définies par les surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$  le déterminant des points singuliers ne change pas de signe. L'étude locale des bifurcations sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$  et de leurs déploiement donne le signe du déterminant du jacobien aux points singuliers lorsqu'on est au voisinage de ces surfaces. Ces bifurcations ont été étudiées dans le chapitre précédent. Alors le type selle ou anti-selle point singulier change seulement lorsque le déterminant change de signe, car un point singulier anti-selle a un déterminant positif et un point de selle a un déterminant négatif. Donc on a le type des points singuliers en fonction du nombre de points singuliers dans le premier quadrant.  $\square$

### 2.3. ANALYSE DE LA TRACE DU LINÉARISÉ LORSQUE $\beta \geq 0$

Dans cette section on démontre la proposition suivante

**Proposition 2.3.1.** *Il existe une bifurcation de Hopf de codimension au moins 1 lorsque  $\beta \geq 0$ .*

Une condition nécessaire pour qu'il existe une bifurcation de Hopf est que le linéarisé du système (2.0.1) ait des valeurs propres imaginaires pures à un point singulier en un certain paramètre  $\lambda_0 = (\alpha_0, \beta_0, \delta_0, \rho_0)$ . Pour que le linéarisé ait des valeurs propres imaginaires pures, il est nécessaire et suffisant que la trace du linéarisé au point singulier soit nulle et que le déterminant du linéarisé soit positif. Alors on analyse la trace et le déterminant de façon semblable à Coutu [C]. On choisit  $\beta$  fixé. Pour chaque valeur de  $\beta$  on représente le diagramme de bifurcation dans le plan  $(\alpha, \delta)$ . On peut ignorer le paramètre  $\rho$ , car on observe qu'il ne joue aucun rôle dans les équations des bifurcations.

On remarque que  $(x_0, y_0)$  est un point singulier si  $f(x_0) = 0$  et  $y_0 = \frac{\rho}{\delta} x_0(1-x_0)$  où

$$f(x) = (1 - \delta\alpha)x^2 - \delta\beta x - \delta, \quad (2.3.1)$$

voir les relations (2.2.3) et II. De plus, la trace du linéarisé est nulle au point singulier  $(x_0, y_0)$  si  $g(x_0) = 0$  où

$$g(x) = -2x^3 + (\beta\delta + 1)x^2 + \delta(2 - \beta)x - 2\delta, \quad (2.3.2)$$

voir la relation (2.2.11). On remarque aussi que le déterminant est nul au point singulier si  $h(x) = 0$  lorsque  $f(x) = 0$  où

$$h(x) = \delta^2(1 - x)(\beta x + 2)\rho, \quad (2.3.3)$$

voir l'équation (2.2.19). Il faudra déterminer quand le déterminant évalué au point singulier est positif. On commence par déterminer des conditions pour lesquelles le déterminant au point singulier est nul. On remarque que  $h(x) = 0$  si et seulement si  $x = 1$  ou  $x = \frac{-2}{\beta}$ . Pour obtenir une surface de paramètres on prend  $f(1) = 0$  et  $f\left(\frac{-2}{\beta}\right) = 0$ . On obtient que les deux surfaces de paramètres sont  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$ , respectivement. Mais le cas  $x = 1$  ne nous intéresse pas car c'est le col-noeud sur l'axe  $x$ . On se limite plus tard à analyser la surface  $\mathcal{S}_d$ .

On cherche aussi les valeurs des paramètres pour lesquelles  $f(x)$  et  $g(x)$  ont des racines communes. On introduit un outil algébrique qui aide à déterminer si deux polynômes ont des racines communes.

**Définition 2.3.1.** [KA] *Soit*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ p_2(x) &= b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

où  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}[x]$  et  $a_n, b_m \neq 0$ , le résultant de  $p_1(x)$  et  $p_2(x)$  par rapport à  $x$  est

$$\begin{aligned} & \text{résultant}(p_1(x), p_2(x), x) \\ &= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

où  $||$  est le déterminant.

Dans ce mémoire les calculs ont été effectués avec le logiciel MAPLE.

**Proposition 2.3.2.** [KA] *Soit*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \\ p_2(x) &= b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \\ &= b_m \prod_{j=1}^m (x - \beta_j) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

où  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}[x]$  et  $a_n, b_m \neq 0$ . Alors

$$\text{résultant}(p_1(x), p_2(x), x) = a_n^n b_m^m \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j). \quad (2.3.7)$$

Donc le résultant de deux polynômes est nul si et seulement si les deux polynômes ont une racine en commun.

On prend le résultant des deux polynômes par rapport à  $x$ ,

$$\begin{aligned} \text{résultant}(f(x), g(x), x) &= (-\alpha(\alpha + \beta + 1)(4\alpha - \beta^2))\delta^5 \\ &+ (\beta^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 + 8\alpha^2)\delta^4 + (-5\alpha + 2\beta)\delta^3 + \delta^2. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

En regardant les signes des termes constants et dominants on peut savoir combien on a de racines positives et négatives. Le résultant  $(f(x), g(x), x)$  est nul si et seulement si  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  où

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta, \delta) &= \frac{\text{résultant}(f(x), g(x), x)}{\delta^2} \\ &= -\alpha(\alpha + \beta + 1)(4\alpha - \beta^2)\delta^3 \\ &\quad + (\beta^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 + 8\alpha^2)\delta^2 + (-5\alpha + 2\beta)\delta + 1. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

L'expression de  $P(\alpha, \beta, \delta)$  est compliquée, c'est un polynôme cubique en  $\delta$ . Pour trouver où  $P(\alpha, \beta, \delta)$  s'annule dans l'espace des paramètres il faut continuer notre analyse.

On introduit la notion de discriminant pour aider à faire l'analyse de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .

**Définition 2.3.2. [KA]** *Soit*

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.3.10)$$

où  $P \in \mathbb{C}[x]$ ,  $a_n \neq 0$  et  $P'(x)$  la dérivée de  $P(x)$  par rapport à  $x$ , alors le discriminant  $(\Delta)$  par rapport à  $x$  est

$$\Delta = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \text{résultant}(P(x), P'(x), x) \quad (2.3.11)$$

Dans ce mémoire les calculs on été effectués avec le logiciel MAPLE.

**Proposition 2.3.3. [KA]** *Soit*

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

où  $P \in \mathbb{C}[x]$  et  $a_n \neq 0$ . Alors

$$\Delta = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2, \quad (2.3.13)$$

où  $\Delta$  est le discriminant de  $P(x)$ . En particulier le discriminant est nul si et seulement si le polynôme a une racine multiple.

En plus, le discriminant d'un polynôme cubique donne plus d'information sur ses racines.

**Proposition 2.3.4. [KA]** *Soit*

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (2.3.14)$$

où  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  et  $\Delta$  son discriminant. Si

- $\Delta > 0$  toutes les racines sont réelles et distinctes,
- $\Delta = 0$  toutes les racines sont réelles et au moins deux sont égales,
- $\Delta < 0$   $P(x)$  a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

Pour connaître le nombre de racines en  $\delta$  de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ , comme  $P(\alpha, \beta, \delta)$  est cubique en  $\delta$ , on prend en plus le discriminant de  $P(\alpha, \beta, \delta)$  par rapport à  $\delta$  et on le dénote  $Q(\alpha, \beta)$ ,

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= Q_1(\alpha, \beta)Q_2(\alpha, \beta) \\ Q_1(\alpha, \beta) &= 4(-\beta^3 + 3\alpha\beta^2 - 3\alpha^2\beta - 27\alpha^2 + \alpha^3) \\ Q_2(\alpha, \beta) &= (-2\alpha + \beta\alpha - \beta^2 - \beta^3)^2. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

On calcule le discriminant de  $Q_1(\alpha, \beta)$ ,

$$\text{discriminant}(Q_1(\alpha, \beta), \alpha) = -19683\beta^2(\beta + 4). \quad (2.3.16)$$

Lorsque  $\beta \geq 0$  est fixé  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  a seulement une racine réelle par rapport à  $\alpha$ , que l'on appelle  $\alpha^{**}$ . On a que  $Q_2(\alpha, \beta) = 0$  a aussi seulement une racine réelle double et on l'appelle  $\alpha^*$ . On procède avec l'analyse en comparant les racines réelles de  $Q_1$  et  $Q_2$ , avec la proposition suivante.

**Proposition 2.3.5.** *Il existe une valeur unique de  $\beta_0$  positive telle que  $Q_1(\alpha, \beta_0) = 0$  et  $Q_2(\alpha, \beta_0) = 0$  ont une racine commune réelle en  $\alpha$ , soit  $\beta_0 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . De plus, pour  $\beta > 2$  la racine réelle  $\alpha^*$  positive de  $Q_2$  est plus grande que la racine réelle  $\alpha^{**}$  de  $Q_1$ , sauf lorsqu'elles sont identiques.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de résoudre  $Q_2(\alpha^*, \beta) = 0$  pour  $\alpha^*$  en terme de  $\beta$ , soit

$$\alpha^* = \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta - 2}. \quad (2.3.17)$$

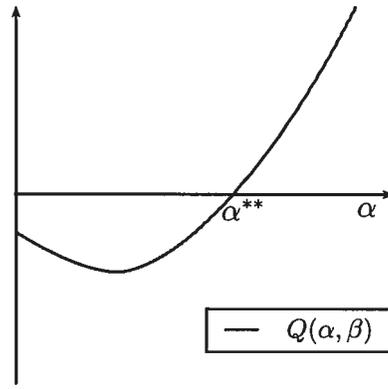


FIG. 2.1. La fonction  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $0 \leq \beta \leq 2$  ou  $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ .

On substitue dans  $Q_1(\alpha^*, \beta) = 0$  et on obtient

$$\frac{\beta^3(\beta + 4)(\beta + 2)(\beta^2 - 3\beta - 1)^2}{(\beta - 2)^3} = 0. \quad (2.3.18)$$

En résolvant pour  $\beta$  la seule solution réelle positive est  $\beta_0 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . C'est une racine double. On remarque aussi que  $Q_1(\alpha^*, \beta) > 0$  lorsque  $\beta > 2$  et  $\beta \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . Donc la racine  $\alpha^*$  de  $Q_2$  est toujours plus grande que la racine  $\alpha^{**}$  de  $Q_1$  sauf quand elles sont égales.  $\square$

Les deux propositions suivantes donnent le nombre de branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  par rapport à  $\alpha$  lorsque  $\beta \geq 0$  est fixé.

**Proposition 2.3.6.** *Lorsque  $0 \leq \beta \leq 2$  est fixé ou  $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$*

- *a une racine en  $\delta$  pour  $0 < \alpha < \alpha^{**}$ ,*
- *a une racine double en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^{**}$  (a une racine triple lorsque  $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ),*
- *a trois racines en  $\delta$  lorsque  $\alpha^{**} < \alpha$ .*

*Voir la figure 2.1.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'analyser le discriminant de  $P(\alpha, \beta, \delta)$ , c'est-à-dire  $Q(\alpha, \beta)$  (car  $P(\alpha, \beta, \delta)$  est un polynôme cubique en  $\delta$ ). On remarque que  $Q_2(\alpha, \beta)$  est toujours positif lorsque  $0 < \beta < 2$  est fixé. Pour  $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ,  $Q_2(\alpha, \beta) = 0$  a seulement une racine positive non-nulle  $\alpha^*$  par rapport à  $\alpha$ . On remarque aussi

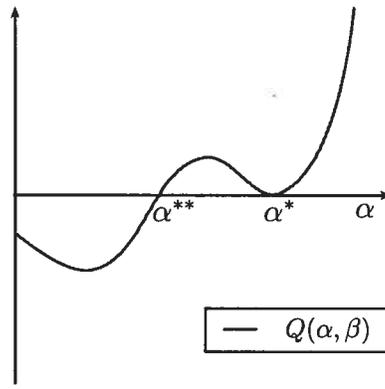


FIG. 2.2. La fonction  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $\beta > 2$  et  $\beta \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ .

que le discriminant (2.3.16) de  $Q_1(\alpha, \beta)$  par rapport à  $\alpha$  est toujours négatif lorsque  $\beta \geq 0$ . Alors  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  a une racine  $\alpha^{**}$  lorsque  $\beta$  est fixé, car  $Q_1$  est un polynôme d'ordre trois en  $\alpha$ . Ceci implique que  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  a une racine sur l'intervalle  $0 < \alpha < \alpha^{**}$ , car  $Q(\alpha, \beta)$  est négatif sur cet intervalle.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  a une racine double en  $\alpha = \alpha^{**}$  car  $Q_1(\alpha^{**}, \beta) = 0$ . Si  $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$  ceci implique que  $Q_1(\alpha^*, \beta) = Q_2(\alpha^{**}, \beta) = 0$ , car  $\alpha^* = \alpha^{**}$ , donc on obtient une racine triple. Finalement,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  a trois racines simples lorsque  $\alpha^{**} < \alpha$  car  $Q(\alpha, \beta)$  est positif.  $\square$

**Proposition 2.3.7.** Lorsque  $\beta > 2$  est fixé et  $\beta \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$

- a une racine en  $\delta$  pour  $0 < \alpha < \alpha^{**}$ ,
- a une racine double en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^{**}$ ,
- a trois racines en  $\delta$  pour  $\alpha^{**} < \alpha < \alpha^*$ ,
- a une racine double en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^*$ ,
- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $\alpha^* < \alpha$ .

Voir la figure 2.2.

DÉMONSTRATION. Les trois premiers items de la liste sont déjà démontrés dans la démonstration de la Proposition 2.3.6. On remarque que lorsque  $\beta > 2$  est fixé,  $Q_2(\alpha, \beta) = 0$  a une racine  $\alpha^*$  positive. La racine  $\alpha^*$  est toujours plus grande que  $\alpha^{**}$  par la Proposition 2.3.5 avec l'hypothèse que  $\beta \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . Donc lorsque

$Q_2(\alpha^*, \beta) = 0$  on a une racine double. De plus  $Q_2(\alpha, \beta) > 0$  avant et après la racine  $\alpha^*$  et  $Q_1(\alpha, \beta) > 0$  après la racine  $\alpha^{**}$ .  $\square$

La proposition suivante donne des conditions pour déterminer s'il existe des intersections entre certaines surfaces de paramètres et les branches de solutions  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .

**Proposition 2.3.8.** *Lorsque  $\beta \geq 0$  et  $\alpha, \delta > 0$  il y a exactement une intersection entre  $\mathcal{S}_1$  et  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ , et exactement une intersection entre  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  et  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ . Pour  $\beta$  fixé, le point d'intersection entre  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $\mathcal{S}_1$  est donné par*

$$\alpha^{\mathcal{S}_1} = \frac{(\beta + 1)(\beta^2 + 3\beta + 1)}{\beta + 3}. \quad (2.3.19)$$

*Le point d'intersection entre  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  est donné par*

$$\alpha^{\mathcal{S}_{1/2}} = \beta^2 + 3\beta + 2. \quad (2.3.20)$$

DÉMONSTRATION. Si on définit les fonctions suivantes

$$k_1(\alpha, \beta, \delta) = \delta(\alpha + \beta + 1) - 1 \quad (2.3.21)$$

$$k_{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \delta) = \delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1$$

il suit que  $k_1(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $k_{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \delta) = 0$  implique que les paramètres sont sur les surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ , respectivement. Donc il suffit de prendre le résultant de  $P(\alpha, \beta, \delta)$  et  $k_1(\alpha, \beta, \delta)$  par rapport à  $\delta$  et le résultant de  $P(\alpha, \beta, \delta)$  et  $k_{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \delta)$  par rapport à  $\delta$ . On obtient que les racines en commun admissibles ( $\alpha, \delta > 0$ ) sont

$$\alpha^{\mathcal{S}_1} = \frac{(\beta + 2)(\beta^2 + 3\beta + 1)}{\beta + 3}, \quad (2.3.22)$$

$$\alpha^{\mathcal{S}_{1/2}} = \beta^2 + 3\beta + 2,$$

respectivement.  $\square$

Il est important de savoir si les solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  qui sont dans le premier quadrant pour des valeurs particulières des paramètres restent dans le premier quadrant pour les autres valeurs des paramètres.

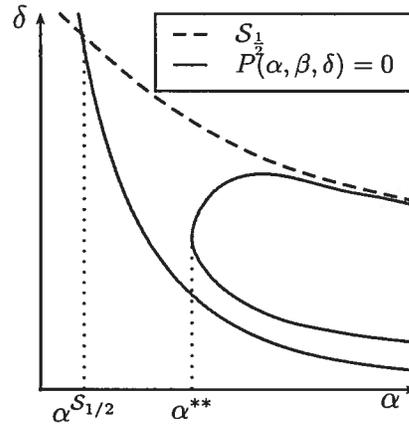


FIG. 2.3. Les positions relatives de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $S_{\frac{1}{2}}$  lorsque  $0 \leq \beta \leq 2$ .

**Proposition 2.3.9.** *Lorsque  $\beta \geq 0$  est fixé, si une branche de solution de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  a un point dans le premier quadrant de l'espace des paramètres  $(\alpha, \delta)$ , alors la branche est entièrement contenue dans le premier quadrant.*

DÉMONSTRATION. On fait l'observation que si  $P(0, \beta, \delta) = 0$  il n'y a pas de solution en  $\beta, \delta$  telle que  $\delta > 0$ . De façon similaire il est impossible de résoudre  $P(\alpha, \beta, 0) = 0$  en  $\beta$  et  $\alpha > 0$ . Il suit par le théorème de la valeur intermédiaire que les branches de solutions n'intersectent pas la frontière du premier quadrant.  $\square$

Les deux propositions suivantes donnent les positions relatives entre les courbes  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $S_{\frac{1}{2}}$ .

**Proposition 2.3.10.** *Lorsque  $0 \leq \beta \leq 2$ , les positions relatives de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $S_{\frac{1}{2}}$  sont données par la figure 2.3.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de déterminer où se trouvent les racines de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  si  $\alpha, \beta$  sont fixés. Pour cela on cherche les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  a une racine double en  $\delta$  avec changement de signe du discriminant (i.e. le nombre de racines de passe d'une à trois). Il faut résoudre  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  lorsque  $\beta$  est fixé. La solution étant 'trop compliquée', on procède d'une façon différente. Soit, de résoudre  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  lorsque  $\alpha$  est fixé. On obtient à l'aide

du logiciel MAPLE la solution réelle positive est

$$\beta^{**} = -3\alpha^{\frac{2}{3}} + \alpha. \quad (2.3.23)$$

Ceci suggère la substitution  $\alpha = a^3$ . Alors

$$Q_1(a, \beta) = 4(a^3 - 3a^2 - \beta)(\beta^2 - (2a^3 + 3a^2)\beta + a^6 + 3a^5 + 9a^4) \quad (2.3.24)$$

ce qui donne comme unique racine

$$\beta^{**} = -3a^2 + a^3, \quad (2.3.25)$$

vu que le discriminant du second facteur est  $-27a^4 < 0$ . On résout  $P(a^3, -3a^2 + a^3, \delta) = 0$  et on obtient que les solutions sont

$$\delta_1^{**} = \frac{-1}{a^2(-4 - 7a + 2a^2)} \quad (2.3.26)$$

et

$$\delta_2^{**} = \frac{1}{a^2(a^2 - 2a + 1)} \quad (2.3.27)$$

la dernière étant une racine double. On veut montrer que pour  $\beta \in [0, 2]$  ces deux racines sont sous la surface  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ . Si on choisit  $a \in [3, \frac{7}{2}]$  ceci implique que  $\beta^{**}$  va atteindre toute valeur sur l'intervalle  $[0, \frac{49}{8}]$ , car  $a^3 - 3a^2$  est strictement croissant sur l'intervalle  $[3, \frac{7}{2}]$ . Il reste à déterminer si les points sont situés sous  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ . On calcule  $\delta$  pour le point de la surface  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  correspondant à  $(\alpha, \beta) = (a^3, -3a^2 + a^3)$  et on soustrait cette valeur, soit  $\bar{\delta}$ , de la racine  $\delta_1^{**}$ , ce qui donne

$$\delta_1^{**} - \bar{\delta} = \frac{2(a^2 - 4a + 2)(a + 1)^2}{a^2(3a^2 - 6a^2 + 4)(2a + 1)(a - 4)} \quad (2.3.28)$$

et de la même façon avec la racine  $\delta_2^{**}$ , on obtient

$$\delta_2^{**} - \bar{\delta} = \frac{(a^2 - a - 1)(a - 2)^2}{a^2(3a^2 - 6a^2 + 4)}. \quad (2.3.29)$$

On remarque que sur l'intervalle  $[3, \frac{7}{2}]$  les deux expressions obtenues sont positives, donc  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  est située au dessus des deux racines. Par continuité et par les Propositions 2.3.9 et 2.3.8 les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  restent

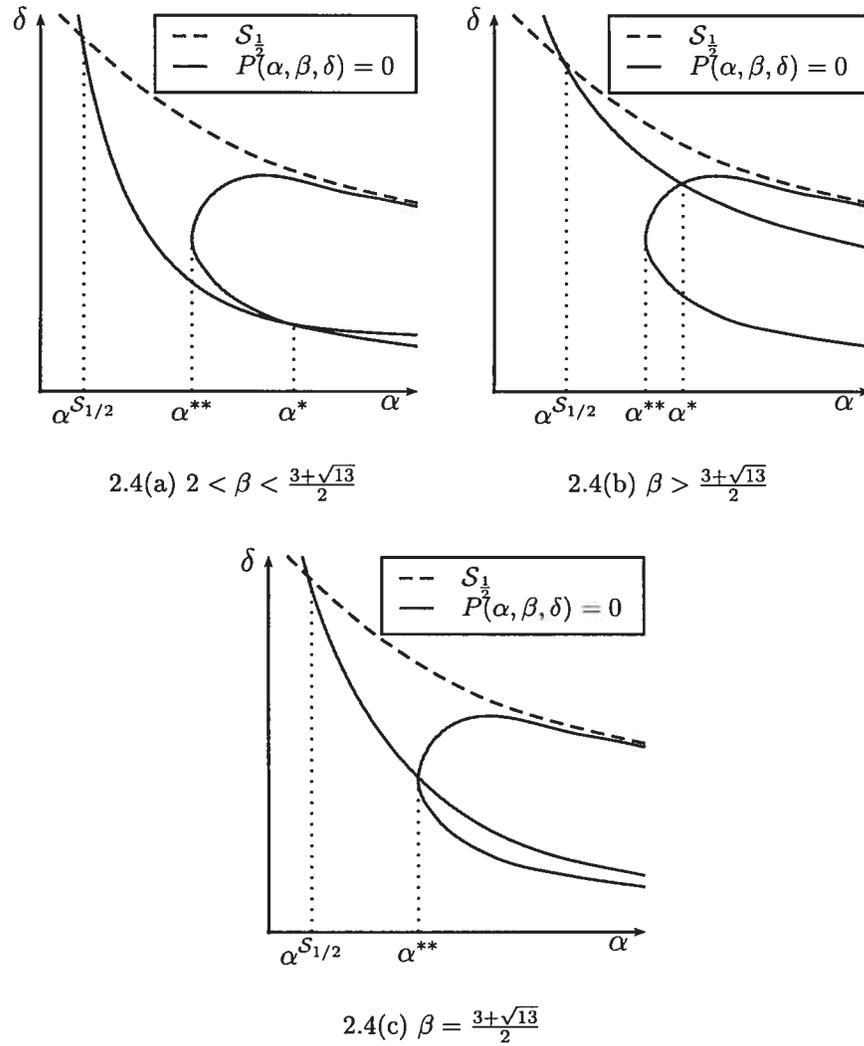


FIG. 2.4. Les positions relatives de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $S_{\frac{1}{2}}$ .

situés sous  $S_{\frac{1}{2}}$  sauf celle qui l'intersecte (voir la figure 2.4). La Proposition 2.3.6 indique où sont situées les branches de solutions par rapport à  $\alpha$ .  $\square$

**Proposition 2.3.11.** *Lorsque  $\beta > 2$ , les positions relatives de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $S_{\frac{1}{2}}$  sont données par la figure 2.4.*

**DÉMONSTRATION.** De façon semblable à la démonstration de la proposition précédente on veut déterminer la position des trois racines en  $\delta$  de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .

On obtient que  $Q_2(\alpha^*(\beta), \beta) = 0$  lorsque  $\beta > 2$  est fixé, où

$$\alpha^*(\beta) = \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta - 2}. \quad (2.3.30)$$

On évalue

$$P(\alpha^*(\beta), \beta, \delta) = \frac{(2 - \beta - 3\delta\beta^2 + 3\delta\beta^3)(2 + 2\delta\beta - \beta + 3\delta\beta^2 + \delta\beta^3)^2}{(\beta - 2)^3}. \quad (2.3.31)$$

Alors  $P(\alpha^*(\beta), \beta, \delta) = 0$  si et seulement si

$$\delta_1^* = \frac{\beta - 2}{3\beta^2(\beta - 1)} \quad (2.3.32)$$

ou

$$\delta_2^* = \frac{\beta - 2}{\beta(\beta^2 + 3\beta + 2)}. \quad (2.3.33)$$

la dernière étant une racine double. On remarque que

$$\delta_1^* \begin{cases} > \delta_2^* & \text{si } \beta \in (2, \frac{3+\sqrt{13}}{2}) \\ = \delta_2^* & \text{si } \beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ < \delta_2^* & \text{si } \beta > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad (2.3.34)$$

Les points  $\delta_1^*$  et  $\delta_2^*$  sont sous  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ , car l'expression

$$\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \quad (2.3.35)$$

évaluée à  $\alpha^*$  est donnée par

$$\delta = \frac{\beta - 2}{\beta^3 + 3\beta^2 - 8}. \quad (2.3.36)$$

Pour n'importe quel  $\beta > 2$ ,  $\delta$  est plus grand que les deux racines  $\delta_1^*$  et  $\delta_2^*$ . La branche est sous  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  par les mêmes arguments que la démonstration de la proposition précédente.  $\square$

Il est important de savoir quelles branches de solutions sont admissibles pour le système biologique. La proposition suivante indique une branche de solution qui n'est pas admissible pour le système biologique.

**Proposition 2.3.12.** *La branche de solution de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  qui intersecte  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  lorsque  $\beta \geq 0$  n'est pas admissible pour le système biologique car l'abscisse du point singulier est négative.*

DÉMONSTRATION. On vérifie que la branche de solution qui intersecte la surface  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  n'est pas admissible. On prend un point test, soit à l'intersection des deux surfaces. On a déterminé lorsque les deux surfaces s'intersectent

$$\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \quad (2.3.37)$$

et

$$\alpha^{\mathcal{S}_{1/2}} = \beta^2 + 3\beta + 2. \quad (2.3.38)$$

Si on substitue (2.3.38) dans (2.3.37), on obtient

$$\delta^{\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\beta^2 + 5\beta + 5} \quad (2.3.39)$$

Si on substitue  $\delta = \delta^{\mathcal{S}_{1/2}}$  et  $\alpha = \alpha^{\mathcal{S}_{1/2}}$  dans l'expression  $f(x)$  (voir (2.3.1)) et on résout  $f(x_0) = 0$  afin de déterminer l'abscisse du point singulier, on obtient

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}, \\ x_0 &= \frac{-1}{\beta + 2}. \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

On doit déterminer quel  $x_0$  satisfait  $g(x_0) = 0$  (i.e. la trace est nulle au point singulier). On substitue  $\delta = \delta^{\mathcal{S}_{1/2}}$  et  $\alpha = \alpha^{\mathcal{S}_{1/2}}$  dans  $g(x)$  (voir (2.3.2)). On obtient

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\frac{1}{4}\beta + 1}{\beta^2 + 5\beta + 6}, \\ g\left(\frac{-1}{\beta + 2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Vu que l'abscisse du point singulier qui satisfait  $g(x_0) = 0$  est négative le point n'est pas admissible. La branche qui intersecte  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  n'est pas admissible par continuité. En effet, pour que l'abscisse du point singulier change de signe l'abscisse doit passer soit par 0, soit par l'infini ce qui n'est pas le cas.  $\square$

**Proposition 2.3.13.** *Lorsque  $\beta \geq 0$ , la branche de solution de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  qui n'intersecte pas  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  correspond au point singulier d'abscisse  $x_0 < \frac{1}{2}$ .*

DÉMONSTRATION. Cela suit directement, car lorsque  $\beta \geq 0$  et  $x \geq 0$  la fonction  $p(x)$  est strictement monotone stricte. Voir la figure 1.1.  $\square$

**Proposition 2.3.14.** *Le déterminant du linéarisé du système est positif sous  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ .*

DÉMONSTRATION. On a déterminé que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$  sont les surfaces sur lesquelles le déterminant du linéarisé est nul. On a aussi vu que les deux surfaces de solutions sont au-dessus de  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  lorsqu'elles sont situées dans le premier quadrant de l'espace des paramètres  $(\alpha, \delta)$  pour les paramètres acceptés pour le système biologique. Par définition du déterminant on obtient qu'il est positif car les paramètres sont situés sous la surface  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ , par la Proposition 2.3.13.  $\square$

**Proposition 2.3.15.** *La branche de solution de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  qui n'intersecte pas  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  lorsque  $\beta \geq 0$  est admissible pour le système biologique et la bifurcation de Hopf.*

DÉMONSTRATION. Pour que les branches de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  soient admissibles pour la bifurcation de Hopf, il est nécessaire que la trace du linéarisé soit nulle et que le déterminant soit positif. En vertu de la Proposition 2.3.14, la seule branche qui peut être admissible pour le système biologique est sous la surface  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ . Alors le déterminant est positif. Il reste à montrer que la branche qui n'intersecte pas  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  est admissible pour le système biologique et que la trace évaluée au point singulier correspondant est nulle. On sépare la démonstration en deux cas.

