Université de Montréal

Chirurgie de Dehn et la conjecture propriété P

par

Etienne Ayotte-Sauvé

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

mai 2005

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Chirurgie de Dehn et la conjecture propriété P

présenté par

Etienne Ayotte-Sauvé

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octavian Cornea
(président-rapporteur)

Steven Boyer
(directeur de recherche)

Marlène Frigon
(co-directeur)

Olivier Collin
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
10-05-05

RÉSUMÉ

Ce mémoire est une étude de la conjecture propriété P. Celle-ci affirme qu'un contre-exemple à la conjecture de Poincaré ne peut pas être obtenu à l'aide d'une chirurgie de Dehn le long d'un *noeud* dans la 3-sphère S^3. Il suit des travaux de Thurston que les noeuds dans S^3 se divisent en trois familles mutuellement disjointes. Il s'agit des noeuds toriques, des noeuds satellites et des noeuds hyperboliques. Nous limiterons notre étude de la propriété P aux noeuds toriques et aux noeuds satellites (voir les chapitres 2 et 3 respectivement).

À l'aide des propriétés de base du groupe fondamental, on montre que les noeuds toriques satisfont la propriété P. L'approche utilisée pour traiter le cas des noeuds satellites est attribuée à Litherland (voir [**L1**] et [**L2**]). On montre d'abord que les noeuds satellites ayant un nombre de rotation supérieur ou égal à 3 vérifient la propriété P. Lorsque le nombre de rotation du noeud satellite considéré est strictement inférieur à 3, on montre qu'il existe un nombre fini de pentes de chirurgie pour lesquelles il est possible d'obtenir une variété simplement connexe. Nous terminons en soulignant les grandes lignes de la preuve de Gordon et Luecke (voir [**GLu1**]) du fait que la 3-sphère peut être obtenue par une chirurgie de Dehn le long d'un noeud non-trivial seulement lorsque la pente de chirurgie est triviale (voir chapitre 4). Mentionnons qu'en 2004, Kronheimer et Mrowka (voir [**KM**]) ont démontré la conjecture propriété P pour tous les noeuds.

L'étude de la propriété P pour les noeuds satellites ayant au moins 2 pour nombre de rotation est effectuée en exprimant les signatures d'un entrelacs dans une 3-sphère homologique en termes des signatures de la forme d'intersection d'un revêtement ramifié. Le cas des noeuds satellites ayant 0 ou 1 pour nombre de rotation est traité à l'aide de méthodes combinatoires reliées aux graphes

d'intersection entre deux surfaces. Ces méthodes sont ensuite généralisées pour étudier les chirurgies de Dehn donnant la 3-sphère au chapitre 4. Les notions de base reliées à la chirurgie de Dehn son introduites au chapitre 1.

MOTS CLÉS

Théorie des noeuds, chirurgie de Dehn, conjecture de Poincaré, conjecture propriété P, problème du complément, revêtements ramifiés, signatures, graphes d'intersection.

ABSTRACT

This thesis is a study of the property P conjecture, which states that a counter-example to the Poincaré conjecture cannot be obtained by a Dehn surgery on a *knot* in the 3-sphere S^3. It follows from Thurston's work that knots in S^3 divide into three mutually disjoint families. These are the torus knots, the satellite knots and the hyperbolic knots. We will limit our study of property P to torus knots and satellite knots (see chapters 2 and 3 respectively).

With the help of basic properties of the fundamental group, we show that torus knots satisfy property P. The methods used in the study of satellite knots are attributed to Litherland (see [**L1**] and [**L2**]). We first show that satellite knots with winding number at least 3 have property P. For satellite knots having winding number less than 3, we show that there is only a finite number of surgery slopes for which one may obtain a simply connected manifold. We end with a survey of the proof of Gordon and Luecke (see [**GLu1**]) that the 3-sphere can be obtained by a Dehn surgery along a non-trivial knot only when the surgery slope considered is trivial (see chapter 4). Note that in 2004, Kronheimer and Mrowka (see [**KM**]) have shown that all knots have property P.

The study of property P for satellite knots having winding number at least 2 is done using an interpretation of the signatures of a link in a homology 3-sphere in terms of the signatures of the intersection form of a branched cover. The case of satellite knots having winding number 0 or 1 is treated with the help of combinatorial methods linked to the study of intersection graphs between two surfaces. These methods are generalized in chapter 4 to study Dehn surgeries that yield the 3-sphere. The notion of Dehn surgery and its basic properties are introduced in chapter 1.

KEY WORDS

Knot theory, Dehn surgery, Poincaré conjecture, property P conjecture, knot complement problem, branched coverings, signatures, intersection graphs.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

REMERCIEMENTS

Merci à Steven Boyer, pour avoir été le directeur idéal pour moi, tant par sa patience que par sa générosité.

Merci à Marlène Frigon, pour avoir bien voulu jouer le rôle de codirecteur administratif et avoir ainsi simplifié beaucoup mes démarches.

Merci à Baptiste Chantraine, Gabriel Chênevert et Rémi Leclercq pour avoir lu certaines parties de ce mémoire. Vos commentaires m'ont été précieux et votre amitié l'est encore plus.

Merci à Gabriel Indurskis, Julie Picard et Stephan Tillmann pour m'avoir aidé avec les figures. Un merci bien spécial à Julie Picard, pour m'avoir initié à *XFig* et avoir consacré beaucoup de son temps à m'aider.

Merci à Émilie Duhem pour avoir toujours été là pour moi. Tu as changé ma vie.

Merci à Daniel Audet, Nicolas Beauchemin, Hugues Boulanger, Baptiste Chantraine, Gabriel Chênevert, Etienne Dauphin, Jérôme Fournier, Alexandre Girouard, Clément Hyvrier, Kristel Job Barrieu, Rémi Leclercq, Sébastien Manka, Julie Picard, Jean-Francois Renaud, Olivier Rousseau, Anik Soulière et Dimitri Zuchowski. Grâce à vous, je garderai toujours un bon souvenir de mes années passées à l'Université de Montréal.

Merci à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements.

INTRODUCTION

La conjecture de Poincaré est l'un des problèmes les plus importants dans l'étude des 3-variétés. Elle donne un critère permettant de distinguer une 3-variété fermée, connexe et orientable de la 3-sphère S^3. Plus précisément, elle affirme que toute 3-variété fermée, connexe et simplement connexe doit être homéomorphe à S^3. En considérant le problème de la classification des 3-variétés du point de vue des scindements de Heegaard, Lickorish (voir [**Li1**]) a démontré que toute 3-variété fermée, connexe et orientable peut être obtenue par chirurgie de Dehn le long d'un entrelacs dans S^3. Notons que ce résultat a été démontré indépendamment par Wallace (voir [**Wa**]). L'opération de chirurgie de Dehn le long d'un entrelacs L contenu dans S^3 s'effectue en deux étapes. On retire d'abord de S^3 l'intérieur d'un voisinage tubulaire $V \cong L \times D^2$ de L dans S^3 pour obtenir *l'extérieur* de L, où D^2 est le disque unité dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On attache ensuite à $S^3 \setminus int(V)$ une copie de $L \times D^2$ à l'aide d'un homéomorphisme $L \times \partial D^2 \xrightarrow{\cong} \partial V$ (voir chapitre 1).

Il suit du théorème de Lickorish que s'il existe un contre-exemple à la conjecture de Poincaré, alors celui-ci peut être obtenu par chirurgie de Dehn le long d'un *entrelacs* dans S^3. Il est donc naturel de considérer les variétés simplement connexes obtenues par chirurgie de Dehn le long d'un *noeud* dans S^3. C'est ainsi que Bing et Martin et Gonzales-Acuña ont formulé indépendamment la conjecture propriété P, qui affirme que toute chirurgie non-triviale le long d'un noeud non-trivial dans S^3 produit une 3-variété qui n'est pas simplement connexe (voir chapitre 2).

Il suit des travaux de Thurston qu'un noeud dans S^3 doit être soit un noeud torique, soit un noeud satellite ou soit un noeud hyperbolique et que ces trois familles de noeuds sont mutuellement disjointes. Un noeud torique est un noeud isotope à un noeud contenu dans un tore non-noué plongé dans S^3. Un noeud satellite est un noeud K dont l'extérieur admet un tore essentiel, c'est-à-dire dire qu'il existe un voisinage tubulaire V de K dans S^3 et un tore T plongé dans $S^3 \setminus int(V)$ pour lequel l'homomorphisme $\pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(S^3 \setminus int(V))$ induit par l'inclusion est injectif et tel que T n'est pas isotope à ∂V dans $S^3 \setminus int(V)$. Les noeuds hyperboliques sont ceux dont l'extérieur admet une métrique hyperbolique (voir chapitre 1). On peut donc tenter d'étudier la propriété P en considérant chacune de ces classes de noeuds. Cependant, le cas des noeuds hyperboliques ne sera pas traité.

Il s'avère que la propriété P pour les noeuds toriques découle du théorème de Van Kampen. Plus précisément, on obtient une présentation du groupe fondamental de l'extérieur d'un noeud torique non-trivial dans S^3. On en déduit ensuite une présentation du groupe fondamental d'une 3-variété résultant d'une chirurgie de Dehn le long du noeud considéré. Il s'agit ensuite de montrer que pour une chirurgie de Dehn non-triviale, le groupe fondamental de la 3-variété obtenue se surjecte sur un groupe non-trivial (plus précisément sur un groupe triangulaire, voir chapitre 2).

Le cas des noeuds satellites s'avère plus difficile à traiter. Une décomposition de l'extérieur d'un noeud satellite donnant une "bonne" présentation de son groupe fondamental (c'est-à-dire une présentation faisant intervenir les paramètres de chirurgie) n'est en général, pas aussi claire que pour les noeuds toriques. Lorsque le noeud satellite considéré a un nombre de rotation supérieur ou égal à 2, le problème est ramené à l'étude des signatures d'un entrelacs dans une 3-sphère homologique, c'est-à-dire une 3-variété fermée ayant les mêmes groupes d'homologie que S^3. Plus précisément, si K est un noeud dans une 3-sphère homologique M et que L est un entrelacs dans $M \setminus K$, alors L se plonge naturellement dans toute 3-variété obtenue par chirurgie dans M le long de K. Si W est une 3-sphère homologique obtenue par chirurgie dans M le long de K, alors la fonction de signature de L dans W est définie. Le but est alors d'obtenir une bonne approximation de la différence entre la valeur de la fonction de signature de L dans M

et dans W. Cette approximation est obtenue en interprétant les signatures de L en termes de signatures de la forme d'intersection d'un revêtement ramifié (voir chapitre 3). Pour le cas des noeuds satellites ayant 0 ou 1 pour nombre de rotation, on utilise des techniques reliées à l'étude des graphes d'intersection entre deux surfaces (voir chapitre 3).

En supposant que la conjecture de Poincaré est vraie, la conjecture propriété P affirme alors que seule la chirurgie triviale le long d'un noeud non-trivial dans S^3 donne la 3-sphère (à homéomorphisme près). Gordon et Luecke ont démontré (voir [**GLu1**]) qu'un noeud dans S^3 est déterminé (à isotopie près) par la classe d'homéomorphisme de son complément dans S^3. Pour ce faire, ils ont démontré que seule la chirurgie triviale le long d'un noeud non-trivial dans S^3 donne la 3-sphère. Le chapitre 4 contient la preuve de Gordon et Luecke, en laissant de côté certains arguments combinatoires. La démarche utilisée est d'abord de supposer qu'il existe un noeud non-trivial K admettant une chirurgie non-triviale donnant S^3. On compare ensuite les graphes d'intersection associés à deux surfaces contenues dans deux copies de S^3. Ces copies correspondent respectivement à la chirurgie triviale le long de K et à une chirurgie non-triviale le long de K donnant S^3. À l'aide de la théorie de Cerf (voir [**Ce2**]), on choisit ces surfaces de manière à ce que les graphes associés ne contiennent pas de boucles triviales. Par un argument combinatoire, les graphes considérés doivent contenir des sous-graphes distingués dont l'existence entraîne que le groupe abélien $H_1(S^3)$ a son sous-groupe de torsion non-trivial, ce qui est absurde. On conclut que seule la chirurgie triviale le long de K peut donner S^3.

Mentionnons qu'en 2004, Kronheimer et Mrowka (voir [**KM**]) ont démontré la conjecture propriété P pour tous les noeuds en utilisant des outils liés à la théorie de jauge, à la géométrie symplectique, à la géométrie de contact et aux feuilletages.

Nous terminons cette introduction en résumant la structure du mémoire. Au chapitre 1, nous présentons les éléments de la théorie des noeuds et les propriétés de base de la chirurgie de Dehn nécessaires pour aborder le problème de la propriété P. Plutôt que de considérer la théorie des noeuds classiques dans S^3, nous étudions les propriétés des noeuds dans une 3-sphère homologique. Malgré qu'il s'agisse d'une généralisation directe du cas classique dans S^3, nous ne connaissons pas de référence traitant des noeuds dans une 3-sphère homologique. La présentation du sujet est en grande partie inspirée des textes de Rolfsen et Lickorish (voir [**Rol**] et [**Li2**]).

Le chapitre 2 introduit la conjecture propriété P et son lien avec le problème du complément. De plus, on y démontre que tout noeud torique non-trivial vérifie la propriété P. Les idées présentées sont en majeure partie tirées du livre de Burde et Zieschang (voir [**Bu**]).

Le chapitre 3 est une étude de la propriété P pour les noeuds satellites. La démarche utilisée est due à Litherland (voir [**L1**] et [**L2**]). Ce chapitre contient une généralisation de la construction de Kauffman (voir [**K2**]) des revêtements ramifiés au cas des couples $m-$spéciaux (voir proposition 3.2.26) pour laquelle nous ne connaissons pas de référence. À l'aide des suggestions de Steven Boyer, nous proposons une preuve du théorème 3.2.43 différente de celle suggérée par Litherland dans [**L1**].

Le chapitre 4 contient un résumé de la preuve de Gordon et Luecke (voir [**GLu1**]) du fait que seule la chirurgie triviale le long d'un noeud non-trivial dans S^3 produit la 3-sphère.

Chapitre 1

CHIRURGIE DE DEHN

Ce chapitre a pour but d'introduire la notion de chirurgie de Dehn le long d'un entrelacs dans une 3-variété. Pour ce faire, la première section présente les résultats nécessaires de la théorie des noeuds. Ce n'est qu'à la deuxième section que la chirurgie de Dehn et ses propriétés élémentaires sont exposées. Les preuves de plusieurs faits (par exemple, l'existence de *diagrammes planaires* pour les *noeuds dociles*) ont été omises. Toutefois, celles-ci sont contenues dans les livres de Rolfsen [**Rol**] et Lickorish [**Li2**].

1.1. Introduction à la théorie des noeuds

1.1.1. Définitions et notation

Nous noterons $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n, D^n le disque unité centré à l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et S^n la sphère unité centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. L'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$ sera noté I. Nous supposerons que $\mathbb{R}^n$ est contenu dans $\mathbb{R}^{n+1}$ via l'inclusion naturelle $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Selon le contexte, $\cong$ désignera un isomorphisme, un homéomorphisme ou un difféomorphisme et $\simeq$ désignera une équivalence d'homotopie.

Définition 1.1.1. *Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble L de X (muni de la topologie induite) admettant la décomposition en composantes connexes par arcs $L = L_1 \cup \cdots \cup L_k$ est un* entrelacs *si chaque composante L_i de L est homéomorphe à une sphère S^{n_i}. Un entrelacs à une composante $(k = 1)$ est appelé un* noeud.

Nous ne considérerons que les entrelacs dits *classiques*, c'est-à-dire pour lesquels $n_1 = \cdots = n_k = 1$. Ils seront étudiés à *isotopie* ou *équivalence* près (voir les définitions suivantes).

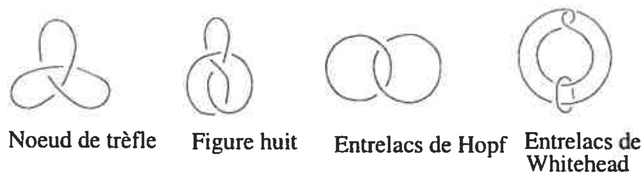


FIG. 1.1. Exemples de noeuds et d'entrelacs.

Définition 1.1.2. *Deux entrelacs $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ et $L' = L'_1 \cup \cdots \cup L'_m$ dans un espace topologique X sont dits* équivalents, *noté $L \sim L'$, si $n = m$ et s'il existe un homéomorphisme $f : X \xrightarrow{\cong} X$, tel que $f(L_i) = L'_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. La classe d'équivalence d'un entrelacs est appellée le* type *de cet entrelacs.*

Un noeud $K \subset X$ est dit *trivial* s'il existe $D \subset X$ tel que $D \cong D^2$ et $\partial D = K$.

Définition 1.1.3. *Deux homéomorphismes $f, g : X \xrightarrow{\cong} X$ sont dits* isotopes *s'il existe une fonction continue $H : X \times I \longrightarrow X$ satisfaisant :*

(1) H_t est un homéomorphisme, $\forall t \in I$;

(2) $H_0 = f$ et $H_1 = g$,

où $H_t : X \longrightarrow X : x \mapsto H(x, t), \forall t \in I$. Dans ce cas, on dit que la fonction H est une isotopie *entre f et g.*

Définition 1.1.4. *Deux entrelacs $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ et $L' = L'_1 \cup \cdots \cup L'_m$ dans un espace topologique X sont dits* isotopes *si $n = m$ et s'il existe un homéomorphisme $f : X \xrightarrow{\cong} X$ isotope à l'identité tel que $f(L_i) = L'_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Considérons le cas où X est la 3-sphère S^3 munie d'une orientation quelconque. Un homéomorphisme $f : S^3 \xrightarrow{\cong} S^3$ isotope à l'identité induit l'identité en homologie et préserve donc l'orientation de S^3. Remarquons que la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'un homéomorphisme de la 3-sphère dans elle-même préservant l'orientation est isotope à l'identité (voir **[Ce1]**). Par conséquent, deux noeuds J et K dans S^3 sont isotopes si et seulement s'il existe un homéomorphisme $f : S^3 \xrightarrow{\cong} S^3$ préservant l'orientation et pour lequel $f(J) = K$.

Pour éliminer certaines pathologies liées à la catégorie topologique, nous ne considérerons que les entrelacs dits "dociles."

Définition 1.1.5. *Soit L un entrelacs dans une n-variété lisse M. On dit que L est* docile *s'il existe un entrelacs L', qui est une sous-variété lisse de M, pour lequel il existe un difféomorphisme $M \xrightarrow{\cong} M$ envoyant L sur L'. On dit que L est* sauvage *si L n'est pas docile.*

En particulier, si L est docile et que M^3 est orientable, alors un voisinage tubulaire de L dans M est un D^2-fibré trivial sur L. En effet, à isomorphisme près il n'y a que deux D^2-fibrés sur S^1 : le fibré trivial et un fibré non-orientable. Le fait que M soit orientable entraîne qu'un voisinage tubulaire de L dans M doit être trivial.

1.1.2. Diagrammes planaires

Un entrelacs dans $\mathbb{R}^3$ est habituellement représenté par un dessin correspondant à une projection orthogonale de l'entrelacs dans un plan donné avec de l'information additionnelle à chaque croisement précisant quel brin passe au dessus et quel brin passe en dessous.

Définition 1.1.6. *Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs, $P \subset \mathbb{R}^3$ un plan et $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P$ la projection orthogonale. On dit que π est* régulière *par rapport à L si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $|\pi^{-1}(x) \cap L| = 0, 1$ *ou* 2, $\forall x \in P$;

(2) pour chaque point $x \in P$ tel que $|\pi^{-1}(x) \cap L| = 2$, la condition suivante est vérifiée :

il existe des voisinages U_1 et U_2 de x_1 et x_2 (respectivement) dans L, où $\{x_1, x_2\} = \pi^{-1}(x) \cap L$, pour lesquels la restriction de π à U_i est un plongement (pour $i = 1,\ 2$) et $\pi(U_1)$ est transverse à $\pi(U_2)$ dans P.

Le fait suivant justifie la restriction aux entrelacs dociles dans $\mathbb{R}^3$ (voir la section 3.E dans [**Rol**]).

Proposition 1.1.7. *Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs docile, $P \subset \mathbb{R}^3$ un plan et $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P$ la projection orthogonale. Alors L est isotope à un entrelacs L' pour lequel π est régulière.*

1.1.3. Trichotomie de Thurston

Dans cette section, nous définissons trois familles importantes de noeuds dans S^3. Il s'agit des noeuds toriques, satellites et hyperboliques. Il s'avère, par les travaux de Thurston, que ces trois classes forment une partition de l'ensemble des noeuds dans S^3.

Définition 1.1.8. *Un espace topologique V est un* tore solide *si $V \cong S^1 \times D^2$. Dans ce cas,* l'âme *de V est la courbe simple fermée $c \subset V$ correspondant à $S^1 \times \{0\}$. Un tore solide $V \subset X$ est dit* standard *si son âme est un noeud trivial dans X.*

Définition 1.1.9. *Un noeud $K \subset S^3$ est dit* torique *s'il existe un tore solide standard $V \subset S^3$ tel que $K \subset \partial V$.*

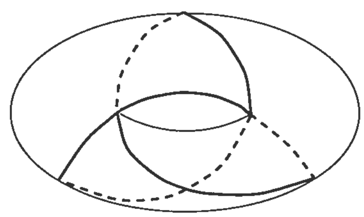


FIG. 1.2. Le noeud de trèfle est un noeud torique.

Définition 1.1.10. *Soit $V \subset S^3$ un tore solide standard et $K \subset int(V)$ un noeud qui n'est pas isotope (dans V) à l'âme de V et qui ne peut être contenu dans une 3-boule (lisse plongée) dans $int(V)$, où $int(V)$ désigne l'intérieur de V. Soit $J \subset S^3$ un noeud non-trivial et $V' \cong S^1 \times D^2$ un voisinage tubulaire de J dans S^3. Fixons un homéomorphisme $f : V \xrightarrow{\cong} V'$ et notons $K' = f(K)$. On dit que J est* compagnon *de K' et que K' est* satellite *de J.*

Définition 1.1.11. *Un noeud $K \subset S^3$ est dit* hyperbolique *si son complément $S^3 \setminus K$ peut être muni d'une métrique riemannienne complète de volume fini et de courbure sectionnelle -1.*

Théorème 1.1.12. *(Thurston) Un noeud (docile) dans S^3 est soit un noeud torique, soit un noeud satellite ou soit un noeud hyperbolique. De plus, ces trois familles sont deux à deux disjointes.*

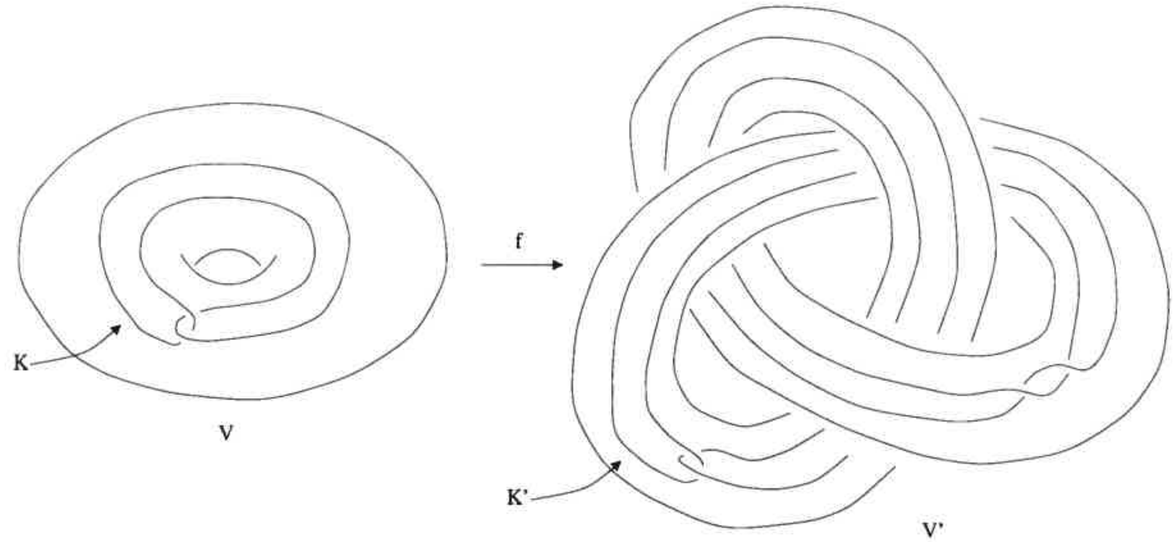


FIG. 1.3. Un noeud satellite.

Les deux prochains chapitres seront consacrés à l'étude de la propriété P pour les noeuds toriques et les noeuds satellites. Le cas des noeuds hyperboliques ne sera pas traité. La prochaine section présente quelques propriétés des courbes simples fermées dans $S^1 \times S^1$ qui seront utiles pour paramétriser les chirurgies le long d'un noeud dans S^3 (ou plus généralement, dans une 3-sphère homologique).

1.1.4. Courbes sur le tore

Avant de considérer les courbes simples fermées sur le tore, introduisons une terminologie utile.

Définition 1.1.13. *Soit M une variété lisse (possiblement avec bord) et N une sous-variété de M. On dit que N est* proprement plongée *dans M si N intersecte transversalement ∂M et $N \cap \partial M = \partial N$.*

Définition 1.1.14. *Soit M^m une variété lisse et N^n une sous-variété compacte, connexe, orientée et proprement plongée dans M. Notons $i : N \longrightarrow M$ l'inclusion. Si $\partial N = \emptyset$, on définit alors $[N]_M = i_*([N]) \in H_n(M)$ où $[N]$ est la classe fondamentale de N. Si $\partial N \neq \emptyset$, on définit alors $[N, \partial N]_M = i_*([N, \partial N]) \in H_n(M, \partial M)$ où $[N, \partial N]$ est la classe fondamentale de N.*

Remarquons que dans le cas où M est sans bord, N est proprement plongée dans M si et seulement si N est sans bord.

Tout au long de cette section, T désignera un tore, c'est-à-dire un espace homéomorphe à $S^1 \times S^1$. Soit K un noeud orienté dans T. On note $H_1(T)/\{\pm 1\}$ l'ensemble des paires $\pm\xi$ où $\xi \in H_1(T)$. On définit alors $C_K = \pm[K]_T \in H_1(T)/\{\pm 1\}$. Puisque deux orientations de K ne diffèrent que par un signe, C_K est bien défini. Soit m et l les noeuds dans $T \cong S^1 \times S^1$ correspondant à $S^1 \times \{1\}$ et $\{1\} \times S^1$ respectivement. Orientons m et l et notons $\mu = [m]_T$ et $\lambda = [l]_T$. Rappelons que $\{\mu, \lambda\}$ est une base de $H_1(T)$.

La proposition suivante caractérise les classes dans $H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ pouvant être représentées par un noeud orienté (voir le théorème C.2 du chapitre 2 dans **[Rol]** pour une preuve).

Proposition 1.1.15. *Soit $\xi = a\mu + b\lambda \in H_1(T)$ où a, $b \in \mathbb{Z}$. Alors, il existe un noeud K dans T tel que $C_K = \pm\xi$ si et seulement si $\xi = 0$ ou $pgcd(a, b) = 1$.*

Remarque 1.1.16. *Soit K un noeud orienté dans T pour lequel C_K est non-nul. Notons $[K]_T = a\mu + b\lambda$, où $pgcd(a, b) = 1$ (par la proposition précédente). Puisque a et b sont relativement premiers, il existe des entiers p et q pour lesquels $qa - pb = 1$. La matrice suivante appartient alors à $SL_2(\mathbb{Z})$:*

$$\begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\{\alpha, \beta\}$ est une base de $H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, où $\alpha = [K]_T$ et $\beta = p\mu + q\lambda$. On voit donc qu'un noeud orienté dans T qui n'est pas nul-homologue (dans T) représente une classe d'homologie faisant partie d'une base de $H_1(T)$.

Considérons maintenant les classes d'isotopie de noeuds sur un tore. Soit K et K' deux noeuds orientés isotopes dans T et h un homéomorphisme de T isotope à l'identité pour lequel $h(K) = K'$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H_1(T) \arrow[r, "h_*=1"] & H_1(T) \\ H_1(K) \arrow[u] \arrow[r, "h_*", "\cong"'] & H_1(K') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions. On en déduit que $[K]_T$ est égal à signe près à $[K']_T$, c'est-à-dire que C_K est égal à $C_{K'}$. La réciproque est vraie, c'est-à-dire deux noeuds orientés homologues dans T sont isotopes (voir le théorème C.16 du chapitre 2 dans [**Rol**] pour une preuve). On a donc :

Proposition 1.1.17. *Soit K et K' deux noeuds dans T. Alors, K et K' sont isotopes dans T si et seulement si $C_K = C_{K'}$.*

Considérons maintenant les noeuds sur le tore $T \cong S^1 \times S^1$ à équivalence près. Dans la définition suivante, le cercle S^1 est vu comme sous-ensemble du plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.18. *L'homéomorphisme $h_m : T \xrightarrow{\cong} T : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 z_2, z_2)$ est appellé* twist méridionnel. *On appelle* twist longitudinal *l'homéomorphisme h_l : $T \xrightarrow{\cong} T : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_1 z_2)$.*

Notons que h_m et h_l induisent des isomorphismes de $H_1(T)$ ayant pour matrices (dans la base $\{\mu, \lambda\}$) :

$$(h_m)_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (h_l)_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.19. *Un noeud K dans T est dit* inessentiel *(dans T) si K borde un disque dans T. Le noeud K est dit* essentiel *(dans T) dans le cas contraire.*

Par définition, un noeud équivalent à un noeud inessentiel est inessentiel. Par conséquent, un noeud essentiel et un noeud inessentiel ne sont pas de même type. Il s'avère que la propriété de border un disque dans T caractérise un noeud dans T à équivalence près. La proposition suivante est démontrée à la section C.15 du chapitre 2 dans [**Rol**].

Proposition 1.1.20. *Soit J et K deux noeuds dans T. Alors, J et K sont équivalents si et seulement si à la fois J et K sont essentiels ou à la fois J et K sont inessentiels. De plus, si J et K sont essentiels, alors il existe un homéomorphisme $(T, J) \xrightarrow{\cong} (T, K)$ isotope à une composition finie de twists longitudinaux et méridionnels.*

Les faits suivants sont des conséquences immédiates des propositions 1.1.17 et 1.1.20.

Corollaire 1.1.21. *Soit K un noeud essentiel dans T. Alors, le complément de K dans T est homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que le noeud m correspond à $S^1 \times \{1\}$ dans $T \cong S^1 \times S^1$. Puisque les noeuds m et K sont essentiels dans T, la proposition 1.1.20 nous donne un homéomorphisme $h : T \xrightarrow{\cong} T$ envoyant K sur m. Les compléments $T \setminus K$ et $T \setminus m$ sont donc homéomorphes. Or, $T \setminus m$ est homéomorphe à $S^1 \times (S^1 \setminus \{1\}) \cong S^1 \times \mathbb{R}$.

□

Corollaire 1.1.22. *Soit J et K deux noeuds essentiels et disjoints dans T. Alors J et K sont isotopes dans T. De plus, il existe un anneau $A \cong S^1 \times I$ dans T tel que $\partial A = J \cup K$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que m désigne la courbe $S^1 \times \{1\}$ dans T et que l désigne la courbe $\{1\} \times S^1$. Orientons T, m et l de manière à ce que le nombre d'intersection $m \cdot l$ dans T soit $+1$. Orientons J et K et notons $[J]_T = a\mu + b\lambda$ et $[K]_T = c\mu + d\lambda$ où μ est représentée par m et λ est représentée par l. En utilisant que $\mu \cdot \lambda = 1$ et $\mu \cdot \mu = \lambda \cdot \lambda = 0$, on obtient que le nombre d'intersection (algébrique) $[J] \cdot [K]$ est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Puisque J et m sont essentiels, il existe un homéomorphisme $f : T \xrightarrow{\cong} T$ envoyant J sur m. Notons K' l'image de K par f. Les noeuds J et K étant disjoints, ils suit que m et K' le sont aussi. Par conséquent, le nombre d'intersection $m \cdot K'$ est nul. Puisque K et K' sont équivalents et que K est essentiel, K' est aussi essentiel. Le fait que K' est essentiel et que $\mu \cdot [K']$ est nul entraînent que K' est homologue à signe près à m dans T. Par la proposition 1.1.17, m et K' sont isotopes dans T. En précomposant cette isotopie avec f^{-1} on obtient une isotopie entre J et K.

Considérons le revêtement $p : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow T$ défini par $p(e^{i\theta}, t) = (e^{i\theta}, e^{it})$. Ce revêtement réalise le sous-groupe $\mathbb{Z} \times \{0\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \equiv \pi_1(T)$ engendré par la classe d'homotopie représentée par m. Par définition, les noeuds m et K' se relèvent par rapport à p en des noeuds dans $S^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\tilde{m}$ et $\tilde{K}$ des relèvements de m et K' respectivement. Rappelons qu'un noeud dans $\mathbb{R}^2$ sépare $\mathbb{R}^2$ en deux composantes, l'une bornée et l'autre non-bornée. Puisque $\tilde{m}$ et $\tilde{K}$ sont disjoints et ne sont pas nuls-homotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il suit que soit $\tilde{m}$ est contenu dans la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{K}$ ou soit $\tilde{K}$ est contenu dans la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{m}$. Par le théorème de Schönflies (voir [**Rol**]), il existe un anneau $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ avec $\partial\tilde{A} = \tilde{m} \cup \tilde{K}$.

On peut choisir $\tilde{m}$ et $\tilde{K}$ de manière à ce que $int(\tilde{A})$ ne contienne pas de relèvements de m et K'. Dans ce cas, $\tilde{A}$ sera contenu dans un domaine fondamental pour l'action du groupe d'automorphismes du revêtement $Aut(p) \cong \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Par conséquent, la restriction $p| : \tilde{A} \longrightarrow T$ est un plongement et $A = p(\tilde{A})$ est un anneau dans T avec $\partial A = m \cup K'$. L'anneau cherché est alors $f^{-1}(A)$.

$\square$

1.1.5. Méridiens et longitudes

Dans cette section nous définissons deux classes d'isotopie distinguées de noeuds sur le bord d'un tore solide plongé dans une *3-sphère homologique* (voir la définition plus loin). Ces classes d'isotopie seront utiles pour paramétrer (à homéomorphisme près) les variétés obtenues par chirurgie de Dehn le long d'un entrelacs dans une 3-sphère homologique.

Définition 1.1.23. *Un noeud essentiel m dans le bord d'un tore solide V est appelé* méridien *de V (ou méridien de l'âme K de V) si m est nul-homologue dans V.*

Supposons sans perdre de généralité que $V = S^1 \times D^2$ et notons μ (respectivement λ) la classe de $H_1(\partial V)$ représentée par le noeud $\{1\} \times \partial D^2$ (respectivement $S^1 \times \{1\}$) muni d'une orientation quelconque. Si m est un méridien orienté de V, alors $[m]_{\partial V} = a\mu + b\lambda \in H_1(\partial V)$, où $pgcd(a, b) = 1$, car m est essentiel. Rappelons que $H_1(V) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par la classe représentée par le noeud orienté $S^1 \times \{1\}$. De plus, le noeud $\{1\} \times \partial D^2$ borde un disque dans V et est donc nul-homologue dans V. Puisque m est nul-homologue dans V, $b = 0$ et par conséquent $a = \pm 1$. On a donc que $[m]_{\partial V} = \pm\mu$. Il suit donc que deux méridiens de V sont isotopes dans ∂V.

Proposition 1.1.24. *Soit m un noeud essentiel dans le bord d'un tore solide V. Alors, m est un méridien de V si et seulement si m borde un disque (lisse) proprement plongé dans V.*

Démonstration. Le fait qu'un méridien de V borde un disque proprement plongé dans V découle du fait que deux méridiens de V sont isotopes dans ∂V, qu'une telle isotopie peut être prolongée sur V et qu'il existe un méridien de V bordant un disque proprement plongé dans V.

Mentionnons toutefois la propriété géométrique suivante des 3-variétés avec bord. Pour une démonstration, voir **[Rol]** corollaire A.2, chapitre 4.

Lemme 1.1.25. *(Dehn) Soit M une 3-variété avec bord et $c \subset \partial M$ une courbe simple fermée nulle-homotope dans M. Alors, c borde un disque proprement plongé dans M.*

Le fait qu'un méridien de V borde un disque proprement plongé dans V est donc aussi une conséquence du lemme de Dehn (et du fait que $\pi_1(V)$ est abélien). Réciproquement, si m est une courbe simple fermée essentielle dans ∂V bordant un disque dans V, alors m est nulle-homologue dans V et est donc un méridien de V.

□

Définition 1.1.26. *Soit l un noeud dans le bord d'un tore solide V. On dit que l est une* longitude *de V (ou une longitude de l'âme K de V) si l représente un générateur de $H_1(V)$.*

On remarque que contrairement aux méridiens de V, il existe une infinité de classes d'isotopie de longitudes dans ∂V. Supposons comme précédemment que $V = S^1 \times D^2$ et notons μ (respectivement λ) la classe de $H_1(\partial V)$ représentée par le noeud $\{1\} \times \partial D^2$ (respectivement $S^1 \times \{1\}$) muni d'une orientation quelconque. Si l est une longitude orientée de V, alors il existe un entier n pour lequel $[l]_{\partial V} = n\mu \pm \lambda$, car l représente un générateur de $H_1(V)$. De plus, pour un entier n', la classe $n'\mu \pm \lambda \in H_1(\partial V)$ est représentée par un noeud dans ∂V (car $pgcd(n', \pm 1) = 1$) et ce noeud représente un générateur de $H_1(V)$. Il y a donc une bijection (bien définie) entre l'ensemble des classes d'isotopie (dans ∂V) de longitudes de V et l'ensemble $\{\pm(k\mu+\epsilon\lambda)|k \in \mathbb{Z},\ \epsilon \in \{\pm 1\}\ \} \subset H_1(\partial V)/\{\pm 1\}$. Remarquons aussi que les classes de $H_1(\partial V)$ représentées respectivement par un méridien et une longitude (orientés) quelconques forment une base de $H_1(\partial V)$.

La proposition suivante caractérise les homéomorphismes de ∂V dans lui-même pouvant se prolonger en un homéomorphisme de V (voir la section E du chapitre 2 dans [**Rol**]).

Proposition 1.1.27. *Soit V un tore solide et $f : \partial V \xrightarrow{\cong} \partial V$ un homéomorphisme. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) La fonction f se prolonge en un homéomorphisme de V.

(2) Pour tout méridien m de V, $f(m)$ est aussi un méridien de V.

Il suit de cette proposition qu'une longitude et l'âme d'un tore solide V co-bordent un anneau contenu dans V.

Corollaire 1.1.28. *Soit K l'âme du tore solide V et l une longitude de V. Alors, il existe un anneau A dans V tel que $\partial A = K \cup l$.*

DÉMONSTRATION. Par définition, $V \cong S^1 \times D^2$ et I est inclus naturellement dans D^2. Considérons l'anneau $A_0 \subset V$ correspondant à $S^1 \times I \subset S^1 \times D^2$. Notons que ∂A_0 se décompose en $K \cup l_0$, où l_0 est le noeud sur $\partial V \cong S^1 \times S^1$ correspondant à $S^1 \times \{1\}$. Orientons l_0 et K. Remarquons que l_0 est une longitude de V. On alors l'égalité suivante :

$$[l_0]_{\partial V} = a\mu + b\lambda \in H_1(\partial V),$$

où μ est représentée par un méridien orienté de V, λ est représentée par la longitude l munie d'une orientation quelconque et b est ± 1. Sans perdre de généralité (quitte à réorienter l) supposons que b est 1. Un twist méridionnel de ∂V, noté h_m, se prolonge sur V (même formule). On a alors l'égalité

$$(h_m)_*^{-a}([l_0]_{\partial V}) = \lambda.$$

Il existe alors un homéomorphisme $f : \partial V \xrightarrow{\cong} \partial V$ isotope à l'identité qui envoie $h_m^{-a}(l_0)$ sur l. Puisque f est isotope à l'identité de ∂V, f envoie un méridien de V sur un méridien de V et se prolonge alors en un homéomorphisme $(V, K) \xrightarrow{\cong} (V, K)$. Ainsi l'anneau $A = f \circ h_m^{-a}(A_0)$ a pour bord $K \cup l$.

□

À partir de maintenant, nous nous intéresserons aux longitudes et méridiens de noeuds contenus dans une 3-sphère homologique.

Définition 1.1.29. *Soit M^n une variété fermée et R un anneau commutatif unitaire. On dit que M est une* n-sphère R-homologique *si $H_*(M;R) \cong H_*(S^n;R)$.*

Nous nous intéresserons principalement aux 3-sphères homologiques ($R = \mathbb{Z}$). Remarquons que si M^3 est connexe, fermée et orientable, alors $H_*(M) \cong H_*(S^3)$ si et seulement si $H_1(M) = 0$, par dualité de Poincaré.

Définition 1.1.30. *Soit M une 3-sphère homologique, $L \subset M$ un entrelacs et $V \cong L \times D^2$ un voisinage tubulaire de L dans M. On appelle l'*extérieur *de L, noté $E(L)$, la variété $M \setminus int(V)$.*

Remarquons qu'à homéomorphisme près, $E(L)$ ne dépend pas du choix du voisinage tubulaire V. De plus, l'extérieur d'un entrelacs L est une 3-variété connexe avec bord $\partial E(L) = E(L) \cap V = \partial V$. Le fait que l'inclusion de ∂D^2 dans $D^2 \setminus \{0\}$ soit une équivalence d'homotopie entraîne que $E(L)$ et $M \setminus L$ ont le même type d'homotopie.

Proposition 1.1.31. *Soit M une 3-sphère homologique et $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n \subset M$ un entrelacs. Alors,*

$$H_q(E(L)) \cong \begin{cases} 0, & si\ q \geq 3, \\ \oplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}, & si\ q = 2, \\ \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}, & si\ q = 1. \end{cases}$$

De plus, $H_1(E(L)) \cong \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$ a pour base $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ où μ_i est la classe représentée par un méridien orienté de L_i.

Démonstration. Par la dualité de Poincaré-Lefschetz, $H_3(E(L))$ est isomorphe à $H^0(E(L), \partial E(L)) = 0$. La variété M se décompose en $E(L) \cup V$, où V est un voisinage tubulaire de L dans M. Puisque V a le même type d'homotopie que L, on a que $H_2(V) = H_3(V) = 0$. Le théorème de Mayer-Vietoris et le fait que

$H_2(M) = 0$ nous donnent la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_3(M) \xrightarrow{\Delta} H_2(\partial V) \longrightarrow H_2(E(L)) \longrightarrow 0.$$

Orientons la variété M. On a que $H_3(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que $H_2(\partial V)$ est isomorphe à $\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$. De plus, l'image par Δ de la classe fondamentale de M est la somme des classes fondamentales des composantes de ∂V, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $\Delta(1) = (1, \ldots, 1)$. Il suit que $H_2(E(L))$ est isomorphe au quotient de $\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$ par le sous-groupe engendré par $(1, \ldots, 1)$. Par conséquent, $H_2(E(L))$ est libre (sur $\mathbb{Z}$) et de rang $n-1$.

Puisque $H_1(M) = H_2(M) = 0$, le théorème de Mayer-Vietoris donne un isomorphisme $\phi : H_1(\partial V) \xrightarrow{\cong} H_1(E(L)) \oplus H_1(V)$. Le fait que $H_1(\partial V)$ et $H_1(V)$ soient libres de rang $2n$ et n respectivement entraîne que $H_1(E(L))$ est libre de rang n. Fixons pour chaque i un méridien orienté m_i de L_i. Il reste à voir que les $\mu_i = [m_i]_{E(L)}$ forment une base de $H_1(E(L))$. Puisque pour tout i la courbe m_i borde un disque dans V, on a l'égalité

$$\phi([m_i]_{\partial V}) = (\mu_i, 0).$$

Fixons pour chaque i une longitude orientée l_i de L_i. Par définition, on a que la classe $[l_i]_V$ dans $H_1(V) \cong \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$ a toutes ses coordonnées nulles sauf la $i-$ième, qui est 1. En d'autres termes, on a l'égalité

$$\phi([l_i]_{\partial V}) = (\lambda_i, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$$

où $\lambda_i = [l_i]_{E(L)}$, pour tout i.

Puisque ϕ est un isomorphisme, l'union de $\{\phi([m_i]_{\partial V})\}_{i=1}^{n}$ et de $\{\phi([l_j]_{\partial V})\}_{j=1}^{n}$ forme une base de $H_1(E(L)) \oplus H_1(V)$. En particulier les μ_i sont linéairement indépendants dans $H_1(E(L))$. Il suit des deux égalités précédentes que les μ_i engendrent $H_1(E(L))$.

$\square$

La proposition suivante nous permettra d'associer canoniquement à un noeud K une longitude de K (à isotopie de $\partial E(K)$ près).

Proposition 1.1.32. *Soit K un noeud dans M, une 3-sphère homologique. Alors, il existe une unique longitude orientée de K (à isotopie de $\partial E(K)$ près) qui est nulle-homologue dans $E(K)$.*

DÉMONSTRATION. Comme précédemment, on a $M = E(K) \cup V$, où V est un voisinage tubulaire de K dans M. Puisque $H_1(M) = H_2(M) = 0$, le théorème de Mayer-Vietoris donne un isomorphisme $\phi : H_1(\partial V) \xrightarrow{\cong} H_1(E(K)) \oplus H_1(V)$. Soit m un méridien orienté de K et l une longitude orientée de K. Par la proposition précédente, $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par la classe $[m]_{E(K)}$. Par définition, $H_1(V) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par $[l]_V$. On a les égalités suivantes

$$\begin{cases} \phi([l]_{\partial V}) & = (n[m]_{E(K)}, [l]_V) \\ \phi([m]_{\partial V}) & = ([m]_{E(K)}, 0) \end{cases}$$

où n est un entier. Par conséquent, l'image par ϕ de la classe $[l]_{\partial V} - n[m]_{\partial V}$ est $(0, [l]_V)$. Puisque $(0, [l]_V)$ appartient à une base de $H_1(E(K)) \oplus H_1(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et que ϕ est un isomorphisme, il suit que $[l]_{\partial V} - n[m]_{\partial V}$ appartient à une base de $H_1(\partial V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ainsi la classe $[l]_{\partial V} - n[m]_{\partial V}$ est représentée par un noeud orienté l' dans ∂V. Puisque $\phi([l']_{\partial V})$ est $(0, [l]_V)$, la courbe l' est la longitude cherchée. Il reste à voir que l' est unique à isotopie de ∂V près. Si l'' est une longitude de K nulle-homologue dans $E(K)$, alors $\phi([l'']_{\partial V}) = \pm(0, [l]_V)$. Le fait que ϕ soit un isomorphisme implique que l' et l'' sont homologues à signe près dans ∂V (et donc isotopes dans ∂V).

□

Nous appellerons une longitude de K qui est nulle-homologue dans l'extérieur de K une *longitude canonique* de K, puisqu'elle est unique à isotopie dans $\partial E(K)$ près.

Définition 1.1.33. *Soit J et K deux noeuds orientés et disjoints dans une 3-sphère homologique M. Le* nombre d'enlacement *de J et K dans M, noté $lk_M(J, K)$, est l'entier n pour lequel on a l'égalité $[J]_{M \setminus K} = n\mu_K \in H_1(M \setminus K) \cong \mathbb{Z}$, où μ_K est la classe représentée par un méridien orienté de K.*

Remarquons que le nombre d'enlacement dépend de l'isomorphisme $H_1(M \setminus K) \cong \mathbb{Z}$, qui lui dépend de l'orientation d'un méridien de K. Le nombre d'enlacement est donc défini à signe près. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté de signe, on fixe une orientation sur M. Cette orientation induit une orientation du voisinage tubulaire V de K dans M et on prend alors un disque méridionnel D dans V intersectant le noeud K transversalement en un seul point de signe $+1$, c'est-à-dire tel que le nombre d'intersection $K \cdot D$ dans V soit $+1$. L'orientation de M induit donc une orientation du méridien ∂D de K, ce qui permet de fixer un générateur de $H_1(M \setminus K)$ canoniquement. On voit aussi que, par définition, une longitude

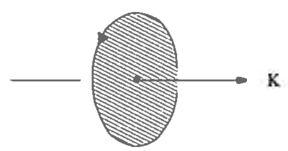


FIG. 1.4. Convention de signe pour le nombre d'enlacement.

canonique l d'un noeud K dans une 3-sphère homologique M est caractérisée parmis toutes les longitudes de K par l'égalité $lk_M(l, K) = 0$. De plus, pour un entrelacs orienté $L = J \sqcup K$ dans la sphère $M = S^3$ orientée selon la règle de la "main droite," on peut définir le nombre d'enlacement $lk(J, K)$ à l'aide d'un diagramme planaire de L. On associe à chaque croisement x, pour lequel J passe en-dessous de K, un signe ϵ_x à l'aide de la règle de la main droite. Le nombre d'enlacement $lk(J, K)$ est alors défini par $lk(J, K) = \sum_x \epsilon_x$. Cette définition et la définition homologique de lk dans S^3 coïncident (voir **[Rol]** chapitre 5, section D).

