

Université de Montréal

EXTINCTION D'UNE FLAMME
PRÉMÉLANGÉE PAR UN
CISAILLEMENT : EFFETS INSTATIONNAIRES

par

Terence Ngouoko

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques appliquées

7 Février 2005



QA

3

U54

2005

V.001

100-100000

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**EXTINCTION D'UNE FLAMME
PRÉMÉLANGÉE PAR UN
CISAILLEMENT : EFFETS INSTATIONNAIRES**

présenté par

Terence Ngouoko

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Paul Arminjon

(président-rapporteur)

Anne Bourlioux

(directeur de recherche)

Yvan Saint-Aubin

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

7 Février 2005

SOMMAIRE

La turbulence joue un rôle important en combustion. Elle influence principalement la dynamique de la flamme de deux façons. D'une part, le plissement associé à la turbulence peut augmenter de façon significative la vitesse de propagation de la flamme. D'autre part, ce même plissement peut, dans certaines conditions, résulter en l'extinction de la flamme. L'objet de ce mémoire est d'étudier les aspects instationnaires de ce dernier phénomène.

Cette étude est de nature numérique et la première phase du travail est la mise au point et la validation d'un code précis et efficace. La validation repose sur l'application à des tests pour des cas laminaires (donc sans turbulence) et dans des cas avec turbulence stationnaire. Pour ces cas, un certain nombre de résultats théoriques sont disponibles à des fins de comparaison avec les résultats numériques : vitesse de propagation, épaisseur de la flamme, taille minimale du support pour l'allumage, etc. Ces cas-tests permettent l'identification des valeurs minimales des paramètres numériques (raffinement du maillage et du pas de temps d'intégration) pour garantir la fiabilité des résultats en vue de l'application du code aux cas instationnaires.

Dans le régime instationnaire, le résultat principal des simulations numériques est le suivant : pour une intensité fixée de la turbulence, on observe une transition entre deux régimes d'allumage/extinction lorsqu'on varie la fréquence du champ de vitesse turbulent. Pour des fréquences très grandes (*en régime rapide*), la flamme ne répond pas aux oscillations du champ de vitesse. La dynamique de l'allumage est alors similaire à celle du cas laminaire. Pour des fréquences très

petites (*en régime lent*), la flamme répond complètement aux oscillations. Le comportement de l'allumage s'apparente alors à celui observé dans le cas stationnaire.

MOTS CLÉS

Combustion turbulente prémélangée, cisaillement instationnaire, allumage, extinction, vitesse de propagation, seuil d'allumage.

SUMMARY

Turbulence plays an important role in combustion. It influences the dynamic of the flame in two different ways. On one hand, the pleating associated to the turbulence can increase the propagation speed of the flame in a significant way. On the other hand, this pleating can, when certain conditions are fulfilled, result in a quenching of the flame. This memory studies the unsteady aspect of this last phenomenon.

This study is of numerical nature and the first part of this work is to set and implement an efficient and precise code. The implementation is applied to tests with and without turbulence. For these tests, there are a couple of theoretical results available for comparison with numerical results : propagation speed, flame thickness, minimal size of ignition support. These theoretical results enable the identification of minimal values of numerical parameters (mesh refinement and integration time-step) to insure the liability of the results in view to apply the code to unsteady cases.

In these last cases, the main result for numerical simulation is the following : for a fixed intensity of turbulence, one observes a transition between ignition and quenching when the shear flow frequency varies. For high frequencies, the flame cannot respond to the oscillations of the shear flow. The ignition dynamic is therefore similar to the laminar case. For very low frequencies, the flow responds completely to the oscillations. The behavior as far as ignition is concerned is therefore similar to the steady case.

KEY WORDS

Premixed turbulent combustion, unsteady shear, ignition, quenching, propagation speed, ignition threshold

REMERCIEMENTS

Ce travail est l'aboutissement d'un travail houleux qui a nécessité expertise et passion.

Pour cela, je tiens à remercier ma directrice de recherche Anne Bourlioux pour son expertise, savoir-faire et patience sans lesquels je ne me serais jamais rendu au bout de ce travail.

Par cette même occasion, je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à mes parents, Michel et Esther Ngouoko, qui m'ont gratifié de leur amour, compréhension et support tout au long de mon cursus scolaire. Plus particulièrement, je remercie infiniment ma soeur aînée Evelyne Tchana et son époux Alain Tchana pour leur patience et précieux conseils. Je dois également souligner mes remerciements à l'endroit de Oleg Volkov pour son aide cruciale dans l'utilisation du logiciel Matlab. Je tiens à remercier mon compagnon Sébastien Manka dont l'aide m'a été précieuse dans la traduction du sommaire. Enfin je ne pourrais passer sous silence l'attention affectueuse de tous ceux et celles qui m'ont remonté le moral dans les moments difficiles.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire.....	iii
Summary.....	v
Remerciements.....	vii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xiii
Chapitre 1. Introduction.....	1
1.1. Extinction et propagation en régime stationnaire.....	1
1.2. Formulation mathématique.....	1
1.3. Cas instationnaires.....	4
Chapitre 2. Description et validation du code numérique.....	5
2.1. Description du schéma numérique.....	5
2.2. Validation du code dans le cas laminaire.....	9
2.2.1. Prédiction théorique.....	10
2.2.2. Résultats numériques.....	14
2.3. Validation dans le cas turbulent stationnaire.....	19
Chapitre 3. Expériences numériques en régime instationnaire... 	23
3.1. Mise en place des expériences.....	23
3.2. Description des diagnostics.....	24

3.3. Résultats obtenus.....	25
3.3.1. Cas 1 : $\omega = 4\pi$	26
3.3.2. Cas 2 : $\omega = \pi$	29
3.3.3. Cas 3 : $\omega = \frac{3\pi}{4}$	32
3.3.4. Cas 4 : $\omega = \frac{\pi}{2}$	35
3.3.5. Cas 5 : $\omega = \frac{\pi}{4}$	38
3.3.6. Cas 6 : $\omega = 0$	41
3.3.7. Etude de la taille critique du support initial en fonction de la fréquence du cisaillement.....	42
3.4. Conclusion.....	45
Bibliographie	47

LISTE DES FIGURES

2.2.1	Exemple de condition initiale $T_0(x)$	15
2.2.2	Exemple d'extinction ; $w = 0.2, \theta = 0.5$. La condition initiale correspond au rectangle le plus haut. Les profils successifs sont de plus en plus lissés et la température maximale décroît avec le temps.	16
2.2.3	Exemple d'allumage ; $w = 0.6, \theta = 0.5$	16
2.2.4	Évolution de la vitesse de propagation dans le cas d'allumage	17
2.2.5	Évolution de l'épaisseur de la flamme dans le cas d'allumage	17
2.2.6	Taille critique $w(\theta)$ pour différents dt	20
2.3.1	Exemple de condition initiale $T_0(x, y)$	20
2.3.2	Évolution de la vitesse et de la température maximale pour un cas d'allumage avec cisaillement stationnaire. Ici, $\theta = 0.5, A = 1, w = 1$. .	21
2.3.3	Taille critique w en fonction de l'intensité A pour $\theta = 0.5$ et pour $h = 0.1, 0.05, 0.025$	22
3.3.1	Courbe de la température maximale pour $\omega = 4\pi$	26
3.3.2	Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = 4\pi$	27
3.3.3	Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = 4\pi$	27
3.3.4	Évolution de la température pour $\omega = 4\pi$	28
3.3.5	Évolution des contours de la température pour $\omega = 4\pi$	28
3.3.6	Courbe de la température maximale pour $\omega = \pi$	29
3.3.7	Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \pi$	29
3.3.8	Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \pi$	30

3.3.9	Évolution de la température pour $\omega = \pi$	30
3.3.10	Évolution des contours de la température pour $\omega = \pi$	31
3.3.11	Courbe de la température maximale pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$	32
3.3.12	Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$	32
3.3.13	Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$	33
3.3.14	Évolution de la température pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$	33
3.3.15	Évolution des contours de la température pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$	34
3.3.16	Courbe de la température maximale pour $\omega = \frac{\pi}{2}$	35
3.3.17	Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \frac{\pi}{2}$	35
3.3.18	Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$	36
3.3.19	Évolution de la température pour $\omega = \frac{\pi}{2}$	36
3.3.20	Évolution des contours de la température pour $\omega = \frac{\pi}{2}$	37
3.3.21	Courbe de la température maximale pour $\omega = \frac{\pi}{4}$	38
3.3.22	Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \frac{\pi}{4}$	38
3.3.23	Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \frac{\pi}{4}$	39
3.3.24	Évolution de la température pour $\omega = \frac{\pi}{4}$	39
3.3.25	Évolution des contours de la température pour $\omega = \frac{\pi}{4}$	40
3.3.26	Courbe de la température maximale pour $\omega = 0$	41
3.3.27	Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = 0$	42
3.3.28	Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = 0$	42
3.3.29	Évolution de la température pour $\omega = 0$	43
3.3.30	Évolution des contours de la température pour $\omega = 0$	43
3.3.31	Graphique illustrant l'évolution de la taille minimale en fonction de la fréquence ω pour $h = 0.05$	44

3.3.32 Graphique illustrant l'évolution de la taille minimale en fonction de $\log_{10}(\omega)$ pour $h = 0.05$	44
---	----

LISTE DES TABLEAUX

2.2.1	Valeurs numériques et exactes de l'épaisseur de flamme laminaire.....	15
2.2.2	Taille critique $w(\theta)$ pour $h = 0.01$ et $h = 0.005$, schéma d'Euler explicite	18
2.2.3	Taille critique $w(\theta)$ pour $h = 0.01$ en fonction de dt , schéma de Crank-Nicolson (colonnes 2,3,4) et schéma explicite d'Euler avant (pour référence, colonne 5).....	19
2.3.1	Taille critique w en fonction de l'intensité A pour $\theta = 0.5$ et pour $h = 0.1, 0.05, 0.025$	22
3.3.1	Taille minimale en fonction de la fréquence ω	45

Chapitre 1

INTRODUCTION

Une analyse mathématique du problème de l'extinction d'une flamme prémélangée par un cisaillement stationnaire a été présentée dans [1]. L'objectif de ce mémoire est d'explorer numériquement sa généralisation aux cas instationnaires. À titre d'introduction, on trouvera ci-dessous un résumé des résultats dans le cas stationnaire.

1.1. EXTINCTION ET PROPAGATION EN RÉGIME STATIONNAIRE

En régime stationnaire, les auteurs de [1] montrent que lorsque le champ de vitesse n'est nulle part constant ou qu'il est constant uniquement sur une région de petite mesure, alors il existe une taille critique pour le support de la condition initiale sur la température en-dessous de laquelle le champ de vitesse provoque l'extinction. En revanche, l'allumage et la propagation sont garantis lorsque le champ de vitesse est constant sur une région suffisamment grande et que la condition initiale a un support de taille suffisamment grande.

1.2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le modèle mathématique utilisé est l'équation suivante :

$$\begin{cases} T_t + U(y, t) \cdot \nabla T = \kappa \Delta T + \frac{1}{\tau} f(T) \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où $0 \leq T(x, y, t) \leq 1$ est la température normalisée, κ le coefficient de diffusivité et τ le temps de réaction.

Le vecteur champ de vitesse $U(y, t)$ est de type cisaillement, $U(y, t) = (A u(y, t), 0)$ (vitesse horizontale dépendant uniquement de la coordonnée verticale y , A est l'amplitude du cisaillement, $u(y, t)$ est normalisé). L'analyse théorique correspond uniquement au cas stationnaire $u(y, t) = u(y)$. Le terme $f(T)$ représente le taux de réaction que l'on considère de type *allumage*, caractérisé notamment par l'existence d'un seuil d'allumage θ . Plus précisément, la fonction $f(T)$ satisfait aux propriétés suivantes :

i) $f(T)$ est Lipschitz-continue sur $0 \leq T \leq 1$.

(ii) $f(1) = 0$ et $\exists \theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{cases} f(T) = 0 & \forall T \in [0, \theta] \\ f(T) > 0 & \forall T > \theta \end{cases} \quad (1.2.2)$$

(iii) $f(T) \leq T$

La condition initiale T_0 est à support compact de la forme :

$$\text{Supp } T_0 = [-w, w] \times [0, P]$$

Le domaine est $D =]-\infty, +\infty[\times [0, P]$. On s'intéresse uniquement au cas périodique par rapport à y .

Dans le contexte du cisaillement stationnaire, les auteurs de [1] prouvent un certain nombre de résultats relatifs à l'extinction et à la propagation et qui vont servir de guide tout au long de ce travail. Le premier est le suivant :

Théorème 1.2.1. *On suppose que la fonction $u(y) \in C^\infty[0, P]$ satisfait à la propriété suivante dite H-condition :*

$$\forall y \in [0, P], \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \frac{d^k u}{dy^k}(y) \neq 0$$

Alors il existe $C(P, \kappa, u) > 0$ tel que pour $w < CA$, $u(y)$ est fortement extinctive. C'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(x, y, t)\|_{\infty} = 0$$

où $\|\cdot\|_{\infty}$ désigne la norme de la convergence uniforme sur le domaine D .

Autrement dit, si $u(y)$ n'est nulle part constant sur $[0, P]$, alors il existe une taille minimale pour le support de T_0 en-dessous de laquelle on a extinction. Par contre, le résultat qui suit fournit un critère de propagation :

Théorème 1.2.2. *On suppose que*

$$u(y) = u^* = \text{constante} \quad \forall y \in [a - h, a + h], \quad a \in [0, P]$$

Alors, il existe deux constantes strictement positives C_0 et C_1 telles que pour $w \geq C_1 C_0 \delta$ et $h \geq C_0 \delta$, on ait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(x, y, t) - 1\|_{\infty} = 0 \quad \text{sur tout compact } K \subset D$$

où δ est l'épaisseur de flamme laminaire.