Si  $\beta \in [0, 2]$  on vérifie la branche en prenant  $a \in [3, \frac{7}{3}]$ , un point de la branche de solution soit  $\alpha = a^3$ ,  $\beta^{**}$  donné en (2.3.25) et  $\delta_2^{**}$  donné en (2.3.27). On substitue  $\delta = \delta_2^{**}$ ,  $\alpha = a^3$  et  $\beta = \beta^{**}$  dans l'expression  $f(x)$ , on résout  $f(x_0) = 0$  pour

déterminer l'abscisse du point singulier. On obtient

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{a}, \\ x_0 &= \frac{-1}{a(a^2 - 3a + 1)} < 0. \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

On veut déterminer pour laquelle de ces valeurs la trace est nulle. On substitue donc  $\delta = \delta_2^{**}$ ,  $\alpha = a^3$  et  $\beta = \beta^{**}$  dans l'expression  $g(x)$ , on évalue aux  $x_0$ ,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{a}\right) &= 0, \\ g\left(\frac{-1}{a(a^2 - 3a + 1)}\right) &= -\frac{(a-2)^2}{a^2(a^2 - 3a + 1)^2}. \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

Vu que la solution positive est celle qui annule la trace la branche de solution est admissible pour le système biologique et admissible pour la bifurcation de Hopf par continuité (voir Proposition 2.3.12). Il reste à montrer que  $y_0 > 0$ , ceci découle du fait que  $0 < x_0 < 1$  car  $a \in [3, \frac{7}{3}]$  et de la relation **II** en (2.2.2).

Si  $\beta > 2$  on prend un point de la branche de solution, soit  $\beta^*$  donné en (2.3.30) et  $\delta_1^*$  donné en (2.3.32). On substitue  $\delta = \delta_1^*$ ,  $\alpha = \alpha^*$  dans l'expression  $f(x)$ , on résout  $f(x_0) = 0$  pour déterminer la composante  $x$  du point singulier. On obtient

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\beta}, \\ x_0 &= -\frac{1}{2\beta}. \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

De façon similaire on veut déterminer lorsque la trace est nulle, on substitue  $\delta = \delta_1^*$ ,  $\alpha = \alpha^*$  dans l'expression  $g(x)$ , on évalue aux  $x_0$ ,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{\beta}\right) &= 0 \\ g\left(\frac{-1}{2\beta}\right) &= \frac{\beta^2 - 3\beta - 1}{4\beta^3(1 - \beta)}. \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

Vu que la composante positive annule la trace, la branche de solution est admissible pour le système biologique et admissible pour la bifurcation de Hopf par continuité. Il reste à montrer que  $y_0 > 0$ , ceci découle du fait que  $0 < x_0 < 1$  car

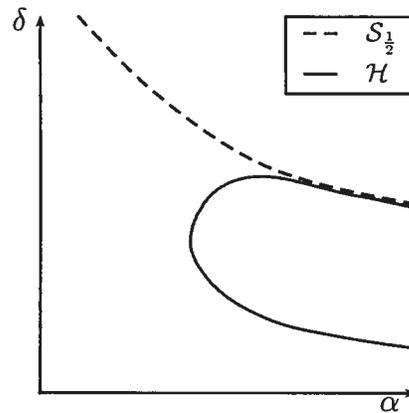


FIG. 2.5. Le diagramme de  $\mathcal{H}$  lorsque  $\beta \geq 0$ .

$\beta > 2$  et de la relation II.

□

Ceci complète la démonstration de la Proposition 2.3.1. Il existe une bifurcation de Hopf de codimension au moins 1 qui se produit sur la courbe  $\mathcal{H}$  dans la figure 2.5.

#### 2.4. ANALYSE DE LA TRACE DU LINÉARISÉ LORSQUE $\beta < 0$

Dans cette section on va ajouter des détails aux résultats de Coutu [C] sur les surfaces de bifurcation de Hopf, c'est-à-dire les surfaces de bifurcation qui satisfont aux conditions nécessaires de la bifurcation de Hopf et du système biologique. La proposition suivante est une analyse du discriminant de  $Q_1$  (voir (2.3.16)) et de la position de ces racines.

On dénote les racines de  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  par  $\alpha_1^{**}$  et  $\alpha_2^{**}$ ,  $\alpha_1^{**}$  étant la plus petite des deux.

**Proposition 2.4.1.** *Le polynôme  $Q_1(\alpha, \beta)$  a*

- deux racines positives  $\alpha_1^{**}$  et  $\alpha_2^{**}$  en  $\alpha$  lorsque  $\beta \in (-4, 0)$ ,
- une racine double  $\alpha^{**}$  positive en  $\alpha$  pour  $\beta = -4$ ,
- une racine positive  $\alpha^{**}$  en  $\alpha$  lorsque  $\beta < -4$ .

Lorsque  $\beta$  est fixé et négatif  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  a deux racines et  $Q_2(\alpha, \beta) = 0$  a une racine. On procède en comparant les racines  $\alpha_1^{**}$  et  $\alpha_2^{**}$  de  $Q_1$  et la racine  $\alpha^*$  (toujours double) de  $Q_2$ . On a que  $\alpha^* > 0$  si  $\beta < -1$ .

**Proposition 2.4.2.** *Il existe trois valeurs de  $\beta_0 < 0$  telles que  $Q_1(\alpha, \beta_0) = 0$  et  $Q_2(\alpha, \beta_0) = 0$  ont une racine commune réelle en  $\alpha$ , soit  $\beta_0 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}, -2, -4$ . De plus, pour  $\beta < -1$  la racine réelle positive  $\alpha^*$  de  $Q_2$  est*

- $0 < \alpha^* < \alpha_1^{**} < \alpha_2^{**}$  lorsque  $\beta \in (-2, -1)$ ,
- $\alpha^* = \alpha_1^{**} < \alpha_2^{**}$  pour  $\beta = -2$ ,
- $\alpha_1^{**} < \alpha^* < \alpha_2^{**}$  lorsque  $\beta \in (-4, -2)$ ,
- $\alpha^* = \alpha^{**} = 8$  pour  $\beta = -4$ ,
- $\alpha^* = \alpha^{**} > 8$  pour  $-4 > \beta$ .

Les propositions suivantes décrivent la position des solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  lorsque  $\beta < 0$  à l'aide du discriminant de  $Q_1$  et  $Q_2$  et des propositions ci-dessus.

**Proposition 2.4.3.** *Lorsque  $-1 < \beta < 0$  est fixé,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$*

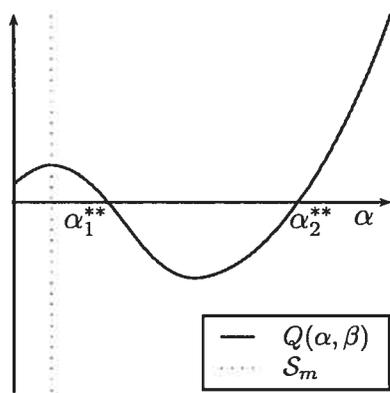
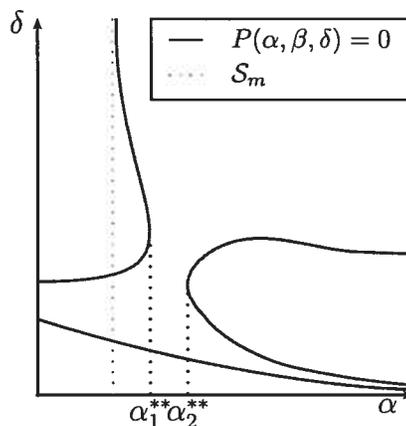
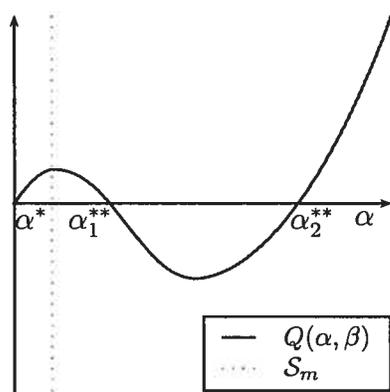
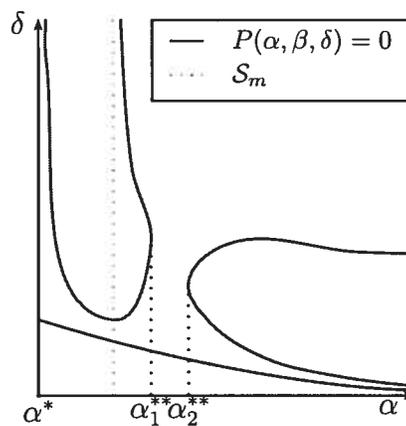
- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha_1^{**}$  sauf pour  $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$  (une racine négative lorsque  $4\alpha < \beta^2$ ),
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_1^{**}$ ,
- a une racine positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha_1^{**} < \alpha < \alpha_2^{**}$ ,
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_2^{**}$ ,
- a trois racines positives en  $\delta$  lorsque  $\alpha_2^{**} < \alpha$ .

Voir la figure 2.6.

**Proposition 2.4.4.** *Lorsque  $\beta = -1$ ,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$*

- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha_1^{**}$  sauf pour  $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$  (une racine négative lorsque  $4\alpha < \beta^2$ ),
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_1^{**}$ ,
- a une racine positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha_1^{**} < \alpha < \alpha_2^{**}$ ,
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_2^{**}$ ,
- a trois racines positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha_2^{**} < \alpha$ .

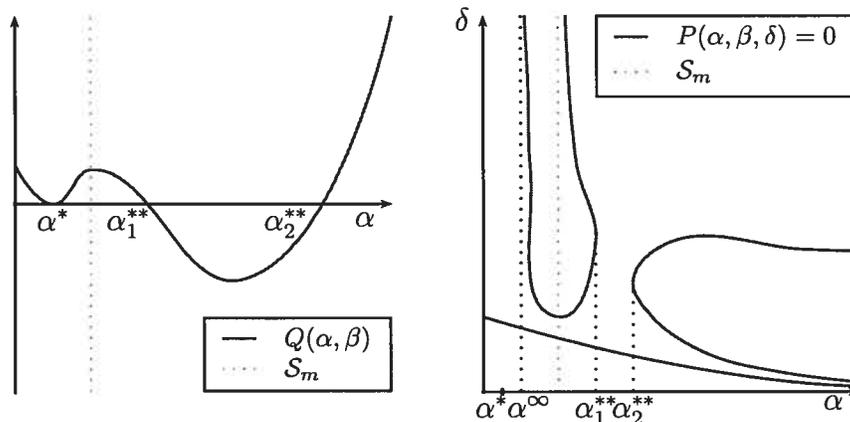
Voir la figure 2.7.

2.6(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.6(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.6.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $-1 < \beta < 0$ .2.7(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.7(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.7.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $\beta = -1$ .

Pour les propositions suivantes on a besoin de définir  $\alpha^\infty$ , soit

$$\alpha^\infty = -\beta - 1. \quad (2.4.1)$$

On remarque, que  $\alpha^\infty > 0$  si  $\beta < -1$  et que  $0 < \alpha^* < \alpha^\infty$  si  $\beta \in (-2, -1)$ .

2.8(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.8(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.8.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $-2 < \beta < -1$ .

**Proposition 2.4.5.** Lorsque  $-2 < \beta < -1$  est fixé,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$

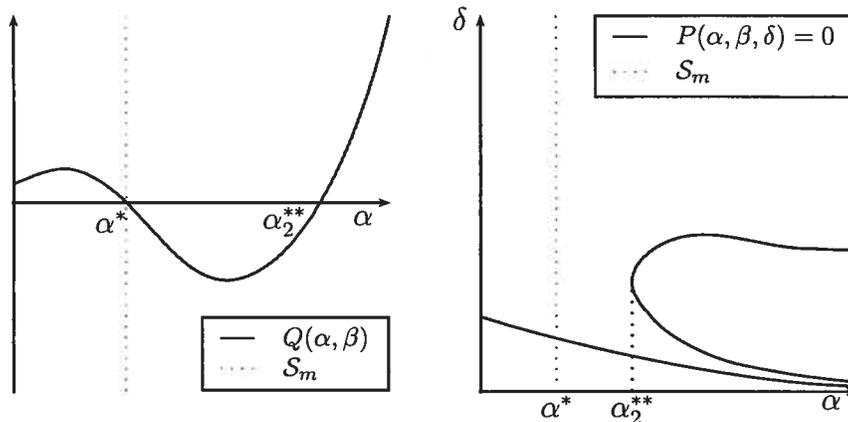
- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha^\infty$ , deux racines négatives et une racine positive, la racine étant double pour  $\alpha = \alpha^*$ ,
- a une racine négative et une racine positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^\infty$ ,
- a deux racines positives et une négative en  $\delta$  lorsque  $\alpha^\infty < \alpha < \alpha_1^{**}$  sauf pour  $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$  (une racine positive et deux racines négatives lorsque  $4\alpha < \beta^2$ ),
- a une racine simple positive et une racine double positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_1^{**}$ ,
- a une racine positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha_1^{**} < \alpha < \alpha_2^{**}$ ,
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_2^{**}$ ,
- a trois racines positives en  $\delta$  lorsque  $\alpha_2^{**} < \alpha$ .

Voir la figure 2.8.

La prochaine proposition décrit les branches de solutions lorsque  $\beta = -2$ . Dans ce cas on a que  $\alpha_1^{**} = \alpha^* = \alpha^\infty = 1$ .

**Proposition 2.4.6.** Lorsque  $\beta = -2$ ,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$

- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha^*$  (deux racines négatives et une positive),

2.9(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.9(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.9.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $\beta = -2$ .

- a une racine double négative et une racine positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^*$ ,
- a une racine positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha^* < \alpha < \alpha_2^{**}$ ,
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_2^{**}$ ,
- a trois racines positives en  $\delta$  lorsque  $\alpha_2^{**} < \alpha$ .

Voir la figure 2.9.

Lorsque  $\beta = -2$ , on perd la branche à gauche. Ceci découle du fait que le coefficient du terme cubique de  $P(\alpha, \beta, \delta)$  s'annule lorsque  $\alpha_1^{**} = \alpha^* = \alpha^\infty = 1$ . À ce point la branche de solution passe à l'infini vu que la distance entre  $\alpha^\infty$  et  $\alpha_1^{**}$  tend vers 0 lorsque  $\beta$  tend vers  $-2$ . Or c'est à l'intérieur de l'intervalle  $(\alpha^\infty, \alpha_1^{**})$  que la branche de solution est située.

**Proposition 2.4.7.** Lorsque  $-4 < \beta < -2$  est fixé,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$

- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha_1^{**}$  sauf pour  $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$  ou  $\alpha = \alpha^\infty$ ,
  - deux racines négatives lorsque  $\alpha < \alpha^\infty$ ,
  - une racine négative lorsque  $\alpha > \alpha^\infty$ ,
  - aucune racine négative lorsque  $4\alpha > \beta^2$ ,
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_1^{**}$ ,

- a une racine positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha_1^{**} < \alpha < \alpha^*$ ,
- a une racine simple positive et une racine double positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^*$ ,
- a une racine positive en  $\delta$  lorsque  $\alpha^* < \alpha < \alpha_2^{**}$ ,
- a une racine double et une racine positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha_2^{**}$ ,
- a trois racines positives en  $\delta$  lorsque  $\alpha_2^{**} < \alpha$ .

Voir la figure 2.10.

**Proposition 2.4.8.** Lorsque  $-4 < \beta < -2$  est fixé, le point isolé  $\mathcal{P}$  de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  n'est pas admissible pour le système biologique car l'abscisse du point singulier est complexe.

DÉMONSTRATION. Le point isolé  $\mathcal{P}$  est situé en  $\alpha = \alpha^*$  et on a une solution explicite de la racine  $\alpha^*$ , soit

$$\alpha^* = \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta - 2}. \quad (2.4.2)$$

On veut déterminer pour quelle valeur de  $\delta$  on a  $\mathcal{P}$ . Donc on résout  $P(\alpha^*, \beta, \delta) = 0$  en  $\delta$ . On obtient

$$\begin{aligned} \delta_1^{\mathcal{P}} &= \frac{\beta - 2}{3\beta^2(-1 + \beta)} \\ \delta_2^{\mathcal{P}} &= \frac{\beta - 2}{\beta(\beta^2 + 3\beta + 2)} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

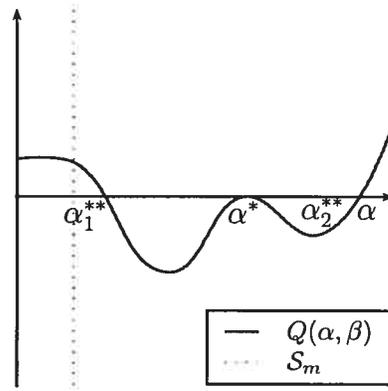
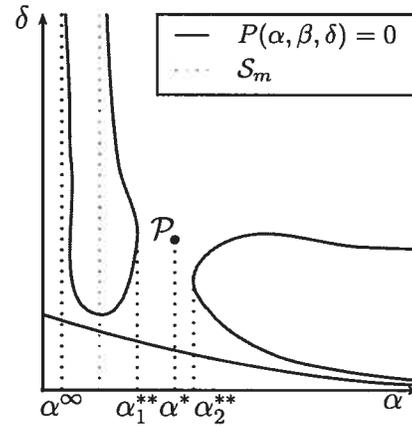
la dernière étant la racine double. Si on substitue  $\delta = \delta_2^{\mathcal{P}}$  et  $\alpha = \alpha^*$  dans l'expression  $f(x)$  (voir (2.3.1)). On observe que

$$\text{discriminant}(f(x), x) = \frac{(\beta + 4)(\beta - 2)}{\beta(\beta + 1)^2(\beta + 2)} \quad (2.4.4)$$

est négatif sur l'intervalle  $(-4, -2)$ . Vu que  $f(x)$  est une quadratique en  $x$ , ceci implique qu'il n'existe pas de racine réelle.  $\square$

**Proposition 2.4.9.** Lorsque  $\beta = -4$ ,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$

- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha^*$  sauf pour  $\alpha = \alpha^\infty$  ou  $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ ,
  - deux racines négatives et une positive lorsque  $\alpha < \alpha^\infty$ ,
  - une racine négative et deux positives lorsque  $\alpha^\infty < \alpha < \frac{\beta^2}{4}$ ,
  - trois racines positives lorsque  $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$ ,

2.10(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.10(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.10.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $-4 < \beta < -2$ .

- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^* = 8$ ,
- a trois racines positives en  $\delta$  lorsque  $\alpha^* < \alpha$ .

Voir la figure 2.11.

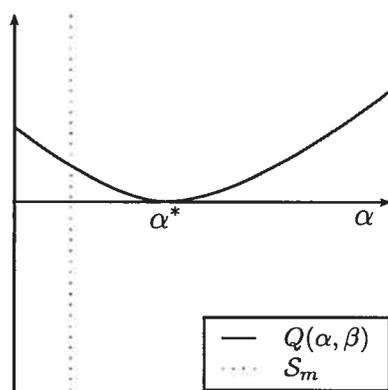
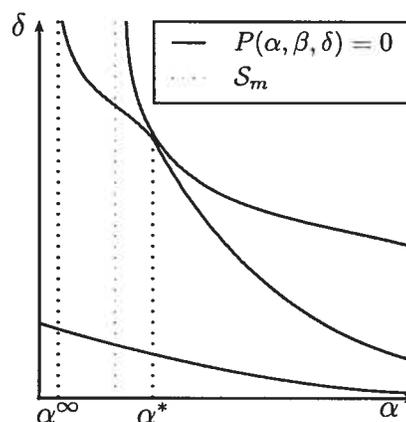
Lorsque  $\beta = -4$  l'une des branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  est la courbe  $S_d$ . On a que les racines de  $Q_1(\alpha, \beta) = 0$  et  $Q_2(\alpha, \beta) = 0$  sont  $\alpha^* = \alpha_1^{**} = \alpha_2^{**} = 8$ . En ce point deux des branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  sont tangentes l'une à l'autre. On observe la tangence en localisant  $P(\alpha, \beta, \delta)$  en  $(\alpha, \beta, \delta) = (8, -4, \frac{1}{4})$ . C'est-à-dire on pose

$$(\alpha^l, \beta^l, \delta^l) = (8 + A, -4, \frac{1}{4} + D) \quad (2.4.5)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} P(\alpha^l, \beta^l, \delta^l) &= 144D^2 + 18DA + \frac{9}{16}A^2 + o(|A, D|^2) \\ &= \frac{9}{16}(A + 16D)^2 + o(|A, D|^2). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Donc on a tangence des deux branches de solutions. Leur tangente commune a une pente de  $-\frac{1}{16}$ .

2.11(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.11(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.11.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $\beta = -4$ .

**Proposition 2.4.10.** Lorsque  $\beta < -4$  est fixé,  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$

- a trois racines en  $\delta$  lorsque  $0 < \alpha < \alpha^*$  sauf pour  $\alpha = \alpha^\infty$  et  $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ ,
  - deux racines négatives et une positive lorsque  $0 < \alpha < \alpha^\infty$ ,
  - une racine négative et deux positives lorsque  $\alpha^\infty < \alpha < \frac{\beta^2}{4}$ ,
  - trois racines positives lorsque  $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$ ,
- a une racine double positive et une racine simple positive en  $\delta$  pour  $\alpha = \alpha^*$ ,
- a trois racines positives en  $\delta$  lorsque  $\alpha^* < \alpha$ ,

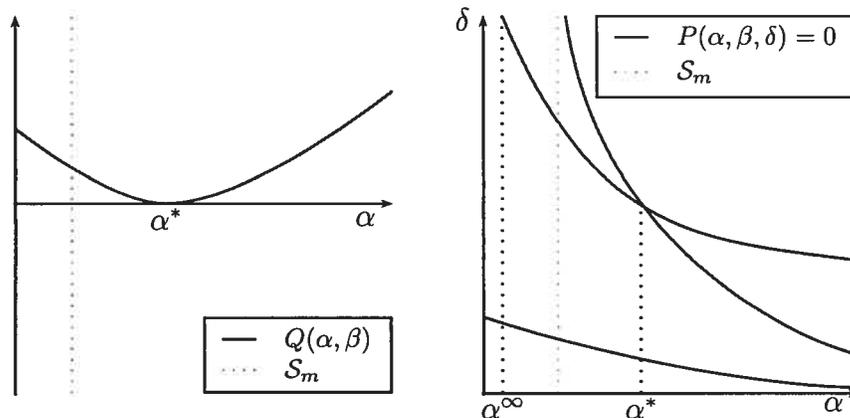
Voir la figure 2.12.

La proposition suivante découle des observations de Coutu [C], et donne un résumé de l'information pertinente lorsque  $\beta < 0$ .

**Proposition 2.4.11.** [C] Les conditions nécessaires pour que le système biologique ait une bifurcation de Hopf, soit que

- la trace du linéarisé est nulle,
- le déterminant du linéarisé est positif,
- l'abscisse du point singulier fait partie de l'intervalle  $(0, 1)$

sont représentées par la courbe  $\mathcal{H}$ . Voir la figure 2.13.

2.12(a) La fonction  $Q(\alpha, \beta)$ .2.12(b) Les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ .FIG. 2.12.  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et  $Q(\alpha, \beta)$  lorsque  $\beta < -4$ .

## 2.5. RÉDUCTION À UN SYSTÈME POLYNOMIAL

On réduit le système (2.0.1) à un système polynomial avant d'utiliser la méthode de Lyapunov. On veut que le point singulier que l'on étudie soit à l'origine. Alors la première étape est de faire une translation du système pour que le point singulier soit à l'origine. C'est-à-dire le changement de variables suivant

$$x_1 = x - x_0 \tag{2.5.1}$$

$$y_1 = y - y_0$$

où  $(x_0, y_0)$  est le point singulier du système à étudier qui n'est pas situé sur l'un des axes. Le nouveau système ainsi devient

$$\dot{x}_1 = R(x_1 + x_0, y_1 + y_0) \tag{2.5.2}$$

$$\dot{y}_1 = S(x_1 + x_0, y_1 + y_0).$$

Soit

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}, \tag{2.5.3}$$

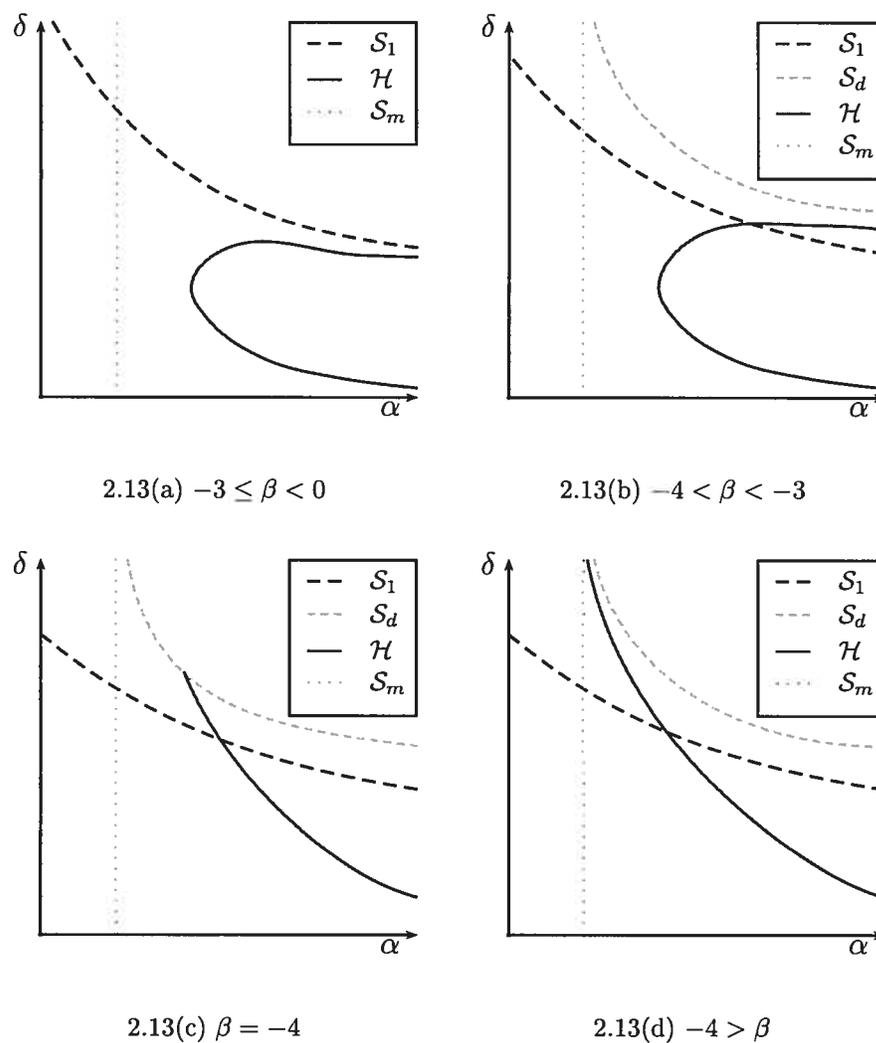


FIG. 2.13. Le diagramme de bifurcation partiel lorsque  $\beta < 0$ .

pour la deuxième étape on change d'échelle sur le temps en divisant le champ de vecteurs (2.5.2) par  $p(x_1 + x_0)$ .

On remarque que  $p(x_0) > 0$  ce qui implique que la reparamétrisation du champ de vecteurs ne changera ni la forme, ni le sens de parcours des solutions près de

l'origine. On obtient le système suivant

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= R_2(x_1, y_1) = \frac{S(x_1 + x_0, y_1 + y_0)}{p(x_1 + x_0)} \\
 &= h(x_1) - y_1 \\
 y'_1 &= S_2(x_1, y_1) = \frac{R(x_1 + x_0, y_1 + y_0)}{p(x_1 + x_0)} \\
 &= (y_1 + y_0) \left( \frac{-\delta}{p(x_1 + x_0)} + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

où

$$h(x) = \frac{\rho(-\alpha(x + x_0)^3 + (\alpha - \beta)(x + x_0)^2 + (\beta - 1)(x + x_0) + 1)}{x + x_0} - y_0. \tag{2.5.5}$$

On continue la réduction du système avec un deuxième changement de variables, soit

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 \\
 y_2 &= y_1 - h(x_1)
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Le système devient alors

$$\begin{aligned}
 x'_2 &= R_3(x_2, y_2) = \dot{x}_1 \\
 &= -y_2 \\
 y'_2 &= S_3(x_2, y_2) = \dot{y}_1 - \frac{dh}{dx}(x_1)\dot{x}_1 \\
 &= S_2(x_2, y_2 + h(x_2)) + y_2 \frac{dh}{dx}(x_1) \\
 &= (h(x_2) + y_0) \left( \frac{-\delta}{p(x_2 + x_0)} + 1 \right) + y_2 \left( \frac{dh}{dx}(x_1) + 1 - \frac{\delta}{p(x_2 + x_0)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

où

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{\rho(-2\alpha(x + x_0)^3 + (\alpha - \beta)(x + x_0)^2 - 1)}{(x + x_0)^2}. \tag{2.5.8}$$

On change d'échelle sur le temps en multipliant le champ de vecteurs (2.5.7) une deuxième fois par  $(x_2 + x_0)^3$ .