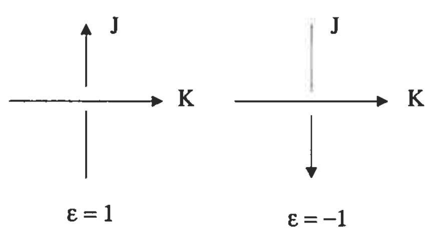


FIG. 1.5. Nombre d'enlacement dans S^3.

1.1.6. Surfaces de Seifert

Un entrelacs dans une 3-sphère homologique est nul-homologue. Cette section a pour but de montrer qu'un tel entrelacs borde une surface (lisse) compacte, orientable et connexe plongée dans la 3-sphère homologique considérée.

Définition 1.1.34. *Soit L un entrelacs orienté dans une 3-sphère homologique M. Une surface lisse compacte, orientée et connexe F plongée dans M est appelée* surface de Seifert *de L (dans M) si $\partial F = L$ et l'orientation induite sur ∂F par F coïncide avec celle de L.*

Théorème 1.1.35. *Soit $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ un entrelacs orienté dans une 3-sphère homologique M. Alors, il existe une surface de Seifert pour L dans M.*

DÉMONSTRATION. Par la dualité de Poincaré-Lefschetz et le théorème des coefficients universels en cohomologie, on a les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} H_2(E(L), \partial E(L)) &\cong H^1(E(L)) \\ &\cong Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(E(L)), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Puisque M est une 3-sphère homologique, $H_1(E(L))$ a pour base $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, où μ_i est la classe représentée par un méridien orienté m_i de L_i ayant son nombre d'enlacement avec L_i égal à 1. Considérons l'homomorphisme $f : H_1(E(L)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ défini par $f(\mu_i) = 1$, pour tout i. Orientons S^1 et identifions ainsi $H_1(S^1)$ avec $\mathbb{Z}$. Le lemme suivant nous assure l'existence d'une fonction continue $g : E(L) \longrightarrow S^1$ induisant f en homologie, c'est-à-dire telle que $g_* = f$.

Lemme 1.1.36. *Soit X un complexe CW fini et connexe par arcs. Alors, pour toute classe $\xi \in H^1(X)$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow S^1$ telle que $g^*(u) = \xi$, où $u \in H^1(S^1)$ est un générateur.*

DÉMONSTRATION. Voir le théorème 7.14 dans le livre de Whitehead [**W**].

□

On peut supposer sans perdre de généralité que la fonction $g : E(L) \longrightarrow S^1$ est lisse et transverse à $\{1\}$, c'est-à-dire que 1 est une valeur régulière de f.

Par conséquent, la surface $F_0 = g^{-1}(1)$ est compacte, orientable et proprement plongée dans $E(L)$. Par définition de F_0, on a que le dual de Poincaré de la classe fondamentale $[F_0, \partial F_0] \in H_2(E(L), \partial E(L))$, noté $D[F_0, \partial F_0]$, est $g_* \in H^1(E(L))$, c'est-à-dire on a l'égalité $g_* \cap [E(L), \partial E(L)] = [F_0, \partial F_0]$. Puisque $F_0 \cap m_i = \partial F_0 \cap m_i$, on a l'égalité $[\partial F_0] \cdot \mu_i = [F_0, \partial F_0] \cdot \mu_i$. Pour chaque i, on obtient alors,

$$\begin{aligned}
[\partial F_0] \cdot \mu_i &= [F_0, \partial F_0] \cdot \mu_i \\
&=< D[F_0, \partial F_0] \cup D\mu_i, [E(L), \partial E(L)] > \\
&=< g_* \cup D\mu_i, [E(L), \partial E(L)] > \\
&=< g_*, D\mu_i \cap [E(L), \partial E(L)] > \\
&=< g_*, \mu_i > \\
&= g_*(\mu_i) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

où $D\mu_i$ est définie par $D\mu_i \cap [E(L), \partial E(L)] = \mu_i$.

Soit $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ un voisinage tubulaire de L dans M, où le tore solide V_i est un voisinage tubulaire de L_i dans M et les V_i sont deux à deux disjoints. L'intersection $F_0 \cap V_i$ est une union de composantes de ∂F_0 dans ∂V_i. On peut éliminer chaque courbe de $F_0 \cap V_i$ qui est inessentielle dans ∂V_i. En effet, une composante de $F_0 \cap V_i$ qui est inessentielle dans ∂V_i borde un disque dans ∂V_i. Puisque $F_0 \cap V_i$ a un nombre fini de composantes, on choisit une composante C qui est inessentielle dans ∂V_i et qui est minimale, c'est-à-dire telle que le disque $D \subset \partial V_i$ dont le bord est C vérifie $int(D) \cap F_0 = \emptyset$.

Soit $N(D) \cong D \times I$ un voisinage tubulaire de D dans M tel que $N(D) \cap \partial V_i = D$. On élimine le cercle C en coupant F_0 le long de D, c'est-à-dire on considère maintenant la surface $F_1 = F_0 \setminus (C \times I) \cup D \times \partial I$. On a que $F_1 \cap V_i$ est égal à $(F_0 \cap V_i) \setminus C$. On peut répéter le procédé jusqu'à ce que la surface obtenue intersecte chaque V_i seulement en des courbes essentielles dans ∂V_i. Supposons donc sans perdre de généralité que pour tout i l'intersection $F_0 \cap V_i$ est une union de courbes essentielles dans ∂V_i.

Rappelons que deux courbes simples fermées essentielles et disjointes dans un tore cobordent un anneau dans ce tore. Fixons un indice i et notons la décomposition en composantes connexes de $F_0 \cap V_i$ par $C_1 \cup \ldots \cup C_m$, où les C_j sont numérotés de manière à ce que pour tout j il existe un anneau A_j dans ∂V_i dont le bord est $C_j \cup C_{j+1}$ tel que $int(A_j) \cap F_0 = \emptyset$. Supposons que le nombre de composantes m de $F_0 \cap V_i$ est au moins 2. Notons C_0 la courbe C_{j_0} pour un indice j_0 fixé. On a alors que C_j est homologue (à signe près) à C_0 dans ∂V_i, pour tout j. Posons, pour chaque j,

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{si } C_j \text{ est homologue à } C_0 \text{ dans } \partial V_i, \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors l'égalité $C_j \cdot m_i = \epsilon_j C \cdot m_i$, pour tout j. Il suit que

$$\begin{aligned} 1 &= \partial F_0 \cdot m_i \\ &= \sum_j C_j \cdot m_i \\ &= \sum_j \epsilon_j C_0 \cdot m_i. \end{aligned}$$

Par conséquent, $C_0 \cdot m_i$ est ± 1 et donc $C_j \cdot m_i$ est ± 1, pour tout j. On a alors que les C_j sont des longitudes de L_i. Puisque $\partial F_0 \cdot m_i$ est 1, il existe un j pour lequel $\epsilon_j = -\epsilon_{j+1}$, car sinon m serait 1. Soit $N(A_j) \cong A \times I$ un voisinage tubulaire de A_j dans M tel que $N(A_j) \cap \partial V_i = A_j$. Considérons la surface $F_0 \setminus (\partial A \times I) \cup A \times \partial I$. Cette surface intersecte ∂V_i en $(F_0 \cap \partial V_i) \setminus (C_j \cup C_{j+1})$. Puisqu'on a éliminé deux courbes C_j et C_{j+1} d'orientations opposées dans ∂V_i, la surface obtenue est orientable et son nombre d'intersection avec m_i est $F_0 \cdot m_i = 1$. On peut donc répéter l'argument pour obtenir une surface compacte, orientée et proprement plongée dans $E(L)$ dont l'intersection avec V_i a pour unique composante la longitude C_0. En procédant de la même manière pour chaque V_i on obtient une surface S compacte, orientée et proprement plongée dans $E(L)$ telle que $S \cap V_i$ est une longitude l_i de L_i, pour tout i. On sait qu'il existe un anneau $B_i \cong S^1 \times I$ dans V_i ayant pour bord $L_i \cup l_i$. On pose alors $F = S \cup \cup_{i=1}^{n} B_i$. Par construction, le bord de F est L.

Puisque nous cherchons une surface connexe dont le bord est l'entrelacs L, nous ne nous intéressons qu'aux composantes de F ayant un bord. On peut donc supposer sans perdre de généralité que toutes les composantes de F ont un bord (quitte à éliminer les composantes fermées). On a alors que $M \setminus F$ est connexe par arcs.

On peut relier l'intérieur de deux composantes de F par un tube $S^1 \times I$. Plus précisément, soit F_1 et F_2 deux composantes distinctes de F, x_1 et x_2 des points dans $int(F_1)$ et $int(F_2)$ respectivement. Soit $c \cong I$ un arc (lisse) dans M reliant x_1 à x_2 tel que $int(c)$ et F sont disjoints. On prend alors un voisinage tubulaire $T \cong c \times D^2$ de c dans M intersectant F en deux disques $\partial c \times D^2$ contenus dans $int(F_1) \sqcup int(F_2)$. On attache alors à $F_1 \sqcup F_2$ le tube $c \times \partial D^2$ pour obtenir $(F_1 \sqcup F_2) \setminus (\partial c \times D^2) \cup c \times \partial D^2$. On peut choisir l'arc c de manière à ce que l'orientation induite sur $\partial\Sigma = \partial F_1 \cup \partial F_2$ par la surface Σ obtenue en attachant le tube $c \times \partial D^2$ coïncide avec l'orientation de $\partial F_1 \cup \partial F_2$. Puisque cette opération n'affecte pas le bord de F, on obtient une surface de Seifert pour L en répétant le procédé jusqu'à ce qu'on obtienne une surface connexe.

$\square$

Mentionnons que pour le cas particulier où M est la sphère S^3, on peut construire une surface de Seifert pour un entrelacs donné à partir d'un diagramme planaire de cet entrelacs (voir l'algorithme de Seifert dans [**Rol**], chapitre 5, section A.4). On remarque qu'il existe des surfaces de Seifert de genre arbitrairement grand pour un entrelacs donné (en attachant des "tubes"). Intéressons-nous maintenant au lien entre deux surfaces de Seifert pour un entrelacs donné.

Définition 1.1.37. *Soit F et F' deux surfaces compactes, connexes, orientables avec bord dans une 3-sphère homologique M. On dit que F' est obtenue de F par* 1-chirurgie *s'il existe des disques disjoints D_1 et D_2 dans $int(F)$ et un tube $T \cong S^1 \times I$ dans M avec bord $\partial D_1 \cup \partial D_2$ et tel que $int(T)$ et F sont disjoints pour lesquels $F' = F \setminus (int(D_1) \cup int(D_2)) \cup T$.*

L'opération inverse à la 1-chirugie est appelée *0-chirurgie.*

Définition 1.1.38. *Soit F et F' deux surfaces compactes, connexes, orientables avec bord dans une 3-sphère homologique M. On dit que F' est obtenue de F*

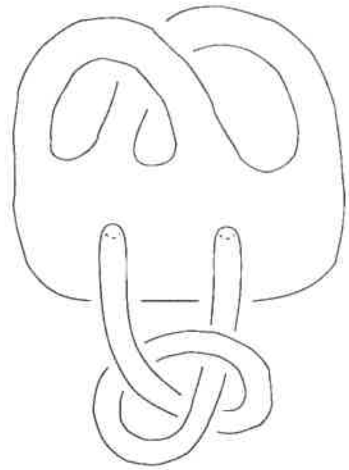


FIG. 1.6. Une 1−chirurgie le long d'une surface.

par 0-chirurgie *s'il existe une courbe simple fermée c dans F bordant un disque D dans M tel que l'intersection* $D \cap F = \partial D$ *est transverse pour lesquels* $F' = F \setminus (c \times I) \cup D \times \partial I$, *où* $D \times I$ *est un voisinage tubulaire de D dans M.*

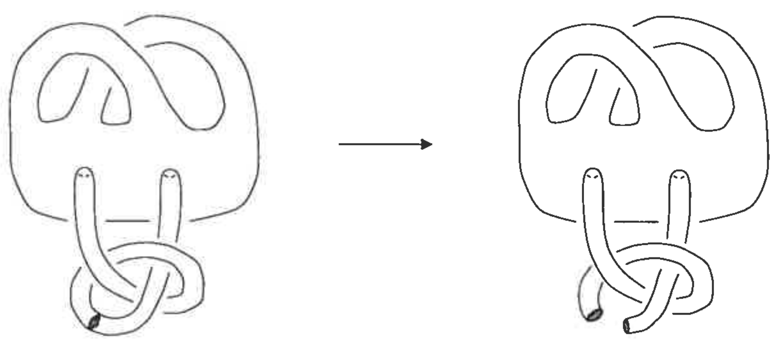


FIG. 1.7. Une 0−chirurgie le long d'une surface.

Définition 1.1.39. *Soit F et F′ deux surfaces compactes, connexes, orientables avec bord plongées dans une 3-sphère homologique M. On dit que F est* S-équivalente *à F′ si F peut être obtenue à partir de F′ par une composition finie de 0-chirurgies, 1-chirurgies et isotopies ambiantes dans M.*

La théorie de Morse permet de décrire le passage d'une surface de Seifert pour un entrelacs donné à une autre surface de Seifert pour ce même entrelacs. Les points critiques de la transformation obtenue correspondent à des 0-chirurgies et des 1-chirurgies. Pour plus de détails, voir le livre de Kauffmann [**K1**].

Théorème 1.1.40. *Soit L et L' deux entrelacs orientés dans une 3-sphère homologique M et soit F et F' des surfaces de Seifert pour L et L' respectivement. S'il existe une isotopie entre L et L' préservant l'ordre et l'orientation des composantes, alors F et F' sont S-équivalentes.*

Les dernières propositions de cette section traitent du lien entre le nombre d'enlacement de deux noeuds et leurs surfaces de Seifert.

Proposition 1.1.41. *Soit J et K deux noeuds orientés et disjoints dans une 3-sphère homologique M et F une surface de Seifert pour K dans M. Alors, le nombre d'intersection $J \cdot F$ est égal au nombre d'enlacement $lk(J, K)$.*

DÉMONSTRATION. Notons n le nombre d'enlacement $lk(J, K)$. Par définition, J est homologue à nm_K dans $E(K)$, où m_K est un méridien de K convenablement orienté. De plus, la convention de signes utilisée pour définir $lk(\cdot, \cdot)$ a pour conséquence que le nombre d'intersection $m_K \cdot F$ est 1. Le nombre d'intersection géométrique $J \cdot F$ est égal au nombre d'intersection algébrique $[J]_{E(K)} \cdot [F_0, \partial F_0]_{E(K)}$, où $F_0 = F \cap E(K)$. On a donc les égalité suivantes

$$\begin{aligned} J \cdot F &= [J]_{E(K)} \cdot [F_0, \partial F_0]_{E(K)} \\ &= n\, m_K \cdot F \\ &= n. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.42. *Soit M une 3-sphère homologique et N une 4-variété compacte, connexe et orientable dont le bord est M. Soit K_1 et K_2 deux noeuds orientés disjoints dans M et soit F_1 et F_2 deux surfaces compactes, connexes et orientables proprement plongées dans un collet $C \cong M \times I$ de M dans N. Si F_1 et F_2 ont pour bords K_1 et K_2 respectivement, alors on peut orienter F_1 et F_2 de manière à avoir l'égalité suivante*

$$F_1 \cdot F_2 = lk_M(K_1, K_2).$$

Démonstration. Sans perdre de généralité on peut supposer que F_1 et F_2 s'intersectent transversalement dans N. On sait qu'il existe une surface de Seifert S_2 pour K_2 dans M. On oriente F_1 et F_2 de manière à ce que l'orientation induite par F_i sur K_i soit l'orientation de K_i. Le 2-cycle $F_2 - S_2$ associé à la surface fermée (et orientée) $S = F_2 \cup S_2$ représente alors un élément de $H_2(C) \cong H_2(M) = 0$. Il suit que le nombre d'intersection (dans N) $F_1 \cdot S$ est nul. On obtient alors que $F_1 \cdot F_2$ est égal à $F_1 \cdot S_2$. Puisque $F_1 \cap S_2 = \partial F_1 \cap S_2$, on a que le nombre d'intersection $F_1 \cdot S_2$ dans N est égal au nombre d'intersection $K_1 \cdot S_2$ dans M. Par la proposition précédente, $K_1 \cdot S_2 = lk_M(K_1, K_2)$. On a donc les égalités suivantes

$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_2 &= F_1 \cdot S_2 \\ &= K_1 \cdot S_2 \\ &= lk_M(K_1, K_2). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.43. *Le nombre d'enlacement est symétrique, c'est-à-dire que si K_1 et K_2 sont deux noeuds orientés et disjoints dans une 3-sphère homologique M, alors*

$$lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1).$$

Démonstration. On utilise le fait qu'il existe une 4-variété N compacte, connexe et orientable dont le bord est M (voir le corollaire du théorème fondamental de la chirurgie à la section suivante). On prend deux surfaces orientables F_1 et F_2 compactes, connexes et proprement plongées dans un collet de M dans N dont les bords sont K_1 et K_2 respectivement.

On obtient de telles surfaces de la manière suivante. Soit S_1 et S_2 des surfaces de Seifert pour K_1 et K_2 respectivement dans M. Fixons un collet (fermé) $C \cong M \times I$ de M dans N et posons, pour $i = 1, 2$,

$$S_i' = \partial S_i \times [0, \epsilon] \ \cup \ S_i \times \{\epsilon\}$$

où $0 < \epsilon < 1$. On peut isotoper les surfaces S_1' et S_2' dans C (en laissant ∂S_1 et ∂S_2 fixes) de manière à obtenir deux surfaces lisses et transverses F_1 et F_2.

Puisque N est de dimension 4, le nombre d'intersection $F_1 \cdot F_2$ est égal au nombre d'intersection $F_2 \cdot F_1$. La conclusion voulue découle alors de la proposition précédente.

□

1.2. Chirurgie de Dehn

Cette section présente les propriétés de base de la chirurgie de Dehn. Les références principales sont les textes de Lickorish [**Li2**] et Rolfsen [**Rol**] ainsi que le chapitre 4 du livre [**Bo**].

1.2.1. Pentes

Définition 1.2.1. *Soit M une 3-variété compacte, $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ un entrelacs dans $int(M)$ et $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ un voisinage tubulaire de L dans $int(M)$, où V_i est un voisinage tubulaire de L_i, pour tout i. On dit que la 3-variété W est le résultat d'une* chirurgie de Dehn *le long de L dans M s'il existe des homéomorphismes $f_i : \partial V_i \xrightarrow{\cong} \partial V_i$ pour lesquels $W = V \cup_f (M \setminus int(V))$, où $f = \cup_{i=1}^n f_i$.*

On peut s'attendre à ce que la classe d'homéomorphisme de W dépende de l'homéomorphisme d'attachement f.

Proposition 1.2.2. *Soit W et W' deux 3-variétés compactes avec bord et $f, g : \partial W \xrightarrow{\cong} \partial W'$ deux homéomorphismes. Si f est isotope à g, alors $W \cup_f W'$ est homéomorphe à $W \cup_g W'$.*

Démonstration. Voir le lemme 12.2 dans [**Li2**]. □

On peut raffiner le résultat précédent dans le cas de la chirurgie de Dehn.

Proposition 1.2.3. *Soit M une 3-variété compacte, K un noeud dans $int(M)$, V un voisinage tubulaire de K dans $int(M)$ et m_K un méridien orienté de K. Si $f, g : \partial V \xrightarrow{\cong} \partial V$ sont deux homéomorphismes tels que les courbes $f(m_K)$ et $g(m_K)$ sont isotopes dans ∂V, alors $V \cup_f (M \setminus int(V))$ est homéomorphe à $V \cup_g (M \setminus int(V))$.*

DÉMONSTRATION. Puisque les courbes $f(m_K)$ et $g(m_K)$ sont isotopes dans ∂V, il suit qu'elles sont homologues (à signe près) dans ∂V. Par conséquent, l'homéomorphisme $g^{-1} \circ f : \partial V \xrightarrow{\cong} \partial V$ envoie un méridien de K sur un méridien de K. Par la proposition 1.1.27, on peut prolonger $g^{-1} \circ f$ en un homéomorphisme $h : V \xrightarrow{\cong} V$. On obtient ainsi un homéomorphisme de $V \sqcup (M \setminus int(V))$ dans lui-même défini comme étant l'identité sur $M \setminus int(V)$ et h sur V. Par définition de h, cet homéomorphisme induit un homéomorphisme bien défini de $V \cup_f (M \setminus int(V))$ dans $V \cup_g (M \setminus int(V))$.

□

Le résultat précédent se généralise naturellement aux entrelacs.

Définition 1.2.4. *Soit $T \cong S^1 \times S^1$ un tore. Une* pente *de T est la classe d'isotopie d'une courbe simple fermée essentielle dans T.*

Si on fixe une base de $H_1(T)$, alors l'ensemble des pentes de T, noté $P(T)$, est en bijection avec l'ensemble des couples $\pm(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tels que $pgcd(a, b) = 1$. En particulier, $P(T)$ correspond à l'ensemble des droites de pente rationnelle dans $H_1(T; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Ainsi, l'ensemble $P(T)$ est en bijection avec $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ où $\infty = \pm\frac{1}{0}$. Dans le cas où T est le bord d'un voisinage tubulaire d'un noeud dans une 3-sphère homologique, il y a une base canonique de $H_1(T)$.

1.2.2. Paramétrisation des chirurgies

Soit $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ un entrelacs dans une 3-sphère homologique orientée M et $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ un voisinage tubulaire de L dans M où V_i est un voisinage tubulaire de L_i. Fixons une orientation sur L. Pour chaque i, choisissons un méridien m_i de L_i et une longitude canonique l_i de L_i. Orientons les m_i et les l_i de manière à ce que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} lk(m_i, L_i) = 1; \\ l_i \text{ est homologue à } L_i \text{ dans } V_i. \end{cases}$$

Notons μ_i la classe $[m_i]_{\partial V_i}$ et λ_i la classe $[l_i]_{\partial V_i}$. Soit $f : \partial V \xrightarrow{\cong} \partial V$ un homéomorphisme tel que $f(\partial V_i) = \partial V_i$, pour tout i. Pour chaque i, on peut écrire $f_*(\mu_i)$

dans la base $\{\mu_i, \lambda_i\}$ de $H_1(\partial V_i)$. On obtient alors

$$f_*(\mu_i) = \pm(a_i\mu_i + b_i\lambda_i)$$

où $pgcd(a_i, b_i) = 1$ et le signe dépend du choix d'une orientation de la courbe de chirurgie $f(m_i)$. On élimine l'ambiguïté de signe en considérant la pente associée $\frac{a_i}{b_i} \in \mathbb{Q} \cup \{\frac{1}{0}\}$ de ∂V_i. On note alors $V \cup_f (M \backslash int(V))$ par $M(L_1, \ldots, L_n; r_1, \ldots, r_n)$ où $r_i = \frac{a_i}{b_i}$, pour tout i.

Remarquons que cette notation est bien définie seulement si $M(L; r)$ ne dépend pas du choix de l'orientation de L. Changer l'orientation de L change simultanément les orientations des m_i et des l_i (voir les conditions précédentes) et donc les r_i ne changent pas. La notation est donc bien définie. Par contre, changer l'orientation de M renverse l'orientation des m_i (et fait donc changer de signe $lk(\cdot, \cdot)$) et laisse fixe l'orientation des l_i (la convention précédente sur l'orientation des l_i ne dépend que de l'orientation de L). Dans ce cas, les r_i changent tous de signe. C'est pourquoi au départ on suppose que M est munie d'une orientation fixée. Dans le cas où $M = S^3$, on supposera que l'orientation ambiante est donnée par la règle de la main droite. Dans ce cas, on notera $M(L; r)$ par $L(r)$.

1.2.3. Propriétés et exemples

Exemple 1.2.5. *Espaces lenticulaires.*

On veut déterminer $K(\frac{a}{b})$ pour K le noeud trivial dans S^3 et $pgcd(a, b) = 1$. Rappelons qu'une 3-variété M fermée, connexe et orientable est appelée espace lenticulaire *s'il existe un homéomorphisme $f : \partial(S^1 \times D^2) \xrightarrow{\cong} \partial(S^1 \times D^2)$ tel que $M = (S^1 \times D^2) \cup_f (S^1 \times D^2)$. De la même manière que pour les chirurgies dans une 3-sphère homologique, on peut paramétrer l'espace lenticulaire M par $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ où $pgcd(p, q) = 1$, $f_*(\mu) = p\mu + q\lambda$ et μ et λ sont les classes représentées par $\{1\} \times \partial D^2$ et $S^1 \times \{1\}$ respectivement, orientées de manière à avoir $\mu \cdot \lambda = +1$. On note alors M par $L_{\frac{p}{q}}$.*

Puisque $S^3 = \partial D^4$ et que $D^4 \cong D^2 \times D^2$, on obtient que $S^3 = V_1 \cup V_2$, où V_1 et V_2 sont des tores solides standards dans S^3 tels que $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$. De plus, un méridien de V_1 est une longitude canonique de V_2 et une longitude *canonique de* V_1 *est un méridien de* V_2. *La 3-sphère est donc l'espace lenticulaire* L_0.

Il existe une isotopie de S^3 *faisant coincider le noeud trivial* K *avec l'âme de* V_1. *Orientons* K *et fixons* m *un méridien de* K *et* l *une longitude de* K *orientés selon la convention précédente. Notons que* $S^3 \setminus int(V_1)$ *est* V_2. *Par conséquent,* $K(\frac{a}{b})$ *est obtenu de* $V_1 \sqcup V_2$ *en identifiant un méridien de* V_1 *à une courbe simple fermée de pente* $\frac{b}{a}$ *sur* ∂V_2. *On obtient alors que* $K(\frac{a}{b})$ *est homéomorphe à* $L_{\frac{b}{a}}$. *En particulier,*

$$K\left(\frac{a}{b}\right) \cong \begin{cases} S^1 \times S^2, & si\ a = 0, \\ S^3, & si\ \ a = 1. \end{cases}$$

Le cas $a = 1$ *découle du fait qu'on peut voir* $L_{\frac{b}{a}}$ *comme étant le quotient de* $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ *par l'action du groupe* $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, *noté* $\mathbb{Z}/a$, *engendrée par* $\tau : S^3 \xrightarrow{\cong} S^3 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1\rho, z_2\rho^b)$, *où* $\rho = e^{2\pi i/a}$ *(voir* **[Rol]** *chapitre 9, section B). Pour* $a = 1$, $L_{\frac{b}{a}}$ *est* S^3, *car dans ce cas* $\mathbb{Z}/a$ *est le groupe trivial. Puisque l'action de* $\mathbb{Z}/a$ *sur* S^3 *est proprement discontinue et libre, on a* $\pi_1\left(L_{\frac{b}{a}}\right) \cong \mathbb{Z}/a$. *En particulier* $H_1(K(\frac{a}{b}))$ *est* $\mathbb{Z}/a$ *et donc* $K(\frac{a}{b})$ *est une 3-sphère homologique si et seulement si* a *est* ± 1.

Pour le cas où $a = 0$, $K(\frac{a}{b})$ *est obtenu en identifiant un méridien de* $V_1 \cong S^1 \times D^2$ *à un méridien de* $V_2 \cong S^1 \times D^2$. *Pour chaque point* x *dans* S^1, *on identifie le bord du disque* $\{x\} \times D^2$ *dans* V_1 *au bord du disque* $\{x\} \times D^2$ *dans* V_2. *On obtient ainsi un* S^2*-fibré orientable sur* S^1, *il suit que* $K(0)$ *doit être* $S^1 \times S^2$. *Il s'avère que les espaces lenticulaires sont classifiés complètement (voir la section B du chapitre 9 dans* **[Rol]***).*

Proposition 1.2.6. *Si* K *est un noeud dans* M *une 3-sphère homologique et* $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, *alors on a l'isomorphisme suivant*

$$H_1(M(K; r)) \cong \mathbb{Z}/a.$$

Démonstration. On a $M(K; \frac{a}{b}) = E(K) \cup V_r$, où $E(K)$ est l'extérieur de K dans M et V_r est un tore solide tel que $E(K) \cap V_r = \partial E(K) = \partial V_r$ et un méridien de V_r est une courbe de pente $\frac{a}{b}$ dans $\partial E(K)$. Soit D un disque méridionnel dans

V_r, $A \cong D \times I$ un voisinage tubulaire de D dans V_r et B l'adhérence du complément de A dans V_r. Remarquons que A et B sont deux 3-boules s'intersectant en deux disques $D \times \{0,1\}$. De plus A intersecte l'extérieur $E(K)$ en $\partial D \times I$ et B intersecte $E(K) \cup A$ en la sphère ∂B. L'idée est de faire la chirurgie en deux étapes. On attache d'abord A à $E(K)$ le long de $\partial D \times I$ et ensuite on attache B à $E(K) \cup A$ le long de ∂B. Le théorème de Mayer-Vietoris (en homologie réduite) pour $E(K) \cup A$ nous donne la suite exacte suivante

$$H_1(\partial D) \longrightarrow H_1(E(K)) \longrightarrow H_1(E(K) \cup A) \longrightarrow 0.$$

Il suit que $H_1(E(K) \cup A)$ est isomorphe au quotient de $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ par le sous-groupe engendré par la classe représentée par un méridien orienté de V_r. Or, ce méridien est de pente $\frac{a}{b}$ dans $\partial E(K)$ et une longitude canonique de K est nulle-homologue dans $E(K)$. Par conséquent, $H_1(E(K) \cup A)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/a$. Puisqu'on attache ensuite une 3-boule B le long de son bord à $E(K) \cup A$ pour obtenir $M(K;r)$, la suite de Mayer-Vietoris (en homologie réduite) donne un isomorphisme entre $H_1(M(K;r))$ et $H_1(E(K) \cup A) \cong \mathbb{Z}/a$.

$\square$

Exemple 1.2.7. *L'entrelacs de Hopf.*

Soit $L = L_1 \cup L_2$ l'entrelacs de Hopf dans S^3 et calculons $L(1,1)$ (voir la figure ci-dessous). Soit V_1 un voisinage tubulaire de L_1 dans $E(L_2)$. Dans l'exemple précédent, on a vu qu'il existe un tore solide $V \cong S^1 \times D^2$ dans S^3 dont l'âme est L_2 et tel que $S^3 = V \cup V_1$ et $V \cap V_1 = \partial V = \partial V_1$. Soit V_2 un voisinage tubulaire de L_2 dans $int(V)$. On a alors $E(L) = V \setminus int(V_2) \cong S^1 \times \partial D^2 \times I$, où $S^1 \times \partial D^2 \times \{0\}$ correspond à ∂V_2 et $S^1 \times \partial D^2 \times \{1\}$ correspond à ∂V. On

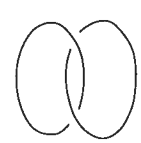


FIG. 1.8. Chirurgie $(1,1)$ le long de l'entrelacs de Hopf.

remarque que $S^1 \times \{1\} \times \{0\}$ correspond à une longitude de L_2 et que $S^1 \times \{1\} \times \{1\}$ correspond à un méridien de L_1. De plus, $\{1\} \times \partial D^2 \times \{0\}$ correspond à un *méridien de* L_2 *et* $\{1\}\times\partial D^2\times\{1\}$ *correspond à une longitude de* L_1*. Les courbes de chirurgie dans* $\partial E(L)$ *représentent toutes deux la classe* $\mu+\lambda \in H_1(E(L)) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$*, où* $H_1(E(L))$ *a pour base* $\{\mu, \lambda\}$*,* μ *est représentée par un méridien orienté de* L_1 *et* λ *est représentée par une longitude canonique orientée de* L_1*. Soit* $f : E(L)\xrightarrow{\cong}E(L)$ *l'homéomorphisme correspondant à* $S^1\times\partial D^2\times I\xrightarrow{\cong}S^1\times\partial D^2\times I$ *:* $(z_1, z_2, t) \mapsto (z_1, z_1^{-1}z_2, t)$*. On a alors* $f_*(\mu+\lambda) = \lambda$*. Il suit que la variété* $L(1,1)$ *est homéomorphe à* $L(0,\infty)$*. Or,* $L(0,\infty)$ *est homéomorphe à* $L_1(0)$*, car une chirurgie* ∞ *le long de* L_2 *correspond à retirer l'intérieur de* V_2 *et à recoller* V_2 *le long de* ∂V_2 *par l'identité, ce qui ne change pas le type d'homéomorphisme de la variété de départ. Par l'exemple précédent,* $L_1(0)$ *est* $S^1\times S^2$ *et donc* $L(1,1)$ *est* $S^1\times S^2$*.*

Remarque 1.2.8. *Dans l'exemple précédent, pour montrer que la variété* $L(1,1)$ *est homéomorphe à* $L(0,\infty)$*, on a utilisé le fait général suivant. Soit* $L = L_1\cup\ldots\cup L_n$ *et* $L' = L'_1\cup\ldots\cup L'_n$ *deux entrelacs dans une 3-sphère homologique* M*. Fixons* $V = V_1\cup\ldots\cup V_n$ *un voisinage tubulaire de* L *et* $V' = V'_1\cup\ldots\cup V'_n$ *un voisinage tubulaire de* L'*, où* V_i *est un voisinage tubulaire de* L_i *et* V'_i *est un voisinage tubulaire de* L'_i*. Supposons qu'il existe un homéomorphisme* $f : E(L)\xrightarrow{\cong}E(L')$ *tel que* $f_i = f|\partial V_i : \partial V_i\xrightarrow{\cong}\partial V'_i$*, pour tout* i*. Soit* $g_i : \partial V_i\xrightarrow{\cong}\partial V_i$ *un homéomorphisme envoyant une pente méridionnelle de* ∂V_i *sur la pente* $\frac{a_i}{b_i}$*. Posons* $h_i : \partial V_i\xrightarrow{\cong}\partial V'_i$ *la fonction définie par* $h_i = f_i\circ g_i$*. Soit* $\frac{a'_i}{b'_i}$ *l'image de la pente méridionnelle de* ∂V_i *par* h_i*. On a alors un homéomorphisme* $E(L)\sqcup V\xrightarrow{\cong}E(L')\sqcup V$*, défini comme étant* f *sur* $E(L)$ *et comme étant l'identité sur* V*. Par définition des* h_i*, cette fonction induit un homéomorphisme bien défini de* $M(L;r)$ *dans* $M(L;r')$*, où* r *et* r' *sont les* n*-tuplets dont la* i*-ième composante est* $\frac{a_i}{b_i}$ *et* $\frac{a'_i}{b'_i}$ *respectivement.*

1.2.3.1. *Calcul rationnel et théorème de Kirby*

Soit $L = L_1\cup\ldots\cup L_n$ un entrelacs dans S^3 et $r = (\frac{a_1}{b_1},\ldots,\frac{a_n}{b_n})$ des pentes de chirurgie. On sait que si L' est un entrelacs isotope à L, alors les variétés $L(r)$ et $L'(r)$ sont homéomorphes. De plus, insérer un noeud disjoint de L avec pente de chirurgie ∞ ou supprimer une composante de L avec pente de chirurgie ∞ ne change pas le type d'homéomorphisme de la variété $L(r)$.

Orientons L et supposons que la composante L_1 est triviale. Notre but sera de trouver un entrelacs $L' = L'_1 \cup \ldots \cup L'_n$ dans S^3 et un homéomorphisme $E(L) \xrightarrow{\cong} E(L')$ induisant un homéomorphisme $L(r) \xrightarrow{\cong} L'(r')$ simplifiant (possiblement) le calcul de $L(r)$.

Puisque le noeud L_1 est trivial, $E(L_1)$ est un tore solide. Soit $\tau : E(L_1) \xrightarrow{\cong} E(L_1)$ un t-twist méridionnel, c'est-à-dire dans la notation de la section 1, $\tau = h_m^t$ où h_m est un twist méridionnel de $E(L_1)$ et t est un entier non-nul. En particulier, $\tau|\partial V_1$ est un t-twist longitudinal de ∂V_1, où les V_i sont des voisinages tubulaires des L_i disjoints deux à deux. Notons $L'_1 = L_1$, $L'_i = \tau(L_i)$, pour tout $i \geq 2$ et $L' = L'_1 \cup \ldots \cup L'_n$ muni de l'orientation induite par τ et l'orientation de L. Posons $f = \tau|E(L) : E(L) \xrightarrow{\cong} E(L')$. La fonction f envoie un méridien de L_1 sur

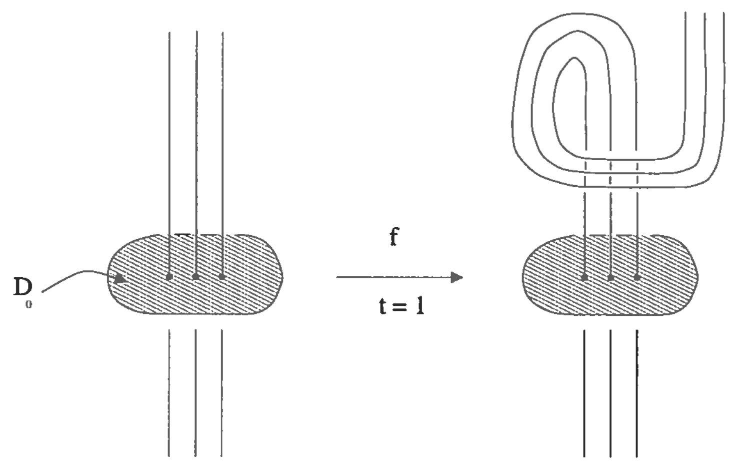


FIG. 1.9. Twist longitudinal le long d'une composante triviale.

une courbe de pente $\frac{1}{t}$ dans ∂V_1. De plus, elle envoie une longitude canonique de L_1 sur elle-même. Ainsi, f envoie une courbe de pente $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$ dans ∂V_1 vers une courbe de pente r'_1 dans ∂V_1 donnée par

$$\begin{aligned} r'_1 &= \frac{a_1}{a_1 t + b_1} \\ &= \frac{1}{t + \frac{1}{r_1}}. \end{aligned}$$

Soit $V'_i = \tau(V_i)$ pour $i \geq 2$. Il existe un disque $D \subset S^3$ transverse à ∂V_1 tel que $\partial D = L_1$. Il suit que $D_0 = D \cap E(L_1)$ est un disque méridionnel de $E(L_1)$. On peut supposer sans perdre de généralité que L_i intersecte transversalement

D_0, pour $i \geq 2$. Dans ce cas, si N_0 est un voisinage tubulaire de D_0 dans $E(L_1)$, alors $(N_0, N_0 \cap L)$ est homéomorphe à $(D_0 \times I, \{x_0, \ldots, x_k\} \times I)$, où les x_i sont des points distincts de D_0.

Fixons un indice $i \geq 2$. Notons μ_i (respectivement μ_i') la classe représentée par un méridien orienté de L_i (respectivement L_i'). Notons λ_i la classe représentée par une longitude canonique orientée l_i de L_i et λ_i' la classe représentée par une longitude canonique orientée de L_i'. On a $f_*(\mu_i) = \mu_i'$ et notons $f_*(\lambda_i) = \alpha_i\mu_i' + \beta_i\lambda_i'$. Puisque τ envoie V_i sur V_i', l'image par τ d'une longitude de L_i est une longitude de L_i'. On peut donc supposer sans perdre de généralité que β_i est $+1$. On sait que

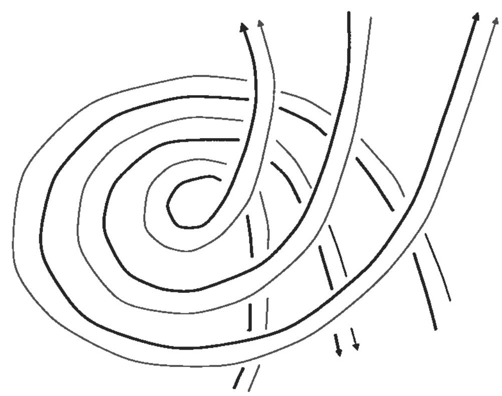


FIG. 1.10. Calcul des nouveaux coefficients de chirurgie.

α_i est égal à $lk(f(l_i), L_i')$, car $lk(\lambda_i', L_i') = 0$. Calculons α_i à l'aide de la définition du nombre d'enlacement $lk(\cdot,\cdot)$ dans S^3 basée sur les diagrammes planaires. La figure précédente illustre $f(L_i) \cap N_0$ (en gras) et $f(l_i) \cap N_0$ (en fin) pour $t = +1$. Notons m le nombre de brins montants de $f(L_i)$ dans N_0 et d le nombres de brins descendants de $f(L_i)$ dans N_0. Chaque brin montant contribue $(m-d)t$ au nombre d'enlacement et chaque brin descendant contribue $(d-m)t$ au nombre d'enlacement. Puisque dans N_0, les brins de l_i et de L_i ne se croisent pas, les croisements de $f(l_i)$ et L_i' à l'extérieur de N_0 sont exactement les croisements de l_i et L_i et contribuent donc 0 à $lk(f(l_i), L_i')$, car $lk(l_i, L_i) = 0$. Il suit que α_i est $(m-d)^2t = lk(L_i, L_1)^2t$. Par conséquent, une courbe de pente $r_i = \frac{a_i}{b_i}$ sur ∂V_i est envoyée par f sur une courbe de pente r'_i dans $\partial V'_i$ donnée par

$$\begin{aligned} r'_i &= \frac{a_i + b_i lk(L_i, L_1)^2 t}{b_i} \\ &= r_i + lk(L_i, L_1)^2 t. \end{aligned}$$

On a donc que $L(r)$ et $L'(r')$ sont homéomorphes. On a démontré la proposition suivante.

Proposition 1.2.9. *Soit $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ un entrelacs dans S^3 avec la composante L_1 triviale et $L' = L_1 \cup L'_2 \cup \ldots \cup L'_n$ l'image de L par un t-twist méridionnel de $E(L_1)$. Alors $L(r)$ et $L'(r')$ sont homéomorphes où*

$$\begin{cases} r'_1 = \frac{1}{t + \frac{1}{r_1}}; \\ r'_i = r_i + lk(L_i, L_1)^2 t, \forall i \geq 2. \end{cases}$$

Exemple 1.2.10. *Cet exemple illustre le fait qu'une même variété peut être obtenue par chirurgie le long de deux noeuds non-isotopes. Considérons la chirurgie +1 le long du noeud de 8 dans S^3. On ajoute d'abord une composante triviale avec paramètre ∞, ce qui ne change pas le type d'homéomorphisme de la variété obtenue. On obtient donc une chirurgie +1 le long d'un noeud de trèfle (voir la figure ci-dessous). La variété obtenue est en fait la 3-sphère homologique de Poincaré (voir* [**Rol**] *chapitre 9, section D).*

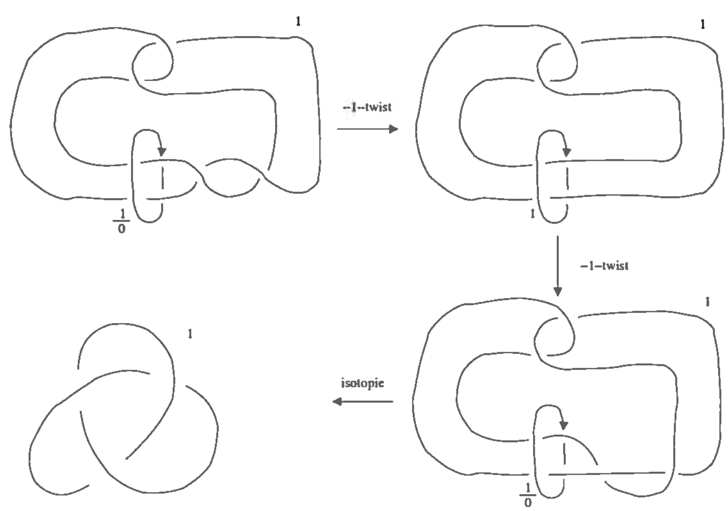


FIG. 1.11. Un exemple de calcul de Kirby.

En fait, pour deux entrelacs L et L' dans S^3, Kirby a démontré (voir [**Ki**]) que s'il existe un homéomorphisme entre $L(r)$ et $L'(r')$ préservant l'orientation, alors le couple $(L;r)$ peut être obtenu du couple $(L';r')$ par une composition finie d'isotopies, d'insertions et suppressions de composantes avec pente ∞ et de twists le long de composantes triviales tels que décrits précédemment.

1.2.3.2. *Théorème fondamental*

Pour ce qui est de l'existence d'une présentation par chirurgie d'une 3-variété donnée, Lickorish et Wallace ont obtenu le résultat suivant (voir [**Li2**]) appelé "théorème fondamental de la chirurgie" par Rolfsen.

Théorème 1.2.11. *Toute 3-variété fermée, orientable et connexe peut être obtenue par chirurgie le long d'un entrelacs dans S^3. Il existe toujours un tel entrelacs pour lequel chaque composante est triviale et chaque pente de chirurgie est ± 1.*

DÉMONSTRATION. Voir la section I du chapitre 9 dans [**Rol**].

□

Corollaire 1.2.12. *Toute 3-variété fermée, orientable et connexe est le bord d'une 4-variété simplement connexe et orientable.*

DÉMONSTRATION. Le lemme suivant fait le lien entre une chirurgie entière (toutes les pentes de chirurgie sont des entiers) le long d'un entrelacs dans une 3-sphère homologique M et l'attachement de 2-anses $(D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2)$ au bord d'une 4-variété N telle que $\partial N = M$.

Lemme 1.2.13. *Soit K un noeud dans une 3-sphère homologique M, N une 4-variété telle que $\partial N = M$ et V un voisinage tubulaire de K dans ∂N. Si $f : \partial D^2 \times D^2 \xrightarrow{\cong} V$ est un homéomorphisme tel que la longitude $f(\partial D^2 \times \{1\})$ est de pente $\frac{n}{1}$, alors le bord de la 4-variété $N \cup_f (D^2 \times D^2)$ est $M(K;n)$.*

Ce lemme se généralise naturellement aux entrelacs.

DÉMONSTRATION. Posons $X = N \cup_f (D^2 \times D^2)$. Le bord de X se décompose en $M \setminus int(V) \cup_g (D^2 \times \partial D^2)$, où $g = f|\partial D^2 \times \partial D^2 : \partial D^2 \times \partial D^2 \xrightarrow{\cong} \partial V$. Il suit que ∂X est obtenu par chirurgie dans M le long de K. Il reste à voir quelle est la pente associée à cette chirurgie.

Soit $m = \partial D^2 \times \{1\}$ un méridien du tore solide $D^2 \times \partial D^2$. Par hypothèse, l'image par g de la longitude m de $\partial D^2 \times D^2$ est de pente $\frac{n}{1}$ dans ∂V. On a donc que ∂X est $M(K; n)$.

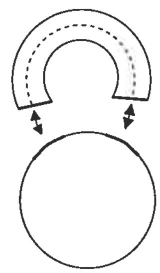


FIG. 1.12. Attachement d'une 2-anse à une 4-variété.

□

Soit M une 3-variété fermée, connexe et orientable. Par le théorème fondamental de la chirurgie, M s'obtient par chirurgie entière le long d'un entrelacs L dans S^3. Puisqu'il s'agit d'une chirurgie entière et que $S^3 = \partial D^4$, on obtient

$$\begin{aligned} M &= L(r_1, \ldots, r_n) \\ &= \partial X \end{aligned}$$

où pour tout i, r_i est ± 1 et $X = D^4 \cup_f (\sqcup_i D_i^2 \times D_i^2)$ et $f : \sqcup_i \partial D_i^2 \times D_i^2 \longrightarrow \partial D^4$ est un plongement tel que pour tout i, $f(\partial D_i^2 \times \{1\})$ est de pente r_i dans $\partial E(L_i)$.

M est donc le bord d'une 4-variété orientable. De plus, l'inclusion de $\{0\} \sqcup (D_i^2 \times \{0\})$ dans $D^4 \sqcup (D_i^2 \times D_i^2)$ est une équivalence d'homotopie. Cette inclusion induit une équivalence d'homotopie entre un bouquet de 2-sphères et X. La 2-sphère étant simplement connexe, il suit que $\pi_1(X)$ est un produit libre de groupes triviaux et est donc lui-même trivial. □

Chapitre 2

CONJECTURE PROPRIÉTÉ P ET NOEUDS TORIQUES

Dans la première section de ce chapitre, nous définissons la conjecture propriété P et établissons un lien entre cette dernière et le "problème du complément." Nous démontrons ensuite dans la seconde section que les noeuds toriques (non-triviaux) vérifient la conjecture propriété P.

Les références principales pour la première section sont le chapitre 4 du livre [**Bo**] et le livre de Rolfsen [**Rol**]. Les idées de la seconde section sont en majeure partie tirées du livre de Burde et Zieschang [**Bu**].

2.1. Conjecture propriété P

2.1.1. Énoncé de la conjecture

La conjecture de Poincaré affirme que la seule 3-variété fermée simplement connexe est S^3 (à homéomorphisme près). Par le théorème fondamental de la chirurgie (énoncé au chapitre précédent), s'il existe un contre-exemple à cette conjecture, alors celui-ci peut être obtenu par chirurgie le long d'un *entrelacs* dans S^3. Cette constatation nous amène à considérer les 3-variétés simplement connexes obtenues par chirurgie le long d'un *noeud* dans S^3.