Ce résultat signifie que si u est constante sur une portion suffisamment grande du segment $[0, P]$ (en pratique, de l'ordre de l'épaisseur de la flamme laminaire), alors il existe une valeur critique pour le support de T_0 au-dessus de laquelle l'allumage et la propagation sont garantis.

Enfin et toujours dans [1], il est prouvé que si le support de T_0 est suffisamment petit, alors tout champ de vitesse est extinctif.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.3. *Il existe une constante strictement positive C qui dépend uniquement de f tel que si la condition initiale T_0 satisfait à la propriété suivante :*

$$\int_D T_0(x, y) dx dy \leq C \delta^2$$

alors on a :

$$\forall u(y) \in C[0, P]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(x, y, t)\|_{\infty} = 0 \quad \text{dans } D.$$

1.3. CAS INSTATIONNAIRES

Un objectif majeur de ce travail est d'arriver à répondre à la question suivante : le passage d'un régime d'écoulement stationnaire à un régime d'écoulement instationnaire affecte-t-il les critères d'extinction et de propagation de la condition initiale résumés ci-dessus ? Plus spécifiquement, on va étudier l'effet d'un cisaillement de la forme

$$U(y, t) = (A \cos(\omega t) \sin(2\pi y/P), 0).$$

A est l'intensité du cisaillement et ω sa fréquence temporelle. Dans le cas stationnaire ($\omega = 0$), ce type de champ de vitesse correspond clairement aux conditions du Théorème 1.2.1, car il n'est nulle part constant. On peut donc alors prédire l'existence d'une taille critique du support des données initiales pour l'extinction. Quel est l'effet de la fréquence ω sur cette taille critique ?

Une question similaire avait été abordée dans [3], où les auteurs avaient étudié l'effet du même cisaillement instationnaire (en particulier l'effet de ω) sur la vitesse de propagation d'une flamme prémélangée. Dans cette étude, les conditions aux bords et la cinétique chimique étaient telles que la propagation de la flamme était garantie. Le résultat principal de cette étude était l'identification de deux régimes distincts en fonction de la fréquence temporelle de modulation du cisaillement. Dans le régime dit lent (ω petit), le comportement observé correspondait à une petite correction par rapport au cas stationnaire. Dans le régime dit rapide, les oscillations du cisaillement étaient beaucoup trop rapides en comparaison au temps de réponse de la flamme et le comportement observé ressemblait à celui du cas laminaire (cisaillement nul). Les notions de *régime lent* et *régime rapide* avaient été rendues précises en comparant la période temporelle des oscillations avec le temps caractéristique de plissement de la flamme correspondant à une intensité de cisaillement donnée.

En conclusion, une formulation plus précise du but principal du travail présenté ici est de vérifier l'existence de régimes similaires en ce qui concerne l'extinction.

Chapitre 2

DESCRIPTION ET VALIDATION DU CODE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, on décrit la structure de l'algorithme mis au point pour les simulations numériques. On décrit aussi les expériences de validation du code. Dans un premier temps, le code est appliqué à des cas tests laminaires (problèmes en une dimension spatiale). Ensuite, il est appliqué à des problèmes en deux dimensions spatiales pour les cas où le champ de vitesse est stationnaire.

2.1. DESCRIPTION DU SCHEMA NUMERIQUE

L'équation aux dérivées partielles à résoudre est du type advection-diffusion-réaction. Pour rappel, la voici :

$$T_t + U(y, t) \cdot \nabla T = \kappa \Delta T + \frac{1}{\tau} f(T) \quad (2.1.1)$$

avec les conditions aux bords et initiales appropriées. La fonction $f(T)$ représente le taux de réaction qui est de type *allumage* décrit dans la section précédente.

Plus précisément, $f(T)$ a été pris comme :

$$f(T) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1-\theta)^2} (1-T) & T > \theta \\ 0 & T \leq \theta \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où θ représente le *seuil d'allumage*. On construit un schéma numérique pour cette équation en se basant sur la stratégie de pas fractionnaires de Strang qui procède

comme suit :

$$T(t + dt) = A\left(\frac{dt}{2}\right)D\left(\frac{dt}{2}\right)R(dt)D\left(\frac{dt}{2}\right)A\left(\frac{dt}{2}\right)T(t)$$

où $A(dt)$, $D(dt)$, $R(dt)$ représentent respectivement la discrétisation des opérateurs d'advection, diffusion, réaction avec un pas de temps dt (voir détails ci-dessous).

Les tests numériques sont effectués sur un canal en deux dimensions spatiales de taille $[-L, L] \times [0, P]$. Théoriquement, il est prescrit que $L = +\infty$. À des fins pratiques, on choisit une valeur finie pour L , suffisamment grande afin d'éviter toute interférence avec les conditions aux bords. P est la période du cisaillement. On discrétise le domaine spatial comme suit (on tient compte de la périodicité en y) :

$$x = -L + h : h : L - h$$

$$y = 0 : h : P - h$$

où h est le pas dans l'espace.

La condition initiale sur la température est donnée par :

$$T_0(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in [-w, w] \times [0, P] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

w est donc la demi-taille du support de la donnée initiale. Les conditions aux bords sont de type Dirichlet dans la direction x (température nulle) et de type périodique dans la direction y . Nous allons maintenant donner une description de la discrétisation de chacun des trois opérateurs. Dans ce qui suit, on utilise la notation suivante :

$$T_{ij}^n \simeq T(x = x_i, y = y_j, t = ndt)$$

Advection

Il s'agit ici de traiter un cas de cisaillement horizontal. Pour ce type de champ de vitesse, le problème d'advection se réduit à :

$$\begin{cases} T_t + u(y, t)T_x = 0 \\ T(x = \pm L, y, t) = 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Il est discrétisé par le schéma amont d'ordre 2 de la manière suivante :

$$T_{ij}^{n+1,a} = T_{ij}^n - \frac{dt}{h}(F_{i+1,j}^n - F_{ij}^n)$$

où $T^{n+1,a}$ représente la solution intermédiaire au temps T^{n+1} après le pas d'advection et où la fonction F qui définit le *flux numérique* est

donnée par [4] :

$$F_{ij}^n = u^- T_{ij}^n + u^+ T_{i-1,j}^n + \frac{1}{2}|u| \left(1 - \frac{dt}{h}|u|\right) \delta_{ij}^n$$

où

$$u^- = \min(u, 0) \quad \text{et} \quad u^+ = \max(u, 0).$$

Le choix du terme δ_{ij}^n est fait de manière à limiter les oscillations dues à l'introduction du flux numérique F .

Plus précisément, δ_{ij}^n s'écrit :

$$\delta_{ij}^n = \phi(\theta_{ij}^n) \Delta T_{ij}^n$$

où

$$\theta_{ij}^n = \frac{\Delta T_{I,j}^n}{\Delta T_{ij}^n}$$

$$\Delta T_{ij}^n = T_{ij}^n - T_{i-1,j}^n$$

et

$$I = \begin{cases} i-1 & \text{si } u > 0 \\ i+1 & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

La fonction $\phi(\theta)$ est définie par :

$$\phi(\theta) = \text{minmod}(1, \theta)$$

avec

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ et } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ et } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Dans le contexte du schéma de pas fractionnaires de Strang, on commence par un demi-pas de temps d'advection. La discrétisation spatiale d'ordre deux ci-dessus

est alors utilisée dans un schéma de discrétisation temporelle de Runge-Kutta d'ordre deux comme suit, pour ce premier demi-pas de temps.

$$T_{ij}^* = T_{ij}^n - \frac{(dt/2)}{2h} (F_{i+1,j}^n - F_{ij}^n)$$

et la solution finale du premier pas d'advection s'écrit :

$$T_{ij}^{n+1,a} = T_{ij}^n - \frac{(dt/2)}{h} (F_{i+1,j}^* - F_{ij}^*)$$

où F_{ij}^* est la valeur du flux numérique évaluée en T_{ij}^* .

Ainsi construit, ce schéma est *TVD*, d'ordre 2 dans le temps et dans l'espace.

Diffusion

La solution $T_{ij}^{n+1,a}$ sert maintenant de condition initiale pour le pas de diffusion :

$$\begin{cases} T_t = \kappa \Delta T \\ T(x = \pm L, y, t) = 0 \\ T(x, y = 0, t) = T(x, y = P, t) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Le Laplacien est discrétisé avec l'opérateur usuel à 5 points centré d'ordre deux. On combine cette discrétisation spatiale avec le schéma de *Crank-Nicolson* dans le temps afin d'obtenir la stabilité inconditionnelle de la discrétisation du processus de diffusion. On obtient ainsi la relation suivante :

$$\begin{aligned} -\alpha T_{i+1,j}^{n+1,d} - \alpha T_{i-1,j}^{n+1,d} + (1 + 4\alpha) T_{ij}^{n+1,d} - \alpha T_{i,j+1}^{n+1,d} - \alpha T_{i,j-1}^{n+1,d} = \\ \alpha T_{i+1,j}^{n+1,a} + \alpha T_{i-1,j}^{n+1,a} + (1 - 4\alpha) T_{ij}^{n+1,a} + \alpha T_{i,j+1}^{n+1,a} + \alpha T_{i,j-1}^{n+1,a} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{\kappa dt}{2h^2}$ et $T_{i,j}^{n,d}$ est la solution intermédiaire au temps t^{n+1} après les pas d'advection et diffusion.

Ici les conditions aux limites périodiques dans la direction y suggèrent l'utilisation de la transformée de Fourier *DFT* discrète dans cette direction. Chaque terme de ce schéma est maintenant considéré comme un signal numérique échantillonné.

Donc par transformée de Fourier discrète, on a :

$$T_{ij} = \frac{1}{J} \sum_{m=1}^J H_{im} e^{\frac{2\pi I(m-1)(j-1)}{\beta}}$$

où $J = P/h$ est le nombre de points dans la direction y . On injecte cette formule dans l'expression précédente et on obtient la relation suivante, après calculs et simplifications :

$$\begin{aligned} & -\alpha H_{i+1,m}^{n+1,d} + \left(1 - 2\alpha \cos \frac{2\pi(m-1)}{\beta} + 4\alpha\right) H_{im}^{n+1,d} - \alpha H_{i-1,m}^{n+1,d} = \\ & \alpha H_{i+1,m}^{n+1,a} + \left(1 + 2\alpha \cos \frac{2\pi(m-1)}{\beta} - 4\alpha\right) H_{im}^{n+1,a} + \alpha H_{i-1,m}^{n+1,a} \end{aligned}$$

Ceci est un système tridiagonal qui est résolu par factorisation LU ; enfin par transformée de Fourier discrète inverse, on retrouve la solution finale du processus de diffusion $T_{ij}^{n+1,d}$.

Réaction

La réaction est décrite par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} T_t = \frac{1}{\tau} f(T). \\ T(x, y, 0) = T_{ij}^{n,d} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

On prend comme condition initiale la solution intermédiaire $T_{ij}^{n,d}$. Ce pas fractionnaire est résolu explicitement par la formule analytique suivante :

$$T_{ij}^{n+1} = \begin{cases} (T_{ij}^{n+1,d} - 1)e^{-bdt} + 1 & \text{si } T_{ij}^{n+1,d} > \theta \\ T_{ij}^{n+1,d} & \text{si } T_{ij}^{n+1,d} \leq \theta \end{cases} \quad \text{où } b = \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \quad (2.1.9)$$

Le schéma de Strang qui utilise les trois opérateurs discrets ci-dessus est globalement d'ordre deux à condition que dt respecte la condition de stabilité de CFL associée au pas d'advection.

2.2. VALIDATION DU CODE DANS LE CAS LAMINAIRE

Le cas laminaire consiste à poser l'intensité du cisaillement $A = 0$. Dans ce cas, le problème à résoudre se réduit à :

$$T_t = \kappa \Delta T + \frac{1}{\tau} f(T) \quad (2.2.1)$$

Puisque les conditions aux bords et initiales sont ici indépendantes de y , alors le problème se ramène à un problème de dimension 1. On va procéder à deux types de cas-tests dans le cas laminaire :

- (1) propagation : étude de la vitesse et de l'épaisseur de la flamme laminaire ;
- (2) extinction : étude de la taille critique du support des données initiales

2.2.1. Prédiction théoriques

Propagation

Le problème de la propagation consiste à prendre comme donnée initiale pour la température :

$$T_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

et les conditions aux bords $T = 0$ à gauche et $T = 1$ à droite. Dans ces conditions, la solution asymptotique est une flamme se propageant à vitesse v constante vers la gauche : $T(x, t) = U(x + vt) = U(s)$. On définit l'épaisseur e de la flamme asymptotique correspondant à la valeur ε de la façon suivante. Soit $s_0 < 0$ et $s_1 > 0$ tels que l'on ait :

$$U(s_0) = \varepsilon \quad \text{et} \quad U(s_1) = 1 - \varepsilon$$

Alors l'épaisseur est donnée par $e = s_1 - s_0$. En pratique, la valeur prise comme exemple pour ε est $\varepsilon = 0.1$. L'épaisseur e représente donc la taille de la zone de transition entre la zone brûlée ($T = 1$) et la zone non-brûlée ($T = 0$). Pour le problème considéré ici, il est possible d'obtenir des expressions exactes pour la vitesse v et l'épaisseur e comme suit. L'idée consiste, vu la forme du taux de réaction, à déterminer la solution pour chacune des deux sous-régions, à savoir la région où la température est en-dessous du seuil θ et celle où la température est au-dessus de θ .

On se placera alors dans le repère translaté dont l'origine est le point où la température vaut θ .