Puisque  $x_0^3 > 0$ , cette étape ne change pas qualitativement les solutions près de l'origine. On obtient que le système est orbitalement analytiquement équivalent à

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{d\gamma} &= R_4(x_2, y_2) = R_3(x_2, y_2)(x_2 + x_0)^3 \\ &= -y_2 k(x) \\ \frac{dy_2}{d\gamma} &= S_4(x_2, y_2) = S_3(x_2, y_2)(x_2 + x_0)^3 \\ &= f(x_2) + y_2 g(x_2)\end{aligned}\tag{2.5.9}$$

où

$$k(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3,\tag{2.5.10}$$

où

$$d_i = \binom{3}{i} x_0^{3-i},\tag{2.5.11}$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4,\tag{2.5.12}$$

où

$$\begin{aligned}b_0 &= (-\rho - \rho\beta x_0 + 2\rho x_0^2 - 2\rho x_0 + 2y_0 x_0^2 + y_0 x_0 + \rho\beta x_0^3 - \rho\alpha x_0^2 - \rho\beta x_0^2)x_0 \\ b_1 &= -3\delta\alpha x_0^2 + 3x_0^2 - \rho - \delta - 8\rho\alpha x_0^3 - 3\rho\beta x_0^2 - 2\delta\beta x_0 + 3\rho\alpha x_0^2 \\ b_2 &= -3\rho\beta x_0 + 3\rho\alpha x_0 - 3\delta\alpha x_0 - \delta\beta + 3x_0 - 12\rho\alpha x_0^2 \\ b_3 &= -\rho\beta + 1 - 8\rho\alpha x_0 - \alpha\delta + \alpha\rho \\ b_4 &= -2\alpha\rho,\end{aligned}\tag{2.5.13}$$

et

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5\tag{2.5.14}$$

où

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2\rho x_0 + 3\rho\beta x_0^2 + 4\rho\beta x_0\delta + 5\rho x_0^4\delta\alpha^2 - 4\rho x_0\delta\alpha + 8x_0^3\delta\alpha\rho\beta \\
&\quad - 4\rho x_0^3\delta\alpha^2 + 4\rho\alpha x_0^3 + 6\delta\rho\alpha x_0^2 - 3\rho x_0^2 + \delta\rho - 5\rho x_0^4\alpha \\
&\quad + 3\rho\beta^2\delta x_0^2 - 2\rho\delta\beta^2 x_0 - 2\rho\beta\delta - 6\rho\beta\delta x_0^2\alpha - 4\rho\beta x_0^3 \\
a_2 &= -3\rho x_0 - 4\delta\rho\alpha x_0 + 3\rho\beta x_0 + 4\rho\delta\alpha - 4\rho\beta x_0^2 + \rho - \delta\beta^2\rho + \delta\rho\beta^2 x_0 \\
a_3 &= -\rho\delta\beta^2 + \rho + 6\rho x_0\delta\alpha + 12\rho\beta\delta x_0^2\alpha + 2\rho\beta\delta - 6\rho\delta\alpha\beta x_0 - 3\rho x_0 \\
&\quad + 3\rho\delta\beta^2 x_0 - 10\rho\alpha x_0^3 - 6\rho\delta\alpha^2 x_0^2 + 6\rho\alpha x_0^2 + 10\rho x_0^3\delta\alpha^2 - 6\rho\beta x_0^2 \\
&\quad - 2\rho\delta\alpha + 3\rho\beta x_0 \\
a_4 &= -\rho + 2\rho\delta\alpha - 2\rho\delta\alpha\beta + \rho\delta\beta^2 - 4\rho\beta x_0 + 4x_0\rho\alpha + 8\rho\delta\alpha\beta x_0 \\
&\quad - 10\rho\alpha x_0^2 - 4\rho\delta\alpha^2 x_0 + \rho\beta + 10\rho\delta\alpha^2 x_0^2 \\
a_5 &= -\alpha\rho + \rho\alpha^2\delta.
\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Ceci complète la réduction du système (2.0.1) à un système polynomial (2.5.9) qui est orbitalement analytiquement équivalent à

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y(d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3) \\
\dot{y} &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + y(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4).
\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

## 2.6. LA MÉTHODE DE LYAPUNOV

La théorie générale de la méthode de Lyapunov nous permet d'étudier la bifurcation de Hopf en étudiant le foyer faible d'un point singulier. Soit  $(X_\lambda)_\lambda$  une famille de champs de vecteurs sur le plan, de la forme

$$X_\lambda(x, y) = (d(\lambda)x - y + f(x, y, \lambda))\frac{\partial}{\partial x} + (x + d(\lambda)y + g(x, y, \lambda))\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.6.1}$$

où  $d, f, g$  sont des fonctions lisses et  $\lambda$  est un multi-paramètre de dimension  $p$ . La théorie de la méthode de Lyapunov est donnée dans [BL], [CC], [CD], [GW].

Le lemme suivant garantit l'existence des *fonctions de Lyapunov* et les *constantes de Lyapunov*.

**Lemme 2.6.1.** [CD] *Soit une famille  $(X_\lambda)_\lambda$  de champs de vecteurs de la forme (2.6.1). Il existe une série formelle  $F_\lambda$ ,*

$$F_\lambda(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{j=3}^{\infty} F_j(x, y, \lambda), \quad (2.6.2)$$

où  $F_j$  est un polynôme homogène de degré  $j$  en  $x$  et  $y$ ,

$$F_j(x, y, \lambda) = \sum_{i=0}^j f_{ij}(\lambda) x^i y^{j-i}, \quad (2.6.3)$$

et il existe des coefficients  $V_i(\lambda)$  (appelés constantes de Lyapunov) tels que

$$X_\lambda F_\lambda(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(\lambda) (x^2 + y^2)^{i+1}. \quad (2.6.4)$$

De plus si  $F_\lambda$  et  $V_i$  sont des solutions qui satisfont (2.6.4), les fonctions  $f_{ij}$  et  $V_i$  sont lisses en  $\lambda$ .

Le théorème suivant établit le lien entre les coefficients de Lyapunov et la bifurcation de Hopf.

**Théorème 2.6.1.** [CD] *Soit  $(X_\lambda)_\lambda$  une famille de champs de vecteurs sur le plan de la forme (2.6.1) avec les constantes de Lyapunov  $V_i$ ,  $0 \leq i \leq l$ . Si  $V_0(\lambda_0) = \dots = V_{l-1}(\lambda_0) = 0$  et  $V_l(\lambda_0) \neq 0$  et la fonction  $V := (V_0, V_1, \dots, V_{l-1})$  est une submersion à  $\lambda_0$ , alors la famille  $(X_\lambda)_\lambda$  de champs de vecteurs est un déploiement complet d'une bifurcation générique de Hopf de codimension  $l$  à l'origine. De plus le type  $X_\pm^{(l)}$  (voir ci-dessous) est donné par le signe de  $V_l(\lambda_0)$ .*

Près de l'origine, où les conditions du théorème sont vérifiées le champ de vecteurs est équivalent [CD] à

$$\begin{aligned} X_\pm^{(l)} &= \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \pm \left( (x^2 + y^2)^l + a_{l-1}(\lambda)(x^2 + y^2)^{l-1} + \dots + a_0(\lambda) \right) \\ &\quad \times \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

La proposition suivante applique le Lemme 2.6.1 au système polynomial (2.5.16).

**Proposition 2.6.1.** *Le système (2.5.16) est une famille de champ de vecteurs avec  $\lambda = (\alpha, \beta, \delta, \rho)$ . Il existe une série  $F_\lambda$ ,*

$$F_\lambda(X, Y) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \sum_{j=3}^6 F_j(X, Y, \lambda), \quad (2.6.6)$$

où  $F_j$  est un polynôme homogène de degré  $j$  en  $X$  et  $Y$ ,

$$F_j(X, Y, \lambda) = \sum_{i=0}^j f_{ij}(\lambda) X^i Y^{j-i}, \quad (2.6.7)$$

où

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-b_0}{2d_0} & \frac{\sqrt{-b_0^2 + 4d_0 a_1}}{2d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2.6.8)$$

et les coefficients  $L_i(\lambda)$  existent tels que

$$\dot{F}_\lambda = L_0(\lambda)(X^2 + Y^2) + o(|X, Y|^2), \quad (2.6.9)$$

et pour toutes valeurs de  $\lambda$  telles que  $L_0(\lambda) = 0$  on obtient

$$\dot{F}_\lambda = L_1(\lambda)(X^2 + Y^2)^2 + L_2(\lambda)(X^2 + Y^2)^3 + o(|X, Y|^6). \quad (2.6.10)$$

Les constantes de Lyapunov sont

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{b_0}{2}, \\ L_1 &= \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{8a_1}, \\ L_2 &= \frac{1}{192d_0^2 a_1^3} (L_2^{(1)}(b_2 a_1 - b_1 a_2) + L_2^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

où

$$\begin{aligned} L_2^{(1)} &= 21d_2 d_0 a_1^2 - 27d_1^2 a_1^2 + 37d_1 d_0 a_2 a_1 - 21a_3 d_0^2 a_1 + b_1^2 d_0 a_1 - 10d_0^2 a_2^2 \\ L_2^{(2)} &= 8d_0 b_3 d_1 a_1^3 + 12d_0^2 b_4 a_1^3 - 20d_0^2 b_3 a_2 a_1^2 - 8d_0 b_1 a_3 d_1 a_1^2 - 12b_1 d_0^2 a_4 a_1^2 \\ &\quad + 20b_1 d_0^2 a_3 a_2 a_1 \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

De plus si  $F_\lambda$  et  $L_0, L_1, L_2$  sont des solutions qui satisfont (2.5.16), les fonctions  $f_{ij}$  et  $L_0, L_1, L_2$  sont lisses en  $\lambda$ .

DÉMONSTRATION. Le Lemme 2.6.1 garantit l'existence des fonctions et constantes de Lyapunov en plus de garantir que les constantes sont différentiables. Il est évident que l'on peut appliquer le lemme à notre système (2.5.16) car il est équivalent au système

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{b_0}{2}X - \sqrt{-b_0^2 + 4d_0a_1}Y + F(X, Y) \\ \dot{Y} &= \sqrt{-b_0^2 + 4d_0a_1}X + \frac{b_0}{2}Y + G(X, Y),\end{aligned}\tag{2.6.13}$$

où  $F(X, Y)$  et  $G(X, Y)$  sont des fonctions polynomiales de degré 2 et plus. L'équivalence est donnée par la conjugaison avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-b_0}{2d_0} & \frac{\sqrt{-b_0^2 + 4d_0a_1}}{2d_0} \end{bmatrix}.\tag{2.6.14}$$

Il suffit de calculer les fonctions et les constantes de Lyapunov. Ceci est un processus algébrique, donc il est possible de programmer le calcul à l'aide d'un logiciel de manipulations symboliques. Le calcul a été fait avec MAPLE.  $\square$

Pour simplifier la notation on définit l'ensemble suivant :

**Définition 2.6.1.**  $Z$  est un ensemble tel que  $\lambda = (\alpha, \beta, \delta, \rho) \in Z$  si et seulement si  $L_0(\lambda) = 0$ .

Ceci complète cette section, dans les sections suivantes on analyse  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  pour être capable de borner la codimension de la bifurcation de Hopf à l'aide du Théorème 2.6.1.

## 2.7. SIMPLIFICATION ET ANALYSE DES CONSTANTES DE LYAPUNOV

### 2.7.1. Simplification et analyse de la constante $L_0$ de Lyapunov

Soit

$$L_0 = \frac{b_0}{2}\tag{2.7.1}$$

la constante  $L_0$  de Lyapunov de (2.5.16) avec les coefficients (2.5.11), (2.5.13) et (2.5.15). On substitue les coefficients dans  $L_0$  et on veut simplifier l'expression. Pour simplifier l'expression on substitue  $y_0$  avec la relation **II** ce qui élimine la dépendance en  $y_0$ . Ensuite on substitue  $\delta$  avec la relation **I** ce qui élimine à son tour la dépendance en  $\delta$  et n'introduit pas de nouvelles dépendances. On obtient

$$L_0 = \frac{-(1 + (\beta - \alpha)x_0^2 + 2\alpha x_0^3)\rho x_0}{2}. \quad (2.7.2)$$

Il est évident que  $L_0 = 0$  si et seulement si la trace du linéarisé est nulle. Donc sur les branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  pour chaque  $\beta$ ,  $L_0(\lambda) = 0$ . Ceci implique que l'étude de  $L_0$  est la même de celle de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  qui est faite dans les premières sections.

### 2.7.2. Simplification et analyse de la première constante de Lyapunov

Soit

$$L_1 = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{8a_1} \quad (2.7.3)$$

la première constante de Lyapunov de (2.5.16) avec les coefficients (2.5.11), (2.5.13) et (2.5.15). Une fois calculé, (2.7.3) dépend de  $\alpha, \beta, \delta, \rho, x_0, y_0$ . Pour pouvoir analyser le signe et les zéros de  $L_1$  on veut simplifier l'équation, et aussi réduire le nombre de paramètres. Il est important de préciser que l'on analyse la bifurcation de Hopf, ce qui permet de supposer que le point singulier  $(x_0, y_0)$  n'est pas sur l'un des axes. Donc on simplifie en effectuant trois substitutions successives de telle sorte que le nombre de paramètres décroisse de un à chaque substitution. La première substitution est grâce à **II** où on élimine la dépendance en  $y_0$ . La deuxième substitution est donnée par **I** où on élimine la dépendance en  $\delta$ . Finalement la troisième substitution est par **III** où la dépendance de  $\alpha$  est éliminée. On simplifie l'expression et on obtient

$$L_1 = \frac{(2x_0^3\beta^2 + (6x_0^2 + 1)\beta + 6)\rho}{8(\beta x_0 + 2)(-1 + 2x_0)} \quad (2.7.4)$$

On remarque que la constante dépend seulement de  $\beta, \rho, x_0$  et son signe est indépendant de  $\rho$  car  $\rho$  est positif pour le système biologique.

**Proposition 2.7.1.** *Lorsque  $\beta \geq 0$ , la bifurcation de Hopf est au plus de codimension 1 et le signe de la première constante de Lyapunov ( $L_1$ ) est négatif.*

DÉMONSTRATION. On observe que le numérateur de  $L_1$

$$(2x_0^3\beta^2 + (6x_0^2 + 1)\beta + 6)\rho \quad (2.7.5)$$

est toujours positif ce qui implique par le Théorème 2.6.1 que la bifurcation est au plus de codimension 1. On observe aussi que le dénominateur

$$8(\beta x_0 + 2)(-1 + 2x_0) \quad (2.7.6)$$

est négatif car la Proposition 2.3.13 implique  $x_0 < \frac{1}{2}$ . Donc la constante  $L_1$  est négative.  $\square$

Lorsque  $\beta < 0$ , Coutu [C] a remarqué qu'il existe des valeurs des paramètres où il y a une bifurcation de Hopf de codimension plus grande que 1. On doit ainsi continuer l'analyse avec la deuxième constante de Lyapunov, pour déterminer la codimension lorsque  $\beta < 0$ . On peut alors déterminer s'il y a la possibilité d'une bifurcation de Hopf de plus grande codimension.

**Proposition 2.7.2.** *Lorsque  $\beta < 0$ ,  $L_0(\lambda) = 0$  et*

$$\alpha^{\mathcal{H}_2}(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta + 6}. \quad (2.7.7)$$

*alors  $L_1(\lambda) = 0$ . Plus spécifiquement, si  $\beta \in (-6, -4)$  et  $\alpha = \alpha^{\mathcal{H}_2}$  alors  $\lambda$  est sur une branche de solution de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  qui satisfait les conditions nécessaires de la bifurcation de Hopf de codimension 2 dans le premier quadrant. Voir la figure 2.14.*

DÉMONSTRATION. Pour démontrer la première partie de l'énoncé il suffit de déterminer quand les numérateurs de  $L_0$  et  $L_1$  ont une racine commune. On obtient

$$\begin{aligned} & \text{résultant}(\text{numérateur}(L_0), \text{numérateur}(L_1), x_0) \\ &= -2(-6\alpha - \alpha\beta + \beta^2)^3(\beta + 4)(6 + \beta)\rho^3 \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

et on obtient que, si  $L_0(\lambda) = 0$  et

$$\alpha^{\mathcal{H}_2} = \frac{\beta^2}{\beta + 6} \quad (2.7.9)$$

alors  $L_1(\lambda) = 0$ . Lorsque  $\beta = -6$ , numérateur( $L_0$ ) et numérateur( $L_1$ ) s'annulent en  $x = 0$ . Donc  $\beta = -6$  n'est pas une possibilité pour la bifurcation de Hopf de codimension 2.  $\square$

**Remarque 2.7.1.** Dans le mémoire de Coutu [C] l'analyse est faite seulement dans le cas où les paramètres sont sur la surface  $S_1$ . Dans ce cas on a une solution  $(\alpha^{\mathcal{H}_2 \cap S_1}, \beta^{\mathcal{H}_2 \cap S_1})$  où  $\beta^{\mathcal{H}_2 \cap S_1}$  est la plus grande racine réelle de la cubique  $\beta^3 + 7\beta^2 + 11\beta + 3 = 0$  :

$$\beta^{\mathcal{H}_2 \cap S_1} \approx -4.866 \quad (2.7.10)$$

et  $\alpha^{\mathcal{H}_2 \cap S_1}$  est donné par (2.7.7). Note : Dans [C]  $\beta^{\mathcal{H}_2 \cap S_1}$  est noté  $\beta^*$ .

Il est donc possible que dans le système biologique on ait  $L_0(\lambda) = L_1(\lambda) = 0$ , il faut étudier la deuxième constante de Lyapunov.

### 2.7.3. Simplification et analyse de la deuxième constante de Lyapunov quand la première constante de Lyapunov est nulle

Soit

$$L_2 = \frac{1}{192d_0^2a_1^3}(L_2^{(1)}(b_2a_1 - b_1a_2) + L_2^{(2)}). \quad (2.7.11)$$

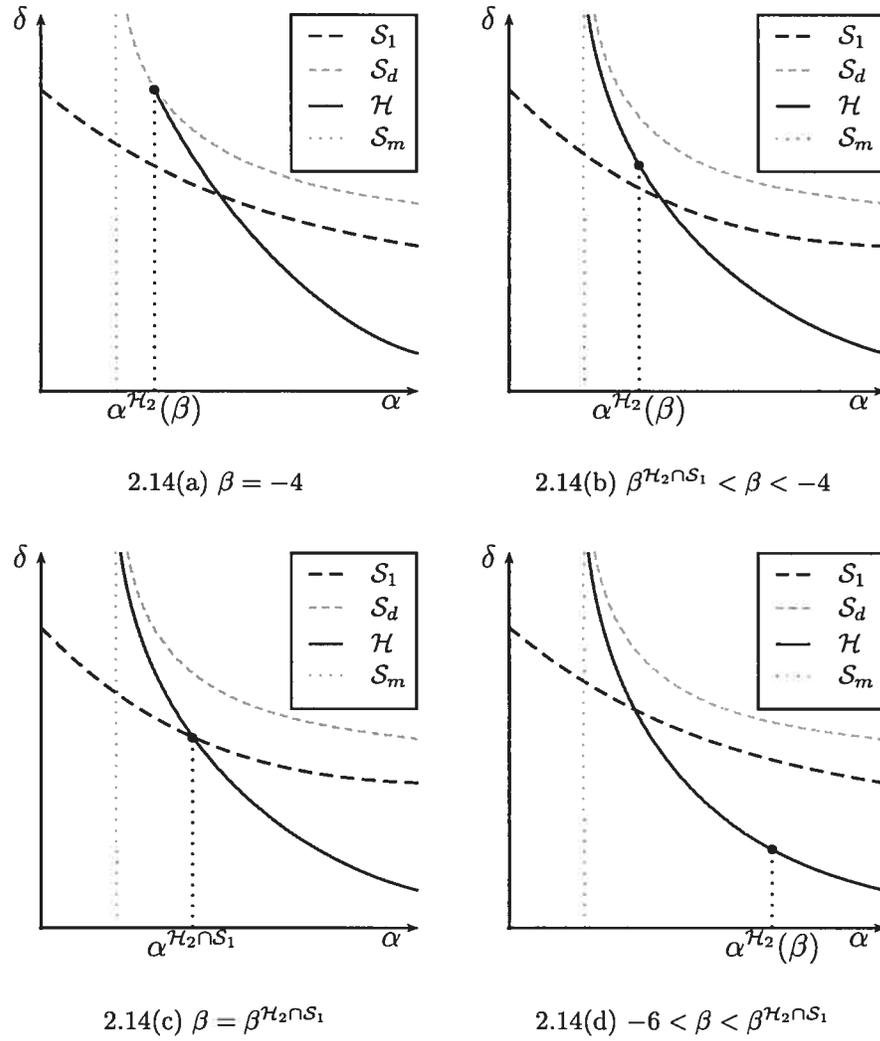


FIG. 2.14. Le diagramme de bifurcation pour la bifurcation de Hopf lorsque  $L_0 = L_1 = 0$ .

On a seulement besoin d'étudier  $L_2$  lorsque  $L_1 = 0$  ce qui implique  $b_2 a_1 - b_1 a_2 = 0$  et

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \frac{1}{192d_0^2 a_1^3} L_2^{(2)} \\
 &= (8d_0 b_3 d_1 a_1^3 + 12d_0^2 b_4 a_1^3 - 20d_0^2 b_3 a_2 a_1^2 - 8d_0 b_1 a_3 d_1 a_1^2 - 12b_1 d_0^2 a_4 a_1^2 \\
 &\quad + 20b_1 d_0^2 a_3 a_2 a_1) / 192d_0^2 a_1^3
 \end{aligned} \tag{2.7.12}$$

où les coefficients sont donnés en (2.5.11), (2.5.13), (2.5.15). De la même façon que pour la première constante de Lyapunov, on veut simplifier  $L_2$ . On simplifie en effectuant trois substitutions successives de façon que le nombre de paramètres décroisse de un après chaque substitution. La première substitution est grâce à **II** et ceci élimine la dépendance en  $y_0$ . La deuxième substitution est donnée par **I** et ceci élimine la dépendance en  $\delta$ . La troisième substitution est donnée par **III** et la dépendance en  $\alpha$  est éliminée. On obtient que

$$\text{numérateur}(L_2) = q \text{ numérateur}(L_1) + \text{numérateur}(L_2^s) \quad (2.7.13)$$

où

$$q = (3\rho x_0^4 - 5\rho x_0 + 15\rho x_0^2 - 13\rho x_0^3)\beta + 4x_0^3 - 4x_0^4 - 2\rho x_0^2 \\ - \rho x_0^3 + \frac{3}{2}\rho x_0 + \frac{7}{2}\rho - x_0^2$$

$$\text{numérateur}(L_1) = 2\beta^2 x_0^3 + 6\beta x_0^2 + \beta + 6 \quad (2.7.14)$$

$$\text{numérateur}(L_2^s) = ((5x_0^2 - x_0)\beta^2 + (76x_0^2 + \frac{17}{2} - \frac{47}{2}x_0 - 85x_0^3 - 12x_0^5 + 50x_0^4)\beta \\ + 39 - 57x_0 + 42x_0^2 - 12x_0^3)\rho$$

On ne s'intéresse à  $L_2$  que lorsque  $L_1$  est nulle, alors on suppose que  $L_1$  est nulle, c'est-à-dire que pour simplifier notre équation davantage on utilise

$$2x_0^3\beta^2 + (1 + 6x_0^2)\beta + 6 = 0. \quad (2.7.15)$$

On obtient

$$L_2 = \frac{(5x_0^2 - x_0)\beta^2 + (76x_0^2 + \frac{17}{2} - \frac{47}{2}x_0 - 85x_0^3 - 12x_0^5 + 50x_0^4)\beta}{48x_0^2(-1 + x_0)^3(\beta x_0 + 2)^2(-1 + 2x_0)} \\ + \frac{39 - 57x_0 + 42x_0^2 - 12x_0^3}{48x_0^2(-1 + x_0)^3(\beta x_0 + 2)^2(-1 + 2x_0)} \quad (2.7.16)$$

La prochaine étape consiste à déterminer s'il existe des paramètres  $\lambda$  tels que  $L_0(\lambda) = L_1(\lambda) = L_2(\lambda) = 0$ . La proposition suivante répond à cette question.

**Proposition 2.7.3.** *Les première et deuxième constantes de Lyapunov ne sont jamais zéro au même point pour le modèle si  $L_0 = 0$  (i.e. la trace du linéarisé*

est nulle) et le point singulier n'est pas sur l'un des axes. De plus la deuxième constante de Lyapunov est négative lorsque  $L_1 = L_0 = 0$ .

DÉMONSTRATION. Si on prend le résultant du numérateur de la première et deuxième constante de Lyapunov par rapport à  $\beta$  on obtient

$$\begin{aligned} & \text{résultant}(\text{numérateur}(L_1), \text{numérateur}(L_2), \beta) \\ &= -48x_0(1 + 2x_0 + 12x_0^2)(-1 + 2x_0)^2(-1 + x_0)^7\rho^4. \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Vu que l'on fait l'étude du point singulier qui n'est pas sur l'un des axes, la seule possibilité de racine en commun est en  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Mais  $L_0 = 0$  implique que la trace du linéarisé évalué au point singulier avec l'abscisse  $x_0 = \frac{1}{2}$  est nulle. Par la Proposition 2.2.2, le déterminant est nul, une contradiction. Donc  $L_1$  et  $L_2$  n'ont pas de racines en commun.

Il reste à déterminer le signe de  $L_2$ , mais, vu que  $L_1$  et  $L_2$  n'ont pas de racine en commun,  $L_2$  ne change pas de signe lorsque  $L_1 = 0$  (par le théorème de la valeur intermédiaire). Soit  $x_0 = \frac{1}{3}$  une valeur plus petite que  $\frac{1}{2}$  donc valide pour la bifurcation de Hopf, on substitue  $x_0$  dans (2.7.15), et on résout pour  $\beta$ . On obtient les deux racines

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{9}{2}, \\ \beta &= -18 \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

et par la Proposition 2.7.2 on choisit  $\beta$  dans l'intervalle  $(-6, -4)$ , donc  $\beta = -\frac{9}{2}$ . Si on calcule  $L_2^s$  à  $(x_0, \beta) = (\frac{1}{3}, -\frac{9}{2})$ , on obtient

$$L_2^s = \frac{-81\rho}{16}. \quad (2.7.19)$$

La deuxième constante de Lyapunov est donc négative lorsque  $L_1(\lambda) = L_0(\lambda) = 0$ . □

**Corollaire 2.7.1.** *Lorsque  $\beta < 0$  la bifurcation de Hopf est au plus de codimension 2.*

Coutu [C] a vu que le signe de la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 est un coefficient négatif. Donc la bifurcation de Hopf de codimension 2 qui en sort est aussi de signe négatif. Ce qui confirme le résultat ci-dessus. Dans la section suivante on vérifie que l'on a une submersion des constantes de Lyapunov par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$ . Ce qui vérifie que l'on a un déploiement de la bifurcation de Hopf de la famille de champs de vecteurs (2.0.1).

## 2.8. ANALYSE DE LA SUBMERSION

Si on démontre que

$$(\alpha, \beta, \delta, \rho) \mapsto L_0(\alpha, \beta, \delta, \rho) \quad (2.8.1)$$

est une submersion lorsque  $L_0(\lambda) = 0$  et  $L_1(\lambda) \neq 0$  ceci implique par le Théorème 2.6.1 qu'on a le déploiement de la bifurcation de Hopf. On dérive deux expressions qui seront utiles pour étudier la submersion, soit :

$$\frac{\partial x_0(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} = -\frac{x_0(\alpha, \delta)^2 \delta}{2x_0(\alpha, \delta)\alpha\delta - 2x_0(\alpha, \delta) + \delta\beta}, \quad (2.8.2)$$

et

$$\frac{\delta x_0(\alpha, \delta)}{\partial \delta} = -\frac{1 + x_0(\alpha, \delta)^2 \alpha + \beta x_0(\alpha, \delta)}{2x_0(\alpha, \delta)\alpha\delta - 2x_0(\alpha, \delta) + \delta\beta} \quad (2.8.3)$$

Les relations (2.8.2) et (2.8.3) sont obtenues en différentiant implicitement **I** (voir (2.2.1)) par  $\alpha$  et  $\delta$  respectivement et en isolant  $\frac{\partial x_0(\alpha, \delta)}{\partial \alpha}$  et  $\frac{\partial x_0(\alpha, \delta)}{\partial \delta}$  respectivement.

La proposition suivante démontre qu'il existe en fait une submersion lorsque la trace est nulle.

**Proposition 2.8.1.** *L'application*

$$\lambda = (\alpha, \beta, \delta, \rho) \mapsto L_0 = \frac{b_0}{2} \quad (2.8.4)$$

où  $b_0, a_1, d_0$  sont donnés (2.5.11), (2.5.13), (2.5.15) est une submersion par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$  lorsque  $L_0(\lambda) = 0$ .

DÉMONSTRATION. Pour montrer la submersion, on montre que  $\frac{\partial L_0}{\partial \alpha}$  et  $\frac{\partial L_0}{\partial \delta}$  ne sont jamais simultanément nuls. On prend les dérivées partielles de  $L_0$  par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$ , respectivement. Il est important de remarquer que  $x_0$  dépend de façon différentiable de  $\alpha$  et  $\delta$ , donc on substitue  $x_0 = x_0(\alpha, \delta)$  et par la suite on dérive par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$ , respectivement. On substitue  $\frac{\partial x_0(\alpha, \delta)}{\partial \delta}$  par la relation (2.8.3) et  $\frac{\partial x_0(\alpha, \delta)}{\partial \alpha}$  par la relation (2.8.2). De plus, on substitue  $\alpha$  par la relation III (voir (2.2.14)), ce qui est permis car on montre la submersion sur le domaine  $Z$ , où  $\lambda \in Z$  si et seulement si  $L_0(\lambda) = 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial \alpha} &= -\frac{x_0^3(-14x_0 + 2x_0^3\beta + 4 - 4\beta x_0^2 + 8x_0^2 + \beta x_0)\rho}{2(\beta x_0 + 2)(-1 + 2x_0)} \\ \frac{\partial L_0}{\partial \delta} &= \frac{(-1 + x_0)^2(\beta x_0 + 2)(3x_0 + x_0^3\beta - 1)\rho}{x_0(-1 + 2x_0)^3}. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Vu que  $L_0$  est lisse ces dérivées partielles sont bien définies. On doit vérifier que

$$\left[ \frac{\partial L_0}{\partial \alpha}(\lambda_0) \quad \frac{\partial L_0}{\partial \delta}(\lambda_0) \right] \quad (2.8.6)$$

a rang 1 lorsque  $\lambda_0 \in Z$ . Le résultant de  $\frac{\partial L_0}{\partial \alpha}(\lambda_0)$  et  $\frac{\partial L_0}{\partial \delta}(\lambda_0)$  par rapport à  $\beta$ , permet de vérifier qu'il n'y a pas de racines communes. Alors

$$\begin{aligned} &\text{résultant} \left( \text{numérateur} \left( \frac{\partial L_0}{\partial \delta}(\lambda_0) \right), \text{numérateur} \left( \frac{\partial L_0}{\partial \alpha}(\lambda_0) \right), \beta \right) \\ &= 2x_0^8(-1 + x_0)^4(-1 + 2x_0)^4\rho^3 \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Vu que le point singulier  $(x_0, y_0)$  n'est pas sur l'un des axes,  $x_0 \neq 0$  et  $x_0 \neq 1$ . On suppose que le résultant est nul, ceci implique que la trace du linéarisé est nulle en  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Par la Proposition 2.2.2 le déterminant du linéarisé est nul, une contradiction.  $\square$

Le lemme suivant aide à démontrer que l'application  $\lambda \mapsto (L_0(\lambda), L_1(\lambda))$  est une submersion par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$  pour  $\lambda \in Z$ . En effet, à cause de la façon dont les coefficients de Lyapunov ont été calculés il est difficile de montrer directement que l'application est une submersion.

