Université de Montréal

Théorème de Kunneth en homologie de Morse

par

Martin Frankland

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques fondamentales

juillet 2005

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Théorème de Kunneth en homologie de Morse

présenté par

Martin Frankland

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea

(président-rapporteur)

François Lalonde

(directeur de recherche)

Iosif Polterovich

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

01/07/05

SOMMAIRE

Soit M une variété fermée orientée connexe de dimension m, et considérons la diagonale $\Delta \in H_m(M \times M)$. Si $H_*(M)$ est libre, ou si on prend l'homologie à coefficients dans un corps, alors on a l'isomorphisme de Kunneth naturel $H_*(M \times M) \cong H_*(M) \otimes H_*(M)$. Nous montrons, en utilisant l'homologie de Morse, que la diagonale admet la décomposition de Kunneth suivante :

$$\Delta = \sum_i \overline{b_i} \times b_i \ ,$$

où $\{b_i\}$ est une base de $H_*(M)$, et $\{\overline{b_i}\}$ est sa base duale par rapport à la forme d'intersection, c'est-à-dire $\overline{b_i} \bullet b_j = \delta_{ij}$.

MOTS CLÉS : théorème de Kunneth, homologie de Morse, diagonale, décomposition de Kunneth, intersection

SUMMARY

Let M be a closed oriented connected manifold of dimension m, and consider the diagonal $\Delta \in H_m(M \times M)$. If $H_*(M)$ is free, or if we take homology with coefficients in a field, then there is the natural Kunneth isomorphism $H_*(M \times M) \cong H_*(M) \otimes H_*(M)$. We prove, using a Morse theoretical construction, that the diagonal has the following Kunneth decomposition :

$$\Delta = \sum_i \overline{b_i} \times b_i \ ,$$

where $\{b_i\}$ is a basis of $H_*(M)$, and $\{\overline{b_i}\}$ is its dual basis with respect to the intersection form, i.e. $\overline{b_i} \bullet b_j = \delta_{ij}$.

KEYWORDS : Kunneth theorem, Morse homology, diagonal, Kunneth decomposition, intersection

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire iii

Summary iv

Liste des figures vii

Remerciements viii

Introduction 1

Énoncé du problème 1

Idée de la démarche 1

Chapitre 1. Homologie de Morse 3

1.1. Complexe de Morse 3

1.2. Théorème d'homologie de Morse 4

Chapitre 2. Outils de théorie de Morse 6

2.1. Fonction de Morse renversée 6

2.1.1. Classe fondamentale 8

2.1.2. Complexe dual 9

2.2. Somme extérieure de fonctions 11

2.2.1. Complexe de la somme extérieure 13

2.2.2. Naturalité 17

Chapitre 3. Application à la diagonale 22

3.1. Décomposition dans les chaînes 22

3.2. Exemple trivial : S^1 24

Chapitre 4. Manipulations algébriques 26

4.1. Foncteur $Hom(\cdot, \cdot)$ 26

4.2. Une première décomposition 30

4.3. Décomposition en homologie de Morse 34

Chapitre 5. Produit d'intersection 38

Conclusion 41

Pourquoi décomposer la diagonale 41

Généralisation avec torsion 42

Bibliographie 43

LISTE DES FIGURES

0.1 Déformation de la diagonale 2

3.1 Fonction de Morse sur le cercle 25

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le CRSNG pour leur support financier, qui m'a permis de produire ce mémoire.

Je remercie grandement mon directeur de recherche, François Lalonde, ainsi que Octav Cornea. Leur aide et leur patience m'ont été précieuses.

Je remercie également le département de mathématiques et statistiques de l'Université de Montréal, pour le support financier et logistique.

INTRODUCTION

Énoncé du problème

Soit M une variété fermée orientée connexe de dimension m, $[M] \in H_m(M)$ sa classe fondamentale, et $d : M \to M \times M$ l'application diagonale. Considérons la classe diagonale $\Delta := d_*([M]) \in H_m(M \times M)$. Le théorème de Kunneth permet de calculer $H_*(M \times M)$, selon cette suite exacte naturelle, qui se scinde :

$$0 \to (H_*(M) \otimes H_*(M))_k \xrightarrow{\times} H_k(M \times M) \to Tor(H_*(M), H_*(M))_{k-1} \to 0.$$

Dans ce travail, nous nous limitons au cas où $Tor(H_*(M), H_*(M))_*$ est nul, par exemple si $H_*(M)$ est libre, ou en prenant l'homologie à coefficients dans un corps. Ainsi, nous avons l'isomorphisme de Kunneth naturel

$$H_*(M \times M) \cong H_*(M) \otimes H_*(M).$$

La diagonale admet alors une décomposition de Kunneth, c'est-à-dire une expression

$$\Delta = \sum_i a_i \times b_i\,, \;\; a_i \in H_k(M), \;\; b_i \in H_{m-k}(M).$$

Le problème à résoudre est de **trouver une décomposition de Kunneth explicite de la diagonale**.

Idée de la démarche

L'idée pour résoudre ce problème est de déformer la diagonale à l'aide d'un flot, plus particulièrement le flot d'une fonction de Morse. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse, ρ une métrique sur M et $\{\varphi_t\}$ le flot associé au champ $-\nabla_\rho f$. La diagonale

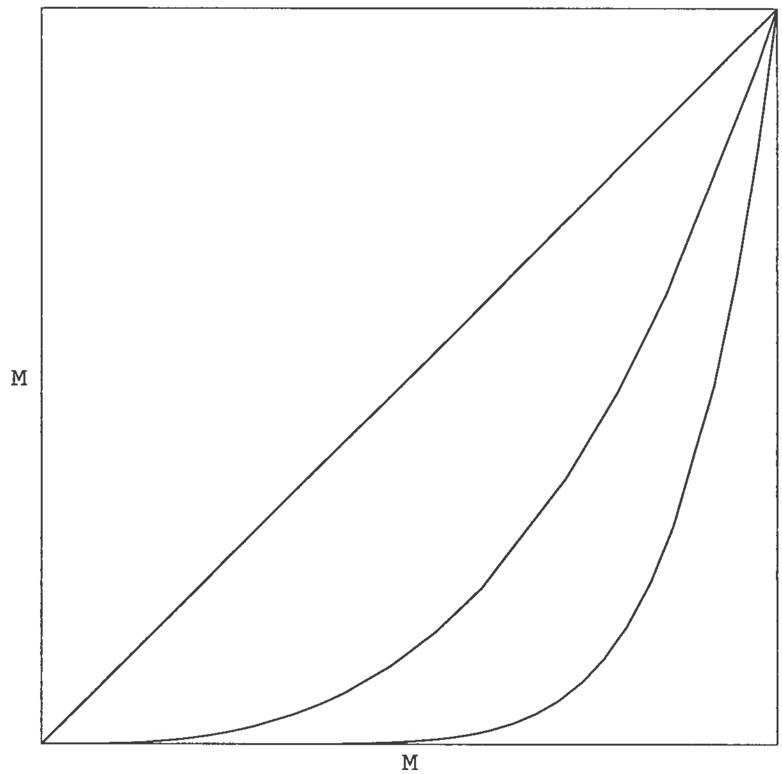

Fig. 0.1. Déformation de la diagonale

peut être déformée continuement en le graphe de φ_t, tel qu'illustré à la figure 0.1. En homologie, on a donc l'égalité $\Delta = [gr(id_M)] = [gr(\varphi_0)] = [gr(\varphi_t)]$.

Lorsque t tend vers l'infini, cette sous-variété tend vers un cycle décomposé en produits, tel que souhaité. Nous verrons que cette limite est précisément donnée par le théorème d'homologie de Morse.

Chapitre 1

HOMOLOGIE DE MORSE

Nous rappelons dans ce chapitre les notions d'homologie de Morse dont nous aurons besoin. On peut se référer notamment à **[S]** ou à **[BH]** pour un exposé de la théorie.

1.1. Complexe de Morse

Définition 1.1.1. *Une* ***fonction de Morse*** *est une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ au moins C^2 dont les points critiques sont non dégénérés, c'est-à-dire ont un Hessien non dégénéré. L'****indice*** *d'un point critique p est le nombre de valeurs propres négatives du Hessien de f en p, noté $ind_f(p)$ ou $\mu(p)$.*

Notation. $Crit_k(f) := \{p \in Crit(f) \mid ind_f(p) = k\}$

Définition 1.1.2. *Soit f une fonction de Morse, ρ une métrique sur M et $\{\varphi_t\}$ le flot induit par le champ de vecteurs $-\nabla_\rho f$. Pour $p \in Crit(f)$, on définit la* ***nappe descendante*** *et la* ***nappe ascendante*** *de p par*

$$\mathscr{D}_f(p) := \{x \in M \mid \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = p\},$$

$$\mathscr{A}_f(p) := \{x \in M \mid \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = p\}.$$

L'indice qui spéficie la fonction sera omis quand le contexte est clair. Notons que ce sont des disques ouverts plongés dans M, de dimension $ind_f(p)$ et $m - ind_f(p)$ respectivement.

Convention 1.1.3. *(1) Pour $p \in Crit_0(f)$, fixons $\mathscr{O}_p(\mathscr{D}(p)) = +1$.*

(2) Pour $p \in Crit_m(f)$, fixons $\mathscr{O}_p(\mathscr{D}(p)) = \mathscr{O}_p(M)$.

(3) Pour $1 \leq \mu(p) \leq m - 1$, nous orientons $\mathscr{D}(p)$ de façon arbitraire.

(4) Nous orientons les nappes ascendantes de sorte que $\left(\mathcal{O}_p\mathcal{A}(p), \mathcal{O}_p\mathcal{D}(p)\right) = \mathcal{O}_p(M)$.

Définition 1.1.4. *On dit que la paire* (f, ρ) *est de* ***Morse-Smale*** *si* $\mathcal{D}(p)$ *intersecte* $\mathcal{A}(q)$ *transversalement pour toute paire de points critiques* $p, q \in Crit(f)$*. Dans ce cas,* $\mathcal{D}(p) \cap \mathcal{A}(q)$ *est soit vide, soit une variété de dimension* $\mu(p) - \mu(q)$*.*

Notons $\mathcal{M}(p,q) := (\mathcal{D}(p) \cap \mathcal{A}(q))/\mathbb{R}$, où l'action de $\mathbb{R}$ est celle du flot $\{\varphi_t\}$. Alors $\mathcal{M}(p,q)$ est soit vide, soit une variété de dimension $\mu(p) - \mu(q) - 1$, tant que $p \neq q$.

Définition 1.1.5. *Le* ***complexe de Morse*** *associé à la paire* (f, ρ) *est un complexe de chaînes* $(C_*(f), \partial)$*, défini de la façon suivante.*

$$C_k(f) := \mathbb{Z}\langle Crit_k(f)\rangle,$$

$$\partial : C_k(f) \to C_{k-1}(f),$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in Crit_{k-1}(f)} n(p,q)\, q.$$

Ici $n(p,q)$ est donné par $\#\mathcal{M}(p,q)$, le nombre de lignes de flot allant de p à q, comptées avec signe. Voici la convention d'orientation que nous utilisons, identique à celle de **[BH]**.

Convention 1.1.6. *Soit* $\gamma \in \mathcal{M}(p,q)$ *une ligne de flot. Pour* $x \in \gamma(\mathbb{R})$*, on complète* $-\nabla f(x)$ *à une base positive* $(-\nabla f(x), \hat{B}^d_x)$ *de* $T_x\mathcal{D}(p)$*. Soit* B^a_x *une base positive de* $T_x\mathcal{A}(q)$*, alors* $(B^a_x, \hat{B}^d_x)$ *est une base de* T_xM*. On assigne à* γ *le signe* $+1$ *si cette base donne l'orientation positive de* M*, et* -1 *sinon.*

Proposition 1.1.7. $\partial^2 = 0$.

Il existe plusieurs preuves de ce théorème. Une d'entre elles consiste à montrer que les coefficients ∂^2 comptent exactement le bord de la compactification de l'espace de modules des lignes de flots entre deux points critiques ayant une différence d'indice de 2. Une autre preuve montre plutôt que la différentielle de Morse est identique à la différentielle dans le complexe cellulaire induit par la fonction de Morse. Voir [S] ou [W] pour des preuves complètes.