On a vu en étudiant les espaces lenticulaires qu'il existe une infinité de pentes de chirurgie r le long du noeud trivial K dans S^3 pour lesquelles $K(r)$ est simplement connexe.

Conjecture 2.1.1. *(La conjecture propriété P) Si K est un noeud non-trivial dans S^3 et r est une pente non-triviale de K, c'est-à-dire r n'est pas la pente méridionnelle de K, alors $K(r)$ n'est pas simplement connexe.*

Remarquons que si $K(\frac{a}{b})$ est simplement connexe, alors $H_1(K(\frac{a}{b})) \cong \mathbb{Z}/a$ est trivial. Dans ce cas, l'entier a doit être ± 1.

2.1.2. Lien avec le problème du complément

Au début du vingtième sciècle, Tietze a tenté de déterminer si deux noeuds dans S^3 ayant des compléments homéomorphes sont de même type (voir [**Ti**]). Ce problème est généralement appellé le problème du complément. Au chapitre 4, nous présenterons les méthodes utilisées par Gordon et Luecke pour résoudre ce problème (voir [**GLu1**]).

Théorème 2.1.2. *(Gordon et Luecke* [**GLu1**]*) Si deux noeuds dans S^3 ont leurs compléments homéomorphes, alors ces noeuds sont équivalents.*

Edwards a démontré (voir [**E**]) que deux noeuds dans S^3 ont leurs compléments homéomorphes si et seulement si leurs extérieurs sont homéomorphes. En décrivant le problème du complément en terme de chirurgies dans S^3, nous verrons que si la conjecture propriété P est vraie, alors les noeuds dans S^3 sont déterminés par leurs compléments.

Remarquons d'abord qu'un noeud K dans S^3 dont l'extérieur est homéomorphe à l'extérieur du noeud trivial est lui-même trivial. En effet, dans ce cas $E(K)$ est un tore solide. Un disque méridionnel D de $E(K)$ intersecte le bord d'un voisinage tubulaire V de K en une courbe simple fermée l nulle-homologue dans $E(K)$. Cette courbe l est donc une longitude canonique de K. Il existe alors un anneau A dans V tel que $\partial A = l \cup K$. Ainsi K borde un disque $D \cup A$ dans S^3. Il suit que K est trivial.

Montrons que s'il existe deux noeuds J et K non-équivalents dans S^3 et ayant leurs extérieurs homéomorphes, alors la conjecture propriété P est fausse. Par la remarque du paragraphe précédent, les noeuds J et K sont non-triviaux. Soit $h : E(J) \xrightarrow{\cong} E(K)$ un homéomorphisme et notons r l'image par h de la pente méridionnelle μ_J de J. La pente r ne peut pas être la pente méridionnelle μ_K

de K. En effet, si $r = \mu_K$, alors la restriction $h|\partial E(J) : \partial E(J) \xrightarrow{\cong} \partial E(K)$ envoie un méridien de J sur un méridien de K. Dans ce cas, $h|\partial E(J)$ se prolonge en un homéomorphisme $V(J) \xrightarrow{\cong} V(K)$, où $V(J)$ et $V(K)$ sont des voisinages tubulaires de J et K respectivement. Par conséquent, h se prolonge en un homéomorphisme $(S^3, J) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$, ce qui contredit l'hypothèse que J et K ne sont pas équivalents. On obtient donc que r n'est pas la pente μ_K. Remarquons que $K(r)$ est homéomorphe à $J(\mu_J) \cong S^3$. Il existe donc une pente non-triviale r du noeud non-trivial K telle que $K(r)$ est simplement connexe. Le noeud K ne vérifie donc pas la propriété P. Nous avons ainsi montré que la conjecture propriété P implique qu'un noeud dans S^3 est caractérisé (à équivalence près) par son complément.

Dans la prochaine section, nous verrons que la conjecture propriété P est vérifiée pour les noeuds toriques (non-triviaux).

2.2. Noeuds toriques

On rappelle la définition d'un noeud torique dans S^3. Nous nous restreignons aux noeuds toriques essentiels.

Définition 2.2.1. *Un noeud $K \subset S^3$ est dit* torique *s'il existe un tore solide standard $V \subset S^3$ tel que $K \subset \partial V$ et K est essentiel dans ∂V. Dans ce cas, si K est de pente $\frac{a}{b}$ dans ∂V, alors on dit que K est un noeud torique (a, b) dans ∂V.*

Pour montrer que la conjecture propriété P est vérifiée pour les noeuds toriques essentiels, nous calculons d'abord une présentation du groupe fondamental de l'extérieur d'un noeud torique (a, b) dans S^3.

Proposition 2.2.2. *Soit V un tore solide standard dans S^3 et $K \subset \partial V$ un noeud torique (a, b) dans ∂V. Alors le groupe fondamental de $E(K)$ admet la présentation*

$$\pi_1(E(K)) \cong < x, y \mid x^a y^{-b} > .$$

De plus, les éléments $x^c y^{-d}$ et $x^a (x^c y^{-d})^{-ab}$, où $ad - bc = 1$, sont représentés respectivement par un méridien et une longitude canonique de K.

Démonstration. Orientons K et notons $V_1 = V$ et $V_2 = S^3 \setminus int(V_1)$. Puisque V_1 est un tore solide standard, V_2 est aussi un tore solide standard. La 3-sphère se décompose en $V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$. On note T le tore $\partial V_1 = \partial V_2$. Il suit que $E(K)$ se décompose en $W_1 \cup W_2$, où $W_i \cong V_i$ est un tore solide standard $(i = 1, 2)$, $W_1 \cap W_2 = T \setminus N$ et N est un voisinage tubulaire (ouvert) de K dans T. Puisque K est essentiel dans ∂V, $T \setminus N$ est homéomorphe à $K \times I$. En particulier,

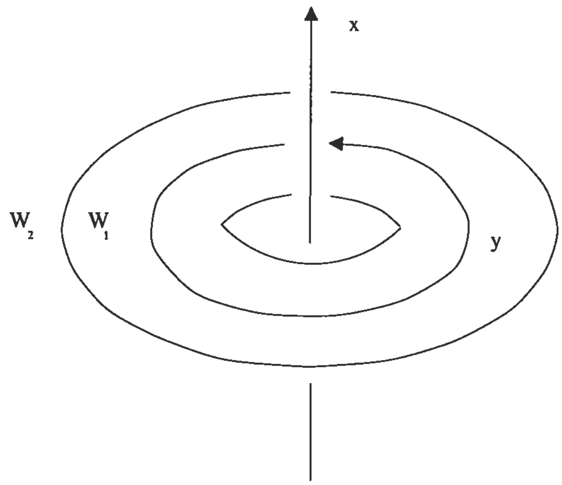


FIG. 2.1. L'extérieur d'un noeud torique.

$T \setminus N$ est connexe par arcs. Le théorème de Van Kampen donne alors

$$\pi_1(E(K)) \cong \pi_1(W_1) * \pi_1(W_2) / << i_2(z) i_1(z)^{-1} >>,$$

où $z \in \pi_1(T \setminus N)$ est la classe d'homotopie représentée par le noeud $K_0 = K \times \{0\}$ orienté de manière à être homotope à K dans T, i_1 et i_2 sont les homomorphismes en homotopie induits par les inclusions respectives de $T \setminus N$ dans W_1 et W_2 respectivement.

Soit $y \in \pi_1(W_1)$ la classe représentée par une longitude canonique de W_1 et $x \in \pi_1(W_2)$ la classe représentée par une longitude canonique de W_2. Les longitudes canoniques de W_1 et W_2 sont orientées de manière à ce que leur nombre d'enlacement dans S^3 soit $+1$.

Les groupes $\pi_1(W_1)$ et $\pi_1(W_2)$ admettent alors les présentations $< y \mid \cdot >$ et $< x \mid \cdot >$ respectivement. Puisque K_0 est de pente $\frac{a}{b}$ dans ∂W_1 et est de pente $\frac{b}{a}$ dans ∂W_2, on a les égalités $i_1(z) = y^b$ et $i_2(z) = x^a$. Puisque $\pi_1(T \setminus N)$ est engendré par z, on obtient

$$\pi_1(E(K)) \cong < x, y \mid x^a y^{-b} > .$$

Puisque a et b sont relativement premiers, il existe des entiers c et d pour lesquels $ad - bc = 1$. Soit μ_0 et λ_0 les classes de $H_1(\partial V_1)$ représentées respectivement par un méridien et une longitude canonique de V_1 orientés tels que $\mu_0 \cdot \lambda_0 = +1$ dans ∂V_1. La classe $c\mu_0 + d\lambda_0$ dans $H_1(\partial V_1)$ est représentée par une courbe simple fermée orientée J dans ∂V_1, car c et d sont relativement premiers. Par conséquent le nombre d'intersection $K \cdot J$ dans ∂V_1 est $ad - bc = +1$. On peut donc isotoper J dans ∂V_1 de manière à ce que J et K s'intersectent transversalement en un unique point.

Soit D un disque méridionnel de K orienté tel que $K \cdot D = +1$. Notons m le méridien ∂D et m_i l'arc $D \cap W_i$, pour $i = 1, 2$. On oriente m_1 et m_2 de manière à ce que le chemin $m_1 m_2$ obtenu en concaténant m_1 et m_2 soit homotope à m dans ∂D. On peut supposer sans perdre de généralité que $J \cap D$ est un arc proprement plongé dans D reliant les points $\{P, Q\} = m_1 \cap m_2$. Notons J_0 le chemin $J \setminus int(J \cap D)$ allant de P à Q. On remarque que m est homotope à

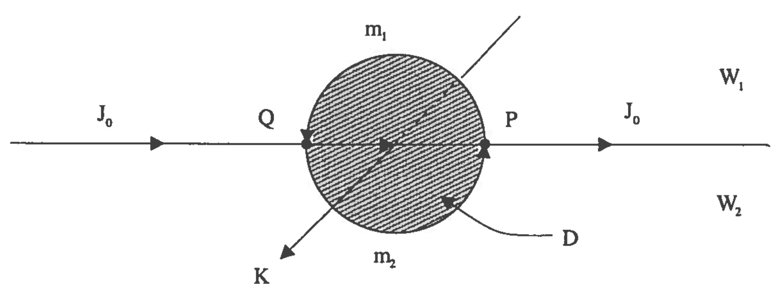


FIG. 2.2. Calcul des classes représentées par un méridien et une longitude.

$(m_2 J_0)(J_0^{-1} m_1)$ dans $E(K)$, où le point de base est le point Q. Or, $m_2 J_0$ représente la classe $x^c \in \pi_1(W_2)$ et $J_0^{-1} m_1$ représente la classe $y^{-d} \in \pi_1(W_1)$. Il suit que m représente la classe $x^c y^{-d}$ dans $E(K)$.

Soit l une longitude canonique orientée de K telle que $m \cdot l = +1$ dans $\partial E(K)$. Puisque K_0 est homologue à K dans un voisinage tubulaire de K dans S^3, il suit que K_0 est une longitude de K. Ainsi, K_0 est homotope à lm^p dans $\partial E(K)$, où $p = lk(K_0, K)$. Il suit que l est homotope à $K_0 m^{-p}$ dans $\partial E(K)$. Or, K_0 représente la classe $x^a \in \pi_1(W_2)$. De plus, K_0 représente la classe $y^b \in \pi_1(W_1)$.

Par conséquent, $lk(K_0, K)$ est donné par $b\ lk(y, K) = b\ a$. On conclut que l représente la classe $x^a(x^c y^{-d})^{-ab}$.

□

Il s'agit maintenant de déterminer $\pi_1(K(r))$ à l'aide de la proposition précédente, pour K un noeud torique essentiel. On montrera que le groupe $\pi_1(K(r))$ est trivial seulement lorsque $r = \mu_K$.

Théorème 2.2.3. *Soit $V \subset S^3$ un tore solide standard et $K \subset \partial V$ un noeud torique (a, b) non-trivial. Si $K(r)$ est simplement connexe, alors la pente r est la pente méridionnelle μ_K de K.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition précédente, $\pi_1(E(K))$ admet la présentation $< x, y \mid x^a y^{-b} >$. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\mu_K\}$ une pente de K. Calculons $\pi_1(K(r))$ à l'aide du théorème de Van Kampen. La variété $K(r)$ se décompose en $E(K) \cup V_r$, où V_r est un tore solide tel que $\partial E(K) = \partial V_r = V_r \cap E(K)$ et le bord d'un disque méridionnel de V_r est une courbe de pente $\frac{p}{q}$ dans $\partial E(K)$.

Soit D un disque méridionnel de V_r et $A \cong D \times I$ un voisinage tubulaire de D dans V_r. L'intersection $E(K) \cap A$ correspond à $\partial D \times I$. Le théorème de Van Kampen donne alors l'isomorphisme $\pi_1(E(K) \cup A) \cong \pi_1(E(K))/ << \gamma >>$, où la classe γ est représentée par une courbe orientée de de pente r dans $\partial E(K)$. Notons B l'adhérence de $V_r \setminus A$. Puique la 3-boule B et son bord ∂B sont simplement connexes, il suit par Van Kampen que le groupe fondamental de $K(r) = (E(K) \cup A) \cup B$ est donné par $\pi_1(K(r)) \cong \pi_1(E(K) \cup A)$ et admet donc la présentation suivante

$$\pi_1(K(r)) \cong < x, y \mid x^a y^{-b}, (x^c y^{-d})^p (x^a (x^c y^{-d})^{-ab})^q >,$$

où $ad - bc = 1$.

Notons $G = \pi_1(K(r))$ et H le quotient de G par les relations $x^a = 1$ et $y^{-b} = 1$. Le groupe H admet la présentation

$$H \cong < x, y \mid x^a, y^{-b}, (x^c y^{-d})^{p-abq} > .$$

Puisque K est un noeud torique (a, b) non-trivial, il suit que $|a| \geq 2$ et $|b| \geq 2$. De plus, l'égalité $ad - bc = 1$ entraîne que $pgcd(a, c) = pgcd(b, -d) = 1$. D'où, x^c

et y^{-d} sont des générateurs du groupe $< x, y \mid x^{|a|}, y^{|b|} >$. Le groupe H admet donc la présentation

$$H \cong < \tilde{x}, \tilde{y} \mid \tilde{x}^{|a|}, \tilde{y}^{|b|}, (\tilde{x}\tilde{y})^{|p-abq|} >,$$

où $\tilde{x} = x^c$ et $\tilde{y} = y^{-d}$.

Remarque 2.2.4. *Le groupe $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) =< x, y \mid x^\alpha, y^\beta, (xy)^\gamma >$ est appellé groupe triangulaire de paramètre (α, β, γ), où $\alpha, \beta \geq 2$ et $\gamma \geq 0$. Géométriquement, pour $\gamma > 0$ le groupe $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ correspond aux isométries d'un triangle ayant pour angles $(\pi/\alpha, \pi/\beta, \pi/\gamma)$. Selon que $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$ est égal, strictement suprérieur ou strictement inférieur à 1, le triangle considéré est contenu dans le plan euclidien, la sphère ou le plan hyperbolique (respectivement).*

Par conséquent, $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ est non-trivial pour $\gamma \geq 2$ (voir **[Be]***). Pour $\gamma = 1$, on a la relation $y = x^{-1}$ et donc $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) \cong \mathbb{Z}/ < \alpha, \beta >$. Dans ce cas, $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ est trivial si et seulement si α et β sont relativement premiers. Pour $\gamma = 0$, $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/\alpha * \mathbb{Z}/\beta$ qui est non-trivial, car $\alpha, \beta \geq 2$.*

Par la remarque précédente, H est le groupe triangulaire $\Delta(|a|, |b|, |p - abq|)$. On sait que $H_1(K(r))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p$ et $\pi_1(K(r))$ se surjecte alors sur $\mathbb{Z}/p$, via l'homomorphisme d'Hurewicz. Il suit que pour $p \neq \pm 1$, $\pi_1(K(r))$ se surjecte sur un groupe non-trivial et est donc non-trivial. On peut donc supposer sans perdre de généralité que p est 1. Puisqu'on a $|a|, |b| \geq 2$, il suit que $|1 - abq| \geq 1$.

Si $|1 - abq| \geq 2$, alors $G = \pi_1(K(r))$ se surjecte sur le groupe non-trivial H, par la remarque précédente. Dans ce cas, $\pi_1(K(r))$ est non-trivial.

Traitons maintenant le cas où $|1 - abq| = 1$. Si $q = 0$, alors p est 1 et donc r est la pente méridionnelle μ_K. Si $q \neq 0$, alors on a l'égalité $1 = abq + \epsilon$, où $\epsilon = \pm 1$. Supposons que $\pi_1(K(r))$ est trivial. Dans ce cas, on a l'égalité

$$ab = \frac{1 - \epsilon}{q}.$$

Or, on voit que pour $|a| \geq 2$ et $|b| \geq 2$ cette égalité est impossible. On a donc montré que pour $q \neq 0$ et $|1 - abq| = 1$, la variété $K(r)$ n'est pas simplement connexe. Il suit de l'analyse précédente que seule la chirurgie triviale sur K donne une variété simplement connexe. Remarquons que nous avons montré aussi que seule la chirurgie triviale sur K donne la 3-sphère. □

Dans le prochain chapitre, nous étudierons la propriété P pour les noeuds satellites.

Chapitre 3

NOEUDS SATELLITES

Dans ce chapitre, nous démontrons que les noeuds satellites ayant un *nombre de rotation* (voir section 3.1) strictement supérieur à 2 satisfont la propriété P. D'autre part, nous verrons que les noeuds satellites dont le nombre de rotation est 2 admettent au plus une pente de chirurgie non-triviale pour laquelle la variété obtenue par chirurgie peut être simplement connexe. La dernière section traite du cas où le nombre de rotation est 0 ou 1. Dans ce cas, on montre que pour un noeud satellite K la chirurgie $K(\frac{1}{n})$ n'est pas simplement connexe pour $|n| \geq 6$. La démarche utilisée est due à Litherland. Les références principales sont les deux articles de Litherland [**L1**] et [**L2**]. Mentionnons que Gabai a démontré que tous les noeuds satellites vérifient la propriété P en utilisant des outils liés aux feuilletages de codimension un d'une 3-variété (voir [**Ga**]).

3.1. Théorème principal

Rappelons la définition d'un noeud satellite dans S^3.

Définition 3.1.1. *Soit $J \subset S^3$ un noeud non-trivial et V un voisinage tubulaire de J dans S^3. Un noeud $K \subset int(V)$ est dit* satellite *de J si K n'est pas isotope (dans V) à J et s'il n'existe pas de 3-boule lisse B plongée dans l'intérieur de V telle que $K \subset B \subset V$.*

Définition 3.1.2. *Soit $V \subset S^3$ un tore solide et $K \subset int(V)$ un noeud. Le* nombre de rotation *de K dans V, noté $w_V(K)$, est l'entier non-négatif n pour lequel la classe de $H_1(V)$ représentée par K engendre le sous-groupe $nH_1(V)$ de $H_1(V)$, où K est muni d'une orientation quelconque.*

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.3. *Soit $V \subset S^3$ un tore solide noué, c'est-à-dire que V est un tore solide dont l'âme est un noeud non-trivial dans S^3, et $K \subset int(V)$ un noeud satellite.*

(1) Si $w_V(K) \geq 3$, alors K satisfait la propriété P.

(2) Si $w_V(K) = 2$, alors l'ensemble des pentes $r \in \mathbb{Q} \cup \{\mu_K\}$ de K telles que $K(r)$ est simplement connexe est strictement contenu dans $\{\mu_K, +1, -1\}$.

(3) Si $w_V(K) = 0$ ou 1, alors $K(\frac{1}{n})$ n'est pas simplement connexe pour $|n| \geq 6$.

Nous démontrerons les points (1) et (2) du théorème précédent (à la section 3.2) en étudiant l'effet d'une chirurgie $\frac{1}{n}$ le long d'un noeud K dans une 3-sphère homologique M sur les signatures d'un entrelacs dans $M \setminus K$. Le point (3) sera démontré (à la section 3.3) en étudiant les graphes d'intersection associés à deux surfaces bien choisies.

3.2. Chirurgie de Dehn et signatures

3.2.1. Plongements fidèles

Dans cette sous-section, nous obtenons une condition suffisante pour qu'une 3-sphère homologique obtenue par chirurgie le long d'un noeud satellite dans S^3 ne soit pas simplement connexe.

Définition 3.2.1. *Soit V un tore solide contenu dans une 3-sphère homologique orientée M et $h : V \longrightarrow M$ un plongement. Munissons V et $h(V)$ des orientations induites par M. On dit que h est* fidèle *si $h| : V \xrightarrow{\cong} h(V)$ préserve l'orientation et si h envoie une longitude canonique de V dans M sur une longitude canonique de $h(V)$ dans M.*

Proposition 3.2.2. *Soit V un tore solide contenu dans une 3-sphère homologique orientée M et $h : V \longrightarrow M$ un plongement fidèle. Si J et K sont deux noeuds orientés disjoints dans $int(V)$, alors $lk_M(J, K) = lk_M(h(J), h(K))$.*

Démonstration. Soit F une surface de Seifert pour K dans M. On peut supposer sans perdre de généralité que F intersecte transversalement ∂V dans M.

Notons F_0 la surface $F \cap V$. Le nombre d'enlacement $lk(J, K)$ est alors égal au nombre d'intersection $J \cdot F$ dans M et ce dernier est égal au nombre d'intersection $J \cdot F_0$ dans V. Puisque h préserve l'orientation, h préserve la forme d'intersection et on obtient ainsi

$$J \cdot F_0 = h(J) \cdot h(F_0).$$

Notons que $\partial F_0 = K \cup c$, où c est une union disjointe de cercles dans ∂V. Puisque l'entrelacs c est le bord de $\overline{F \setminus F_0}$, c est nul-homologue dans $M \setminus int(V)$. Ainsi la classe $[c] \in H_1(\partial V)$ s'écrit

$$[c] = n\lambda,$$

pour un certain entier n, où λ est la classe représentée par une longitude canonique orientée de V.

Puisque l'image par h d'une longitude canonique de V est une longitude canonique de $h(V)$, il suit que la classe $h_*([c]) \in H_1(\partial h(V))$ s'écrit

$$h_*([c]) = n\lambda',$$

où λ' est la classe représentée par une longitude canonique orientée de $h(V)$. Ainsi, l'entrelacs orienté $h(c) \subset \partial h(V)$ est nul-homologue dans $M \setminus int(h(V))$. Il existe donc une surface orientée compacte et connexe $\Sigma \subset M \setminus int(h(V))$ avec $\partial\Sigma = h(c)$.

Soit S la surface $h(F_0) \cup \Sigma$. Par définition, S est une surface de Seifert pour $h(K)$ dans M. De plus, on a les égalités

$$\begin{aligned} lk(h(J), h(K)) &= h(J) \cdot S \\ &= h(J) \cdot h(F_0) \\ &= J \cdot F_0 \\ &= lk(J, K). \end{aligned}$$

□

La proposition suivante donne une condition suffisante pour laquelle la variété obtenue par chirurgie $\frac{1}{n}$ le long d'un noeud satellite dans S^3 n'est pas simplement connexe.

Proposition 3.2.3. *Soit $V \subset S^3$ un tore solide standard, $K \subset int(V)$ un noeud et J l'âme du tore solide complémentaire $S^3 \setminus int(V)$. Notons M_n la variété $K(\frac{1}{n})$ et notons J_n l'image du plongement naturel de J dans M_n. Si $h : V \longrightarrow S^3$ est un plongement fidèle tel que $h(V)$ est noué et $(h(K))(\frac{1}{n})$ est simplement connexe, alors J_n est trivial dans M_n, c'est-à-dire que J_n borde un disque dans M_n.*

DÉMONSTRATION. Soit N un voisinage tubulaire de K dans $int(V)$. On a alors l'homéomorphisme suivant

$$(h(K))\left(\frac{1}{n}\right) \cong (S^3 \setminus int(h(V))) \cup_{h|\partial V} W, \tag{3.2.1}$$

où W est la variété $(V \setminus int(N)) \cup_{\psi} N$ et $\psi : \partial N \xrightarrow{\cong} \partial N$ est un homéomorphisme pour lequel l'image d'un méridien de K est une courbe de pente $\frac{1}{n}$ dans ∂N.

Par hypothèse, $(h(K))(\frac{1}{n})$ est simplement connexe. Par l'homéomorphisme donné en 3.2.1 et le lemme suivant, on conclut que soit $S^3 \setminus int(h(V))$ ou soit W a un groupe fondamental cyclique infini.

Lemme 3.2.4. *Soit M une 3-variété fermée, simplement connexe et soit T un tore plongé dans M. Si A et B sont les deux composantes connexes de $M \setminus T$, alors $\pi_1(\overline{A}) \cong \mathbb{Z}$ ou $\pi_1(\overline{B}) \cong \mathbb{Z}$.*

DÉMONSTRATION. La variété M se décompose en $\overline{A} \cup \overline{B}$ et l'intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$ est le tore T. Puisque M est simplement connexe, l'homomorphisme $\pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(M)$ induit par l'inclusion a un noyau non-trivial. Il suit que soit $i_\sharp : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(\overline{A})$ ou soit $j_\sharp : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(\overline{B})$ n'est pas un monomorphisme, où i et j sont les inclusions de T dans $\overline{A}$ et $\overline{B}$ respectivement.

Supposons sans perdre de généralité que l'homomorphisme $i_\sharp$ n'est pas injectif. Par le lemme suivant, il existe un disque D dans $\overline{A}$ pour lequel l'intersection $D \cap T = \partial D$ est transverse et ∂D est essentiel dans T.

Lemme 3.2.5. *(Papakyriakopoulos) Soit W une 3-variété avec bord et Σ une composante connexe de ∂W. Si l'homomorphisme $\pi_1(\Sigma) \longrightarrow \pi_1(W)$ induit par l'inclusion n'est pas injectif, alors il existe un disque D proprement plongé dans W tel que ∂D est une courbe non-triviale homotopiquement dans Σ.*

DÉMONSTRATION. Voir le théorème A.3 du chapitre 4 dans [**Rol**]. □

Considérons un voisinage tubulaire N de $T \cup D$ dans $\overline{A}$. Puisque la courbe ∂D est non-séparante dans T, on a que N est homéomorphe à $(S^1 \times D^2) \setminus int(B)$, où B est une 3-boule contenue dans l'intérieur de $S^1 \times D^2$. Remarquons que les composantes connexes du bord de N sont alors T et une 2-sphère S. D'autre part, le complément de S dans M a pour composantes connexes $A' = \overline{A} \setminus N$ et $B' = \overline{B} \cup (N \setminus S)$. Les variétés $\overline{A'}$ et $\overline{B'}$ ont pour intersection S, qui est simplement connexe. Par le théorème de Van Kampen, on obtient

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(\overline{A'}) * \pi_1(\overline{B'}).$$

Le fait que M soit simplement connexe entraîne que $\overline{A'}$ et $\overline{B'}$ le sont aussi. Or, $\overline{A}$ se décompose en $\overline{A'} \cup N$ et l'intersection $\overline{A'} \cap N$ est la sphère S. Le théorème de Van Kampen donne alors un isomorphisme entre le groupe fondamental de $\overline{A}$ et le groupe fondamental de N, car $\overline{A'}$ est simplement connexe. Puisque la courbe ∂D est essentielle dans T, la classe d'homotopie portée par ∂D appartient à une base de $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il suit que $\pi_1(N)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, par Van Kampen.

□

Remarque 3.2.6. *Dans la preuve précédente, nous avons montré que si l'inclusion de T dans $\overline{A}$ n'induit pas un monomorphisme au niveau des groupes fondamentaux, alors $\overline{A}$ s'écrit comme une somme connexe entre un tore solide $S^1 \times D^2$ et une 3-variété fermée simplement connexe X. On peut montrer qu'alors X doit avoir le type d'homotopie d'une 3-sphère et qu'ainsi $\overline{A}$ doit avoir le type d'homotopie d'un tore solide. Toutefois, nous n'utiliserons pas ce résultat.*

La caractérisation suivante du noeud trivial dans S^3 nous permettra d'éliminer le cas où $\pi_1(S^3 \setminus int(h(V)))$ est $\mathbb{Z}$.

Lemme 3.2.7. *Un noeud K dans S^3 est trivial si et seulement si $\pi_1(E(K))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

DÉMONSTRATION. Si K est trivial, alors $E(K)$ est un tore solide et ainsi le groupe $\pi_1(E(K))$ est cyclique infini.

Supposons que le groupe fondamental de $E(K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et montrons qu'alors K doit être trivial. Dans ce cas, $H_1(E(K))$ est isomorphe à $\pi_1(E(K))$. Considérons une longitude canonique l de K dans S^3. Par définition, la courbe l est nulle-homologue (et donc nulle-homotope) dans $E(K)$. Le lemme de Dehn garantit alors l'existence d'un disque D proprement plongé dans $E(K)$ ayant pour bord l. Or, l et K cobordent un anneau $A \cong S^1 \times I$ dans un voisinage tubulaire de K dans S^3. On obtient un disque $D \cup A$ dans S^3 ayant pour bord le noeud K, ce qui implique que K est trivial dans S^3.

□

Puisque $h(V)$ est noué dans S^3, il suit par le lemme précédent que $\pi_1(S^3 \setminus int(h(V)))$ n'est pas cyclique infini. On conclut donc que $\pi_1(W)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Rappelons que W est obtenu de V en effectuant une chirurgie $\frac{1}{n}$ le long de K.

En substituant h par l'inclusion de V dans S^3, l'homéomorphisme 3.2.1 devient

$$K\left(\frac{1}{n}\right) \cong (S^3 \setminus int(V)) \cup_{1_{\partial V}} W.$$

Le lemme suivant nous permettra d'obtenir le disque cherché.

Lemme 3.2.8. *Soit X un tore solide dans S^3, L un noeud dans $int(X)$ et Y la variété $(X \setminus int(U)) \cup_f U$, où U est un voisinage tubulaire de L dans $int(X)$ et $f : \partial U \xrightarrow{\cong} \partial U$ est un homéomorphisme pour lequel l'image d'un méridien de L est une courbe de pente $\frac{1}{n}$ dans ∂U. Si $\pi_1(Y)$ est abélien, alors toute courbe de pente $\frac{1}{nq^2}$ dans ∂Y borde un disque proprement plongé dans Y, où $q = w_X(L)$. De plus, le bord d'un disque proprement plongé dans Y est soit une courbe non-essentielle dans ∂Y, soit une courbe de pente $\frac{1}{nq^2}$ dans ∂Y.*

DÉMONSTRATION. Supposons sans perdre de généralité que X est un tore solide standard. Si $\pi_1(Y)$ est abélien, alors $H_1(Y)$ est isomorphe à $\pi_1(Y)$. Pour montrer qu'une courbe $c \subset \partial Y$ de pente $\frac{1}{nq^2}$ borde un disque proprement plongé dans Y, il suffit alors de montrer que cette courbe c est nulle-homologue dans Y, par le lemme de Dehn.

Remarquons que $X \setminus int(U)$ est l'extérieur de l'entrelacs $\tilde{L} \cup L$ dans S^3, où $\tilde{L}$ est l'âme de $S^3 \setminus int(X)$. Par conséquent, $H_1(X \setminus int(U)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ a pour base $\{\lambda_X, \mu_L\}$, où λ_X est représentée par une longitude de X et μ_L par un méridien de L. Notons que q est égal à signe près au nombre d'enlacement $lk(L, \tilde{L})$. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} q &= w_X(L) \\ &= \pm lk(L, \tilde{L}) \\ &= \pm lk(\tilde{L}, L) \\ &= \pm lk(\mu_X, L), \end{aligned}$$

où $\mu_X \in H_1(X \setminus int(U))$ est représentée par un méridien de X. Calculons les coordonnées de μ_X et λ_L dans la base $\{\lambda_X, \mu_L\}$. Puisque $lk(\mu_X, \tilde{L})$ est nul (car un méridien de X borde un disque dans le complément le $\tilde{L}$), on obtient

$$\begin{aligned} \mu_X &= lk(\mu_X, L)\mu_L \\ &= \pm q\mu_L \in H_1(X \setminus int(U)). \end{aligned}$$

Par définition, $lk(\lambda_L, L)$ est nul. On a donc les égalités

$$\begin{aligned} \lambda_L &= lk(\lambda_L, \tilde{L})\lambda_X \\ &= lk(L, \tilde{L})\lambda_X \\ &= \pm q\lambda_X \in H_1(X \setminus int(U)). \end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer la classe $[c] \in H_1(X \setminus int(U))$ en termes des classes μ_L et λ_L.

$$\begin{aligned} [c] &= \mu_X + nq^2\lambda_X \\ &= \pm q(\mu_L + n\lambda_L). \end{aligned}$$

Or, une courbe simple fermée de pente $\frac{1}{n}$ dans $\partial U \subset Y$ est nulle homologue dans Y, par définition de Y. Par conséquent, la courbe c est nulle-homologue (et donc nulle-homotope, car $\pi_1(Y)$ est abélien) dans Y. Il suit que c est le bord d'un disque proprement plongé dans Y.

Soit D un disque orienté proprement plongé dans Y dont le bord est une courbe essentielle dans ∂Y. Montrons que ∂D est alors de pente $\frac{1}{nq^2}$ dans ∂Y. La variété Y se décompose en $(X \setminus int(U)) \cup U_n$, où U_n est un tore solide tel que $U_n \cap (X \setminus int(U)) = \partial U_n = \partial U$ et un méridien de U_n est de pente $\frac{1}{n}$ dans ∂U. Sans perdre de généralité, on peut supposer que D intersecte transversalement l'âme L_n de U_n dans Y. L'intersection $D \cap U_n$ est alors une union $\cup_{i=1}^m D_i$, où les D_i sont des disques méridionnels de U_n deux à deux disjoints. Munissons les D_i de l'orientation induite par D. La courbe ∂D est homologue à $\sum_{i=1}^m \epsilon_i m_i$ dans $X \setminus int(U)$, où ϵ_i est le nombre d'intersection $L_n \cdot D_i$ et $m_i = \partial D_i$ est muni de l'orientation induite par D_i. Notons α la somme $\sum_{i=1}^m \epsilon_i$. On a donc les égalités

$$\begin{aligned}[\partial D] &= \alpha(\mu_L + n\lambda_L) \\ &= \alpha\mu_L \pm \alpha n q \lambda_X \in H_1(X \setminus int(U)).\end{aligned}$$

Supposons que ∂D est de pente $\frac{a}{b}$ dans ∂Y. On obtient alors

$$[\partial D] = \pm a q \mu_L + b\lambda_X \in H_1(X \setminus int(U)).$$

On conclut que $\alpha = \pm aq$ et que $\pm \alpha n q = b$. La courbe ∂D est de pente $\frac{a}{b} = \frac{1}{nq^2}$ dans ∂Y.

□

Par le lemme précédent, le fait que $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ soit abélien entraîne qu'une courbe γ de pente $\frac{1}{nq^2}$ dans ∂W borde un disque D proprement plongé dans W, où $q = w_V(K)$. Or, W est l'extérieur de J_n dans $K(\frac{1}{n})$. De plus, γ est une longitude de J_n. Il existe donc un anneau $A \cong S^1 \times I$ dans $S^3 \setminus int(V)$ tel que $\partial A = J_n \cup \gamma$. Le disque cherché est alors $D \cup A$.

□

Par la proposition précédente, pour montrer que $(h(K))(\frac{1}{n})$ n'est pas simplement connexe pour un certain n, il suffit de montrer que le noeud J_n n'est pas trivial dans $M_n = K(\frac{1}{n})$. Pour ce faire, nous étudierons certains invariants du noeud J_n. Plus précisément, nous considérerons la fonction signature associée à J_n.

3.2.2. Signature d'un entrelacs dans une 3-sphère homologique

3.2.2.1. *Forme de Seifert*

La proposition suivante nous permettra d'introduire la forme de Seifert associée à une surface compacte, connexe, orientée et avec bord plongée dans une 3-sphère homologique. Plusieurs invariants des entrelacs peuvent être dérivés à l'aide de cette forme, notamment la fonction signature associée à un entrelacs. Tout au long de cette section nous supposerons que les sphères homologiques considérées sont orientées.

Proposition 3.2.9. *Soit F une surface (lisse) avec bord, compacte, orientée et connexe plongée dans une 3-sphère homologique M. Il existe une unique forme bilinéaire $s : H_1(M \setminus int(F)) \times H_1(int(F)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour toute courbe simple fermée orientée a dans $M \setminus int(F)$ et toute courbe simple fermée orientée b dans $int(F)$ on a l'égalité*

$$s([a],[b]) = lk(a,b).$$

Démonstration. Soit V un voisinage tubulaire (fermé) de F dans M, c'est-à-dire que V est un sous-ensemble fermé de M contenant F pour lequel on a $(V, F) \cong (F \times [-1,1], F \times \{0\})$.

Notons n le nombre de composantes connexes de ∂F. En attachant n disques disjoints à F le long de ∂F on obtient une surface fermée, orientable et connexe de genre g. Il suit que F s'obtient d'un disque D en y attachant $2g+n-1$ 1-anses $D_i^1 \times D_i^1$ à l'aide d'un plongement $\phi : \sqcup_i \partial D_i^1 \times D_i^1 \longrightarrow \partial D$. En d'autres termes on a $F \cong D \cup_\phi \sqcup_i D_i^1 \times D_i^1$. Remarquons qu'en général, les "bandes" $D^1 \times D^1$ de F seront "tordues" et entrelacées entre elles. On conclut que le voisinage V est un corps à anses de genre $2g+n-1$, c'est-à-dire que V est obtenu d'une 3-boule B en attachant le long de ∂B $2g+n-1$ 1-anses $D_i^1 \times D_i^2$. En d'autres termes on a $V \cong B \cup_\psi \sqcup_i D_i^1 \times D_i^2$, où $\psi : \sqcup_i \partial D_i^1 \times D_i^2 \longrightarrow \partial B$ est un plongement. Remarquons que les inclusions $F \longrightarrow V$ et $M \setminus int(V) \longrightarrow M \setminus int(F)$ sont des équivalences d'homotopie. La suite de Mayer-Vietoris pour $M = V \cup (M \setminus int(V))$ donne un

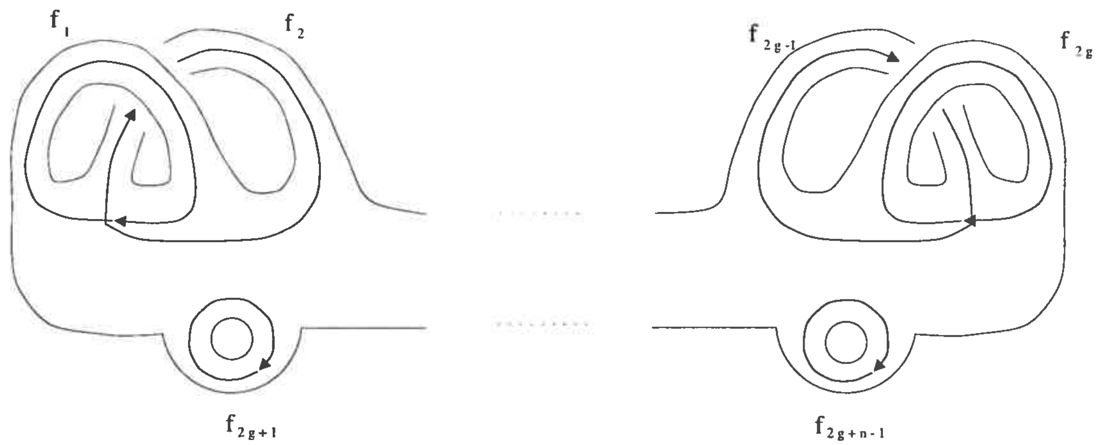


FIG. 3.1. Les représentants des générateurs de $H_1(F)$.

isomorphisme $\nu : H_1(\partial V) \xrightarrow{\cong} H_1(V) \oplus H_1(M \setminus int(V))$, car $H_2(M) = H_1(M)$ est trivial.

Considérons la base $\{[f_i]\}_{i=1}^{2g+n-1}$ de $H_1(F)$, où f_i est l'union de l'âme $D_i^1 \times \{0\}$ de la 1-anse $D_i^1 \times D_i^1$ avec un arc proprement plongé dans D reliant les deux points $\partial D_i^1 \times \{0\}$ (f_i est munie d'une orientation quelconque). On choisit une base $\{[f_i']\}_{i=1}^{2g+n-1} \cup \{[e_j]\}_{j=1}^{2g+n-1}$ de $H_1(\partial V)$ telle que les f_i' et les e_j sont des courbes simples fermées orientées dans ∂V vérifiant, pour tout i et pour tout j, les conditions suivantes

(1) f_i' est homologue à f_i dans V ;

(2) e_j borde un disque proprement plongé D_j dans V pour lequel $f_i \cdot D_j = \delta_{i,j}$.

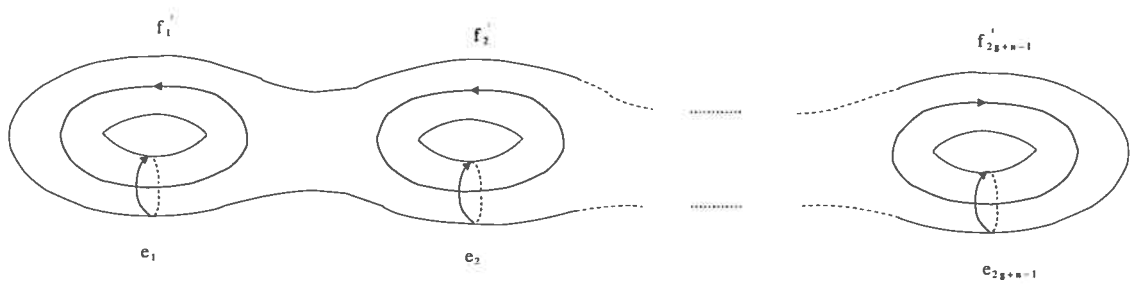


FIG. 3.2. La surface ∂V.

Notons k et l les inclusions respectives de ∂V dans V et dans $M \setminus int(V)$. Puisque la courbe e_j est nulle-homologue dans V, on a

$$\nu([e_j]) = (0, l_*([e_j])),\ \forall j.$$

De plus, on sait que $H_1(V)$ a pour base $\{[f_i']\}_i$. Il suit que, pour tout i, les coordonnées de $k_*([f_i'])$ dans cette base sont toutes nulles, sauf la i-ième qui est 1. De plus, le fait que ν est un isomorphisme implique que $H_1(M \setminus int(V)) \cong H_1(M \setminus int(F))$ a pour base les $l_*([e_j])$, que nous noterons $[e_j]$ pour simplifier la notation.

On peut maintenant définir la forme bilinéaire cherchée. Soit $s : H_1(M \setminus int(F)) \times H_1(int(F)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la forme bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} s([e_i],[f_j]) &= lk(e_i, f_j) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par définition s est non-singulière. Il reste à voir que $s([a],[b])$ est égal au nombre d'enlacement $lk(a,b)$, pour a et b deux courbes simples fermée orientées dans $M \setminus int(F)$ et $int(F)$ respectivement.

Dans les bases considérées, les classes $[a]$ et $[b]$ s'écrivent

$$[a] = \sum_i \lambda_i [e_i] \in H_1(M \setminus int(F)) \text{ et } [b] = \sum_j \mu_j [f_j] \in H_1(int(F)).$$

On remarque que $H_1(M \setminus f_j)$ est engendré par $[e_j]$ et que pour tout i distinct de j, e_i est nulle-homologue dans $M \setminus f_j$. On a donc les égalités suivantes

$$lk(a, f_j) = \lambda_j, \forall j.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} lk(a,b) &= \sum_j \mu_j lk(a, f_j) \\ &= \sum_j \lambda_j \mu_j \\ &= s([a],[b]). \end{aligned}$$

L'unicité de s suit directement de la condition $s([a],[b]) = lk(a,b)$. $\square$

Définition 3.2.10. *Soit F une surface (lisse) avec bord, compacte, orientée et connexe plongée dans une 3-sphère homologique M. Soit $V \cong F \times [-1,1]$ un voisinage tubulaire de F dans M. Posons i^+ et i^- les plongements de F dans $M \setminus F$ définis par $i^{\pm}(x) = (x, \pm 1)$, pour tout x dans F. Si c est une courbe simple fermée dans F, nous noterons $i^{\pm}(c)$ par $c^{\pm}$. La* forme de Seifert *de F, notée σ_F, est définie par*

$$\sigma_F : H_1(int(F)) \times H_1(int(F)) \longrightarrow \mathbb{Z},$$
$$(x, y) \mapsto s((i^-)_*(x), y)$$

où s est la forme bilinéaire donnée par la proposition précédente.

Remarquons qu'il y a ambiguité quant à la direction normale positive à la surface F dans M. Nous conviendrons que le fibré normal ν_F de F dans M est orienté de manière à ce que la somme des orientations du fibré tangent TF et du fibré normal ν_F donne l'orientation de $T_F M$.

Remarque 3.2.11. *Soit a et b deux courbes simples fermées orientées dans $int(F)$. Les courbes a^- et a étant homologues dans $M \backslash b^+$, on conclut que $lk(a^-, b^+)$ est égal à $lk(a, b^+)$. De plus, b^+ et b sont homologues dans $M \backslash a^-$. Ainsi, $lk(b^+, a^-)$ est égal à $lk(b, a^-)$. On obtient alors les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}\sigma_F([a],[b]) &= lk(a^-, b)\\ &= lk(a^-, b^+)\\ &= lk(a, b^+).\end{aligned}$$

Exemple 3.2.12. *Soit F la surface de Seifert (pour le noeud de trèfle) dans S^3 donnée par la figure ci-dessous. Le groupe $H_1(int(F))$ a pour base les classes d'homologie représentées par les courbes simples fermées orientées a et b (voir la figure 3.3). Rappelons que la direction normale positive à F dans S^3 est donnée par la règle de la main droite. À l'aide de la figure, on voit que la matrice de la forme de Seifert σ de F est*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

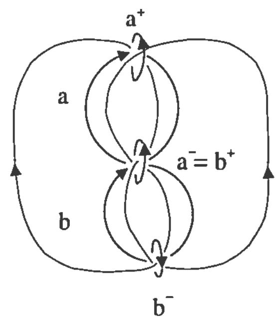


FIG. 3.3. Une surface de Seifert pour le noeud de trèfle.

Remarque 3.2.13. *Si $-F$ est F munie de l'orientation opposée, alors on a $i_F^{\pm} = i_{-F}^{\mp}$. Par la remarque précédente, on conclut que $\sigma_F(x,y)$ est égal à $\sigma_{-F}(y,x)$, pour tout x et y dans $H_1(int(F))$. Ainsi, pour une base fixée de $H_1(int(F))$, la matrice A_F de σ_F est égale à la transposée de la matrice A_{-F} de σ_{-F}.*

La forme de Seifert d'une surface F avec bord, connexe, compacte et orientée dans une 3-sphère homologique M est reliée à la forme d'intersection $\iota : H_1(F) \times H_1(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ sur F. Fixons une base de $H_1(F)$ pour laquelle tous ses éléments sont représentés par des courbes simples fermées dans $int(F)$. Soit a et b des courbes simples fermées orientées représentant des éléments de la base de $H_1(F)$ considérée.

Soit $V \cong F \times [-1,1]$ un voisinage tubulaire de F dans M. Orientons b^- et b^+ de manière à ce qu'ils soient homologues à b dans V. Considérons la bande $B = b \times [-1,1]$ contenue dans V. Orientons la surface B de manière à ce qu'elle induise l'orientation $-b^- \cup b^+$ sur son bord, où $-b^-$ est b^- muni de l'orientation opposée.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que a est transverse à B dans V. Notons $\alpha^{\pm}$ le nombre d'enlacement $lk(a, b^{\pm})$ et choisissons un méridien orienté $\mu^{\pm}$ de $b^{\pm}$ tel que $lk(\mu^+, b^+) = lk(\mu^-, b^-) = 1$. Puisque a est homologue à $\alpha^+\mu^+ + \alpha^-\mu^-$

dans $M \setminus (b^+ \cup b^-)$, on obtient

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot B \\ &= \alpha^+ \mu^+ \cdot B + \alpha^- \mu^- \cdot B \\ &= \alpha^+ - \alpha^-, \text{ car } \mu^- \cdot B = -1 \\ &= lk(a, b^+) - lk(a, b^-) \\ &= \sigma([a],[b]) - \sigma([b],[a]). \end{aligned}$$

La matrice de la forme d'intersection ι dans la base considérée est donc $A - A^T$, où A est la matrice de la forme de Seifert de F dans cette base.

Proposition 3.2.14. *Soit F une surface de Seifert d'un noeud orienté dans une 3-sphère homologique M. Si A est la matrice de la forme de Seifert associée à F pour une base quelconque de $H_1(int(F))$, alors le déterminant de $A - A^T$ est* 1.

DÉMONSTRATION. Puisque F n'a qu'une composante de bord, on peut choisir une base $\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g\}$ de $H_1(int(F))$ telle que pour tout i et j on a $x_i \cdot y_j = \delta_{i,j}$, où g est le genre de F. La matrice diagonale par blocs suivante est la matrice de la forme d'intersection de F dans cette base

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit A la matrice de la forme de Seifert de F pour une base quelconque de $H_1(int(F))$. Puisque la matrice $A - A^T$ et la matrice précédente sont égales à conjuguaison par une matrice de $Gl_{2g}(\mathbb{Z})$ près, on a que $det(A - A^T)$ est 1.