Pour la première sous-région (dans laquelle la réaction est nulle), le changement de variables ci-dessus conduit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} U_{ss} - \frac{v}{\kappa} U_s = 0 \\ U(0) = \theta \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} U(s) = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Son équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - \frac{v}{\kappa}r = 0$$

et donne les racines :

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{v}{\kappa}$$

et la solution s'écrit :

$$U(s) = \theta e^{\frac{v}{\kappa}s}, \quad s \leq 0$$

Pour la deuxième sous-région, le changement de variables conduit à l'équation :

$$\begin{cases} U_{ss} - \frac{v}{\kappa}U_s - \frac{1}{\tau} \frac{\theta}{(1-\theta)^2}U = -\frac{1}{\tau} \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \\ U(0) = \theta \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} U(s) = 1 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$U(s) = (\theta - \gamma - 1)e^{r_1s} + \gamma e^{r_2s} + 1$$

avec

$$r_1 = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4\kappa b}}{2\kappa}, \quad r_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4\kappa b}}{2\kappa} \quad \text{où } b = \frac{1}{\tau} \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

La condition aux limites :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} U(s) = 1$$

entraîne que $\gamma = 0$.

Donc la solution finale s'écrit :

$$U(s) = \begin{cases} \theta e^{\frac{v}{\kappa}s}, & s \leq 0 \\ U(s) = (\theta - 1)e^{r_1s} + 1, & s \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Une façon équivalente de mesurer la vitesse de propagation v définie ci-dessus procède via le taux de combustion par unité de temps.

Plus précisément, v s'écrit :

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} T_t dx$$

En se servant de l'équation 2.1.1 et après intégration par parties, on obtient :

$$v = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(T) dx$$

Par le changement de variables $s = x + vt$, on a :

$$v = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(U(s)) ds$$

Or

$$f(U) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1-\theta)^2} (1-U) & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Ceci entraîne alors que :

$$v = \frac{1}{\tau} \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \int_0^{+\infty} (1-U) ds$$

Après substitution, on a :

$$v = \frac{1}{\tau} \frac{\theta}{1-\theta} \int_0^{+\infty} e^{r_1 s} ds$$

et ceci donne

$$v = -\frac{1}{\tau} \frac{\theta}{(1-\theta)r_1}$$

En remplaçant r_1 par sa valeur, on obtient :

$$v = -\frac{2\kappa\theta}{\tau(1-\theta)(v - \sqrt{v^2 + 4\kappa b})}$$

ou encore

$$\tau(1-\theta)v(v - \sqrt{v^2 + 4\kappa b}) = -2\kappa\theta$$

En réarrangeant cette expression, on obtient après développement :

$$\tau^2(1-\theta)^2 v^4 + 4\kappa^2\theta^2 + 4\kappa\theta\tau(1-\theta)v^2 = \tau^2(1-\theta)^2 v^2(v^2 + 4\kappa b)$$

En remplaçant b par sa valeur, on obtient après simplification :

$$4\kappa^2\theta^2 + 4\kappa\theta\tau(1-\theta)v^2 = 4\kappa\theta\tau v^2$$

Ce qui conduit à :

$$4\kappa\theta^2\tau v^2 = 4\kappa^2\theta^2$$

et la vitesse s'écrit finalement :

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}$$

On introduit alors la longueur caractéristique δ de la façon suivante :

$$v = \frac{\delta}{\tau}$$

Ceci entraîne alors que

$$\delta = \tau \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}$$

et finalement

$$\delta = \sqrt{\kappa\tau}$$

Pour beaucoup de cas d'intérêt pratique, κ est petit (diffusion faible) et τ grand (réaction rapide).

L'épaisseur $e(\theta, \kappa, \tau)$ est maintenant trouvée comme suit.

$$U(s_0) = \theta e^{\frac{s_0}{\sqrt{\kappa\tau}}} \quad \text{et} \quad U(s_1) = (\theta - 1)e^{r_1 s_1} + 1$$

Donc

$$\theta e^{\frac{s_0}{\sqrt{\kappa\tau}}} = \varepsilon \quad \text{et} \quad (\theta - 1)e^{r_1 s_1} + 1 = 1 - \varepsilon$$

D'où on obtient :

$$s_0 = \sqrt{\kappa\tau} \text{Log} \frac{\varepsilon}{\theta} \quad \text{et} \quad s_1 = \frac{1}{r_1} \text{Log} \frac{\varepsilon}{1 - \theta}$$

L'épaisseur $e(\theta, \kappa, \tau)$ s'écrit alors :

$$e(\theta, \kappa, \tau) = s_1 - s_0 = \delta \left(\text{Log} \frac{\theta}{1 - \theta} - \frac{1}{\theta} \text{Log} \frac{\varepsilon}{1 - \theta} \right)$$

Ci-dessous, on vérifie que les résultats numériques sont bien conformes à ces prédictions théoriques pour le cas-test de propagation laminaire.

Extinction

En résumé, le problème d'extinction consiste à étudier l'évolution de la température avec des données initiales à support compact : soit la solution converge vers deux fronts se propageant en sens opposés (allumage), soit la température tend vers zéro (extinction). D'après les prédictions théoriques, il existe une taille critique pour le support de la condition initiale en-dessous de laquelle on a extinction et au-dessus de laquelle on a allumage. Néanmoins, la théorie ne permet pas de calculer quantitativement cette valeur critique. En l'absence de valeurs théoriques exactes, les expériences numériques de validation présentées plus loin procèdent par vérification de la convergence des estimations numériques de la valeur critique pour la taille du support.

2.2.2. Résultats numériques

Propagation

L'épaisseur $e(\theta, \kappa, \tau)$ est mesurée pour les flammes minces à partir d'une tolérance ε fixée au préalable. Dans les calculs, l'on a pris $\varepsilon = 10^{-1}$.

Cette épaisseur servira par ailleurs de repère dans le choix des échelles pour la largeur P du canal $[-L, L] \times [0, P]$ et la taille w du support pour des simulations en dimensions supérieures à 1.

Dans les tests de validation numérique, $e(\theta, \kappa, \tau)$ est évaluée de la manière suivante : on considère le vecteur $u = (u_1, \dots, u_s)$ de longueur s contenant les points $T_{i,j}^n$ vérifiant

$$\varepsilon < T_{i,j}^n < 1 - \varepsilon$$

L'épaisseur est alors calculée comme :

$$e(\theta, \kappa, \tau) = sh$$

On considère $\kappa = 1, \tau = 1$. La dernière colonne du tableau 2.1.1 donne la prédiction théorique e_{ex} pour l'épaisseur e en fonction du seuil d'allumage θ . Les autres colonnes donnent les valeurs numériques correspondantes avec $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$. On observe une très bonne convergence des valeurs numériques vers la valeur exacte. En particulier, pour les valeurs $\theta \leq 0.7$, le maillage $h = 0.05$ garantit une précision relative de l'ordre de 1%, ce qui est très acceptable.

Extinction

Tout d'abord, nous illustrons ici le type de résultats obtenus lors des expériences numériques de validation. Dans toutes les expériences dans cette section, on a pris les valeurs

$$\kappa = \tau = 1$$

Avec ces valeurs, la théorie prédit que la vitesse d'une flamme établie vaut $v = 1$. Dans la figure 2.2.1, un exemple de condition initiale pour la température est représenté ; dans cet exemple, on a pris la demi-taille du support $w = 0.2$.

La figure 2.2.2 montre des instantanés du profil de température correspondant à cette condition initiale, pour un seuil d'allumage $\theta = 0.5$. Il s'agit clairement

θ	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$	$e_{ex}(\theta, \kappa, \tau)$
0.1	19.8	19.75	19.725	19.775
0.2	9.0	9.05	9.025	9.0109
0.3	5.6	5.65	5.650	5.6391
0.4	4.1	4.10	4.075	4.0739
0.5	3.2	3.25	3.225	3.2189
0.6	2.8	2.75	2.725	2.7160
0.7	2.5	2.45	2.425	2.4167
0.8	2.4	2.35	2.275	2.2527
0.9	2.9	2.40	2.300	2.1972

TAB. 2.2.1. Valeurs numériques et exactes de l'épaisseur de flamme laminaire

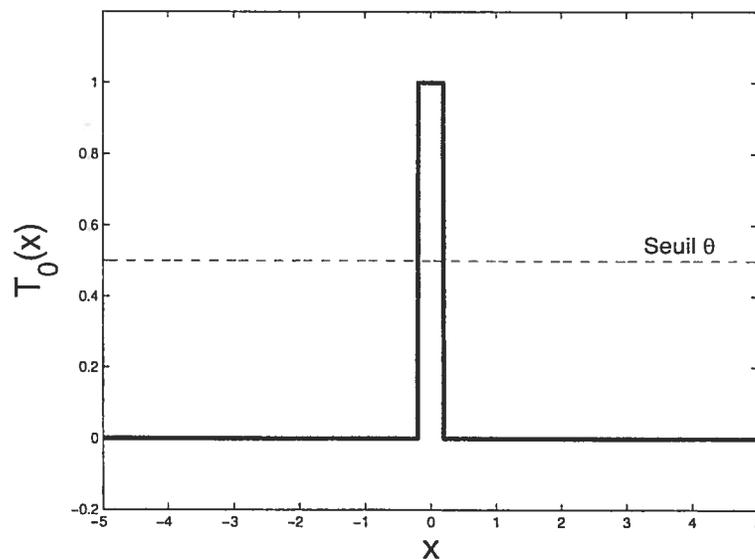


FIG. 2.2.1. Exemple de condition initiale $T_0(x)$

d'un cas d'extinction. En effet, on y constate, que dû à la diffusion, il y a un aplatissement de la courbe en dessous du seuil d'allumage. La réaction n'est pas suffisamment vigoureuse pour compenser ce lissage diffusif.

L'allumage quant à lui est illustré dans la figure 2.2.3, où on peut suivre la propagation de deux fronts en sens opposés. Dans cette expérience, on a pris $w = 0.6$ et $\theta = 0.5$. Les figures 2.2.4 et 2.2.5 illustrent respectivement l'évolution

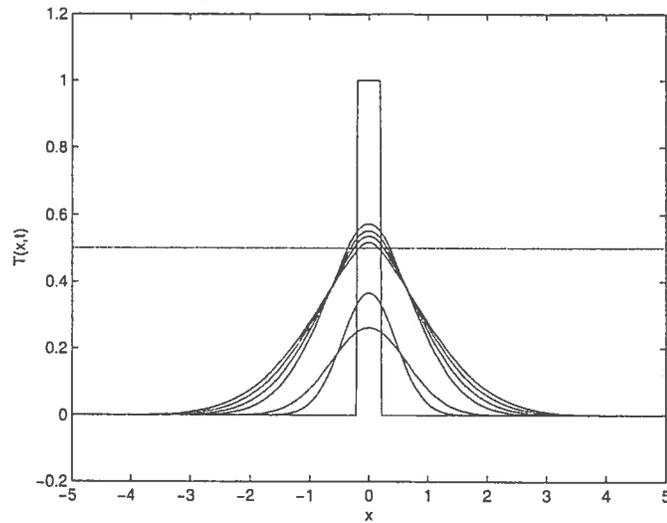


FIG. 2.2.2. Exemple d'extinction; $w = 0.2$, $\theta = 0.5$. La condition initiale correspond au rectangle le plus haut. Les profils successifs sont de plus en plus lissés et la température maximale décroît avec le temps.

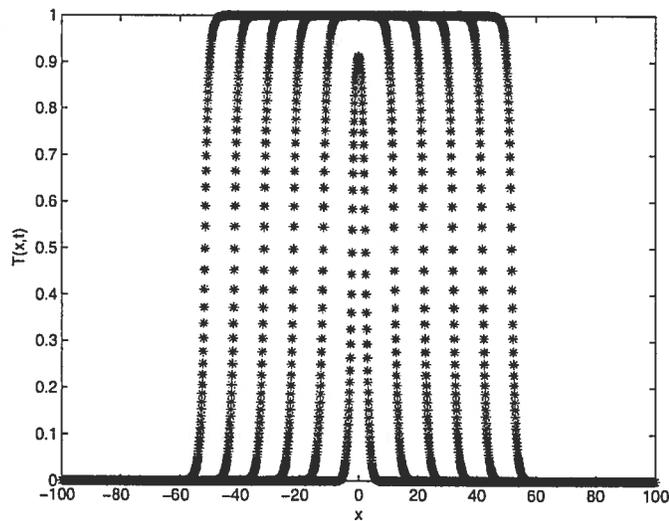


FIG. 2.2.3. Exemple d'allumage; $w = 0.6$, $\theta = 0.5$

de la vitesse de propagation et de l'épaisseur laminaire pour ce cas de l'allumage. Comme prévu par la théorie, $v \rightarrow 1$ et $e \rightarrow 3.22$.