1.2. Théorème d'homologie de Morse

Théorème 1.2.1. *Il y a un isomorphisme canonique* $H_*(C_*(f)) \cong H_*(M)$*.*

Comme pour le complexe de Morse, ce théorème a été prouvé de différentes façons. Un survol des principales preuves est donné dans [**BC**], section 2. La preuve que nous utilisons et résumons ci-après est celle de [**H**], qui consiste à montrer que le complexe de Morse $C_*(f)$ est chaîne-homotope au complexe singulier de M, noté $S_*(M)$. Techniquement, nous devons nous limiter aux simplexes génériques, c'est-à-dire les simplexes lisses qui intersectent toutes les nappes ascendantes transversalement, et dont les faces ont aussi cette propriété.

Construisons un morphisme de complexes de chaînes $D_f : C_*(f) \to S_*(M)$.
Pour $p \in Crit(f)$, $\mathscr{D}(p)$ admet une compactification naturelle $\overline{\mathscr{D}(p)}$, munie d'une fonction $e : \overline{\mathscr{D}(p)} \to M$ qui étend l'inclusion $\mathscr{D}(p) \hookrightarrow M$. La variété compacte $\overline{\mathscr{D}(p)}$ admet un courant fondamental $\left[\overline{\mathscr{D}(p)}\right] \in S_{\mu(p)}(\overline{\mathscr{D}(p)})$. On définit

$$D_f(p) := e_*\left[\overline{\mathscr{D}(p)}\right].$$

Une preuve pour la compactification des nappes descendantes est faite en détail dans [**BC$_2$**], section 2.4.6. Pour un exposé de la théorie des courants, voir [**HL**] ; nous n'en utilisons ici qu'un cas très particulier.

Proposition 1.2.2. *D_f est un morphisme de complexes de chaînes.*

Construisons son inverse homotopique $A_f : S_*(M) \to C_*(f)$.
Soit σ un i-simplexe générique et p un point critique de f. On note $\mathcal{M}(\sigma, p)$ l'espace de module des lignes de flot γ allant de σ à p, c'est-à-dire telles que $\gamma(0) \in \sigma$ et $\lim_{t\to\infty}\gamma(t) = p$. Alors $\mathcal{M}(\sigma, p)$ est une variété de dimension $i-\mu(p)$. De plus, le flot induit un isomorphisme, canonique au niveau des orientations :

$$T_{\gamma(0)}\sigma \xrightarrow{\sim} T_\gamma\mathcal{M}(\sigma, p) \oplus T_p\mathscr{D}(p).$$

Nous orientons $\mathcal{M}(\sigma, p)$ de sorte que cet isomorphisme préserve l'orientation. On peut donc définir

$$A_f(\sigma) := \sum_{p \in Crit_i(f)} \#\mathcal{M}(\sigma, p)\, p.$$

Proposition 1.2.3. *A_f est un morphisme de complexes de chaînes.*

Proposition 1.2.4. $A_f \circ D_f = id_{C_*(f)}$.

Proposition 1.2.5. $D_f \circ A_f \simeq id_{S_*(M)}$ *, c'est-à-dire ils sont chaîne-homotopes.*

Chapitre 2

OUTILS DE THÉORIE DE MORSE

Nous voyons dans ce chapitre quelques constructions utilisant l'homologie de Morse. Elles sont traitées dans **[S]** au chapitre 5, mais dans une formulation différente et moins explicite que ce qui suit.

2.1. Fonction de Morse renversée

Si f est une fonction de Morse-Smale sur M, alors $-f$ en est une aussi. Nous trouvons ici la relation entre $C_*(-f)$ et $C_*(f)$.

Proposition 2.1.1. *(1)* $Crit_k(-f) = Crit_{m-k}(f)$,

(2) $\varphi_t^{-f} = \varphi_{-t}^{f}$,

(3) Pour $p \in Crit(-f)$, $\mathscr{D}_{-f}(p) = \mathscr{A}_f(p)$.

Démonstration. (1) $d(-f)_x = -df_x$ s'annule lorsque $df_x = 0$, c'est-à-dire pour $x \in Crit(f)$.

Pour $p \in Crit(-f)$, $Hess_p(-f) = -Hess_p(f)$.

$$\begin{aligned} ind_{-f}(p) &= \text{nb de valeurs propres négatives de } Hess_p(-f) \\ &= \text{nb de valeurs propres positives de } Hess_p(f) \\ &= m - ind_f(p). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\varphi_{-s}(x)|_{s=t} &= -\frac{d}{ds}\varphi_s(x)|_{s=-t}\\ &= -(-\nabla f(\varphi_{-t}(x)))\\ &= -\nabla(-f)(\varphi_{-t}(x)).\end{aligned}$$

(3) En vertu du point précédent, la condition $\varphi_t^{-f}(x) \xrightarrow{t\to\infty} p$ est équivalente à $\varphi_t^f(x) \xrightarrow{t\to-\infty} p$.

□

Convention 2.1.2. *Nous orientons les nappes de $-f$ en donnant à $\mathscr{D}_{-f}(p)$ l'orientation de $\mathscr{A}_f(p)$.*

Par la convention 1.1.3, $\mathscr{O}_p(\mathscr{A}_{-f}(p))$ est égal à $(-1)^{\mu(p)(m-\mu(p))}\mathscr{O}_p(\mathscr{D}_f(p))$. Notons que la convention 1.1.3 est encore respectée pour $-f$, aux points critiques d'indices 0 et m.

Notation. *Soit $p \in Crit_k(f)$.*

(1) On note $p_d \in C_k(f)$ et $p_a \in C_{m-k}(-f)$ les nappes descendante et ascendante de p, dans les complexes de Morse.

(2) On note $p_D := D_f(p_d) \in S_k(M)$ et $p_A := D_{-f}(p_a) \in S_{m-k}(M)$ les nappes descendante et ascendante de p, dans les complexes singuliers.

Proposition 2.1.3. *Soit $\partial : C_*(-f) \to C_*(-f)$ donné par $\partial(q_a) = \sum_p \tilde{n}(q,p)p_a$. Soit $p \in Crit_{k+1}(f)$ et $q \in Crit_k(f)$. Alors $\tilde{n}(q,p)$ est donné par $(-1)^{m-\mu(q)}\, n(p,q)$.*

Démonstration. Les lignes de flot pour $-f$ qui montent de q à p sont les mêmes que les lignes de flot pour f qui descendent de p à q. Il suffit d'appliquer la convention 1.1.6 pour trouver le signe d'une telle ligne γ.

Soit $x \in \gamma(\mathbb{R})$, et $\left(-\nabla f(x), \hat{B}_x^d\right)$ une base positive de $T_x\mathscr{D}_f(p)$, et $(\nabla f(x), \hat{B}_x^a)$ une base positive de $T_x\mathscr{A}_f(q)$.

Alors $\left(\nabla f(x), \hat{B}_x^a\right)$ est une base positive de $T_x\mathscr{D}_{-f}(q)$ et $B_x^d = (-1)^{\mu(p)(m-\mu(p))}\left(-\nabla f(x), \hat{B}_x^d\right)$

est une base positive de $T_x\mathscr{A}_{-f}(p)$.

$$\begin{aligned} sg_{-f}(\gamma)\mathscr{O}_x(M) &= (B^d_x, \hat{B}^a_x) \\ &= (-1)^{\mu(p)(m-\mu(p))}(\hat{B}^a_x, B^d_x) \\ &= (\hat{B}^a_x, -\nabla f(x), \hat{B}^d_x) \\ &= (-1)^{m-\mu(p)}(-\nabla f(x), \hat{B}^a_x, \hat{B}^d_x) \\ &= (-1)^{m-\mu(q)}(\nabla f(x), \hat{B}^a_x, \hat{B}^d_x) \\ &= (-1)^{m-\mu(q)} sg_f(\gamma)\mathscr{O}_x(M). \end{aligned}$$

On en conclut $sg_{-f}(\gamma) = (-1)^{m-\mu(q)} sg_f(\gamma)$, et donc

$$\begin{aligned} \tilde{n}(q,p) &= \sum_\gamma sg_{-f}(\gamma) \\ &= (-1)^{m-\mu(q)} \sum_\gamma sg_f(\gamma) \\ &= (-1)^{m-\mu(q)}\, n(p,q) \end{aligned}$$

□

2.1.1. Classe fondamentale

Avec la convention 1.1.3, on peut facilement décrire la classe fondamentale de M en homologie de Morse.

Proposition 2.1.4. *Soit $p \in Crit_1(f)$. Alors $\partial p_d = q_1 - q_2$ pour certains $q_1, q_2 \in Crit_0(f)$.*

Démonstration. Puisque $\mathscr{D}_f(p)$ est un 1-disque plongé dans M, il est constitué d'exactement deux lignes de flot. Celle où $[-\nabla f] = \mathscr{O}(\mathscr{D}_f(p))$ aura le signe $+1$, et celle où $[-\nabla f] = -\mathscr{O}(\mathscr{D}_f(p))$ aura le signe -1. Donc $\partial p_d = q_1 - q_2$, où q_1 est la limite de la première ligne de flot et q_2 la limite de la deuxième. □

Proposition 2.1.5.

$$\left[\sum_{p \in Crit_m(f)} p_D\right] = [M].$$

Démonstration. Vérifions que $\sum_{p\in Crit_m(f)} p_d \in C_m(f)$ est un cycle.

$$\partial\left(\sum_{p\in Crit_m(f)} p_d\right) = \sum_{p\in Crit_m(f)} \sum_{q\in Crit_{m-1}(f)} n(p,q)q_d$$

$$= \sum_{q\in Crit_{m-1}(f)} \left(\sum_{p\in Crit_m(f)} n(p,q)\right) q_d \,.$$

$$\sum_{p\in Crit_m(f)} n(p,q) = \sum_{p\in Crit_0(-f)} (-1)^1\, \tilde{n}(q,p)$$

$$= -(1-1) = 0\,.$$

Ainsi, $\left[D_f\left(\sum_{p\in Crit_m(f)} p_d\right)\right] \in H_m(M)$ est un multiple de la classe fondamentale, $k[M]$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit

$$\left[\sum_{p\in Crit_m(f)} p_d\right] = k\, A_f[M]$$

$$= k\left[\sum_{p\in Crit_m(f)} c_p\, p_d\right],$$

pour certains $c_p \in \mathbb{Z}$. Puisque $C_m(f)$ ne contient pas de bords, on a $1 = k\, c_p$ pour tous les $p \in Crit_m(f)$, donc $k = \pm 1$. Par le point 2 de la convention 1.1.3, $k = 1$, et donc $[M] = \left[D_f\left(\sum_{p\in Crit_m(f)} p_d\right)\right] = \left[\sum_{p\in Crit_m(f)} p_D\right]$. □

2.1.2. Complexe dual

Considérons $C^*(f)$ le complexe dual de $C_*(f)$, tel que $(C^*(f))_k = C^{m-k}(f)$.

$$0 \xrightarrow{\partial} C^0(f) \xrightarrow{\partial} C^1(f) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C^{m-1}(f) \xrightarrow{\partial} C^m(f) \xrightarrow{\partial} 0.$$

Notons qu'avec cette graduation, $H_k(C^*(f)) = H^{m-k}(C_*(f))$.

Convention 2.1.6. *L'opérateur bord dual $\partial : C^*(f) \to C^*(f)$ est défini ainsi.*

$$\text{Pour } \alpha \in C^k(f),\ \partial\alpha = (-1)^{|\alpha|+1}\alpha \circ \partial = (-1)^{m-k+1}\alpha \circ \partial.$$

La première égalité est la convention notamment utilisée dans [**B**], *et sera généralisée au chapitre 4.*

Notation. *Pour $p_d \in C_k(f)$, on note $p^d \in C^k(f)$ la cochaîne définie par*

$$p^d(q_d) = \delta_{pq} \text{ pour tout } q \in Crit(f).$$

Proposition 2.1.7.

$$\nu : C_*(-f) \to C^*(f)$$
$$\nu(p_a) = (-1)^{|p_a|} p^d$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes.