□

3.2.2.2. *Fonction de signature*

Nous débutons en rappelant la définition de la signature d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.15. *Une fonction* $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *est appelée* forme hermitienne *sur* $\mathbb{C}^n$ *si elle est linéaire par rapport au premier argument, anti-linéaire par rapport au second argument et vérifie* $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, *pour tout* x *et tout* y *dans* $\mathbb{C}^n$. *La matrice* A *de* f *dans une base* $\{e_i\}_i$ *de* $\mathbb{C}^n$ *est donnée par* $A_{i,j} = f(e_i, e_j)$.

Remarquons que les entrées diagonales de la matrice d'une forme hermitienne dans une base quelconque sont toutes réelles.

Théorème 3.2.16. *(Sylvester) Si* f *est une forme hermitienne sur* $\mathbb{C}^n$, *alors il existe une base* B *de* $\mathbb{C}^n$ *telle que la matrice de* f *dans la base* B, *notée* $A_B(f)$, *est diagonale. De plus, si* B *et* B' *sont deux bases de* $\mathbb{C}^n$ *telles que* $A_B(f)$ *et* $A_{B'}(f)$ *sont diagonales, alors* $A_B(f)$ *et* $A_{B'}(f)$ *ont le même nombre d'entrées diagonales strictement positives.*

Remarquons que puisque $A_B(f)$ et $A'_B(f)$ ont le même rang r, ces deux matrices ont aussi le même nombre d'entrées diagonales strictement négatives $r - p$.

Définition 3.2.17. *Soit* f *une forme hermitienne sur* $\mathbb{C}^n$. *La* signature *de* f, *notée* $sign(f)$, *est définie par* $sign(f) = p - q$, *où* p *et* q *sont respectivement le nombre de valeurs propres strictement positives et strictement négatives de la matrice de* f *dans une base quelconque.*

Définition 3.2.18. *Soit* F *une surface de Seifert dans une 3-sphère homologique* M *et* A *la matrice de la forme de Seifert associée à* F *pour une base quelconque de* $H_1(int(F))$. *La fonction de signature de* F, *notée* $\Sigma_F : S^1 \longrightarrow \mathbb{Z}$, *est définie par* $\Sigma_F(\zeta) = sign((1 - \zeta)A + (1 - \overline{\zeta})A^T)$, *pour tout* ζ *dans* S^1.

Remarque 3.2.19. *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux surfaces de Seifert dans une 3-sphère homologique* M *et* $f : M \xrightarrow{\cong} M$ *est un homéomorphisme isotope à l'identité tel que* $f(F_1) = F_2$, *alors* $\Sigma_{F_1} = \Sigma_{F_2}$.

En effet, f *étant isotope à l'identité de* M, *il suit que* f *préserve l'orientation de* M *(car* f *induit l'identité en homologie). Par conséquent,* f *préserve la forme d'intersection de* M, *c'est-à-dire* $X \cdot Y = f(X) \cdot f(Y)$, *pour* X *et* Y *deux sous-variétés compactes, orientées et proprement plongées dans* M *pour lesquelles*

$dim(X)+dim(Y) = dim(M)$. En particulier, si J et K sont deux noeuds orientés disjoints dans M et F est une surface de Seifert pour K dans M, alors on obtient

$$\begin{aligned} lk(J, K) &= J \cdot F \\ &= f(J) \cdot f(F) \\ &= lk(f(J), f(K)). \end{aligned}$$

Si a et b sont deux courbes simples fermées orientées dans $int(F_1)$, alors $lk(a, b^+)$ est égal à $lk(f(a), f(b^+))$. Par conséquent, on a l'égalité $\sigma_{F_1}(x, y) = \sigma_{F_2}(f_*(x), f_*(y))$, pour tout x et tout y dans $H_1(int(F_1))$. Les fonctions de signatures de F_1 et F_2 sont donc égales.

On a montré à la remarque précédente que la forme de Seifert σ_F est un invariant de la surface F. Par contre, la forme de Seifert n'est pas un invariant de ∂F, car il existe des surfaces de Seifert de genres différents pour un entrelacs donné. Le théorème suivant affirme que toutes les surfaces de Seifert de l'entrelacs ∂F ont la même fonction de signature.

Théorème 3.2.20. *Soit F_1 et F_2 deux surfaces de Seifert dans une 3-sphère homologique M. Si les entrelacs ∂F_1 et ∂F_2 sont isotopes dans M (en préservant l'ordre et l'orientation des composantes), alors $\Sigma_{F_1} = \Sigma_{F_2}$.*

DÉMONSTRATION. Si ∂F_1 et ∂F_2 sont isotopes, alors F_2 peut être obtenu de F_1 par une composition finie de 0-chirurgies, 1-chirurgies et d'isotopies ambiantes. On a vu à la remarque précédente que la fonction de signature reste inchangée après un isotopie ambiante.

Considérons le cas où F_2 s'obtient de F_1 par une 1-chirurgie, c'est-à-dire que F_2 se décompose en $F_1 \setminus int(D \cup D') \cup T$, où D et D' sont des disques disjoints dans $int(F_1)$ et $T \cong S^1 \times I$ est un tube dans M tel que $T \cap F_1 = \partial T = \partial(D \cup D')$. Pour comparer les formes de Seifert de F_1 et F_2, nous devons tout d'abord exprimer $H_1(F_2)$ en termes de $H_1(F_1)$.

Soit m la courbe simple fermée $S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset T$ munie d'une orientation quelconque. Soit α un arc proprement plongé de $F_1 \setminus int(D \cup D')$ reliant un point x

de ∂D à un point x' de $\partial D'$ et soit β un arc proprement plongé de T reliant x à x'. Notons l la courbe simple fermée $\alpha \cup \beta$ orientée telle que $m \cdot l = +1$ dans F_2.

Le théorème de Mayer-Vietoris nous donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(\partial T) \xrightarrow{f} H_1(F_1 \setminus int(D \cup D')) \oplus H_1(T) \xrightarrow{g} H_1(F_2) \xrightarrow{h} H_0(\partial T).$$

On a donc la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow Im(g) \longrightarrow H_1(F_2) \xrightarrow{h} Im(h) \longrightarrow 0.$$

Un calcul direct du noyau de l'homomorphisme $H_0(\partial T) \longrightarrow H_0(F_1 \setminus int(D \cup D')) \oplus H_0(T)$ de la suite de Mayer-Vietoris nous donne que l'image de h est le groupe abélien libre avec base la classe représentée par $\partial\alpha = \pm(x - x')$. Posons $s : Im(h) \longrightarrow H_1(F_2)$ l'homomorphisme défini par $s([\partial\alpha]) = [l]$. Par définition de s et h, on a que $h \circ s$ est l'identité de $Im(h)$. Ainsi, $H_1(F_2)$ se décompose en $Im(g) \oplus Im(s) = Im(g) \oplus < [l] >$.

On remarque que $Im(g)$ est donné par

$$Im(g) \cong \frac{H_1(F_1 \setminus int(D \cup D')) \oplus H_1(T)}{Im(f)}.$$

Or, $H_1(F_1 \setminus int(D \cup D'))$ est isomorphe à $H_1(F_1) \oplus \mathbb{Z}^2$, où le facteur $\mathbb{Z}^2$ a pour base $\{[\partial D], [\partial D']\}$. De plus, $Im(f)$ est le sous-groupe de $H_1(F_1 \setminus int(D \cup D')) \oplus H_1(T)$ ayant pour base $\{([\partial D], [m]), ([\partial D'], [m])\}$. Il suit que $Im(g)$ est isomorphe à $H_1(F_1) \oplus \mathbb{Z}$, où le facteur $\mathbb{Z}$ est engendré par $[m]$. On conclut donc que $H_1(F_2)$ est isomorphe à $H_1(F_1) \oplus \mathbb{Z}^2$, où le facteur $\mathbb{Z}^2$ a pour base $\{[m], [l]\}$.

Notons A la matrice de σ_{F_1} pour une base B de $H_1(int(F_1))$ fixée. La matrice A' de σ_{F_2} pour la base $B \cup \{[m], [l]\}$ est donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ v' & 1 & n \end{pmatrix}$$

où v est une matrice colonne, v' est une matrice ligne et n est un entier.

La matrice $A'(\zeta) = (1 - \zeta)A' + (1 - \overline{\zeta})A'^T$ est alors donnée par

$$A'(\zeta) = \begin{pmatrix} A(\zeta) & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 1-\overline{\zeta} \\ \overline{\omega}^T & 1-\zeta & z \end{pmatrix}$$

où $A(\zeta) = (1-\zeta)A + (1-\overline{\zeta})A^T$, ω est une matrice colonne et z est un nombre complexe.

Par définition, $\Sigma_{F_1}(1)$ et $\Sigma_{F_2}(1)$ sont tous deux nuls. Pour $\zeta \neq 1$, après un changement de base, $A'(\zeta)$ devient

$$A''(\zeta) = \begin{pmatrix} A(\zeta) & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 1 \\ \overline{\omega}^T & 1 & z \end{pmatrix}.$$

Ce changement de base correspond à multiplier l'avant-dernière colonne de $A'(\zeta)$ par $(1-\zeta)^{-1}$ et à mutiplier l'avant-dernière ligne de $A'(\zeta)$ par $(1-\overline{\zeta})^{-1}$, ce qui revient à conjuguer $A'(\zeta)$ par une matrice unitaire dans $U(r)$, où r est le rang de $H_1(int(F_2))$. La signature de la matrice $A''(\zeta)$ est donc la même que celle de $A'(\zeta)$. En utilisant la ligne $(0,0,\ldots,1)$ de $A''(\zeta)$ pour éliminer ω (et donc éliminer $\overline{\omega}^T$ en utilisant la colonne correspondante), on obtient une matrice unitaire P pour laquelle

$$P\,A''(\zeta)\,\overline{P}^T = \begin{pmatrix} A(\zeta) & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où C est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z \end{pmatrix}$.

Ainsi, la signature de $A'(\zeta)$ est la somme des signatures de $A(\zeta)$ et de C. Or, les valeurs propres de C sont non-nulles et de signes opposés, car le déterminant de C est négatif. On conclut que la signature de C est nulle. On a donc montré que $\Sigma_{F_1}(\zeta)$ et $\Sigma_{F_2}(\zeta)$ sont égaux.

Si F_2 s'obtient de F_1 par une 0-chirurgie, alors F_1 s'obtient de F_2 par une 1-chirurgie et la démarche précédente nous donne $\Sigma_{F_1} = \Sigma_{F_2}$.

□

Définition 3.2.21. *Soit L un entrelacs orienté dans une 3-sphère homologique M. La* fonction de signature *de L, notée $\Sigma_L : S^1 \longrightarrow \mathbb{Z}$, est définie par $\Sigma_L = \Sigma_F$, où F est une surface de Seifert pour L dans M.*

Par le théorème précédent, Σ_L est bien défini. Si $-L$ est l'entrelacs L où on a changé l'orientation de chaque composante, alors Σ_L est égal à Σ_{-L}. En effet, si F est une surface de Seifert pour L dans M et que $-F$ est la surface F munie de l'orientation opposée, alors $-F$ est une surface de Seifert pour $-L$ dans M. Si A_F est la matrice de la forme de Seifert σ_F pour une base de $H_1(int(F))$ fixée et que A_{-F} est la matrice de σ_{-F} pour cette même base, alors $A_{-F} = A_F^T$. Puisque la signature d'une matrice hermitienne ne change pas sous transposition, on a $\Sigma_F = \Sigma_{-F}$. En particulier, pour un noeud K, la fonction de signature ne dépend pas de l'orientation de K.

Exemple 3.2.22. *Considérons la surface $F \subset S^3$ de l'exemple précédent. Le noeud $K = \partial F$ est le noeud de trèfle (à droite). Calculons la fonction de signature Σ_K. La matrice A de la forme de Seifert σ_F est*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour $\zeta \in S^1$, la matrice $A(\zeta) = (1-\zeta)A + (1-\overline{\zeta})A^T$ est donnée par

$$A(\zeta) = \begin{pmatrix} -|1-\zeta|^2 & 1-\zeta \\ 1-\overline{\zeta} & -|1-\zeta|^2 \end{pmatrix}$$

où on a utilisé la relation $|1-\zeta|^2 = (1-\zeta) + (1-\overline{\zeta})$.

On peut ensuite montrer que $A(\zeta)$ est congruente, c'est-à-dire égale à conjugaison dans $U(2)$ près, à la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} -|1-\zeta|^2 & 0 \\ 0 & 1-|1-\zeta|^2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\zeta = e^{i\theta} \neq 1$, la signature de $A(\zeta)$ est alors donnée par

$$sign(A(\zeta)) = \begin{cases} 0, & si\ cos\ \theta > \frac{1}{2} \\ -1, & si\ cos\ \theta = \frac{1}{2} \\ -2, & si\ cos\ \theta < \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Remarquons que Σ_K est constante (et donc continue) sur les composantes connexes de $S^1 \backslash \{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}}\}$. Pour un noeud quelconque K, on peut montrer que Σ_K est constante sur les composantes de $S^1 \backslash (\Delta_K^{-1}(0) \cup \{1\})$, où $\Delta(t) = det(\sigma_K - t\sigma_K)$ est le polynôme d'Alexander de K.

Nous terminons cette section en considérant la fonction signature de l'image mirroir d'un noeud.

Proposition 3.2.23. *Soit K un noeud dans une 3-sphère homologique M et K' l'image de K par un homéomorphisme $f : M \xrightarrow{\cong} M$ renversant l'orientation de M. On a alors l'égalité suivante*

$$\Sigma_K = -\Sigma_{K'}$$

Démonstration. Puisque f renverse l'orientation de M, on a que f change le signe de la forme d'intersection sur M, c'est-à-dire on a l'égalité $X \cdot Y = -f(X) \cdot f(Y)$ pour X et Y des sous-variété compactes, orientées et proprement plongées dans M pour lesquelles $dim(X) + dim(Y) = dim(M)$. Fixons une orientation sur K. Soit F une surface de Seifert pour K dans M et notons F' la surface $f(F)$.

On oriente F' de manière à ce que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M \setminus F \arrow[r, "f"] & M \setminus F' \\ F \arrow[u, "i_F^+"] \arrow[r, "f"] & F' \arrow[u, "i_{F'}^+"'] \end{tikzcd}$$

Si a et b sont deux courbes simples fermées orientées dans $int(F)$, on a

$$lk(a, b^+) = -lk(f(a), f(b^+)).$$

Par le choix de l'orientation de F', on a $f(b^+) = f(b)^+$. Par conséquent, si A est la matrice de σ_F pour une base B de $H_1(int(F))$, alors $-A$ sera la matrice de $\sigma_{F'}$ dans la base $f_*(B)$ de $H_1(int(F'))$.

$\square$

On remarque que si K est isotope à K', alors la fonction de signature Σ_K s'annulle partout sur S^1. Par exemple, on peut montrer (à l'aide de diagrammes planaires et des mouvements de Reidemeister) que le noeud de huit est isotope à son image mirroir dans S^3. La fonction de signature de ce noeud est alors identiquement nulle. Nous avons vu à l'exemple précédent que le noeud de trêfle à droite a une fonction de signature qui prend des valeurs non-nulles. Ainsi, le noeud de trêfle à droite n'est pas isotope à son image mirroir dans S^3, le noeud de trêfle à gauche.

3.2.3. Revêtements ramifiés

Dans cette sous-section, nous introduisons les *revêtements cycliques* d'une 4-variété N *ramifiés* le long d'une surface F proprement plongée dans N. Nous verrons ensuite le lien entre les signatures d'un tel revêtement ramifié et la fonction de signature de l'entrelacs ∂F (lorsque ∂N est une 3-sphère homologique). Le but sera ensuite de déterminer l'effet d'un chirurgie de Dehn sur les signatures d'un entrelacs à l'aide des revêtements ramifiés.

3.2.3.1. *Définition et existence*

Définition 3.2.24. *Soit X^{n+2} et $\tilde{X}^{n+2}$ deux variétés lisses et A^n une sous-variété proprement plongée dans X. Une fonction continue $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ est appelée un* revêtement ramifié *(cyclique) à m feuilles du couple (X, A) si elle satisfait les conditions suivantes :*

(1) $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ est une $n-$sous-variété proprement plongée de $\tilde{X}$;

(2) $p(\tilde{A}) = A$ et $p(\tilde{X} \setminus \tilde{A}) = X \setminus A$;

(3) la restriction $p| : \tilde{X} \setminus \tilde{A} \longrightarrow X \setminus A$ est un revêtement régulier avec groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/m$ et la restriction $p| : \tilde{A} \xrightarrow{\cong} A$ est un homéomorphisme ;

(4) pour chaque point $a \in A$ il existe un n-disque $D \subset A$ contenant a pour lequel il existe des plongements $\phi_a : (D \times D^2, D \times \{0\}) \longrightarrow (X, D)$ et $\tilde{\phi}_a : (\tilde{D} \times D^2, \tilde{D} \times \{0\}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{D})$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} \times D^2 & \xrightarrow{\tilde{\phi}_a} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle \mu_m}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ D \times D^2 & \xrightarrow{\phi_a} & X \end{array}$$

où $\tilde{D} = p^{-1}(D)$ et $\mu_m(\tilde{x}, z) = (p(\tilde{x}), z^m)$.

Nous étudierons les revêtements ramifiés cycliques des couples (N^4, F^2) dits $m-$spéciaux.

Définition 3.2.25. *Soit N une 4-variété lisse, compacte, connexe et orientée pour laquelle $H_1(N) = 0$ et $H_1(\partial N) = 0$, si ∂N est non-vide. Soit F une surface compacte, connexe, orientée proprement plongée dans N. On dit que le couple (N, F) est $m-$spécial, pour un entier m fixé, si m divise la classe $[F, \partial F]_N \in H_2(N, \partial N)$, c'est-à-dire s'il existe une classe $\xi \in H_2(N, \partial N)$ pour laquelle $[F, \partial F]_N = m\xi$.*

La proposition suivante assure l'existence d'un revêtement ramifié cyclique d'un couple $m-$spécial (N, F) pour lequel F a un fibré normal trivial dans N. Mentionnons qu'il existe un tel revêtement ramifié dans le cas où le fibré normal de F n'est pas trivial (voir **[V]**). Cependant, ce dernier cas ne sera pas considéré.

Proposition 3.2.26. *Si (N, F) est un* couple $m-$spécial *et que F a un fibré normal trivial, alors il existe $p : \tilde{N} \longrightarrow N$ un revêtement ramifié cyclique à m feuilles du couple (N, F) pour lequel $\tilde{N}$ est une variété compacte, connexe et orientée de manière à ce que p soit de degré m.*

De plus, il existe un homéomorphisme $\tau : \tilde{N} \xrightarrow{\cong} \tilde{N}$ d'ordre m, c'est-à-dire pour lequel m est l'entier positif minimal tel que $\tau^m = 1$, préservant l'orientation de $\tilde{N}$, ayant son ensemble de points fixes égal à $\tilde{F}$ et vérifiant $p \circ \tau = p$. Il existe un voisinage tubulaire $\tilde{V} \cong \tilde{F} \times D^2$ de $\tilde{F}$ dans $\tilde{N}$ pour lequel la restriction $\tau| : \tilde{F} \times D^2 \xrightarrow{\cong} \tilde{F} \times D^2$ est donnée par $\tau(x, z) = (x, ze^{\frac{2\pi i}{m}})$. La restriction de τ à $\tilde{N} \setminus \tilde{F}$ est un automorphisme d'ordre m du revêtement $p|\tilde{N} \setminus \tilde{F}$.

DÉMONSTRATION. La preuve qui suit est une généralisation de la construction de Kauffman (voir [**K2**] section 4) du revêtement ramifié de D^{2n+2} le long d'une variété compacte, connexe, orientable et proprement plongée F^{2n} dans D^{2n+2} qui est isotope (en fixant ∂F) à une sous-variété de ∂D^{2n+2}.

Soit $t : (F \times D^2, F \times \{0\}) \longrightarrow (N, F)$ un voisinage tubulaire de F dans N, c'est-à-dire t est un plongement et $t(x,0) = x$, pour tout x dans F. Notons N_0 l'extérieur $N \backslash t(F \times int(D))$ de F dans N. Remarquons que $N_0 \cup_{t|F\times\partial D} (F \times D)$ est homéomorphe à N. Pour obtenir le revêtement ramifié cherché, nous construirons un revêtement à m feuilles de N_0, correspondant au noyau d'un épimorphisme (à définir) $\pi_1(N_0) \longrightarrow \mathbb{Z}/m$. Pour ce faire, débutons en calculant $H_1(N_0)$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H_2(N) \arrow[r, "i_*"] & H_2(N, N_0) \arrow[r, "\partial"] & H_1(N_0) \arrow[r] & H_1(N) = 0 \\
& H_2(F \times D, F \times \partial D) \arrow[u, "\cong"', "t_*"] \arrow[r, "\partial"] & H_1(F \times \partial D) \arrow[u, "t_*"'] & \\
0 \arrow[r] & H_2(D, \partial D) \arrow[u, "\cong"', "j_*"] \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & H_1(\partial D) \arrow[u, "j_*"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les lignes du diagramme correspondent aux longues suites exactes des couples $(N, N_0), (F \times D, F \times \partial D)$ et $(D, \partial D)$. Notons que le diagramme commute par naturalité des suites associées aux couples. La fonction i est l'inclusion de N dans (N, N_0) et j dénote l'inclusion d'une fibre D de $F \times D$ au dessus d'un point fixé x_0 de F, c'est-à-dire $j : D \longrightarrow F \times D : z \mapsto (x_0, z)$.

Par excision de $N \backslash t(F \times D)$, on obtient que $t_* : H_2(F \times D, F \times \partial D) \longrightarrow H_2(N, N_0)$ est un isomorphisme. Le fait que $j_* : H_2(D, \partial D) \longrightarrow H_2(F \times D, F \times \partial D)$ est un isomorphisme découle du théorème de Kunneth. Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H_2(D, \partial D) \arrow[r, "f_1", "\cong"'] \arrow[d, "j_*"] & H_0(\{x_0\}) \arrow[d, "\cong"] \\
H_2(F \times D, F \times \partial D) \arrow[r, "f_2", "\cong"'] & H_0(F)
\end{tikzcd}$$

où f_1 et f_2 sont les isomorphismes de Kunneth pour les D^2-fibrés triviaux sur $\{x_0\}$ et F respectivement. La flèche verticale de droite est induite par l'inclusion. Par ce diagramme, j_* est un isomorphisme.

Le premier diagramme nous donne un isomorphisme $\kappa : H_2(N, N_0) \xrightarrow{\cong} H_1(\partial D)$ définit par $\kappa = \partial \circ (t_* \circ j_*)^{-1}$. Orientons D de manière à ce que le disque $D_{x_0} = t(\{x_0\} \times D)$ intersecte la surface F transversalement dans N en exactement un point de signe $+1$. Identifions $H_1(\partial D)$ à $\mathbb{Z}$ en munissant ∂D de l'orientation induite par celle de D. Par définition de κ, on remarque que $H_2(N, N_0)$ est engendré par la classe représentée par le disque orienté D_{x_0}.

Considérons l'homomorphisme $\lambda = \kappa \circ i_* : H_2(N) \longrightarrow \mathbb{Z}$. La longue suite exacte du couple (N, N_0) nous donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H_2(N) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\lambda"'] & H_2(N, N_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\kappa", "\cong"'] & H_1(N_0) \arrow[r] & 0 \\
& \mathbb{Z} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
H_1(N_0) &\cong H_2(N, N_0)/Im(i_*) \\
&\cong \mathbb{Z}/Im(\lambda) \\
&\cong \mathbb{Z}/n,
\end{aligned}$$

où $Im(\lambda) = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. À l'aide du diagramme définissant κ, on peut déterminer $\lambda(\xi)$, pour tout ξ dans $H_2(N)$. En effet, si ξ est une classe dans $H_2(N)$, alors il existe une surface fermée orientée S dans $int(N)$ pour laquelle $\xi = [S]_N \in H_2(N)$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que S intersecte F transversalement dans N et que $S \cap \partial F$ est vide. Il suit que l'intersection $S \cap t(F \times D)$ est une union disjointe (finie) de disques $\sqcup_i D_{x_i}$, où D_{x_i} est le disque $t(\{x_i\} \times D)$ muni de l'orientation induite par S et x_i est un point de $int(F)$, pour tout i. La classe $i_*(\xi)$ dans $H_2(N, N_0)$ est alors représentée par le 2-cycle $\sum_i D_{x_i}$ où, afin d'alléger la notation, nous avons noté D_{x_i} un 2-cycle fixé de (N, N_0) représentant la classe fondamentale de D_{x_i}. Puisque F est connexe par arcs, pour chaque i, le 2-cycle D_{x_i} est homologue au 2-cycle $\epsilon_i D_{x_0}$ dans (N, N_0), où ϵ_i est le nombre d'intersection

$D_{x_i} \cdot F$. On obtient alors les égalités

$$\begin{aligned}
\lambda(\xi) &= \sum_i \partial \circ j_*^{-1} \circ t_*^{-1}([D_{x_i}]) \\
&= \sum_i \epsilon_i \partial \circ j_*^{-1} \circ t_*^{-1}([D_{x_0}]) \\
&= \sum_i \epsilon_i \partial \circ j_*^{-1}([\{x_0\} \times D]) \\
&= \sum_i \epsilon_i [\partial D].
\end{aligned}$$

Or, le nombre d'intersection $S \cdot F = \xi \cdot [F, \partial F]_N$ est égal à la somme $\sum_i \epsilon_i$. On conclut que λ est donné par

$$\lambda(\xi) = \xi \cdot [F, \partial F]_N.$$

Puisque m divise la classe $[F, \partial F]_N$, il suit que m divise n. Le groupe $H_1(N_0)$ est donc cyclique et son ordre n est un multiple de m. De plus, $H_1(N_0)$ est engendré par la classe représentée par le cercle orienté ∂D_{x_0}. Le théorème des coefficients universels en homologie donne l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
H_1(N_0; \mathbb{Z}/m) &\cong H_1(N_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \\
&\cong \mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \\
&\cong \mathbb{Z}/pgcd(n, m) \\
&\cong \mathbb{Z}/m, \text{ car m divise n.}
\end{aligned}$$

Soit $\phi : \pi_1(N_0) \longrightarrow \mathbb{Z}/m$ l'épimorphisme donné par la composition suivante

$$\pi_1(N_0) \xrightarrow{Hurewicz} H_1(N_0) \longrightarrow H_1(N_0; \mathbb{Z}/m) \cong \mathbb{Z}/m,$$

où l'homomorphisme $H_1(N_0) \longrightarrow H_1(N_0; \mathbb{Z}/m)$ est donné par $\xi \mapsto \xi \otimes \overline{1}$.

Soit $p : \tilde{N}_0 \longrightarrow N_0$ l'unique revêtement (connexe) de N_0 réalisant $Ker(\phi)$. Le revêtement p est alors régulier et $Aut(p)$ est isomorphe au quotient $\pi_1(N_0)/Ker(\phi) \cong \mathbb{Z}/m$. Remarquons que par définition, le noyau de ϕ est exactement l'ensemble des classes d'isotopie de lacets σ dans N_0 tels que σ est homologue à un multiple de m fois ∂D_{x_0} dans N_0.

Soit $\mu : F \times \partial D \longrightarrow F \times \partial D$ le revêtement défini par $\mu(x,z) = (x, z^m)$, pour tout (x,z) dans $F \times \partial D$. Montrons qu'il existe un plongement $t' : F \times \partial D \longrightarrow N_0$ tel que $t'(F \times \partial D) = t(F \times \partial D)$ et la composition $t' \circ \mu$ se relève par rapport à p, c'est-à-dire il existe une solution $\tilde{t}$ au problème suivant

$$\begin{tikzcd}
F \times \partial D \arrow[r, "\tilde{t}"] \arrow[d, "\mu"] & \tilde{N_0} \arrow[d, "p"] \\
F \times \partial D \arrow[r, "t'"] & N_0
\end{tikzcd}.$$

Soit $u : F \longrightarrow \partial D$ une fonction continue. Notons σ_u le plongement $F \longrightarrow F \times \partial D : x \mapsto (x, u(x))$ et notons F_u l'image de σ_u. Montrons en premier lieu qu'il existe un u pour lequel l'homomorphisme $H_1(F_u) \longrightarrow H_1(N_0)$ induit par la restriction de t à F_u est trivial.

Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ une base de $H_1(F)$ et notons $\{\hat{\alpha_1}, \ldots, \hat{\alpha_k}\}$ la base de $H_1(F_u)$ définie par $\hat{\alpha_i} = (\tau_u)_*(\alpha_i)$, où $\tau_u : F \xrightarrow{\cong} F_u$ est la restriction de σ_u sur son image. Par le théorème de Kunneth, $H_1(F \times \partial D)$ est isomorphe à $H_1(F_0) \oplus H_1(\partial D)$, où $F_0 = F \times \{1\} \subset F \times \partial D$. Le diagramme commutatif suivant résume la situation

$$\begin{tikzcd}
\alpha_i \arrow[rr, mapsto, "(\sigma_u)_*"] \arrow[dr, mapsto, "(\tau_u)_*"'] & & \alpha_i + n_i[\partial D] \\
& \hat{\alpha_i} \arrow[ur, mapsto, "(\iota)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

où ι est l'inclusion de F_u dans $F \times \partial D$ et les n_i sont des entiers tels que $u_*(\alpha_i) = n_i[\partial D]$. Notons $t_0 : F_0 \longrightarrow N_0$ la restriction de t à F_0 et notons $(t_0)_*(\alpha_i) = m_i[\partial D_{x_0}] \in H_1(N_0)$, pour tout i. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F_u \arrow[rr, "t_u"] \arrow[dr, "\iota"'] & & N_0 \\
& F \times \partial D \arrow[ur, "t|"'] &
\end{tikzcd}$$

où t_u est la restriction de t à F_u. À l'aide du foncteur H_1, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\hat{\alpha}_i \arrow[rr, mapsto, "(t_u)_*"] \arrow[dr, mapsto] & & (m_i + n_i)[\partial D_{x_0}] \\
& \alpha_i + n_i[\partial D] \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}.$$

Pour que $(t_u)_*$ soit trivial, il suffit de choisir $u : F \longrightarrow S^1$ de manière à avoir $n_i = -m_i$, pour tout i. Cette dernière condition est équivalente à demander que $u_*(\alpha_i)$ soit égal à $-m_i[\partial D]$, pour tout i. Remarquons que les m_i ne dépendent que de t, par définition.

Le choix d'un tel u est possible car il existe des courbes simples fermées orientées $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ dans $int(F)$ telles que

(1) $[\gamma_i] = \alpha_i \in H_1(F)$, pour tout i ;

(2) $\cup_{i=1}^{k} \gamma_i$ est homéomorphe à un bouquet de k 1-sphères ;

(3) l'inclusion de $\cup_{i=1}^{k} \gamma_i$ dans F est une équivalence d'homotopie.

On n'a alors qu'à choisir pour chaque i une fonction continue $u_i : (\gamma_i, *) \longrightarrow (\partial D, *)$ de degré $-m_i$, où $*$ est le point d'intersection des γ_i. La fonction u cherchée est alors définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "u"'] & \cup_i \gamma_i \arrow[d, "\cup_i u_i"] \\
& \partial D
\end{tikzcd}$$

où g est un inverse homotopique de l'inclusion de $\cup_i \gamma_i$ dans F. On définit t' : $F \times \partial D \longrightarrow N_0$ par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F \times \partial D \arrow[r, "t|"] & N_0 \\
F \times \partial D \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "t'"] &
\end{tikzcd}$$

où $F \times \partial D \xrightarrow{\cong} F \times \partial D : (x, z) \mapsto (x, u(x)z)$. On obtient alors

$$\begin{tikzcd} H_1(F_u) \arrow[r, "(t_u)_*=0"] & H_1(N_0) \\ H_1(F_0) \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "(t'_0)_*"'] & \end{tikzcd}$$

où t'_0 est la restriction de t' à F_0. Puisque le diagramme précédent commute, il suit que $(t'_0)_*$ est trivial. Le plongement t' induit alors en homologie $H_1(F_0) \oplus H_1(\partial D) \longrightarrow H_1(N_0) : (\xi, a[\partial D]) \mapsto a[\partial D_{x_0}]$. De plus, $\mu_\sharp : \pi_1(F_0) \times \pi_1(\partial D) \longrightarrow \pi_1(F_0) \times \pi_1(\partial D)$ est donné par $\mu_\sharp(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta^m)$.

L'homomorphisme d'Hurewicz donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \pi_1(F_0) \times \pi_1(\partial D) \arrow[r, "(t')_\sharp"] \arrow[d, "Hurewicz"'] & \pi_1(N_0) \arrow[d, "Hurewicz"] \\ H_1(F_0) \oplus H_1(\partial D) \arrow[r, "(t')_*"] & H_1(N_0) \end{tikzcd}$$

Par définition, l'épimorphisme ϕ se factorise en

$$\begin{tikzcd} \pi_1(N_0) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "Hurewicz"'] & \mathbb{Z}/m \\ H_1(N_0) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} .$$

Pour un élément (α, β) de $\pi_1(F_0) \times \pi_1(\partial D)$, on a

$$\begin{tikzcd} (\alpha, \beta) \arrow[d, mapsto, "\mu_\sharp"'] & & \\ (\alpha, \beta^m) \arrow[r, mapsto, "(t')_\sharp"] \arrow[d, mapsto, "Hurewicz"'] & (t')_\sharp(\alpha, \beta^m) \arrow[d, mapsto, "Hurewicz"'] \arrow[dr, mapsto, "\phi"] & \\ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}^m) \arrow[r, mapsto, "(t')_*"] & m(t')_*(\tilde{\beta}) \arrow[r, mapsto, "\psi"] & 0 \end{tikzcd} .$$

Par conséquent, l'image de $(t' \circ \mu)_\sharp$ est contenue dans le noyau de ϕ. Or, par définition du revêtement p, l'image de $p_\sharp$ est égale à $Ker(\phi)$. Il suit que $t' \circ \mu$ se relève par rapport à p en une fonction continue $\tilde{t} : F \times \partial D \longrightarrow \tilde{N}_0$.

Remarquons que la fonction $\tilde{t}$ est un plongement. En effet, si $\tilde{t}(x,z)$ est égal à $\tilde{t}(x',z')$, alors $\mu(x,z)$ est égal à $\mu(x',z')$, par définition de $\tilde{t}$ et car t' est injective. Par conséquent on a $x' = x$ et $z' = ze^{\frac{2\pi ik}{m}}$, pour un certain entier k. Considérons σ l'arc de $F \times S^1$ reliant (x,z) à (x,z') défini par $\sigma : I \longrightarrow F \times S^1 : s \mapsto (x, ze^{\frac{2\pi iks}{m}})$. On a alors que $\tilde{t} \circ \sigma$ est un lacet de $\tilde{N}_0$ basé en $\tilde{t}(x,z)$ et donc la classe d'homotopie du lacet $p \circ \tilde{t} \circ \sigma$ dans N_0 appartient à $p_\sharp(\pi_1(\tilde{N}_0)) = Ker(\phi)$. Par définition de σ, l'image par ϕ de la classe d'homotopie de $p \circ \tilde{t} \circ \sigma = t \circ \mu \circ \sigma$ dans N_0 est $\overline{k} \in \mathbb{Z}/m$. On conclut alors que m divise k et donc $(x,z) = (x',z')$. La fonction $\tilde{t}$ est donc injective. Puisque le domaine de $\tilde{t}$ est compact et que son codomaine est un espace Haussdorff, il suit que $\tilde{t}$ est une fonction fermée et donc un plongement.

On peut prolonger t' sur $F \times D$

$$\begin{tikzcd} F \times D \arrow[r, "t"] & N_0 \\ F \times D \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "t'"] & \end{tikzcd}$$

où $F \times D \xrightarrow{\cong} F \times D : (x,z) \mapsto (x, u(x)z)$. La variété N est homéomorphe à $N_0 \cup_{t'|F\times\partial D} (F \times D)$. On pose $\tilde{N} = \tilde{N}_0 \cup_{\tilde{t}} (F \times D)$ et le revêtement ramifié $\tilde{p} : \tilde{N} \longrightarrow N$ est défini par

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} p(x), \text{ si } x \in \tilde{N}_0 \\ (y, z^m), \text{ si } x = (y,z) \in F \times D. \end{cases}$$

Remarquons que $\tilde{p}$ est bien défini par définition de $\tilde{t}$. On note $\tilde{F} \subset \tilde{N}$ l'image du plongement naturel de $F \times \{0\}$ dans $\tilde{N}$.

Considérons maintenant τ l'automorphisme de p correspondant au générateur $\overline{1}$ de $\mathbb{Z}/m$ via l'isomorphisme $Aut(p) \cong \pi_1(N_0)/Ker(\phi) \cong \mathbb{Z}/m$. Nous verrons que la restriction $\tau| : \tilde{t}(F \times \partial D) \xrightarrow{\cong} \tilde{t}(F \times \partial D)$ est donnée par $\tau(\tilde{t}(x,z)) = (x, ze^{\frac{2\pi i}{m}})$. En utilisant le fait que τ est un automorphisme de p et la définition de $\tilde{t}$, on voit qu'il existe une fonction $k : F \times \partial D \longrightarrow \{1, \ldots, m-1\}$ pour laquelle $\tau(\tilde{t}(x,z)) = \tilde{t}(x, ze^{\frac{2\pi i k(x,z)}{m}})$. De plus, on peut montrer que k est continue et donc constante, car $F \times \partial D$ est connexe. Or, τ correspond à l'élément de $\pi_1(N_0)/Ker(\phi)$ représenté par la classe d'homotopie de ∂D_{x_0} dans N_0. Il suit que $k(x_0, 1) = 1$, c'est-à-dire

$\tau(\tilde{t}(x_0,1)) = \tilde{t}(x_0, e^{\frac{2\pi i}{m}})$. On obtient donc $\tau(\tilde{t}(x,z)) = (x, ze^{\frac{2\pi i}{m}})$, pour tout (x,z) dans $F \times \partial D$.

On peut maintenant définir l'homéomorphisme $\tilde{\tau} : \tilde{N} \xrightarrow{\cong} \tilde{N}$ par

$$\tilde{\tau}(x) = \begin{cases} \tau(x), \text{ si } x \in \tilde{N}_0 \\ (y, ze^{\frac{2\pi i}{m}}), \text{ si } x = (y,z) \in F \times D \end{cases} .$$

Par le paragraphe précédent, $\tilde{\tau}$ est bien défini et $\tilde{p} \circ \tilde{\tau} = \tilde{p}$. De plus, $\tilde{\tau}$ est d'ordre m. Puisque τ est un automorphisme non-trivial et n'a donc pas de points fixes (car les automorphismes de p agissent librement sur N_0), il suit que l'ensemble des points fixes de $\tilde{\tau}$ est exactement $\tilde{F}$.

On munit $\tilde{N}$ de l'orientation rendant $\tilde{p}$ une fonction de degré m. Dans ce cas, $\tilde{\tau}$ préserve l'orientation de $\tilde{N}$, car $\tilde{p} \circ \tilde{\tau} = \tilde{p}$. Par conséquent, $\tilde{\tau}$ préserve la forme d'intersection sur $\tilde{N}$.

$\square$

Remarque 3.2.27. *Unicité de $(\tilde{N}, p, \tau)$.*

Soit (N,F) un couple $m-$spécial pour lequel F a un fibré normal trivial et $V \cong F \times D^2$ un voisinage tubulaire de F dans N. Notons $N_0 = N \setminus (F \times int(D))$. Nous avons vu dans la preuve de la proposition précédente que $H_1(N_0)$ est cyclique d'ordre un multiple n de m et est engendré par la classe d'homologie représentée par le bord d'un disque orienté $\{*\} \times D^2$ intersectant F transversalement en un point de signe $+1$. On obtient alors un revêtement (connexe) $p : \tilde{N}_0 \longrightarrow N_0$ correspondant au noyau de l'homomorphisme ϕ, donné par la composition suivante

$$\pi_1(N_0) \xrightarrow{Hurewicz} H_1(N_0) \longrightarrow H_1(N_0; \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m,$$

où l'homomorphisme $H_1(N_0) \longrightarrow H_1(N_0; \mathbb{Z}/m)$ est donné par $\xi \mapsto \xi \otimes \overline{1}$.

Montrons que si $q : \hat{N}_0 \longrightarrow N_0$ est un revêtement régulier (connexe) avec $Aut(q) \cong \mathbb{Z}/m$, alors q est équivalent (au sens des revêtements) à $p : \tilde{N}_0 \longrightarrow N_0$. Il suffit de montrer que $q_\sharp(\pi_1(\hat{N}_0))$ est égal au noyau de ϕ. Notons ψ l'homomorphisme donné par la composition suivante

$$\pi_1(N_0) \longrightarrow \frac{\pi_1(N_0)}{q_\sharp(\pi_1(\hat{N}_0))} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m .$$

Par définition, $Ker(\psi) = q_\sharp(\pi_1(\hat{N}_0))$. *Puisque* $\mathbb{Z}/m$ *est abélien,* ψ *se factorise de la manière suivante*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(N_0) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "Hurewicz"'] & \mathbb{Z}/m \\ H_1(N_0) \arrow[ur, "\psi_0"'] & \end{tikzcd} .$$

Puisque ψ *est surjective,* ψ_0 *l'est aussi et donc* $\psi_0(\overline{1}) = \overline{k}$ *engendre* $\mathbb{Z}/m$*, où* k *est choisi entre* 0 *et* $m-1$. *Ainsi,* k *et* m *sont copremiers et on a un isomorphisme, que nous noterons* k, $\mathbb{Z}/m \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m : \overline{a} \mapsto k\overline{a}$. *L'homomorphisme* ψ_0 *se factorise de la manière suivante*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/n \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/m \\ \mathbb{Z}/m \arrow[ur, "k", "\cong"'] & \end{tikzcd} ,$$

où la flèche verticale gauche représente la projection $\mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/m : \overline{a} \mapsto \overline{a}$, *qui est bien définie car* m *divise* n. *Le noyau de* ψ_0 *est donc égal à l'ensemble des classes de* $\mathbb{Z}/n$ *représentées par un mutliple de* m. *Puisque le noyau de* ψ *est* $h^{-1}(Ker(\psi_0))$, *où* h *est l'homomorphisme d'Hurewicz, on conclut que* $Ker(\psi)$ *est égal à* $Ker(\phi)$.

Il suit que si $(\hat{N}, \hat{p}, \hat{\tau})$ *et* $(\tilde{N}, p, \tau)$ *sont deux revêtements ramifiés à* m *feuilles de* (N, F), *alors il existe un homéomorphisme* $h : \hat{N} \xrightarrow{\cong} \tilde{N}$ *préservant l'orientation pour lequel* $p \circ h = \hat{p}$ *et* $\tau = h \circ \hat{\tau} \circ h^{-1}$.

À partir de maintenant, on notera le revêtement ramifié (cyclique) à m *feuilles d'un couple* $m-$*spécial* (N, F) *par* $(\tilde{N}, \tau)$ *et* τ *sera appelé l'*automorphisme canonique *du revêtement ramifié. La surface dans* $\tilde{N}$ *au-dessus de* F *sera notée* $\tilde{F}$.

Dans le cas où F *n'a pas un fibré normal trivial dans* N, *on a aussi l'unicité du revêtement ramifié cyclique à* m *feuilles de* (N, F) *et dans ce cas l'automorphisme canonique* τ *est une rotation d'angle* $2\pi/m$ *sur les fibres du fibré normal de* $\tilde{F}$ *dans* $\tilde{N}$, *c'est-à-dire que pour tout point* $\tilde{x}_0 \in \tilde{F}$ *il existe un voisinage ouvert* U *de* $\tilde{x}_0$ *dans* $\tilde{F}$ *et un plongement* $\phi_{\tilde{x}_0} : (U \times D^2, U \times \{0\}) \longrightarrow (\tilde{N}, U)$ *tel que*

$$\tau \circ \phi_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}, z) = \phi_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}, e^{\frac{2\pi i}{m}} z),$$

pour tout $(\tilde{x}, z) \in U \times D^2$ *(voir* [**V**]*).*

Si pour un couple m−spécial (N, F) avec $\partial N \neq \emptyset$, on note $(M, L) = (\partial N, \partial F)$ et $(\tilde{M}, \tilde{L}) = (\partial\tilde{N}, \partial\tilde{F})$, alors la restriction $\tilde{M} \setminus \tilde{L} \longrightarrow M \setminus L$ du revêtement ramifié à m feuilles de (N, F) est un revêtement correspondant au noyau de la composition suivante :

$$\pi_1(M \setminus L) \xrightarrow{\textit{Hurewicz}} H_1(M \setminus L) \cong \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\textit{Projection}} \mathbb{Z}/m \ ,$$

où n est le nombre de composantes de l'entrelacs L et $\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$ est donné par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$. La composition précédente correspond à faire la somme (modulo m) des nombres d'enlacement avec les composantes de L.

3.2.3.2. ζ−*signatures*

L'étude des revêtements ramifiés nous a amené à considérer l'action d'un groupe cyclique fini (engendré par l'automorphisme canonique du revêtement ramifié) sur une 4-variété. Nous verrons le lien entre les ζ−*signatures* d'une 4-variété admettant une action cyclique et l'ensemble des points fixes de cette action.

Soit N^{4n} une variété compacte, connexe et orientée et soit G un groupe cyclique (fini) d'ordre m d'homéomorphismes de N préservant l'orientation. Fixons un générateur $g \in G$. Puisque g préserve l'orientation de N, g_* est une isométrie de la forme $\iota : H_{2n}(N; \mathbb{R}) \times H_{2n}(N; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\iota(x, y) = x \cdot j(y)$, où $\cdot : H_{2n}(N; \mathbb{R}) \times H_{2n}(N, \partial N; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme d'intersection de N en dimension $2n$ et $j : H_{2n}(N; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{2n}(N, \partial N; \mathbb{R})$ est induit par l'inclusion. Le fait que $2n$ est pair entraîne que ι est une forme bilinéaire symétrique. Notons $H^{\mathbb{C}}$ le $\mathbb{C}$−espace vectoriel (de dimension finie, car N est compacte) $H_{2n}(N; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong H_{2n}(N; \mathbb{C})$ et $\iota^{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}} \times H^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme hermitienne définie par $\iota^{\mathbb{C}}(x \otimes \lambda, y \otimes \mu) = \lambda\overline{\mu}\iota(x, y)$.

On pose $g_*^{\mathbb{C}} = g_* \otimes 1_{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} H^{\mathbb{C}}$. Puisque $g^m = 1$, on a $(g_*^{\mathbb{C}})^m = 1$ et donc les valeurs propres de $g_*^{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$ sont des racines m-ièmes de l'unité. L'espace $H^{\mathbb{C}}$ se décompose alors en $H^{\mathbb{C}} = \oplus_{\zeta^m=1} H_\zeta$, où H_ζ est l'espace propre $Ker(g_*^{\mathbb{C}} - \zeta 1)$, pour $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^m = 1$. Cette décomposition est orthogonale par rapport à $\iota^{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire si $\zeta_1^m = \zeta_2^m = 1$ et $\zeta_1 \neq \zeta_2$, alors $\iota^{\mathbb{C}}(H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}) = 0$. Ceci découle du fait que $g_*^{\mathbb{C}}$ est une isométrie de la forme hermitienne $\iota^{\mathbb{C}}$. En choisissant une base de chaque H_ζ non-nul et en faisant l'union de ces bases, on obtient une base de $H^{\mathbb{C}}$

dans laquelle la matrice de $\iota^{\mathbb{C}}$ est diagonale par blocs. On peut donc associer à chaque valeur propre de $g_*^{\mathbb{C}}$ la signature du bloc (hermitien) de $\iota^{\mathbb{C}}$ correspondant.