**Lemme 2.8.1.** [CD] *On suppose que  $V_0, V_1, \dots, V_n$ ,  $n \geq 1$  sont des fonctions réelles lisses définies sur un voisinage de  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  et  $V_i(\lambda_0) = 0$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . On définit  $Z = \bigcap_{i=0}^{n-1} V_i^{-1}(0)$ . Alors l'application*

$$\lambda \mapsto (V_0(\lambda), \dots, V_n(\lambda)) \quad (2.8.8)$$

*est une submersion à  $\lambda_0$  si et seulement si l'application*

$$\lambda \mapsto (V_0(\lambda), \dots, V_{n-1}(\lambda)) \quad (2.8.9)$$

*est une submersion à  $\lambda_0$  et la restriction de  $V_n$  à  $Z$  est une submersion à  $\lambda_0$ .*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. On se limite à donner l'idée pour le cas  $n = 1$ , puisque c'est le cas que l'on utilise dans ce mémoire. On veut montrer que les deux vecteurs  $(\frac{\partial V_i}{\partial \lambda})(\lambda^*)$  pour  $i = 0, 1$ , sont linéairement indépendants pour tout  $\lambda^*$  tel que  $V_0(\lambda^*) = V_1(\lambda^*) = 0$ . Par l'hypothèse  $V_0(\lambda) = 0$  est une courbe de niveau de la fonction  $V_0$  par le théorème des fonctions implicites. De plus,  $(\frac{\partial V_0}{\partial \lambda})(\lambda^*)$  est normal à  $V_0 = 0$  en  $\lambda^*$ . Si on restreint  $V_1$  à  $V_0 = 0$  et on montre que cette application est une submersion par rapport à  $\lambda$  en  $\lambda^*$ , ceci garantit que  $(\frac{\partial V_1}{\partial \lambda})(\lambda^*)$  n'est pas normal à  $V_0 = 0$  en  $\lambda^*$ . Donc les deux vecteurs sont linéairement indépendants.  $\square$

On procède en montrant que l'application  $\lambda \mapsto L_1(\lambda)$  restreinte à  $Z = \{L_0^{-1}(0)\}$  est une submersion.

**Proposition 2.8.2.** *L'application*

$$\lambda = (\alpha, \beta, \delta, \rho) \mapsto L_1 = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{8a_1} \quad (2.8.10)$$

*où  $a_1, a_2, b_1, b_2, d_0$  sont donnés en (2.5.11), (2.5.13), (2.5.15) est une submersion par rapport à  $\delta$  lorsque  $L_0(\lambda) = L_1(\lambda) = 0$ .*

DÉMONSTRATION. La première constante de Lyapunov  $L_1$  (2.7.3) a déjà été simplifiée à l'aide de la supposition  $L_0 = 0$  et la relation III (voir (2.2.14)). On remarque que  $L_1$  ne contient pas d'expression en  $\delta$  mais on remarque également

que  $x_0$  dépend de  $\delta$ , c'est-à-dire  $x_0 = x_0(\delta)$ . On calcule la dérivée partielle de  $L_1$  par rapport à  $\delta$ . On substitue  $\frac{\partial x_0(\delta)}{\partial \delta}$  par la relation (2.8.3), et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \delta} = & \frac{-1}{8(\beta x_0 + 2)(-1 + 2x_0)^4 x_0^2} \\ & [-24 + (-4x_0^3 + 4x_0^4)\beta^3 + (-18x_0^2 + 16x_0^3 + 1 - 4x_0)\beta^2 \\ & + (-48x_0 + 2 + 24x_0^2)\beta]\rho(-1 + x_0)^2. \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Il s'agit d'évaluer la dérivée partielle lorsque  $L_1 = 0$  et de déterminer si elle est nulle. On vérifie en prenant le résultant du numérateur de  $\frac{\partial L_1}{\partial \delta}$  et le numérateur de  $L_1$  pour déterminer si  $\frac{\partial L_1}{\partial \delta}$  et  $L_1$  ont une racine commune. On obtient

$$\begin{aligned} & \text{résultant}\left(\text{numérateur}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \delta}\right), \text{numérateur}(L_1), \beta\right) \\ & = 864x_0^4(-1 + 2x_0)^4(-1 + x_0)^6\rho^5. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Il est évident que le résultant est non-nul car le point singulier n'est pas sur l'un des axes (donc  $x \neq 1$ ) et  $x_0 \neq \frac{1}{2}$ . En effet si  $L_0 = 0$  et  $x = \frac{1}{2}$  la trace du linéarisé est nulle et la Proposition 2.2.2 implique que le déterminant du linéarisé est nul, une contradiction. Alors on a une submersion de  $L_1$  par rapport à  $\delta$  lorsque  $L_0(\lambda) = L_1(\lambda) = 0$ .  $\square$

À l'aide du Lemme 2.8.1 et des Propositions 2.8.1 et 2.8.2 on peut déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 2.8.1.** *L'application*

$$\lambda \mapsto (L_0(\lambda), L_1(\lambda)) \quad (2.8.13)$$

*est une submersion par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$  lorsque  $L_0(\lambda) = L_1(\lambda) = 0$ .*

## 2.9. CONCLUSION

Tous les résultats nécessaires sont maintenant établis pour pouvoir démontrer le théorème suivant.

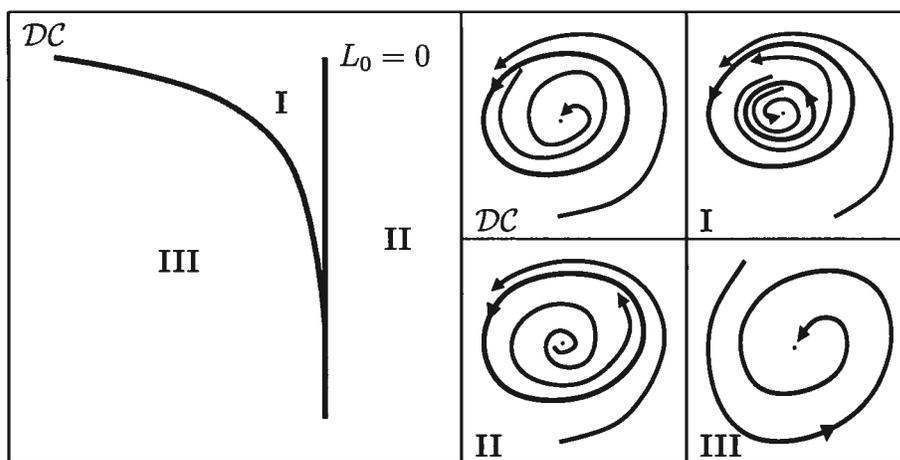


FIG. 2.15. Diagramme de la bifurcation de Hopf de codimension 2.

**Théorème 2.0.1.** *Le système (2.0.1) a une bifurcation générique de Hopf de codimension 1 et 2 avec un déploiement complet lorsque  $\beta < 0$  et une bifurcation générique de Hopf de codimension 1 avec un déploiement complet lorsque  $\beta \geq 0$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $\beta \geq 0$  il y a une bifurcation de Hopf de codimension 1. Cette bifurcation de Hopf est appelée *super-critique*. C'est-à-dire, le point singulier est stable et, lorsque il y a la création d'un cycle, le cycle est stable et le point singulier devient instable. Ceci vient du fait que  $L_1$  est négatif. Par les Propositions 2.3.1, 2.7.1, 2.8.1 et le Théorème 2.6.1, l'énoncé du théorème est vrai lorsque  $\beta \geq 0$ . Si  $\beta < 0$  il y a une bifurcation de Hopf de codimension 1 et 2. Cette bifurcation de Hopf a le diagramme de bifurcation de la figure 2.15. Ceci est déterminé par le signe de  $L_2$ , qui est négatif lorsque  $L_0$  et  $L_1$  sont nulles. Par les Propositions 2.4.11, 2.7.3, le Corollaire 2.8.1 et le Théorème 2.6.1, l'énoncé du théorème est vrai lorsque  $\beta < 0$ .  $\square$

# Chapitre 3

---

## ÉTUDE ET VALIDATION NUMÉRIQUE DU DIAGRAMME DE BIFURCATIONS

Dans ce chapitre on valide numériquement les résultats théoriques, en comparant notre prévision théorique du diagramme de bifurcations avec le diagramme de bifurcations numérique. On présente aussi les portraits de phase des champs de vecteurs pour des choix de paramètres spécialement intéressants. Les diagrammes de bifurcations pour les valeurs  $6, -3.5, -4, -5$  de  $\beta$  sont calculés numériquement. La raison principale pour laquelle les simulations numériques sont effectuées est pour calculer la courbe de bifurcation de boucle homoclinique. Ce calcul est difficile car la boucle homoclinique est un comportement global. Les valeurs  $-3.5, -4, -5$  de  $\beta$  sont choisies pour calculer la courbe de la bifurcation de boucle homoclinique avant la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3  $((\alpha, \beta, \delta) = (-4, 8, \frac{1}{4}))$ , à cette bifurcation, et après cette bifurcation. Les diagrammes de bifurcations sont calculés à l'aide de XPPAUTO qui contient le code de AUTO pour calculer les surfaces de bifurcation. Les courbes de bifurcation calculées à l'aide de XPPAUTO sont la courbe de la bifurcation de Hopf et celle de la bifurcation de boucle homoclinique. La boucle homoclinique est calculée en suivant dans l'espace des paramètres une solution périodique de grande période.

Les représentations des champs de vecteurs ont été calculées à l'aide du solveur ode45 de MATLAB. La représentation des champs de vecteurs est faite en solutionnant numériquement le système pour des valeurs initiales sur un réseau

du plan. Les solutions sont calculées pour un intervalle de temps positif et négatif. Les périodes du réseau et les intervalles de temps sont choisis de telle sorte que le flot du système soit facile à visualiser. Les cercles sur le portrait de phase représentent les points singuliers.

Pour toutes les simulations numériques on fixe le paramètre  $\rho$  à

$$\rho = \frac{1}{100}. \quad (3.0.1)$$

Ce choix est basé sur le fait que lorsque la valeur de  $\rho$  s'approche de 1 ou plus grand, le champ de vecteurs est presque singulier dans une région. Ceci rend le calcul numérique difficile car dans un champ de vecteurs singulier la période d'un cycle limite est beaucoup plus grande. Donc, pour maintenir le problème relativement simple numériquement on choisit un petit  $\rho$  pour obtenir des cycles limites avec une période raisonnable.

Pour chaque valeur de  $\beta$  on donne le diagramme de bifurcations numérique. Sur le diagramme on identifie des points, notés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., correspondant à des valeurs des paramètres pour lesquelles on fait tracer le portrait de phase. On donne un tableau avec les paramètres associés à chaque point et on décrit le type de chaque point singulier. La colonne du tableau avec l'entête '(1,0)' réfère au point singulier (1,0). L'entête 'p.s. à gauche' et 'p.s. à droite' représente le point singulier situé dans le premier quadrant qui est à gauche et à droite respectivement. La dernière colonne donne le nom de la figure qui représente le portrait de phase du champ de vecteurs.

### 3.1. LE CAS $\beta = 6$

Le diagramme de bifurcations numérique (figure 3.1) a sa bifurcation de Hopf ( $\mathcal{H}$ ) calculée à l'aide de XPPAUTO et la surface  $\mathcal{S}_1$  calculée à l'aide de MATLAB car il s'agit d'une surface analytique.

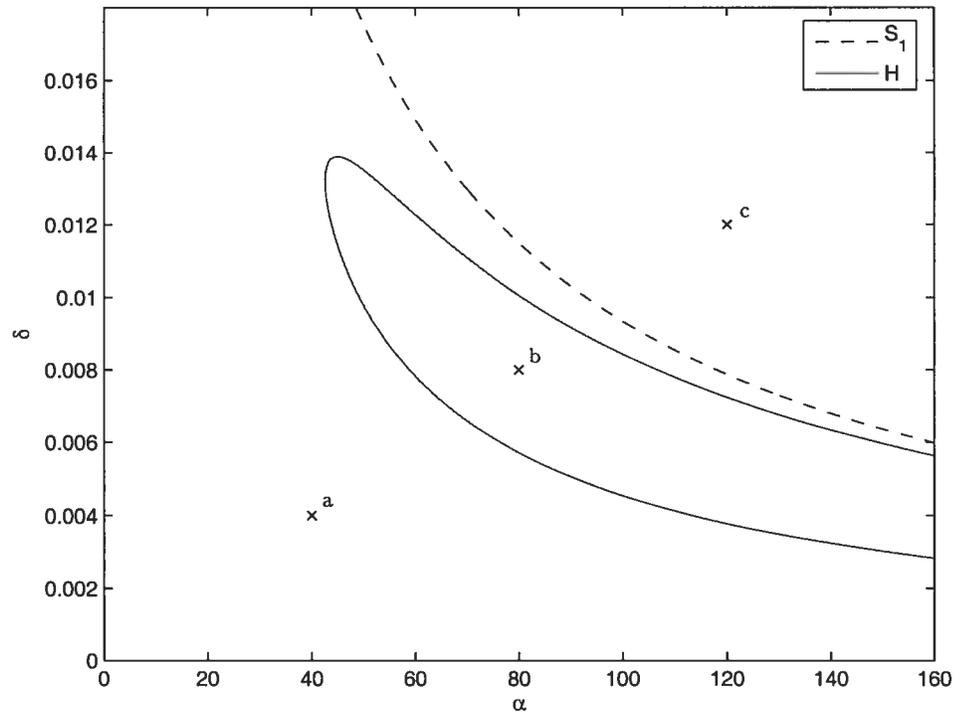


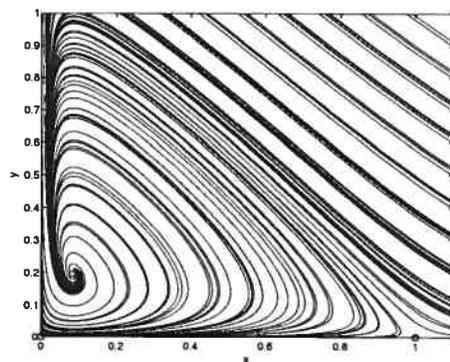
FIG. 3.1. Diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = 6$ ).

Le tableau 3.1 donne une description des points choisis dans la figure 3.1 dont on donne le portrait de phase.

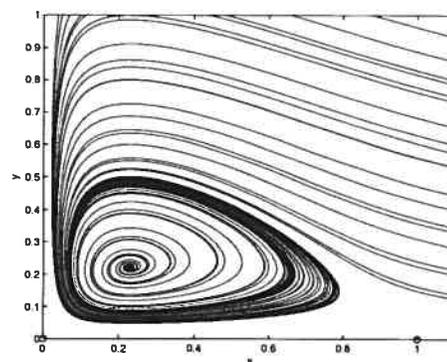
	$\alpha$	$\delta$	$(1, 0)$	autre point singulier	figure
a	40	0.004	point de selle	foyer attractif	3.2(a)
b	80	0.008	point de selle	foyer répulsif	3.2(b)
c	120	0.0012	point de selle	n'existe pas	3.2(c)

TAB. 3.1. Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = 6$ ).

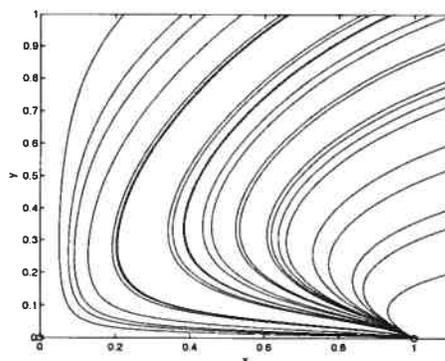
Le champ de vecteurs de la figure 3.2(a) a un point singulier dans le premier quadrant. Ce point est attractif et, numériquement, semble être globalement attractif. Les deux points singuliers sur les axes sont des points de selle. La figure 3.2(b) représente le champ de vecteurs une fois que les paramètres ont traversé la courbe de la bifurcation de Hopf. Le point singulier dans le premier quadrant devient instable et un cycle limite stable se forme : la bifurcation de Hopf est super-critique. Numériquement, le cycle limite est globalement attractif. La figure 3.2(c) représente le champ de vecteurs une fois que le point singulier sort du premier quadrant. Le point de selle  $(1, 0)$  devient un noeud attractif et il devient globalement attractif dans le premier quadrant.



3.2(a) aucun cycle limite



3.2(b) un cycle limite

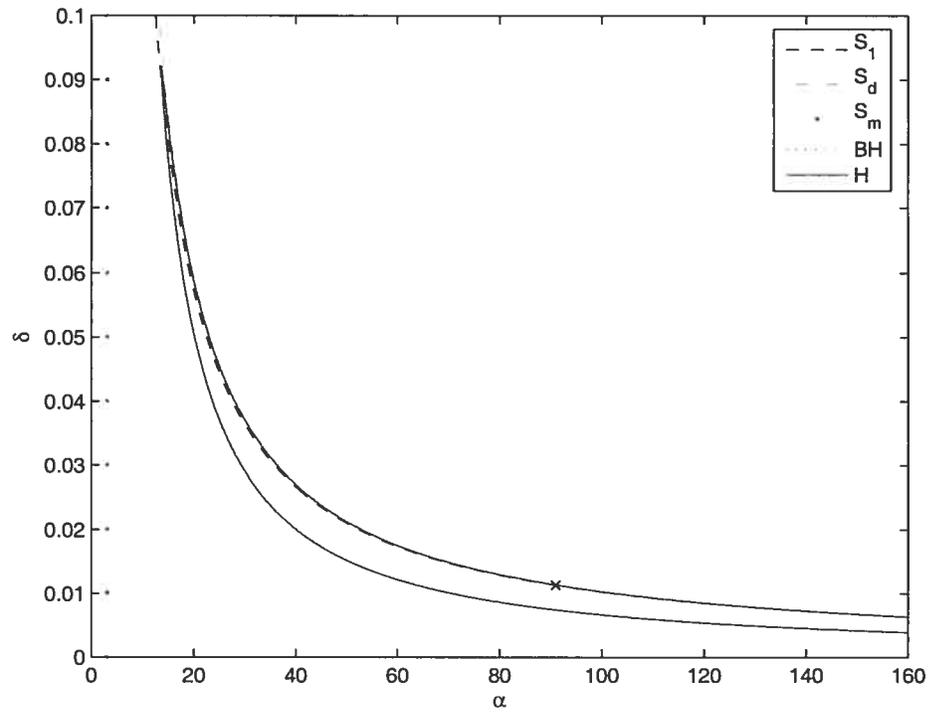


3.2(c) aucun cycle limite

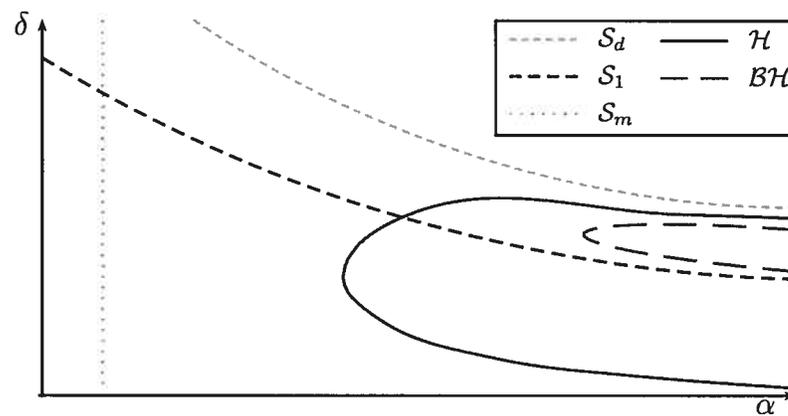
FIG. 3.2. Certains champs de vecteurs ( $\beta = 6$ ).

### 3.2. LE CAS $\beta = -3.5$

Le cas  $\beta = -3.5$  a une dynamique plus riche que  $\beta = 6$  car il y a la possibilité de deux points singuliers dans le premier quadrant. Pour le diagramme de bifurcations numérique (figure 3.3(a)) les surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$  sont calculées à l'aide de MATLAB car elles sont analytiques et connues. La courbe de la bifurcation de Hopf ( $\mathcal{H}$ ) et la courbe de la bifurcation de boucle homoclinique ( $\mathcal{BH}$ ) sont calculées



3.3(a) Diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -3.5$ ).



3.3(b) Diagramme de bifurcations lorsque  $-4 < \beta < -3$ .

FIG. 3.3. Diagramme de bifurcations ( $\beta = -3.5$ ) numérique et topologique.

à l'aide de XPPAUTO. On donne le diagramme de bifurcations topologique (figure 3.3(b)) car le diagramme de bifurcations numérique est difficile à visualiser.

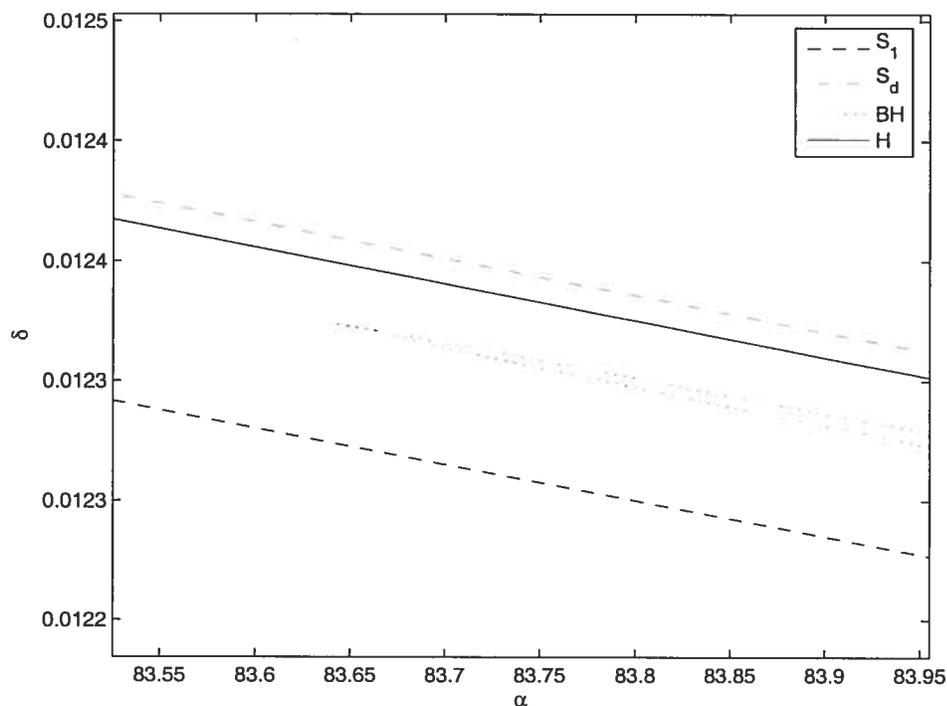


FIG. 3.4. Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -3.5$ ).

La figure 3.4 est un élargissement du diagramme de bifurcations numérique (figure 3.3(a)). L'élargissement illustre le comportement de la courbe de bifurcation de boucle homoclinique. On trouve le comportement prédit par Coutu [C]. La figure 3.5 est un élargissement du diagramme de bifurcations numérique à l'endroit où les valeurs particulières des paramètres ont été choisies. Le tableau 3.2 décrit les paramètres choisis pour  $\beta = -3.5$  et le comportement local des points singuliers.

Ici on prend des points dans l'espace des paramètres avec  $\alpha, \beta, \rho$  fixés, où  $\alpha = 90.9751$ , et on varie  $\delta$ . Si  $\delta = 0.0113$  (figure 3.6(a)) on a un cycle limite attractif, avec seulement un point singulier dans le premier quadrant. Lorsque le paramètre  $\delta$  traverse la surface  $S_1$  il y a un nouveau point singulier dans le quadrant (voir la figure 3.6(b)). Celui ci est un point de selle et le point singulier  $(1, 0)$  devient

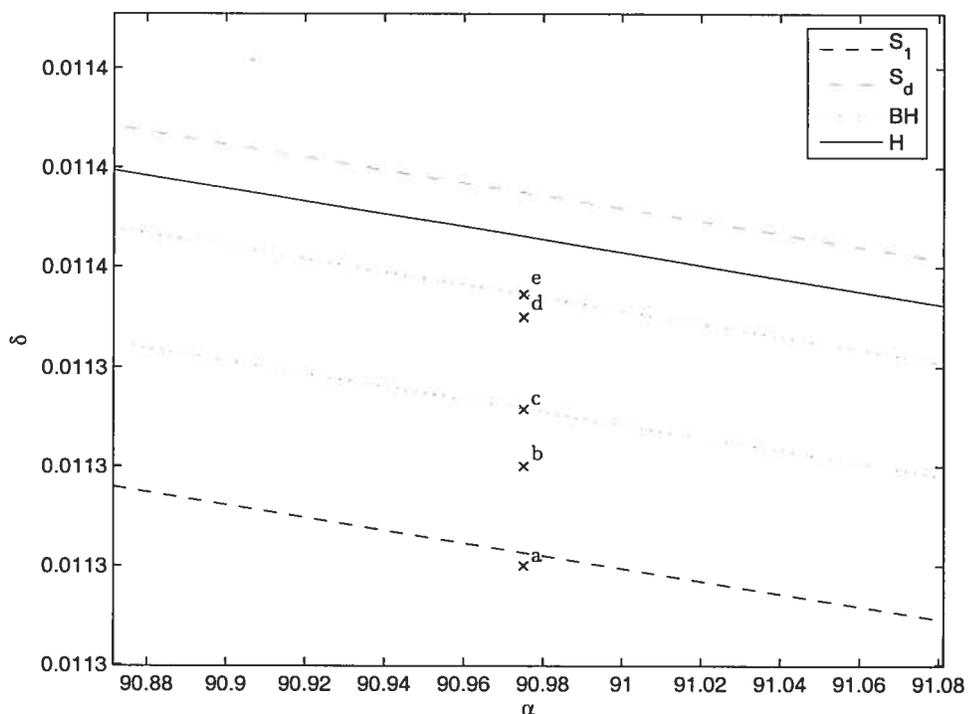


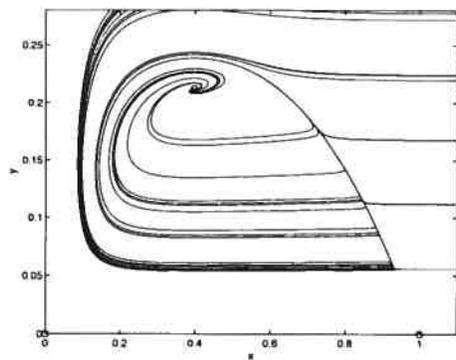
FIG. 3.5. Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -3.5$ ).

	$\alpha$	$\delta$	$(1, 0)$	p.s. à gauche	p.s. à droite	figure
a	90.9751	0.0113	point de selle	foyer répulsif	n'existe pas	3.6(a)
b	90.9751	0.01132	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.6(b)
c	90.9751	0.0113315	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.6(c)
d	90.9751	0.01135	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.6(d)
e	90.9751	0.0113545	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.6(e)

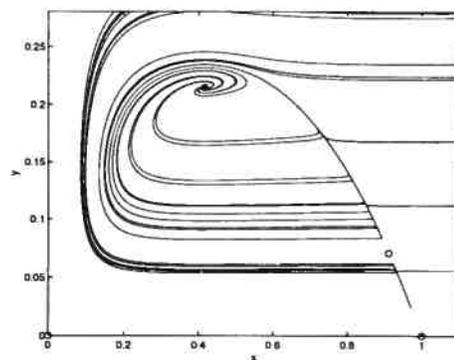
TAB. 3.2. Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = -3.5$ ).

attractif. On remarque que le nouveau point singulier est proche du cycle limite. Lorsque  $\delta = 0.0113315$  on remarque que l'on est sur la courbe de bifurcation de boucle homoclinique. Le cycle limite a disparu dans la boucle homoclinique. La figure 3.6(c) tracée par XPPAUTO montre la boucle homoclinique. Si on augmente

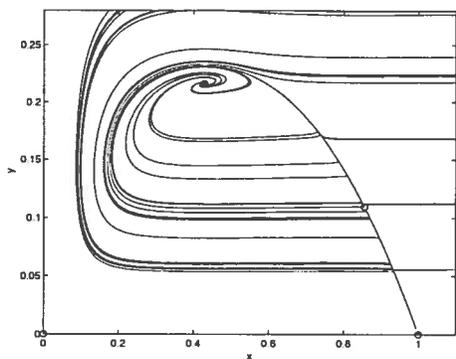
le paramètre  $\delta$ , la boucle homoclinique et le cycle disparaissent et on obtient la figure 3.6(d). C'est-à-dire on perd le cycle et toutes les solutions convergent vers le point singulier  $(1, 0)$ . Si on augmente  $\delta$  on devrait éventuellement retrouver le cycle limite car on a prédit théoriquement qu'un cycle limite doit être présent pour que le cycle disparaisse dans une autre bifurcation de Hopf. On a en effet une courbe calculée par XPPAUTO qui prédit numériquement une deuxième courbe de bifurcation de boucle homoclinique avant la bifurcation de Hopf. Donc, lorsque  $\delta = 0.0113545$  on a la boucle homoclinique, permettant la naissance d'un cycle limite (voir la figure 3.6(e)). On remarque que les portraits de phase ressemblent à ceux que l'on observe dans les perturbations singulières. La section suivante explore cette remarque.



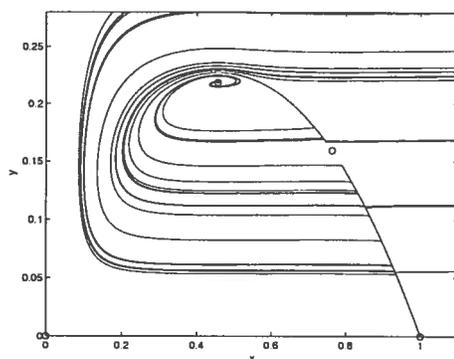
3.6(a) un cycle limite



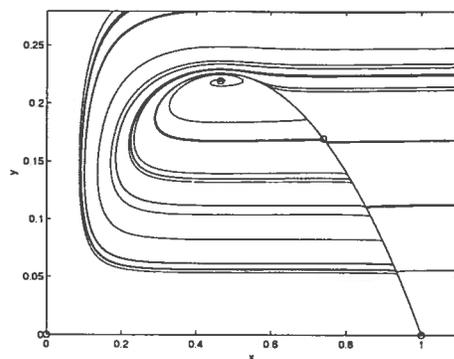
3.6(b) un cycle limite



3.6(c) une boucle homoclinique



3.6(d) aucun cycle limite



3.6(e) une boucle homoclinique

FIG. 3.6. Certains champs de vecteurs ( $\beta = -3.5$ ).