Démonstration. Soit $q_a \in C_k(-f)$.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \nu(q_a) &= (-1)^{|q_a|} \partial q^d \\
&= (-1)^{m-|q_d|} (-1)^{|q^d|+1} q^d \circ \partial \\
&= (-1)^{m-|q_d|} (-1)^{m-|q_d|+1} \sum_p n(p,q)\, p^d \\
&= -\sum_p n(p,q)\, p^d \\
\nu \circ \partial(q_a) &= \sum_p \tilde{n}(q,p)\, \nu(p_a) \\
&= \sum_p (-1)^{|q_a|} n(p,q)\, (-1)^{|p_a|} p^d \\
&= -\sum_p n(p,q)\, p^d
\end{aligned}$$

Ainsi, ν est un morphisme de complexes. De plus, c'est un isomorphisme de modules en chaque dimension, donc un isomorphisme de complexes. □

Corollaire 2.1.8 (Dualité de Poincaré)**.**

$$H_k(M) \simeq H^{m-k}(M).$$

Démonstration. Le morphisme ν induit un isomorphisme en homologie

$$\nu : H_k(C_*(-f)) \xrightarrow{\sim} H_k(C^*(f)) = H^{m-k}(C_*(f)).$$

En appliquant le théorème d'homologie de Morse aux deux côtés, on obtient le résultat.

□

2.2. Somme extérieure de fonctions

Dans cette section, nous construisons une fonction de Morse sur un produit cartésien à partir d'une fonction de Morse sur chaque facteur. Nous étudions ensuite les propriétés de cette construction.

Définition 2.2.1. *Soit M, N deux variétés lisses fermées de dimensions m et n respectivement. Soit $f : M \to \mathbb{R}$, $g : N \to \mathbb{R}$ deux fonctions lisses. La* ***somme extérieure*** *de f et g est la fonction*

$$f \oplus g : M \times N \to \mathbb{R}$$

$$f \oplus g(x, y) = f(x) + g(y),$$

c'est-à-dire $f \oplus g = f \circ p_1 + g \circ p_2$, où p_i est la projection sur le i^e facteur.

Proposition 2.2.2. *(1) $Crit(f \oplus g) = Crit(f) \times Crit(g)$.*

(2) $ind_{f\oplus g}(p, q) = ind_f(p) + ind_g(q)$.

(3) Si f et g sont de Morse, alors $f \oplus g$ l'est aussi.

(4) $\varphi_t^{f\oplus g} = \varphi_t^f \times \varphi_t^g \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

(5) Si f et g sont de Morse-Smale, alors $f \oplus g$ l'est aussi.

Démonstration. (1) On sait que $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_xM \oplus T_yN$ par l'isomorphisme $dp_{1,(x,y)} \oplus dp_{2,(x,y)}$.

Soit $(x, y) \in Crit(f \oplus g)$, c'est-à-dire $d(f \oplus g)_{(x,y)} = 0$. En particulier,

$$\begin{cases} (df_x \circ dp_{1,(x,y)} + dg_y \circ dp_{2,(x,y)})(ker\ dp_{2,(x,y)}) = df_x(T_xM) = 0. \\ (df_x \circ dp_{1,(x,y)} + dg_y \circ dp_{2,(x,y)})(ker\ dp_{1,(x,y)}) = dg_y(T_yN) = 0. \end{cases}$$

Donc x et y sont des points critiques de f et g, respectivement.

(2) On a l'égalité

$$Hess_{(x,y)}(f \oplus g)\,((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = Hess_x(f)(u_1, u_2) + Hess_y(g)(v_1, v_2)\ .$$

On en déduit que

$$Neg\left(Hess_{(x,y)}(f \oplus g)\right) = Neg\,(Hess_x(f)) \oplus Neg\left(Hess_y(g)\right)\ ,$$

et donc $ind_{f\oplus g}(x, y) = ind_f(x) + ind_g(y)$.

(3) Soit $(x,y) \in Crit(f \oplus g)$. Soit $(u_1, v_1) \in T_{(x,y)}(M \times N)$ tel que

$$Hess_{(x,y)}(f \oplus g)((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = 0 \ \forall\ (u_2, v_2) \in T_{(x,y)}(M \times N),$$

c'est-à-dire

$$Hess_x(f)(u_1, u_2) + Hess_y(g)(v_1, v_2) = 0 \quad \forall\ u_2 \in T_xM, v_2 \in T_yN.$$

En particulier, pour $v_2 = 0$, on a $Hess_x(f)(u_1, u_2) = 0$ pour tout $u_2 \in T_xM$. Alors $u_1 = 0$, car $Hess_x(f)$ est non dégénéré.
De même, en posant $u_2 = 0$, on conclut $v_1 = 0$. Donc $Hess_{(x,y)}(f \oplus g)$ est non dégénéré.

(4) Soit α la métrique sur M et β celle sur N. On prend sur $M \times N$ la métrique produit $\gamma = p_1^*\alpha + p_2^*\beta$. Vérifions que $\nabla_\gamma(f \oplus g)(x,y) = (\nabla_\alpha f(x), \nabla_\beta g(y))$.

$$\begin{aligned} d(f \oplus g)_{(x,y)} &= df_x \circ dp_{1,(x,y)} + dg_y \circ dp_{2,(x,y)} \\ &= \alpha(\nabla f(x), \cdot\,) \circ dp_{1,(x,y)} + \beta(\nabla g(y), \cdot\,) \circ dp_{2,(x,y)} \\ &= \gamma\,((\nabla f(x), \nabla g(y))\,,\ \cdot\ ) \end{aligned}$$

Vérifions que $\varphi_t^{f\oplus g} = \varphi_t^f \times \varphi_t^g : M \times N \to M \times N$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^f \times \varphi_t^g)(x,y) &= (\frac{d}{dt}\varphi_t^f(x), \frac{d}{dt}\varphi_t^g(y)) \\ &= \left(-\nabla f\left(\varphi_t^f(x)\right), -\nabla g\left(\varphi_t^g(y)\right)\right) \\ &= -\nabla(f \oplus g)\left((\varphi_t^f \times \varphi_t^g)(x,y)\right). \end{aligned}$$

(5) Soit $z = (x,y) \in Crit(f \oplus g)$.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{f\oplus g}(z) &= \left\{(x',y') \mid \varphi_t^{f\oplus g}(x',y') \xrightarrow{t\to+\infty} (x,y)\right\} \\ &= \left\{(x',y') \mid \varphi_t^f(x') \xrightarrow{t\to+\infty} x\ ,\ \varphi_t^g(y') \xrightarrow{t\to+\infty} y\right\} \\ &= \mathscr{A}_f(x) \times \mathscr{A}_g(y). \end{aligned}$$

De même, $\mathscr{D}_{f\oplus g}(z) = \mathscr{D}_f(x) \times \mathscr{D}_g(y)$.
Soit $z_1 = (x_1, y_1)\ ,\ z_2 = (x_2, y_2) \in Crit(f \oplus g)$.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{f\oplus g}(z_1) \cap \mathscr{D}_{f\oplus g}(z_2) &= (\mathscr{A}_f(x_1) \times \mathscr{A}_g(y_1)) \cap (\mathscr{D}_f(x_2) \times \mathscr{D}_g(y_2)) \\ &= (\mathscr{A}_f(x_1) \cap \mathscr{D}_f(x_2)) \times (\mathscr{A}_g(y_1) \cap \mathscr{D}_g(y_2)). \end{aligned}$$

Si un des deux facteurs est vide, alors le produit l'est aussi.

Sinon, soit $(x, y) \in (\mathscr{A}_f(x_1) \cap \mathscr{D}_f(x_2)) \times (\mathscr{A}_g(y_1) \cap \mathscr{D}_g(y_2))$; alors

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}\mathscr{A}_{f\oplus g}(z_1) + T_{(x,y)}\mathscr{D}_{f\oplus g}(z_2) &\simeq (T_x\mathscr{A}_f(x_1) \oplus T_y\mathscr{A}_g(y_1)) + (T_x\mathscr{D}_f(x_2) \oplus T_y\mathscr{D}_g(y_2)) \\ &= (T_x\mathscr{A}_f(x_1) + T_x\mathscr{D}_f(x_2)) \oplus (T_y\mathscr{A}_g(y_1) + T_y\mathscr{D}_g(y_2)) \\ &= T_xM \oplus T_yN \\ &\simeq T_{(x,y)}(M \times N). \end{aligned}$$

Donc $f \oplus g$ est de Morse-Smale.

□

2.2.1. Complexe de la somme extérieure

Construisons maintenant le complexe de Morse de $f \oplus g$ à partir des complexes de f et g.

Convention 2.2.3. *Soit X et Y deux variétés orientées. On oriente $X \times Y$ en prenant $\mathscr{O}_{(x,y)}(X \times Y) = (\mathscr{O}_x(X), \mathscr{O}_y(Y))$.*
En particulier, pour $z = (x, y) \in Crit(f\oplus g)$, on prend $\mathscr{O}\left(\mathscr{D}_{f\oplus g}(x,y)\right) = \left(\mathscr{O}\left(\mathscr{D}_f(x)\right), \mathscr{O}\left(\mathscr{D}_g(y)\right)\right)$.

Par la convention 1.1.3, on a

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{O}(\mathscr{A}_{f\oplus g}(x,y)), \mathscr{O}(\mathscr{D}_{f\oplus g}(x,y))\right) &= \mathscr{O}(M \times N) \\ &= (\mathscr{O}(M), \mathscr{O}(N)). \\ &= \left(\mathscr{O}(\mathscr{A}_f(x)), \mathscr{O}(\mathscr{D}_f(x)), \mathscr{O}(\mathscr{A}_g(y)), \mathscr{O}(\mathscr{D}_g(y))\right) \\ &= (-1)^{ind_f(x)\,(n-ind_g(y))}\left(\mathscr{O}(\mathscr{A}_f(x)), \mathscr{O}(\mathscr{A}_g(y)), \mathscr{O}(\mathscr{D}_f(x)), \mathscr{O}(\mathscr{D}_g(y))\right) \\ &= (-1)^{ind_f(x)\,(n-ind_g(y))}\left(\mathscr{O}(\mathscr{A}_f(x)), \mathscr{O}(\mathscr{A}_g(y)), \mathscr{O}(\mathscr{D}_{f\oplus g}(x,y))\right) . \end{aligned}$$

On a donc $\mathscr{O}(\mathscr{A}_{f\oplus g}(x,y)) = (-1)^{ind_f(x)\,(n-ind_g(y))}\left(\mathscr{O}(\mathscr{A}_f(x)), \mathscr{O}(\mathscr{A}_g(y))\right)$.

Soit $z = (x, y)$, $z' = (x', y') \in Crit(f \oplus g)$ et γ une ligne de flot allant de z à z'. Alors $p_1 \circ \gamma$ est une ligne de flot allant de x à x' et $p_2 \circ \gamma$ est une ligne de flot allant de y à y'. On en déduit

$$ind_f(x) \geq ind_f(x') \text{ et } ind_g(y) \geq ind_g(y') .$$

En particulier, si $ind_{f\oplus g}(z) - ind_{f\oplus g}(z') = 1$, alors il y a deux cas possibles :

(1) $z' = (p, y)$, où $ind_f(x) - ind_f(p) = 1$, ou

(2) $z' = (x, q)$, où $ind_g(y) - ind_g(q) = 1$.

Proposition 2.2.4. *(1) Dans les deux cas, $\mathcal{M}(z, z')$ est en bijection avec $\mathcal{M}(x, x') \times \mathcal{M}(y, y')$.*

(2) Dans le premier cas, $n((x, y), (p, y)) = n(x, p)$.

(3) Dans le deuxième cas, $n((x, y), (x, q)) = (-1)^{ind_f(x)}\, n(y, q)$.

DÉMONSTRATION. (1) Dans le cas 1, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(z, z') &= (\mathscr{D}_{f\oplus g}(z) \cap \mathscr{A}_{f\oplus g}(z'))/\mathbb{R} \\
&= \Big(\big(\mathscr{D}_f(x) \times \mathscr{D}_g(y)\big) \cap \big(\mathscr{A}_f(p) \times \mathscr{A}_g(y)\big)\Big)/\mathbb{R} \\
&= \big(\mathscr{D}_f(x) \cap \mathscr{A}_f(p)\big) \times \big(\mathscr{D}_g(y) \cap \mathscr{A}_g(y)\big)/\mathbb{R} \\
&= \Big(\big(\mathscr{D}_f(x) \cap \mathscr{A}_f(p)\big) \times \{y\}\Big)/\mathbb{R} \\
&\cong \Big(\big(\mathscr{D}_f(x) \cap \mathscr{A}_f(p)\big)/\mathbb{R}\Big) \times \{y\} \\
&= \mathcal{M}(x, p) \times \mathcal{M}(y, y).
\end{aligned}$$

Les deux dernières égalités viennent du fait que le flot agit trivialement sur $y \in Crit(g)$. Ainsi la bijection est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(z, z') &\to \mathcal{M}(x, p) \times \mathcal{M}(y, y) \\
\gamma &\mapsto (p_1 \circ \gamma, p_2 \circ \gamma)
\end{aligned}$$

La preuve est identique pour le cas 2.