On va maintenant vérifier la convergence numérique de l'estimation de la taille critique w en fonction du seuil d'allumage θ . Pour déterminer cette valeur

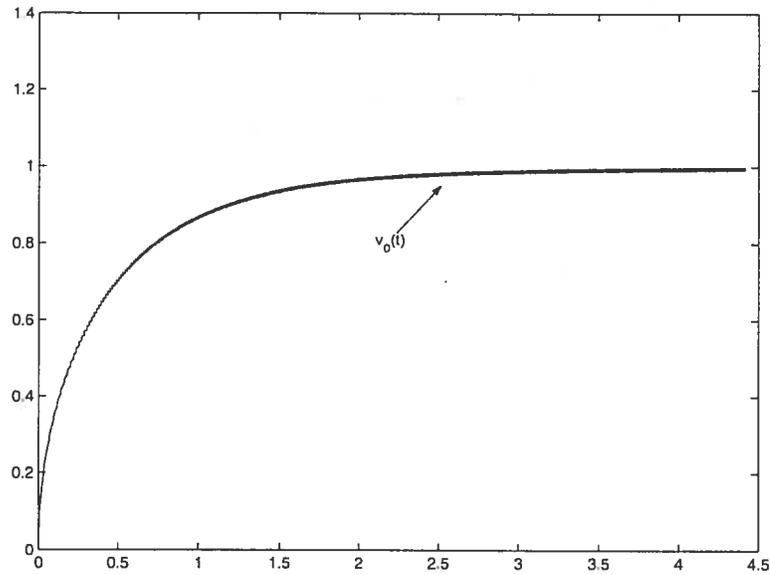


FIG. 2.2.4. Évolution de la vitesse de propagation dans le cas d'allumage

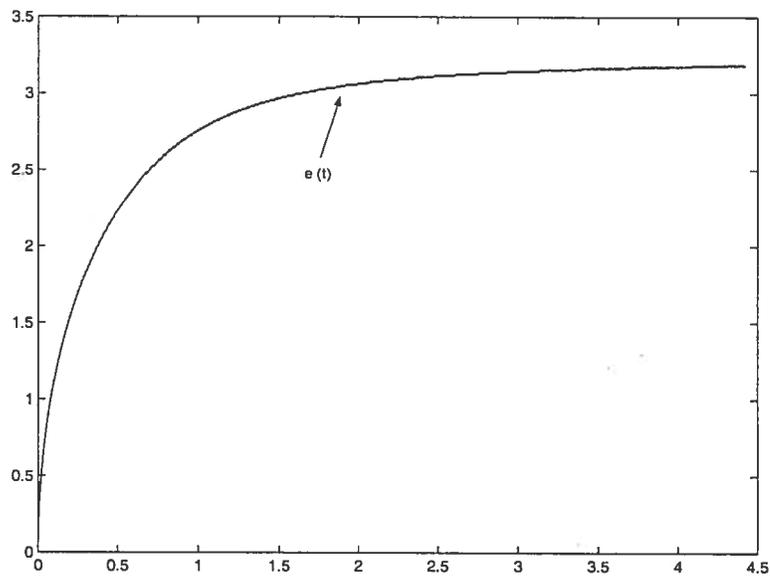


FIG. 2.2.5. Évolution de l'épaisseur de la flamme dans le cas d'allumage

critique, une série d'expériences numériques est réalisée pour des valeurs de la taille du support qui sont des multiples entiers du maillage utilisé h . Les tables ci-dessous rapportent la valeur critique sous forme d'une paire $[w_m, w_M]$, avec w_m la plus grande valeur de w pour laquelle les expériences numériques ont mené à l'extinction tandis que w_M est la plus petite valeur testée pour laquelle les

θ	$h=0.01$	$h=0.005$
0.1	0.10-0.11	0.105-0.110
0.2	0.20-0.21	0.205-0.210
0.3	0.29-0.30	0.300-0.305
0.4	0.37-0.38	0.380-0.385
0.5	0.44-0.45	0.450-0.455
0.6	0.50-0.51	0.505-0.510
0.7	0.54-0.55	0.545-0.550
0.8	0.55-0.56	0.555-0.560
0.9	0.52-0.53	0.525-0.530

TAB. 2.2.2. Taille critique $w(\theta)$ pour $h = 0.01$ et $h = 0.005$, schéma d'Euler explicite

expériences numériques ont mené à l'allumage. Dans les figures, seules les valeurs de w_M sont représentées.

Le tableau 2.2.2 rapporte les résultats des expériences menées avec une version préliminaire du code, basée sur une discrétisation temporelle de type Euler explicite. Le tableau présente les valeurs critiques correspondant à des seuils d'allumage $0.1 \leq \theta \leq 0.9$ pour deux maillages $h = 0.01$ et $h = 0.005$. On constate un bon accord des résultats obtenus avec les deux résolutions, ce qui semble indiquer que le raffinement spatial est adéquat. Le problème avec cette version du code est le coût de l'intégration temporelle. La contrainte de stabilité du schéma Euler explicite impose une limite sur le pas de temps du type $dt = \frac{h^2}{2}$. De plus pour des raisons de précision (le schéma est d'ordre 1 dans le temps), il faut utiliser un pas de temps dt très petit (les calculs de la table 2.2.2 correspondent à $dt = \frac{h^2}{6}$.) En vue des simulations pour les cas instationnaires, il a été très important de mettre au point un code qui permette l'utilisation d'un pas de temps beaucoup plus grand sans compromettre la précision et la stabilité des résultats. Ce fut accompli avec le code basé sur la méthode de Crank-Nicolson décrit précédemment : il est inconditionnellement stable et d'ordre 2 dans le temps. Sa performance est illustrée dans la table 2.2.3. Les calculs sont maintenant réalisés avec le nouveau

θ	$dt = \frac{h}{4} = 2.5e - 3$	$dt = \frac{h}{8} = 1.25e - 3$	$dt = \frac{h}{16} = 6.25e - 4$	$dt = \frac{h^2}{6} = 1.67e - 5$
0.1	0.10-0.11	0.10-0.11	0.10-0.11	0.10-0.11
0.2	0.20-0.21	0.20-0.21	0.20-0.21	0.20-0.21
0.3	0.29-0.30	0.29-0.30	0.29-0.30	0.29-0.30
0.4	0.37-0.38	0.37-0.38	0.37-0.38	0.37-0.38
0.5	0.43-0.44	0.44-0.45	0.44-0.45	0.44-0.45
0.6	0.47-0.48	0.50-0.51	0.50-0.51	0.50-0.51
0.7	0.51-0.52	0.53-0.54	0.54-0.55	0.54-0.55
0.8	0.51-0.52	0.54-0.55	0.55-0.56	0.55-0.56
0.9	0.46-0.47	0.49-0.50	0.52-0.53	0.52-0.53

TAB. 2.2.3. Taille critique $w(\theta)$ pour $h = 0.01$ en fonction de dt , schéma de Crank-Nicolson (colonnes 2,3,4) et schéma explicite d'Euler avant (pour référence, colonne 5).

code et un pas $h = 0.01$. On constate que la transition est capturée de façon très adéquate pour des valeurs de dt nettement supérieures au pas limite explicite pour la plupart des valeurs de θ . (Dans la suite, on utilisera $\theta = 0.5$, une valeur pour laquelle le code implicite avec dt grand est assez performant). Malgré le coût supplémentaire par pas de temps du code implicite, globalement le temps de calcul est réduit de façon significative avec la version de Crank-Nicolson.

La figure 2.2.6 représente ces résultats graphiquement. On observe que $w(\theta)$ atteint un maximum pour θ de l'ordre de 0.75. Pour les valeurs de θ proche de cette valeur, on constate aussi que les résultats sont plus sensibles au choix du pas de temps. Pour cette raison, on utilisera surtout la valeur $\theta = 0.5$ dans les expériences pour les cas instationnaires.

2.3. VALIDATION DANS LE CAS TURBULENT STATIONNAIRE

On s'intéresse maintenant au cas du champ de vitesse de la forme $U = (A \sin(2\pi y/P), 0)$. Dans ce cas, le champ de température ne sera plus uni-dimensionnel, on fait donc les calculs en deux dimensions spatiales. La figure 2.3.1 illustre la condition initiale ainsi que le champ de vitesse. Dans la figure 2.3.2, on repré-

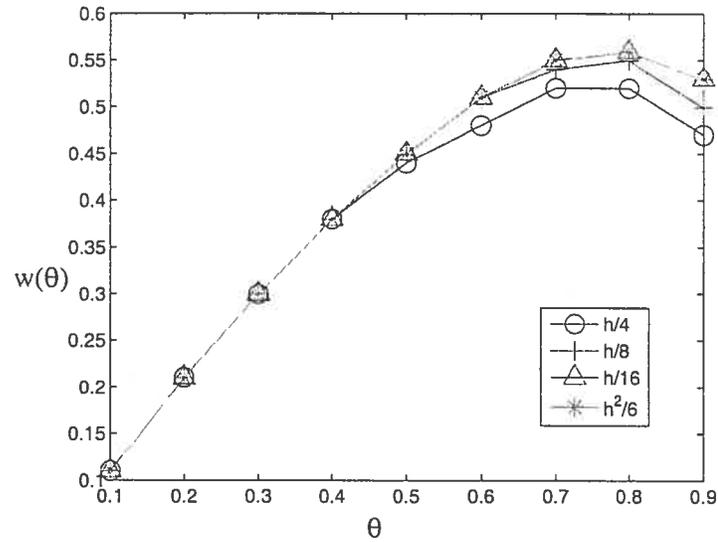


FIG. 2.2.6. Taille critique $w(\theta)$ pour différents dt

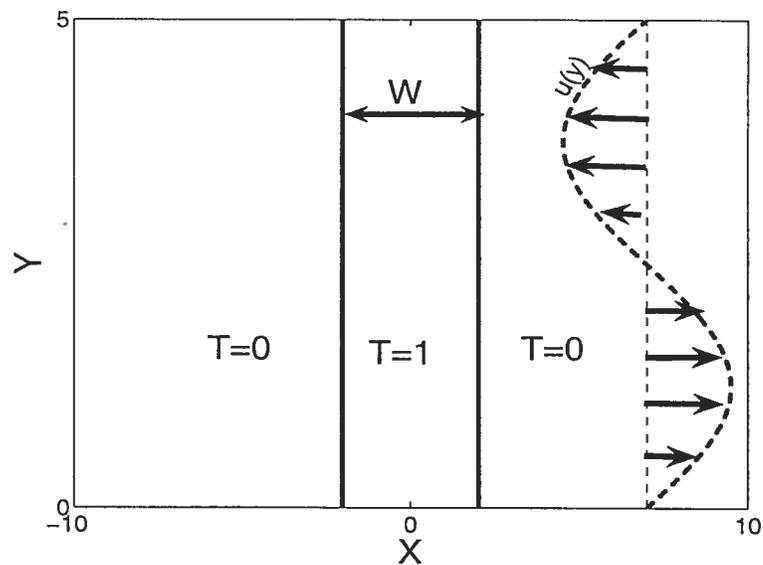


FIG. 2.3.1. Exemple de condition initiale $T_0(x, y)$

sente l'évolution du maximum de la température et de la vitesse de propagation en fonction du temps pour un cas d'allumage, avec $\theta = 0.5$, $A = 1$ et $w = 1$. On observe que initialement, le maximum de la température diminue. Cela s'explique comme suit. En ce qui concerne la température initiale, le terme de réaction est identiquement nul. Les seuls mécanismes en jeu sont alors l'advection et la

diffusion, avec comme résultat net un lissage de la température. Au fur et à mesure que la température est lissée et que des valeurs intermédiaires entre θ et 1 apparaissent, le terme de réaction joue un rôle de plus en plus important et le maximum de température remonte alors à 1. Etant donné le coût des simulations en deux dimensions, un diagnostic utile pour détecter l'allumage sans attendre la convergence asymptotique est le suivant. Dès que le maximum de la température tombe en-dessous du seuil, l'extinction est garantie et on peut arrêter la simulation. Si par contre, le maximum de la température atteint un minimum au-dessus du seuil et recommence à croître, on en déduit l'allumage. Bien qu'il n'y ait pas de preuve théorique que ce soit bien toujours le cas, nous n'avons jamais observé de contre-exemple.

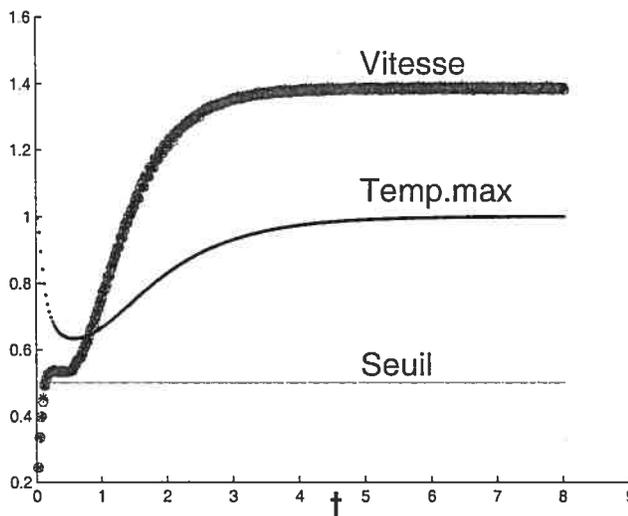


FIG. 2.3.2. Évolution de la vitesse et de la température maximale pour un cas d'allumage avec cisaillement stationnaire. Ici, $\theta = 0.5$, $A = 1$, $w = 1$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'influence du cisaillement stationnaire sur la valeur critique de la taille du support des données initiales. La figure 2.3.3 et la table 2.3.1 présentent les résultats obtenus pour $\theta = 0.5$ et $P = 5$. On observe une convergence numérique adéquate quand le maillage h est progressivement réduit $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Idéalement, un maillage plus fin permettrait de distinguer mieux les variations de $w(A)$, mais étant donné le temps de calcul en régime

A	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0	0.3-0.4	0.40-0.45	0.400-0.450
0.5	0.4-0.5	0.40-0.45	0.400-0.450
1	0.4-0.5	0.40-0.45	0.450-0.475
1.5	0.4-0.5	0.45-0.50	0.475-0.500
2	0.4-0.5	0.50-0.55	0.525-0.550
2.5	0.5-0.6	0.55-0.60	0.575-0.600
3	0.6-0.7	0.60-0.65	0.650-0.675

TAB. 2.3.1. Taille critique w en fonction de l'intensité A pour $\theta = 0.5$ et pour $h = 0.1, 0.05, 0.025$

instationnaire, on se contentera dans l'étude préliminaire présentée ici d'un raffinement de $h = 0.05$. On observe que la présence d'un cisaillement résulte en une augmentation de la taille critique en comparaison au cas où le champ de vitesse nul. Ceci est facile à comprendre : la déformation de la flamme due au cisaillement résulte en une augmentation de la diffusion effective et favorise donc l'extinction.