Définition 3.2.28. *Soit N^{4n} une variété compacte, connexe et orientée, $g : N \xrightarrow{\cong} N$ un homéomorphisme préservant l'orientation de N tel que $g^m = 1$ et $\zeta = e^{\frac{2\pi i k}{m}} \in \mathbb{C}$, où $0 \leq k < m$. La $\zeta-$*signature *du couple (N, g), notée $\sigma_\zeta(N, g)$ (ou $\sigma_k(N, g)$) est définie par*

$$\sigma_\zeta(N, g) = sign(\iota^{\mathbb{C}}|H_\zeta \times H_\zeta) \in \mathbb{Z},$$

où la notation utilisée est celle des paragraphes précédents. La $g-signature$ de N, notée $\sigma(N, g)$, est définie par

$$\sigma(N, g) = \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k \sigma_k(N, g),$$

où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. La signature *de N, notée $\sigma(N)$, est la signature de la forme bilinéaire symétrique ι (voir paragraphes précédents).*

Remarque 3.2.29. *Dans la notation de la définition précédente, on a $H^{\mathbb{C}} = H_{\omega^0} \oplus \cdots \oplus H_{\omega^{m-1}}$. Par dualité de Poincaré-Lefschetz, la forme ι est non-dégénérée et donc $\iota^{\mathbb{C}}$ est non-dégénérée. Il suit que chaque bloc $\iota^{\mathbb{C}}|H_{\omega^k} \times H_{\omega^k}$ est non-dégénéré pour $0 \leq k < m$. Par conséquent, pour tout k, H_{ω^k} se décompose en $H_{\omega^k}^+ \oplus H_{\omega^k}^-$ avec $\iota^{\mathbb{C}}|H_{\omega^k}^\pm \times H_{\omega^k}^\pm$ définie positive (respectivement négative). Ainsi, on a $H^{\mathbb{C}} = H^+ \oplus H^-$, où $H^\pm = \oplus_k H_{\omega^k}^\pm$, et $\iota^{\mathbb{C}}|H^\pm \times H^\pm$ est définie positive (respectivement négative). Puisque $g_*^{\mathbb{C}}$ est une isométrie de $\iota^{\mathbb{C}}$, on a $g_*^{\mathbb{C}}(H^\pm) = H^\pm$. On obtient alors*

$$\begin{aligned} tr(g_*^{\mathbb{C}}|H^+) - tr(g_*^{\mathbb{C}}|H^-) &= \sum_k \omega^k dim_{\mathbb{C}} H_{\omega^k}^+ - \sum_k \omega^k dim_{\mathbb{C}} H_{\omega^k}^- \\ &= \sum_k \omega^k \sigma_k(N, g) \\ &= \sigma(N, g), \end{aligned}$$

où $tr(\cdot)$ désigne la trace d'une application linéaire. On remarque que pour $0 \leq s < m$, H_{ω^k} est égal à l'espace propre $Ker((g_*^{\mathbb{C}})^s - \omega^{sk}1)$ de $(g_*^{\mathbb{C}})^s$ associé à la valeur *propre ω^{sk}. En répétant l'argument précédent pour $(g_*^{\mathbb{C}})^s$, on obtient la formule*

$$\sigma(N, g^s) = \sum_{k=0}^{m-1} \omega^{sk} \sigma_k(N, g).$$

Le reste de la présente section est consacré à certaines propriétés utiles des $\zeta-$signatures.

Théorème 3.2.30. *(Additivité de Novikov) Soit N_1^{4n} et N_2^{4n} deux variétés (avec bord) compactes, connexes et orientées et soit $g_i : N_i \xrightarrow{\cong} N_i$, pour $i = 1, 2$, un homémorphisme préservant l'orientation de N_i tel que $g_i^m = 1$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $h : \partial N_1 \xrightarrow{\cong} -\partial N_2$ tel que $g_1|\partial N_1 = h^{-1} \circ g_2|\partial N_2 \circ h$. Si $(N, g) = (N_1 \cup_h N_2, g_1 \cup g_2)$, alors on a l'égalité*

$$\sigma_\zeta(N, g) = \sigma_\zeta(N_1, g_1) + \sigma_\zeta(N_2, g_2),$$

où $\zeta \in \mathbb{C}$ est tel que $\zeta^m = 1$.

DÉMONSTRATION. Voir le théorème 13.1 dans le livre de Kauffman **[K1]** ou la proposition 7.1 dans l'article de Atiyah et Singer **[AS]**.

□

Remarquons que si $-N$ désigne la variété compacte, connexe et orientée N^{4n} munie de l'orientation opposée, alors $\iota_{-N} = -\iota_N$, où ι_{-N} et ι_N sont les formes d'intersection de $-N$ et N respectivement en dimension $2n$. Par conséquent, on a l'égalité $\sigma_\zeta(-N, g) = -\sigma_\zeta(N, g)$, pour $g : N \xrightarrow{\cong} N$ un homéomorphisme préservant l'orientation de N tel que $g^m = 1$ et $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^m = 1$.

Le cas particulier suivant du théorème de $G-$signature pour les 4-variétés sera utile pour étudier les signatures des revêtements ramifiés.

Théorème 3.2.31. *(G-signature) Soit N^4 une variété lisse fermée et orientée et soit $g : N \xrightarrow{\cong} N$ un difféomorphisme tel que $Fix(g) = \{x \in N | g(x) = x\}$ est une sous-variété fermée et orientée F^2 proprement plongée dans N. S'il existe un angle non-nul θ tel que g est une rotation d'angle θ sur les fibres du fibré normal de F dans N, alors la $g-$signature de N est donnée par*

$$\sigma(N, g) = F^2 cosec^2(\theta/2),$$

où F^2 est le nombre d'auto-intersection $F \cdot F$ de F.

DÉMONSTRATION. Voir les chapitres 13 et 14 dans [**K1**].

□

Corollaire 3.2.32. *Soit (N, F) un couple $m-$spécial avec $\partial N = \emptyset$ et $(\tilde{N}, \tau)$ le revêtement ramifié (cyclique) à m feuilles de (N, F). Alors,*

$$\sigma_k(\tilde{N}, \tau) = \sigma(N) - \frac{2F^2 k(m-k)}{m^2},$$

où $0 < k < m$ et F^2 est le nombre d'auto-intersection $F \cdot F$ de F.

Remarquons qu'on ne suppose pas que F a un fibré normal trivial dans N.

DÉMONSTRATION. Par la remarque précédente, pour $0 \leq s < m$, on a

$$\sigma(\tilde{N}, \tau^s) = \sum_{r=0}^{m-1} \omega^{rs} \sigma_r(\tilde{N}, \tau),$$

où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$.

Montrons que $\sigma_0(\tilde{N}, \tau) = \sigma(N)$. Soit $T : H_2(N; \mathbb{R}) \longrightarrow H_2(\tilde{N}; \mathbb{R})$ définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_2(\tilde{N}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{D_{\tilde{N}}} & H^2(\tilde{N}; \mathbb{R}) \\ \uparrow {\scriptstyle T} & & \uparrow {\scriptstyle p^*} \\ H_2(N; \mathbb{R}) & \xrightarrow{D_N} & H^2(N; \mathbb{R}) \end{array}$$

où $p : \tilde{N} \longrightarrow N$ est le revêtement ramifié considéré, D_N et $D_{\tilde{N}}$ sont les inverses des isomorphismes $\cdot \cap [N]$ et $\cdot \cap [\tilde{N}]$ respectivement et $\cap$ dénote le produit cap.

Si on suppose que $\tilde{N}$ est orientée de manière à ce que p soit de degré m, alors on obtient (en utilisant les propriétés du produit cap) que $p_* \circ T : H_2(N; \mathbb{R}) \longrightarrow H_2(N; \mathbb{R})$ est la multiplication par m, c'est-à-dire que $p_* \circ T(\xi) = m\xi$, pour tout $\xi \in H_2(N; \mathbb{R})$. Par conséquent, $p_* \circ T$ (et donc T) est injective.

Or, on a l'égalité $Im(T) = Ker(\tau_* - 1)$. En effet, en utilisant le fait que τ est un automorphisme de p et les propriétés du produit cap, on voit que τ_* est l'identité sur l'image de T. Pour voir que tout point fixe de τ_* est dans l'image de T, fixons une triangulation de N pour laquelle F est un sous-complexe et prenons V un voisinage simplicial de F dans N tel que $N \setminus int(V)$ et V sont des sous-complexes de N. On peut alors relever la triangulation de $N \setminus int(V)$ en une triangulation de $\tilde{N} \setminus int(p^{-1}(V))$ et définir une triangulation $\tau-$invariante de $p^{-1}(V)$ pour ainsi obtenir une triangulation $\tau-$invariante de $\tilde{N}$. Il suit que pour chaque q-simplexe $\sigma : \Delta_q \longrightarrow N$ il existe un q-simplexe $\tilde{\sigma} : \Delta_q \longrightarrow \tilde{N}$ tel que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$. En considérant les triangulations duales sur N et $\tilde{N}$, on voit que $T = S_*$, où S est le chaîne-homomorphisme $C_*(N) \longrightarrow C_*(\tilde{N}) : \sigma \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} \tau^j \tilde{\sigma}$. Si $\eta \in H_2(\tilde{N})$ est un point fixe de τ_*, alors

$$\begin{aligned} T \circ p_*(\eta) &= S_* \circ p_*(\eta) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \tau_*^j(\eta) \\ &= m\eta. \end{aligned}$$

Puisqu'on considère l'homologie à coefficients réels, on conclut que $\eta \in Im(T)$.

Il suit de la définition de T et du fait que p est de degré m que $T(\xi) \cdot T(\xi')$ est égal à $m\xi \cdot \xi'$, pour tout $\xi, \xi' \in H_2(N; \mathbb{R})$. Puisque T donne un isomorphisme entre $H_2(N; \mathbb{R})$ et $Ker(\tau_* - 1)$, on conclut que la signature de N est égale à $\sigma_0(\tilde{N}, \tau)$.

L'égalité précédente devient

$$\sigma(\tilde{N}, \tau^s) - \sigma(N) = \sum_{r=1}^{m-1} \omega^{rs} \sigma_r(\tilde{N}, \tau).$$

Fixons un k tel que $0 < k < m$ et calculons $\sigma_k(\tilde{N}, \tau)$ à l'aide de la formule précédente. On remarque que la somme $\sum_{s=1}^{m-1} (\omega^{-ks} - 1)\omega^{ts}$ est égale à $m\delta_{t,k}$, où $\delta_{t,k}$ est le delta de Kronecker. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sigma_k(\tilde{N}, \tau) &= \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m-1} (\omega^{-ks} - 1)(\sigma(\tilde{N}, \tau^s) - \sigma(N)) \\ &= \sigma(N) + \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m-1} (\omega^{-ks} - 1)\sigma(\tilde{N}, \tau^s). \end{aligned}$$

Pour $0 < s < m$, le théorème de $G-$signature nous donne

$$\sigma(\tilde{N}, \tau^s) = \tilde{F}^2 cosec^2(\frac{\pi s}{m}).$$

On voit géométriquement que $\tilde{F}^2$ est égal à F^2/m (voir **[K1]** proposition 15.2). On obtient donc

$$\sigma_k(\tilde{N}, \tau) = \sigma(N) + \frac{F^2}{m^2} \sum_{s=1}^{m-1} (\omega^{-ks} - 1) cosec^2(\frac{\pi s}{m}).$$

Un calcul astucieux (voir **[K1]** proposition 15.2) donne l'égalité suivante

$$\sum_{s=1}^{m-1} (\omega^{-ks} - 1) cosec^2(\frac{\pi s}{m}) = -2k(m-k).$$

□

Pour obtenir un analogue du corollaire précédent dans le cas où (N, F) est un couple $m-$spécial tel que $\partial N \neq \emptyset$, nous étudierons le revêtement ramifié (cyclique) à $m-$feuilles de $(C(\partial N), S)$, où $C(\partial N)$ est le cône sur ∂N et S est une surface proprement plongée dans $C(\partial N)$ obtenue en poussant une suface de Seifert pour ∂F contenue dans ∂N le long de la direction normale positive à ∂N dans $C(\partial N)$.

3.2.3.3. *Revêtements ramifiés, $\zeta-$signatures et cônes*

Nous débutons en rappelant la définition du *cône* sur un espace topologique.

Définition 3.2.33. *Le* cône *sur un espace topologique X, noté $C(X)$, est obtenu de $X \times I$ en identifiant $X \times \{0\}$ en un point, que nous appellerons le* centre *de $C(X)$, c'est-à-dire*

$$C(X) = (X \times I)/(X \times \{0\}).$$

Remarquons que pour X une $n-$variété topologique, $C(X)$ est une $n+1-$variété topologique si et seulement si $X \cong S^n$. De plus, le cône sur S^n est homéomorphe à D^{n+1}. Par contre, $C(X) \setminus \{*\}$ est homéomorphe à la variété $X \times]0, 1]$, où $*$ est le centre du cône sur la variété X.

Définition 3.2.34. *Soit N^4 une variété compacte, orientée avec bord, F une surface de Seifert dans ∂N et $(C, \partial N) \cong (\partial N \times I, \partial N \times \{0\})$ un collet fermé de ∂N dans N. On dit qu'une surface compacte, connexe et orientée $F_0 \subset C$ proprement plongée dans N est obtenue en* poussant F le long de la direction normale (positive) à ∂N dans N *si $\partial F_0 = \partial F$ et F_0 est isotope dans C (en fixant ∂F_0) à la surface $\partial F \times [0, \epsilon] \cup F \times \{\epsilon\}$, pour un certain $0 < \epsilon < 1$.*

Proposition 3.2.35. *Soit M une 3-sphère homologique orientée et F une surface compacte, connexe et orientée proprement plongée dans un collet fermé C_0 de M dans $C(M) \setminus \{*\}$, où $*$ est le centre de $C(M)$. Supposons que C_0 est orienté de manière à induire sur la composante $M \subset \partial C_0$ l'orientation de M. Si m est un entier positif et F est obtenue d'une surface de Seifert contenue dans M en poussant le long de la direction normale positive à M dans C_0, alors il existe un espace topologique $\widetilde{C(M)}$ et une fonction continue $p : \widetilde{C(M)} \longrightarrow C(M)$ tels que*

(1) $\tilde{C}_0 = p^{-1}(C_0)$ est une 4-variété compacte, connexe et orientée telle que la restriction $p| : \tilde{C}_0 \longrightarrow C_0$ est de degré m et $\tilde{F} = p^{-1}(F)$ est une surface compacte, orientée et proprement plongée dans $\tilde{C}_0$;

(2) $p(\tilde{F}) = F$ et $p(\widetilde{C(M)} \setminus \tilde{F}) = C(M) \setminus F$;

(3) la restriction $p| : C(\tilde{M}) \setminus \tilde{F} \longrightarrow C(M) \setminus F$ est un revêtement régulier avec groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/m$ et la restriction $p| : \tilde{F} \xrightarrow{\cong} F$ est un homéomorphisme ;

(4) il existe un voisinage tubulaire $V \cong F \times D^2$ de F dans C_0 tel que $p^{-1}(V) = \tilde{V} \cong \tilde{F} \times D^2$ est un voisinage tubulaire de $\tilde{F}$ dans $\tilde{C}_0$ et la restriction $p| : \tilde{V} \longrightarrow V$ correspond à $\tilde{F} \times D^2 \longrightarrow F \times D^2 : (\tilde{x}, z) \mapsto (p(\tilde{x}), z^m)$.

Il existe un homéomorphisme $\tau : \widetilde{C(M)} \xrightarrow{\cong} \widetilde{C(M)}$ ayant son ensemble de points fixes égal à $\tilde{F}$ et tel que $\tau^m = 1$ et $p \circ \tau = p$. De plus, $\tau(\tilde{C}_0) = \tilde{C}_0$, τ préserve l'orientation de $\tilde{C}_0$, $\tau|\widetilde{C(M)} \setminus \tilde{F}$ est un générateur du groupe d'automorphismes du revêtement $p|\widetilde{C(M)} \setminus \tilde{F}$ et la restriction $\tau| : \tilde{V} \xrightarrow{\cong} \tilde{V}$ correspond à $\tilde{F} \times D^2 \xrightarrow{\cong} \tilde{F} \times D^2 : (\tilde{x}, z) \mapsto (\tilde{x}, z e^{\frac{2\pi i}{m}})$.

DÉMONSTRATION. La démonstration de la proposition est, à quelques changements près, la même que celle de l'existence du revêtement ramifié à m feuilles d'un couple m–spécial (N, S) pour lequel S a un fibré normal trivial dans N. Puisque F est obtenue en poussant une surface de Seifert contenue dans $M \subset C_0$, il suit que F a un fibré normal trivial dans C_0. Fixons un voisinage tubulaire $V \cong F \times D^2$ de F dans C_0 et notons $X = C(M) \setminus F \times int(D^2)$. Puisque $C(M)$

est contractile, on a $H_1(C(M)) = H_2(C(M)) = 0$. Il suit que $H_1(X)$ est cyclique infini et a pour générateur la classe représentée par le bord d'un disque $D = \{x_0\} \times D^2 \subset V$ orienté de manière à avoir $D \cdot F = +1$ dans C_0. On considère alors $\tilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement connexe de X correspondant au noyau de l'homomorphisme donné par la composition suivante :

$$\pi_1(X) \xrightarrow{Hurewicz} H_1(X) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{Projection} \mathbb{Z}/m.$$

On procède ensuite de la même manière que pour un couple $m-$spécial.

□

Tout comme pour les couples $m-$spéciaux, $(\widetilde{C(M)}, p, \tau)$ ne dépend que de m et F. Nous appellerons $(\widetilde{C(M)}, \tau)$ le *revêtement ramifié* à m feuilles de $(C(M), F)$ et τ l'*automorphisme canonique* de ce revêtement ramifié. Notre prochain objectif est de calculer les $\zeta-$signatures de $(\widetilde{C(M)}, \tau)$. Pour ce faire, nous utiliserons une description de $\widetilde{C(M)}$ comme l'union de m copies de $C(M)$ identifiées entre elles.

Remarque 3.2.36. *Description "couper-coller" de $\widetilde{C(M)}$.*

Soit M une 3-sphère homologique orientée et F une surface de Seifert dans $M \subset C(M)$. Soit F_0 une surface proprement plongée dans un collet C_0 de M dans $C(M) \setminus \{*\}$, où $*$ est le centre du cône $C(M)$. Orientons C_0 de manière à induire sur $M \subset \partial C_0$ l'orientation de M. Supposons que F_0 est obtenue en poussant F dans la direction normale positive à M dans C_0. Il existe alors une 3-variété $W_0 \cong F \times I$ contenue dans C_0 telle que $\partial W_0 = F \cup F_0$ et $W_0 \cap M = F$ transversalement. Notons C l'espace obtenu en "coupant" $C(M)$ le long de $W_0 \setminus F_0$, c'est-à-dire si $V \cong W_0 \times [-1,1]$ est un voisinage tubulaire de W_0 dans C_0, alors C est le quotient de l'adhérence de $C(M) \setminus (W_0 \times [-1,1])$ obtenu à l'aide de l'identification suivante :

$$(x,t) \longleftrightarrow (x,0), \forall x \in F_0 \text{ et } \forall t \in [-1,1].$$

Les deux copies $W_0 \times \{-1\}$ et $W_0 \times \{+1\}$ de W_0 dans V deviennent respectivement W^- et W^+ dans C. De plus, $W^- \cong W^+ \cong W_0$ et $W^- \cap W^+ \cong F_0$. La 3-variété $W = W^- \cup W^+$ est homéomorphe à $F \times [-1,1]$ et W^- (respectivement W^+) correspond à $F \times [-1,0]$ (respectivement $F \times [0,1]$). Notons $T : W \xrightarrow{\cong} W$

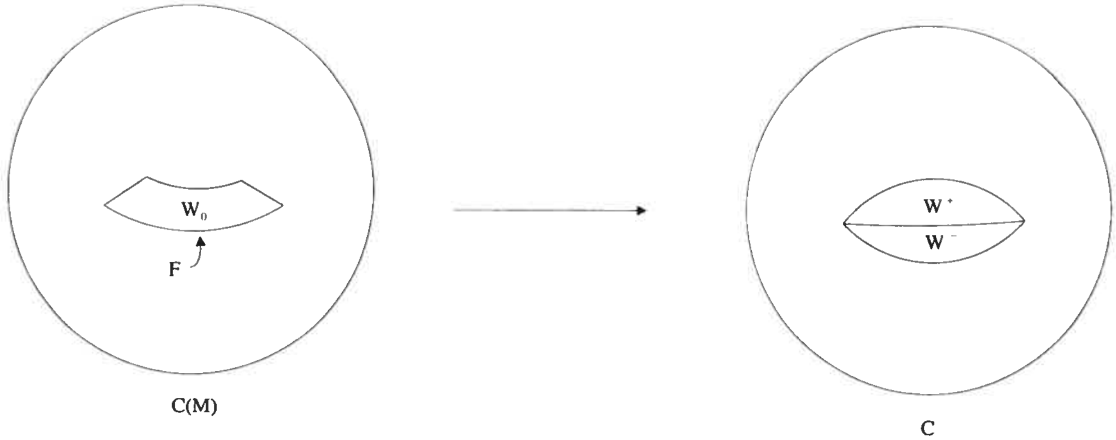


FIG. 3.4. Couper $C(M)$ le long de $W_0 \setminus F_0$.

l'homéomorphisme correspondant à $(x,t) \mapsto (x,-t)$. *On a* $T(W^{\pm}) = W^{\mp}$. *Remarquons que* C *est homéomorphe à* $C(M)$ *et que le quotient de* C *obtenu par l'identification* $x \longleftrightarrow T(x)$, *pour tout* $x \in W^-$, *est homéomorphe à* $C(M)$.

Soit l'espace $\widehat{C(M)}$ *obtenu à partir de* $\cup_{i=0}^{m-1} C \times \{i\}$ *à l'aide de l'identification :*

$$(x,i) \in W_i^- \longleftrightarrow (T(x), i+1) \in W_{i+1}^+, \forall i \text{ et } \forall (x,i) \in W_i^-,$$

où $W_i^{\pm} = W^{\pm} \times \{i\}$ *et les indices sont considérés modulo* m. *Notons* $\hat{C}_i$ *et* $\hat{W}_i^{\pm}$ *les images respectives de* $C \times \{i\}$ *et* $W_i^{\pm}$ *par la projection naturelle* $\cup_i C \times \{i\} \longrightarrow \widehat{C(M)}$.

On a alors

$$\begin{cases} \widehat{C(M)} = \cup_i \hat{C}_i; \\ \hat{C}_i \cong C(M), \forall i; \\ \hat{C}_i \cap \hat{C}_{i+1} = \hat{W}_i^- = \hat{W}_{i+1}^+, \forall i; \\ \hat{C}_i \cap \hat{C}_j = \hat{F}, \ si\ |i-j| \not\equiv 0, 1\ mod(m), \end{cases}$$

où $\hat{F} = \hat{W}_i^+ \cap \hat{W}_i^- \cong F_0, \forall i$. *La fonction* $\cup_i C \times \{i\} \longrightarrow \cup_i C \times \{i\}$ *définie par* $(x,i) \mapsto (x, i+1)$ *induit un homéomorphisme bien défini* $\tau : \widehat{C(M)} \xrightarrow{\cong} \widehat{C(M)}$. *Par définition,* m *est l'entier positif minimal pour lequel* $\tau^m = 1$ *et l'ensemble des points fixes de* τ *est* $Fix(\tau) = \hat{F}$. *Notons* $G \cong \mathbb{Z}/m$ *le groupe d'homéomorphismes de* $\widehat{C(M)}$ *engendré par* τ *et* $p : \widehat{C(M)} \longrightarrow \widehat{C(M)}/G$ *la projection de* $\widehat{C(M)}$ *sur l'espace des orbites* $\widehat{C(M)}/G$ *pour l'action de* G *sur* $\widehat{C(M)}$. *Le quotient* $\widehat{C(M)}/G$ *est homéomorphe à* $\hat{C}_i/G$ *qui à son tour est homéomorphe à* $C/T \cong C(M)$. *On* *remarque que* $p^{-1}(F_0) = \hat{F}$ *et la restriction de* p *à* $\hat{F}$ *est un homéomorphisme sur* F_0, *car* $Fix(\tau) = \hat{F}$. *De plus,* $p(\widehat{C(M)} \setminus \hat{F})$ *est exactement* $C(M) \setminus F_0$. *Puisque*

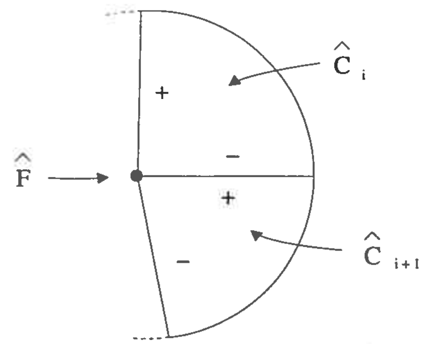


FIG. 3.5. Description "couper-coller" du revêtement ramifié de $(C(M), F_0)$.

$Fix(\tau) = \hat{F}$, G *agit librement sur* $\widehat{C(M)} \setminus \hat{F}$. *Le fait que* G *soit fini et que* $\widehat{C(M)} \setminus \hat{F}$ *soit Haussdorff implique que* G *agit proprement discontinuement sur* $\widehat{C(M)} \setminus \hat{F}$. *Ainsi, la restriction* $p| : \widehat{C(M)} \setminus \hat{F} \longrightarrow C(M) \setminus F_0$ *est un revêtement régulier avec groupe d'automorphismes* $G \cong \mathbb{Z}/m$. *Il suit que* $(\widehat{C(M)}, \tau)$ *est le revêtement ramifié à* m *feuilles de* $(C(M), F_0)$.

Avant de considérer les ζ−signatures de $(\widetilde{C(M)}, \tau)$, nous devons d'abord définir la forme d'intersection sur $\widetilde{C(M)}$.

Remarque 3.2.37. *La forme d'instersection sur* $\widetilde{C(M)}$.

La notation utilisée sera celle de la proposition précédente. Puisque $p|\widetilde{C(M)} \setminus \tilde{F}$ *est un revêtement à* m *feuilles et que* $* \notin F$, *il existe un cône concentrique* $U \subset C(M) \setminus F$ *tel que* $p^{-1}(U)$ *est une union disjointe de cônes* $\tilde{U}_0 \cup \cdots \cup \tilde{U}_{m-1}$ *et la restriction* $p| : \tilde{U}_i \overset{\cong}{\longrightarrow} U$ *est un homéomorphisme, pour chaque* i. *On peut choisir* U *de manière à avoir* $C(M) \setminus int(U) = C_0$ *et* $\widetilde{C(M)} \setminus int(\cup_i \tilde{U}_i) = \tilde{C}_0$. *Notons* $\partial\widetilde{C(M)}$ *le bord de la variété* $\widetilde{C(M)} \setminus p^{-1}(*)$.

Puisque pour tout i, $\tilde{U}_i$ *est contractile et* $\tilde{U}_i \cap \tilde{C}_0$ *est une 3-sphère homologique homéomorphe à* M, *la suite de Mayer-Vietoris pour* $\widetilde{C(M)} = \tilde{C}_0 \cup \cup_i \tilde{U}_i$ *donne que l'homomorphisme* $H_q(\tilde{C}_0) \longrightarrow H_q(\widetilde{C(M)})$ *induit par l'inclusion est un isomorphisme pour* $q = 1, 2$. *Considérons l'inclusion* $(\tilde{C}_0, \partial\tilde{C}_0) \subset (\widetilde{C(M)}, \partial\tilde{C}_0)$. *Par naturalité des suites exactes associées aux couples* $(\tilde{C}_0, \partial\tilde{C}_0)$ *et* $(\widetilde{C(M)}, \partial\tilde{C}_0)$ *et par le lemme de cinq, on obtient que l'homomorphisme* $H_2(\tilde{C}_0, \partial\tilde{C}_0) \longrightarrow H_2(\widetilde{C(M)}, \partial\tilde{C}_0)$ *induit par l'inclusion est un isomorphisme.*

Le bord de $\tilde{C}_0$ est l'union disjointe de $\partial\widetilde{C(M)}$ et de $\cup_i \tilde{U}_i \cap \tilde{C}_0$. Il suit que l'homomorphisme $H_q(\partial\widetilde{C(M)}) \longrightarrow H_q(\partial\tilde{C}_0)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme pour $q = 1, 2$. Par naturalité des suites exactes associées aux couples $(\widetilde{C(M)}, \partial\widetilde{C(M)})$ et $(\widetilde{C(M)}, \partial\tilde{C}_0)$ et par le lemme de cinq, on conclut que l'homomorphisme $H_2(\widetilde{C(M)}, \partial\widetilde{C(M)}) \longrightarrow H_2(\widetilde{C(M)}, \partial\tilde{C}_0)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme.

En composant les isomorphismes donnés dans les deux paragraphes précédents, on obtient un isomorphisme $H_2(\widetilde{C(M)}, \partial\widetilde{C(M)}) \xrightarrow{\cong} H_2(\tilde{C}_0, \partial\tilde{C}_0)$. De plus, on sait que l'homomorphisme $H_2(\tilde{C}_0) \longrightarrow H_2(\widetilde{C(M)})$ induit par l'inclusion est un isomorphisme. Puisque $\tilde{C}_0$ est une 4-variété compacte orientée, on a une forme d'intersection $H_2(\tilde{C}_0; \mathbb{R}) \times H_2(\tilde{C}_0, \partial\tilde{C}_0; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ non-dégénérée, par dualité de Poincaré-Lefschetz. On obtient ainsi une forme bilinéaire non-dégénérée $H_2(\widetilde{C(M)}; \mathbb{R}) \times H_2(\widetilde{C(M)}, \partial\widetilde{C(M)}; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ que nous appellerons la forme d'intersection (en dimension 2) de $\widetilde{C(M)}$.

Théorème 3.2.38. *Soit $(\widetilde{C(M)}, \tau)$ le revêtement ramifié (cyclique) à m feuillles de $(C(M), F_0)$, où M est une 3-sphère homologique orientée, F_0 est obtenue en poussant une surface de Seifert $F \subset M$ le long de la direction normale positive à M dans $C(M) \setminus \{*\}$ et $*$ est le centre de $C(M)$. Si $\zeta \in \mathbb{C}$ est tel que $\zeta^m = 1$ et L dénote l'entrelacs $\partial F \subset M$, alors*

$$\sigma_\zeta(\widetilde{C(M)}, \tau) = \Sigma_L(\zeta).$$

Démonstration. La démonstration qui suit est une généralisation directe de celle donnée à la section 5 de [**K2**]. Nous déterminerons $H_2(\widetilde{C(M)}; \mathbb{R})$ et la forme $\iota : H_2(\widetilde{C(M)}; \mathbb{R}) \times H_2(\widetilde{C(M)}; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\iota(x, y) = x \cdot j(y)$, où j est induit par l'inclusion $\widetilde{C(M)} \subset (\widetilde{C(M)}, \partial\widetilde{C(M)})$. Pour ce faire nous utiliserons la description "couper-coller" de $\widetilde{C(M)}$ et la notation de la remarque 3.2.36.

On a vu que $\widetilde{C(M)}$ s'écrit comme l'union $\cup_i \hat{C}_i$. Considérons $C\hat{F} \subset \hat{C}_0$ le cône sur $\hat{F}$ ayant pour centre le centre de $\hat{C}_0$. Notons $\widetilde{C(M)}_0$ l'union $C\hat{F} \cup \tau(C\hat{F}) \cup \cdots \cup \tau^{m-1}(C\hat{F})$. On remarque que $\tau^i(C\hat{F}) \cap \tau^j(C\hat{F}) = \hat{F}$, si $i \not\equiv j \; mod(m)$.

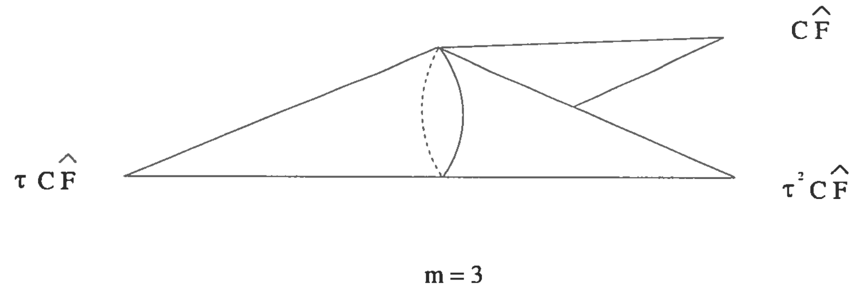


FIG. 3.6. Une représentation de $\widehat{C(M)}_0$.

Lemme 3.2.39. *L'inclusion de $\widehat{C(M)}_0$ dans $\widetilde{C(M)}$ est une équivalence d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. Soit $C_0' \subset \hat{C}_0$ un disque concentrique et $C_0'' = C\hat{F} \cup C_0'$. Notons $\widehat{C(M)}_1 \supset \widehat{C(M)}_0$ l'union $C_0'' \cup \tau(C_0'') \cup \cdots \cup \tau^{m-1}(C_0'')$. Remarquons que l'inclusion de $\widehat{C(M)}_0$ dans $\widehat{C(M)}_1$ est une équivalence d'homotopie et que $\widehat{C(M)}_1$ est un rétract par déformation de $\widetilde{C(M)}$ (voir **[K2]** lemme 5.3). Par conséquent, l'inclusion de $\widehat{C(M)}_0$ dans $\widetilde{C(M)}$ est une équivalence d'homotopie. $\square$

Lemme 3.2.40. *Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des courbes simples fermées orientées dans $int(\hat{F})$ telles que $\{[\gamma_1], \dots, [\gamma_n]\}$ forme une base de $H_1(\hat{F})$. Notons $C\gamma_i \subset C\hat{F}$ le cône sur γ_i ayant pour centre le centre de $C\hat{F}$ et $\Sigma\gamma_i$ le 2-cycle de $\widetilde{C(M)}$ défini par $\Sigma\gamma_i = C\gamma_i - \tau C\gamma_i$. Remarquons que $C\gamma_i \cup \tau C\gamma_i$ est une 2-sphère, car γ_i est homéomorphe à S^1 et donc $C\gamma_i$ est un 2-disque. Le groupe $H_2(\widetilde{C(M)})$ est libre et a pour base $\mathcal{B} = \{[\tau^i\Sigma\gamma_j] | 0 \leq i \leq m-2,\ 1 \leq j \leq n\}$.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme précédent, $H_2(\widetilde{C(M)}) \cong H_2(\widehat{C(M)}_0)$. Une induction sur $m \geq 2$ à l'aide du théorème de Mayer-Vietoris pour $\widehat{C(M)}_0 = \cup_{i=0}^{m-2}\tau^i C\hat{F} \cup \tau^{m-1}C\hat{F}$ donne le résultat.

$\square$

À l'aide d'un champ de vecteurs normal à $\hat{F}$ dans $\partial(\hat{C}_0 \setminus \{*\}) \cong M$ on obtient une famille de plongements $\{i_t : \hat{F} \longrightarrow \partial(\hat{C}_0 \setminus \{*\})\}_{t\in[-1,1]}$ telle que $\cup_{t\in[-1,0]} i_t(\hat{F}) = \hat{W}_0^-$, $\cup_{t\in[0,1]} i_t(\hat{F}) = \hat{W}_0^+$, pour tout t la fonction $i_t|\partial\hat{F}$ est l'inclusion de $\partial\hat{F}$

dans $\partial(\hat{C}_0 \setminus \{*\})$ et pour $s \neq t$ on a $i_s(\hat{F}) \cap i_t(\hat{F}) = \partial\hat{F}$. Pour γ un cercle

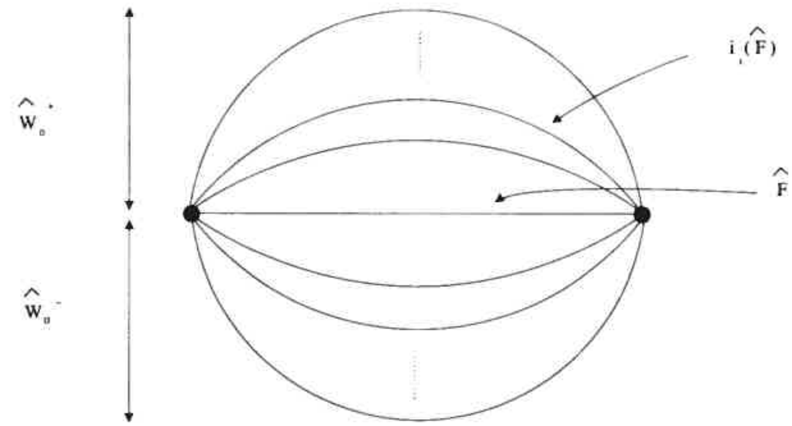


FIG. 3.7. Les plongements i_t.

orienté dans $int(\hat{F})$, nous noterons $d(\Sigma\gamma)$ le 2-cycle de $\widetilde{C(M)}$ défini par $d(\Sigma\gamma) = C(i^*(\gamma)) - \tau(C(i_*(\gamma)))$, où $C(\delta) \subset \hat{C}_0$ est le cône radial sur δ dans $\hat{C}_0$, $i^* = i_{-\frac{1}{2}}$ et $i_* = i_{\frac{1}{2}}$. De plus, on note $d(\tau^i(\Sigma\gamma)) = \tau^i(d(\Sigma\gamma))$ (voir la figure ci-dessous). On remarque que $\cup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} C(i_{-t}\gamma) \cup \tau C(i_t\gamma)$ a pour bord $(C\gamma \cup \tau C\gamma) \cup (Ci^*\gamma \cup \tau Ci_*\gamma)$. Il suit que $\Sigma\gamma$ et $d(\Sigma\gamma)$ sont homologues dans $\widetilde{C(M)}$.

Lemme 3.2.41. *La forme* $\iota : H_2(\widetilde{C(M)}) \times H_2(\widetilde{C(M)}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *dans la base* $\mathcal{B}$, *donnée par le lemme précédent, est*

$$\iota([\tau^i\Sigma\gamma_s], [\tau^j\Sigma\gamma_t]) = \begin{cases} \sigma_F([\gamma_s], [\gamma_t]) + \sigma_F([\gamma_t], [\gamma_s]), & si\ i \equiv j\ mod(m) \\ -\sigma_F([\gamma_t], [\gamma_s]), & si\ i \equiv j-1\ mod(m) \\ -\sigma_F([\gamma_s], [\gamma_t]), & si\ i \equiv j+1\ mod(m) \\ 0, & sinon \end{cases}$$

où σ_F *est la forme de Seifert pour* $F \subset M$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un calcul direct à l'aide des définitions, du fait que τ préserve la forme d'intersection et que $\Sigma\gamma$ et $d(\Sigma\gamma)$ sont homologues dans $\widetilde{C(M)}$. Nous ne traiterons en détail que le cas $i \equiv j+1\ mod(m)$ en détails (voir **[K1]** pour les autres cas et remarquer que σ_F correspond à θ^T dans la notation du

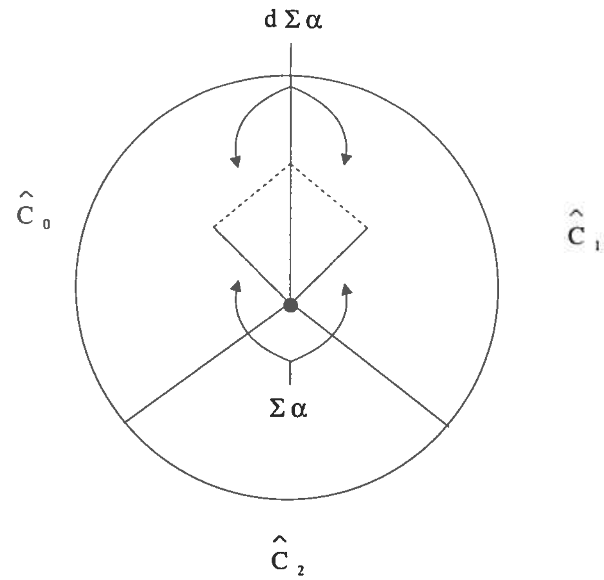


FIG. 3.8. Définition de $d\Sigma\alpha$.

livre).

$$\begin{aligned}
\iota([\tau^{j+1}\Sigma\gamma_s],[\tau^j\Sigma\gamma_t]) &= \iota(\tau\Sigma\gamma_s,\Sigma\gamma_t)\\
&= \iota(\tau\Sigma\gamma_s, d\Sigma\gamma_t)\\
&= \iota(\tau C\gamma_s - \tau^2 C\gamma_s, Ci^*\gamma_t - \tau C i_*\gamma_t)\\
&= -\iota(\tau C\gamma_s, \tau C i_*\gamma_t)\\
&= -\iota(C\gamma_s, C i_*\gamma_t)\\
&= -lk_M(\gamma_s, i_*\gamma_t)\\
&= -\sigma_F(\gamma_s,\gamma_t).
\end{aligned}$$

□

Calculons maintenant la $\zeta-$signature de $(\widetilde{C(M)},\tau)$. Pour alléger la notation, nous noterons ι la forme hermitienne sur $H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{C})$ associée à ι et l'isométrie $\tau_*\otimes 1_{\mathbb{C}}$ de ι sera notée τ. De plus, à partir de maintenant, $\hat{F}$ sera noté F.

Rappelons que $H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{C})$ admet une décomposition orthogonale (par rapport à ι) $\oplus_{\zeta^m=1}H_\zeta$, où H_ζ est l'espace propre $Ker(\tau-\zeta 1)$. Nous construirons une base de H_ζ nous permettant de déterminer la matrice $\iota|H_\zeta\times H_\zeta$.

Notons $\Sigma H_1(F)$ le sous-espace de $H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{R})$ engendré par $[\Sigma\gamma_1], \ldots, [\Sigma\gamma_n]$, où $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des cercles orientés représentant une base de $H_1(F)$. On a vu que $H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{C})$ est isomorphe à $\oplus_{i=0}^{m-2}\tau^i(\Sigma H_1(F) \otimes \mathbb{C})$. Pour $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^m = 1$, considérons $T_\zeta : \Sigma H_1(F)^{\mathbb{C}} \longrightarrow H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{C})$ défini par $T_\zeta v = \sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{-i}\tau^i v$, où $\Sigma H_1(F)^{\mathbb{C}} = \Sigma H_1(F) \otimes \mathbb{C} \subset H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{C})$. Un calcul direct montre que $T_\zeta(\Sigma H_1(F)^{\mathbb{C}}) \subset H_\zeta$, c'est-à-dire $\tau T_\zeta v = \zeta T_\zeta v$, pour tout $v \in \Sigma H_1(F)^{\mathbb{C}}$.

On peut montrer que $Ker(T_\zeta) = 0$ lorsque $\zeta \neq 1$. Ceci est une conséquence de l'égalité $\tau^{m-1}v = -\sum_{i=0}^{m-2}\tau^i v$, qui elle découle de la définition de $\Sigma\gamma$. Remarquons que $dim_{\mathbb{C}}\tau^j(\Sigma H_1(F)^{\mathbb{C}})$ est égal à n, pour $0 \leq j \leq m-2$. De plus, $n = dim_{\mathbb{C}} Im(T_{\omega^j})$ est inférieur ou égal à $dim_{\mathbb{C}} H_{\omega^j}$, pour $1 \leq j \leq m-1$, où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}} \in \mathbb{C}$. Puisque $H_2(\widetilde{C(M)};\mathbb{C})$ admet deux décompositions en somme directes $\oplus_{j=0}^{m-2}\tau^j(\Sigma H_1(F)^{\mathbb{C}})$ et $\oplus_{j=0}^{m-1}H_{\omega^j}$, on conclut que $H_{\omega^0} = 0$ et $Im(T_{\omega^j}) = H_{\omega^j}$, pour $1 \leq j \leq m-1$. Ainsi, $T_{\omega^j}[\Sigma\gamma_1], \ldots, T_{\omega^j}[\Sigma\gamma_n]$ forment une base de l'espace propre H_{ω^j}.

Calculons la matrice de $\iota|H_\zeta \times H_\zeta$ par rapport à cette base, où $\zeta = \omega^j$ pour un certain j. Notons $\alpha = [\Sigma\gamma_s]$ et $\beta = [\Sigma\gamma_t]$. On a alors,

$$\begin{aligned}\iota(T_\zeta\alpha, T_\zeta\beta) &= \iota(\sum_i \zeta^{-i}\tau^i\alpha, \sum_j \zeta^{-j}\tau^j\beta) \\ &= \sum_i \iota(\alpha,\beta) + \sum_i \zeta\iota(\alpha,\tau\beta) + \sum_i \zeta^{-1}\iota(\tau\alpha,\beta),\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide du lemme précédent. On conclut donc

$$\begin{aligned}\iota(T_\zeta\alpha, T_\zeta\beta) &= m(\sigma_F(\gamma_s,\gamma_t) + \sigma_F(\gamma_t,\gamma_s) - \zeta\sigma_F(\gamma_t,\gamma_s) - \zeta^{-1}\sigma_F(\gamma_s,\gamma_t)) \\ &= m((1-\overline{\zeta})\sigma_F(\gamma_s,\gamma_t) + (1-\zeta)\sigma_F(\gamma_t,\gamma_s)).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\iota|H_\zeta \times H_\zeta$ a pour matrice $m((1-\overline{\zeta})\sigma_F + (1-\zeta)\sigma_F^T)$.

$\square$

On peut maintenant généraliser le corollaire 3.2.32 pour le cas d'un couple $m-$spécial (N, F) avec $\partial N \neq \emptyset$.

Remarque 3.2.42. *Existence d'un couple $m-$spécial.*

Si M est une 3-sphère homologique, alors il existe une 4-variété orientée N simplement connexe et compacte avec $\partial N = M$ (voir le corollaire du théorème *fondamental de la chirurgie au chapitre 1). Soit $S \subset M$ une surface de Seifert pour un entrelacs $L \subset M$. On peut toujours pousser S dans un collet de M dans N le long de la direction normale positive à M dans N pour obtenir une surface F proprement plongée dans N avec $\partial F = L$. De plus, puisque F est isotope à S dans N (en gardant L fixe), on a $[F, \partial F] = [S, \partial S] = 0 \in H_2(N, M)$. Ainsi, (N, F) est un couple $m-$spécial, pour tout m, avec $(\partial N, \partial F) = (M, L)$. La force du résultat suivant est qu'il est valide pour tout couple $m-$spécial (N, F) avec $(\partial N, \partial F) = (M, L)$.*

Théorème 3.2.43. *Soit L un entrelacs orienté dans la 3-sphère homologique orientée M et soit (N, F) un couple $m-$spécial tel que $(\partial N, \partial F) \cong (M, L)$. Si $\zeta = e^{\frac{2\pi i r}{m}}$, pour $0 \leq r < m$, alors*

$$\Sigma_L(\zeta) = \sigma_\zeta(\tilde{N}, \tau) - \sigma(N) + \frac{2F^2 r(m-r)}{m^2}.$$

où F^2 est l'auto-intersection de F dans N.

Remarque 3.2.44. *Sur la définition de l'auto-intersection de F, pour (N, F) un couple $m-$spécial avec $\partial N \neq \emptyset$.*

Puisque $H_1(\partial N) = 0$ et donc $H_2(\partial N) = 0$ (par dualité de Poincaré-Lefschetz et le théorème des coefficients universels en cohomologie), il suit que l'homomorphisme $j : H_2(N) \longrightarrow H_2(N, \partial N)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme. On peut alors définir le nombre d'auto-intersection F^2 de F dans N par

$$F^2 = j^{-1}([F, \partial F]) \cdot [F, \partial F]$$

où $[F, \partial F] \in H_2(N, \partial N)$. Géométriquement, $j^{-1}([F, \partial F])$ est la classe fondamentale de la surface fermée $S = F \cup_{\partial F} -F' \subset N$, où F' est une surface de Seifert pour ∂F dans ∂N. Le nombre d'auto-intersection de F dans N est alors $F^2 = [S] \cdot [F, \partial F]$.

Démonstration. Soit F_0 une surface proprement plongée dans un collet C_0 de M dans $C(M) \setminus \{x\}$ (où x est le centre de $C(M)$) obtenue en poussant une surface de Seifert quelconque pour L contenue dans M le long de la direction normale à $M \subset C_0$. Orientons C_0 de manière à induire sur $M \subset \partial C_0$ l'orientation *opposée* à celle de M. Notons W l'espace $N \cup_M C(M)$, c'est-à-dire que W

est obtenu de $N \sqcup C(M)$ en identifiant ∂N et $M \subset C(M)$ par un homéomorphisme renversant l'orientation. Soit $(\tilde{N}, \tilde{\tau})$ et $(\widehat{C(M)}, \hat{\tau})$ les revêtements ramifiés

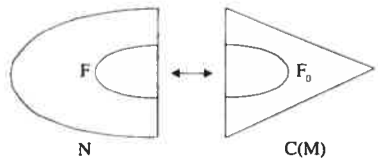


FIG. 3.9. L'espace W.

à $m-$feuilles de (N, F) et $(C(M), F_0)$ respectivement. On remarque que $\partial\tilde{N}$ et $\partial\widehat{C(M)} = \partial(\widehat{C(M)} \setminus \{\hat{x_0}, \ldots, \hat{x}_{m-1}\})$, où $\hat{x_0}, \ldots, \hat{x}_{m-1}$ sont les points de $\widehat{C(M)}$ au-dessus du centre x de $C(M)$, sont des revêtements ramifiés à $m-$feuilles de (M, L). Par l'unicité du revêtement ramifié à $m-$feuilles de (M, L) (même démonstration que pour le cas d'un couple $m-$spécial), $\partial\tilde{N}$ est homéomorphe à $\partial\widehat{C(M)}$.

On identifie alors $(\tilde{N}, \tilde{\tau})$ et $(\widehat{C(M)}, \hat{\tau})$ le long de $\partial\tilde{N}$ pour obtenir $(\tilde{W}, \tau) = (\tilde{N} \cup_{\partial\tilde{N}} \widehat{C(M)}, \tilde{\tau} \cup \hat{\tau})$. Notons S la surface fermée $F \cup_L F_0 \subset W$.

On peut définir le revêtement ramifié à m feuilles de (W, S) de manière analogue au revêtement ramifié à m feuilles d'un cône le long d'une surface proprement plongée. On obtient alors que $(\tilde{W}, \tau)$ est le revêtement ramifié à m feuilles de (W, S). En considérant le complément des "points de cône" $\hat{x_0}, \ldots, \hat{x}_{m-1}$ dans $\tilde{W}$, on peut définir (à l'aide d'une démarche similaire à celle de la remarque 3.2.37) la forme d'intersection sur $\tilde{W}$.