### 3.3. CONDITION D'EXISTENCE DE LA BOUCLE HOMOCLINIQUE DANS LE CAS LIMITE DE PERTURBATION SINGULIÈRE

Lorsqu'on a des paramètres tels que le champ de vecteurs est près du cas limite d'une perturbation singulière il est possible d'obtenir une condition algébrique approximant la condition de l'existence d'une boucle homoclinique. On dit que notre famille de champ de vecteurs est une perturbation singulière s'il est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x(1-x) - \frac{yx^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \\ \dot{y} &= \epsilon(x, \alpha, \beta, \delta)y \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

où  $\epsilon(x, \alpha, \beta, \delta)$  est très petit pour  $x \in (a - \gamma_1, b + \gamma_2)$  où  $\gamma_1 \in (0, a)$  et  $\gamma_2$  est assez grand, et  $a$  et  $b$  sont définis dans la figure 3.7. Ceci signifie que loin de l'isocline  $\dot{x} = 0$  le champ de vecteurs est presque horizontal comme observé sur la figure 3.9(b). Si on suppose en plus l'existence d'un cycle limite, il suit que le point

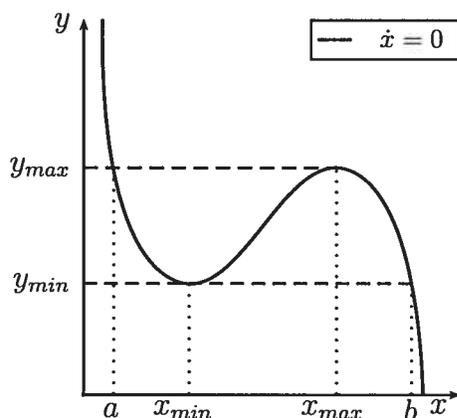


FIG. 3.7. Isocline  $\dot{x} = 0$ .

singulier qu'il entoure a son abscisse à l'intérieur de l'intervalle  $(x_{min}, x_{max})$ . Le cycle limite (oscillation de relaxation) a presque toujours la forme suivante (voir la figure 3.8) :

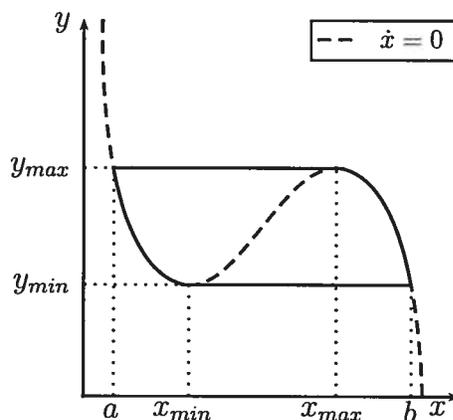


FIG. 3.8. Cycle limite d'un champ de vecteurs dans le cas limite de perturbation singulière.

- (1) Le cycle limite passe par le point  $(x_{min}, y_{min})$  et se dirige avec très peu de changement vertical vers le point  $(b, y_{min})$ .
- (2) À partir du point  $(b, y_{min})$  il suit l'isocline  $\dot{x} = 0$  jusqu'au point  $(x_{max}, y_{max})$ .
- (3) Du point  $(x_{max}, y_{max})$  il se dirige vers le point  $(a, y_{max})$  avec très peu de changement vertical.
- (4) Finalement le cycle suit encore l'isocline  $\dot{x} = 0$  vers le point de départ  $(x_{min}, y_{min})$ .

Lorsqu'un nouveau point singulier entre dans le premier quadrant il passe par le col-noeud  $(1, 0)$ . Le nouveau point singulier est un point de selle et suit l'isocline  $\dot{x} = 0$ . Si le champ de vecteurs est singulier et le point de selle est  $(b, y_{min})$ , on a une boucle homoclinique. À partir de ce raisonnement on déduit la Proposition 3.3.1.

**Proposition 3.3.1.** *Si le champ de vecteurs est une perturbation singulière (voir (3.3.1)) et qu'on a une boucle homoclinique à la limite (lorsque  $\epsilon(x, \alpha, \beta, \delta) \rightarrow 0$ ) le point de selle est  $(b, y_{min})$ .*

Il est donc possible d'utiliser la Proposition 3.3.1 pour approximer la courbe de bifurcation de boucle homoclinique dans l'espace des paramètres.

**Proposition 3.3.2.** *Si le champ de vecteurs est une perturbation singulière (voir (3.3.1)) et il existe une boucle homoclinique, alors à la limite (lorsque  $\epsilon(x, \alpha, \beta, \delta) \rightarrow 0$ ) les paramètres satisfont  $H(\alpha, \beta, \delta) = 0$  où*

$$\begin{aligned} H(\alpha, \beta, \delta) &= (\alpha^6 + 2\alpha^5b + 2\alpha^5 + 2\alpha^4b + \alpha^4 + \alpha^4\beta^2)\delta^3 \\ &+ (2\alpha^2\beta^3 - 2\alpha^5 - 18\alpha^4 - 2\alpha^4\beta - 16\alpha^3\beta + 2\beta^2\alpha^3 - 2\beta^2\alpha^2)\delta^2 \\ &+ (\alpha^4 + 32\alpha^3 + 16\alpha^2\beta - 2\beta^2\alpha^2 + \beta^4)\delta - 16\alpha^2. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

DÉMONSTRATION. La première étape est de trouver le minimum local  $(x_{min}, y_{min})$  de l'isocline  $\dot{x} = 0$ . L'équation de isocline est

$$y(x) = \frac{\rho(1-x)(\alpha x^2 + \beta x + 1)}{x} \quad (3.3.3)$$

et sa dérivée est

$$y'(x) = \frac{-\rho(\alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + 1)}{x^2}. \quad (3.3.4)$$

Donc  $x_{min}$  est une racine de  $n(x) = 0$  où

$$n(x) = \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + 1. \quad (3.3.5)$$

Soit  $(x_0, y_0)$  le point de selle, ce qui implique  $f(x_0) = 0$  (voir (2.3.1)), où

$$f(x) = -x^2 + \delta\alpha x^2 + \delta\beta x + \delta. \quad (3.3.6)$$

Lorsque  $d(x_{min}, x_0) = y(x_{min}) - y(x_0) = 0$  on a la condition requise pour obtenir la boucle homoclinique. Donc,

$$d(x_{min}, x_0) = \frac{\rho(x_0 - x_{min})(\alpha x_0 x_{min}^2 - \alpha x_{min} x_0 + \beta x_0 x_{min} + \alpha x_{min} x_0^2 + 1)}{x_{min} x_0} \quad (3.3.7)$$

et vu que  $x_{min} \neq x_0$  on a que  $d(x_{min}, x_0) = 0$  si et seulement si

$$\begin{aligned} m(x_{min}, x_0) &= \alpha x_0 x_{min}^2 - \alpha x_{min} x_0 + \beta x_0 x_{min} + \alpha x_{min} x_0^2 + 1 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

À l'aide du résultant on obtient en fonction de  $x_{min}$  la condition pour que  $x_0$  soit une racine de  $m(x_{min}, x_0) = 0$  et  $f(x_0) = 0$ , si

$$\text{résultant}(m(x_{min}, x_0), f(x_0), x_0) = \text{res}_1(x_{min}). \quad (3.3.9)$$

De façon semblable on obtient que  $x_{min}$  est une racine de  $n(x) = 0$  et  $\text{res}_1(x_{min}) = 0$ ,

$$\text{résultant}(\text{res}_1(x_{min}), n(x_{min}), x_{min}) = \alpha^2 H(\alpha, \beta, \delta) P(\alpha, \beta, \delta). \quad (3.3.10)$$

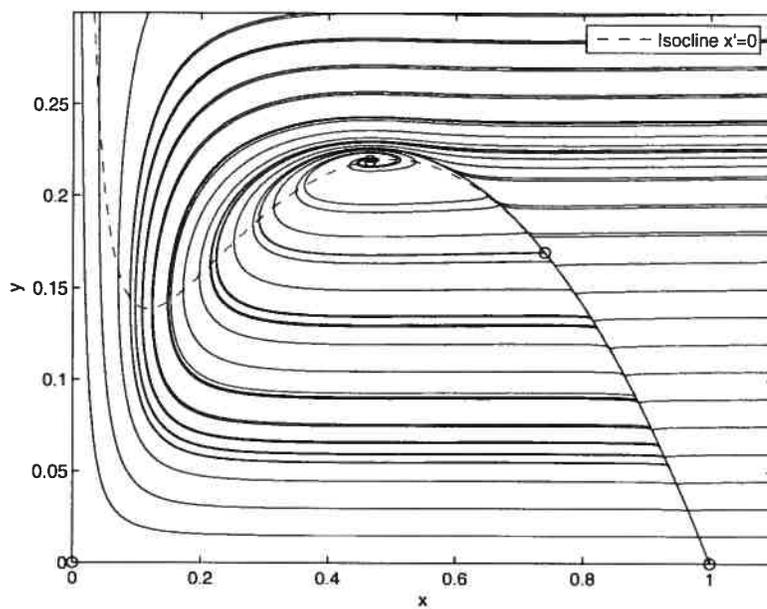
Le polynôme  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  représente la trace nulle à un point singulier (voir (2.3.9)). Le polynôme  $H(\alpha, \beta, \delta) = 0$  représente la condition nécessaire pour l'existence de la boucle homoclinique. En effet dans notre calcul rien n'exclut que  $x_0 = x_{min}$ , auquel cas  $m(x_{min}) = 0$  correspond à une bifurcation de Hopf en ce point.  $\square$

On donne deux exemples de champs de vecteurs dont les paramètres sont donnés dans le tableau 3.3. La figure 3.9(a) est un champ de vecteurs qui semble être

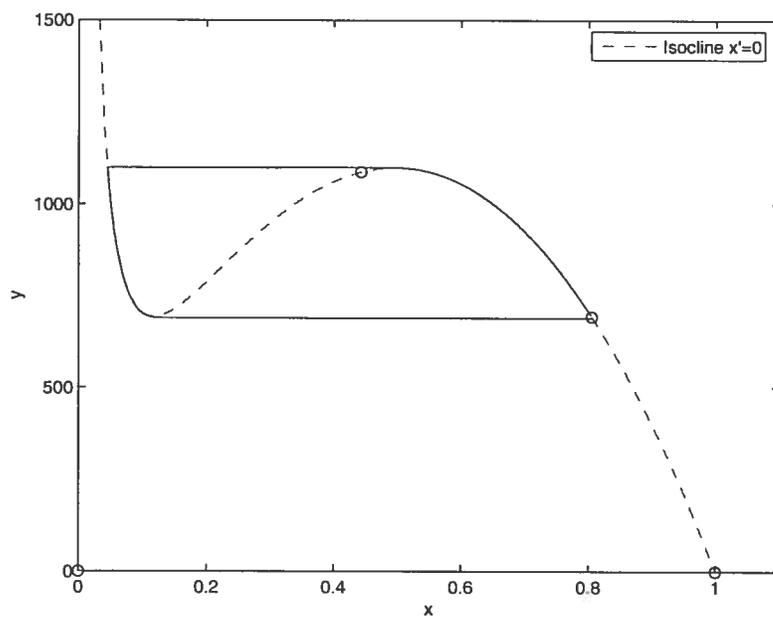
$\beta$	$\alpha$	$\delta$	$\rho$	figure
-3.5	90.9751	0.0113545	$\frac{1}{100}$	3.9(a)
-3.5	90.9751	0.01134173	50	3.9(b)

TAB. 3.3. Paramètres des exemples de champs de vecteurs.

singulier mais il est évident que ce n'est pas le cas lorsqu'on observe l'isocline  $\dot{x} = 0$  superposé avec les solutions. La figure 3.9(b) est un champ de vecteurs singulier. Si on y évalue  $H(\alpha, \beta, \delta)$  en  $(\alpha, \beta, \delta) = (90.9751, -3.5, 0.01134173)$  on obtient que la condition nécessaire  $H(\alpha, \beta, \delta) = 0$  est satisfaite.



3.9(a) champ de vecteurs qui n'a pas de perturbation singulière



3.9(b) champ de vecteurs de perturbation singulière

FIG. 3.9. Exemples de champs de vecteurs.

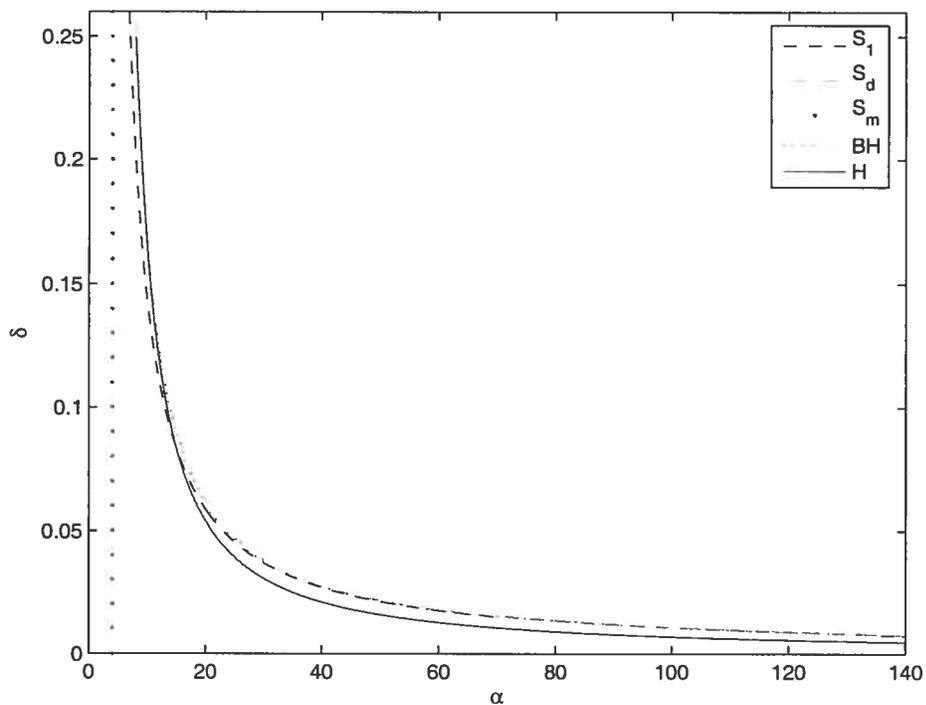
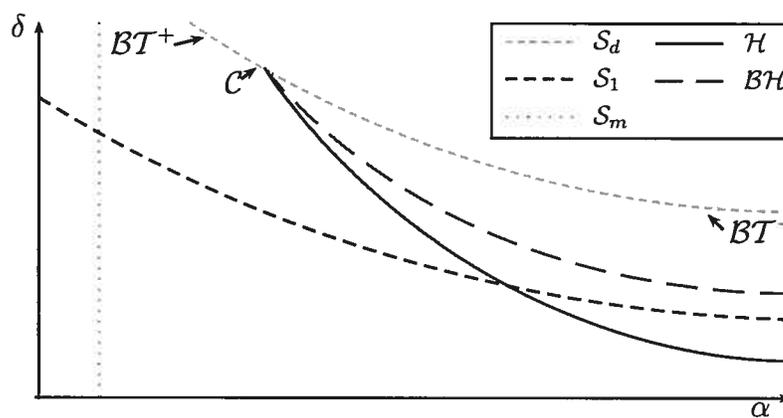
### 3.4. LE CAS $\beta = -4$

Dans le diagramme de bifurcations numérique  $\beta = -4$  on retrouve le centre organisateur du système, la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 en  $\alpha = 8$ ,  $\delta = \frac{1}{4}$ . Les courbes de bifurcation sont calculées encore une fois à l'aide de XPPAUTO et MATLAB (voir la figure 3.10(a)). La figure du diagramme de bifurcations numérique est difficile à interpréter donc on donne aussi le diagramme de bifurcations topologique (voir la figure 3.10(b)). On remarque, comme prédit par Coutu [C], que la courbe de la bifurcation de Hopf et celle de la boucle homoclinique rejoignent le centre organisateur. La figure 3.11 est un élargissement du diagramme de bifurcations numérique (figure 3.10(a)). Le tableau 3.4 donne les valeurs des paramètres utilisées pour tracer les portraits de phase des champs de vecteurs, ainsi que le type local de chaque point singulier. La figure 3.12(a)

	$\alpha$	$\delta$	$(1, 0)$	p.s. à gauche	p.s. à droite	figure
a	9.7	0.16	point de selle	foyer attractif	point de selle	3.12(a)
b	13	0.16	noeud attractif	n'existe pas	n'existe pas	3.12(b)
c	11	0.11	point de selle	foyer attractif	n'existe pas	3.12(c)
d	14.5	0.094	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.12(d)
e	14.6	0.09	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.12(e)
f	14.97	0.08895	noeud attractif	foyer répulsif	point de selle	3.12(f)

TAB. 3.4. Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = -4$ ).

représente un champ de vecteurs lorsque les paramètres sont situés entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_d$  et qu'il n'y a pas de cycle limite. On a donc deux points singuliers dans le premier quadrant. Dans la figure 3.12(b) les paramètres sont au dessus de la surface  $\mathcal{S}_d$  et il n'y a pas de point singulier dans le premier quadrant. Numériquement le point singulier  $(1, 0)$  est globalement stable. Dans la figure 3.12(c) les paramètres sont sous la surface  $\mathcal{S}_1$ , il y a seulement un point singulier dans le premier quadrant qui numériquement semble globalement stable. La figure 3.12(d) représente ce

3.10(a) Diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -4$ )3.10(b) Diagramme de bifurcations lorsque  $\beta = -4$ .FIG. 3.10. Diagramme de bifurcations ( $\beta = -4$ ) numérique et topologique.

qui se produit au dessus de la courbe de bifurcation de boucle homoclinique.

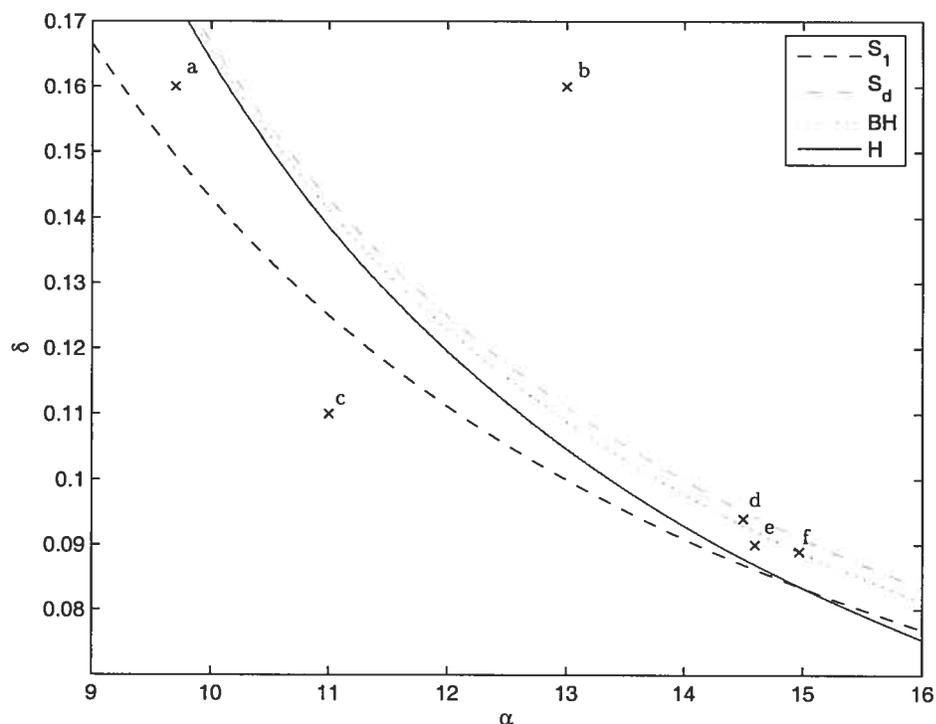
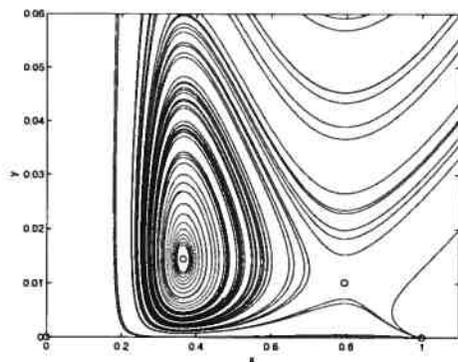
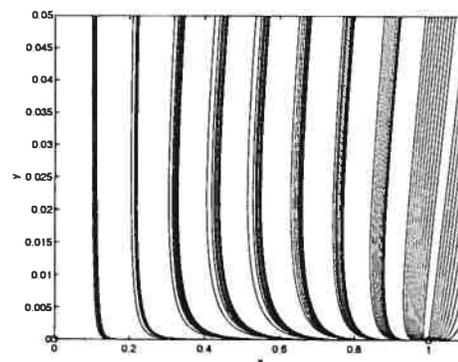


FIG. 3.11. Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -4$ ).

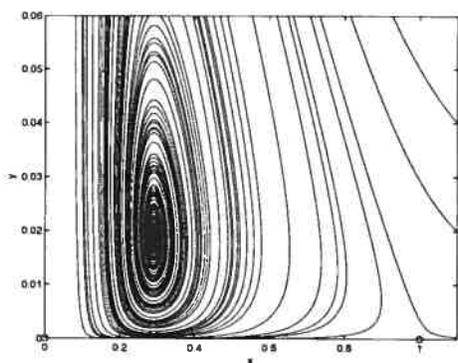
Le point singulier  $(1, 0)$  semble globalement asymptotiquement stable. La figure 3.12(e) représente le champ de vecteurs au dessous de la courbe de bifurcation de boucle homoclinique. La figure 3.12(f) représente le champ de vecteurs lorsque les paramètres sont sur la courbe de la bifurcation de boucle homoclinique. Avant de passer au cas  $\beta = -5$  on explique comment calculer numériquement la boucle homoclinique de codimension 2 de notre modèle.



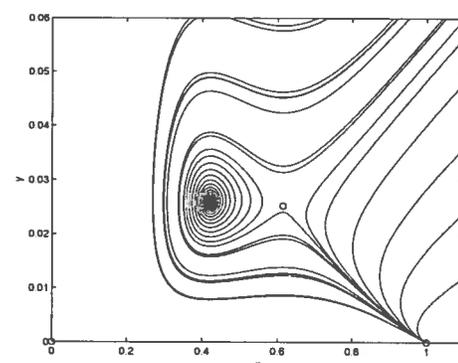
3.12(a) aucun cycle limite



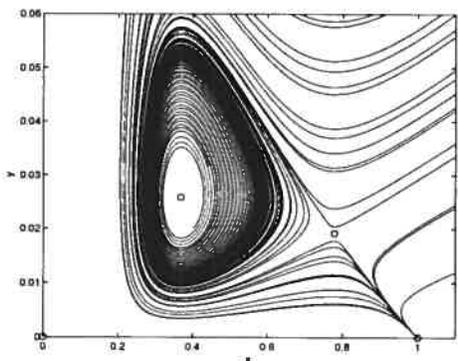
3.12(b) aucun cycle limite



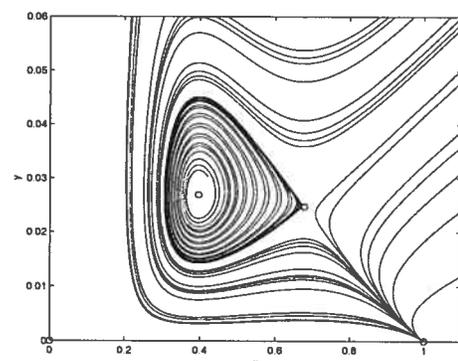
3.12(c) aucun cycle limite



3.12(d) aucun cycle limite



3.12(e) un cycle limite



3.12(f) une boucle homoclinique

FIG. 3.12. Certains champs de vecteurs ( $\beta = -4$ ).

### 3.5. CALCUL DE LA BOUCLE HOMOCLINIQUE DE CODIMENSION 2

Dans un voisinage de la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 il existe une courbe de paramètres où il y a une boucle homoclinique de codimension 2. On a déterminé que pour chaque  $\beta \in (-6, -4)$  fixé il existe un point dans l'espace des paramètres tel qu'on a une bifurcation de Hopf de codimension 2 ( $\mathcal{H}_2$ ). À partir de  $\mathcal{H}_2$  la théorie prédit qu'une courbe de bifurcation débute à ce point, c'est la courbe de bifurcation de double cycles ( $\mathcal{DC}$ ), (i.e. les deux cycles limites sont confondus). Ceci vient du fait que l'on a un déploiement complet de la bifurcation de Hopf de codimension 2. On sait que lorsque les paramètres sont proches de la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 il existe un point dans l'espace des paramètres où on a une bifurcation de boucle homoclinique de codimension 2 ( $\mathcal{BH}_2$ ). La courbe  $\mathcal{DC}$  se termine au point de bifurcation  $\mathcal{BH}_2$ . On rappelle que l'on a déterminé le comportement dans l'espace des paramètres de  $\mathcal{H}_2$ . Le point  $\mathcal{H}_2$  existe lorsque  $\beta \in (-6, -4)$  et le paramètre  $\alpha$  est déterminé par

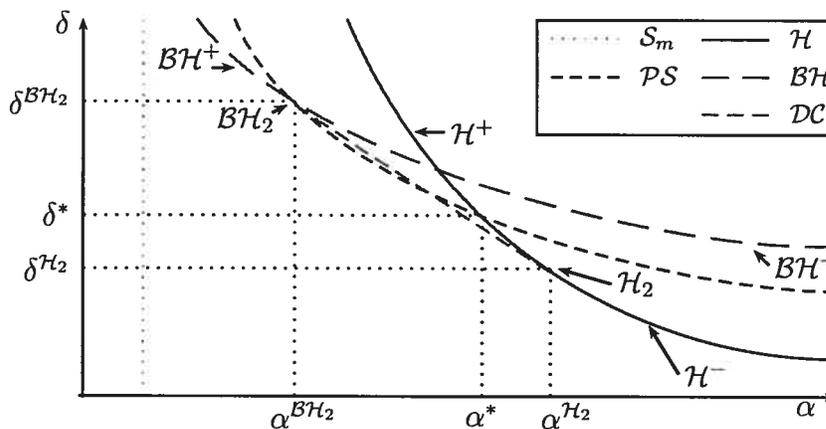
$$\alpha^{\mathcal{H}_2}(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta + 6}. \quad (3.5.1)$$

Il est difficile de trouver une telle condition pour  $\mathcal{BH}_2$  à cause du phénomène global de la bifurcation de boucle homoclinique. Par contre, la condition pour déterminer une boucle homoclinique de codimension 2 lorsque une boucle homoclinique existe est locale : la trace du point de selle doit être nulle. Soit  $(\alpha^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho), \delta^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho))$  les coordonnées de  $\mathcal{BH}_2$  dans l'espace des paramètres, on a donc

$$P(\alpha^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho), \beta, \delta^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho)) = 0. \quad (3.5.2)$$

**Proposition 3.5.1.** *Lorsque  $\beta < -4$  et  $\rho$  sont fixés, le point  $\mathcal{BH}_2$  dans l'espace des paramètres est tel que*

$$\alpha^\infty = 1 - \beta < \alpha^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho) \quad (3.5.3)$$

FIG. 3.13. Diagramme des courbes  $\mathcal{PS}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{BH}$ .