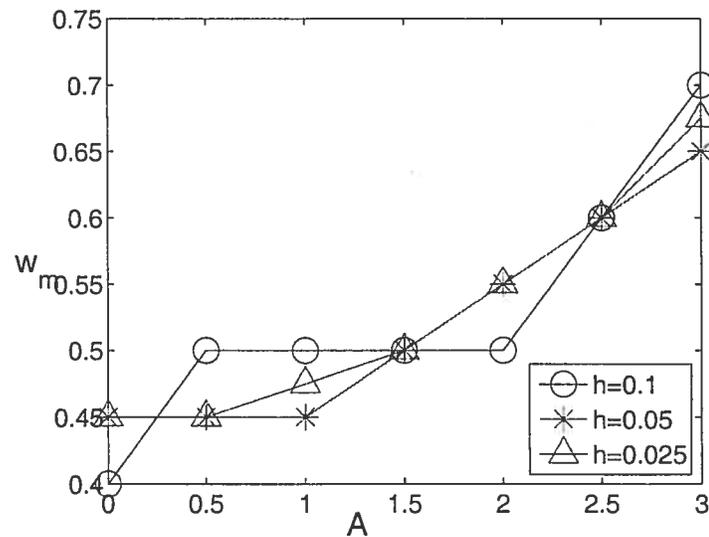


FIG. 2.3.3. Taille critique w en fonction de l'intensité A pour $\theta = 0.5$ et pour $h = 0.1, 0.05, 0.025$

Chapitre 3

EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES EN RÉGIME INSTATIONNAIRE

3.1. MISE EN PLACE DES EXPÉRIENCES

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la généralisation aux cas instationnaires des résultats illustrés dans le chapitre précédent pour les cas de cisaillement stationnaire. Voici comment ont été sélectionnés les divers paramètres physiques intervenant dans les expériences numériques :

- la largeur P du canal : théoriquement, on voudrait qu'elle soit très grande en comparaison à l'épaisseur de la flamme laminaire parce que la plupart des régimes physiquement intéressants sont du type flamme mince. En pratique cependant, les coûts de simulation sont proportionnels à P et on a donc été amené à choisir la valeur de $P = 5$, suffisamment grande par rapport à l'épaisseur de la flamme, mais suffisamment petite pour que les calculs ne soient pas trop ambitieux.
- le seuil d'allumage θ : il a été fixé à $\theta = 0.5$ du fait que, tel qu'il a été démontré dans le chapitre précédent, cette valeur produit des résultats numériques fiables avec un maillage modéré de $h = 0.05$, contrairement à ce qui se passe pour des valeurs de θ plus grandes.
- la fréquence de modulation ω : le champ de vitesse instationnaire est de la forme $U(y, t) = (A \cos \omega t \sin(2\pi y/P), 0)$. On choisit les valeurs de ω de telle sorte que la période temporelle correspondante $T = 2\pi/\omega$ varie entre des valeurs très petites, proches de 0, et des valeurs de l'ordre de grandeur

de l'échelle de référence temporelle T_r définie comme ci-dessous. L'échelle de temps caractéristique T_r a été définie dans [3] où on l'appelle le *temps de plissement* de la flamme. C'est une mesure du temps de réponse d'une flamme en mode de propagation. Plus précisément, T_r est une estimation du temps qu'il faut à une flamme établie parfaitement plane pour être déformée complètement par un cisaillement stationnaire. T_r est calculé comme suit :

$$T_r = \frac{P}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Par exemple, avec $P = 5$ et $A = 3$, $T_r = 0.92$ et la fréquence correspondante est de l'ordre de 2π . Les résultats discutés plus loin couvrent l'intervalle de valeurs pour ω ainsi défini.

- l'intensité du cisaillement A : on a procédé par essai et erreur pour identifier une valeur suffisamment grande de sorte que des résultats significativement différents du cas laminaire soient obtenus. Toutefois, plus A est grand, plus les calculs sont coûteux (quand A augmente, il faut réduire le pas de temps d'après la condition CFL). On a donc choisi la valeur $A = 3$.

On a ensuite sélectionné les paramètres numériques sur la base des expériences de validation du chapitre précédent :

- le pas dans l'espace $h = 0.05$;
- le pas dans le temps $dt = h/16$;
- taille horizontale du domaine $L = 20$.

3.2. DESCRIPTION DES DIAGNOSTICS

L'expérience consiste à déterminer la valeur de la taille minimale w_m qui conduit à l'allumage. On procède comme dans le cas stationnaire, tel que résumé ci-dessous. On envisage uniquement des valeurs de w qui sont des multiples entiers du maillage h , soit $w = p h$, où p est un entier naturel.

Pour une valeur de la fréquence ω_1 donnée, l'on commence par fixer p assez petit de sorte que l'on obtienne l'extinction ; ensuite l'on fait croître p jusqu'à l'obtention de l'allumage. On procède ensuite par la méthode de continuation pour la valeur de ω_2 suivante : c'est-à-dire, la valeur critique p_1 précédente sert d'initialisation dans les itérations pour ω_2 .

On diagnostique l'allumage/extinction comme suit. Si la température maximale tombe en dessous du seuil θ , alors il s'agit d'une extinction. Si par contre, elle devient monotone croissante à partir d'un minimum, alors il s'agit d'un allumage. En effet, il a été observé lors des expériences une certaine prédominance de la diffusion dans un premier temps qui se traduit par la décroissance de la température maximale. Ceci pourrait éventuellement aboutir à l'extinction au moment où cette température devient inférieure au seuil. Mais il pourrait également se produire un état d'équilibre où diffusion et réaction se neutralisent. En fait, l'on a observé que ceci s'est toujours suivi d'une phase où la réaction reprend le dessus. Il se produit alors une croissance de la température maximale vers une tendance asymptotique : c'est l'allumage et l'établissement de deux fronts qui se propagent en sens opposés.

3.3. RÉSULTATS OBTENUS

On commence ici par une présentation graphique des résultats pour des valeurs représentatives de la fréquence $\omega = 4\pi, \pi, 3\pi/4, \pi/2, \pi/4, 0$. Comme expliqué précédemment, on a choisi les paramètres physiques suivants : $A = 3$, $\theta = 0.5$, $P = 5$. Pour chaque cas test, on va montrer les graphiques suivants :

- (1) comportement de la température maximale en fonction du temps ;
- (2) comportement de la vitesse de propagation en fonction du temps ;
- (3) instantané du champ de température au temps final $t = 6.25$ (la couleur rouge correspond à $T = 1$ et la couleur bleue à $T = 0$) ;
- (4) séquence d'instantanés du champ de température pour illustrer son évolution temporelle ;
- (5) séquence de lignes de contour du champ de température.

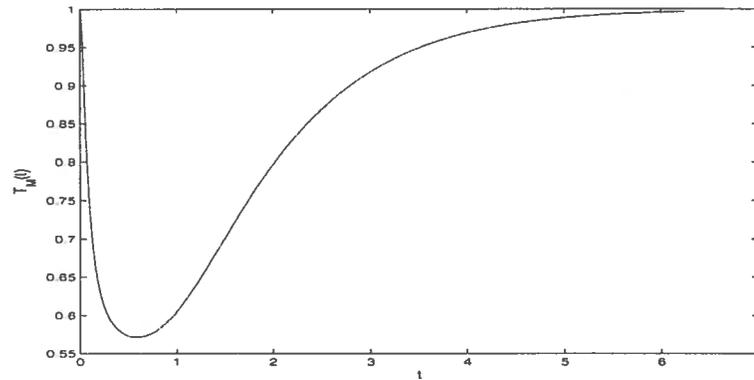


FIG. 3.3.1. Courbe de la température maximale pour $\omega = 4\pi$

3.3.1. Cas 1 : $\omega = 4\pi$

Pour $\omega = 4\pi$, on constate que le comportement de la flamme est très similaire à celui dans le cas laminaire (en l'absence de cisaillement). En effet, la vitesse de propagation converge vers la valeur laminaire 1 tandis que la flamme est très peu déformée par le cisaillement.

Sur le graphique de la température maximale, on constate qu'elle décroît dans un premier temps sous l'effet de la diffusion jusqu'à une valeur minimale et croît ensuite sous l'effet de la réaction jusqu'à la valeur asymptotique 1.

Le fait que le cisaillement n'a pas d'effet sur la flamme peut se comprendre en regardant les temps caractéristiques. Le temps d'allumage dans le cas laminaire est de l'ordre de $t = 0.89$, le temps caractéristique de plissement est de l'ordre de $t = 0.92$. Par contre, la période du cisaillement est seulement de l'ordre $T = 0.5$, plus courte que les deux autres temps. Il n'est donc pas surprenant que l'effet global du cisaillement soit négligeable, les oscillations étant trop rapides. Il s'agit ici d'un exemple dans le régime rapide.

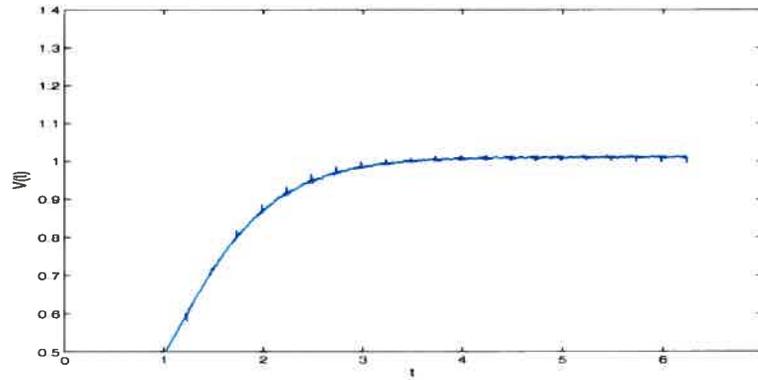


FIG. 3.3.2. Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = 4\pi$

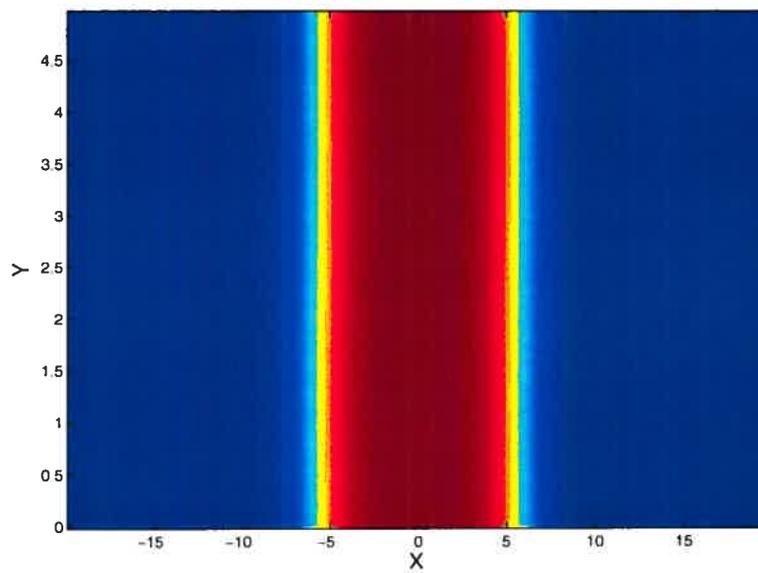


FIG. 3.3.3. Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = 4\pi$

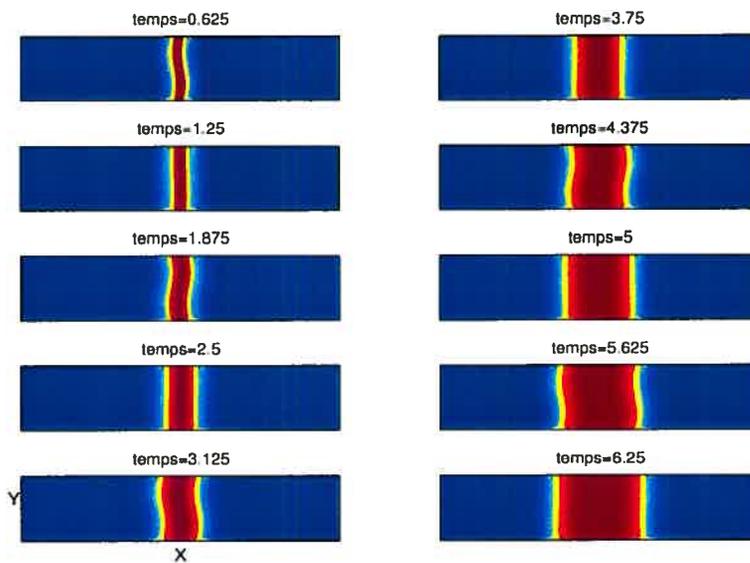


FIG. 3.3.4. Évolution de la température pour $\omega = 4\pi$

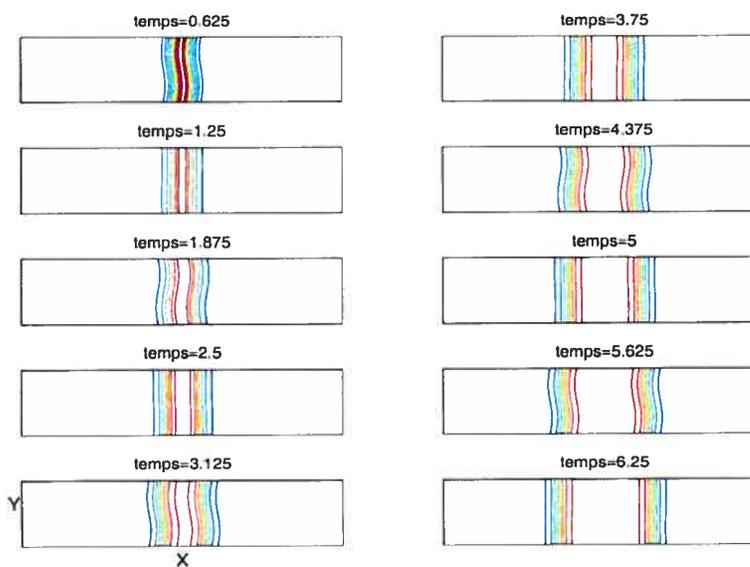


FIG. 3.3.5. Évolution des contours de la température pour $\omega = 4\pi$

3.3.2. Cas 2 : $\omega = \pi$

Pour $\omega = \pi$, l'on constate quelques différences par rapport aux graphiques précédents, notamment sur la courbe de la température maximale où l'on observe d'abord une décroissance due à la diffusion jusqu'à un minimum, suivie d'une croissance ponctuée par de faibles oscillations. Les oscillations sont encore plus remarquables sur la courbe de la vitesse. Les graphiques de la solution finale et de l'évolution de la solution illustrent également ces oscillations. En effet la solution y change de configuration toutes les 200 itérations dû aux effets instationnaires. Ceci est encore plus précis sur le graphique des lignes de niveau. Il s'agit ici d'un cas de transition entre le régime rapide et le régime lent (voir la caractérisation de ce régime lent plus loin.)