(2) Soit γ une ligne de flot allant de (x, y) à (p, y), et $(\xi, y) \in \gamma(\mathbb{R})$,
soit $B_f^d(x) = \big(-\nabla f(\xi), \hat{B}_f^d(x)\big)$ une base positive de $T_\xi \mathscr{D}_f(x)$,
soit $B_g^d(y)$ une base positive de $T_y \mathscr{D}_g(y)$,
alors $B_{f\oplus g}^d(z) = \big(B_f^d(x), B_g^d(y)\big)$ est une base positive de $T_{(\xi, y)} \mathscr{D}_{f\oplus g}(z)$.
Mais le long de γ, le gradient de g s'annule, donc $\nabla(f \oplus g) = \nabla f$.

$$\begin{aligned}
B_{f\oplus g}^d(z) &= \big(B_f^d(x), B_g^d(y)\big) \\
&= \big(-\nabla f(\xi), \hat{B}_f^d(x), B_g^d(y)\big) \\
&= \big(-\nabla(f \oplus g)(\xi, y), \hat{B}_f^d(x), B_g^d(y)\big).
\end{aligned}$$

Prenons donc $\hat{B}^d_{f\oplus g}(z) = \left(\hat{B}^d_f(x), B^d_g(y)\right)$.

Vérifions maintenant la relation $sg_{f\oplus g}(\gamma) = sg_f(p_1 \circ \gamma)$.

$$\begin{aligned}
sg_{f\oplus g}(\gamma)\,\mathcal{O}_{(\xi,y)}(M\times N) &= \left(B^a_{f\oplus g}(z'), \hat{B}^d_{f\oplus g}(z)\right)\\
&= (-1)^{(n-ind_g(y))\; ind_f(p)} \left(B^a_f(p), B^a_g(y), \hat{B}^d_f(x), B^d_g(y)\right)\\
&= (-1)^{(n-ind_g(y))\; ind_f(p)}\; (-1)^{(n-ind_g(y))\;(ind_f(x)-1)} \left(B^a_f(p), \hat{B}^d_f(x), B^a_g(y), B^d_g(y)\right)\\
&= \left(B^a_f(p), \hat{B}^d_f(x), B^a_g(y), B^d_g(y)\right)\\
&= sg_f(p_1\circ\gamma)\;\left(\mathcal{O}_\xi(M), \mathcal{O}_y(N)\right)\\
&= sg_f(p_1\circ\gamma)\;\mathcal{O}_{(\xi,y)}(M\times N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n((x,y),(p,y)) &= \sum_{\gamma\in\mathcal{M}(z,z')} sg_{f\oplus g}(\gamma)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{M}(z,z')} sg_f(p_1\circ\gamma)\\
&= \sum_{\tau\in\mathcal{M}(x,p)} sg_f(\tau)\\
&= n(x,p)
\end{aligned}$$

(3) Soit γ une ligne de flot allant de (x,y) à (x,q), et $(x,\eta)\in\gamma(\mathbb{R})$,
soit $B^d_f(x)$ une base positive de $T_x\mathcal{D}_f(x)$,
soit $B^d_g(y) = \left(-\nabla g(\eta), \hat{B}^d_g(y)\right)$ une base positive de $T_\eta\mathcal{D}_g(y)$,
alors $B^d_{f\oplus g}(z) = \left(B^d_f(x), B^d_g(y)\right)$ est une base positive de $T_{(x,\eta)}\mathcal{D}_{f\oplus g}(z)$.
Mais le long de γ, le gradient de f s'annule, donc $\nabla(f\oplus g) = \nabla g$.

$$\begin{aligned}
B^d_{f\oplus g}(z) &= \left(B^d_f(x), B^d_g(y)\right)\\
&= \left(B^d_f(x), -\nabla g(\eta), \hat{B}^d_g(y)\right)\\
&= (-1)^{ind_f(x)}\left(-\nabla g(\eta), B^d_f(x), \hat{B}^d_g(y)\right)\\
&= (-1)^{ind_f(x)}\left(-\nabla(f\oplus g)(x,\eta), B^d_f(x), \hat{B}^d_g(y)\right)
\end{aligned}$$

Prenons donc $\hat{B}^d_{f\oplus g}(z) = (-1)^{ind_f(x)} \left(B^d_f(x), \hat{B}^d_g(y)\right)$.

Vérifions la relation $sg_{f\oplus g}(\gamma) = (-1)^{ind_f(x)}\ sg_g(p_2 \circ \gamma)$.

$$\begin{aligned}
sg_{f\oplus g}(\gamma)\ \mathcal{O}_{(\xi,y)}(M \times N) &= \left(B^a_{f\oplus g}(z'), \hat{B}^d_{f\oplus g}(z)\right) \\
&= (-1)^{(n-ind_g(q))\ ind_f(x)}\ (-1)^{ind_f(x)} \left(B^a_f(x), B^a_g(q), B^d_f(x), \hat{B}^d_g(y)\right) \\
&= (-1)^{ind_f(x)} \left(B^a_f(x), B^d_f(x), B^a_g(q), \hat{B}^d_g(y)\right) \\
&= (-1)^{ind_f(x)}\ sg_g(p_2 \circ \gamma)\ \left(\mathcal{O}_x(M), \mathcal{O}_\eta(N)\right) \\
&= (-1)^{ind_f(x)}\ sg_g(p_2 \circ \gamma)\ \mathcal{O}_{(x,\eta)}(M \times N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n((x,y),(x,q)) &= \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(z,z')} sg_{f\oplus g}(\gamma) \\
&= \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(z,z')} (-1)^{ind_f(x)}\ sg_g(p_2 \circ \gamma) \\
&= (-1)^{ind_f(x)} \sum_{\tau \in \mathcal{M}(y,q)} sg_g(\tau) \\
&= (-1)^{ind_f(x)}\ n(y,q)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.5.

$$\Phi : C_*(f) \otimes C_*(g) \to C_*(f \oplus g)$$

$$\Phi(x \otimes y) = (x, y)$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes.

Démonstration. Par la proposition 2.2.2, item 2, Φ préserve la graduation.

Par l'item 1, Φ est un isomorphisme de modules en chaque dimension.

Soit $(x,y) \in Crit(f \oplus g)$, $ind_f(x) = i$, $ind_g(y) = j$.

$$\partial(x,y) = \sum_{p \in Crit_{i-1}(f)} n(x,p)\,(p,y) + (-1)^{ind_f(x)} \sum_{q \in Crit_{j-1}(g)} n(y,q)\,(x,q).$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1} \circ \partial(x,y) &= \sum_{p \in Crit_{i-1}(f)} n(x,p)\, \Phi^{-1}(p,y) + (-1)^{ind_f(x)} \sum_{q \in Crit_{j-1}(g)} n(y,q)\, \Phi^{-1}(x,q) \\
&= \sum_{p \in Crit_{i-1}(f)} n(x,p)\,(p \otimes y) + (-1)^{ind_f(x)} \sum_{q \in Crit_{j-1}(g)} n(y,q)\,(x \otimes q) \\
&= \left(\sum_{p \in Crit_{i-1}(f)} n(x,p)\, p \right) \otimes y + (-1)^{ind_f(x)}\, x \otimes \left(\sum_{q \in Crit_{j-1}(g)} n(y,q)\, q \right) \\
&= (\partial x) \otimes y + (-1)^{|x|}\, x \otimes (\partial y) \\
&= \partial(x \otimes y) \\
&= \partial \circ \Phi^{-1}(x,y)
\end{aligned}$$

Donc Φ est un isomorphisme de complexes. □

2.2.2. Naturalité

L'énoncé 2.2.5 joue en homologie de Morse le rôle du théorème de Eilenberg-Zilber, selon lequel $S_*(M \times N)$ et $S_*(M) \otimes S_*(N)$ sont naturellement chaîne-homotopes. Ainsi, en appliquant le théorème algébrique de Kunneth au complexe produit, on obtient le théorème géométrique de Kunneth. Pour plus de détails, consulter **[B]**, chapitre 6.1.

Dans notre contexte, les complexes $C_*(f \oplus g)$ et $C_*(f) \otimes C_*(g)$ sont même isomorphes. En appliquant le théorème algébrique de Kunneth, ainsi que le théorème d'homologie de Morse, on retrouve à nouveau le théorème géométrique de Kunneth.

Montrons que l'isomorphisme en 2.2.5 est naturel. Rappelons d'abord le théorème d'Eilenberg-Zilber.

Théorème 2.2.6. *(1) Le produit cross,* $\times : S_*(M) \otimes S_*(N) \to S_*(M \times N)$ *est un morphisme de complexes, naturel en* M *et* N.

(2) Il existe un morphisme $\theta : S_*(M \times N) \to S_*(M) \otimes S_*(N)$ *naturel en* M *et* N *tel que* $\theta(x,y) = x \otimes y$ *en dimension* 0.

(3) (Théorème d'Eilenberg-Zilber) Les morphismes $\times$ *et* θ *sont naturellement inverses homotopiques l'un de l'autre.*

Convention 2.2.7. *Soit $f : A_* \to C_*$ et $g : B_* \to D_*$ deux morphismes de complexes de chaînes. On définit leur produit par $(f \otimes g)(a \otimes b) := (-1)^{|f||b|} f(a) \otimes g(b)$, où la dimension de f est son degré.*

Lemme 2.2.8. *La convention 2.2.7 est bien définie, c'est-à-dire $f \otimes g$ est un morphismes de complexes.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\partial \circ (f \otimes g)(a \otimes b) &= (-1)^{|f||b|} \partial\left(f(a) \otimes g(b)\right) \\
&= (-1)^{|f||b|} \left[\partial(f(a)) \otimes g(b) + (-1)^{|f(a)|} f(a) \otimes \partial(g(b))\right] \\
&= (-1)^{|f||b|} f(\partial a) \otimes g(b) + (-1)^{|f||b|+|a|+|f|} f(a) \otimes g(\partial b) \\
(f \otimes g) \circ \partial(a \otimes b) &= (f \otimes g)\left[\partial a \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes \partial b\right] \\
&= (-1)^{|f||b|} f(\partial a) \otimes g(b) + (-1)^{|a|+|f||\partial b|} f(a) \otimes g(\partial b) \\
&= (-1)^{|f||b|} f(\partial a) \otimes g(b) + (-1)^{|a|+|f||b|-|f|} f(a) \otimes g(\partial b) \\
&= \partial \circ (f \otimes g)(a \otimes b)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.9. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
S_*(M) \otimes S_*(N) \arrow[r, shift left, "\times"] \arrow[d, shift right, "A_f \otimes A_g"'] & S_*(M \times N) \arrow[l, shift left, "\theta"] \arrow[d, shift right, "A_{f \oplus g}"'] \\
C_*(f) \otimes C_*(g) \arrow[r, shift left, "\Phi"] \arrow[u, shift right, "D_f \otimes D_g"'] & C_*(f \oplus g) \arrow[l, shift left, "\Phi^{-1}"] \arrow[u, shift right, "D_{f \oplus g}"']
\end{tikzcd}$$

commute dans les deux sens, c'est-à-dire

(1) $\times \circ (D_f \otimes D_g) = D_{f \oplus g} \circ \Phi$,

(2) $A_{f \oplus g} \circ \times = \Phi \circ (A_f \otimes A_g)$.