DÉMONSTRATION. La branche de solution de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  (voir (2.3.9)) qui représente la trace nulle du point de selle tend à l'infini lorsque  $\alpha$  tend vers  $\alpha^\infty = 1 - \beta$ .  $\square$

**Conjecture 3.5.1.** Lorsque  $\beta < -4$  et  $\rho$  sont fixés, le point  $\mathcal{BH}_2$  dans l'espace des paramètres est tel que

$$\frac{\beta^2}{4} < \alpha^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho) < \alpha^* = \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta - 2}. \quad (3.5.4)$$

On peut illustrer la conjecture à l'aide de la figure 3.13. La courbe  $\mathcal{PS}$  représente un point de selle dans le premier quadrant lorsque la trace de son linéarisé est nul. La courbe  $\mathcal{H}$  est celle de la bifurcation de Hopf. Les deux courbes  $\mathcal{PS}$  et  $\mathcal{H}$  sont deux des trois branches de solutions de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  (voir (2.3.9)). On a les données suivantes pour  $\mathcal{H}_2$  et  $(\alpha^*, \delta^*)$  :

$$\begin{aligned} (\alpha^*(\beta), \delta^*(\beta)) &= \left( \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta - 2}, \frac{\beta - 2}{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) \\ (\alpha^{\mathcal{H}_2}(\beta), \delta^{\mathcal{H}_2}(\beta)) &= \left( \frac{\beta^2}{\beta + 6}, \delta^{\mathcal{H}_2}(\beta) \right). \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Il est possible de calculer numériquement le point  $\mathcal{BH}_2$  de la façon suivante. On calcule premièrement la courbe de bifurcation de boucle homoclinique avec

$\beta$	$\frac{\beta^2}{4}$	$\alpha^{\mathcal{BH}_2}$	$\alpha^*$	$\alpha^{\mathcal{H}_2}$
-4.1	$\frac{1681}{400} = 4.2025$	8.5055	$\frac{52111}{6100} \approx 8.5428$	$\frac{1681}{190} \approx 8.8474$
-5	$\frac{25}{4} = 6.25$	13.7771	$\frac{100}{7} \approx 14.2857$	25
-6	9	20.8609	$\frac{45}{2} \approx 22.5$	n'existe pas
-10	25	62.6862	75	n'existe pas

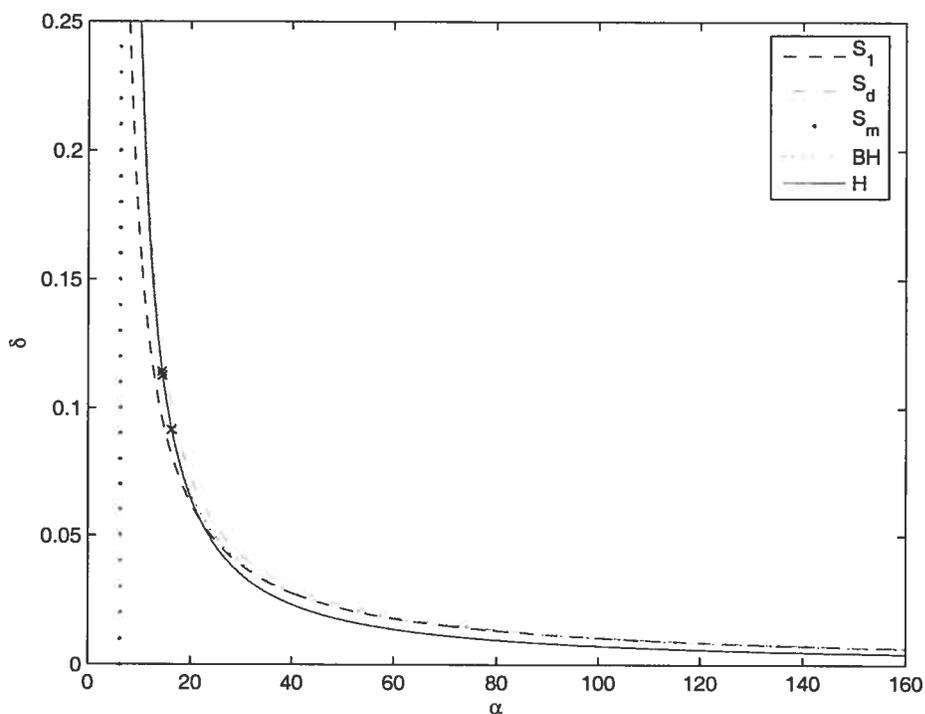
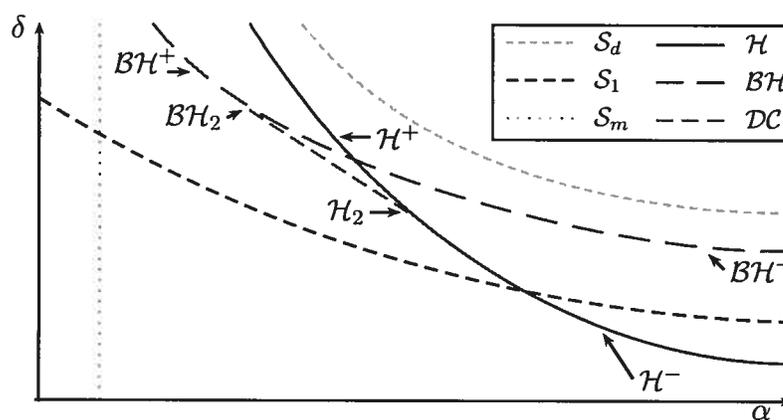
TAB. 3.5. Calculs numériques de  $\mathcal{BH}_2$ .

XPPAUTO. À partir des paramètres de cette courbe on calcule le point sur cette courbe qui minimise la valeur absolue de la trace du linéarisé du point de selle. Ce point dans l'espace des paramètres est celui qu'on nomme  $\mathcal{BH}_2$ . Pour différentes valeurs de  $\beta$  on a déterminé la position du point  $\mathcal{BH}_2$ . Le tableau 3.5 donne les résultats numériques. À partir de ces résultats on peut déduire la Conjecture 3.5.2.

**Conjecture 3.5.2.** *Lorsque  $\rho$  fixé, le point  $\mathcal{BH}_2$  dans l'espace des paramètres avec coordonnées  $(\alpha^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho), \delta^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho))$  est tel que  $\alpha^{\mathcal{BH}_2}(\beta, \rho) \rightarrow \infty$  lorsque  $\beta \rightarrow -\infty$ .*

### 3.6. LE CAS $\beta = -5$

Dans ce cas il est important de remarquer que la courbe de bifurcation de boucle homoclinique ( $\mathcal{BH}$ ) croise la courbe de la bifurcation de Hopf ( $\mathcal{H}$ ). Une courbe de bifurcation qu'on n'a pas calculé est la courbe de double cycle ( $\mathcal{DC}$ ) de la bifurcation de Hopf de codimension 2. Mais on sait approximativement où elle est située car on est capable de trouver deux cycles limites. On donne le diagramme de bifurcations numérique (figure 3.14(a)) calculé avec XPPAUTO mais comme, il est difficile d'observer les différentes courbes, on donne aussi le diagramme de bifurcations topologique (figure 3.14(b)). La figure 3.15 est un agrandissement du diagramme de bifurcations où des valeurs intéressantes des paramètres sont choisies. Le tableau 3.6 donne la liste des paramètres choisis pour la figure 3.15.

3.14(a) Diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -5$ ).3.14(b) Diagramme de bifurcations lorsque  $\beta^{H_2 \cap S_1} \leq \beta < -4$ .FIG. 3.14. Diagramme de bifurcations ( $\beta = -5$ ) numérique et topologique.

La figure 3.16(a) est une boucle homoclinique répulsive et pour bien illustrer le champ de vecteurs on a calculé les solutions dans un intervalle de temps négatif.

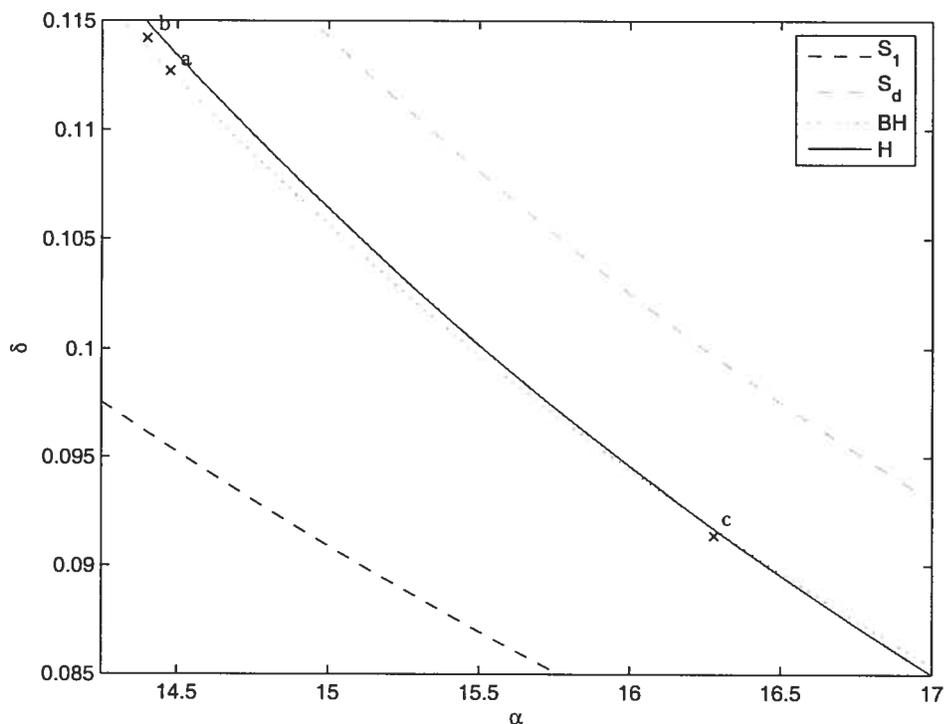


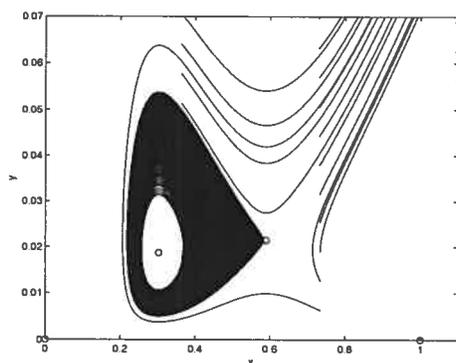
FIG. 3.15. Élargissement du diagramme de bifurcations numérique ( $\beta = -5$ ).

	$\alpha$	$\delta$	$(1, 0)$	p.s. à gauche	p.s. à droite	figure
a	14.475945	0.112705	noeud attractif	foyer attractif	point de selle	3.16(a)
b	14.4	0.1142	noeud attractif	foyer attractif	point de selle	3.16(b)
c	16	0.09138	noeud attractif	foyer attractif	point de selle	3.16(c)

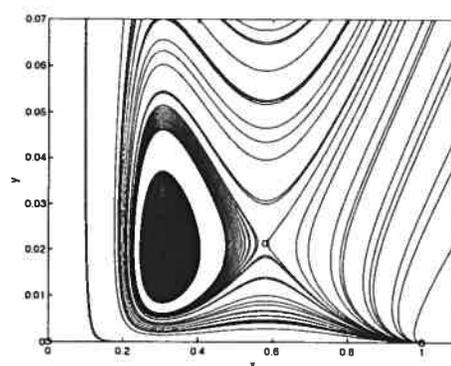
TAB. 3.6. Description de certains champs de vecteurs ( $\beta = -5$ ).

De cette façon on observe bien la boucle homoclinique. Dans le champ de vecteurs représenté par la figure 3.16(b) on a un cycle limite répulsif. Ceci est évident car les solutions avec condition initiale à l'intérieur du cycle limite convergent vers le foyer attractif. Si les conditions initiales sont à l'extérieur du cycle limite, les solutions spiralent pour finalement converger vers le point singulier  $(1, 0)$ . La dernière figure 3.16(c) présente deux cycles limites. Le cycle limite intérieur est répulsif car les solutions avec valeur initiale à l'intérieur du cycle limite convergent vers le foyer

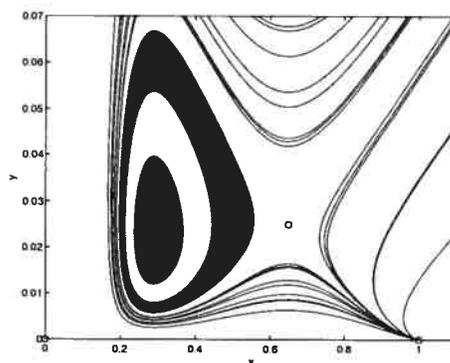
attractif. Les solutions à l'extérieur du cycle intérieur répulsif s'accumulent sur le cycle limite extérieur.



3.16(a) une boucle homoclinique



3.16(b) un cycle limite



3.16(c) deux cycles limites

FIG. 3.16. Quelques champs de vecteurs ( $\beta = -5$ ).

## Chapitre 4

---

### DIAGRAMMES DE BIFURCATIONS ET INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE

Dans les premières sections de ce chapitre on donne les diagrammes de bifurcations. Une partie des diagrammes de bifurcations est conjecturées à partir des résultats obtenus. Les diagrammes on été initialement conjecturés par Coutu [C] et sont rectifiés à partir de l'information obtenue dans l'étude de la bifurcation de Hopf. On donne ensuite une interprétation biologique du système, en répondant aux questions de Bazykin [BA] énoncées dans le premier chapitre.

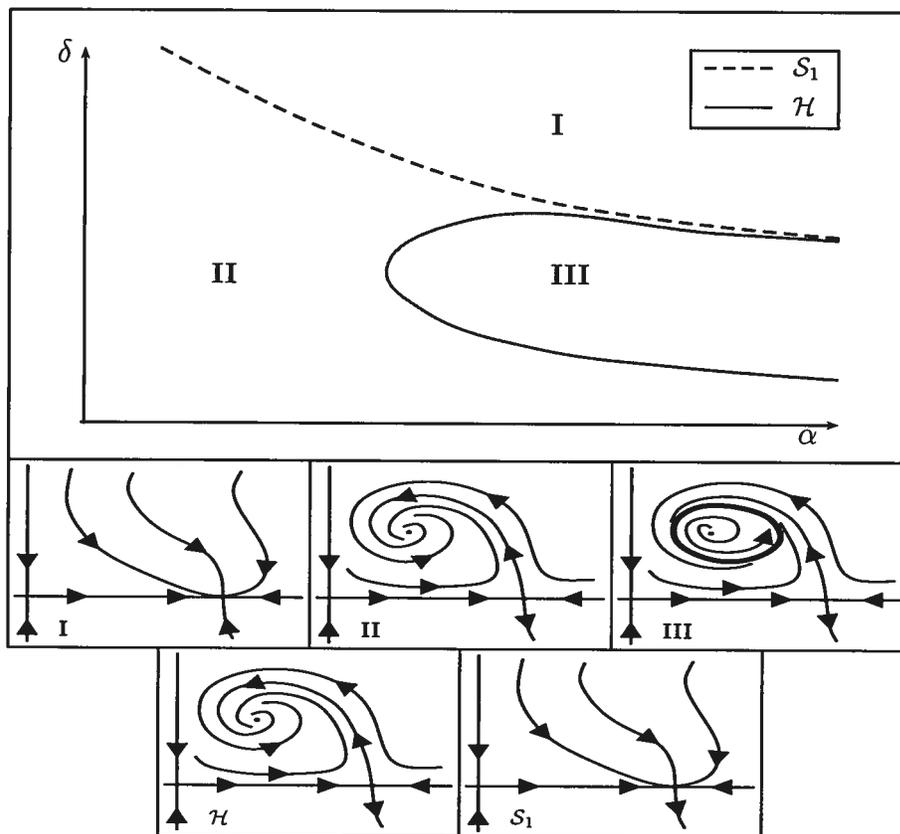
4.1. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $\beta \geq 0$ 

FIG. 4.1. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour  $\beta \geq 0$ .

Le cas  $\beta \geq 0$  n'a pas été étudié par Coutu mais à l'aide de ses calculs et des calculs de la bifurcation de Hopf on obtient le diagramme de bifurcations de la figure 4.1. On sait que la courbe de la bifurcation de Hopf ( $\mathcal{H}$ ) et la courbe  $\mathcal{S}_1$  du col-noeud attractif ne peuvent pas s'intersecter. On peut alors déduire que lorsque  $\beta \geq 0$  et  $\alpha \rightarrow \infty$  les branches de la bifurcation de Hopf tendent vers l'axe  $\alpha$  car  $\mathcal{S}_1$  tend vers l'axe  $\alpha$  lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ .

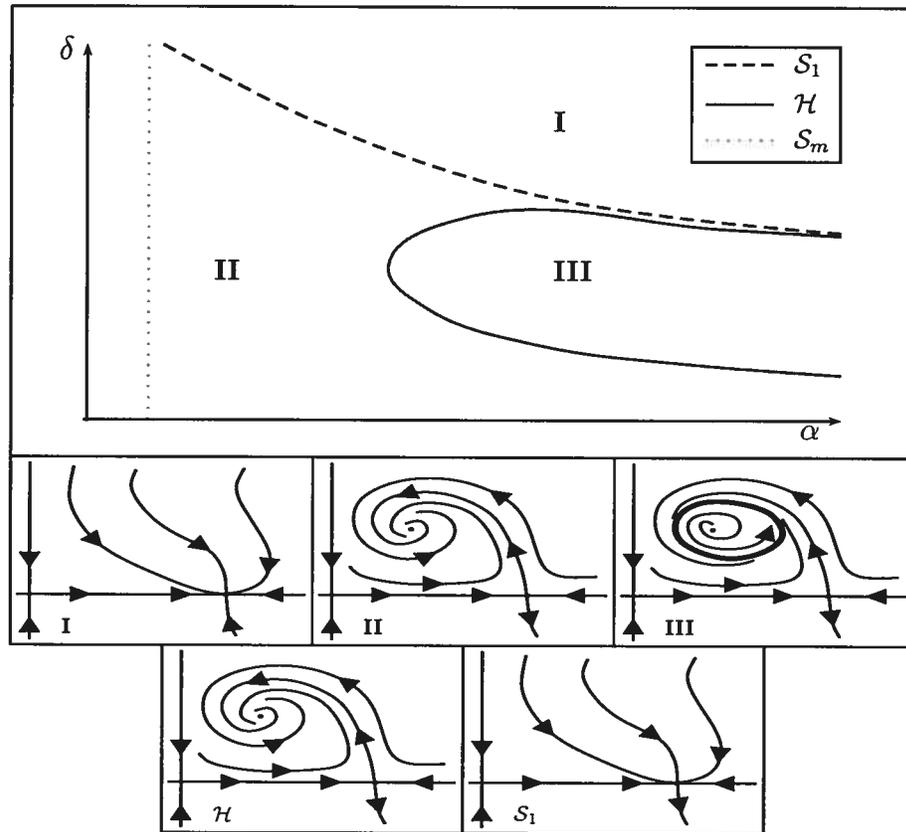
4.2. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $-2 < \beta < 0$ 

FIG. 4.2. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour  $-2 < \beta < 0$ .

Le cas  $-2 < \beta < 0$  ne diffère presque pas du cas  $\beta \geq 0$  sauf dans une restriction sur les paramètres : la restriction garantissant que la fonction de réponse soit bien définie pour le premier quadrant. Cette restriction étant donnée par la courbe  $S_m$ , on considère seulement les paramètres à la droite de la courbe  $S_m$ .

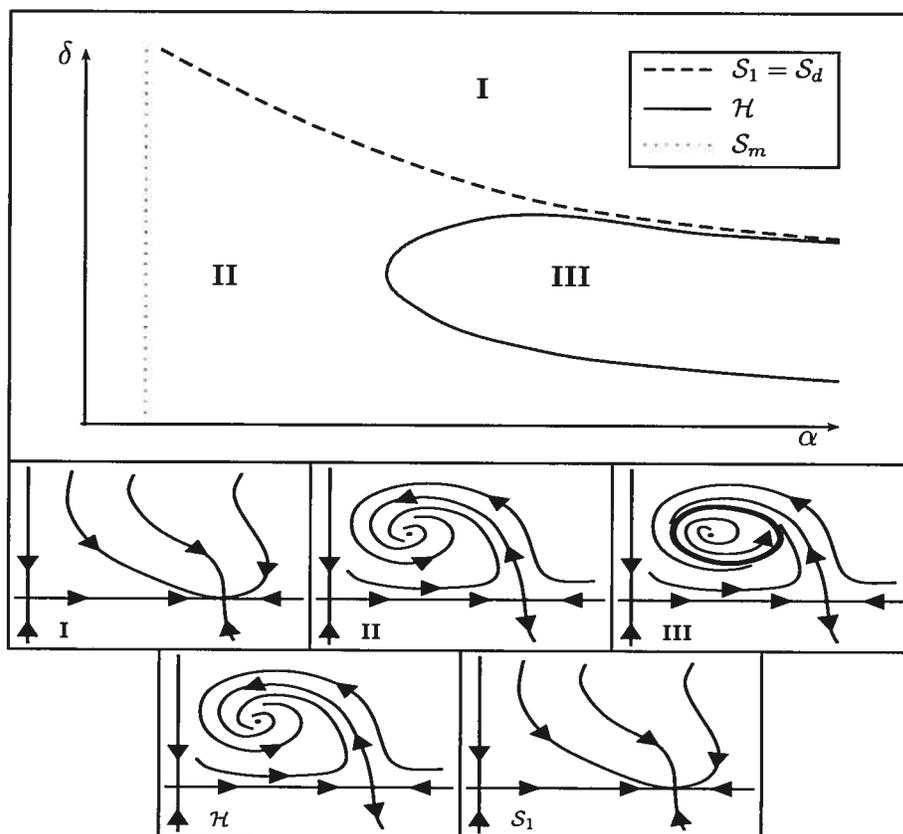
4.3. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $\beta = -2$ 

FIG. 4.3. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour  $\beta = -2$ .

Le cas  $\beta = -2$  est différent du cas  $-2 < \beta < 0$  seulement sur  $\mathcal{S}_1$  car nous avons un point triple en  $(1, 0)$ . En effet la courbe  $\mathcal{S}_1$  et la courbe  $\mathcal{S}_d$  sont confondues, donc il y a l'existence d'un point triple en  $(1, 0)$ , qui est attractif.

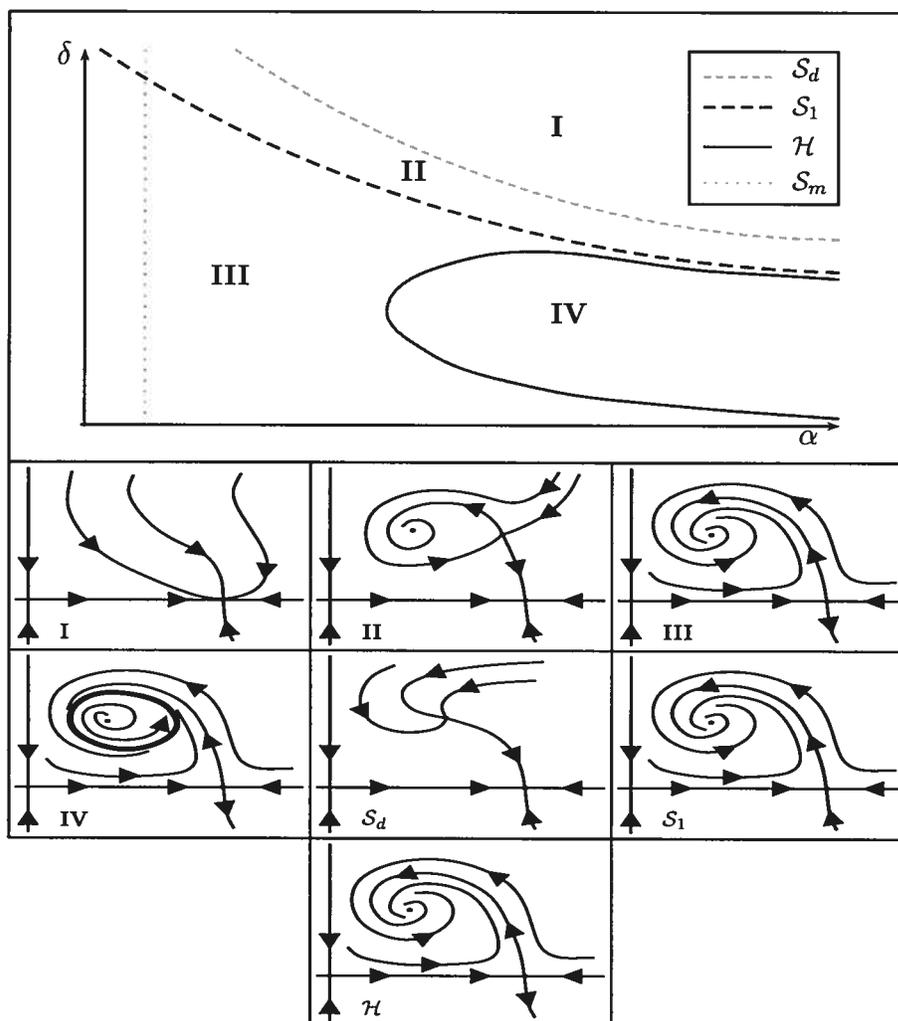
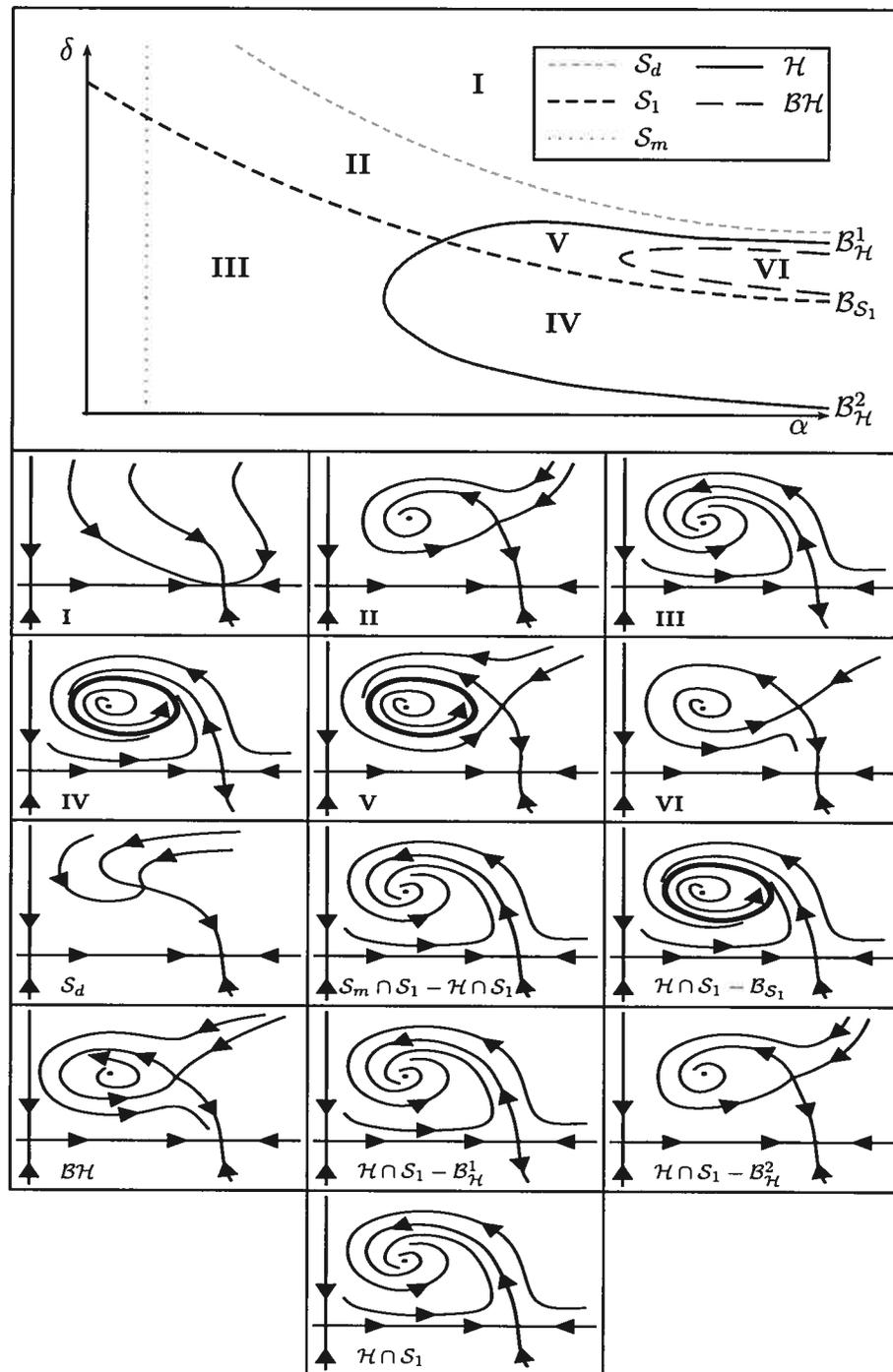
4.4. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $-3 \leq \beta < -2$ 

FIG. 4.4. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour  $-3 \leq \beta < -2$ .

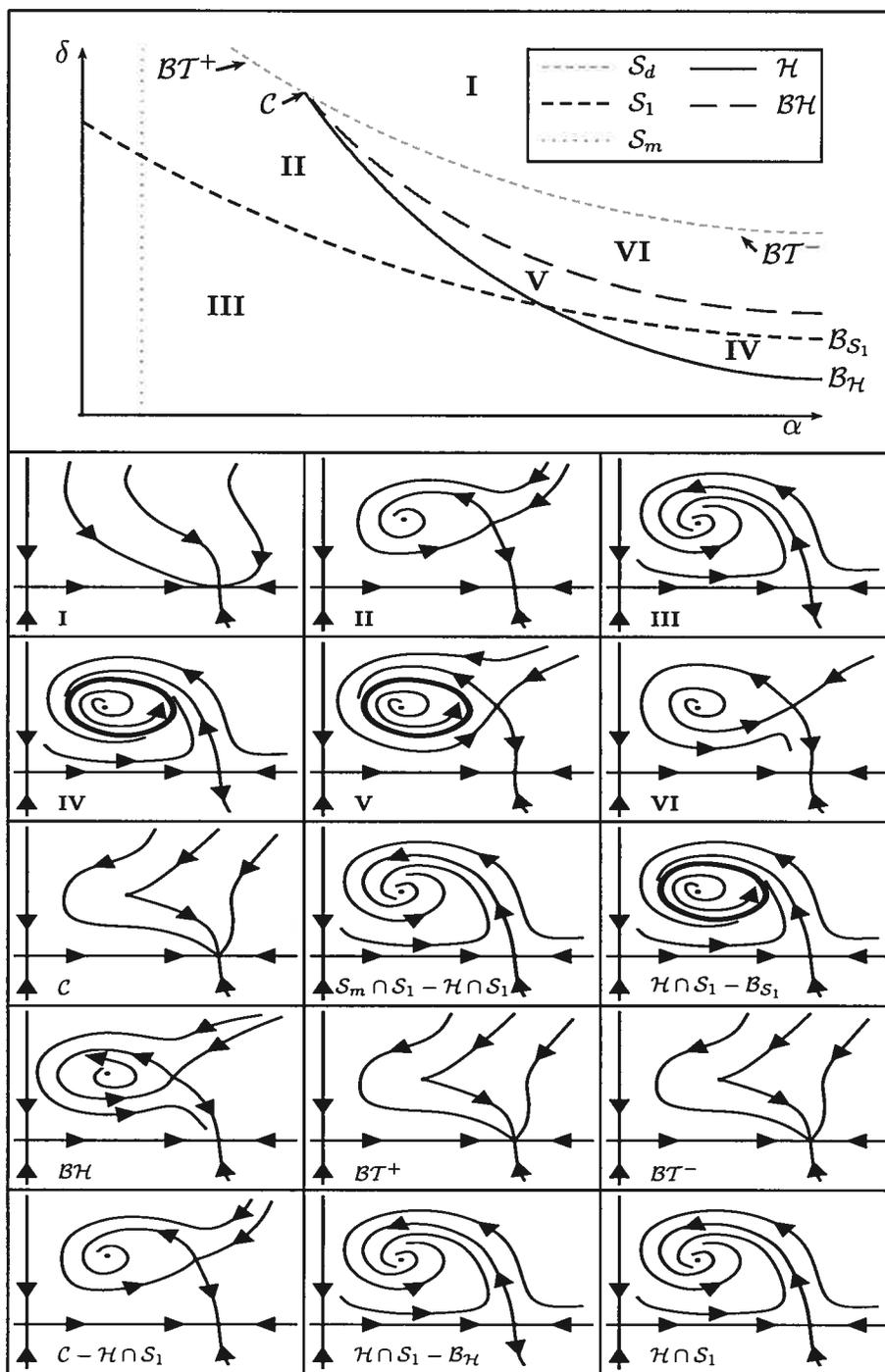
Dans le cas  $-3 \leq \beta < -2$  il y a l'introduction de la nouvelle courbe ( $S_d$ ), qui représente un point double dans le premier quadrant, i.e. une bifurcation de col-noeud attractif. Il n'y a pas d'intersection de la courbe  $\mathcal{H}$  et  $S_1$  donc il n'y a pas de bifurcation de Hopf en même temps que deux points singuliers dans le premier quadrant. Ceci implique qu'il semble pas y avoir de boucle homoclinique, ni de cycle limite lorsqu'on a 2 points singuliers.