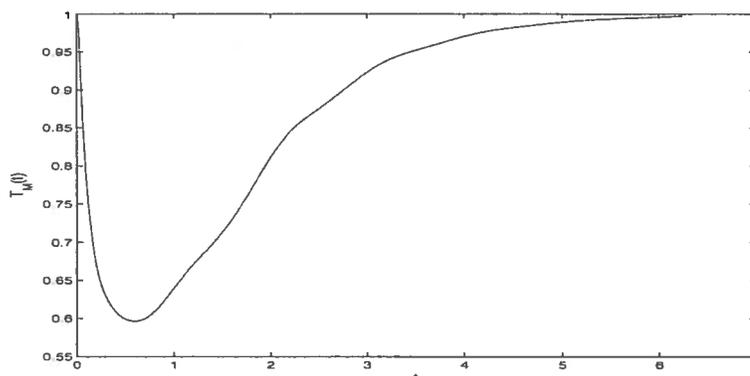


FIG. 3.3.6. Courbe de la température maximale pour $\omega = \pi$

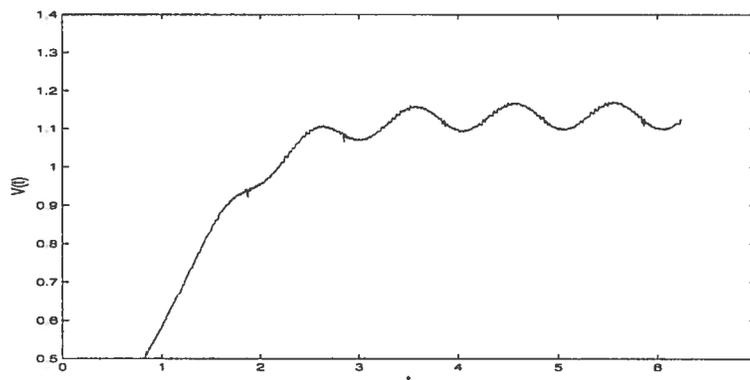


FIG. 3.3.7. Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \pi$

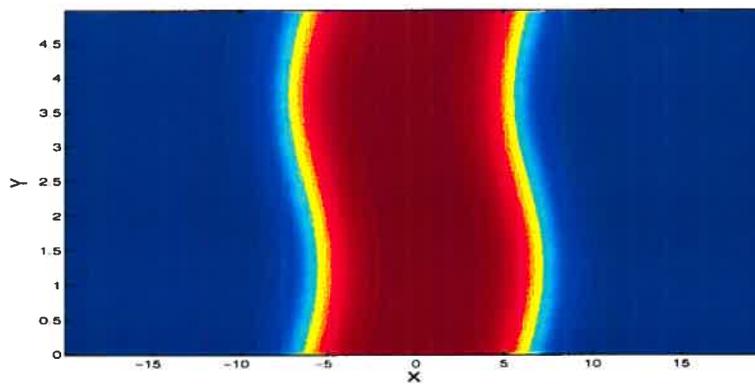


FIG. 3.3.8. Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \pi$

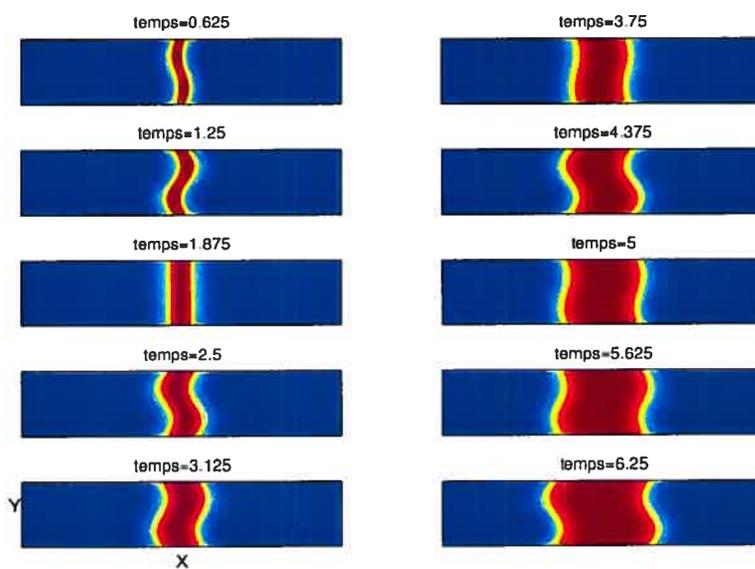


FIG. 3.3.9. Évolution de la température pour $\omega = \pi$

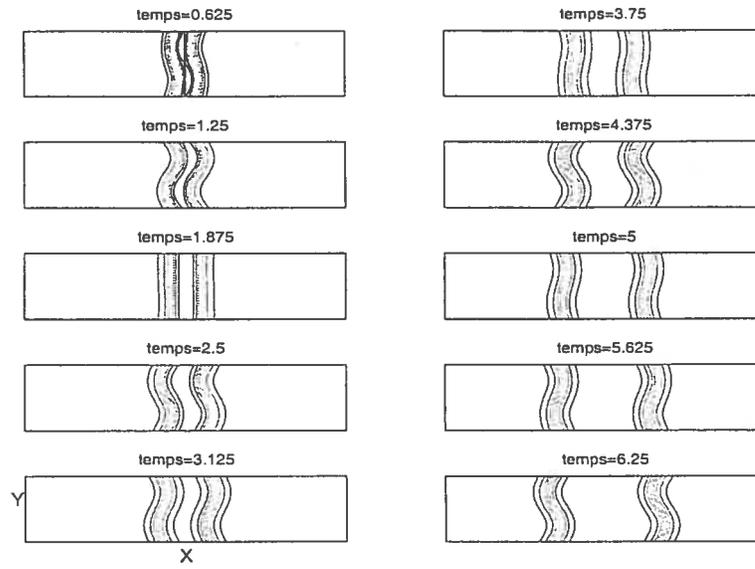


FIG. 3.3.10. Évolution des contours de la température pour $\omega = \pi$

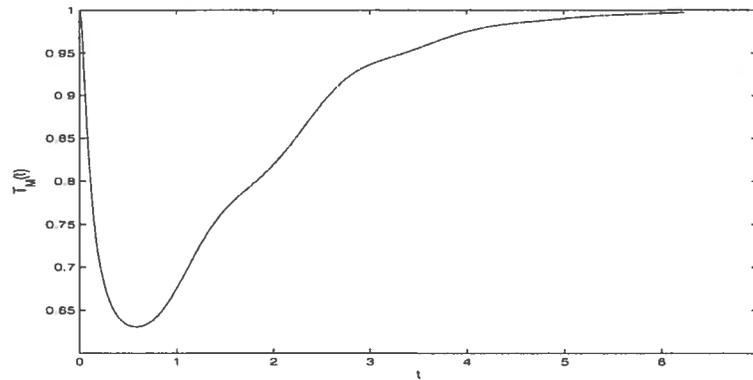


FIG. 3.3.11. Courbe de la température maximale pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$

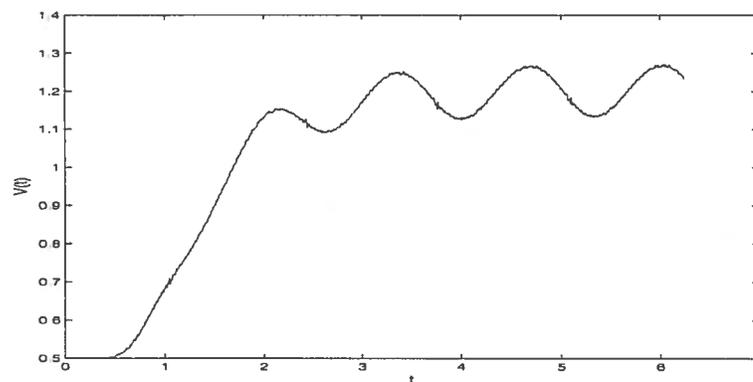


FIG. 3.3.12. Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$

3.3.3. Cas 3 : $\omega = \frac{3\pi}{4}$

Ici les mêmes effets que précédemment sont remarqués avec quelques petites différences, notamment sur la courbe de la vitesse où l'on remarque des oscillations avec une fréquence plus faible (qui correspond à la fréquence du cisaillement) et avec une amplitude plus grande. De même que précédemment, l'on remarque les déformations de la flamme dues au cisaillement. Il s'agit aussi d'un cas de transition.

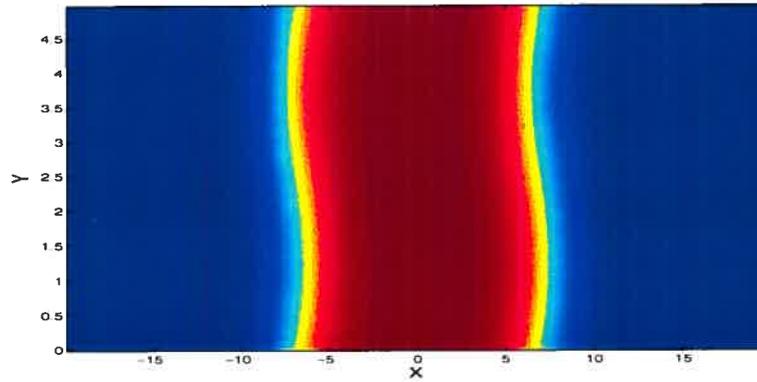


FIG. 3.3.13. Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$

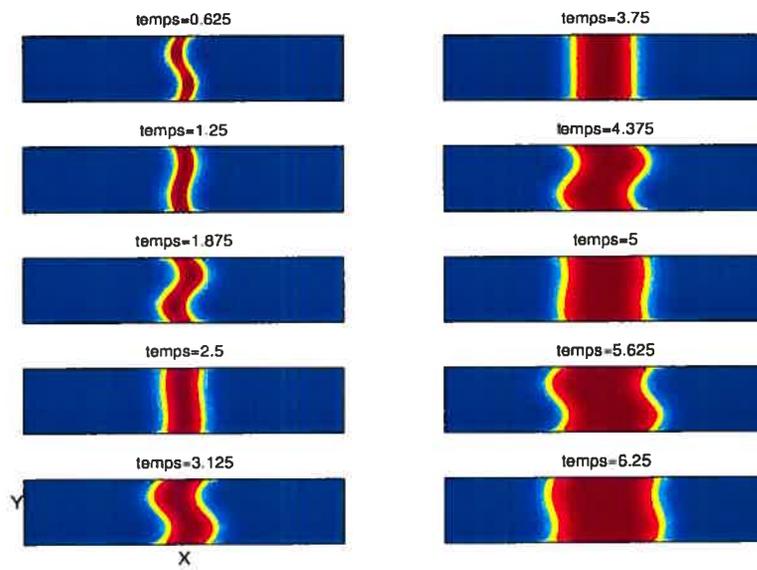


FIG. 3.3.14. Évolution de la température pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$

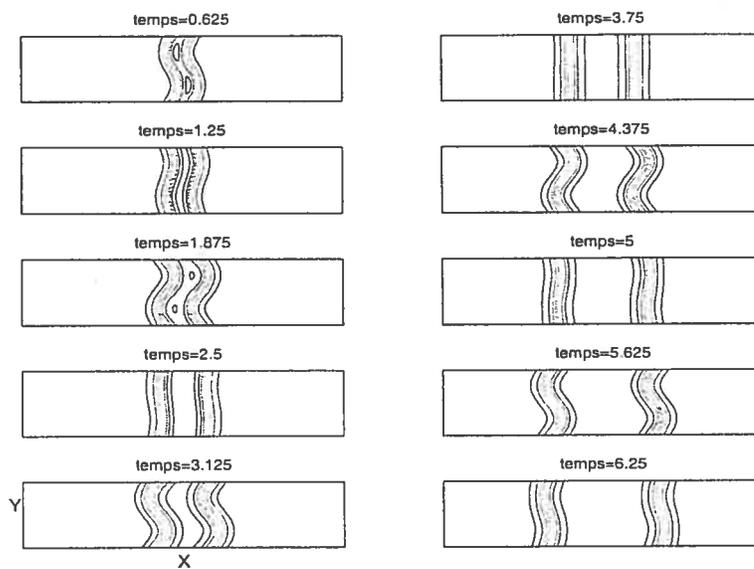


FIG. 3.3.15. Évolution des contours de la température pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$