DÉMONSTRATION. (1) Soit $x \in Crit(f)$, $y \in Crit(g)$.

$$
\begin{aligned}
D_{f\oplus g} \circ \Phi(x \otimes y) &= D_{f\oplus g}(x, y) \\
&= e_*^{x,y}\left[\overline{\mathscr{D}_{f\oplus g}(x,y)}\right] \\
&= e_*^{x,y}\left[\overline{\mathscr{D}_f(x) \times \mathscr{D}_g(y)}\right] \\
&= e_*^{x,y}\left[\overline{\mathscr{D}_f(x)} \times \overline{\mathscr{D}_g(y)}\right] \\
&= e_*^{x,y}\left(\left[\overline{\mathscr{D}_f(x)}\right] \times \left[\overline{\mathscr{D}_g(y)}\right]\right) \\
&= (e^x \times e^y)_*\left(\left[\overline{\mathscr{D}_f(x)} \times \overline{\mathscr{D}_g(y)}\right]\right) \\
&= e_*^x\left[\overline{\mathscr{D}_f(x)}\right] \times e_*^y\left[\overline{\mathscr{D}_g(y)}\right] \\
&= D_f(x) \times D_g(y) \\
&= \times\big(D_f(x) \otimes D_g(y)\big) \\
&= \times \circ (D_f \otimes D_g)(x \otimes y)
\end{aligned}
$$

(2) Soit $\sigma \in S_i(M)$, $\tau \in S_j(N)$ des simplexes génériques.

$$
\begin{aligned}
\Phi \circ (A_f \otimes A_g)(\sigma \otimes \tau) &= \Phi\big(A_f(\sigma) \otimes A_g(\tau)\big) \\
&= \Phi\left(\left(\sum_{p \in Crit_i(f)} \#\mathcal{M}(\sigma, p)\ p_d\right) \otimes \left(\sum_{q \in Crit_j(g)} \#\mathcal{M}(\tau, q)\ q_d\right)\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{\substack{p \in Crit_i(f) \\ q \in Crit_j(g)}} \#\mathcal{M}(\sigma, p)\, \#\mathcal{M}(\tau, q)\ (p_d \otimes q_d)\right) \\
&= \sum_{\substack{p \in Crit_i(f) \\ q \in Crit_j(g)}} \#\mathcal{M}(\sigma, p)\, \#\mathcal{M}(\tau, q)\ (p, q)_d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_{f\oplus g} \circ \times)(\sigma \otimes \tau) &= A_{f\oplus g}(\sigma \times \tau) \\
&= \sum_{(p,q) \in Crit_{i+j}(f\oplus g)} \#\mathcal{M}(\sigma \times \tau, (p, q))\ (p, q)_d
\end{aligned}
$$

Il suffit de montrer l'égalité $\#\mathcal{M}(\sigma \times \tau, (p, q)) = \#\mathcal{M}(\sigma, p)\ \#\mathcal{M}(\tau, q)$ lorsque $ind_f(p) = i$ et $ind_g(q) = j$, et 0 sinon.

Soit $\alpha \in \mathcal{M}(\sigma \times \tau, (p,q))$ une ligne de flot telle que $\alpha(0) \in \sigma \times \tau$ et $\alpha(t) \xrightarrow{t \to +\infty} (p,q)$. Posons $\alpha_i := p_i \circ \alpha$, $i = 1, 2$. On a alors

$$\begin{cases} \alpha_1(0) \in \sigma \text{ et } \alpha_1(t) \xrightarrow{t \to +\infty} p \\ \alpha_2(0) \in \tau \text{ et } \alpha_2(t) \xrightarrow{t \to +\infty} q \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha_1 \in \mathcal{M}(\sigma, p)$ et $\alpha_2 \in \mathcal{M}(\tau, q)$.

Puisque les simplexes sont génériques, on en déduit

$$dim(p_A) \geq dim(M) - dim(\sigma) = m - i$$
$$dim(q_A) \geq dim(N) - dim(\tau) = n - j$$

Ainsi, $dim(p_D) \leq i$ et $dim(q_D) \leq j$, et l'égalité a lieu puisque $dim(p_D) + dim(q_D) = i + j$.

Ceci implique que $\mathcal{M}(\sigma \times \tau, (p,q)) \to \mathcal{M}(\sigma, p) \times \mathcal{M}(\tau, q)$, $\alpha \mapsto (\alpha_1, \alpha_2)$ est une bijection. En particulier, cet ensemble est vide sauf lorsque $ind_f(p) = dim(\sigma)$ et $ind_g(q) = dim(\tau)$. Dans ce cas, calculons $sg(\alpha)$.

$$\begin{aligned} d\varphi_t^{f \oplus g} \mathcal{O}_{\alpha(0)}(\sigma \times \tau) &= (d\varphi_t^f \times d\varphi_t^g)\,(\mathcal{O}_{\alpha_1(0)}(\sigma), \mathcal{O}_{\alpha_2(0)}(\tau)) \\ &= \left(d\varphi_t^f\, \mathcal{O}_{\alpha_1(0)}(\sigma), d\varphi_t^g\, \mathcal{O}_{\alpha_2(0)}(\tau)\right) \\ &\xrightarrow{t \to +\infty} \left(sg(\alpha_1)\, \mathcal{O}_p \mathcal{D}_f(p)\,,\ sg(\alpha_2)\, \mathcal{O}_q \mathcal{D}_g(q)\right) \\ &= sg(\alpha_1) sg(\alpha_2) \left(\mathcal{O}_p \mathcal{D}_f(p), \mathcal{O}_q \mathcal{D}_g(q)\right) \\ &= sg(\alpha_1) sg(\alpha_2)\, \mathcal{O}_{(p,q)} \left(\mathcal{D}_f(p) \times \mathcal{D}_g(q)\right) \\ &= sg(\alpha_1) sg(\alpha_2)\, \mathcal{O}_{(p,q)} \mathcal{D}_{f \oplus g}(p,q) \end{aligned}$$

On a donc $sg_{f\oplus g}(\alpha) = sg_f(\alpha_1)\ sg_g(\alpha_2)$.

$$\begin{aligned}
\#\mathcal{M}(\sigma\times\tau,(p,q)) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}(\sigma\times\tau,(p,q))} sg_{f\oplus g}(\alpha) \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1\in\mathcal{M}(\sigma,p)\\ \alpha_2\in\mathcal{M}(\tau,q)}} sg_{f\oplus g}((\alpha_1,\alpha_2)) \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1\in\mathcal{M}(\sigma,p)\\ \alpha_2\in\mathcal{M}(\tau,q)}} sg_f(\alpha_1)\ sg_g(\alpha_2) \\
&= \left(\sum_{\alpha_1\in\mathcal{M}(\sigma,p)} sg_f(\alpha_1)\right)\left(\sum_{\alpha_2\in\mathcal{M}(\tau,q)} sg_g(\alpha_2)\right) \\
&= \#\mathcal{M}(\sigma,p)\ \#\mathcal{M}(\tau,q)\,.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.10. *Cette proposition dit que* $(p,q)_D = p_D \times q_D$.

Corollaire 2.2.11. *L'isomorphisme* $\Phi : C_*(f)\otimes C_*(g) \to C_*(f\oplus g)$ *en 2.2.5 est naturel.*

Chapitre 3

APPLICATION À LA DIAGONALE

Dans l'introduction, nous avons remarqué que pour tout temps t :

$$\begin{aligned}\Delta &= d_*([M]) \\ &= (id_M \times id_M)_*\, d_*([M]) \\ &= (\varphi^f_{-t} \times \varphi^f_t)_*\, d_*([M]) \\ &= (\varphi^{-f}_t \times \varphi^f_t)_*(\Delta) \\ &= (\varphi^{-f\oplus f}_t)_*(\Delta).\end{aligned}$$

Or, la construction dans le théorème d'homologie de Morse décrit ce qui arrive aux simplexes lorsqu'on les pousse le long du flot d'une fonction de Morse. Appliquons ces résultats à la fonction $-f \oplus f$ sur $M \times M$.

Dans ce chapitre, M et f sont comme précédemment.

3.1. Décomposition dans les chaînes

Proposition 3.1.1.

$$\Delta = \left[\sum_{p\in Crit(f)} p_A \times p_D\right].$$

DÉMONSTRATION. Soit $\hat{M} \in S_m(M)$ un cycle dans la classe de $[M]$, et $\hat{\Delta} := d_*(\hat{M})$. Alors $[\hat{\Delta}] = \Delta$.

$$\begin{aligned}\Delta &= D_{-f\oplus f} \circ A_{-f\oplus f}(\Delta)\\ &= D_{-f\oplus f} \circ A_{-f\oplus f}\left([\hat{\Delta}]\right)\\ &= \left[D_{-f\oplus f} \circ A_{-f\oplus f}\left(\hat{\Delta}\right)\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{-f\oplus f}\left(\hat{\Delta}\right) &= \sum_{(p,q)\in Crit_m(-f\oplus f)} \#\mathcal{M}\left(\hat{\Delta},(p,q)\right)\ (p,q)_d\\ &= \sum_{\substack{p\in Crit_{m-k}(-f)\\ q\in Crit_k(f)}} \#\mathcal{M}\left(\hat{\Delta},(p,q)\right)\ (p,q)_d .\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathcal{M}\left(\hat{\Delta},(p,q)\right)$ une ligne de flot telle que $\alpha(0) \in \hat{\Delta}$ et $\alpha(t) \xrightarrow{t\to+\infty} (p,q)$. On a $\alpha(0) = (x,x)$, $\varphi_t^f(x) \xrightarrow{t\to-\infty} p$, $\varphi_t^f(x) \xrightarrow{t\to+\infty} q$.

Si $p \neq q$, alors $ind_f(p) > ind_f(q)$. Or, $ind_f(p) = ind_f(q)$, donc $p = q = x \in Crit(f)$. Dans ce cas, calculons $sg_{-f\oplus f}(\alpha)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(p,p)}(\hat{\Delta}) &= \mathcal{O}_p(M) \oplus \mathcal{O}_p(M)\\ &= \left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right) \oplus \left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\varphi_t^{-f\oplus f}\mathcal{O}_{(p,p)}(\hat{\Delta}) &= d\varphi_t^{-f\oplus f}\left(\left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right) \oplus \left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right)\right)\\ &= \left(d\varphi_t^{-f} \oplus d\varphi_t^{f}\right)\left(\left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right) \oplus \left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right)\right)\\ &= d\varphi_{-t}^{f}\left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right) \oplus d\varphi_t^{f}\left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right)\\ &\xrightarrow{t\to\infty} \left(\mathcal{O}_p(\mathscr{A}(p)), 0\right) \oplus \left(0, \mathcal{O}_p(\mathscr{D}(p))\right)\\ &= \mathcal{O}_{(p,p)}\left(\mathscr{A}(p) \times \mathscr{D}(p)\right)\\ &= \mathcal{O}_{(p,p)}\mathscr{D}_{-f\oplus f}(p,p).\end{aligned}$$

Ainsi, $sg_{-f\oplus f}(\alpha)$ est toujours $+1$, d'où l'égalité $A_{-f\oplus f}\left(\hat{\Delta}\right) = \sum_{p\in Crit(f)} (p,p)_d$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[D_{-f\oplus f}\left(\sum_{p\in Crit(f)} (p,p)_d\right)\right] \\
&= \left[\sum_{p\in Crit(f)} (p,p)_D\right] \\
&= \left[\sum_{p\in Crit(f)} p_A \times p_D\right].
\end{aligned}$$

□

Nous avons obtenu une décomposition de la diagonale au niveau des chaînes. En général, celle-ci n'est pas une décomposition de Kunneth, puisque les nappes ascendantes et descendantes ne sont pas des cycles.