À l'aide de la suite de Mayer-Vietoris pour $W = N \cup_M C(M)$ on conclut que $H_1(W)$ est trivial et que $H_2(N) \cong H_2(N, \partial N)$ est isomorphe à $H_2(W)$. De plus, la classe $[S] \in H_2(W)$ correspond à $[F, \partial F] \in H_2(N, \partial N)$ via cet isomorphisme. Ainsi, $[S]$ est divisible par m dans $H_2(W)$. On peut montrer qu'alors le corollaire 3.2.32 reste valide pour le couple (W, S), c'est-à-dire

$$\sigma_\varsigma(\tilde{W}, \tau) = \sigma(W) - \frac{2r(m-r)S^2}{m^2}.$$

Par la propriété d'additivité de Novikov (qui reste valide), on a

$$\sigma_\varsigma(\tilde{W}, \tau) = \sigma_\varsigma(\tilde{N}, \tilde{\tau}) - \sigma_\varsigma(\widehat{C(M)}, \hat{\tau}).$$

Puisque $C(M)$ est contractile, $\sigma(C(M)) = 0$. Par la propriété d'additivité de Novikov, on obtient

$$\sigma(W) = \sigma(N) - \sigma(C(M)) = \sigma(N).$$

Par définition de F^2, on a l'égalité $S^2 = F^2$. De plus, par le théorème précédent, on a $\sigma_\zeta(\widehat{C(M)}, \hat{\tau}) = \Sigma_L(\zeta)$. En combinant les égalités précédentes, on obtient le résultat.

$\square$

3.2.4. Chirurgie de Dehn et signatures d'un entrelacs

Soit K un noeud dans une 3-sphère homologique orientée M et L un entrelacs orienté dans $M \setminus K$. Notons M_1 la 3-sphère homologique $M(K; \frac{1}{n})$ et L_1 l'image du plongement naturel de L dans M_1. Puisque M et M_1 sont des 3-sphères homologiques, les fonctions de signature Σ_L et Σ_{L_1} sont définies. Le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème 3.2.43, exprime une relation entre $\Sigma_L(\zeta)$ et $\Sigma_{L_1}(\zeta)$ pour $\zeta \in \mathbb{C}$ bien choisi.

Théorème 3.2.45. *Soit K un noeud dans une 3-sphère homologique orientée M et L un entrelacs orienté dans $M \setminus K$. Soit M_1 la 3-sphère homologique $M(K; \frac{1}{n})$ et L_1 l'image du plongement naturel de L dans M_1. Notons $q = |lk_M(K, L)|$, où $lk_M(K, L) = \sum_i lk_M(K, L_i)$, et fixons un diviseur m de q. Si $\zeta = e^{\frac{2\pi i r}{m}}$, où $0 < r < m$, alors*

$$\Sigma_{L_1}(\zeta) - \Sigma_L(\zeta) \simeq \frac{2nq^2 r(m-r)}{m^2} - \epsilon(n),$$

où $\simeq$ est la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par $a \simeq b \Leftrightarrow |a-b| \leq 1$ et $\epsilon(n) = \begin{cases} \frac{n}{|n|}, & si\ n \neq 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$.

DÉMONSTRATION. La preuve suivante est une version détaillée de celle donnée par Litherland dans [**L1**]. Si $n = 0$, alors $(M, L) \cong (M_1, L_1)$ et la relation est vérifiée. Supposons maintenant que $n \neq 0$ et notons $k = |n|$ et $\epsilon = \epsilon(n)$. Fixons une orientation quelconque sur K. Soit V un voisinage tubulaire de K dans $M \setminus L$, l une longitude canonique de V et $A \cong S^1 \times I$ un anneau dans V avec $\partial A = K \cup l$ et K correspondant à $S^1 \times \{0\}$. Soit J_i, pour $1 \leq i \leq k$, le noeud dans A

correspondant à $S^1 \times \{t_i\}$, où $0 < t_1 < \ldots < t_k < 1$. Orientons les J_i de manière à ce qu'ils soient homologues à K dans V. On a, pour $i < j$,

$$\begin{aligned} lk_M(J_i, J_j) &= lk_M(K, J_j) \\ &= lk_M(K, l) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $lk_M(J_i, J_j) = 0$, pour $i \neq j$. Notons $M_2 = M(J_1, \ldots, J_k; \epsilon, \ldots, \epsilon)$, L_2 l'image du plongement naturel de L dans M_2 et montrons que (M_1, L_1) est homéomorphe à (M_2, L_2).

Soit $A'_1, \ldots, A'_k$ des anneaux disjoints dans V avec $\partial A'_i = J_i \cup (A'_i \cap \partial V)$, pour tout i. Soit $U_1, \ldots, U_k$ des voisinages tubulaires disjoints de $J_1, \ldots, J_k$ respectivement dans $int(V) \setminus K$ et notons $U = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ et $J = J_1 \cup \ldots \cup J_k$. Sans perdre de généralité, $A'_i \cap U_i$ est un collet de J_i dans A'_i et donc $A_i = A'_i \cap X$, où $X = V \setminus int(U)$, est un anneau dont le bord a pour composantes une longitude canonique de U_i et une longitude canonique de V. Pour chaque i, nous

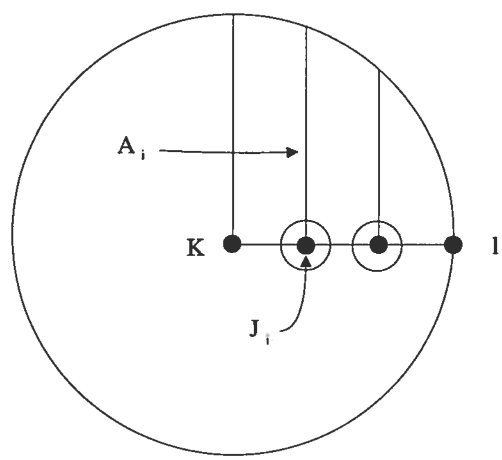


FIG. 3.10. Un disque méridionnel de V.

définirons un homéomorphisme $\phi_i : X \xrightarrow{\cong} X$ qui correspond à un $\epsilon-$twist le long de A_i, c'est-à-dire que l'image par ϕ_i d'un méridien de U_i (respectivement V) est une courbe de pente $\frac{1}{\epsilon}$ dans ∂U_i (respectivement ∂V) et la restriction de ϕ_i au complément d'un voisinage tubulaire de A_i dans X disjoint des A_j pour $j \neq i$ est l'identité. Nous considérerons ensuite l'homéomorphisme $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k$ de X dans lui-même.

Les ϕ_i sont définis de la manière suivante. Soit T_i un voisinage tubulaire de A_i dans X disjoint des A_j pour $j \neq i$. Notons B_i l'anneau $T_i \cap U_i$ muni de l'orientation induite par ∂U_i. Fixons une orientation sur $S^1 \times I$ et un homéomorphisme $B_i \cong S^1 \times I$ préservant l'orientation. Notons $\psi_i : B_i \xrightarrow{\cong} B_i$ l'homéomorphisme correspondant à $S^1 \times I \xrightarrow{\cong} S^1 \times I : (e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i(\theta + \epsilon 2\pi t)}, t)$. On remarque que $\psi_i | \partial B_i$ est l'identité. Le voisinage tubulaire T_i est homéomorphe à $B_i \times I$, où $B_i \times \{0\}$ correspond à $T_i \cap \partial U_i$ et $B_i \times \{1\}$ correspond à $T_i \cap \partial V$. On définit $\phi_i | T_i : T_i \xrightarrow{\cong} T_i$ par $\phi_i(b, t) = (\psi_i(b), t)$, pour tout $(b, t) \in T_i \equiv B_i \times I$. On définit $\phi_i | X \setminus T_i$ comme étant l'identité. L'image par $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k$ d'un méridien de U_i est donc de

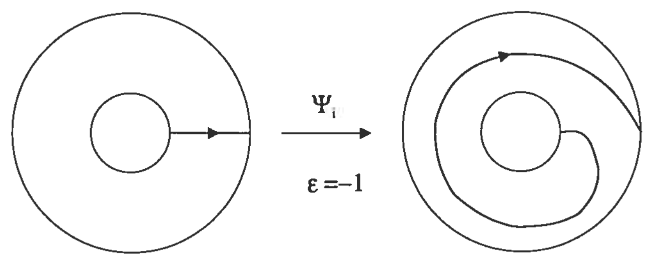


FIG. 3.11. Un -1-twist.

pente ϵ dans ∂U_i et l'image d'un méridien de V par ϕ est de pente $\frac{1}{k\epsilon} = \frac{1}{n}$ dans ∂V. On obtient les homéomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} M_2 &\cong (M \setminus int(U)) \cup_{\phi|\partial U} U \\ &\cong M \setminus int(V) \cup_{1_{\partial V}} (X \cup_{\phi|\partial U} U) \\ &\cong_{1 \cup (\phi^{-1} \cup 1)} \ M \setminus int(V) \cup_{\phi|\partial V} (X \cup_{1_{\partial U}} U) \\ &\cong M \setminus int(V) \cup_{\phi|\partial V} V \\ &\cong M_1. \end{aligned}$$

Puisque l'homéomorphisme ci-dessus est l'identité sur $M \setminus int(V)$, on a $(M_1, L_1) \cong (M_2, L_2)$. Notre but sera d'utiliser cette description de (M_1, L_1) en tant que chirurgie entière le long de l'entrelacs J dans M pour obtenir, à partir d'un couple

m−spécial fixé (N, F) avec $(\partial N, \partial F) \cong (M, L)$, un couple m−spécial (N_1, F_1) avec $(\partial N_1, \partial F_1) \cong (M_1, L_1)$.

Soit (N, F) un couple m−spécial avec $(\partial N, \partial F) \cong (M, L)$. On a vu au chapitre 1 qu'une chirurgie entière le long de J dans M correspond à attacher des 2-anses $D_i^2 \times D_i^2$ à N le long de U. Plus précisément, soit $N_1 = N \cup_f (\sqcup_{i=1}^k D_i^2 \times D_i^2)$, où $f = \cup_i f_i$ et $f_i : \partial D_i^2 \times D_i^2 \xrightarrow{\cong} U_i$ est tel que $f_i(\partial D_i^2 \times \{1\})$ est de pente ϵ dans ∂U_i. On a alors, $\partial N_1 \cong M_2 \cong M_1$.

Soit F_1 l'image du plongement naturel de $F \subset N$ dans N_1. On a $\partial F_1 = L_1$ et $H_1(\partial N_1) \cong H_1(M_1) = 0$, car M_1 est une 3-sphère homologique. Le fait que $H_1(N) = 0$ et la suite de Mayer-Vietoris entraînent que $H_1(N_1) = 0$. Pour conclure que le couple (N_1, F_1) est m−spécial, il reste à voir que m divise la classe $[F_1, L_1] \in H_2(N_1, M_1)$.

Pour chaque $1 \leq i \leq k$, choisissons S_i une surface de Seifert pour J_i dans M. Puisque $lk_M(J_i, J_j) = 0$, pour $i \neq j$, le lemme suivant nous permet de choisir S_i tel que $S_i \cap U_j = \emptyset$, pour $j \neq i$.

Lemme 3.2.46. *Soit $J \cup K$ un entrelacs orienté dans une 3-sphère homologique orientée M. Si $lk_M(J, K) = 0$, alors il existe F une surface de Seifert pour J dans M telle que $F \cap K = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Voir le lemme 7.13 dans le livre de Saveliev [**S**].

□

Soit $\alpha_i \in H_2(N_1)$ la classe représentée par le 2−cycle $E_i - S_i$, où $E_i \subset N_1$ correspond à l'âme $D_i^2 \times \{0\}$ de la 2-anse $D_i^2 \times D_i^2$. On a $N_1 = N \cup \cup_{i=1}^k h_i$ et $N \cap \cup_{i=1}^k h_i = U$, où $h_i \subset N_1$ correspond à la 2-anse $D_i^2 \times D_i^2$. Puisque $H_2(U) = H_1(N) = 0$, la suite de Mayer-Vietoris donne la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow H_2(N) \longrightarrow H_2(N_1) \xrightarrow{\Delta} H_1(U) \longrightarrow 0.$$

Remarquons que $H_1(U) \cong \mathbb{Z}^k$ a pour base $\{[J_1], \ldots, [J_k]\}$ et ainsi la suite précédente est scindée. Soit $s : H_1(U) \longrightarrow H_2(N_1)$ l'homomorphisme défini par $s[J_i] = \alpha_i$. On a $\Delta \circ s[J_i] = \Delta\alpha_i = [J_i]$ et donc $\Delta \circ s$ est l'identité. On a donc la décomposition

$$H_2(N_1) \cong H_2(N) \oplus \mathbb{Z}^k,$$

où le facteur $\mathbb{Z}^k$ a pour base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Puisque M_1 est une 3-sphère homologique, l'homomorphisme $i : H_2(N_1) \longrightarrow H_2(N_1, M_1)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme (de même pour $H_2(N) \longrightarrow H_2(N, M)$). On obtient alors l'isomorphisme suivant

$$H_2(N_1, M_1) \cong H_2(N, M) \oplus \mathbb{Z}^k,$$

où le facteur $\mathbb{Z}^k$ a pour base $\{i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k\}$ et la restriction $H_2(N, M) \longrightarrow H_2(N_1, M_1)$ de cet isomorphisme est donnée par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_2(N,M) \arrow[d] & H_2(N) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] \\ H_2(N_1, M_1) & H_2(N_1) \arrow[l, "i", "\cong"'] \end{tikzcd} .$$

Soit S une surface de Seifert pour L dans M et supposons sans perdre de généralité que S intersecte J_i transversalement, pour tout i. Ainsi, $S \cap U_i$ est une union disjointe de disques méridionnels (de U_i) orientés $\cup_{j=1}^{m_i} D_{i,j}$, où $D_{i,j}$ intersecte J_i en un unique point de signe $\epsilon_{i,j}$ et $\sum_{j=1}^{m_i} \epsilon_{i,j} = S \cdot J_i = lk_M(K, L)$. Notons S_0 la surface $S \cap M_1$ munie de l'orientation induite par S. Via l'isomorphisme précédent, la classe $[F_1, \partial F_1] \in H_2(N_1, M_1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} [F_1, L_1] &= [F - S] \\ &= [F, L] - ([S_0, \partial S_0] - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \epsilon_{i,j} [E_i^*, \partial E_i^*]) \\ &= [F, L] + \sum_{i=1}^{k} lk_M(K, L)[E_i^*, \partial E_i^*], \text{ car } S_0 \subset M_1, \end{aligned}$$

où $E_i^* \subset h_i$ est le disque méridionnel de U_i correspondant à $\{1\} \times D_i^2 \subset D_i^2 \times D_i^2$ orienté tel que $E_i^* \cdot J_i = 1$.

Puisque m divise $[F, L] \in H_2(N, M)$ et m divise q, alors m divise $[F_1, L_1] \in H_2(N_1, M_1)$. Ainsi, le couple (N_1, F_1) est m-spécial.

Considérons la forme $\iota : H_2(N_1) \times H_2(N_1) \longrightarrow \mathbb{Z}$, donnée par $\iota(x, y) = x \cdot i(y)$. Notre but est d'expimer $\sigma(N_1)$ et F_1^2 en termes de $\sigma(N)$ et F^2 respectivement.

On remarque que $\iota(\alpha_i, H_2(N)) = 0$, car α_i est représentée par un 2-cycle dans $N_1 \setminus int(N)$. De plus, pour $i \neq j$, $\iota(\alpha_i, \alpha_j)$ est le nombre d'intersection (dans N) $\hat{S}_i \cdot \hat{S}_j = lk_M(J_i, J_j) = 0$, où $\hat{S}_i$ et $\hat{S}_j$ sont obtenues en poussant S_i et S_j respectivement dans la direction normale positive à M dans N.

Pour calculer $\iota(\alpha_i, \alpha_i)$, nous construirons une surface dans N_1 isotope et transverse à $E_i \cup \hat{S}_i$. Soit $E_i' \subset h_i$ le disque correspondant à $D_i^2 \times \{1\} \subset D_i^2 \times D_i^2$. On remarque que $\partial E_i'$ est une courbe J_i' de pente ϵ dans ∂U_i. On choisit un voisinage tubulaire $W_i \cong \hat{S}_i \times D^2$ de $\hat{S}_i$ dans N tel que $U_i \subset W_i$ correspond à $J_i \times D^2 \subset \hat{S}_i \times D^2$. Soit S_i' une section du D^2-fibré W_i transverse à $\hat{S}_i$ et telle que $\partial S_i' = J_i' = \partial E_i'$. Les surfaces fermées $E_i \cup \hat{S}_i$ et $E_i' \cup S_i'$ sont alors isotopes dans N_1 et $\iota(\alpha_i, \alpha_i)$ est le nombre d'intersection $\hat{S}_i \cdot S_i' = lk_M(J_i, J_i') = \epsilon$. On a donc

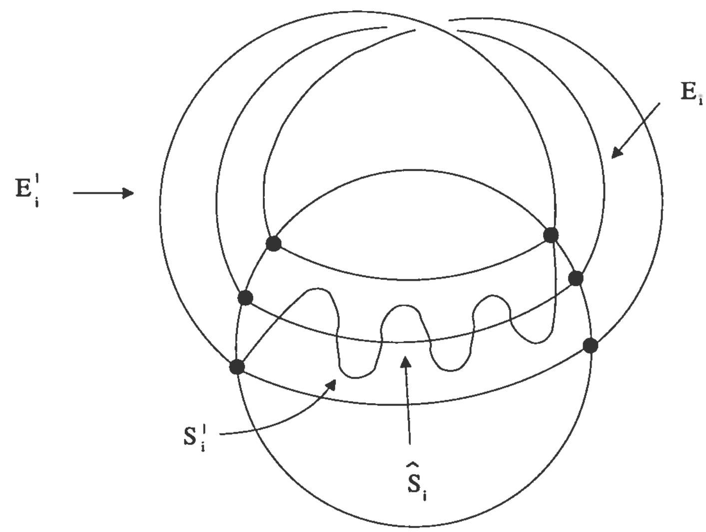


FIG. 3.12. L'auto-intersection de α_i.

$\iota(\alpha_i, \alpha_j) = \epsilon\delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le delta de Kronecker. L'union d'une base de $H_2(N)$ avec $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ forme une base de $H_2(N_1)$. La matrice de ι dans une telle base est alors de la forme

$$\iota = \begin{pmatrix} \iota_N & & & \\ & \epsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon \end{pmatrix},$$

où $\iota_N : H_2(N) \times H_2(N) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est définie de manière analogue à ι. On conclut alors

$$\begin{aligned}\sigma(N_1) &= \sigma(N) + k\epsilon \\ &= \sigma(N) + n.\end{aligned}$$

Pour calculer F_1^2, nous utiliserons la décomposition précédente de $[F_1, L_1]$ et le fait que la somme directe $H_2(N_1) \cong H_2(N) \oplus \mathbb{Z}^k$ est orthogonale par rapport à ι. Montrons que la classe $[E_j^*, \partial E_j^*] \in H_2(N_1, M_1)$ est égale à $\alpha_j^2 i(\alpha_j)$, où $\alpha_j^2 = \iota(\alpha_j, \alpha_j)$.

Par la définition de E_q^* et le fait que S_p et U_q sont disjoints pour $p \neq q$, on obtient l'égalité $\alpha_p \cdot [E_q^*, \partial E_q^*] = \delta_{p,q}$. Puisque E_j^* est contenu dans M, il suit que pour la décomposition $H_2(N_1, M_1) \cong H_2(N, M) \oplus \mathbb{Z}^k$, on a $[E_j^*, \partial E_j^*] = \sum_{s=1}^k n_s i(\alpha_s)$, pour certains entiers n_s. On a alors

$$\begin{aligned}\alpha_t \cdot [E_j^*, \partial E_j^*] &= \sum_{s=1}^{k} n_s \iota(\alpha_t, \alpha_s) \\ &= \epsilon n_t\end{aligned}$$

Par conséquent, le coefficient n_t est égal à $\epsilon\delta_{t,j}$. Ainsi, on obtient que $[E_j^*, \partial E_j^*] = \epsilon i(\alpha_j)$. On conclut donc

$$[F_1, L_1] = [F, L] + \epsilon \sum_{j=1}^{k} lk_M(K, L) i(\alpha_j).$$

L'auto-intersection de F_1 est donnée par

$$\begin{aligned}F_1^2 &= F^2 + q^2 k\epsilon \\ &= F^2 + nq^2.\end{aligned}$$

Soit $(\tilde{N}, \tau)$ le revêtement ramifié à m feuilles de (N, F). Puisque m divise $lk_M(K, L)$ et que V est un voisinage tubulaire de K dans $M \setminus L$, il suit que l'inclusion de V dans $M \setminus L$ se relève en m plongements de V dans $\tilde{M} \setminus \tilde{L}$, où $\tilde{M} = \partial \tilde{N}$ et $\tilde{L} = \partial \tilde{F}$. Fixons $\tilde{V}$ l'image d'un relèvement de l'inclusion de V dans $M \setminus L$, notons $\tilde{U}_i$ le relèvement de U_i contenu dans $\tilde{V}$ et $\tilde{J}_i$ le relèvement de J_i contenu dans $\tilde{U}_i$. Puisque $lk_M(J_i, L) = lk_M(K, L)$ est divisible par m, chaque homéomorphisme d'attachement $f_i : \partial D^2 \times D^2 \xrightarrow{\cong} U_i$ se relève en un homéomorphisme $\tilde{f}_i : \partial D^2 \times D^2 \xrightarrow{\cong} \tilde{U}_i$. Soit $\tilde{N}_1 = \tilde{N} \cup_{\tilde{f}} \sqcup_{i=1}^{k} \sqcup_{j=0}^{m-1} D_{i,j}^2 \times D_{i,j}^2$, où $\tilde{f} = \cup_{i,j} \tau^j \circ \tilde{f}_i$

et $\tau^j \circ \tilde{f}_i : D^2_{i,j} \times D^2_{i,j} \xrightarrow{\cong} \tau^j \tilde{U}_i$. Nous noterons $\widetilde{h_{i,j}} \subset \tilde{N}_1$ la 2-anse correspondant à $D^2_{i,j} \times D^2_{i,j}$ et $\widetilde{E_{i,j}}$ l'âme de $\widetilde{h_{i,j}}$.

Notons $p : \tilde{N} \longrightarrow N$ le revêtement ramifié à m feuilles de (N, F) et $q : \sqcup_{i=1}^{k} \sqcup_{j=1}^{m-1} D^2_{i,j} \times D^2_{i,j} \longrightarrow \sqcup_{i=1}^{k} D^2_i \times D^2_i$ la fonction définie pour tout i, j comme étant l'identité $D^2_{i,j} \times D^2_{i,j} \longrightarrow D^2_i \times D^2_i$. On voit que la fonction $p \cup q$ induit le revêtement ramifié $\tilde{N}_1 \longrightarrow N_1$ à m feuilles de (N_1, F_1). Si τ_1 est l'automorphisme canonique de $\tilde{N}_1$, alors $\tau_1 | \tilde{N} = \tau$ et $\tau_1 \widetilde{h_{i,j}} = \widetilde{h_{i,j+1}}$, où l'indice j est considéré modulo m. Calculons $\sigma_\zeta(\tilde{N}_1, \tau_1)$ en termes de $\sigma_\zeta(\tilde{N}, \tau)$.

Soit $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \cup \cup_{j=0}^{m-1} \widetilde{h_{1,j}} \subset \tilde{N}_1$. On a $\tilde{N} \cap \cup_{j=0}^{m-1} \widetilde{h_{1,j}} = \tilde{U}_1 \cup \tau \tilde{U}_1 \cup \cdots \cup \tau^{m-1} \tilde{U}_1$. La suite de Mayer-Vietoris donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_2(\tilde{N}; \mathbb{R}) \longrightarrow H_2(\tilde{N}_2; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\theta} H_1(\tilde{N}; \mathbb{R}),$$

où $\mathbb{R}^m$ a pour base $\{[\tilde{J}_1], (\tau_1)_*[\tilde{J}_1], \ldots, (\tau_1)_*^{m-1}[\tilde{J}_1]\}$.

Pour H un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, nous noterons $H^{\mathbb{C}}$ le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Si $T : H \longrightarrow H'$ est $\mathbb{R}-$linéaire et $\zeta \in \mathbb{C}$, alors nous noterons $\overline{T} = T \otimes 1_{\mathbb{C}}$ et $H_\zeta = Ker(\overline{T} - \zeta 1) \subset H^{\mathbb{C}}$.

Par naturalité de la suite de Mayer-Vietoris, chaque homomorphisme de la suite exacte précédente commute avec $(\tau_1)_*$. On obtient alors la suite exacte d'espaces propres de $\overline{(\tau_1)_*}$ suivante

$$0 \longrightarrow H_2(\tilde{N}; \mathbb{R})_\zeta \longrightarrow H_2(\tilde{N}_2; \mathbb{R})_\zeta \longrightarrow (\mathbb{R}^m)_\zeta \xrightarrow{\overline{\theta_\zeta}} H_1(\tilde{N}; \mathbb{R})_\zeta,$$

où $\overline{\theta_\zeta}$ est la restriction de $\overline{\theta} : \mathbb{C}^m \longrightarrow H_1(\tilde{N}; \mathbb{C})$ à $(\mathbb{R}^m)_\zeta$. Puisqu'une courte suite exacte de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels est scindée, on a

$$H_2(\tilde{N}_2; \mathbb{R})_\zeta \cong H_2(\tilde{N}; \mathbb{R})_\zeta \oplus Ker(\overline{\theta_\zeta}).$$

Lemme 3.2.47. *Soit H un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $T : H \xrightarrow{\cong} H$ un isomorphisme pour lequel $T^m = 1$ et tel qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H$ tels que $H = \oplus_{i=1}^n < \alpha_i, T\alpha_i, \ldots, T^{m-1}\alpha_i >$. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^m = 1$ et notons $\alpha_{i,\zeta} = \sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{-j} \overline{T}^j(\alpha_i) \in H^{\mathbb{C}}$. Alors, les éléments non-nuls de $\{\alpha_{1,\zeta}, \ldots, \alpha_{n,\zeta}\}$ forment une base de H_ζ.*

Démonstration. Voir la proposition 4 dans [**L1**].

$\square$

Par le lemme précédent (pour $n = 1$), $(\mathbb{R}^m)_\zeta$ a pour base $\{\sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{-j}\overline{(\tau_1)_*}^j[\tilde{J}_1]\}$ et donc $dim_{\mathbb{C}} Ker(\overline{\theta_\zeta}) \leq 1$.

La suite de Mayer-Vietoris pour $\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 \cup \cup_{i=2}^{k} \cup_{j=0}^{m-1} \widetilde{h_{i,j}}$ donne la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H_2(\tilde{N}_2;\mathbb{R}) \longrightarrow H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}^{(k-1)m} \longrightarrow H_1(\tilde{N}_2;\mathbb{R}),$$

où $\mathbb{R}^{(k-1)m}$ a pour base $\{(\tau_1)_*^j[\tilde{J}_i]\}_{i,j}$ ($2 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq m-1$).

Remarquons que pour $2 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq m-1$, $\tau^j \tilde{J}_i$ est homologue à $\tau^j \tilde{J}_1$ dans $\tau^j \tilde{V}$, par définition des J_i. De plus, pour $0 \leq j \leq m-1$, $\tau^j \tilde{J}_1$ est le bord de $\widetilde{E_{1,j}}$ dans $\tilde{N}_2$. Ainsi, l'homomorphisme $\mathbb{R}^{(k-1)m} \longrightarrow H_1(\tilde{N}_2;\mathbb{R})$ induit par l'inclusion est trivial.

Notre prochain objectif est d'obtenir une base de $(R^{(k-1)m})_\zeta$ nous permettant de calculer la forme d'intersection sur $H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R})_\zeta$. Par construction de $J_1, \ldots, J_k$, pour chaque $2 \leq i \leq k$, il existe un anneau $C_i \subset int(V)$ tel que $\partial C_i = J_i \cup -J_{i-1}$ et

$$C_i \cap C_j = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } |i-j| > 1 \\ J_{min\{i,j\}}, \text{ si } |i-j| = 1. \end{cases}$$

Soit $\tilde{C}_i$ le relèvement de C_i contenu dans $\tilde{V}$. Considérons la classe $\beta_i \in H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R})$ représentée par $\widetilde{E_{i,0}} - \widetilde{E_{i-1,0}} - \tilde{C}_i$, où $2 \leq i \leq k$. On remarque que $\mathbb{R}^{(k-1)m}$ a pour base $\cup_{j=0}^{m-1}\{(\tau_1)_*^j([\tilde{J}_2]), (\tau_1)_*^j([\tilde{J}_3 - \tilde{J}_2]), \ldots, (\tau_1)_*^j([\tilde{J}_k - \tilde{J}_{k-1}])\}$.

Or, on a $\Delta((\tau_1)_*^j\beta_2) = (\tau_1)_*^j[\tilde{J}_2]$ et pour $i > 2$, $\Delta((\tau_1)_*^j\beta_i) = (\tau_1)_*^j[\tilde{J}_i - \tilde{J}_{i-1}]$. Il suit que $H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R}) \cong H_2(\tilde{N}_2;\mathbb{R}) \oplus H^\beta$, où $H^\beta \cong \mathbb{R}^{(k-1)m}$ est le sous-espace de $H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R})$ ayant pour base $\{(\tau_1)_*^j(\beta_i) | 2 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m-1\}$.

Comme dans le cas précédent, on a une décomposition en espaces propres

$$H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R})_\zeta \cong H_2(\tilde{N};\mathbb{R})_\zeta \oplus Ker(\overline{\theta_\zeta}) \oplus H_\zeta^\beta.$$

Puisque $(\tau_1)_*^j(\beta_i)$ est représenté par un 2-cycle dans $\tilde{N}_1 \backslash int(\tilde{N})$, il suit que H^β et $H_2(\tilde{N};\mathbb{R})$ sont orthogonaux par rapport à la forme d'intersection $H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R}) \times H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notons A et B les matrices de la forme d'intersection (hermitienne) $H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{C})\times H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}$ sur $H_2(\tilde{N};\mathbb{R})_\zeta$ et H_ζ^β respectivement. Si $dim_{\mathbb{C}}Ker(\overline{\theta_\zeta})=1$, alors la matrice de la forme hermitienne sur $H_2(\tilde{N}_1;\mathbb{C})$ est

$$\begin{pmatrix} A & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & B \end{pmatrix},$$

où les $*$ forment une ligne et une colonne de la matrice. Dans le cas où $dim_{\mathbb{C}}Ker(\overline{\theta_\zeta})=0$, la matrice de la forme hermitienne sera

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Le lemme suivant nous permettra de conclure

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta(\tilde{N}_1,\tau_1) &\simeq sign(A)+sign(B) \\ &= \sigma_\zeta(\tilde{N},\tau)+sign(B). \end{aligned}$$

Lemme 3.2.48. *Soit A une matrice hermitienne et B la matrice hermitienne obtenue à partir de A en supprimant la $i-$ième ligne et la $i-$ième colonne. Alors, on a $sign(A)\simeq sign(B)$.*

DÉMONSTRATION. Voir le lemme 2.9 dans [**Tr**].

□

Un calcul analogue à celui de $\alpha_i\cdot\alpha_j$ donne

$$(\tau_1)_*^s(\beta_i)\cdot(\tau_1)_*^t(\beta_j)=\begin{cases} 0, \text{ si } s\neq t \text{ ou } |i-j|>1 \\ -\epsilon, \text{ si } s=t \text{ et } |i-j|=1 \\ 2\epsilon, \text{ si } s=t \text{ et } i=j \end{cases}.$$

Lemme 3.2.49. *Soit H un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, $\cdot : H\times H\longrightarrow\mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et $T : H\xrightarrow{\cong}H$ une isométrie de $\cdot$ pour laquelle $T^m=1$ et il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in H$ tels que $H=\oplus<\alpha_i,T\alpha_i,\ldots,T^{m-1}\alpha_i>$. Alors, la signature de la restriction de la forme hermitienne $H^{\mathbb{C}}\times H^{\mathbb{C}}\longrightarrow\mathbb{C} : (x\otimes\lambda,y\otimes\mu)\mapsto$*

$\lambda\bar{\mu}x \cdot y$ à H_ζ, pour $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^m = 1$, est égale à la signature de la matrice $n \times n$ dont l'entrée à la $i-$ième ligne et $j-$ième colonne est $\sum_{s=0}^{m-1} \zeta^s \alpha_i \cdot T^s \alpha_j$.

DÉMONSTRATION. Voir le corollaire de la proposition 4 dans [**L1**].

□

Par le lemme précédent, la signature de B est égale à la signature de la matrice $(k-1) \times (k-1)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 2\epsilon & -\epsilon & & & 0 \\ -\epsilon & 2\epsilon & -\epsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\epsilon \\ 0 & & & -\epsilon & 2\epsilon \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la signature de B est $(k-1)\epsilon = n - \epsilon$. On a donc

$$\sigma_\zeta(\tilde{N}_1, \tau_1) \simeq \sigma_\zeta(\tilde{N}, \tau) + n - \epsilon.$$

Le résultat suit du théorème 3.2.43 et des calculs précédents de $\sigma_\zeta(\tilde{N}_1, \tau_1)$, $\sigma(N_1)$ et F_1^2.

□

3.2.5. Le cas $w \geq 2$

Nous pouvons maintenant démontrer les points (1) et (2) du théorème 3.1.3.

Théorème 3.2.50. *Soit K un noeud contenu dans l'intérieur d'un tore solide noué $V \subset S^3$, avec nombre de rotation $w_V(K) = q$.*

(1) Si $q \geq 3$, alors K satisfait la propriété P.

(2) Si $q = 2$, alors l'ensemble des pentes $r \in \mathbb{Q} \cup \{\mu_K\}$ de K telles que $K(r)$ est simplement connexe est un sous-ensemble propre de $\{\mu_K, +1, -1\}$.

DÉMONSTRATION. Fixons une orientation sur S^3. Il existe un tore solide orienté et non-noué $U \subset S^3$, un noeud $J \subset int(U)$ et un plongement $h : U \longrightarrow S^3$ préservant l'orientation tel que $h(U) = V$ et $h(J) = K$. Quitte à précomposer h par des twists méridionnaux de V, on peut supposer sans perdre de généralité que h est fidèle. Remarquons que $w_U(J) = q$. Soit L l'âme du tore solide $S^3 \setminus int(U)$.

Supposons que $q \geq 2$ et $n \neq 0$. On a vu que si $K(\frac{1}{n})$ est simplement connexe, alors l'image L_n du plongement naturel de L dans $M_n = J(\frac{1}{n})$ est un noeud trivial.

Remarquons que $|lk(J, L)| = q$ et posons $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}$. Alors, le théorème précédent (pour $m = q$ et $r = 1$) donne

$$\Sigma_{L_n}(\zeta) \simeq 2n(q-1) - \epsilon(n),$$

car L étant trivial, la signature $\Sigma_L(\zeta)$ est nulle. On obtient alors

$$|\Sigma_{L_n}(\zeta)| \geq 2(|n|(q-1) - 1).$$

Si $(q, n) \neq (2, \pm 1)$, alors $\Sigma_{L_n}(\zeta)$ est non-nulle et L_n est par conséquent non-trivial. En particulier, le point (1) est démontré.

Pour démontrer le point (2), nous montrerons que pour $q = 2$ au moins un des noeuds L_1 et L_{-1} est non-trivial. On a $M_{-1} = E \cup V_{-1}$, où E est homéomorphe à l'extérieur $E(J)$ de J dans S^3, V_{-1} est un tore solide dont l'âme sera notée J_{-1}, l'intersection $V_{-1} \cap E$ est égale à $\partial E = \partial V_{-1}$ et un disque méridionnel de V_{-1} intersecte E en une courbe de pente -1 dans ∂E.

Il existe un homéomorphisme $E(J) \xrightarrow{\cong} E$ envoyant un méridien de J vers une courbe de pente 1 dans ∂V_{-1} et envoyant une longitude canonique de J vers une longitude canonique de J_{-1}. Par conséquent, on voit que $(J(1), L_1)$ est homéomorphe à $(M_{-1}(J_{-1}; \frac{1}{2}), \tilde{L}_{-1})$, où $\tilde{L}_{-1}$ est l'image du plongement naturel de L_{-1} dans $M_{-1}(J_{-1}; \frac{1}{2})$.

Par le théorème précédent (pour $m = n = q = 2$ et $r = 1$), on a

$$\Sigma_{L_1}(\zeta) - \Sigma_{L_{-1}}(\zeta) \simeq 3.$$

Ainsi, au moins un des noeuds L_1 et L_{-1} est non-trivial. $\square$

3.3. Graphes d'intersection

3.3.1. Graphes planaires

Nous rappelons quelques définitions de la théorie des graphes topologiques. Nous nous intéresserons principalement aux graphes finis contenus dans l'intérieur d'un disque.

Définition 3.3.1. *Un* graphe *(fini)* Γ *est un complexe CW (fini) de dimension* 1. *Les points du 0-squelette de* Γ *sont appelés les* sommets *de* Γ *et l'ensemble des sommets de* Γ *est noté* $V(\Gamma)$. *Les composantes connexes de* $\Gamma \setminus V(\Gamma)$ *sont appelées les* arêtes *de* Γ *et l'ensemble des arêtes de* Γ *est noté* $E(\Gamma)$. *Une arête* $e \in E(\Gamma)$ *est appelée une* boucle *si* $\overline{e}$ *est homéomorphe au cercle* S^1. *Le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de* Γ *sont notés respectivement* V_Γ *et* E_Γ.

Une arête $e \in E(\Gamma)$ *est dite* incidente *au sommet* $v \in V(\Gamma)$ *si* v *appartient à* $\overline{e}$. *Le* degré *d'un sommet* $v \in V(\Gamma)$ *dans* Γ, *noté* $deg_\Gamma(v)$, *est défini comme étant la somme du nombre d'arêtes de* Γ *qui ne sont pas des boucles et qui sont incidentes à* v *et de deux fois le nombre de boucles de* Γ *incidentes à* v. *Le degré de* Γ, *noté* $deg\ \Gamma$, *est défini commé étant le degré minimal d'un sommet dans* Γ, *c'est-à-dire* $deg\ \Gamma = min\{deg_\Gamma(v) | v \in V(\Gamma)\}$.

Définition 3.3.2. *Soit* Γ *un graphe contenu dans l'intérieur d'une surface compacte, connexe et orientable* S. *Les* faces *de* Γ *dans* S *sont les composantes connexes de* $S \setminus \Gamma$ *et l'ensemble des faces de* Γ *dans* S *est noté* $F_S(\Gamma)$ *(on laissera tomber l'indice* S *lorsque le choix de la surface* S *sera clair). On note* F_Γ *le nombre de faces de* Γ.

On dit qu'une arête $e \in E(\Gamma)$ appartient à une face $f \in F(\Gamma)$ *si* $e \subset \overline{f}$. *On dit qu'une arête* $e \in E(\Gamma)$ *appartenant à la face* $f \in F(\Gamma)$ *est une* arête double *de* f *si* $e \subset \overline{f}$ *et qu'elle est une* arête simple *de* f *sinon. Une face a* $(s + 2d)$ côtés *si elle a exactement* s *arêtes simples et exactement* d *arêtes doubles.*

On dit que deux arêtes distinctes sont directement parallèles *si elles appartiennent à une face ayant* 2 *côtés. Deux arêtes* e *et* e' *de* Γ *sont dites* parallèles *si* $e = e'$ *ou s'il existe des arêtes* $e_1, \ldots, e_n$ *de* Γ *telles que* $e_1 = e$, $e_n = e'$ *et* e_{i-1} *et* e_i *sont directement parallèles, pour* $1 < i \leq n$.

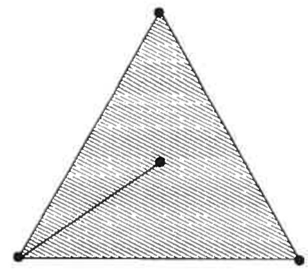


FIG. 3.13. Une face à 5 côtés.

Le lemme suivant sera utile pour démontrer le point (3) du théorème 3.1.3.

Lemme 3.3.3. *Soit Γ un graphe contenu dans l'intérieur d'un disque D. Si Γ n'a pas de faces ayant un seul côté et que deg $\Gamma \geq 6m$, pour un certain entier positif m, alors Γ contient $m+1$ arêtes mutuellement parallèles.*

DÉMONSTRATION. Quitte à considérer une composante connexe de Γ dont chaque face est une face de Γ, on peut supposer que Γ est connexe. Supposons que Γ ne contient pas $m+1$ arêtes mutuellement parallèles. Soit $\Gamma' \subset D$ le graphe obtenu à partir de Γ en remplacant chaque famille (maximale) d'arêtes mutuellement parallèles par une seule arête. Le graphe Γ' est alors connexe et il suit de la définition de Γ' et du fait que Γ n'a pas de faces ayant un seul côté que toutes les faces de Γ' ont au moins trois côtés.

Puisque pour un sommet $v \in V(\Gamma)$ chaque famille (maximale) d'arêtes mutuellement parallèles de Γ incidentes à v contient au plus m arêtes, on a

$$deg_{\Gamma}(v) \leq m\ deg_{\Gamma'}(v).$$

Par hypothèse *deg* $\Gamma \geq 6m$ et donc *deg* $\Gamma' \geq 6$. En voyant le disque D comme étant contenu dans une 2-sphère, on peut appliquer la formule d'Euler pour obtenir

$$\begin{aligned} F_{\Gamma'} &= E_{\Gamma'} - V_{\Gamma'} + 2 \\ &> E_{\Gamma'} - V_{\Gamma'}. \end{aligned}$$

Or, on a aussi la relation

$$E_{\Gamma'} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\Gamma')} deg_{\Gamma'}(v) \geq \frac{V_{\Gamma'} deg\ \Gamma'}{2}.$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} F_{\Gamma'} &> E_{\Gamma'} - V_{\Gamma'} \\ &\geq E_{\Gamma'} - \frac{2E_{\Gamma'}}{deg\ \Gamma'} \\ &\geq \frac{2}{3} E_{\Gamma'}. \end{aligned}$$

Puisqu'une arête double de Γ' appartient à une unique face de Γ' et qu'une arête simple de Γ' appartient à exactement deux faces de Γ', on conclut que le nombre moyen de côtés d'une face de Γ', c'est-à-dire le nombre $\frac{1}{F_{\Gamma'}} \sum_{f \in F(\Gamma')} \sharp(f)$, où $\sharp(f)$ est le nombre de côtés de f, est égal à $\frac{2E_{\Gamma'}}{F_{\Gamma'}}$. Par l'inégalité précédente, $\frac{2E_{\Gamma'}}{F_{\Gamma'}}$ est strictement inférieur à 3, ce qui contredit le fait que chaque face de Γ' a au moins trois côtés. □

Soit M^3 une sous-variété de S^3 et K un noeud dans l'intérieur de M. Nous noterons $M(K; r)$ la variété $M \setminus int(U) \cup_\phi U$, où U est un voisinage tubulaire de K dans $int(M)$ et $\phi : \partial U \xrightarrow{\cong} \partial U$ est un homéomorphisme envoyant un méridien de U sur une courbe de pente r dans $\partial U \subset S^3$.

3.3.2. Lemme principal

Dans cette section, nous démontrons le lemme duquel découle le point (3) du théorème 3.1.3. Ce lemme nous permettra d'utiliser les résultats obtenus dans le cas $w \geq 2$.

Définition 3.3.4. *Soit K un noeud dans l'intérieur d'un tore solide V. Le* nombre d'enroulement *de K dans V, noté $wr_V(K)$, est le nombre minimal de points d'intersection entre K et un disque méridionnel de V transverse à K, c'est-à-dire $wr_V(K) = min\{|K \cap D| \mid D$ disque méridionnel de V transverse à $K\}$.*

Lemme 3.3.5. *Soit $V \subset S^3$ un tore solide et $K \subset int(V)$ un noeud tel que $w_V(K) = 0$ ou 1 et $wr_V(K) \geq 2$. Si k est un entier tel que $|k| \geq 6$ et que $V(K; \frac{1}{k})$*

a un groupe fondamental cyclique infini, alors $w_V(K) = 0$ et il existe un tore solide $V' \subset int(V)$ tel que K est contenu dans $int(V')$ et $w_{V'}(K) \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Notons $q = w_V(K)$ et $X = V \setminus int(U)$, où $U \subset int(V)$ est un voisinage tubulaire de K. Choisissons D_1 un disque méridionnel de V vérifiant les conditions suivantes

(1) $D_1 \cap U$ est une union disjointe de n_1 disques méridionnels de U ;

(2) n_1 est minimal par rapport à (1).

Puisque n_1 est minimal, on a $n_1 = wr_V(K) \geq 2$. Notons V_k la variété $V(K; \frac{1}{k})$ et supposons que V_k a un groupe fondamental cyclique infini. On a $V_k = X \cup U_k$, où U_k est un tore solide tel que $X \cap U_k = \partial U_k \cong \partial U$ et un disque méridionnel de U_k intersecte X en une courbe de pente $\frac{1}{k}$ dans $T = \partial U \cong \partial U_k \subset X$.

Puisque $\pi_1(V_k) \cong \mathbb{Z}$, le lemme 3.2.8 assure l'existence d'un disque D_2 proprement plongé dans V_k vérifiant

(3) ∂D_2 est une courbe essentielle dans $\partial V_k = \partial V$;

(4) $D_2 \cap U_k$ est une union disjointe de n_2 disques méridionnels de U_k ;

(5) n_2 est minimal par rapport à (3) et (4).

Si $n_2 = 0$, alors D_2 est contenu dans X et D_2 est un disque méridionnel de V (par (3)). Dans ce cas, $wr_V(K) = 0$. Puisque par hypothèse $wr_V(K) \geq 2$, on a que n_2 est non-nul.

Pour $\alpha = 1,\ 2$, notons $P_\alpha \subset D_\alpha$ la surface $D_\alpha \cap X$ et $\partial_0 P_\alpha$ l'union disjointe de cercles $P_\alpha \cap T$. On remarque que chaque composante de $\partial_0 P_2$ est une courbe de pente $\frac{1}{k}$ dans T, par définition de U_k. Par le lemme 3.2.8, ∂D_2 est une courbe de pente $\frac{1}{kq^2}$ dans $\partial V_k = \partial V$.

On peut supposer sans perdre de généralité (quitte à isotoper P_1 et P_2 dans X) que les conditions suivantes sont satisfaites

(6) ∂D_1 et ∂D_2 s'intersectent transversalement en exactement $|k|q^2$ points sur $\partial V = \partial V_k$;

(7) une composante de $\partial_0 P_1$ intersecte transversalement une composante de $\partial_0 P_2$ en exactement $|k|$ points dans T ;

(8) P_1 et P_2 sont transverses ;

(9) le nombre de composantes connexes de $P_1 \cap P_2$ est minimal par rapport aux conditions (1) à (8).

Par (8), les composantes connexes de $P_1 \cap P_2$ sont des cercles et des arcs proprement plongés dans P_1 et P_2. De plus, l'ensemble des extrémités des composantes de $P_1 \cap P_2$ étant des arcs est $\partial P_1 \cap \partial P_2$. Notons $A \subset P_1 \cap P_2$ l'union des composantes de $P_1 \cap P_2$ étant des arcs dont les extrémités appartiennent à T.

Considérons la projection naturelle $\nu_\alpha : P_\alpha \longrightarrow D_\alpha$ correspondant au quotient de P_α obtenu en identifiant chaque composante connexe de $\partial_0 P_\alpha$ en un point, pour $\alpha = 1,\ 2$. Pour $\alpha = 1,\ 2$, on définit $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ le graphe dont les sommets sont les points de $\nu_\alpha(\partial A)$ et les arêtes sont les composantes connexes de $\nu_\alpha(A) \setminus V(\Gamma_\alpha)$. Remarquons que, pour $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$, une composante C de $\partial_0 P_\alpha$ intersecte $\partial_0 P_\beta$

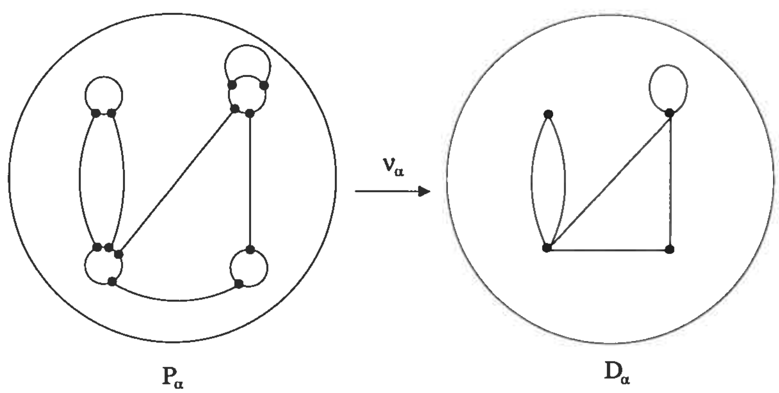


FIG. 3.14. Le graphe Γ_α.

en exactement $n_\beta|k|$ points dans T, par (7). En outre, au plus $|k|q^2$ composantes de $P_\alpha \cap P_\beta$ sont des arcs ayant une extrémité dans C et l'autre extrémité contenue dans ∂V, par (6). Ainsi, le degré d'un sommet de Γ_α est au moins $|k|(n_\beta - q^2)$.