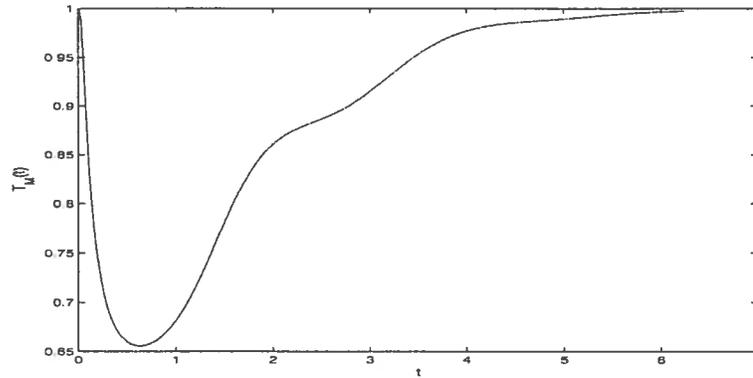


FIG. 3.3.16. Courbe de la température maximale pour $\omega = \frac{\pi}{2}$

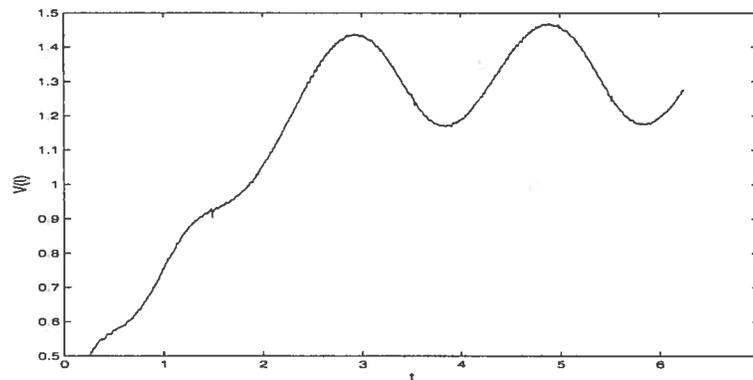


FIG. 3.3.17. Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \frac{\pi}{2}$

3.3.4. Cas 4 : $\omega = \frac{\pi}{2}$

Ici également, on constate des changements de cisaillement avec une fréquence qui décroît et une amplitude qui augmente sur la vitesse de propagation. Sur la température maximale, les oscillations se font plus marquées. On remarque de même des changements de cisaillement sur le graphique illustrant l'évolution de la solution. Il s'agit encore d'un cas de transition.

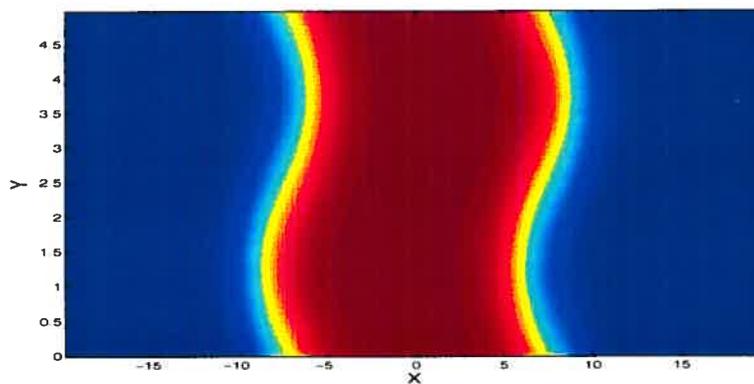


FIG. 3.3.18. Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$

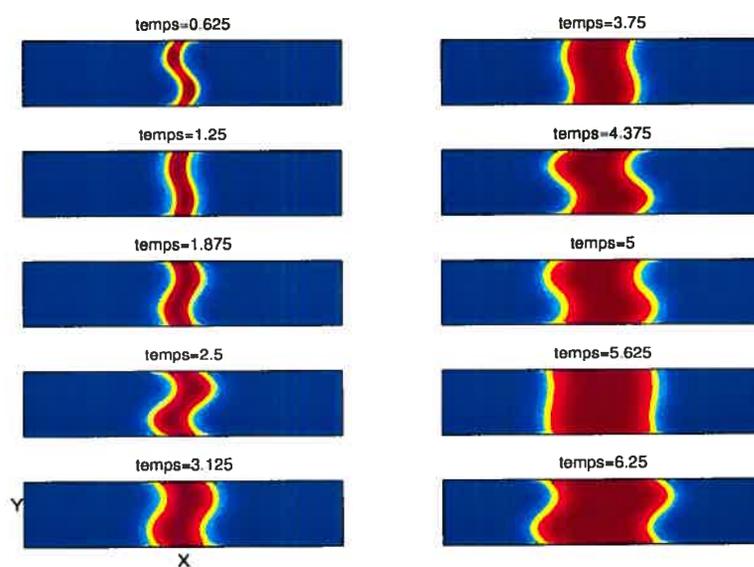


FIG. 3.3.19. Évolution de la température pour $\omega = \frac{\pi}{2}$

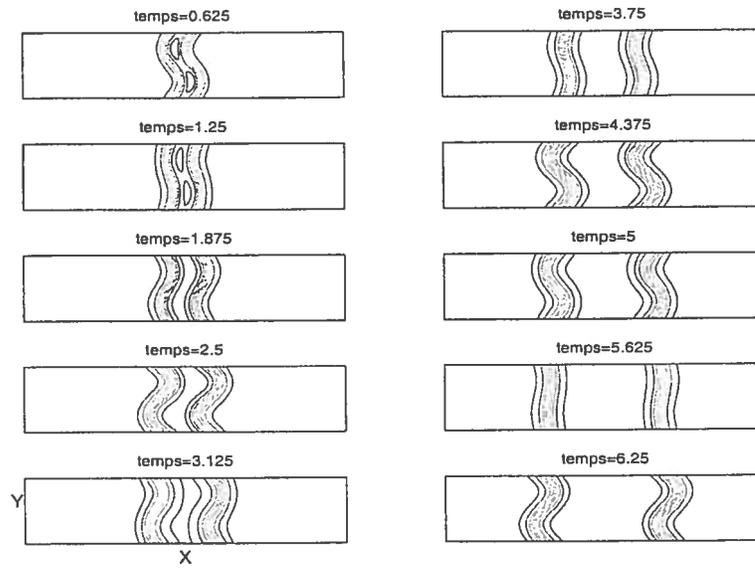


FIG. 3.3.20. Évolution des contours de la température pour $\omega = \frac{\pi}{2}$

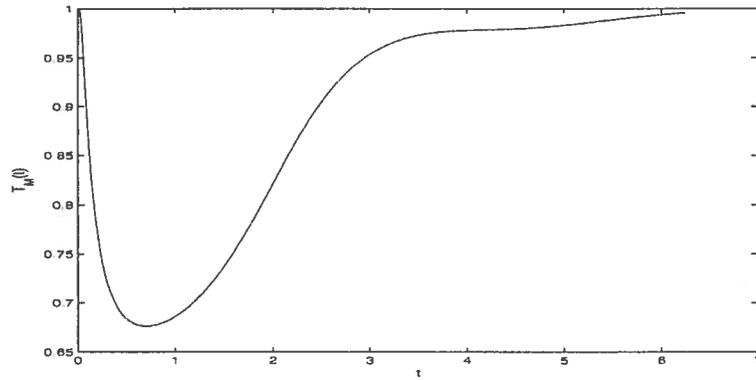


FIG. 3.3.21. Courbe de la température maximale pour $\omega = \frac{\pi}{4}$

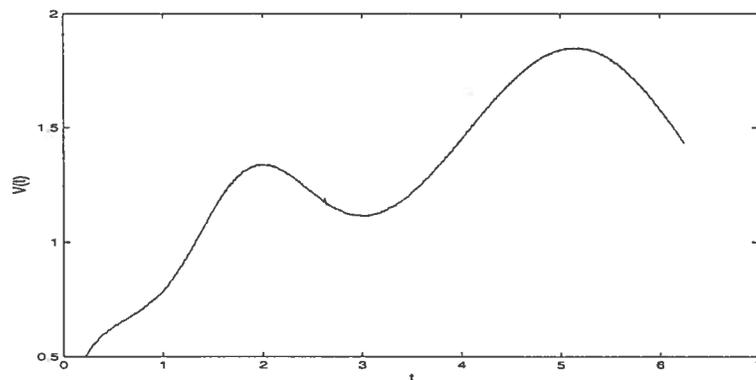


FIG. 3.3.22. Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = \frac{\pi}{4}$

3.3.5. Cas 5 : $\omega = \frac{\pi}{4}$

Ici encore, il y a des oscillations mais qui tendent à disparaître sur la température maximale. La vitesse oscille également mais avec une fréquence plus faible. Par contre, la valeur moyenne de la vitesse augmente en comparaison avec les cas précédents. Les déformations de la flamme sont très visibles sur les graphiques illustrant l'évolution de la solution. Il s'agit d'un exemple de régime lent (voir confirmation plus loin).

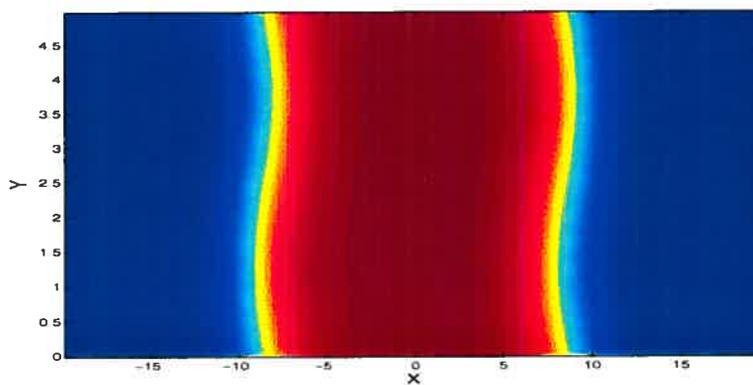


FIG. 3.3.23. Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = \frac{\pi}{4}$

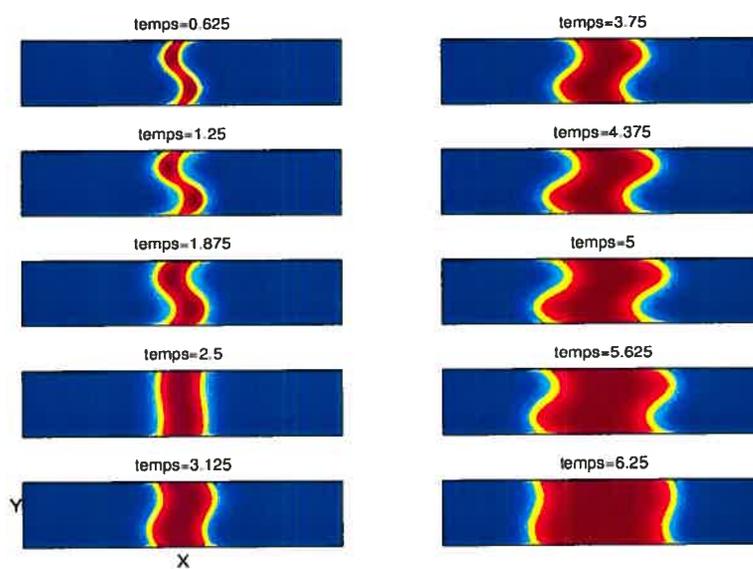


FIG. 3.3.24. Évolution de la température pour $\omega = \frac{\pi}{4}$

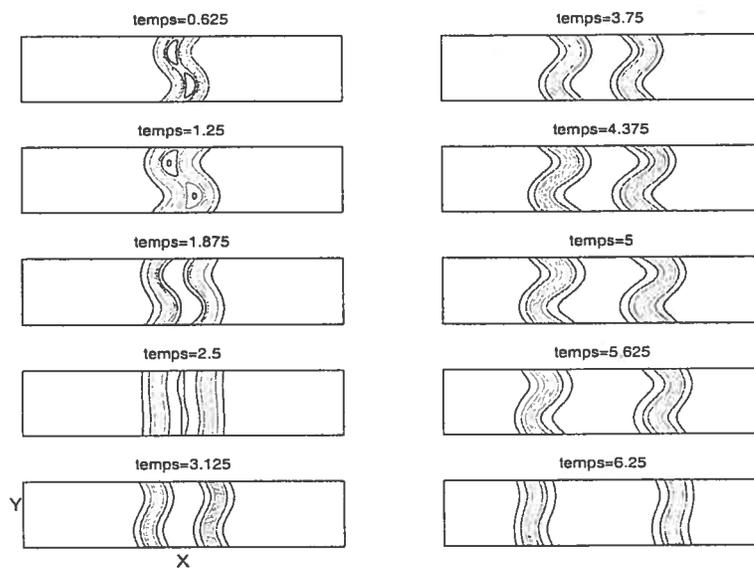


FIG. 3.3.25. Évolution des contours de la température pour $\omega = \frac{\pi}{4}$

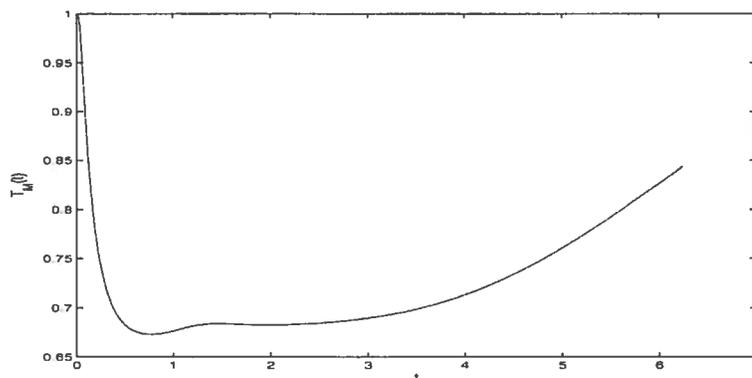


FIG. 3.3.26. Courbe de la température maximale pour $\omega = 0$

3.3.6. Cas 6 : $\omega = 0$

Ici, la fréquence est nulle, c'est donc le cas stationnaire. Cela explique qu'on ne remarque aucune oscillation sur les courbes de la vitesse et de la température maximale. La température maximale décroît jusqu'à un minimum, ensuite se stabilise et enfin croît vers une tendance asymptotique (pour des temps beaucoup plus grands que ceux représentés sur la figure).