3.2. Exemple trivial : S^1

Prenons $M = S^1$. Pour toute fonction de Morse f sur M, tel qu'illustré à la figure 3.1, on peut ordonner ses points critiques de sorte que

$$Crit_1(f) = \{a_1, ..., a_k\}$$

$$Crit_0(f) = \{b_1, ..., b_k\}$$

$$\partial a_{i,d} = b_{i,d} - b_{i-1,d}, \text{ et donc } \partial b_{i,a} = a_{i+1,a} - a_{i,a} .$$

D'après 3.1.1, on a

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{i=1}^{k} a_{iA} \times a_{iD} + \sum_{j=1}^{k} b_{jA} \times b_{jD} \\
&= a_{1A} \times (\sum_{i=1}^{k} a_{iD}) + (\sum_{j=1}^{k} b_{jA}) \times b_{1D} \\
&=: \Delta' .
\end{aligned}$$

En effet,

$$\Delta' - \Delta = \sum_{i=2}^{k} (a_{1A} - a_{iA}) \times a_{iD} + \sum_{j=2}^{k} b_{jA} \times (b_{1D} - b_{jD}).$$

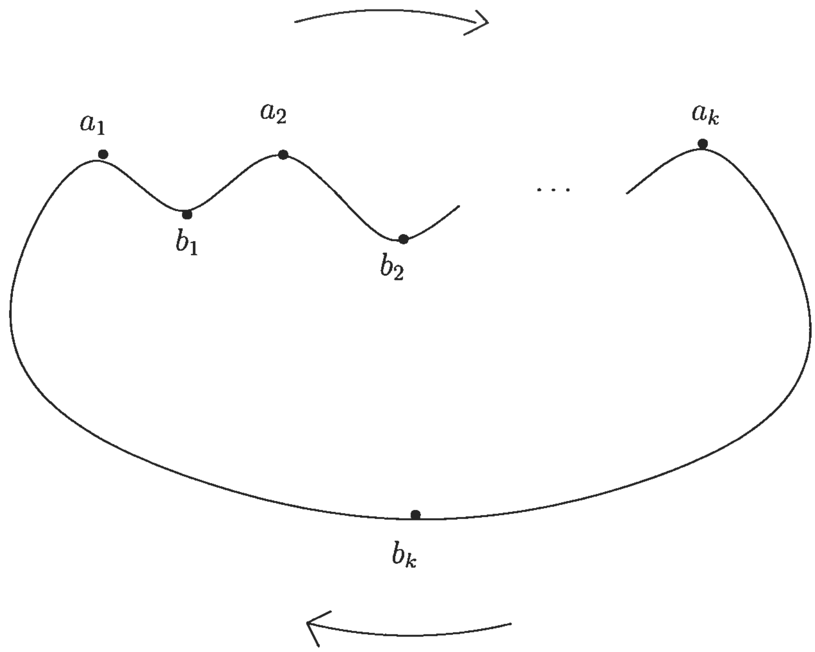

FIG. 3.1. Fonction de Morse sur le cercle

Ceci est égal au bord suivant.

$$\begin{aligned}
\partial\left(\sum_{i=2}^{k}(\sum_{j=i}^{k} b_{jA}) \times a_{iD}\right) &= \sum_{i=2}^{k}\left((a_{1A} - a_{iA}) \times a_{iD} - (\sum_{j=i}^{k} b_{jA}) \times (b_{iD} - b_{(i-1)D})\right) \\
&= \sum_{i=2}^{k}(a_{1A} - a_{iA}) \times a_{iD} - \sum_{j=2}^{k}\left(b_{jA} \times (\sum_{i=2}^{j} b_{iD} - b_{(i-1)D})\right) \\
&= \sum_{i=2}^{k}(a_{1A} - a_{iA}) \times a_{iD} - \sum_{j=2}^{k} b_{jA} \times (b_{jD} - b_{1D}) \\
&= \Delta' - \Delta.
\end{aligned}$$

En homologie, $\Delta = \Delta' = [pt] \times [M] + [M] \times [pt]$, d'après 2.1.5.

Remarquons que $[pt] \in H_0(M)$ et $[M] \in H_1(M)$ sont duales l'une de l'autre par rapport au nombre d'intersection. Nous verrons qu'il s'agit là d'un résultat général.

Chapitre 4

MANIPULATIONS ALGÉBRIQUES

Dans ce chapitre, nous trouvons une décomposition de la diagonale en homologie à partir de la décomposition au niveau des chaînes donnée par 3.1.1.

4.1. Foncteur $Hom(\cdot\,,\cdot)$

Définition 4.1.1. *Soit C_*, D_* deux complexes de chaînes et $Hom(C_*, D_*)$ l'ensemble des morphismes de modules gradués. On en fait un complexe de chaînes, avec la graduation $|f| := deg(f)$, et la différentielle $\partial f = \partial \circ f + (-1)^{|f|+1} f \circ \partial$.*

Remarque 4.1.2. *Le signe dans la différentielle provient de la convention suivante :*

$$\partial(f(x)) = (\partial f)(x) + (-1)^{|f|} f(\partial x).$$

Définition 4.1.3. *Le complexe dual de C_* est défini comme le complexe $C^* := Hom(C_*, \mathbb{Z}_*)$. Ici, le complexe $\mathbb{Z}_*$ vaut $\mathbb{Z}$ en dimension 0 et 0 ailleurs. Donc $(C^*)_{-k} = Hom(C_k, \mathbb{Z})$.*

Notation. *Pour un module (gradué) C, on note par $T(C)$ son sous-module de torsion.*

Proposition 4.1.4. *On a une suite exacte courte naturelle de complexes de chaînes*

$$0 \to C^* \otimes D_* \xrightarrow{\phi} Hom(C_*, D_*) \xrightarrow{r} Hom(T(C_*), T(D_*)) \to 0$$

où $\phi(\alpha \otimes a) := (-1)^{|\alpha||a|}\alpha(\cdot\,)\, a$ et $r(f) := f|_{T(C_*)}$.

Elle se scinde en tant que suite de modules gradués, mais pas naturellement.

Si de plus C_* est la somme directe d'un sous-complexe libre et du sous-complexe $T(C_*)$, alors la suite se scinde en tant que suite de complexes.

Démonstration. (1) ϕ est un morphisme de complexes.

ϕ respecte la graduation : $|\alpha(\cdot\,)\,a| = |a| - (-|\alpha|) = |a| + |\alpha| = |\alpha \otimes a|$.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \phi(\alpha \otimes a) &= (-1)^{|\alpha||a|}\left[\partial \circ (\alpha(\cdot\,)\,a) + (-1)^{|\alpha(\cdot)\,a|+1}(\alpha(\cdot\,)\,a) \circ \partial\right] \\
&= (-1)^{|\alpha||a|}\left[\alpha(\cdot\,)\,\partial a + (-1)^{|\alpha|+|a|+1}\alpha \circ \partial(\cdot\,)\,a\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi \circ \partial(\alpha \otimes a) &= \phi\left[\partial\alpha \otimes a + (-1)^{|\alpha|}\alpha \otimes \partial a\right] \\
&= (-1)^{|\alpha|+1}(-1)^{|\alpha\circ\partial||a|}\alpha \circ \partial(\cdot\,)\,a + (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha||\partial a|}\alpha(\cdot\,)\,\partial a \\
&= (-1)^{|\alpha||a|+|\alpha|+|a|+1}\alpha \circ \partial(\cdot\,)\,a + (-1)^{|\alpha||a|}\alpha(\cdot\,)\,\partial a \\
&= \partial \circ \phi(\alpha \otimes a).
\end{aligned}$$

(2) r est un morphisme de complexes.

$$\begin{aligned}
r \circ \partial(f) &= r\left[\partial \circ f + (-1)^{|f|+1} f \circ \partial\right] \\
&= (\partial \circ f)|_{T(C_*)} + (-1)^{|f|+1}(f \circ \partial)|_{T(C_*)} \\
&= \partial \circ (f|_{T(C_*)}) + (-1)^{|f|+1}(f|_{T(C_*)}) \circ \partial \\
&= \partial \circ r(f).
\end{aligned}$$

(3) ϕ est injectif.

Fixons L_* un sous-module libre de C_* tel que $C_* = L_* \oplus T(C_*)$, et fixons $\{b_i\}$ une base de L_*. Notons $b^i \in C^*$ la cochaîne duale de b_i, c'est-à-dire $b^i(b_j) = \delta_{ij}$. Posons

$$\begin{aligned}
\psi : Hom(C_*, D_*) &\to C^* \otimes D_* \\
f &\mapsto \sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} b^i \otimes f(b_i).
\end{aligned}$$

Alors ψ est un morphisme de modules gradués.

$$|b^i \otimes f(b_i)| = |b^i| + |f(b_i)| = -|b_i| + |b_i| + |f| = |f|.$$

De plus, ψ est un scindement, c'est-à-dire $\psi \circ \phi = id_{C^* \otimes D_*}$. Soit $\alpha \in (C^*)_{-m}$ et $a \in D_n$.

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi(\alpha \otimes a) &= (-1)^{mn} \psi(\alpha(\cdot)\, a) \\
&= (-1)^{mn} \sum_i (-1)^{|b^i||\alpha(b_i)a|} b^i \otimes \alpha(b_i)a \\
&= (-1)^{mn} \sum_{|b_i|=m} (-1)^{mn} b^i \otimes \alpha(b_i)a \\
&= \left(\sum_{|b_i|=m} \alpha(b_i) b^i \right) \otimes a \\
&= \alpha \otimes a.
\end{aligned}$$

En particulier, ϕ est injectif.

De plus, si $\partial(L_*) \subset L_*$, alors ψ est un morphisme de complexes.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \psi(f) &= \sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} \partial\left(b^i \otimes f(b_i)\right) \\
&= \sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} \left[\partial b^i \otimes f(b_i) + (-1)^{|b^i|} b^i \otimes \partial \circ f(b_i)\right] \\
&= \sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} (-1)^{|b^i|+1} b^i \circ \partial \otimes f(b_i) + \sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} (-1)^{|b^i|} b^i \otimes \partial \circ f(b_i) \\
&= \sum_i (-1)^{|b_i||f|+1} b^i \circ \partial \otimes f(b_i) + \sum_i (-1)^{|b_i||f|} b^i \otimes \partial \circ f(b_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi \circ \partial(f) &= \psi\left[\partial \circ f + (-1)^{|f|+1} f \circ \partial\right] \\
&= \sum_i (-1)^{|b^i||\partial \circ f(b_i)|} b^i \otimes \partial \circ f(b_i) + (-1)^{|f|+1} \sum_i (-1)^{|b^i||f \circ \partial(b_i)|} b^i \otimes f \circ \partial(b_i) \\
&= \sum_i (-1)^{|b_i||f|} b^i \otimes \partial \circ f(b_i) + \sum_i (-1)^{|b_i||f|+|f|+1} b^i \otimes f \circ \partial(b_i).
\end{aligned}$$

Soit ∂ donné par $\partial(b_i) = \sum_j n(b_i, b_j)\, b_j$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_i (-1)^{|b_i||f|} b^i \circ \partial \otimes f(b_i) &= \sum_i (-1)^{|b_i||f|} \left(\sum_j n(b_j, b_i) b^j \right) \otimes f(b_i) \\
&= \sum_i \sum_{|b_j|=|b_i|+1} (-1)^{|b_i||f|}\, n(b_j, b_i)\, b^j \otimes f(b_i) \\
&= \sum_j \sum_{|b_i|=|b_j|-1} (-1)^{|b_j||f|-|f|}\, n(b_j, b_i)\, b^j \otimes f(b_i) \\
&= \sum_j (-1)^{|b_j||f|+|f|} b^j \otimes f\left(\sum_{|b_i|=|b_j|-1} n(b_j, b_i) b_i \right) \\
&= \sum_j (-1)^{|b_j||f|+|f|} b^j \otimes f \circ \partial(b_j).
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'égalité $\partial \circ \psi(f) = \psi \circ \partial(f)$.

(4) r est surjectif. Définissons

$$\rho : Hom(T(C_*), T(D_*)) \longrightarrow Hom(C_*, D_*)$$

$$\rho(g)|_{T(C_*)} = g \ , \ \rho(g)|_{L_*} \equiv 0.$$

Alors ρ est un morphisme de modules gradués, et par définition, $r \circ \rho = id_{Hom(T(C_*),T(D_*))}$. En particulier, r est surjectif.
De plus, si $\partial(L_*) \subset L_*$, alors ρ est un morphisme de complexes :

$$\begin{aligned}
\partial \circ \rho(g) &= \partial \circ \rho(g) + (-1)^{|g|+1} \rho(g) \circ \partial \\
\rho \circ \partial(g) &= \rho\left[\partial \circ g + (-1)^{|g|+1} g \circ \partial\right] \\
&= \partial \circ \rho(g) + (-1)^{|g|+1} \rho(g \circ \partial).
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle de $(\partial \circ \rho(g))\,|_{T(C_*)} = \partial \circ g$ et $(\partial \circ \rho(g))\,|_{L_*} = 0$.
Avec l'hypothèse additionnelle, on a $\rho(g \circ \partial) = \rho(g) \circ \partial$, puisque $(\rho(g) \circ \partial)\,|_{T(C_*)} = g \circ \partial$ et $(\rho(g) \circ \partial)\,|_{L_*} = 0$.
Donc $\partial \circ \rho = \rho \circ \partial$.

(5) $im(\phi) = ker(r)$

($\subset$) Soit $\alpha \otimes a \in C^* \otimes D_*$.

$$\begin{aligned} r \circ \phi(\alpha \otimes a) &= (-1)^{|\alpha||a|} r\,(\alpha(\cdot\,)\,a) \\ &= (-1)^{|\alpha||a|}\,(\alpha(\cdot\,)\,a)\,|_{T(C_*)} \\ &= 0 \quad \text{car } \alpha|_{T(C_*)} = 0. \end{aligned}$$

($\supset$) Soit $f \in Hom(C_*, D_*)$ tel que $f|_{T(C_*)} = 0$. Montrons $f = \phi \circ \psi(f)$.