Les conditions (1) à (9) confèrent certaines propriétés aux graphes Γ_1 et Γ_2.

Lemme 3.3.6. *Si C est une composante de $P_1 \cap P_2$ qui est un cercle, alors C n'est pas le bord d'un disque contenu dans P_α, pour $\alpha = 1,\ 2$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que C est le bord d'un disque $\Delta \subset P_1$. Puisque $\Delta \cap P_2$ est une union finie de cercles disjoints, il existe un cercle $C' \subset \Delta$ bordant un disque $\Delta' \subset \Delta$ tel que $\Delta' \cap P_2 = C'$. Supposons sans perdre de généralité que $C' = C$ et $\Delta' = \Delta$.

Effectuons une chirurgie sur D_2 le long de Δ et notons D_2' la composante de la surface obtenue contenant ∂D_2, c'est-à-dire on fixe un voisinage tubulaire $(N, \Delta) \cong (\Delta \times [-1,1], \Delta \times \{0\})$ de Δ dans l'intérieur de X tel que $N \cap P_2$ est un voisinage tubulaire de C dans l'intérieur de P_2 (correspondant à $C \times [-1,1] \subset \Delta \times [-1,1]$) et on note D_2' la composante de $D_2 \setminus (C \times [-1,1]) \cup \Delta \times \{\pm 1\}$ contenant ∂D_2.

Puisqu'il existe un disque $E \subset D_2$ avec $\partial E = C = \partial \Delta$, il suit que D_2' est un disque. Puisque D_2' est un disque proprement plongé dans V_k avec $\partial D_2' = \partial D_2$ et $D_2' \cap U_k \subset D_2 \cap U_k$, le point (5) entraîne que $D_2' \cap U_k = D_2 \cap U_k$. Si $P_2' = D_2' \cap X$, alors P_1 et P_2' satisfont les points (1) à (8). Or, par construction, le nombre de composantes de $P_1 \cap P_2'$ est strictement inférieur au nombre de composantes de $P_1 \cap P_2$, ce qui contredit le point (9). On procède de la même manière lorsque C borde un disque dans P_2. $\square$

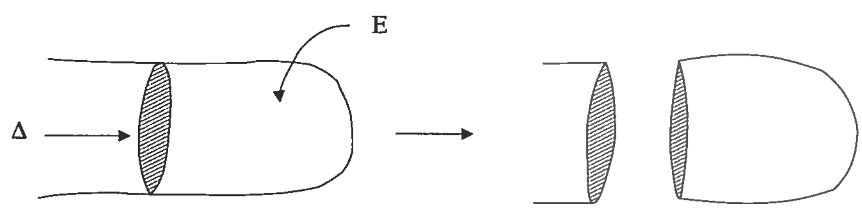


FIG. 3.15. Couper le long du disque Δ.

Lemme 3.3.7. *Le graphe $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ n'a pas de faces ayant un seul côté, pour* $\alpha = 1,\ 2$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\Gamma_1 \subset D_1$ a une face f ayant un seul côté. Notons $\hat{f}$ le disque $\overline{f} \cap P_1 \subset X$. Puisque f est une face de Γ_1, il suit que $int(\hat{f}) \cap D_2$ est une union de cercles de $P_1 \cap P_2$. Par le lemme 3.3.6 et le fait que $\hat{f}$ est un disque, on doit avoir $int(\hat{f}) \cap D_2 = \emptyset$. Remarquons que $\partial \hat{f} = \delta \cup \gamma$, où $\delta = \hat{f} \cap D_2$ et $\gamma = \hat{f} \cap T$ sont deux arcs avec $\delta \cap \gamma = \partial\delta = \partial\gamma$. On peut alors pousser D_2 le long de $\hat{f}$ dans V_k pour éliminer les deux disques de $D_2 \cap U_k$ contenant les

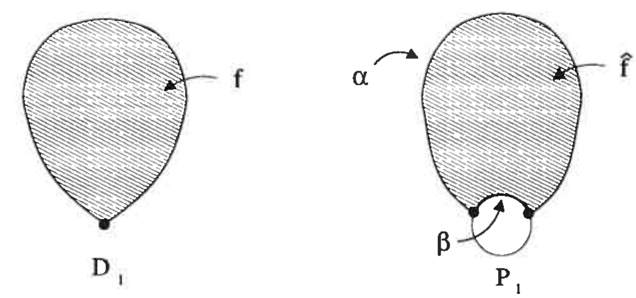


FIG. 3.16. Une face à un seul côté.

extrémités de δ, contredisant ainsi le point (4). On procède de la même manière lorsque $\Gamma_2 \subset D_2$ a une face ayant un seul côté. □

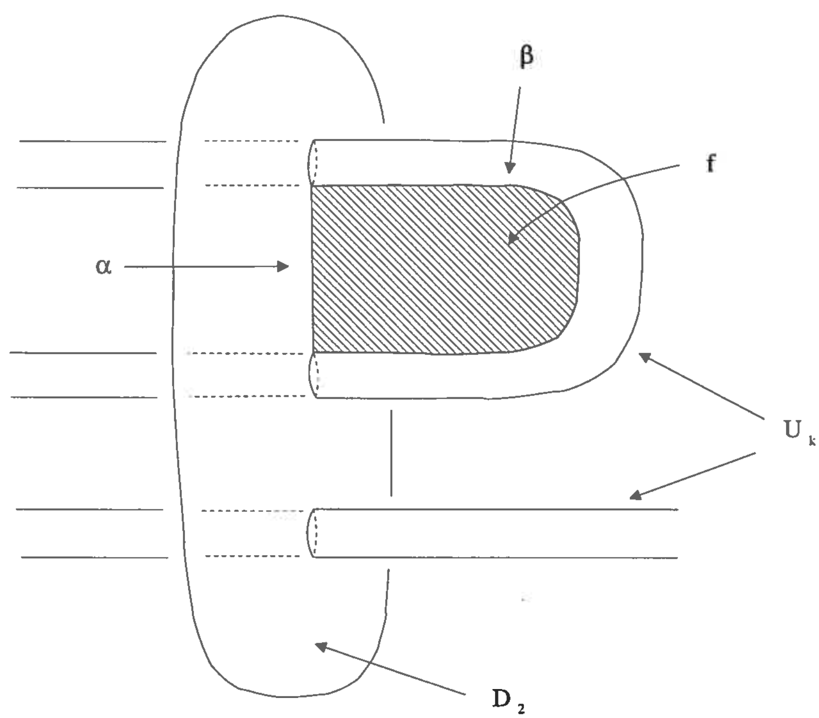


FIG. 3.17. Pousser le long du disque.

Puisque $q = 0$ ou 1 et $|k| \geq 6$, on a

$$deg\, \Gamma_2 \geq |k|(n_1 - q^2) \geq 6(n_1 - 1).$$

Puisque $n_1 \geq 2$ et $\Gamma_2 \subset D_2$ n'a pas de faces ayant un seul côté, le graphe Γ_2 contient n_1 arêtes mutuellement parallèles, par le lemme 3.3.3. Ces n_1 arêtes correspondent à des composantes $A_1, \ldots, A_{n_1}$ de A. Nous supposerons que les A_i

sont numérotés de manière à ce que les arêtes de Γ_2 correspondant à A_i et A_{i+1} soient directement parallèles, pour $1 \leq i < n_1$.

Orientons tous les arcs A_i dans la même direction et notons $\partial A_i = \partial_+ A_i \cup \partial_- A_i$, où A_i va de $\partial_- A_i$ à $\partial_+ A_i$. Notons $\partial_+ P_2$ et $\partial_- P_2$ les composantes de $\partial_0 P_2$ telles que $\partial_- A_i \in \partial_- P_2$ et $\partial_+ A_i \in \partial_+ P_2$, pour $1 \leq i \leq n_1$. Parce que A_i et A_{i+1}

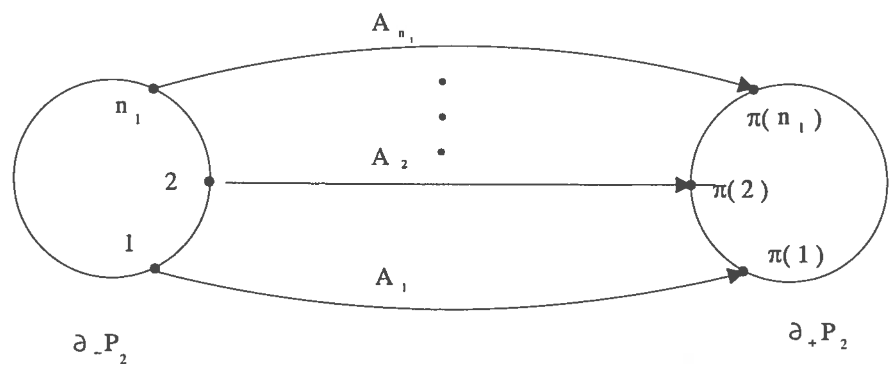


FIG. 3.18. La permutation π.

sont directement parallèles (pour $1 \leq i < n_1$), les points $\partial_+ A_1, \ldots, \partial_+ A_{n_1}$ sont consécutifs sur $\partial_+ P_2$, c'est-à-dire pour chaque $1 \leq i < n_1$, il existe un arc contenu dans $\partial_+ P_2$ dont le bord est $\partial_+ A_i \cup \partial_+ A_{i+1}$ et dont l'intérieur ne contient aucun point de $\partial_0 P_1$. Par conséquent, pour $1 \leq i < j \leq n_1$, les points $\partial_+ A_i$ est $\partial_+ A_j$ appartiennent à des composantes différentes de $\partial_0 P_1$. Puisque $\partial_0 P_1$ a exactement n_1 composantes, il suit que chaque composante de $\partial_0 P_1$ contient exactement un $\partial_+ A_i$. On obtient une conclusion similaire pour les $\partial_- A_i$.

On note $\partial_1 P_1, \ldots, \partial_{n_1} P_1$ les composantes de $\partial_0 P_1$ de manière à avoir $\partial_- A_i \in \partial_i P_1$, pour $1 \leq i \leq n_1$. Il existe donc une permutation π de $\{1, \ldots, n_1\}$ telle que $\partial_+ A_i \in \partial_{\pi(i)} P_1$, pour $1 \leq i \leq n_1$.

Fixons des orientations sur D_1, D_2 et X et munissons T, P_α et les composantes de $\partial_0 P_\alpha$ (pour $\alpha = 1,\ 2$) des orientations induites par X, D_α et P_α respectivement. Pour $\alpha = 1,\ 2$, on associe à chaque composante de $\partial_0 P_\alpha$ un signe ($+1$ ou -1) de manière à ce que deux composantes de $\partial_0 P_\alpha$ aient le même signe si elles sont homologues dans T et aient des signes opposés sinon.

On voit alors que $\pi(i) \equiv \epsilon i + s \; mod(n_1)$, où $0 \leq s < n_1$ et

$$\epsilon = \begin{cases} -1, \text{ si } \partial_- P_2 \text{ et } \partial_+ P_2 \text{ ont le même signe} \\ 1, \text{ si } \partial_- P_2 \text{ et } \partial_+ P_2 \text{ ont des signes opposés.} \end{cases}$$

Notons $\epsilon(i)$ le signe de $\partial_i P_1$ et $\epsilon(i,j) = \epsilon(i)\epsilon(j)$, pour $1 \leq i,\ j \leq n_1$. Remarquons

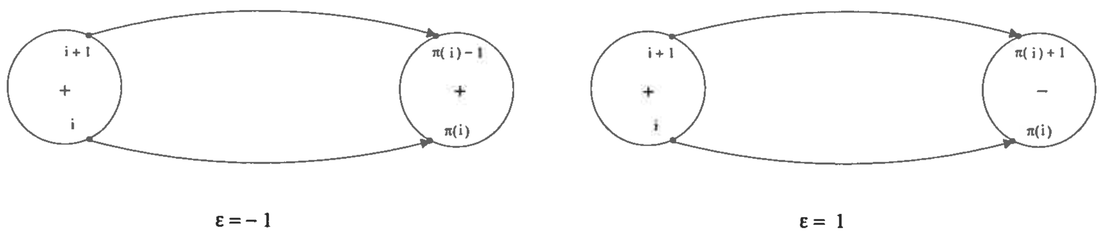


FIG. 3.19. Calcul de π.

que les orientations de $\partial_- A_i$ et $\partial_+ A_i$ induites par A_i sont de signes opposés. Il suit que le signe de l'intersection (dans T) entre $\partial_- P_2$ et $\partial_i P_1$ au point $\partial_- A_i$ et le signe de l'intersection (dans T) entre $\partial_+ P_2$ et $\partial_{\pi(i)} P_1$ au point $\partial_+ A_i$ sont opposés. Par conséquent, on obtient, pour $1 \leq i \leq n_1$,

$$\epsilon(i, \pi(i)) = \epsilon.$$

Orientons K de manière à ce que le signe du point d'intersection entre K et la composante de $D_1 \cap U$ dont le bord est $\partial_i P_1$ soit égal à $\epsilon(i)$. Par définition de q, on a alors

$$\begin{aligned} q &= \pm K \cdot D_1 \\ &= \pm \sum_{i=1}^{n_1} \epsilon(i). \end{aligned}$$

Lemme 3.3.8. *La permutation π n'a pas de points fixes.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\pi(j) = j$, pour un certain $1 \leq j \leq n_1$. On a alors $\epsilon(j, \pi(j)) = 1$ et donc $\epsilon = 1$. Le fait que $\epsilon = 1$ et que j est un point fixe de π entraînent que $s = 0$. Par conséquent π est l'identité.

Pour tout $1 \leq i \leq n_1$, l'arc A_i correspond à une boucle du graphe Γ_1 incidente au sommet correspondant à $\partial_i P_1$. Puisque chaque sommet du graphe fini Γ_1 admet une boucle, il suit que $\Gamma_1 \subset D_1$ a une face ayant un seul côté, ce qui contredit le lemme 3.3.7. $\square$

Pour montrer que $q = 0$, on montrera que si $q = 1$, alors π est l'identité, contredisant ainsi le lemme précédent. Supposons que $q = 1$. Dans ce cas, $\epsilon = 1$. En effet, si $\epsilon = -1$, alors $\epsilon(i)$ et $\epsilon(\pi(i))$ sont de signes opposés pour tout i. De plus, dans ce cas n_1 serait pair, car sinon $i \equiv 2^{-1}s \ mod(n_1)$ serait un point fixe de π, contredisant le lemme précédent. Par conséquent, lorsque $\epsilon = -1$, $q = \pm \sum_i \epsilon(i)$ est nul. L'hypothèse $q = 1$ implique donc que $\epsilon = 1$. D'autre part, puisque $\epsilon = 1$, les orbites de l'action de π sur $\{1, \ldots, n_1\}$ ont toutes le même nombre d'éléments et $\epsilon(i) = \epsilon(\pi(i))$, pour $1 \leq i \leq n_1$. Le nombre d'éléments d'une telle orbite doit alors diviser $q = \pm \sum_i \epsilon(i)$. Le fait que $q = 1$ entraîne que les orbites contiennent un seul point, ce qui revient à dire que π est l'identité. On a montré que si $q = 1$ alors π est l'identité. Par le lemme précédent, $q = 0$.

Il reste à traiter les cas où ϵ est $+1$ ou -1.

(i) Premier cas : $\epsilon = -1$.

Dans ce cas, π^2 est l'identité et par le lemme précédent, les orbites de l'action de π sur $\{1, \ldots, n_1\}$ sont de la forme $\{i, \pi(i)\}$. Pour chaque i, l'union $A_i \cup A_{\pi(i)}$ correspond à un cercle C_i dans $\Gamma_1 \subset D_1$. Puisque Γ_1 est un graphe fini, on peut choisir un cercle C_j minimal, c'est-à-dire tel que C_j est le bord d'un disque $\Delta \subset D_1$ pour lequel $int(\Delta) \cap V(\Gamma_1) = \emptyset$. Notons $D \subset P_1$ le disque $\Delta \cap X$. Puisque A_j et $A_{\pi(j)}$ correspondent à des

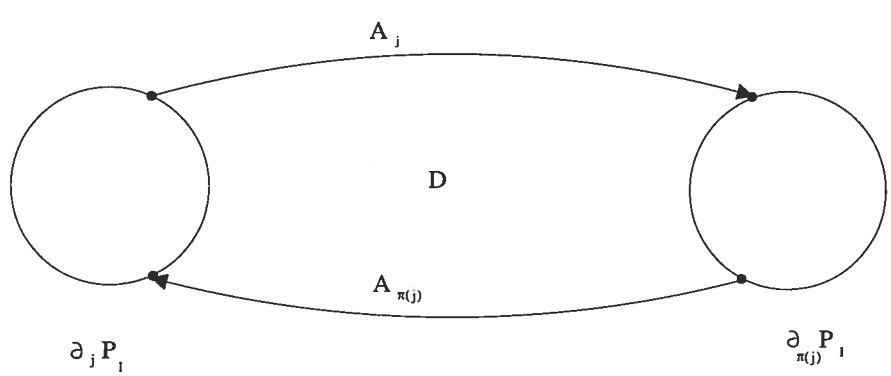


FIG. 3.20. Le disque D.

arêtes parallèles de Γ_2, il existe un disque $E \subset P_2$ avec $\partial E = A_j \cup A_{\pi(j)} \cup \delta_+ \cup \delta_-$, où $\delta_\pm$ est un arc dans $\partial_\pm P_2$ reliant les points $\partial_\pm P_2 \cap (A_j \cup A_{\pi(j)})$. Remarquons que E peut contenir des arcs A_i pour certains $i \neq j$. Par

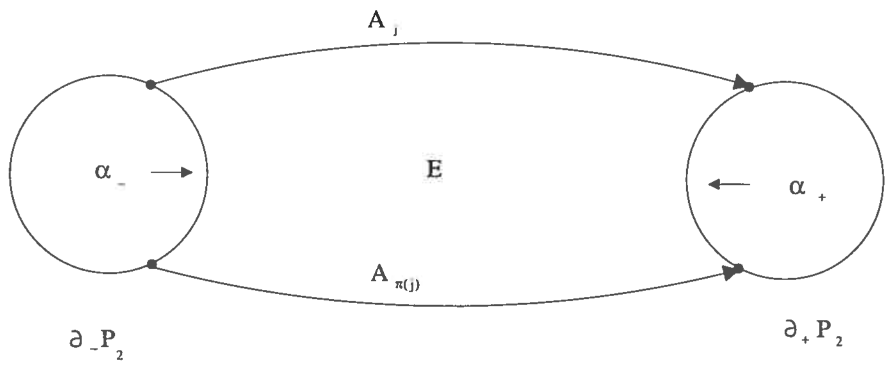


FIG. 3.21. Le disque E.

contre, il suit de la définition de Δ et du lemme 3.3.6 que $D \cap P_2 = A_j \cup A_{\pi(j)}$. De plus, ∂E est le bord d'un ruban de Möbius $B \subset V$. En effet, B est l'union de D, d'un disque méridionnel de U et d'un disque $D' \subset T$ tel que $\delta_+, \delta_- \subset \partial D'$. Par définition de D, on a $E \cap B = \partial E$. Il suit que $E \cup B$ est un plan projectif plongé dans $V \subset S^3$, ce qui est absurde. Le cas $\epsilon = -1$ est donc impossible.

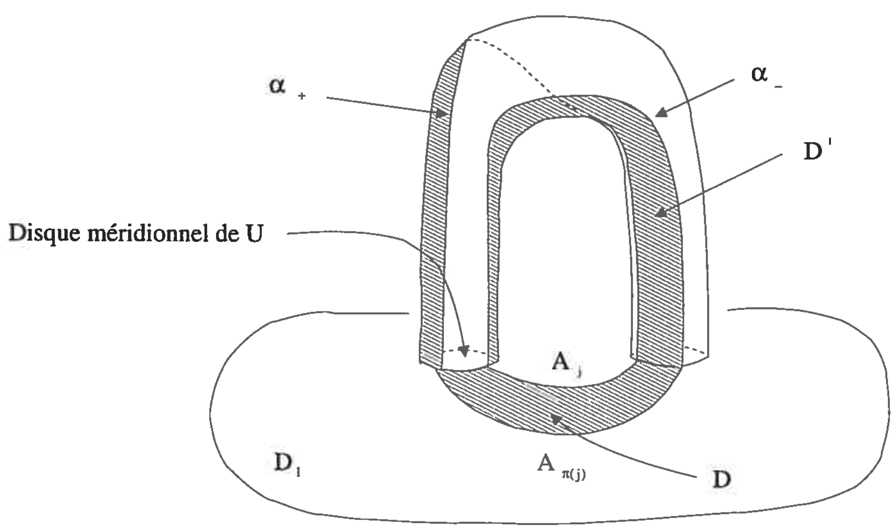


FIG. 3.22. Le ruban de Möbius.

(ii) Deuxième cas : $\epsilon = 1$.

Dans ce cas, chaque orbite de π contient exactement m points, où $m \geq 2$ par le lemme précédent. Pour chaque orbite θ de π, l'ensemble $\cup_{i\in\theta} A_i$ correspond à un cercle C_θ dans Γ_1. Puisque les C_θ sont disjoints, on peut choisir une orbite θ pour laquelle C_θ borde un disque Δ dans D_1 dont l'intérieur ne contient aucun sommet de Γ_1. Nous noterons $D \subset P_1$ le disque $\Delta \cap P_1$. De plus, on note $\theta = \{i_1, \ldots, i_m\}$, où $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Pour chaque $1 \leq j < m$, il existe un disque Δ_j dans D_2 tel que $\partial \Delta_j$ correspond à $A_{i_j} \cup A_{i_{j+1}}$, car les arêtes de Γ_2 correspondant à A_{i_j} et $A_{i_{j+1}}$ sont parallèles. Nous noterons E_j le disque $\Delta_j \cap P_2$, pour $1 \leq j < m$.

Soit N un voisinage tubulaire de $D \cup \cup_{j=1}^{m-1} E_j$ dans X et notons $V' = N \cup U \subset V$. Montrons que V' est un tore solide tel que $w_{V'}(K) \geq 2$. Pour $1 \leq j \leq m$, notons $D_{1,j}$ la composante de $D_1 \cap U$ telle que $\partial D_{1,j} = \partial_{i_j} P_1$ et notons $\hat{D}$ le disque $D \cup \cup_{j=1}^{m} D_{1,j}$. Considérons l'espace W obtenu de

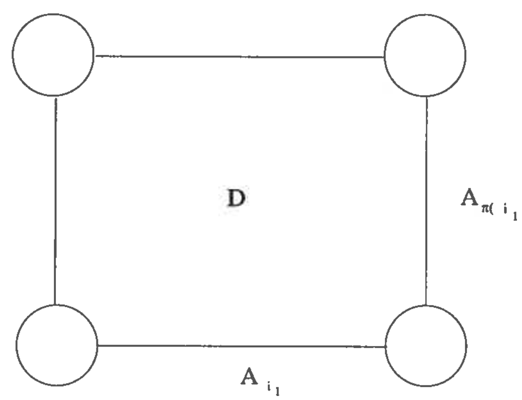


FIG. 3.23. Le disque D.

V' en coupant le long de $\hat{D}$, c'est-à-dire $W = \overline{V' \setminus N'}$, où N' est un voisinage tubulaire du disque $\hat{D}$ dans V'. Par définition de V', on a $(W, K \cap W) \cong (D^2, \{z_1, \ldots, z_m\}) \times I$, où les z_i sont des points distincts dans l'intérieur de D^2. Pour voir ceci, remarquons que W se décompose en deux 3-boules (homéomorphes à $\hat{D} \times I$) jointes l'une à l'autre par m 1-anses (correspondant à des parties de U) auquel $(m-1)$ 2-anses ont été attachées (dont les âmes correspondent à $E_1, \ldots, E_{m-1}$) (voir la preuve de la proposition 1.3 dans [**GLi**]). On obtient V' à partir de $W \cong D^2 \times I$ en

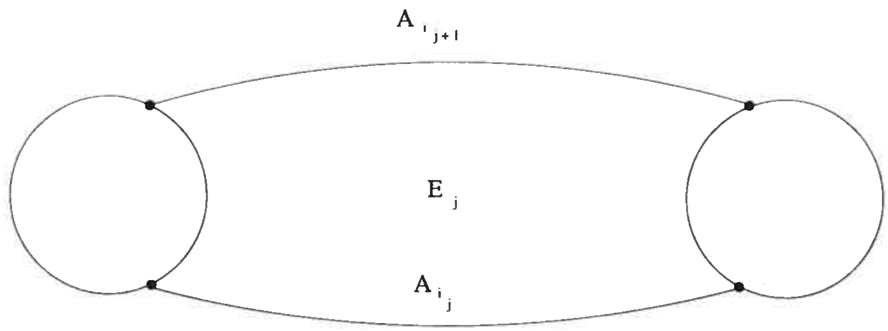


FIG. 3.24. Le disque E_j.

identifiant $D^2 \times \{0\}$ et $D^2 \times \{1\}$ à l'aide d'un homéomorphisme ϕ isotope à une rotation de $\frac{2\pi n}{m}$ envoyant z_j sur z_{j+1}, où n est l'entier positif minimal tel que $\pi^n(i_j) = i_{j+1}$, pour tout j. Ainsi, V' est un tore solide. On oriente I de manière à ce que l'homéomorphisme entre V' et le quotient $(D^2 \times I)/\phi$ envoie K sur la courbe $(\{z_1, \ldots, z_m\} \times I)/\phi$ en préservant l'orientation. Ainsi, le nombre de rotation de K dans V' est $m \geq 2$.

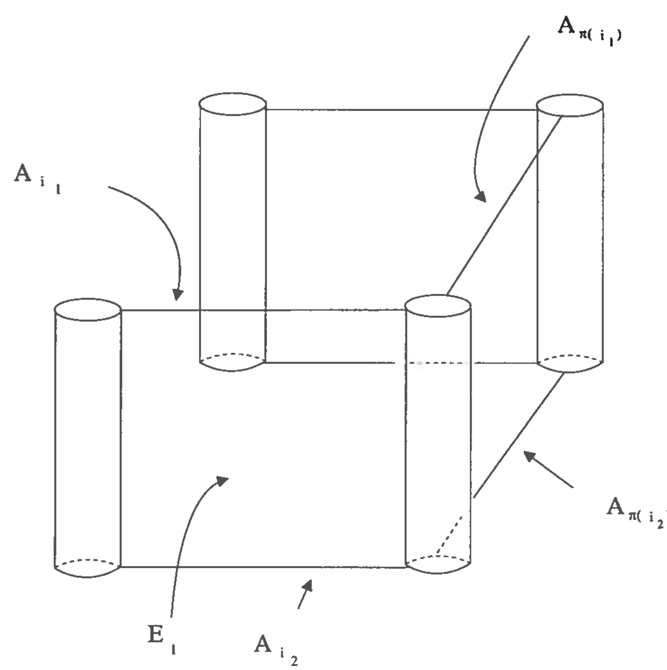


FIG. 3.25. Décomposition de W en anses.

□

3.3.3. Le cas $w < 2$

Nous pouvons maitenant démontrer le point (3) du théorème 3.1.3.

Théorème 3.3.9. *Si $K \subset S^3$ est un noeud satellite avec nombre de rotation* 0 *ou* 1, *alors $K(\frac{1}{n})$ n'est pas simplement connexe pour $|n| \geq 6$.*

DÉMONSTRATION. Puisque K est un noeud satellite avec nombre de rotation 0 ou 1, il existe un tore solide noué $V \subset S^3$ tel que $K \subset int(V)$, $w_V(K) = 0$ ou 1 et $wr_V(K) > 0$.

Si $wr_V(K) = 1$, alors K est la somme connexe $K_1 \sharp K_2$ de deux noeuds K_1 et K_2 non-triviaux dans S^3, c'est-à-dire $K = K_1 \sharp K_2 = K_1 \setminus int(K_1 \cap B_1) \cup_\phi K_2 \setminus int(K_2 \cap B_2)$, où B_1 et B_2 sont deux 3-boules dans S^3 telles que, pour $i = 1, 2$, le couple $(B_i, K_i \cap B_i)$ est homéomorphe au couple $(D^2, \{*\}) \times I$ et $\phi : (\partial B_1, K_1 \cap \partial B_1) \xrightarrow{\cong} (\partial B_2, K_2 \cap \partial B_2)$ est un homéomorphisme. Il suit dans ce cas que K vérifie la propriété P (voir le théorème J.8 du chapitre 9 dans [**Rol**]).

Supposons que $wr_V(K) \geq 2$ et que $K(\frac{1}{n})$ est simplement connexe pour un certain entier n tel que $|n| \geq 6$. Remarquons que $K(\frac{1}{n})$ se décompose en

$$K\left(\frac{1}{n}\right) = S^3 \setminus int(V) \cup_{1_{\partial V}} V(K; \frac{1}{n}).$$

Puisque $K(\frac{1}{n})$ est simplement connexe, il suit du lemme 3.2.4 que $V(K; \frac{1}{n})$ a un groupe fondamental cyclique infini (car V est noué dans S^3). Par le lemme 3.3.5, $w_V(K) = 0$ et il existe un tore solide $V' \subset int(V)$ tel que $K \subset int(V')$ et $w_{V'}(K) \geq 2$.

Appliquons maintenant le théorème 3.2.50 à $K \subset V'$. Pour ce faire, nous devons d'abord montrer que V' est noué dans S^3. Notons K' l'âme de V'. Remarquons que $wr_V(K') > 0$, car si $wr_V(K') = 0$, alors il existerait un disque méridionnel de V disjoint de V' et donc $wr_V(K) = 0$. Puisque $w_{V'}(K) \neq w_V(K) = 0$, K' n'est pas isotope (dans V) à l'âme de V. Par conséquent, K' est un satellite de l'âme de V. L'âme de V étant non-triviale dans S^3, on conclut que K' est non-trivial dans S^3 (voir le corollaire D.10 au chapitre 4 du livre [**Rol**]).

On peut donc appliquer le théorème 3.2.50 à $K \subset V'$ et on obtient que $K(\frac{1}{m})$ n'est pas simplement connexe lorsque $|m| > 1$, ce qui contredit l'hypothèse que $K(\frac{1}{n})$ est simplement connexe. $\square$

Chapitre 4

LE PROBLÈME DU COMPLÉMENT

Ce chapitre résume la preuve de Gordon et Luecke du fait que S^3 ne peut pas être obtenu par une chirurgie de Dehn non-triviale le long d'un noeud non-trivial. Les références principales sont l'article de Gordon et Luecke [**GLu1**] et le texte de Gordon [**Go**].

4.1. Introduction

Nous avons vu au chapitre 2 que le théorème suivant a pour conséquence qu'un noeud dans S^3 est déterminé (à équivalence près) par la classe d'homéomorphisme de son complément.

Théorème 4.1.1. *Soit K un noeud non-trivial dans S^3. Si $K(r)$ est homéomorphe à S^3, alors la pente r est triviale, c'est-à-dire $r = \mu_K$.*

Pour démontrer ce théorème, Gordon et Luecke supposent d'abord que la pente r est non-triviale. Ils choisissent alors des surfaces *planaires* transverses P_1 et P_2 proprement plongées dans l'extérieur du noeud K telles que chaque composante du bord est une courbe de pente r et μ_K respectivement. Ils montrent qu'il est possible de faire ce choix de manière à ce que chaque composante de $P_1 \cap P_2$ qui est un arc soit *essentielle* à la fois dans P_1 et dans P_2 (voir la section 4.2). Ils considèrent ensuite les graphes Γ_1 et Γ_2 associés à P_1 et P_2 respectivement (dont les arêtes sont les arcs de $P_1 \cap P_2$). Le fait que les arcs de $P_1 \cap P_2$ soient essentiels dans P_i, pour $i = 1,\ 2$, se traduit dans le langage combinatoire par le fait que le graphe Γ_i ne contient pas de boucle triviale. Ils utilisent ensuite l'hypothèse que $r \neq \mu_K$ pour montrer (à l'aide d'une analyse combinatoire, voir la section 4.3) que Γ_1 et Γ_2 contiennent certaines faces ou sous-graphes distingués. On voit par la suite que l'existence de ces configurations entraîne que $H_1(S^3)$ a un sous-groupe de torsion non-trivial, ce qui est absurde. Ainsi, on doit avoir $r = \mu_K$.

Avant de démontrer le théorème 4.1.1 plus en détails, on introduit le concept de *distance entre deux pentes* sur un tore, qui simplifiera la formulation de certains résultats. Rappelons qu'une pente r sur un tore T est la classe d'isotopie d'une courbe simple fermée, essentielle (et non-orientée) dans T.

Définition 4.1.2. *Soit r_1 et r_2 deux pentes sur un tore T. La* distance *entre r_1 et r_2, notée $\Delta(r_1, r_2)$, est définie par*

$$\Delta(r_1, r_2) = min\{\ |\gamma_1 \cap \gamma_2|\ |\gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ transverses et } \gamma_i \in r_i,\ i = 1,\ 2\ \}.$$

Si on fixe une base ordonnée $\{\xi, \eta\}$ de $H_1(T)$, alors l'ensemble des pentes de T correspond à l'ensemble des couples $\pm(a, b)$, où a et b sont des entiers relativement premiers. Remarquons que pour une orientation quelconque de T, le nombre d'intersection (algébrique) $\xi \cdot \eta$ est ± 1, car ξ et η forment une base de $H_1(T) \equiv \mathbb{Z}^2$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\xi \cdot \eta$ est $+1$.

Si γ_i est un représentant orienté de la pente r_i sur T, alors il existe des entiers premiers entre eux a_i et b_i tels que $[\gamma_i] = a_i\xi + b_i\eta$ dans $H_1(T)$, pour $i = 1,\ 2$. Le nombre d'intersection $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$ est alors égal à $a_1b_2 - a_2b_1$. Puisqu'on peut isotoper γ_1 et γ_2 dans T de manière à être transverses et que tous les points de $\gamma_1 \cap \gamma_2$ soient de même signe, on conclut que

$$\begin{aligned}\Delta(r_1, r_2) &= |[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]| \\ &= |a_1b_2 - a_2b_1|.\end{aligned}$$

Remarquons que si $\Delta(r_1, r_2) = 0$, alors $r_1 = r_2$. Les deux prochaines sections présentent les résultats liés à la théorie de Cerf et à la combinatoire nécessaires pour démontrer le théorème 4.1.1. La démonstration du théorème 4.1.1 est donnée à la section 4.4.

4.2. Le choix des surfaces

Contrairement au problème traité par Litherland dans [**L2**] (et dans la dernière section du chapitre précédent), le choix des surfaces s'avère ici être plus difficile. Cette section présente la preuve du théorème suivant (voir le chapitre 1 dans [**GLu1**]).

Théorème 4.2.1. *Soit K un noeud non-trivial dans S^3 et r une pente de K telle que $K(r) \cong S^3$ et $\Delta = \Delta(r, \mu_K) > 0$. Alors, il existe des* surfaces planaires *P_1 et P_2 proprement plongées dans X, l'extérieur de K dans S^3, telles que*

(i) chaque composante de ∂P_i est de pente r_i dans ∂X, où $i = 1, 2$, $r_1 = r$ et $r_2 = \mu_K$;

(ii) P_1 et P_2 sont transverses et chaque composante de ∂P_1 intersecte chaque composante de ∂P_2 en exactement Δ points dans ∂X ;

(iii) les composantes de $P_1 \cap P_2$ qui sont des arcs sont essentielles *dans P_1 et P_2.*

Rappelons qu'une *surface planaire* est une surface obtenue d'une 2-sphère en retirant l'intérieur d'un nombre fini (non-nul) de disques disjoints. En particulier, les bords ∂P_1 et ∂P_2 sont non-vides. Un arc α proprement plongé dans une surface avec bord P est dit *non-essentiel* dans P s'il existe un arc $\beta \subset \partial P$ tel que $\partial\alpha = \partial\beta$ et s'il existe un disque $D \subset P$ avec $\partial D = \alpha \cup \beta$. Sinon, l'arc α est dit *essentiel* dans P. Pour démontrer le théorème 4.2.1 nous utiliserons la notion de position

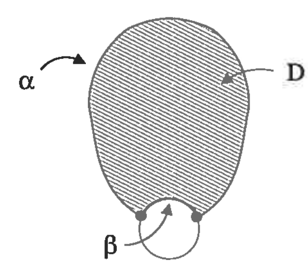


Fig. 4.1. Un arc non-essentiel.

mince d'un noeud dans S^3.

4.2.1. Position mince

Notons $\pm\infty$ les pôles nord et sud (respectivement) de S^3. Remarquons que $S^3\backslash\{\pm\infty\}$ est naturellement homéomorphe à $S^2\times\mathbb{R}$ et notons $p : S^3\backslash\{\pm\infty\}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction (que nous appellerons *fonction hauteur*) correspondant à la projection $S^2\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Remarquons qu'un noeud $K\subset S^3$ est isotope à un noeud contenu dans $S^3\setminus\{\pm\infty\}$. On appellera *sphère de niveau* une 2-sphère dans $S^3\setminus\{\pm\infty\}\equiv S^2\times\mathbb{R}$ correspondant à $S^2\times\{t\}$, pour un certain $t\in\mathbb{R}$.

Définition 4.2.2. *Soit K un noeud dans S^3. On dit que $p|K : K\longrightarrow\mathbb{R}$ est une* présentation de Morse *de K si $p|K$ est une fonction de Morse (c'est-à dire si $p|K$ a un nombre fini de points critiques, tous non-dégénérés) ayant toutes ses valeurs critiques distinctes (c'est-à-dire que $p|K$ est injective sur son ensemble de points critiques).*

Si $p|K$ est une présentation de Morse, on définit la complexité *de K, notée $c(K)$, par*

$$c(K)=\sum_{i=1}^{n}|Q_i\cap K|$$

où $Q_1,\ldots,Q_n$ sont des sphères de niveau dont une est située entre chaque paire de valeurs critiques consécutives de $p|K$. On dit que K est en position mince *si $p|K$ est une présentation de Morse de K ayant une complexité minimale.*

Définition 4.2.3. *Soit K un noeud dans S^3 et X l'extérieur de K dans S^3. Si $p|K$ est une présentation de Morse de K et Q est une sphère de niveau transverse à K dans $S^3\setminus\{\pm\infty\}$, alors on appellera* surface de niveau *l'intersection $Q\cap X$.*

Remarque 4.2.4. *Soit S une 2-sphère (lisse) plongée dans S^3, V un voisinage tubulaire d'un noeud K dans S^3 et X l'extérieur $S^3\setminus int(V)$ de K dans S^3. Supposons que S est transverse à K, que $S\cap K$ est non-vide et notons $F_1=S\cap X$. La surface F_1 sépare X en deux composantes connexes, que nous noterons A et B. Soit F_2 une surface connexe, compacte, orientable, proprement plongée dans X et transverse à F_1.*

Supposons qu'il existe α une composante de $F_1\cap F_2$ qui est un arc non-essentiel dans F_2. Par définition, il existe un disque $D\subset F_2$ et un arc $\beta\subset\partial F_2$ tels que $\partial\alpha=\partial\beta$ et $\partial D=\alpha\cup\beta$. Supposons que D est minimal, c'est-à-dire $int(\beta)\cap F_1=\emptyset$.

Nous appellerons disque de ∂-compression *pour F_1 un tel disque D. Selon le cas où $int(\beta)$ est contenu dans A ou B on dira que β est (respectivement)* au-dessus *ou* en-dessous *de F_1, que D est un* disque haut *ou* bas *(respectivement) par rapport à F_1 et que la surface F_1 est basse ou haute (respectivement) par rapport à F_2. Remarquons que l'adhérence de chaque composante de $V \setminus S$ est une 1-anse et que β est contenu dans une telle 1-anse h. On notera $\hat{\beta}$ l'arc $K \cap h$.*

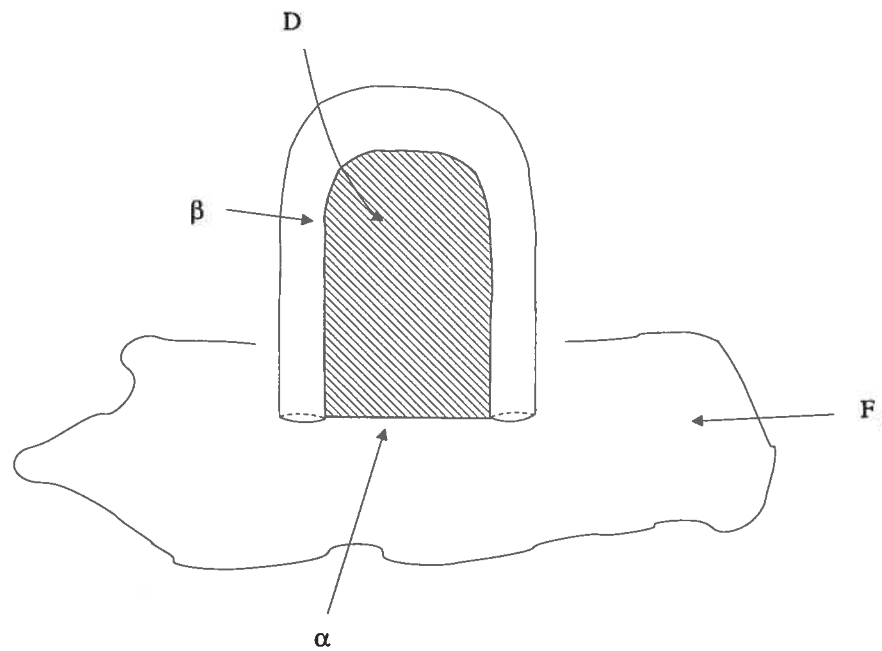


FIG. 4.2. Un disque haut par rapport à F_1.

Affirmation 4.2.5. *Si K est un noeud non-trivial en position mince et que F_1 est isotope (dans X) à une surface de niveau, alors la surface F_1 ne peut pas être à la fois basse et haute par rapport à F_2.*

Supposons que la surface F_1 est à la fois basse et haute par rapport à F_2. Par définition, il existe des disques D_- et D_+ contenus dans F_2 qui sont bas et hauts (respectivement) par rapport à F_1. Notons $\alpha_\pm = \partial D_\pm \cap F_1$ et $\beta_\pm = \partial D_\pm \cap \partial X$. Puisque α_- et α_+ sont des composantes de $F_1 \cap F_2$, on a $\alpha_- \cap \alpha_+ = \emptyset$ ou $\alpha_- = \alpha_+$.

On peut supposer sans perdre de généralité que F_1 est une surface de niveau. Dans ce cas, S est une sphère de niveau. Si $\partial\beta_- = \partial\beta_+$, alors K est trivial (voir la figure ci-dessous). Si $\partial\beta_- \neq \partial\beta_+$, alors on peut utiliser les disques D_- et D_+

pour isotoper K de manière à diminuer la complexité $c(K)$, ce qui est impossible si K est en position mince. L'affirmation est donc démontrée.

Remarquons que l'affirmation reste vraie si on remplace F_2 par une famille finie de surfaces disjointes, proprement plongées dans X et transverse à F_1.

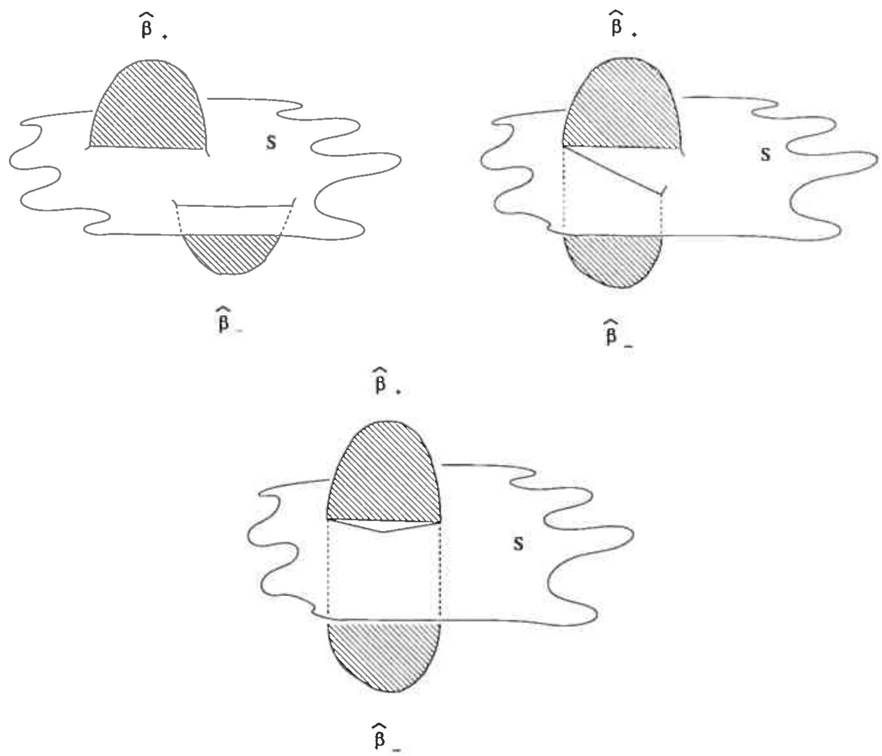


FIG. 4.3. Disques hauts et bas.

4.2.2. Théorie de Cerf

Définition 4.2.6. *Soit S une surface compacte, connexe, orientable, avec bord et F la surface $S \setminus C$, où $C \cong \partial S \times [0,1[$ est un collet ouvert de ∂S dans S. Soit $g : F \times I \longrightarrow S^3 \setminus \{\pm\infty\}$ un plongement et notons $A(\lambda)$ l'image de $A \times \{\lambda\}$ par g, pour un sous-ensemble A de F. On dira que la* famille *$\{F(\lambda)\}$ est* de Cerf *(par rapport à la fonction hauteur p) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Le plongement g se prolonge en un plongement de $F_0 \times I$, où $F_0 = int(S)$. De plus, il existe un collet ouvert C' de ∂F dans F tel que la restriction de p à $(C \cup C')(\lambda)$ n'a pas de points critiques, pour tout $\lambda \in I$.

(ii) À l'exception d'un nombre fini de valeurs de λ, la restriction $p|F_0(\lambda)$ est une fonction de Morse ayant toutes ses valeurs critiques distinctes.

(iii) Si $p|F_0(\lambda)$ n'est pas une fonction de Morse ayant toutes ses valeurs critiques distinctes, alors exactement un des deux cas suivants survient :

(a) La fonction $p|F_0(\lambda)$ a un nombre fini de points critiques ayant des valeurs critiques distinctes et dont exactement un point critique est dégénéré de type naissance-mort *(voir la remarque suivante).*

(b) La fonction $p|F_0(\lambda)$ est de Morse et tous ses points critiques, sauf exactement deux, ont des images distinctes par p.

Le graphique *de $\{F(\lambda)\}$ par rapport à p, noté Γ, est défini comme étant l'ensemble des couples $(\lambda, v) \in I \times \mathbb{R}$ pour lesquels v est une valeur critique de $p|F(\lambda)$. La dernière condition s'exprime en termes du graphique de $\{F(\lambda)\}$.*

(iv) En une singularité du graphique, les directions tangentes à chaque branche de Γ sont ni verticales, ni horizontales.

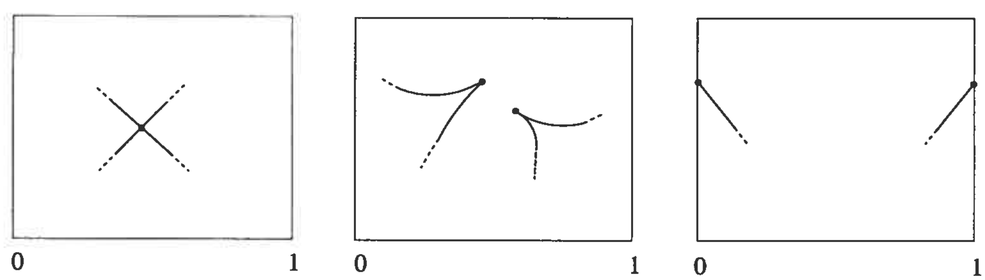


FIG. 4.4. Comportement local du graphique.

Remarque 4.2.7. *Points critiques de type naissance-mort.*

Dans la notation de la définition précédente, considérons un point critique dégénéré $c \in F_0(\lambda_0)$ de $p|F_0(\lambda_0)$ et notons $g^{-1}(c) = (x_0, \lambda_0)$. On dit que c est de type naissance-mort *s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans F_0 et un voisinage fermé J de λ_0 dans I tels que $(U \times J, (x_0, \lambda_0)) \cong (\mathbb{R}^2 \times I, (x'_0, \frac{1}{2}))$ et pour tout $(x, \lambda) \in U \times J \equiv \mathbb{R}^2 \times I$, la valeur de $p \circ g$ en (x, λ) est donnée par*

$$p \circ g(x, \lambda) = h \circ f(x_0, \lambda_0) \pm x_1^2 + x_2^3 - (2\lambda - 1)x_2.$$

On remarque que la fonction correspondant au membre de droite de l'égalité précédente a aucun point critique pour $\lambda < \frac{1}{2}$, a un seul point critique (dégénéré) pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et a exactement deux points critiques (non-dégénérés) pour $\lambda > \frac{1}{2}$. Ce comportement justifie la terminologie "naissance-mort."