4.5. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $-4 < \beta < -3$ FIG. 4.5. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour  $-4 < \beta < -3$ .

Dans le cas  $-4 < \beta < -3$  on a une intersection entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{S}_1$ . Cette intersection est donnée par

$$\alpha^{\mathcal{S}_1}(\beta) = \frac{(\beta + 1)(\beta^2 + 3\beta + 1)}{\beta + 3} \quad (4.5.1)$$

ce qui implique que l'on a une nouvelle région où il y a un cycle limite et deux points singuliers dans le premier quadrant. On remarque que le point d'intersection vient de l'infini lorsque  $\beta = -3$ . La théorie de la bifurcation de Bogdanov-Takens prédit une courbe de paramètres de bifurcation de boucle homoclinique près de  $\beta = -4$ . Ce qui nous mène à poser la question : pour quelles valeurs de  $\beta < -4$  perd-on la courbe de bifurcation de boucle homoclinique ? Cette question posée par Coutu [C] reste ouverte. Numériquement on est capable de calculer cette courbe de bifurcation pour  $\beta = -3.5$ . On conjecture que la courbe en forme de 'c' tend vers l'infini lorsque  $\beta \rightarrow -3$  (i.e. son point extremum à gauche passe à l'infini par  $\beta = -3$ ). Ceci vient du fait que la région où la boucle homoclinique peut exister disparaît lorsque  $\beta = -3$ .

4.6. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $\beta = -4$ FIG. 4.6. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour  $\beta = -4$ .

Le diagramme de bifurcations suivant est le plus important car il contient le centre organisateur du système ( $\mathcal{C}$ ). On a la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3 en  $\alpha = 8$ ,  $\beta = -4$  et  $\delta = \frac{1}{4}$  dont le déploiement apparaît à la figure 1.9. Donc les surfaces  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{BH}$ ,  $\mathcal{DC}$  de même que les courbes  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{BH}_2$  et  $\mathcal{H} \cap \mathcal{BH}$  rejoignent le centre organisateur. Comment ceci se voit-il dans les tranches? On a que  $\mu_2 = 4 + \beta$ . Donc les tranches  $\beta$  constantes correspondent à des tranches  $\mu_2$  constantes. Si l'on regarde la tranche  $\mu_2 = 0$  elle nous prédit qu'on doit voir les courbes  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{BH}$  qui rejoignent la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3. C'est ce qu'on voit sur la tranche  $\beta = -4$  : en effet dans ce cas on a calculé numériquement la courbe  $\mathcal{BH}$ . De même pour les tranches  $\mu_2 < 0$  (resp.  $\mu_2 > 0$ ) qui correspondent à  $\beta < -4$  (resp.  $\beta > -4$ ).

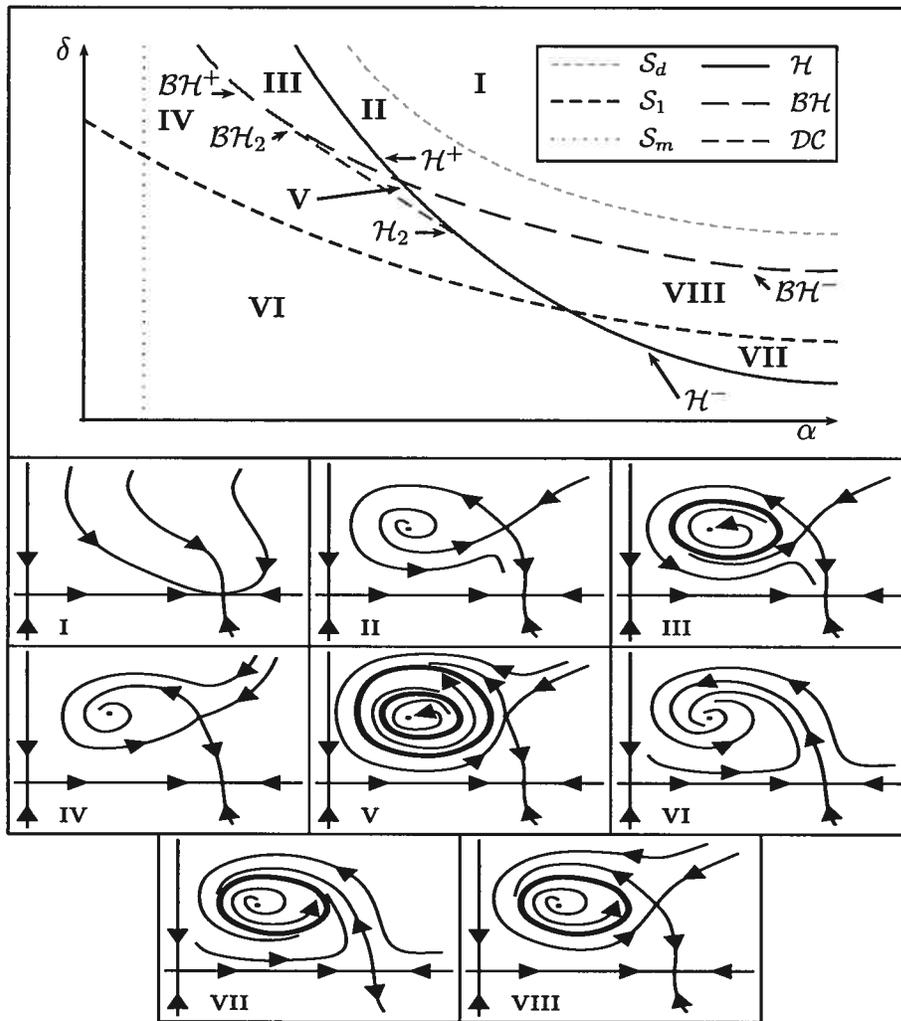
4.7. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ 

FIG. 4.7. Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour  $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ .

Le cas  $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} \leq \beta < -4$  est l'un des diagrammes de bifurcations avec la dynamique la plus riche. On a que la courbe de la bifurcation de Hopf ( $\mathcal{H}$ ) tend vers l'infini en  $\delta$  lorsque  $\alpha \rightarrow \frac{\beta^2}{4}$ . Ce qui force également la bifurcation de boucle homoclinique ( $\mathcal{BH}$ )   être présente entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{H}$ . En effet on ne doit plus avoir de cycle sur  $\mathcal{S}_d$ . Sinon ceci impliquerait une contradiction du théorème de réduction

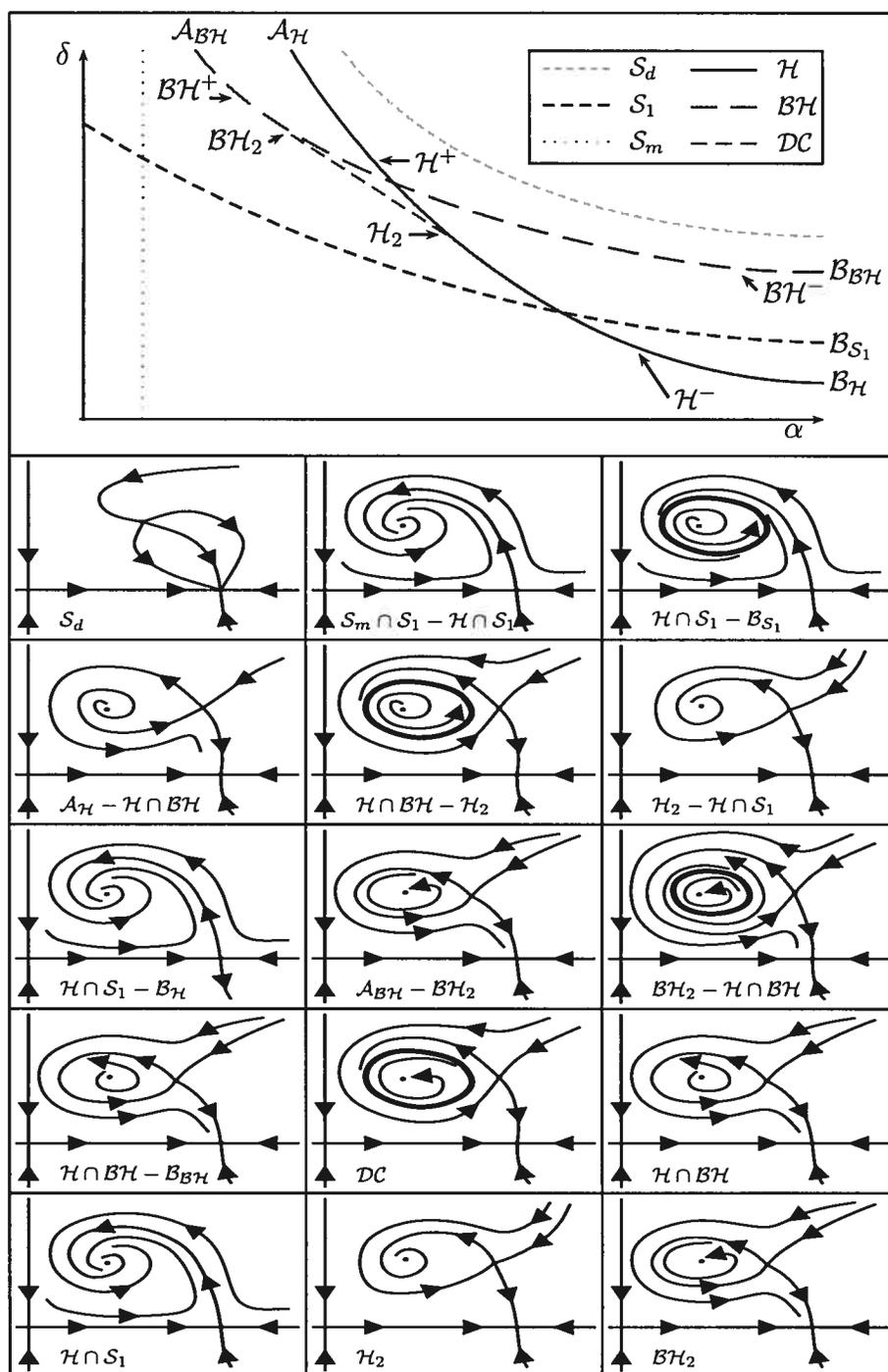


FIG. 4.8. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lors des bifurcations pour  $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ .

de la variété centre. On donne l'énoncé de ce théorème, plus spécifiquement la version de Šošitašvili.

**Théorème 4.7.1. [AVI]** Soit  $v(x, \lambda)$  une famille de champs de vecteurs en  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  de classe  $C^r$  où  $r \geq 2$ . Soit  $x_0$  un point singulier en  $\lambda = \lambda_0$  pour lequel le linéarisé du champ de vecteurs évalué à  $x_0$  en  $\lambda = \lambda_0$  est

$$\begin{bmatrix} B^0 & & \\ & B^- & \\ & & B^+ \end{bmatrix} \quad (4.7.1)$$

où  $B^0$  (resp.  $B^-$ ,  $B^+$ ) est une matrice carrée avec valeurs propres à parties réelles nulles (resp. négatives, positives). Le champ de vecteurs  $v(x, \lambda)$  a la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= B^0 \xi + o(|\xi, y, z|) = F(\xi, y, z, \lambda) \\ \dot{y} &= B^- y + o(|\xi, y, z|) \\ \dot{z} &= B^+ z + o(|\xi, y, z|). \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

On ajoute l'équation  $\dot{\lambda} = 0$ . Il existe un voisinage de  $x_0$  et un voisinage de  $\lambda_0$  sur lequel la variété centre est donné par

$$(y, z) = (k_1(\xi, \lambda), k_2(\xi, \lambda)) \quad (4.7.3)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont de classe  $C^{r-1}$ , et le champ de vecteurs (4.7.2) est topologiquement équivalent à

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F(\xi, k_1(\xi, \lambda), k_2(\xi, \lambda), \lambda) \\ \dot{y} &= -y \\ \dot{z} &= z. \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Si on applique le théorème, le système est topologiquement équivalent à

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y^2 + \epsilon(\alpha, \beta, \delta) + o(|x, y|^2) \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

ce qui décrit la bifurcation générique du point double. Dans notre cas, pour obtenir le point double, le point singulier à gauche doit être un noeud répulsif et le point singulier de droite doit être un point de selle. La courbe  $\mathcal{BH}$  doit

être présente entre  $\mathcal{S}_d$  et  $\mathcal{S}_1$  pour que le diagramme de bifurcations se recolle. Par exemple, la région **VIII** a un cycle limite et par le théorème de Šošitašvili il doit exister une région **II** sans cycle limite avant la courbe de bifurcation  $\mathcal{S}_d$ . Numériquement il semble que  $\mathcal{BH}$  tende vers l'infini lorsque  $\alpha \rightarrow \frac{\beta^2}{4}$  ( $\mathcal{S}_m$ ).

On peut appliquer les calculs faits sur la bifurcation de Hopf pour déterminer la position de la bifurcation de Hopf de codimension 2 ( $\mathcal{H}_2$ ) : ceci se produit à l'intersection de la courbe ( $\mathcal{H}$ ) avec

$$\alpha^{H_2}(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta + 6}. \quad (4.7.6)$$

Les calculs effectués pour la bifurcation de Hopf donnent le déploiement de la bifurcation de Hopf de codimension 2, donc il existe une courbe de double cycle ( $\mathcal{DC}$ ). On sait que la courbe ( $\mathcal{DC}$ ) se termine à la bifurcation de boucle homoclinique de codimension 2 ( $\mathcal{BH}_2$ ) pour  $\beta$  près de  $-4$ . Ceci vient du déploiement de la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3. On conjecture que cela se produit encore quand  $\beta$  décroît. Le point  $\mathcal{BH}_2$  dans le diagramme de bifurcations existe près de  $\beta = -4$  par la théorie de la bifurcation de Bogdanov-Takens de codimension 3. L'existence de la courbe  $\mathcal{DC}$  assez loin de  $\mathcal{H}_2$  est validée numériquement. De plus on a donné (voir la section 3.3) des calculs numériques pour la position de  $\mathcal{BH}_2$  et une conjecture de sa position.

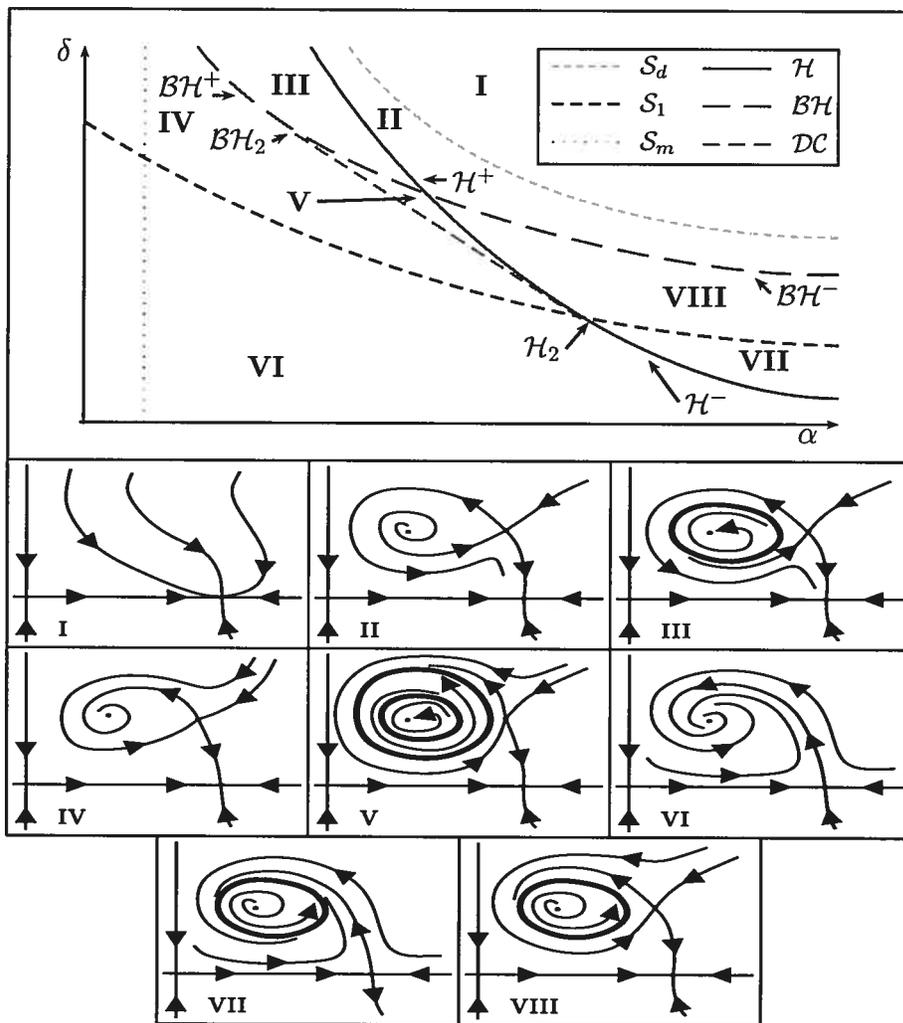
4.8. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ 

FIG. 4.9. Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour  $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .

Le cas  $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$  change peu topologiquement du cas  $\beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2} < \beta < -4$ . Le point  $(\mathcal{H}_2)$  est sur la courbe  $S_1$  ( $\mathcal{H}_2$  se déplace de gauche à droite sur  $\mathcal{H}$ ). On conjecture pour ce diagramme de bifurcations que la courbe de double cycle ( $\mathcal{DC}$ ) commence à  $\mathcal{H}_2$  et se termine à  $\mathcal{BH}_2$ .

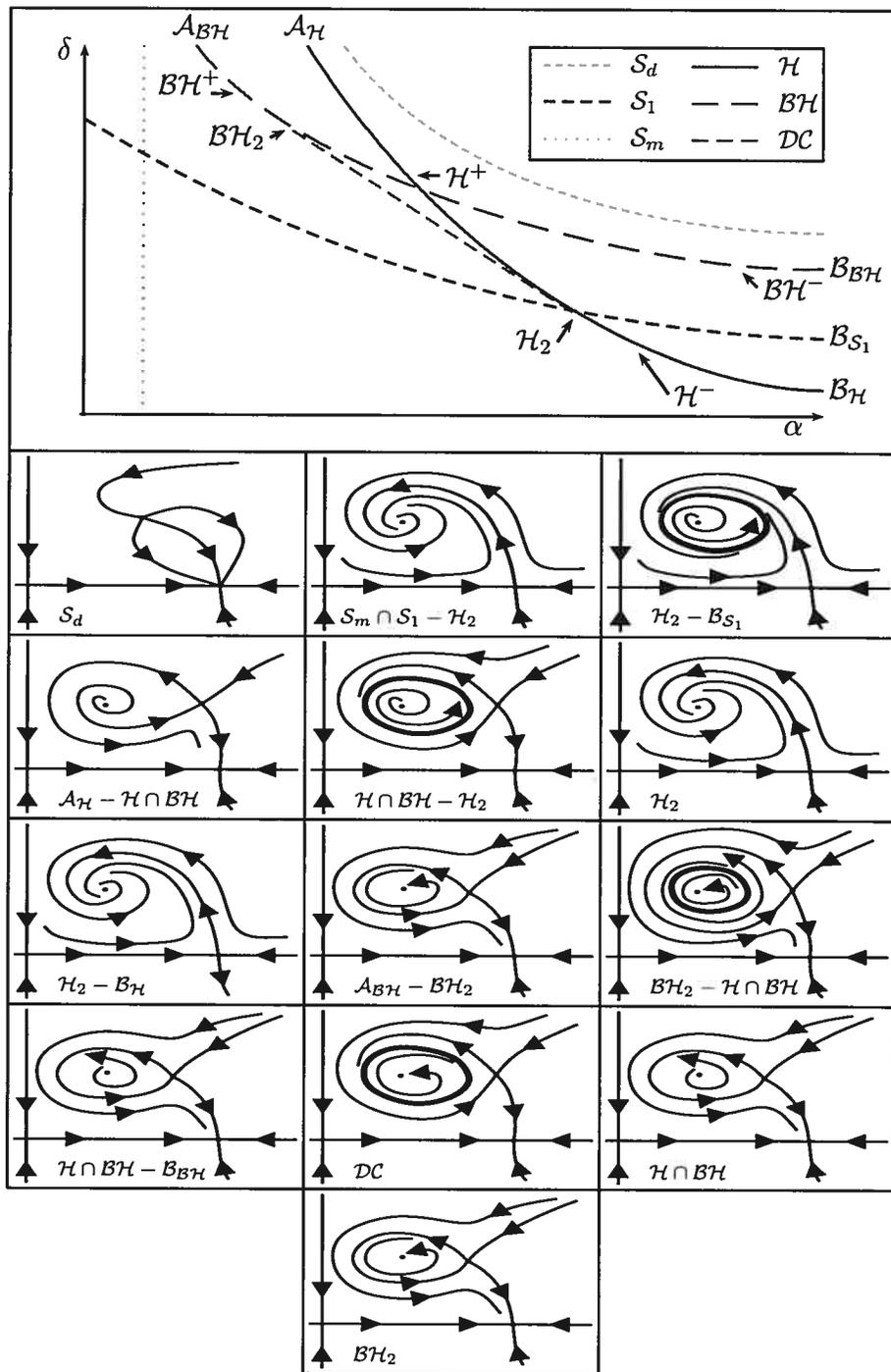


FIG. 4.10. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lors des bifurcations pour  $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .

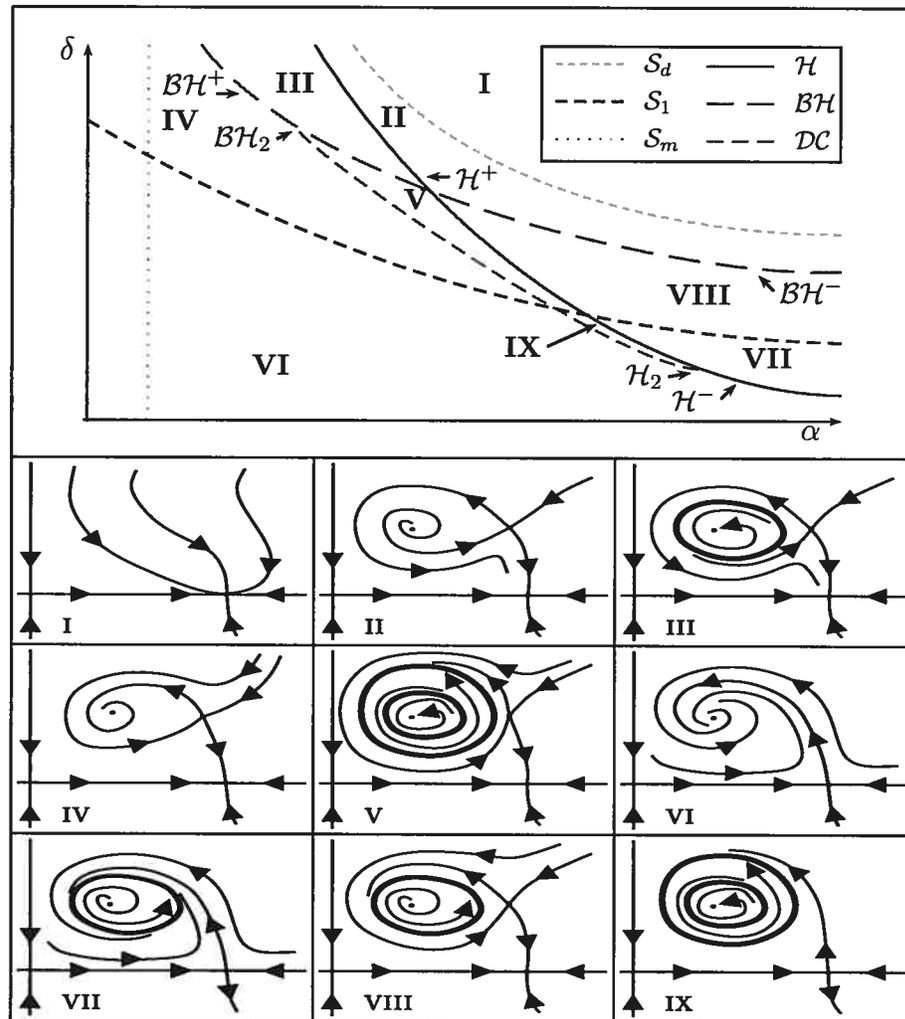
4.9. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ 

FIG. 4.11. Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour  $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .

Le cas  $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$  diffère du cas  $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$  en ce que la bifurcation de Hopf de codimension 2 ( $\mathcal{H}_2$ ) est rendue sous de la surface  $S_1$ . Ceci implique que maintenant il est possible d'avoir deux cycles limites avec seulement un point singulier dans le premier quadrant. Donc on a une nouvelle région de paramètres. On utilise la même conjecture pour la courbe de double cycle ( $DC$ ) que dans les cas précédents.

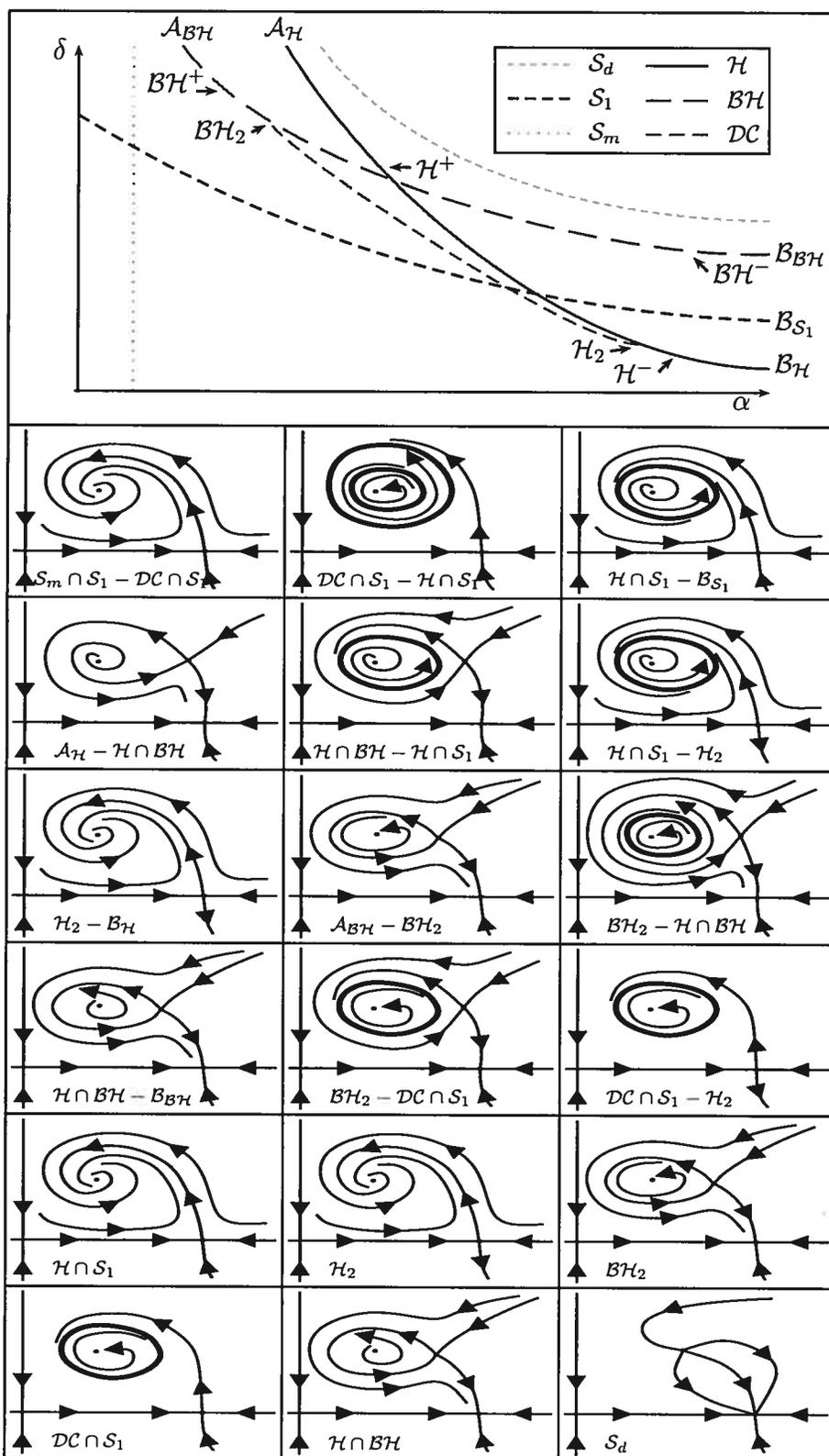


FIG. 4.12. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lors des bifurcations pour  $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .