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(f) &= \phi\left[\sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} b^i \otimes f(b_i)\right] \\ &= \sum_i b^i(\cdot\,)\, f(b_i) \\ &= 0 \text{ sur } T(C_*) \text{ et } f \text{ sur } L_* \\ &= f. \end{aligned}$$

Donc $f \in im(\phi)$.

□

Corollaire 4.1.5. *Si C_* est libre, alors de façon canonique $C^* \otimes D_* \cong Hom(C_*, D_*)$, avec l'isomorphisme de complexes ϕ, dont l'inverse est ψ.*

4.2. Une première décomposition

Dans cette section, nous appliquons les résultats de la section précédente à notre problème. Nous avons

$$\hat{\Delta} \mapsto \sum_{p \in Crit(f)} (p, p)_d \in C_*(-f \oplus f) \cong C_*(-f) \otimes C_*(f) \cong C^*(f) \otimes C_*(f) \cong Hom(C_*(f), C_*(f)).$$

Calculons l'image de $\hat{\Delta}$ par ces isomorphismes. Il faut d'abord régler un détail technique : le changement de graduation.

À la section 2.1.2, nous avons utilisé de la complexe dual $C^*(f)$ en le graduant de 0 à m. Pour respecter la convention 4.1.3, il faudrait plutôt le graduer de $-m$ à 0.

Notation. *Désormais, on note $C^*(f)$ le complexe dual gradué de $-m$ à 0, c'est-à-dire $(C^*(f))_{-k} = Hom(C_k(f), \mathbb{Z})$. On notera $\hat{C}^*(f)$ le même complexe, mais gradué de 0 à m, c'est-à-dire $(\hat{C}^*(f))_{m-k} = Hom(C_k(f), \mathbb{Z})$.*

Lemme 4.2.1.

$$\pi : \hat{C}^*(f) \to C^*(f)$$
$$\pi(\alpha) = (-1)^{m|\alpha|}\alpha$$

est un isomorphisme de complexes.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \pi(\alpha) &= (-1)^{m|\alpha|}\partial\alpha \\
&= (-1)^{m|\alpha|+|\alpha|-m+1}\alpha \circ \partial. \\
\pi \circ \partial(\alpha) &= (-1)^{|\alpha|+1}\pi(\alpha \circ \partial) \\
&= (-1)^{|\alpha|+1+m(|\alpha|-1)}\alpha \circ \partial \\
&= (-1)^{m|\alpha|+|\alpha|-m+1}\alpha \circ \partial.
\end{aligned}$$

□

Rappelons aussi que le produit tensoriel de deux morphismes de complexes est défini en 2.2.7.

Nous avons les morphismes suivants :

$$\hat{\Delta} \in S_m(M \times M) \xrightarrow{A_{-f\oplus f}} C_*(-f \oplus f) \xrightarrow{\Phi^{-1}} C_*(-f) \otimes C_*(f) \to$$
$$\xrightarrow{\nu\otimes id} \hat{C}^*(f) \otimes C_*(f) \xrightarrow{\pi\otimes id} C^*(f) \otimes C_*(f) \xrightarrow{\phi} Hom(C_*(f), C_*(f)).$$

Proposition 4.2.2. *L'image de $\hat{\Delta}$ par ces morphismes est $id_{C_*(f)}$.*

Démonstration. En 3.1.1 nous avons vu que $A_{-f\oplus f}(\hat{\Delta}) = \sum_{p\in Crit(f)} (p,p)_d$.

(1)

$$\Phi^{-1}\left(\sum_{p\in Crit(f)} (p,p)_d\right) = \sum_{p\in Crit(f)} p_a \otimes p_d.$$

(2)

$$(\nu \otimes id)\left(\sum_{p\in Crit(f)} p_a \otimes p_d\right) = \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|\nu||p_d|}\nu(p_a)\otimes id(p_d)$$
$$= \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_a|} p^d \otimes p_d.$$

(3)

$$(\pi \otimes id)\left(\sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_a|} p^d \otimes p_d\right) = \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_a|}(-1)^{|\pi||p_d|}\pi(p^d)\otimes p_d$$
$$= \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{m-|p_d|}(-1)^{m|p_d|}(-1)^{m(m-|p_d|)} p^d \otimes p_d$$
$$= \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_d|} p^d \otimes p_d.$$

(4)

$$\phi\left(\sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_d|} p^d \otimes p_d\right) = \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_d|}(-1)^{|p^d||p_d|} p^d(\cdot)\, p_d$$
$$= \sum_{p\in Crit(f)} p^d(\cdot)\, p_d$$
$$= id_{C_*(f)}.$$

$\square$

Rappel. *Soit C_* un complexe de chaînes libre. Une version faible du théorème des coefficients universels donne la suite exacte naturelle*

$$0 \to Ext(H_{n-1}(C_*), \mathbb{Z}) \to H^n(C^*) \xrightarrow{\beta} Hom(H_n(C_*), \mathbb{Z}) \to 0,$$

où $(\beta[\alpha])([c]) = \alpha(c)$.
En particulier, si $H_{n-1}(C_*)$ est libre, alors $H^n(C_*) \cong Hom(H_n(C_*), \mathbb{Z})$, et l'isomorphisme β est canonique.

Notation. *Pour un $\mathbb{Z}$-module V, on note $V' := Hom(V, \mathbb{Z})$.*

Proposition 4.2.3. *Soit C_*, D_* deux complexes de chaînes libres tels que $H_*(C_*)$ soit libre. On a les isomorphismes de modules gradués*

$$H_*(Hom(C_*, D_*)) \xrightarrow{\psi_*} H_*(C^* \otimes D_*) \xrightarrow{K} H_*(C^*) \otimes H_*(D_*) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\beta \otimes id} H_*(C_*)' \otimes H_*(D_*) \xrightarrow{\phi} Hom(H_*(C_*), H_*(D_*)),$$

où K est l'isomorphisme de Kunneth. Alors l'image de $[f] \in H_*(Hom(C_*, D_*))$ est $f_* := H_*(f)$.

Démonstration. En dimension 0, les cycles $f \in Hom_0(C_*, D_*)$ sont les solutions de $\partial \circ f - f \circ \partial = 0$, c'est-à-dire les morphismes de complexes.
Les bords sont les $f \in Hom_0(C_*, D_*)$ pour lesquels il existe $F \in Hom_1(C_*, D_*)$ tel que $f = \partial F = \partial \circ F + F \circ \partial$, c'est-à-dire les morphismes nul-homotopes.
Pour $f \in Hom(C_*, D_*)$ de dimension quelconque, si f est un cycle, alors f envoie les cycles sur des cycles et les bords sur des bords. Donc $H_*(f)$ est bien défini.
Puisque la suite est composée d'isomorphismes, il suffit de vérifier l'énoncé pour $f = \alpha(\cdot)a$, où $\alpha \in C^*$ et $a \in D_*$ sont des cycles.

$$\begin{aligned} [\alpha(\cdot)a] &\mapsto \left[(-1)^{|\alpha||a|}\alpha \otimes a\right] \\ &\mapsto (-1)^{|\alpha||a|}[\alpha] \otimes [a] \\ &\mapsto (-1)^{|\alpha||a|}\beta[\alpha] \otimes [a] \\ &\mapsto \beta[\alpha](\cdot)\,[a]. \end{aligned}$$

Pour $[c] \in H_*(C_*)$ on a

$$\begin{aligned} \beta[\alpha](\cdot)[a]\ ([c]) &= \beta[\alpha]([c])\,[a] \\ &= \alpha(c)[a] = [\alpha(c)\,a] \\ &= [f(c)] = f_*([c]). \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2.4. *Soit $\{e_i\}$ une base de C_* et $\{[c_j]\}$ une base de $H_*(C_*)$. Alors*

$$\left[\sum_i (-1)^{|e_i|} e^i \otimes e_i\right] \overset{K}{\mapsto} \sum_j (-1)^{|c_j|}[c^j] \otimes [c_j].$$

Démonstration. Dans la proposition 4.2.3, avec $D_* = C_*$, on a $[id_{C_*}] \mapsto id_{H_*(C_*)}$. En conséquence,

$$\psi_* \left([id_{C_*}]\right) \overset{K}{\mapsto} (\beta^{-1} \otimes id) \circ \phi^{-1} \left(id_{H_*(C_*)}\right).$$

En développant le membre de gauche, on obtient

$$\begin{aligned}\left[\sum_i (-1)^{|e_i|} e^i \otimes e_i\right] &\overset{K}{\mapsto} (\beta^{-1} \otimes id) \circ \phi^{-1} \left(id_{H_*(C_*)}\right) \\ &= (\beta^{-1} \otimes id)\left(\sum_j (-1)^{|c_j|}[c_j]' \otimes [c_j]\right) \\ &= \sum_i (-1)^{|c_j|}[c^j] \otimes [c_j].\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2.5. *Soit $\{[c_j]\}$ une base de $H_*(C_*(f))$. Alors Δ correspond à*

$$\sum_j (-1)^{|c_j|}[c^j] \otimes [c_j] \in H_*(C^*(f)) \otimes H_*(C_*(f)).$$

Cette expression nous donne une première décomposition de Kunneth de la diagonale.

4.3. Décomposition en homologie de Morse

Proposition 4.3.1. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
H_*(C_*(-f) \otimes C_*(f)) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "(\nu\otimes id)_*"'] & H_*(C_*(-f)) \otimes H_*(C_*(f)) \arrow[d, "\nu_*\otimes id_*"] \\
H_*(\hat{C}^*(f) \otimes C_*(f)) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "(\pi\otimes id)_*"'] & H_*(\hat{C}^*(f)) \otimes H_*(C_*(f)) \arrow[d, "\pi_*\otimes id_*"] \\
H_*(C^*(f) \otimes C_*(f)) \arrow[r, "K"] & H_*(C^*(f)) \otimes H_*(C_*(f))
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous avons supposé que $H_*(C_*(f)) \simeq H_*(M)$ est libre, donc l'isomorphisme de Kunneth est canonique. En particulier, ce diagramme commute. □

$H_*(C^*(f)) \otimes H_*(C_*(f))$ est muni du produit de Kronecker, c'est-à-dire le produit d'évaluation $ev : H_*(C^*(f)) \otimes H_*(C_*(f)) \to \mathbb{Z}$.

Proposition 4.3.2. *Les isomorphismes de ce diagramme induisent le produit*

$$\chi : H_*(C_*(-f)) \otimes H_*(C_*(f)) \to \mathbb{Z}$$
$$\left[\sum_{p\in Crit(-f)} c_p p_a\right] \otimes \left[\sum_{q\in Crit(f)} d_q q_d\right] \mapsto \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_d|} c_p d_p$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
&\chi\left(\left[\sum_{p\in Crit(-f)} c_p p_a\right] \otimes \left[\sum_{q\in Crit(f)} d_q q_d\right]\right)\\
&= ev \circ (\pi_* \otimes id_*) \circ (\nu_* \otimes id_*)\left(\left[\sum_{p\in Crit(-f)} c_p p_a\right] \otimes \left[\sum_{q\in Crit(f)} d_q q_d\right]\right)\\
&= ev \circ (\pi_* \otimes id_*)\left(\left[\sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_a|} c_p p^d\right] \otimes \left[\sum_{q\in Crit(f)} d_q q_d\right]\right)\\
&= ev\left(\left[\sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_a|}(-1)^{m(m-|p_d|)} c_p p^d\right] \otimes \left[\sum_{q\in Crit(f)} (-1)^{m\,|q_d|} d_q q_d\right]\right)\\
&= \sum_{\substack{p\in Crit(f)\\ q\in Crit(f)}} (-1)^{|p_d|+m\,|p_d|+m\,|q_d|} c_p\, d_q\, \delta_{pq}\\
&= \sum_{p\in Crit(f)} (-1)^{|p_d|} c_p d_p.
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.3.3. *Soit* $\{b_i = [c_i]\}$ *une base de* $H_*(C_*(f))$*, et* $\{\overline{b_i}\}$ *sa base duale par rapport au produit* χ*, c'est-à-dire* $\chi(\overline{b_i} \otimes b_j) = \delta_{ij}$ *. Alors*

$$\left[\sum_{p\in Crit(f)} p_a \otimes p_d\right] \overset{K}{\mapsto} \sum_i (-1)^{|b_i|}\, \overline{b_i} \otimes b_i\ .$$