Une étude du graphique associé à des familles de sufaces de niveau dans $S^3 \setminus \{\pm\infty\}$ nous permettra de démontrer le théorème 4.2.1.

Définition 4.2.8. *Soit K un noeud dans S^3 en position mince et soit $P \times I \subset X$ une famille de surfaces de niveau pour la fonction hauteur p. On dit que $P \times I$ est une* tranche *pour la fonction $p|K$ si $p(P \times I)$ est contenu dans un interval ouvert $]a, b[$ pour lequel a et b sont des valeurs critiques consécutives de $p|K$ correspondant (respectivement) à un minimum local et à un maximum local de $p|K$.*

DÉMONSTRATION. (théorème 4.2.1)

Soit K un noeud non-trivial dans S^3 et notons X l'extérieur de K dans S^3. Supposons que r est une pente non-triviale dans ∂X pour laquelle $K(r) \cong S^3$. Notons $r_1 = r$, $r_2 = \mu_K$ et $M_i = K(r_i)$, pour $i = 1,\ 2$. Remarquons que M_i se décompose en $X \cup V_i$, où V_i est un tore solide pour lequel $X \cap V_i = \partial X = \partial V_i$ et un disque méridionnel de V_i intersecte X en une courbe de pente r_i dans ∂X. Notons K_i l'âme de V_i et notons p_i la fonction hauteur sur $M_i \setminus \{\pm\infty\} \cong S^3 \setminus \{\pm\infty\}$. On remarque que le fait que K est non-trivial dans S^3 entraîne que les noeuds K_1 et K_2 sont non-triviaux dans M_1 et M_2 respectivement. Le lemme suivant permettra de faire le lien entre la recherche des surfaces P_1 et P_2 (voir l'énoncé du théorème 4.2.1) et le graphique associé à une certaine famille de Cerf.

Lemme 4.2.9. *Il existe des familles de surfaces planaires $P_1 \times I$ et $P_2 \times I$ contenues dans X telles que*

(1) $P_1 \times I$ est isotope à une tranche pour la fonction $p|K_1$;

(2) $P_2 \times I$ est une tranche pour la fonction $p|K_2$;

(3) chaque composante de $\partial P_1(\lambda)$ intersecte transversalement chaque composante de $\partial P_2(\mu)$ en exactement $\Delta = \Delta(r_1, r_2) > 0$ points ;

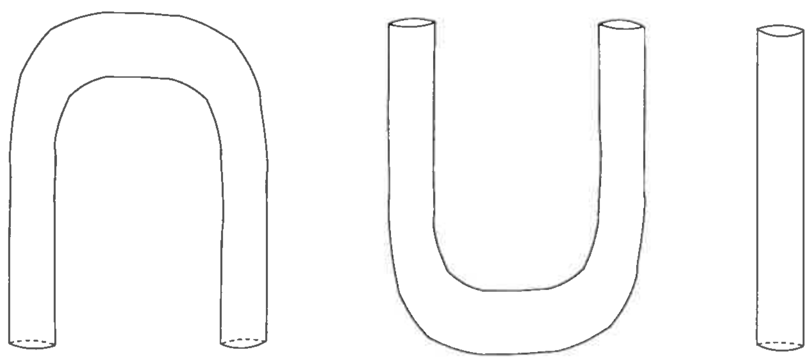
(4) il existe $\mu_0 \in]0,1[$ tel que les surfaces $P_1(0)$ et $P_1(1)$ sont (respectivement) haute et basse par rapport à $P_2(\mu_0)$;

(5) il existe $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que les surfaces $P_2(0)$ et $P_2(1)$ sont (respectivement) haute et basse par rapport à $P_1(\lambda_0)$;

(6) la famille $\{P_1(\lambda)\}$ est de Cerf par rapport à p_2.

DÉMONSTRATION. (voir le lemme 1.2 dans [**GLu1**])

On peut supposer sans perdre de généralité que K_1 et K_2 sont en position mince dans les 3-sphères M_1 et M_2 respectivement. Par une isotopie de M_i, on obtient que si $x \in K_i$ est un maximum (respectivement minimum) local de $p_i|K_i$, alors il existe un voisinage ouvert U de x dans M_i tel que $V_i \cap U$ apparaît comme à la figure 4.5 (a) (respectivement (b)). De plus, si $x \in K_i$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local de $p|K_i$, alors il existe un voisinage U de x dans M_i pour lequel $V_i \cap U$ apparaît comme à la figure 4.5 (c). On choisit, pour $i = 1,\ 2,$



(a) (b) (c)

FIG. 4.5. Le tore solide V_i près de U.

une tranche $P_i \times I \subset X$ pour la fonction $p_i|K_i$. On peut supposer sans perdre de généralité que la condition (3) est satisfaite. Puisque $P_2 \times I$ est situé entre un minimum local et un maximum local de $p_2|K_2$, on peut montrer qu'alors il existe une isotopie de $P_1 \times I$ dans X (qui fixe $C \times I$, pour un collet C de ∂P_1 dans P_1) telle que les surfaces $P_2(0)$ et $P_2(1)$ sont haute et basse (respectivement) par rapport à un certain $P_1(\lambda_0)$.

Fixons maitenant $\mu_0 \in]0,1[$. En renversant l'isotopie précédente, on peut montrer qu'il existe une isotopie de X (qui fixe $P_1(\lambda_0) \cup C_0 \times I$, pour un sous-collet $C_0 \subset C$) telle que les surfaces $P_1(0)$ et $P_1(1)$ sont haute et basse (respectivement) par rapport à $P_2(\mu_0)$ et que les conditions (1) et (2) de l'énoncé du lemme restent satisfaites. Puisque les isotopies considérées fixent $C_0 \times I \subset P_1 \times I$, il suit que la condition (3) reste satisfaite.

Par des arguments de transversalité liés à la stratification de Cerf de l'espace des fonctions lisses d'une variété compacte M à valeurs réelles, on peut trouver une isotopie de X rendant $\{P_1(\lambda)\}$ une famille de Cerf par rapport à la fonction p_2 (voir [**Ce2**]). De plus, il est possible d'effectuer cette dernière isotopie de manière à ce que les conditions (3), (4) et (5) restent valides. $\square$

Considérons maintenant le graphique Γ (par rapport à la fonction hauteur p_2) associé à la famille $\{P_1(\lambda)\}$. Puisque $P_2 \times I$ est une famille de surfaces de niveau pour p_2, il suit que p_2 est constante sur $P_2(\mu)$, pour tout $\mu \in I$. Supposons sans perdre de généralité que $p_2(P_2(\mu)) = \{\mu\}$, pour tout $\mu \in I$.

Il existe un intervalle fermé $[a,b]$ contenu dans $I = [p_2(P_2(0)), p_2(P_2(1))]$ tel que pour chaque λ, si l'intersection entre $\Gamma \cap (I \times \{a,b\})$ et le segment de droite $\{\lambda\} \times [a,b]$ est non-vide, alors $p_2|P_1(\lambda)$ est une fonction de Morse et cette intersection contient exactement un point (qui correspond à une intersection transverse entre Γ et $I \times \{a,b\}$). Quitte à reparamétrer I, on peut supposer sans perdre de généralité que $[a,b] = I$. Soit G l'intersection $\Gamma \cap (I \times I)$. Les singularités des G sont de trois types :

(i) un point d'intersection entre G et $I \times \{0,1\}$;

(ii) un point correspondant à un point critique de type "naissance-mort" (voir le carré du centre de la figure 4.4) ;

(iii) un point correspondant à l'échange de deux valeurs critiques (voir le carré de gauche à la figure 4.4 et le point $(iii)-(b)$ de la définition d'une famille de Cerf).

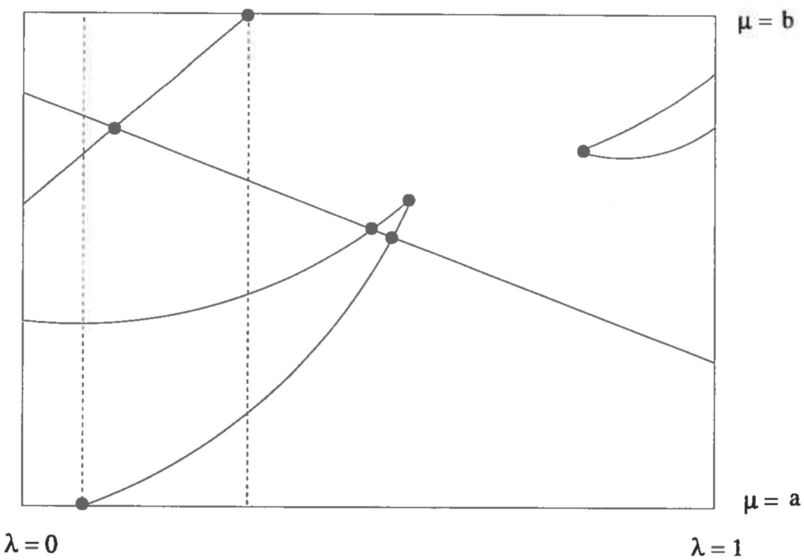


FIG. 4.6. Un exemple de graphique.

Ces singularités correspondent à un nombre fini de valeurs de λ dans $]0,1[$. Par la définition d'une famille de Cerf et par le paragraphe précédent, deux singularités distinctes correspondent à des valeurs distinctes de λ.

Remarquons que pour (λ, μ) appartenant à $I \times I \setminus G$, μ est une valeur régulière de la restriction $p_2|P_1(\lambda)$. Par conséquent, $P_1(\lambda)$ et la surface de niveau $P_2(\mu)$ (pour p_2) s'intersectent transversalement. Pour $i = 1,\ 2$, on définit la fonction $\phi_i : I \times I \setminus G \longrightarrow \{A, B, C\}$ de manière à ce que $\phi_i(s_1, s_2)$ soit égal à A, B ou C selon que la surface $P_i(s_i)$ est haute, basse ou ni haute, ni basse par rapport à $P_j(s_j)$, où $\{i,j\} = \{1,2\}$.

Pour démontrer le théorème 4.2.1, il suffit alors de montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in I \times I \setminus G$ tel que $\phi_1(\lambda, \mu) = \phi_2(\lambda, \mu) = C$. Dans ce cas, les arcs de $P_1(\lambda) \cap P_2(\mu)$ seront essentiels dans $P_1(\lambda)$ et $P_2(\mu)$ et les conditions (i) et (ii) du théorème 4.2.1 seront satisfaites.

Par la remarque 4.2.4, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont bien définies. De plus, elles possèdent les propriétés suivantes :

(a) Si $\phi_1(\lambda, \mu) = A$ (respectivement B), alors $\phi_1(\lambda, \mu') = A$ (respectivement B) ou C, par la remarque 4.2.4. Une affirmation similaire est valide pour ϕ_2.

(b) Pour λ fixé, l'intersection $P_1(\lambda) \cap P_2(\mu)$ est isotope à $P_1(\lambda) \cap P_2(\mu')$ dans $P_1(\lambda)$, pour μ et μ' situés entre deux valeurs critiques consécutives de $p_2|P_1(\lambda)$. Une affirmation similaire est valide lorsque μ est fixe et λ varie de manière à ce que (λ, μ) reste dans la même composante connexe de $I \times I \setminus G$. Il suit que ϕ_1 et ϕ_2 sont constantes sur les composantes de $I \times I \setminus G$.

(c) Soit c une valeur critique correspondant à un minimum local ou à un maximum local de $p_2|P_1(\lambda)$. En faisant varier μ de manière à passer d'une valeur inférieure à c à une valeur supérieure à c, l'intersection $P_1(\lambda) \cap P_2(\mu)$ gagne ou perd un seul cercle selon que c correspond à un minimum local ou à un maximum local (respectivement). Puisque cette variation n'affecte pas le reste de $P_1(\lambda) \cap P_2(\mu)$ à isotopie près, il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\phi_1(\lambda, c-\epsilon) = \phi_1(\lambda, c+\epsilon) \text{ et}$$
$$\phi_2(\lambda, c-\epsilon) = \phi_2(\lambda, c+\epsilon).$$

(d) Par le lemme 4.2.9, il existe $\lambda_0, \mu_0 \in]0,1[$, tels que

$$\phi_1(0, \mu_0) = A \text{ et } \phi_1(1, \mu_0) = B \text{ et}$$
$$\phi_2(\lambda_0, 0) = A \text{ et } \phi_2(\lambda_0, 1) = B.$$

Remarquons que le fait qu'il existe $\mu_0 \in]0,1[$ tel que $\phi_1(0,\mu_0) = A$ et $\phi_1(1,\mu_0) = B$ et le fait que ϕ_1 est constante sur les composantes de $I \times I \setminus G$ entraînent qu'il existe un $\delta > 0$ et une singularité (s,t) de G tels que pour tout $\lambda \in]s-\delta, s[$ (respectivement $]s, s+\delta[$) il existe $\mu \in I$ tel que $\phi_1(\lambda, \mu) = A$ (respectivement B).

Pour une valeur de λ ne correspondant pas à une singularité de G, notons J_λ l'ensemble des $\mu \in I$ tels que $\phi_2(\lambda, \mu) = C$. On peut montrer que le fait que K_2 est un noeud non-trivial en position mince par rapport à p_2 implique que J_λ est non-vide (sinon K_2 serait trivial ou on pourrait diminuer la complexité de K_2, voir le lemme 1.3 dans **[GLu1]**). Par la propriété (b), J_λ est une union finie d'intervals ouverts.

Supposons qu'il n'existe pas de couple $(\lambda, \mu) \in I \times I \setminus G$ tel que $\phi_1(\lambda, \mu) = \phi_2(\lambda, \mu) = C$. Dans ce cas, pour $\mu \in J_\lambda$, $\phi_2(\lambda, \mu) = C$ et $\phi_1(\lambda, \mu) = A$ ou B. Gordon et Luecke montrent alors que la somme des longueurs des intervals composant J_λ converge vers zéro lorsque λ tend vers s par la gauche et par la droite. Le point (s, t) est donc une singularité de G de type *(iii)*. À l'aide des propriétés *(b)* et *(c)* on peut montrer que la valeur critique t correspond à deux points critiques d'indice 1 de $p_2|P_1(s)$ et qu'il existe un voisinage U de (s, t) dans $I \times I$ pour lequel $G \cap U$ apparaît tel qu'à la figure 4.7 (voir les lemmes 1.4 et 1.5 dans [**GLu1**]). De plus, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 prennent les valeurs données à la figure 4.7 dans les régions (ouvertes) de $U \setminus G$. Gordon et Luecke démontrent que la situation décrite

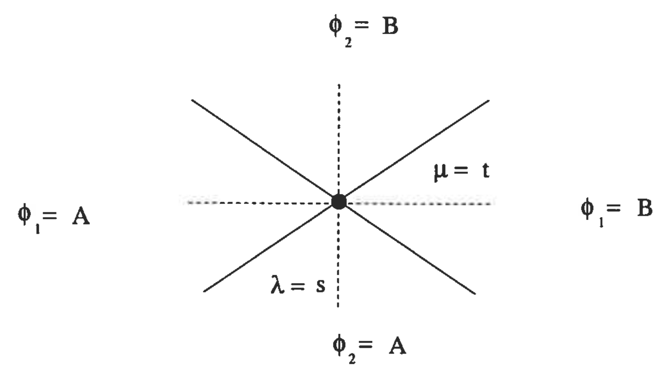


FIG. 4.7. Échange impossible entre deux valeurs critiques.

à la figure 4.7 est impossible. Pour chaque région de $U \setminus G$, on choisit d'abord une famille continue de disques de ∂-compression correspondant aux valeurs de (λ, μ) appartenant à la région considérée. Une contradiction est obtenue en analysant l'intersection de ces disques de ∂-compression avec $P_2(t)$ dans des voisinages des deux points de selle de $p_2|P_1(s)$ (ayant pour valeur critique t, voir les lemmes 1.6 à 1.11 dans [**GLu1**]).

□

4.3. La combinatoire

Tout au long de cette section, K dénotera un noeud fixé dans S^3 et X sera l'extérieur de K dans S^3. Soit r_1 et r_2 deux pentes dans ∂X et notons M_i la variété $K(r_i)$ obtenue par chirurgie de Dehn le long de K. Par définition, M_i se décompose en $X \cup V_i$, où V_i est un tore solide tel que $V_i \cap \partial X = \partial V_i = \partial X$ et le bord d'un disque méridionnel de V_i est de pente r_i dans ∂X, pour $i = 1,\ 2$.

4.3.1. Graphes d'intersection

Supposons qu'il existe, pour $i = 1,\ 2$, une surface fermée, orientable et connexe $\hat{P}_i \subset M_i$ transverse à l'âme K_i de V_i dans M_i et telle que la surface $P_i = \hat{P}_i \cap X$ vérifie les conditions suivantes :

(i) ∂P_i est non-vide et chaque composante de ∂P_i est une courbe simple fermée de pente r_i dans ∂X ;

(ii) P_1 et P_2 sont transverses et chaque composante de ∂P_1 intersecte chaque composante de ∂P_2 en exactement $\Delta = \Delta(r_1, r_2)$ points dans ∂X ;

(iii) les composantes de $P_1 \cap P_2$ qui sont des arcs sont essentielles dans P_1 et P_2.

Les composantes de $P_1 \cap P_2$ qui sont des arcs permettent de définir des graphes Γ_1 et Γ_2 dans $\hat{P}_1$ et $\hat{P}_2$ respectivement. Plus précisément, pour $i = 1,\ 2$, Γ_i est le graphe dans $\hat{P}_i$ dont les sommets sont les disques $\hat{P}_i \cap V_i$ et les arêtes sont les composantes de $P_1 \cap P_2$ qui sont des arcs. La condition (i) nous assure que les graphes Γ_1 et Γ_2 sont non-vides tandis que la condition (iii) affirme que Γ_i ne contient pas de boucle triviale, c'est-à-dire de boucle α pour laquelle il existe un arc β dans ∂P_i tel que $\partial\alpha = \partial\beta$ et $\alpha \cup \beta$ est le bord d'un disque dans P_i.

La condition (ii) permet d'encoder plus d'informations à l'aide des graphes d'intersection. Notons n_i le nombre de composantes de ∂P_i et numérotons les composantes de ∂P_i de manière à ce que lorsqu'on parcourt une composante de ∂P_j, pour $\{i, j\} = \{1, 2\}$, les indices des composantes de ∂P_i que l'on intersecte sont $1, 2, \ldots, n_i$ répétés Δ fois. À cette numérotation des composantes de ∂P_i correspond une numérotation des sommets du graphe Γ_i, pour $i = 1,\ 2$. Considérons une composante de $P_1 \cap P_2$ qui est un arc. Les extrémités de cet arc sont des points appartenant à $\partial P_1 \cap \partial P_2$. Supposons qu'une extrémité correspond à un point d'intersection entre la composante a de ∂P_1 et la composante b de ∂P_2 et que l'autre extrémité correspond à un point d'intersection entre la composante a' de ∂P_1 et la composante b' de ∂P_2. On numérote alors les extrémités de l'arête de

Γ_1 correspondante par b (au sommet a) et par b' (au sommet a') (voir figure 4.8). Les extrémités de l'arête correspondante dans Γ_2 sont numérotées par a et a' aux sommets b et b' respectivement. Orientons X, $\hat{P}_1$ et $\hat{P}_2$. Pour $i = 1, 2$, on associe

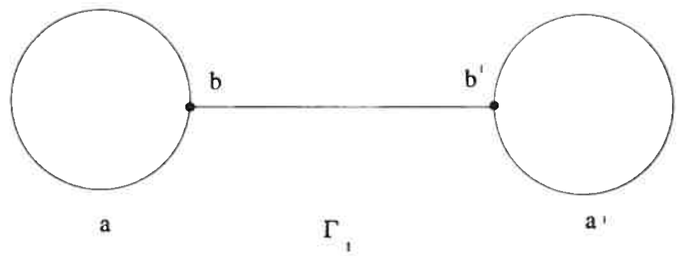


FIG. 4.8. Étiquetage des extrémités des arêtes.

un signe $\pm$ à chaque composante de ∂P_i de manière à ce que deux composantes de ∂P_i homologues dans ∂X aient le même signe et que leurs signes soient opposés sinon. Chaque sommet de Γ_1 et de Γ_2 se voit ainsi attribué un signe. Le fait que les extrémités d'un arc de $P_1 \cap P_2$ correspondent à des points d'intersection entre ∂P_1 et ∂P_2 de signes opposés implique le lemme suivant (voir le lemme 4.5 dans [**Bo**]).

Lemme 4.3.1. *(Règle de parité) Un arc de $P_1 \cap P_2$ relie des sommets de même signe dans Γ_i si et seulement si cet arc relie des sommets de signes opposés dans Γ_j, pour $\{i, j\} = \{1, 2\}$.*

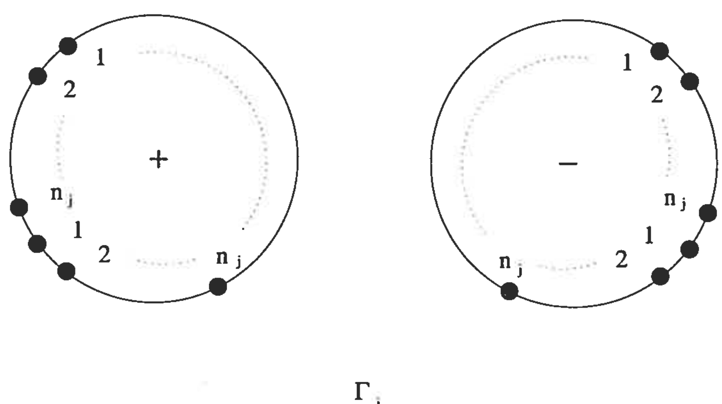


FIG. 4.9. Convention de signes.

Définition 4.3.2. *Une* face *(fermée) de Γ_i est l'adhérence d'une composante de $\hat{P}_i \setminus \Gamma_i$. Si D est une face de Γ_i homéomorphe à un disque, alors nous appellerons* *les composantes de* $\partial D \cap V_i$ *les* coins de D *et les arêtes de* Γ_i *contenues dans* ∂D *seront appelées les* arêtes de D.

Remarquons que pour une face D de Γ_i homéomorphe à un disque, les extrémités d'un coin de D appartiennent à des composantes consécutives p et $p+1$ de ∂P_j, pour $\{i,j\} = \{1,2\}$. Les techniques combinatoires utilisées par la suite met-

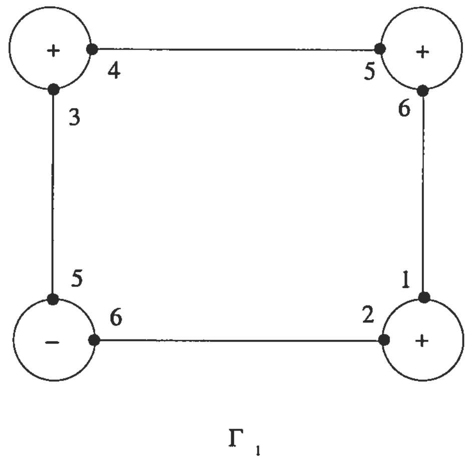


FIG. 4.10. Une face de Γ_1.

tront à profit le fait que les arêtes de Γ_1 et Γ_2 correspondent aux arcs de $P_1 \cap P_2$ pour obtenir l'existence de certains sous-graphes de Γ_1 et Γ_2. Ces sous-graphes contiendront des faces permettant ensuite d'assurer l'existence de certains sous-groupes de $H_1(M_i)$, pour $i = 1,\ 2$.

4.3.2. Cycles de Scharlemann

Fixons des indices i et j tels que $\{i,j\} = \{1,2\}$. La surface $\hat{P}_j$ intersecte le tore solide V_j en n_j disques méridionnels. L'adhérence du complément dans V_j d'un voisinage tubulaire de $\hat{P}_j \cap V_j$ est donc une union finie de 1-anses. Pour $\lambda = (p, p+1)$, nous noterons H_λ la 1-anse contenant les disques méridionnels de V_i correspondant aux sommets p et $p+1$ de Γ_j.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de faces de Γ_i dont chacune est homéomorphe à un disque. Considérons un coin c d'une face $D \in \mathcal{F}$. Aux extrémités du coin considéré correspond un couple d'indices $(p, p{+}1)$. Remarquons qu'alors c est un arc contenu dans le bord de $H_{(p,p+1)}$ joignant les composantes p et $p+1$ de ∂P_j. La figure 4.11 illustre la situation pour la face de Γ_1 donnée à la figure 4.10 et pour $(i,j) = (1,2)$.

Nous noterons $c(\mathcal{F})$ l'ensemble de tous les couples $(p, p+1)$ associés aux coins

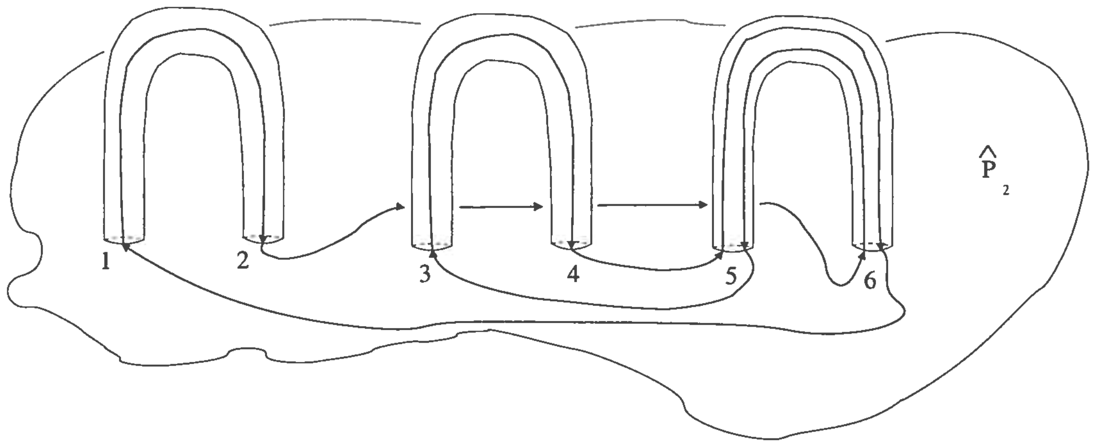


FIG. 4.11. Coins et arêtes d'une face de Γ_1.

des faces appartenant à $\mathcal{F}$. De plus, nous noterons $e(\mathcal{F})$ l'ensemble des arêtes des faces de la famille $\mathcal{F}$. Supposons qu'il existe un disque $E \subset \hat{P}_j$ contenant les arêtes de $e(\mathcal{F})$ et contenant les sommets de Γ_j correspondant aux extrémités des arêtes de $e(\mathcal{F})$. De plus, supposons que l'intersection $int(\mathcal{F}) \cap E$ est vide.

Considérons un voisinage tubulaire $N(E, \mathcal{F})$ de $E \cup \cup_{\lambda \in c(\mathcal{F})} H_\lambda \cup \mathcal{F}$ dans M_j. La 3-variété $N(E, \mathcal{F})$ se décompose naturellement comme l'union d'une 0-anse (correspondant au voisinage $N(E)$ de E dans M_j), de $|c(\mathcal{F})|$ 1-anses (correspondant aux voisinages $N(H_\lambda)$ des H_λ dans M_j) et de 2-anses dont les âmes correspondent aux disques appartenant à la famille $\mathcal{F}$.

On obtient alors que $H_1(N(E, \mathcal{F}))$ est le quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{|c(\mathcal{F})|}$ sur $c(\mathcal{F})$ par le sous-groupe engendré par $\{\alpha(D) | D \in \mathcal{F}\}$, où $\alpha(D)$ est l'élément de $\mathbb{Z}^{|c(\mathcal{F})|}$ obtenu en faisant la somme algébrique (c'est-à-dire en tenant compte des signes des sommets considérés dans Γ_i) des couples $(p, p+1) \in c(\mathcal{F})$ associés aux coins de la face D. Le cas le plus simple de la situation décrite ci-dessus est celui d'un cycle de Scharlemann.

Définition 4.3.3. *Soit D une face de Γ_i homéomorphe à un disque. On dit que D est un* cycle de Scharlemann *si tous les sommets de D ont le même signe et si le couple d'indices associé aux extrémités de chaque coin de D est $(p, p+1)$, pour un certain p.*

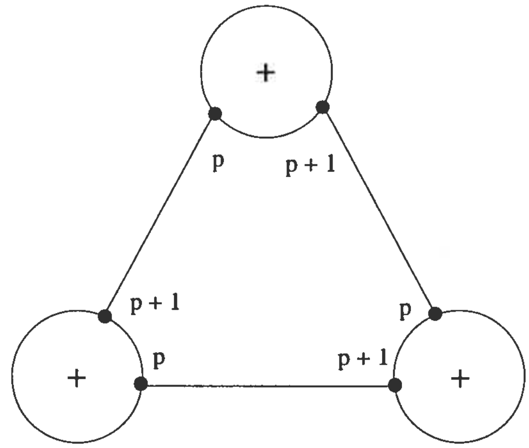


FIG. 4.12. Un cycle de Scharlemann.

Lemme 4.3.4. *Soit $\{i,j\} = \{1,2\}$ et soit D un cycle de Scharlemann dans Γ_i ayant toutes ses arêtes contenues dans un disque $E \subset \hat{P}_j$ tel que $int(D) \cap E = \emptyset$. Alors, M_j a pour facteur connexe un espace lenticulaire. Plus précisément, il existe une 3-variété compacte, connexe et orientable W et il existe un entier n tels que $M_j \cong W \sharp L_{\frac{1}{n}}$.*

DÉMONSTRATION. Dans la notation des paragraphes précédents, on a $\mathcal{F} = \{D\}$. Dans ce cas, $N = N(E, D)$ est obtenu d'un tore solide V en y attachant une 2-anse dont l'âme est D. Puisque tous les sommets de la face D de Γ_i sont de même signe, il suit que la courbe ∂D est de pente $\frac{1}{n}$ dans ∂V, où $n > 0$ est le nombre de coins de D. Par conséquent, $H_1(N)$ est un groupe cyclique d'ordre n. Or, pour une 3-variété compacte, connexe et orientable M, on a la relation suivante entre les premiers nombres de Betty $\beta_1(M)$ et $\beta_1(\partial M)$ de M et ∂M respectivement

$$\beta_1(M) \geq \frac{1}{2}\beta_1(\partial M).$$

Puisque $\beta_1(N) = 0$, il suit que $\beta_1(\partial N) = 0$ et ainsi les composantes de ∂N sont des 2-sphères. Le fait que ∂D est une courbe non-séparante dans ∂V entraîne que ∂N n'a qu'une composante. En attachant une 3-boule B à N à l'aide d'un homéomorphisme $\partial B \xrightarrow{\cong} \partial N$ on obtient $L_{\frac{1}{n}}$. □

Pour généraliser le lemme précédent à une famille $\mathcal{F}$ de faces de Γ_i, nous introduisons la notion algébrique de type.

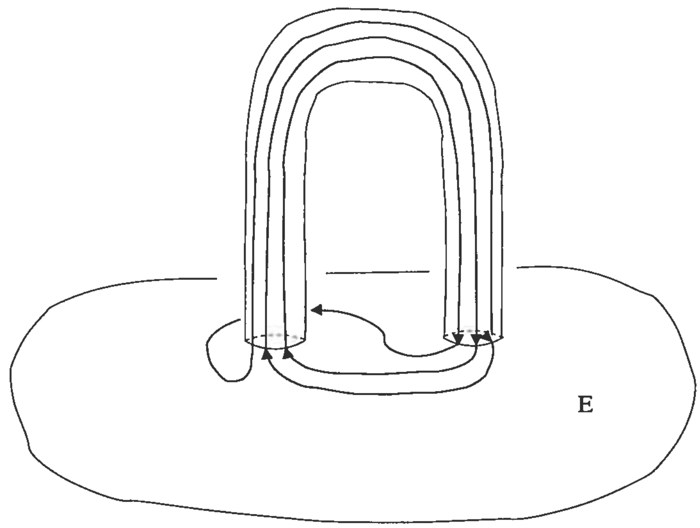


FIG. 4.13. La topologie d'un cycle de Scharlemann.

4.3.3. Types

Définition 4.3.5. *On appellera* $n-$type *un élément de l'ensemble* $\{\pm 1\}^n$. *On dit que* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ représente *le* $n-$*type* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *si*

(i) il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ *tel que pour tout indice* i *avec* $a_i \neq 0$ *on a signe*$(a_i) = \epsilon\tau_i$ *;*

(ii) $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \geq 2$.

On dit qu'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{Z}^n$ représente tous les $n-$types *si pour tout* $n-$*type* τ *il existe un élément* $a \in A$ *tel que* a *représente* τ.

Remarque 4.3.6. *Remarquons que si* $|p| \geq 2$, *alors le singleton* $\{(0, \ldots, 0, p, 0, \ldots, 0)\}$ *représente tous les* $n-$*types. De plus, pour* $1 \leq i \leq n$ *fixé, un sous-ensemble* A *de* $\mathbb{Z}^n$ *représente tous les* $n-$*types si et seulement si l'ensemble des* $n+1$*-tuplets* $(a_1, \ldots, a_i, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ *avec* $a \in A$ *représente tous les* $(n+1)-$*types. Pour* $A \subset \mathbb{Z}^n$, *notons* $c(A) = |\{1 \leq i \leq n | \; \exists a \in A \text{ tel que } a_i \neq 0 \;\}|$. *L'ensemble* A *est contenu naturellement dans* $\mathbb{Z}^{c(A)}$ *(en éliminant les composantes nulles pour tout tuplet de* A*) et* $\mathbb{Z}^{c(A)}$ *est naturellement contenu dans* Z^n *(en ajoutant des composantes nulles aux endroits appropriés). On obtient alors que* A *représente tous les* $c(A)-$*types si et seulement si* A *représente tous les* $n-$*types.*

Les résultats suivants permettent de généraliser le lemme 4.3.4.

Théorème 4.3.7. *Si $A \subset \mathbb{Z}^n$ représente tous les $n-$types, alors il existe $A_0 \subset A$ tel que le groupe $\mathbb{Z}^n/(A_0)$ a son sous-groupe de torsion non-trivial, où (A_0) est le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par A_0.*

DÉMONSTRATION. Voir l'article de Parry [**P**]. □

Lemme 4.3.8. *Si A est un sous-ensemble minimal de $\mathbb{Z}^n$ représentant tous les $n-$types, c'est-à-dire si A représente tous les $n-$types et n'a pas de sous-ensemble propre représentant tous les $n-$types, alors $A \subset \mathbb{Z}^{c(A)}$ contient une base de $\mathbb{R}^{c(A)}$.*

DÉMONSTRATION. Voir l'article de Gordon et Luecke [**GLu2**]. □

Fixons des indices i et j tels que $\{i,j\} = \{1,2\}$ et notons $\mathbf{n_j}$ l'ensemble des couples $(1,2)$, $(2,3)$, $\ldots$, $(n_j - 1, n_j)$, $(n_j, 1)$. Considérons le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^n_j$ sur l'ensemble $\mathbf{n_j}$.

Définition 4.3.9. *Soit D une face de Γ_i homéomorphe à un disque. Notons $[D]$ l'élément de $\mathbb{Z}^{n_j}$ obtenu en faisant la somme algébrique des couples de $\mathbf{n_j}$ correspondant aux coins de la face D. On dit que D* représente *le n_j-type τ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $[D]$ *représente τ ;*

(ii) si un élément $(p, p+1)$ de $\mathbf{n_j}$ correspond à un coin de D, alors tous les coins de D correspondant à $(p, p+1)$ sont de même signe.

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de faces de Γ_i représente tous les n_j-types *si l'ensemble $\{[D] | D \in \mathcal{F}\}$ représente tous les n_j-types. De plus, on dit que Γ_i représente tous les n_j-types s'il existe une familles de faces de Γ_i représentant tous les n_j-types.*

Puisque Γ_i ne contient pas de boucle triviale, la condition (ii) de la définition précédente nous assure que le tuplet $[D]$ vérifie le point (ii) de la définition 4.3.5. La figure 4.10 donne un exemple d'une face ne vérifiant pas la condition (ii). Remarquons que le tuplet $[D]$ associé à un cycle de Scharlemann D dans Γ_i est de la forme $(0, \ldots, 0, n, 0, \ldots, 0)$, où $|n|$ est le nombre de coins de la face D. Dans ce cas, $[D]$ représente tous les n_j-types (voir la remarque 4.3.6). À l'aide du théorème 4.3.7 et du lemme 4.3.8, Gordon obtient la généralisation suivante du lemme 4.3.4.

Théorème 4.3.10. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de faces de Γ_i représentant tous les n_j−types et telle qu'il existe un disque $E \subset \hat{P}_j$ contenant $e(\mathcal{F})$ et pour lequel $int(\mathcal{F}) \cap E = \emptyset$. Alors, M_j a un facteur connexe L tel que $H_1(L)$ est fini et non-trivial.*

DÉMONSTRATION. (voir théorème 4.3 dans [**Go**]) Notons A et B les deux côtés de la surface $\hat{P}_j$ dans M_j, c'est-à-dire fixons un voisinage tubulaire $T \cong \hat{P}_j \times [-1, 1]$ de $\hat{P}_j$ dans M_j et appellons A et B les ensembles correspondant à $\hat{P}_j \times [-1, 0]$ et $\hat{P}_j \times [0, 1]$ respectivement. On dit qu'une face D de Γ_i est localement sur le côté A (respectivement B) de $\hat{P}_j$ s'il existe un voisinage U de $e(D)$ dans D tel que U est contenu dans A (respectivement B).

Gordon montre alors qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de faces de Γ_i représentant tous les n_j−types doit contenir un sous-ensemble $\mathcal{F}'$ représentant tous les n_j−types et tel que toutes les faces appartenant à $\mathcal{F}'$ sont localement sur un même côté de $\hat{P}_j$ (voir le lemme 4.2 dans [**Go**]).

On peut supposer sans perdre de généralité que $\mathcal{F}$ n'a aucun sous-ensemble propre qui représente tous les n_j−types. Par l'affirmation du paragraphe précédent, les faces appartenant à $\mathcal{F}$ sont toutes localement sur un même côté de $\hat{P}_j$. Le lemme 4.3.8 assure alors l'existence d'un sous-ensemble $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tel que $\{[D] | D \in \mathcal{F}'\}$ est une base de $\mathbb{R}^{c(\mathcal{F})}$. Notons $N' = N(E, \mathcal{F}')$ et remarquons qu'alors $H_1(N')$ est fini. Puisque le nombre de Betty $\beta_1(N')$ est nul, il suit que les composantes de $\partial N'$ sont des 2-sphères. De plus, le fait que $\{[D] | D \in \mathcal{F}'\}$ forme une base de $\mathbb{R}^{c(\mathcal{F})}$ entraîne que $\partial N' \cong S^2$.

Notons $N = N(E, \mathcal{F})$ et remarquons que N est obtenu de N' en y attachant les 2-anses dont les âmes correspondent aux disques appartenant à $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$. Puisque les éléments de $\mathcal{F}$ sont tous localement sur le même côté de $\hat{P}_j$ et que $\partial N' \cong S^2$, N est homéomorphe à la variété obtenue en retirant l'intérieur de $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'|$ 3-boules contenues dans $int(N')$.

Par le théorème 4.3.7, il existe $\mathcal{F}_{\prime} \subset \mathcal{F}$ tel que $H_1(N_0)$ a son sous-groupe de torsion non-trivial, où $N_0 = N(E, \mathcal{F}_{\prime})$. Remarquons que N_0 est contenu dans $N \subset N'$. Si $H_1(N')$ est trivial, alors la suite de Mayer-Vietoris pour $N' = N_0 \cup N' \setminus int(N_0)$ donne un isomorphisme $H_1(\partial N_0) \cong H_1(N_0) \oplus H_1(N' \setminus int(N_0))$. Dans ce cas, le fait que ∂N_0 est une surface fermée et orientable entraîne que $H_1(N_0)$ est sans-torsion. Par conséquent, $H_1(N')$ est non-trivial.

□

4.3.4. Grandes toiles

Fixons des indices i et j tels que $\{i, j\} = \{1, 2\}$. À l'aide d'un argument combinatoire subtile utilisant la bijection entre les arêtes de Γ_1 et celles de Γ_2, Gordon et Luecke démontrent que lorsque la distance Δ entre les pentes r_1 et r_2 est suffisamment grande, alors l'un des graphes Γ_1 et Γ_2 doit représenter tous les types tandis que l'autre doit contenir un sous-graphe distingué (qui sous certaines conditions, contient un cycle de Scharlemann).

Définition 4.3.11. *Soit G un sous-graphe de Γ_j connexe et non-vide. On dit que G est une $k-$*toile*, pour un entier $k \geq 0$, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) les sommets de G ont le même signe ;

(ii) $\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) \leq k$,

où $V(G)$ est l'ensemble des sommets de G et $\delta_G(v)$ est le nombre d'extrémités d'arêtes sur le bord du disque v qui appartiennent à $\Gamma_j \setminus G$.

En d'autres termes, la condition (ii) de la définition précédente affirme que le nombre total d'extrémités d'arêtes de Γ_j n'appartenant pas à G sur les sommets de G est au plus k.

Théorème 4.3.12. *Si $\Delta > 1 - \chi(\hat{P}_i)/n_i$, alors soit Γ_i représente tous les n_j-types ou soit Γ_j contient une $(n_i - \chi(\hat{P}_i))-$ toile.*

Démonstration. Voir le théorème 5.1 dans **[Go]**. □

Lorsque $\hat{P}_j$ est une 2-sphère, une $k-$toile de Γ_j est contenue dans un disque $D \subset \hat{P}_j$.

Définition 4.3.13. *Soit G une $k-$toile dans Γ_j. On dit que G est une* grande $k-$toile *s'il existe un disque $D \subset \hat{P}_j$ tel que G est contenu dans $int(D)$ et $D \cap V(\Gamma_j) = V(G)$.*

Théorème 4.3.14. *Si $\Delta > 1 - \chi(\hat{P}_i)/n_i$ et $\hat{P}_j \cong S^2$, alors soit Γ_i représente tous les n_j-types ou soit Γ_j contient une grande $(n_i - \chi(\hat{P}_i))-$ toile.*

DÉMONSTRATION. Voir le théorème 5.6 dans [**Go**]. □

On peut maintenant démontrer que seule la chirurgie triviale le long d'un noeud non-trivial (dans S^3) donne S^3.

4.4. Théorème principal

Théorème 4.4.1. *Soit K un noeud non-trivial dans S^3. Si $K(r)$ est homéomorphe à S^3, alors $r = \mu_K$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\Delta = \Delta(r_1, r_2) > 0$, où $r_1 = r$ et $r_2 = \mu_K$.

Par le théorème 4.2.1, il existe des surfaces planaires P_1 et P_2 proprement plongées dans X, l'extérieur de K dans S^3, telles que

(i) chaque composante de ∂P_i est de pente r_i dans ∂X, pour $i = 1,\ 2$;

(ii) P_1 et P_2 sont transverses et chaque composante de ∂P_1 intersecte chaque composante de ∂P_2 en exactement Δ points dans ∂X ;

(iii) les composantes de $P_1 \cap P_2$ qui sont des arcs sont essentielles dans P_1 et P_2.

Comme précédemment, notons $M_i = X \cup V_i$ la variété $K(r_i)$, où V_i est un tore solide tel que $\partial X = X \cap V_i = \partial V_i$ et un méridien de V_i est une courbe de pente r_i dans ∂X. Notons $\hat{P}_i$ la 2-sphère obtenue en attachant à chaque composante C de ∂P_i un disque méridionnel D de V_i avec $\partial D = C$. Par le théorème 4.3.14, soit Γ_1 représente tous les n_2-types ou soit Γ_2 contient une grande $(n_1 - 2)-$toile.

Si Γ_1 représente tous les n_2-types, alors il existe une famille $\mathcal{F}$ de faces de Γ_1 représentant tous les n_2-types. Puisque $\hat{P}_2$ est une 2-sphère, il existe un disque $E \subset \hat{P}_2$ tel que $e(\mathcal{F}) \subset E$. Par un argument "couper-coller," Gordon montre qu'on peu choisir E de manière à avoir $int(\mathcal{F}) \cap E = \emptyset$ (voir la section 4 dans [**Go**]). Par le théorème 4.3.10, M_2 aurait dans ce cas un facteur connexe L avec $H_1(L)$ fini et non-trivial. Or, ceci est impossible car $M_2 = K(\mu_K) \cong S^3$.

Par conséquent, Γ_2 contient une grande $(n_1 - 2)-$toile G. Remarquons qu'il existe un indice $1 \leq p \leq n_1$ tel que pour chaque sommet v de G, chaque incidence de l'indice p au sommet v est l'extrémité d'une arête de G. En effet, sinon on aurait

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) \geq n_1.$$

La règle de parité et le fait que les sommets de G ont tous le même signe impliquent que pour chaque arête e de G, les indices associés aux extrémités de e sont distincts. Par conséquent il existe un $p-$cycle C_p dans G, c'est-à-dire un cycle C_p contenu dans G qui peut être parcouru de manière à ce que l'extrémité initiale de chaque arête soit numérotée par p.

Puisque G est une grande toile, il existe un disque $D \subset \hat{P}_2$ tel que $G \subset int(D)$ et $V(\Gamma_2) \cap D = V(G)$. Parmis tous les indices p pour lesquels il existe un $p-$cycle C_p, on peut choisir celui pour lequel C_p est minimal, c'est-à-dire pour lequel l'intérieur du disque $D' \subset D$ tel que $\partial D'$ correspond à C_p ne contient aucun $q-$cycle, pour $1 \leq q \leq n_1$. Il suit qu'un tel C_p est un cycle de Scharlemann dans Γ_2. Par le lemme 4.3.4, $M_1 = K(r)$ a alors pour facteur connexe un espace lenticulaire. Or, $K(r) \cong S^3$, par hypothèse. Cette contradiction force donc la distance Δ à être nulle. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[AS] M. F. Atiyah et I. M. Singer, The index of elliptic operators III, *Ann. of Math.* **87** (1968), 546–604.

[Be] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1983.

[Bo] S. Boyer, *Dehn surgery on knots*, Handbook of Geometric Topology, R. J. Daverman, R. B. Sher, éd., Elsevier, Amsterdam, 2002.

[Bu] G. Burde et H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Berlin, New-York, 1985.

[Ce1] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* $(\Gamma_4 = 0)$, Lecture notes in mathematics no. 53, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1968.

[Ce2] J. Cerf, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, *Publ. Math. I.H.E.S.* **39** (1970), 5–173.

[D] M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.* **69** (1910), 137–168.

[E] C. H. Edwards, Concentricity in 3-manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **113** (1964), 406–423.

[F] G. M. Fisher, On the group of all homeomorphisms of a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), no. 2, 193–212.

[Ga] D. Gabai, Surgery on knots in solid tori, *Topology* **28** (1989), 1–6.

[Go] C. McA. Gordon, Combinatorial methods in Dehn surgery, *Proceedings of Knots 96*, S. Suziki ed., World Scientific Publishing (1997), 263–290.

[GLi] C. McA. Gordon et R. A. Litherland, Incompressible planar surfaces in 3-manifolds, *Topology and its Applications* **18** (1984), 121–144.

[GLu1] C. McA. Gordon et J.. Luecke, Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 371–415.

[GLu2] C. McA. Gordon et J. Luecke, Reducible manifolds and Dehn surgery, *Topology* **35** (1996), 385–409.

[H] D. W. Hall et G. L. Spencer, *Elementary topology*, John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1955.

[K1] L. H. Kauffman, *On knots*, Annals of mathematics studies, Princeton university press, New-Jersey, 1987.

[K2] L. H. Kauffman, Branched coverings, open books and knot periodicity, *Topology* **13** (1974), 143–160.

[Ki] R. Kirby, A calculus for framed links, *Invent. Math.* **45** (1978), 35–56.

[KM] P. B. Kronheimer, T. S. Mrowka, Witten's conjecture and property P, *Geom. Topol.* **8** (2004), 295–310.

[Li1] W. B. Lickorish, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Ann. of Math.* **76** (1962), 531–538.

[Li2] W. B. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1997.

[L1] R. A. Litherland, Surgery on knots in solid tori, *Proc. London Math. Soc.* **39** (1979), no. 3, 130–146.

[L2] R. A. Litherland, Surgery on knots in solid tori, II, *J. London Math. Soc.* **22** (1980), no. 2, 559–569.

[Mu] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, 2000.

[P] W. Parry, All types implies torsion, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 871–875.

[Rol] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or perish, Berkeley, 1976.

[S] N. Saveliev, *Lectures on the topology of 3-manifolds : an introduction to the casson invariant*, de Gruyter, Berlin, 1999.

[Ti] H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Monatsh. Math. Phys.* **19** (1908), 1–118.

[Tr] A. G. Tristram, Some cobordism invariants for links, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **66** (1969), 251–264.

[V] O. Ja. Viro, Branched coverings of manifolds with boundary and link invariants I, *Math. USSR Izvestija* **7** (1973), no. 6, 1239–1256.

[Wa] A. H. Wallace, Modifications and cobounding manifolds, *Can. J. Math.* **12** (1960), 503–528.

[W] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer-Verlag, New-York, 1978.