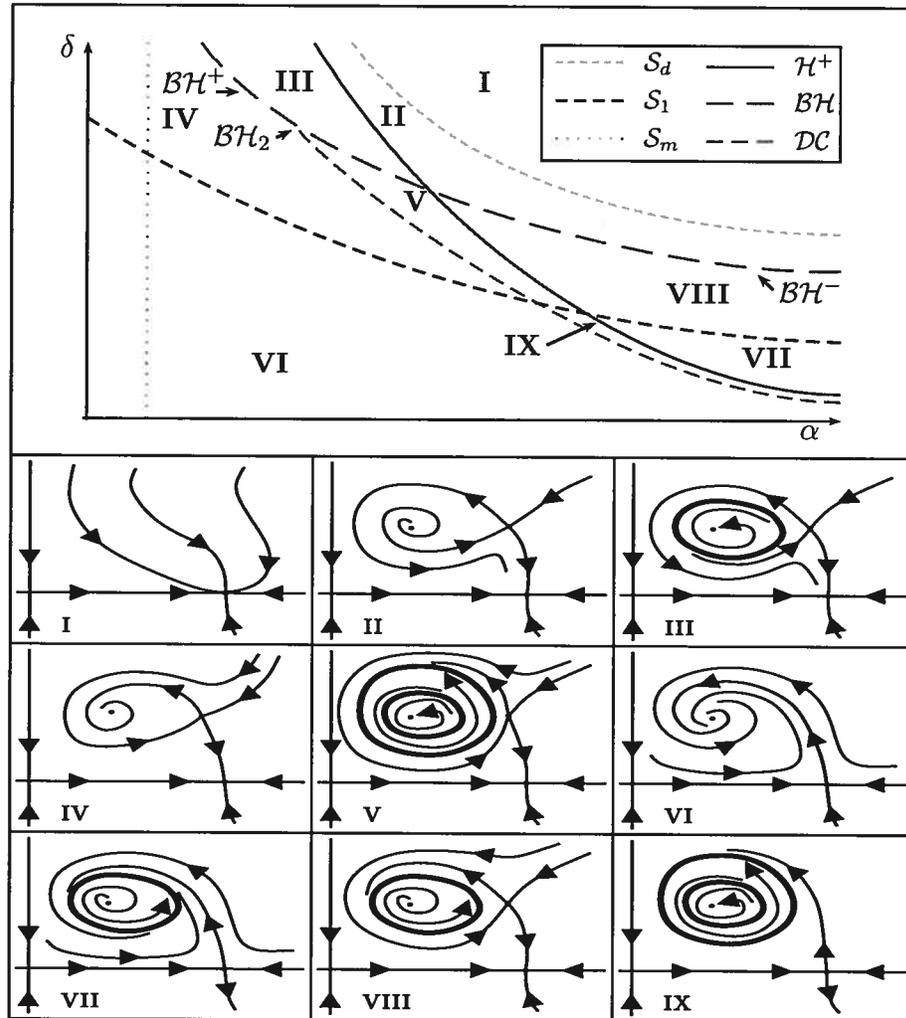
4.10. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS LORSQUE  $\beta \leq -6$ 

FIG. 4.13. Diagramme de bifurcations et portraits de phase génériques pour  $\beta \leq -6$ .

On donne le dernier cas des diagrammes de bifurcations, soit  $\beta \leq -6$ . La bifurcation de Hopf de codimension 2 ( $\mathcal{H}_2$ ) passe à l'infini lorsque  $\beta \rightarrow -6$  ce qui est évident puisque sa position dans l'espace des paramètres est donnée par

$$\alpha^{H_2}(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta + 6}. \quad (4.10.1)$$

On conjecture que la courbe de double cycle ( $\mathcal{DC}$ ) existe et débute à la bifurcation de boucle homoclinique de codimension 2 ( $\mathcal{BH}_2$ ) et se termine à l'infini comme représentée dans le diagramme de bifurcations.

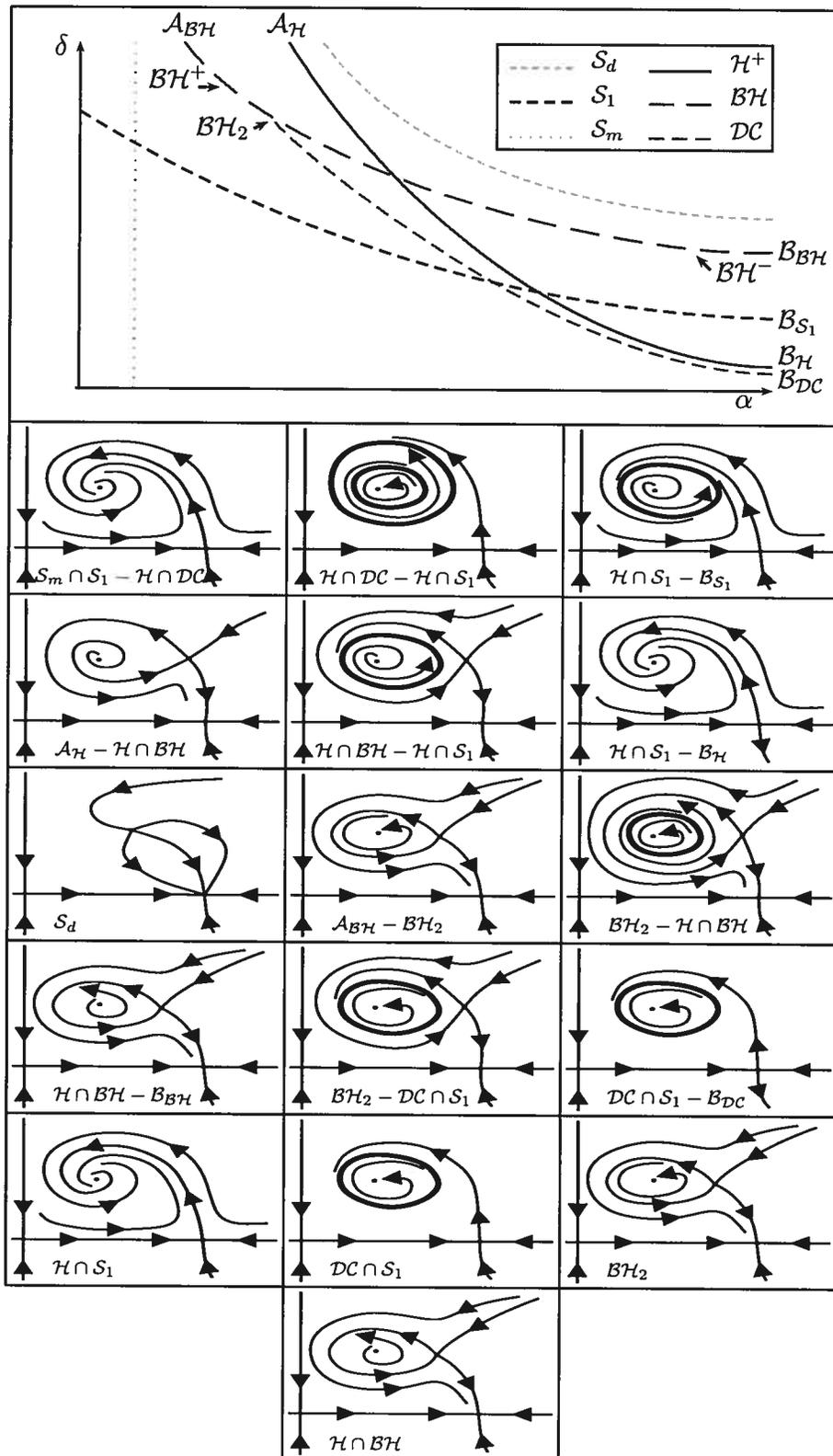
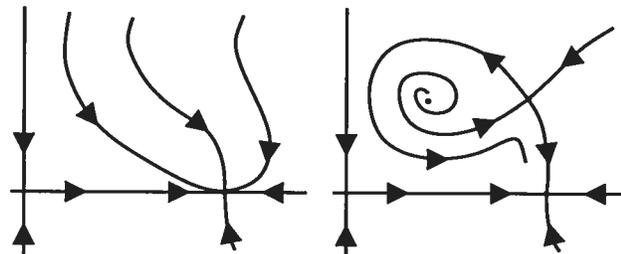


FIG. 4.14. Diagramme de bifurcations et portrait de phase lors des bifurcations pour  $\beta \leq -6$ .

#### 4.11. INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE

On donne une interprétation biologique du système en répondant aux questions énoncées par Bazykin [BA], qu'on redonne ici :

- (1) De quelle façon le modèle biologique se comporte-t-il lorsque qu'il n'y a pas d'influence externe ? Quelles sortes de régimes existent (stationnaire, périodique, chaotique) ?
- (2) De quelle manière le comportement du modèle biologique dépend-il des conditions initiales ?
- (3) De quelle façon le modèle réagit-il aux influences environnementales ? Quel est l'effet d'une perturbation instantanée sur le modèle (par exemple, un changement de position dans le portrait de phase) ? Quel est l'effet d'une influence permanente sur le modèle (par exemple, un changement des paramètres) ?



4.15(a)

4.15(b)

FIG. 4.15. Champs de vecteurs de type  $\Lambda = \{REP\}$ .

On répond à la première et deuxième question, avec l'analyse des régions ouvertes du diagramme de bifurcations. On étudie les régions ouvertes car le champ de vecteurs ne changera pas topologiquement après une petite perturbation des paramètres (il sera structurellement stable). Les régimes sont définis pour des conditions initiales qui ne font pas partie ni d'une variété stable, ni d'une variété instable, ni d'un cycle limite instable, ce qui implique qu'avec un petit changement

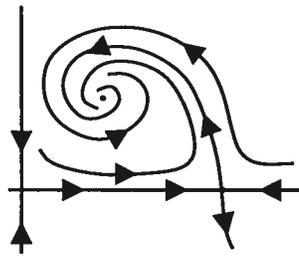


FIG. 4.16. Champ de vecteurs de type  $\Omega = \{REM\}$ .

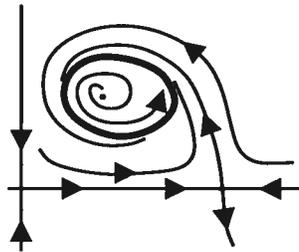
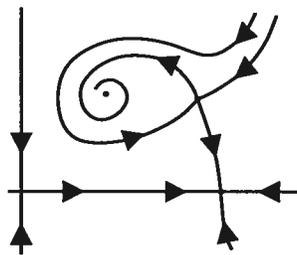
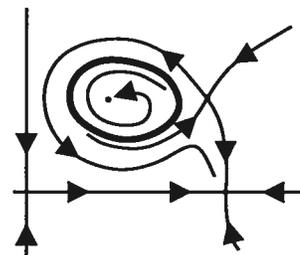


FIG. 4.17. Champ de vecteurs de type  $\Theta = \{RO\}$ .



4.18(a)



4.18(b)

FIG. 4.18. Champs de vecteurs de type  $\Xi = \{REM, REP\}$ .

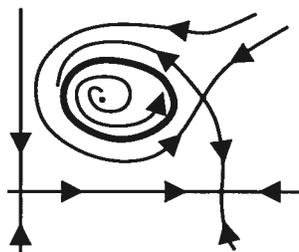


FIG. 4.19. Champ de vecteurs de type  $\Upsilon = \{RO, REP\}$ .

des conditions initiales le régime final est le même. Il y a trois types de régime final qu'un champ de vecteurs peut posséder :

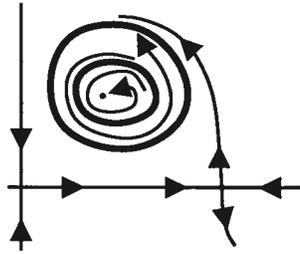


FIG. 4.20. Champ de vecteurs de type  $\Psi = \{RO, REM\}$ .

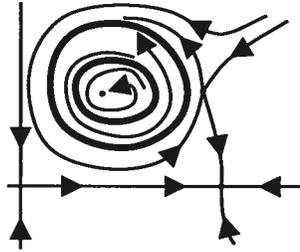


FIG. 4.21. Champ de vecteurs de type  $\Phi = \{RO, REM, REP\}$ .

**REP:** (**R**égime avec **E**xtinction des **P**rédateurs) Un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles la population des prédateurs s'éteint et la population des proies atteint un équilibre.

**REM:** (**R**égime avec d'**E**quilibre Mixte) Un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles les populations de prédateurs et de proies tendent tous deux vers une position d'équilibre stable.

**RO:** (**R**égime **O**scillatoire) Un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles les populations de prédateurs et de proies tendent vers un régime oscillatoire stable (cycle limite stable).

Chaque champ de vecteurs générique (i.e. avec ses paramètres dans une des régions ouvertes du diagramme de bifurcations) possède un ou plusieurs des régimes finaux décrits ci-dessus. Il existe sept combinaisons de régimes finaux qu'un champ de vecteurs possède :

$\Lambda = \{REP\}$ : Il y a deux possibilités de portraits de phase avec ce régime final. Voir la figure 4.15.

$\Omega = \{REM\}$ : Il y a une possibilité de portrait de phase avec ce régime final.

Voir la figure 4.16.

$\Theta = \{RO\}$ : Il y a une possibilité de portrait de phase avec ce régime final.

Voir la figure 4.17.

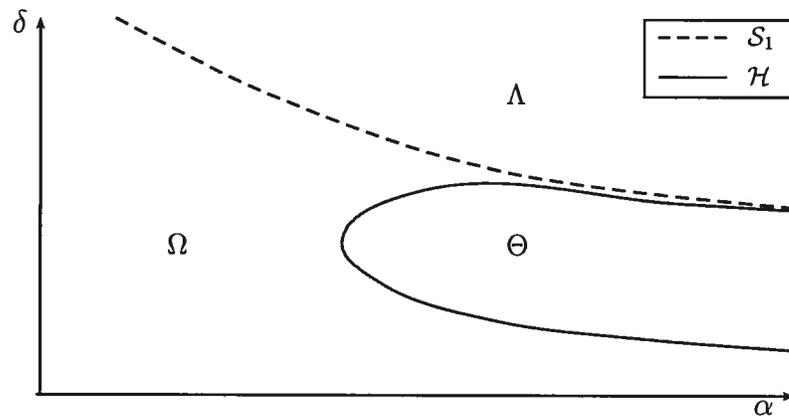
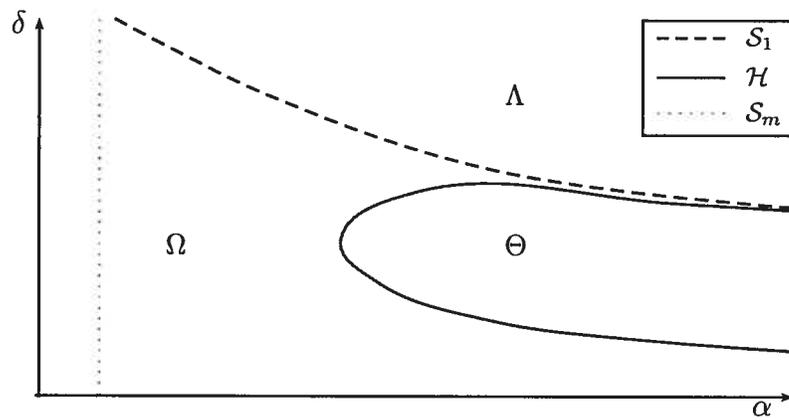
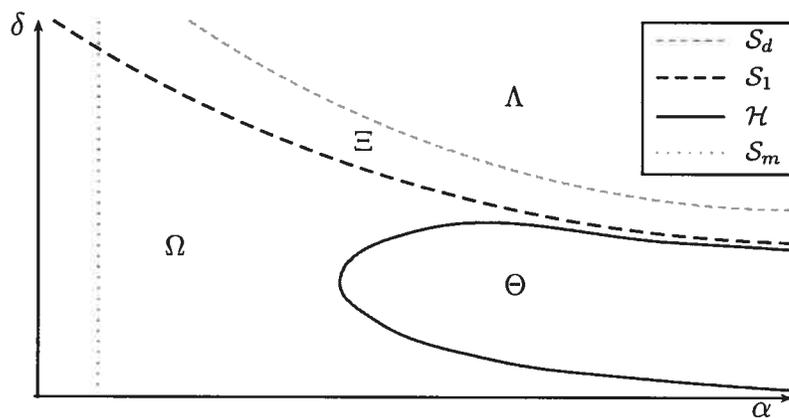
$\Xi = \{REM, REP\}$ : Il y a deux possibilités de portraits de phase avec un de ces deux régimes finaux. Voir la figure 4.18.

$\Upsilon = \{RO, REP\}$ : Il y a une possibilité de portrait de phase avec un de ces deux régimes finaux. Voir la figure 4.19.

$\Psi = \{RO, REM\}$ : Il y a une possibilité de portrait de phase avec un de ces deux régimes finaux. Voir la figure 4.20.

$\Phi = \{RO, REM, REP\}$ : Il y a une possibilité de portrait de phase avec un de ces trois régimes finaux. Voir la figure 4.21.

On trouve une description de chaque régime et plus de détails par Coutu [C]. On peut voir quel portrait de phase on obtient pour le système avec les paramètres dans les régions ouvertes des diagrammes de bifurcations, ce qui répond à la première question. À partir des portraits de phase donnés, on peut déterminer quelle sorte de régime le système possède en fonction des conditions initiales, ce qui répond à la deuxième question. Ceci répond aussi à la troisième question car l'effet d'une perturbation instantanée sur le système est un changement de position dans le portrait de phase qui est en effet un changement de condition initiale. Pour la deuxième partie de la troisième question on étudie l'effet d'une influence permanente sur le système. Une influence permanente sur le système est la même chose qu'un changement des paramètres. Donc pour répondre à la question on donne les régions ouvertes dans l'espace des paramètres avec le type de régime dans chaque région ouverte.

FIG. 4.22. Types de régimes lorsque  $\beta \geq 0$ .FIG. 4.23. Types de régimes lorsque  $-2 \leq \beta < 0$ .FIG. 4.24. Types de régimes lorsque  $-3 \leq \beta < -2$ .

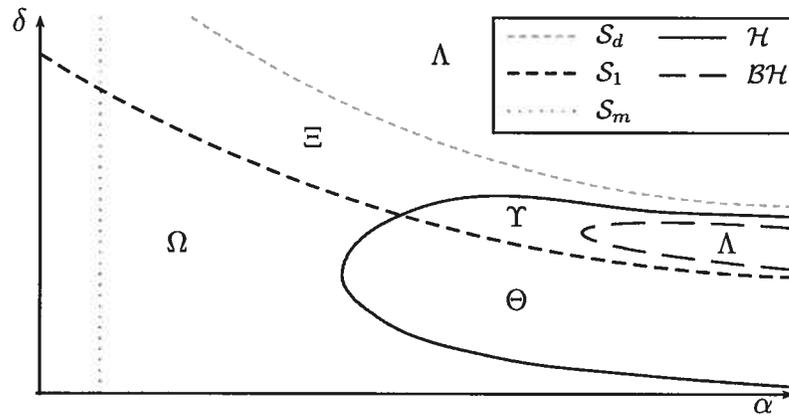


FIG. 4.25. Types de régimes lorsque  $-4 < \beta < -3$ .

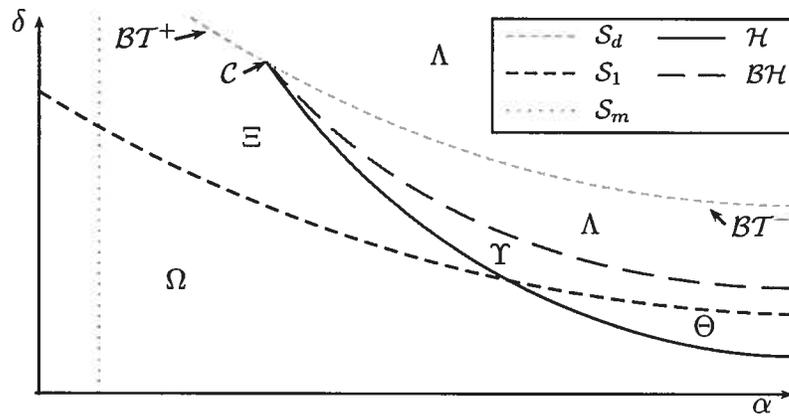


FIG. 4.26. Types de régimes lorsque  $\beta = -4$ .

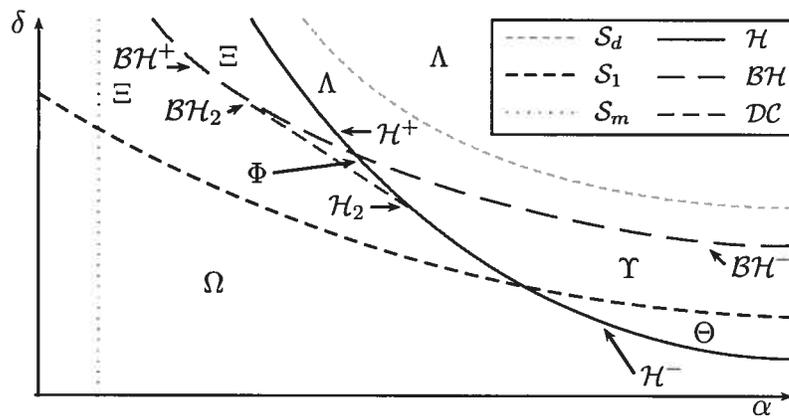


FIG. 4.27. Types de régimes lorsque  $\beta^{S_1 \cap H_2} < \beta < -4$ .

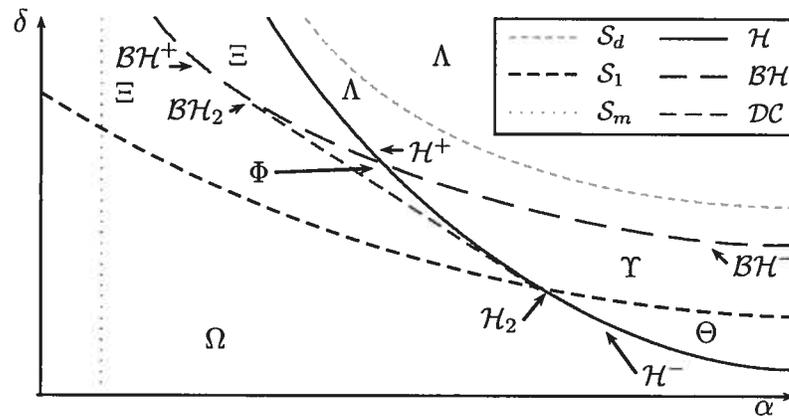


FIG. 4.28. Types de régimes lorsque  $\beta = \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .

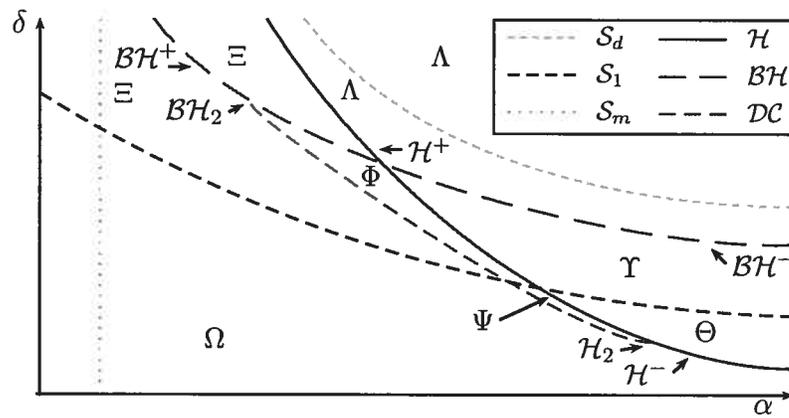


FIG. 4.29. Types de régimes lorsque  $-6 < \beta < \beta^{S_1 \cap \mathcal{H}_2}$ .

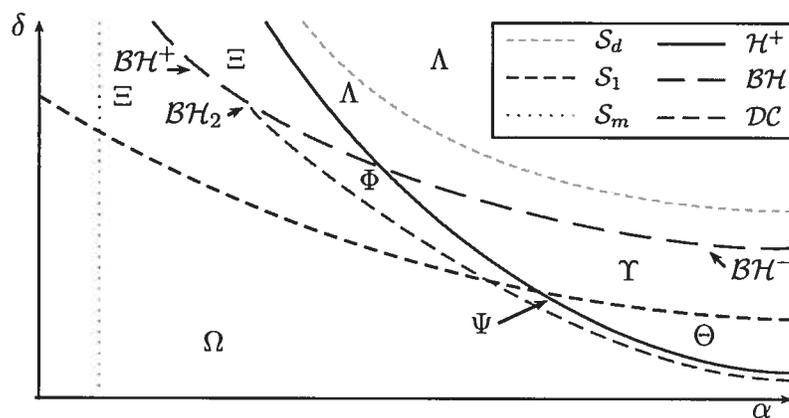


FIG. 4.30. Types de régimes lorsque  $\beta \leq -6$ .

# CONCLUSION

---

Dans ce mémoire on a étudié le système prédateur-proie de Gause généralisé de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x))\end{aligned}$$

avec la fonction de réponse de Holling de type III généralisée

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

Le système a sept paramètres où  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $k$ ,  $m$  et  $r$  sont positifs et on étudie les cas  $b$  positif et négatif. On se ramène aux quatre paramètres

$$(\alpha, \beta, \delta, \rho) = \left(ak^2, bk, \frac{d}{cmk^2}, \frac{r}{cmk^2}\right).$$

Une étude partielle avait été faite par Coutu [C] pour le cas  $b < 0$ . Un diagramme de bifurcations avait été conjecturé mais il restait des calculs à effectuer. Le diagramme de bifurcations est présenté sous forme de tranches  $\beta$  constantes. Les calculs qui restaient étaient les suivants :

- (1) Déterminer pour quel intervalle de tranches  $\beta > \beta_0$  on a une courbe de boucle homoclinique. Quelle est la forme de cette courbe de bifurcation lorsque  $\beta > \beta_0$  ?
- (2) Compléter les calculs de la bifurcation de Hopf, en particulier vérifier que la codimension maximum était deux.
- (3) Déterminer la signification du point isolé de  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  (équation (2.3.9)) dans l'espace des paramètres  $(\alpha, \beta, \delta)$  pour le champ de vecteurs.

- (4) Vérifier que la boucle homoclinique n'est pas de codimension plus grande que deux.

Le premier item n'a pas été résolu analytiquement mais un calcul numérique a été donné en  $\beta = -3.5$  garantissant  $\beta_0 \leq -3.5$ . De plus la forme prédite par Coutu [C] est validée numériquement en  $\beta = -3.5$ . Les calculs de la bifurcation de Hopf ont été complétés. C'est le résultat principal de ce mémoire : la bifurcation de Hopf est au plus de codimension 2 et a un déploiement complet. Le troisième item, a été résolu dans la section où on analyse  $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$  et on détermine que le point n'est pas un point de bifurcation pour le premier quadrant du champ de vecteurs. Le dernier item n'a pas été résolu analytiquement, mais on a donné une conjecture sur la position dans l'espace des paramètres de la boucle homoclinique de codimension 2 que les simulations numériques tendent à confirmer. On a conclu avec le chapitre 4 où on a donné les diagrammes de bifurcations et une interprétation biologique des comportements possibles en fonction des paramètres et des conditions initiales.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [AJF] J. F. ANDREWS, *A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates*, *Biotechnology and Bioengineering*, Vol. 10, 707–723, 1968.
- [AVI] V. I. ARNOLD, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations : Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [BA] A. D. BAZYKIN, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.
- [BRI] R. I. BOGDANOV, *Versal Deformation of Singularity of a Vector Field on the Plane in the Case of Zero Eigenvalues*, *Selecta Mathematica Sovietica*, Vol. 1, No. 4, 389–421, 1981.
- [BWM] W. M. BOOTHBY, *An Introduction to Differentiable Manifold and Riemannian Geometry*, Academic Press, San Diego, 2003.
- [BL] G. BONIN ET J. LEGAULT, *Comparaison de la méthode des constantes de Lyapunov et de la bifurcation de Hopf*, *Canad. Math. Bull.*, Vol. 31, No. 2, 200–209, 1988.
- [CD] M. CAUBERGH ET F. DUMORTIER, *Hopf-Takens bifurcations and centres*, *Journal of Differential Equations*, 202, 1–31, 2004.
- [CC] C. CHICONE, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [C] C. COUTU, *Étude du diagramme de bifurcation d'un système prédateur-proie*, Mémoire, Université de Montréal, 2003.
- [CLW] S.-N. CHOW, C. LI ET D. WANG, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, New York, 1994.

- [DRS] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE ET J. SOTOMAYOR, *Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3*, Ergodic Theory Dynamical Systems, Vol. 7, No. 3, 375–413, 1987.
- [F79] H. I. FREEDMAN, *Stability Analysis of a Predator-Prey System with Mutual Interference and Density-Dependent Death Rates*, Bulletin of Mathematical Biology, 41, 67–78, 1979.
- [F80] H. I. FREEDMAN, *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, Inc, New York, 1980.
- [FW] H. I. FREEDMAN ET G. S. K. WOLKOWICZ, *Predator-prey Systems with Group Defence : the Paradox of Enrichment Revisited*, Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 48, No. 5/6, 493–508, 1986.
- [G] G. F. GAUSE, *The Struggle for Existence*, Hafner Publishing Company, New York, 1969.
- [GH] J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [GS] M. GOLUBITSKY ET D. G. SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume I*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [GW] F. GÖBBER ET K.-D. WILLAMOWSKI, *Ljapunov Approach of Multiple Hopf Bifurcation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 71, 333–350, 1979.
- [H] C. S. HOLLING, *The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation*, Memoirs of the Entomological Society of Canada, Vol. 45, 3–60, 1965.
- [JDFT] J. L. JOST, J. F. DRAKE, A. G. FREDRICKSON ET H. M. TSUCHIYA, *Interactions of Tetrahymena pyriformis, Escherichia coli, Azotobacter vinelandii, and Glucose in a Minimal Medium*, Journal of Bacteriology, Vol. 113, 834–840, 1973.
- [JDTF] J. L. JOST, J. F. DRAKE, H. M. TSUCHIYA ET A. G. FREDRICKSON, *Microbial Food Chains and Food Webs*, Journal of Theoretical Biology, Vol. 41, 461–484, 1973.

- [KA] A. KUROSH, *Higher Algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1975.
- [KY] Y. A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [R] M. L. ROSENZWEIG, *Paradox of Enrichment : Destabilization of Exploitation Ecosystems in Ecological Time*, Science, Vol. 171, No. 4, 385–387, 1971.
- [RX] SHIGUI RUAN ET DONGMEI XIAO, *Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 61, No. 4, 1445–1472, 2001.
- [SH] W. SOKOL ET J. A. HOWELL, *Kinetics of Phenol Oxidation by Washed Cells*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 23, 2039–2049, 1980.
- [TJS] J. S. TENER, *Muskozen*, Queen's Printer, Ottawa, 1965.
- [THR] H. R. THIEME, *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [W] G. S. K. WOLKOWICZ, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System Involving Group Defence*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 48, No. 3, 592–606, 1988.
- [ZCW] H. ZHU, S. A. CAMPBELL ET G. S. K. WOLKOWICZ, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 63, No. 2, 636–682, 2002.