Démonstration. Par le corollaire 4.2.5 et la proposition 4.3.1, nous avons

$$
\begin{aligned}
& K\left[\sum_{p\in Crit(f)} p_a \otimes p_d\right] \\
&= (\nu_*^{-1}\otimes id_*)\circ(\pi_*^{-1}\otimes id_*)\circ K\circ(\pi\otimes id)_*\circ(\nu\otimes id)_*\left[\sum_{p\in Crit(f)} p_a\otimes p_d\right] \\
&= (\nu_*^{-1}\otimes id_*)\circ(\pi_*^{-1}\otimes id_*)\left(\sum_i (-1)^{|c_i|}[c^i]\otimes[c_i]\right) \\
&= (\nu_*^{-1}\otimes id_*)\left(\sum_i (-1)^{|c_i|}(-1)^{m|c_i|}(-1)^{m(m-|c_i|)}[c^i]\otimes[c_i]\right) \\
&= \sum_i (-1)^{|c_i|+m}(-1)^{m-|c_i|}\left[\sum_{p\in Crit(f)} c^i(p_d)p_a\right]\otimes[c_i] \\
&= \sum_i \left[\sum_{p\in Crit_{|c_i|}(f)} c^i(p_d)p_a\right]\otimes[c_i]\ .
\end{aligned}
$$

Soit $c_j = \sum_{q\in Crit(f)} d_{j,q}\, q_d$.

$$
\begin{aligned}
& \chi\left(\left[\sum_{p\in Crit_{|c_i|}(f)} c^i(p_d)p_a\right]\otimes[c_j]\right) \\
&= \chi\left(\left[\sum_{p\in Crit_{|c_i|}(f)} c^i(p_d)p_a\right]\otimes\left[\sum_{q\in Crit_{|c_j|}(f)} d_{j,q}q_d\right]\right) \\
&= \sum_{p\in Crit_{|c_i|}(f)} (-1)^{|p_d|}c^i(p_d)\, d_{j,p} \quad \text{et 0 si } |c_i|\neq|c_j| \\
&= (-1)^{|c_i|}c^i\left(\sum_{p\in Crit_{|c_j|}(f)} d_{j,p}p_d\right) \\
&= (-1)^{|c_i|}c^i(c_j) \\
&= (-1)^{|c_i|}\,\delta_{ij}\ .
\end{aligned}
$$

On en conclut l'égalité $\left[\sum_{p\in Crit_{|c_i|}(f)} c^i(p_d)p_a\right] = (-1)^{|b_i|}\overline{b_i}$, et donc la suivante :

$$
K\left[\sum_{p\in Crit(f)} p_a\otimes p_d\right] = \sum_i (-1)^{|b_i|}\,\overline{b_i}\otimes b_i\ .
$$

□

Nous avons ainsi obtenu une décomposition de Kunneth de la diagonale en homologie de Morse.

Chapitre 5

PRODUIT D'INTERSECTION

Dans ce chapitre, nous exprimons en homologie singulière la décomposition trouvée au chapitre précédent.

Proposition 5.0.4. *Le diagramme d'isomorphismes suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc}
H_*(S_*(M\times M)) & \xrightarrow{\theta_*} & H_*(S_*(M)\otimes S_*(M)) & \xrightarrow{K} & H_*(S_*(M))\otimes H_*(S_*(M)) \\
\downarrow{\scriptstyle A_{-f\oplus f*}} & & \downarrow{\scriptstyle (A_{-f}\otimes A_f)_*} & & \downarrow{\scriptstyle A_{-f*}\otimes A_{f*}} \\
H_*(C_*(-f\oplus f)) & \xrightarrow{\Phi_*^{-1}} & H_*(C_*(-f)\otimes C_*(f)) & \xrightarrow{K} & H_*(C_*(-f))\otimes H_*(C_*(f))
\end{array}$$

Démonstration. Le carré de gauche commute par 2.2.9 ; celui de droite, par la naturalité de l'isomorphisme de Kunneth. □

Posons $I = \chi\circ(A_{-f*}\otimes A_{f*}) : H_*(S_*(M))\otimes H_*(S_*(M)) \to \mathbb{Z}$ le produit induit en homologie singulière.

Proposition 5.0.5. *Soit $\{B_i\}$ une base de $H_*(M)$, et $\{\overline{B_i}\}$ sa base duale par rapport au produit I, c'est-à-dire $I(\overline{B_i}\otimes B_j) = \delta_{ij}$. Alors*

$$K\circ\theta_*(\Delta) = \sum_i (-1)^{|B_i|}\,\overline{B_i}\otimes B_i \,.$$

Démonstration. Par 5.0.4 et 4.3.3, on a

$$\begin{aligned} K \circ \theta_*(\Delta) &= (A_{-f*}^{-1} \otimes A_{f*}^{-1}) \circ K \circ \Phi_*^{-1} \circ A_{-f \oplus f*}(\Delta) \\ &= (D_{-f*} \otimes D_{f*}) \left(\sum_i (-1)^{|b_i|} \overline{b_i} \otimes b_i \right) \\ &= \sum_i (-1)^{|b_i|} D_{-f*}(\overline{b_i}) \otimes D_{f*}(b_i) \\ &= \sum_i (-1)^{|B_i|} \overline{B_i} \otimes B_i \,. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle de la définition du produit I. □

Notation. *(1) Pour V, W des sous-variétés transverses de M, on note $\#(V, W)$ leur nombre d'intersection, compté avec la convention que pour $x \in V \cap W$, $(\mathcal{O}_x(V), \mathcal{O}_x(W))$ est égal à $sg(x)\mathcal{O}_x(M)$. L'inégalité $dim(V) + dim(W) \neq dim(M)$ implique alors $\#(V, W) = 0$.*

(2) Pour $\sigma, \tau \in H_*(M)$, on note $\#(\sigma, \tau)$ leur nombre d'intersection, défini de façon analogue, en comptant la multiplicité des points d'intersection. Ici aussi, $|\sigma| + |\tau| \neq dim(M)$ implique $\#(\sigma, \tau) = 0$.

Proposition 5.0.6. *Pour $\sigma, \tau \in H_*(M)$, I est lié au nombre d'intersection par la relation $I(\sigma \otimes \tau) = (-1)^{|\tau|} \#(\sigma, \tau)$.*

Démonstration. Lorsque $|\sigma| + |\tau| \neq dim(M)$, on a $I(\sigma \otimes \tau) = \#(\sigma, \tau) = 0$.
Soit $\sigma \in H_{m-k}(M)$ et $\tau \in H_k(M)$.

$$\begin{aligned} I(\sigma \otimes \tau) &= \chi \left(\sum_{p \in Crit_{m-k}(-f)} c_p \, p_a \otimes \sum_{q \in Crit_k(f)} d_q \, q_d \right) \\ &= \sum_{p \in Crit_k(f)} (-1)^k c_p d_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#(\sigma, \tau) &= \# \left(D_{-f} \circ A_{-f}(\sigma), D_f \circ A_f(\tau) \right) \\ &= \# \left(\sum_{p \in Crit_{m-k}(-f)} c_p \, p_A \, , \sum_{q \in Crit_k(f)} d_q \, q_D \right) \\ &= \sum_{p \in Crit_k(f)} c_p d_p \end{aligned}$$

En effet, lorsque p est différent de q, $p_A \cap q_D$ est vide ; de plus, $p_A \cap p_D = \{p\}$. Par les conventions 2.1.2 et 1.1.3, on a $(\mathcal{O}_p(p_A), \mathcal{O}_p(p_D)) = \mathcal{O}_p(M)$, donc on donne à p le signe $+1$. On en déduit l'égalité

$$I(\sigma \otimes \tau) = (-1)^{|\tau|} \#(\sigma, \tau).$$

$\square$

Corollaire 5.0.7. *Soit $\{b_i\}$ une base de $H_*(M)$, et $\{\overline{b_i}\}$ sa base duale par rapport au nombre d'intersection, c'est-à-dire $\#(\overline{b_i}, b_j) = \delta_{ij}$. Alors on a*

$$K \circ \theta_*(\Delta) = \sum_i \overline{b_i} \otimes b_i .$$

Corollaire 5.0.8. *Avec la même notation, on a*

$$\Delta = \sum_i \overline{b_i} \times b_i .$$

Or, le nombre d'intersection défini précédemment est un cas particulier de la forme d'intersection, en dimensions complémentaires. Celle-ci est définie comme duale du produit cup, c'est-à-dire

$$\bullet : H_i(M) \otimes H_j(M) \to H_{i+j-m}(M)$$

$$a \bullet b = D^{-1}\,(D(b) \cup D(a))$$

où $D : H_i(M) \to H^{m-i}(M)$ est l'inverse de l'isomorphisme de Poincaré défini par $\alpha \mapsto \alpha \cap [M]$. Pour plus de détails, consulter [**B**], chapitre 6.11.

Ainsi, en utilisant l'identification canonique $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$, on peut formuler le résultat de la façon suivante.

Théorème 5.0.9. *Soit $\{b_i\}$ une base de $H_*(M)$, et $\{\overline{b_i}\}$ sa base duale par rapport à la forme d'intersection, c'est-à-dire $\overline{b_i} \bullet b_j = \delta_{ij}$. Alors la diagonale admet la décomposition*

$$\Delta = \sum_i \overline{b_i} \times b_i .$$

CONCLUSION

Tel que souhaité, nous avons trouvé une décomposition de Kunneth de la diagonale au théorème 5.0.9. Toutefois, l'énoncé du résultat n'est pas nouveau ; on peut se référer par exemple à [**MS**], chapitre 11. La contribution originale de cet ouvrage est d'en donner une nouvelle preuve, qui consiste à utiliser la théorie de Morse pour obtenir un objet singulier (sous-variété par morceaux) comme limite d'objets lisses (le graphe de φ_t). Nous avons aussi donné une nouvelle preuve de la naturalité du produit en homologie de Morse, à la proposition 2.2.9. Finalement, nous avons explicité en 4.1.4 un lemme algébrique connu et simple, mais jamais détaillé dans la littérature.

Pourquoi décomposer la diagonale

L'utilité d'une décomposition de la diagonale provient du fait qu'elle fournit une décomposition pour les graphes de fonctions.

Proposition. *Soit $f : M \to N$ une fonction continue, et $\Delta_M = \sum_i a_i \times b_i$ une décomposition de Kunneth de la diagonale de M. Alors le graphe de f admet la décomposition*

$$[gr(f)] = \sum_i a_i \times f_*(b_i) \in H_m(M \times N).$$

DÉMONSTRATION.

$$
\begin{aligned}
[gr(f)] &= (id_M, f)_*[M] \\
&= (id_M \times f)_* \, d_*[M] \\
&= (id_M \times f)_*(\Delta_M) \\
&= (id_M \times f)_* \left(\sum_i a_i \times b_i \right) \\
&= \sum_i a_i \times f_*(b_i) \, .
\end{aligned}
$$

□

GÉNÉRALISATION AVEC TORSION

Dans ce travail, nous avons étudié le cas où $H_*(M)$ est libre, ou sinon le cas de l'homologie à coefficients dans un corps. Il serait préférable de s'affranchir de cette hypothèse, et étudier les cas satisfaisant $T_*(H_*(M)) \neq 0$. Pour ce faire, remarquons que les propositions 3.1.1 et 4.2.2 sont encore valables. Par contre, la proposition 4.2.3 devrait être modifiée, puisque les morphismes en question ne sont plus des isomorphismes.

BIBLIOGRAPHIE

[BH] A. Banyaga, D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Springer, 2004.

[BC] J.-F. Barraud, O. Cornea, *Homotopical dynamics in symplectic topology*, Preprint, Spring 2005, ArXiv : math.SG/0506355.

[BC_2] J.-F. Barraud, O. Cornea, *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence*, Submitted, ArXiv : math.DG/0401094.

[B] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, corrected third printing, 1997.

[HL] R. Harvey, H.B. Lawson Jr., *Finite volume flows and Morse theory*, Annals of Mathematics, 153 (2001), 1-25.

[H] M. Hutchings, *Lecture notes on Morse homology*, http ://math.berkeley.edu/~hutching, 2002.

[MS] J. Milnor, J.D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, 1974.

[S] M. Schwarz, *Morse Homology*, Progress in Mathematics, vol. 111, Birkhäuser, Basel, 1993.

[W] J. Weber, *The Morse-Witten complex via dynamical systems*, Preprint, University of Munich, November 2004, ArXiv : math.SG/0506355.