Sur la courbe de la vitesse, les processus d'advection, diffusion et réaction atteignent un équilibre et il s'en suit une croissance vers une valeur asymptotique (pas illustrée). La solution pour le champ de température présente une structure assez différente de celles observées pour les cas instationnaires. On observe une zone de température relativement froide au centre du domaine. On peut expliquer cela en regardant attentivement ce qui se passe entre le temps $t = 0.625$ et le temps $t = 1.25$ dans la figure 3.3.29. On voit que le cisaillement persistant provoque la rupture de la flamme en deux poches, avec des fronts chauds encadrant une zone de température intermédiaire. Il serait intéressant de faire des simulations plus longues pour observer ce qu'il advient de cette zone, mais on pourrait penser que, dû à la réaction, la température y remonte éventuellement à 1. Ce mécanisme semble très différent de ce qui a été analysé théoriquement dans [1].

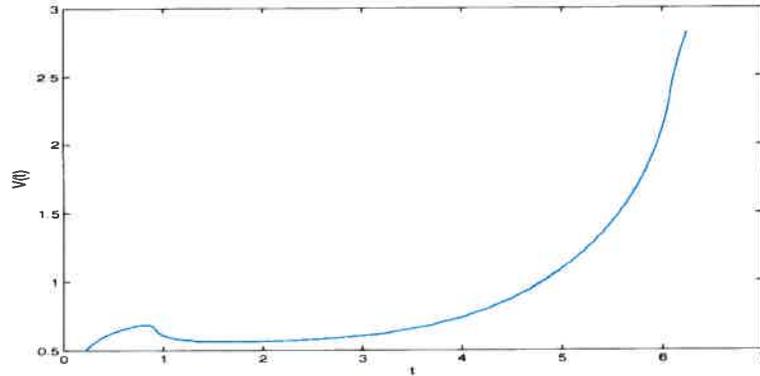


FIG. 3.3.27. Courbe de la vitesse de propagation pour $\omega = 0$

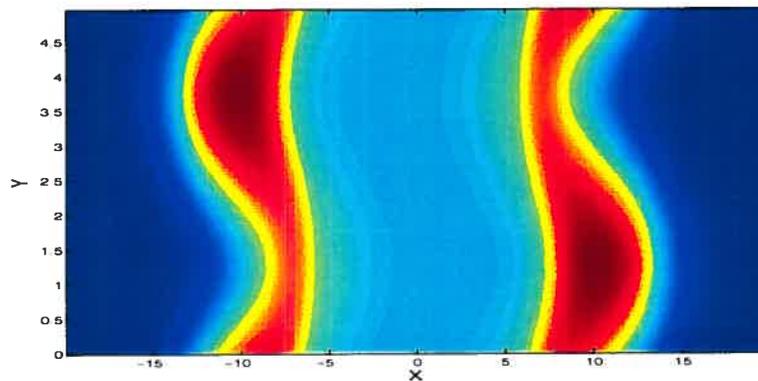


FIG. 3.3.28. Température à l'instant $t = 6.25$ pour $\omega = 0$

3.3.7. Etude de la taille critique du support initial en fonction de la fréquence du cisaillement

Les figures 3.3.31 et 3.3.32 ainsi que le tableau 3.3.1 constituent le résultat principal de ce travail. On y trouve la taille critique du support des données initiales en fonction de la fréquence du cisaillement. Les paramètres physiques sont ceux spécifiés précédemment : $A = 3$, $\theta = 0.5$, $P = 5$. La figure 3.3.32 utilise les mêmes données que la figure 3.3.31, mais une échelle logarithmique est utilisée pour les abscisses pour mieux visualiser le comportement pour les petites fréquences. Le tableau rapporte les résultats obtenus avec les deux raffinements de maillage $h = 0.1$ et $h = 0.05$, on voit un bon accord qualitatif entre les deux colonnes. (Les figures utilisent uniquement les résultats obtenus avec $h = 0.05$.) On observe donc une transition entre deux régimes :

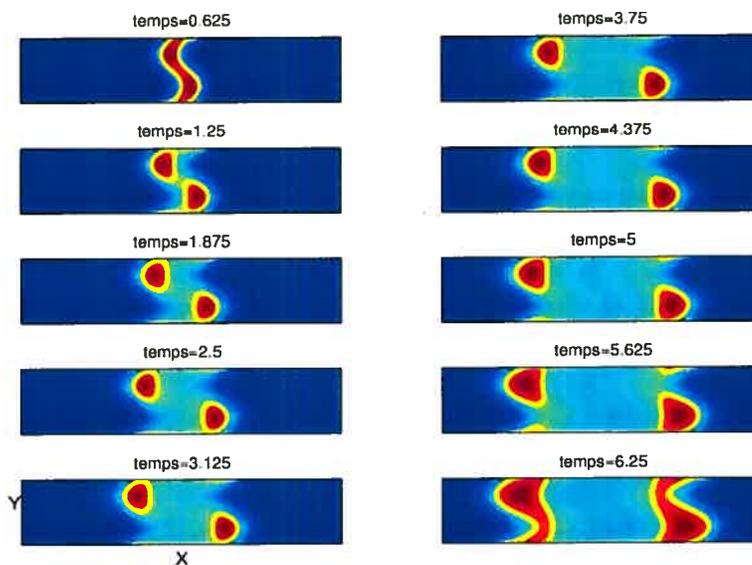


FIG. 3.3.29. Évolution de la température pour $\omega = 0$

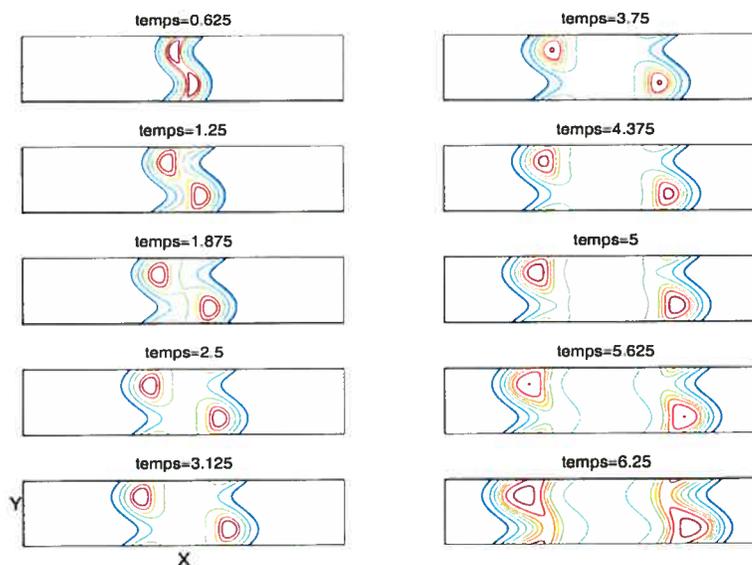


FIG. 3.3.30. Évolution des contours de la température pour $\omega = 0$

- Pour les valeurs $0 \leq \omega \leq \pi/3$, la taille critique est celle du cas stationnaire $w = 0.65$. Il s'agit du régime lent, les oscillations sont suffisamment lentes pour que, en ce qui concerne la taille critique, tout se passe comme si le cisaillement était stationnaire.
- Pour les valeurs $\omega > 2\pi$, la taille critique est celle du cas laminaire $w = 0.45$. Il s'agit du régime rapide, les oscillations sont tellement rapides que en ce

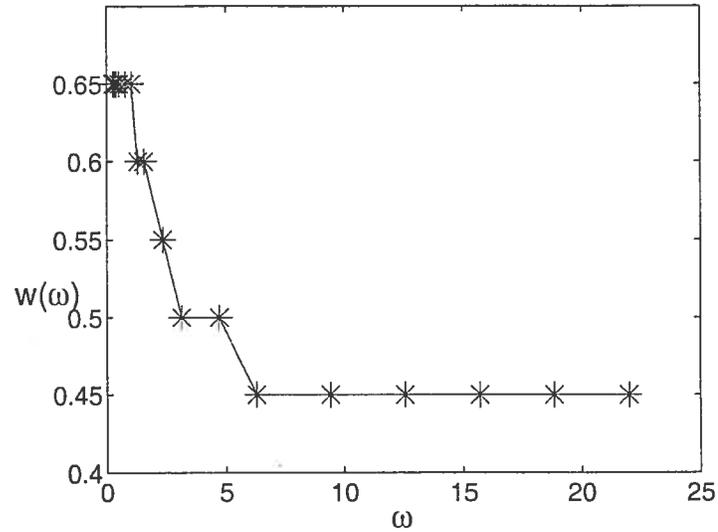


FIG. 3.3.31. Graphique illustrant l'évolution de la taille minimale en fonction de la fréquence ω pour $h = 0.05$

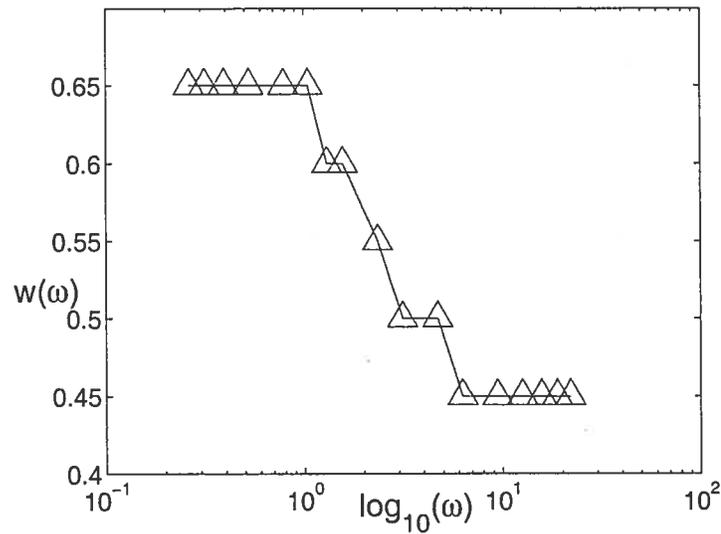


FIG. 3.3.32. Graphique illustrant l'évolution de la taille minimale en fonction de $\log_{10}(\omega)$ pour $h = 0.05$

qui concerne la taille critique, tout se passe comme si il n'y avait pas de cisaillement.

– Entre ces deux régimes, il y a une transition progressive.

ω	$h = 0.1$	$h = 0.05$
7π	0.4-0.5	0.40-0.45
6π	0.4-0.5	0.40-0.45
5π	0.4-0.5	0.40-0.45
4π	0.4-0.5	0.40-0.45
3π	0.4-0.5	0.40-0.45
2π	0.4-0.5	0.40-0.45
$\frac{3\pi}{2}$	0.4-0.5	0.45-0.50
π	0.4-0.5	0.45-0.50
$\frac{3\pi}{4}$	0.4-0.5	0.50-0.55
$\frac{\pi}{2}$	0.5-0.6	0.55-0.60
$\frac{5\pi}{12}$	0.5-0.6	0.55-0.60
$\frac{\pi}{3}$	0.5-0.6	0.60-0.65
$\frac{\pi}{4}$	0.5-0.6	0.60-0.65
$\frac{\pi}{6}$	0.5-0.6	0.60-0.65
$\frac{\pi}{8}$	0.6-0.7	0.60-0.65
$\frac{\pi}{10}$	0.6-0.7	0.60-0.65
$\frac{\pi}{12}$	0.6-0.7	0.60-0.65

TAB. 3.3.1. Taille minimale en fonction de la fréquence ω

3.4. CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la question des effets instationnaires du cisaillement sur l'allumage.

Quelques concepts clés ont été abordés, suivis d'un rappel de certains résultats théoriques dans le contexte du cisaillement stationnaire. Là, on peut retenir qu'un cisaillement trop intense conduit à l'extinction si le support de la condition initiale n'est pas assez grand. Ce travail a nécessité la mise au point et la validation d'un code qui a été l'outil de base pour l'étude des phénomènes d'extinction et d'allumage ; d'abord dans le contexte laminaire et ensuite stationnaire et instationnaire. Par les prédictions théoriques dans le cas laminaire, il a été établi quelques résultats sur la vitesse et l'épaisseur de flamme. Ces résultats ont été en conformité

avec les résultats des tests numériques effectués dans le cadre de cette validation. De même, dans le cadre de la validation dans le cas stationnaire, quelques résultats ont été obtenus en conformité avec les prédictions théoriques. Le passage au cas instationnaire a nécessité de se fixer à une valeur du seuil qui était très peu sensible et à une valeur de l'intensité qui produit une valeur de la taille du support très supérieure à celle du cas laminaire. Les expériences ont montré que pour des valeurs très grandes de la fréquence du cisaillement, les résultats sur la taille du support étaient très peu différents de ceux du cas laminaire.

En effet, la combustion capte mal les oscillations du cisaillement et l'on observe alors une flamme plane ; tandis que la vitesse converge vers la valeur asymptotique laminaire. Inversement, les valeurs très petites de la fréquence produisent des résultats identiques à ceux du cas stationnaire pour la taille minimale du support. En effet, les oscillations sont très lentes et sont bien captées par la flamme. Pour les valeurs de la fréquence se trouvant dans la zone de transition, l'on observe des oscillations sur la solution, la vitesse et la température maximale.

Le travail présenté ici suscite plusieurs questions qu'il serait intéressant de poursuivre. Par exemple,

- réaliser une étude paramétrique $w(A, \theta, \omega)$ plus exhaustive, pour analyser et expliquer quantitativement la dépendance de la taille critique par rapport aux paramètres du cisaillement ;
- expliquer la dépendance de la vitesse de propagation en fonction des caractéristiques du cisaillement ;
- généraliser à d'autres formes de champs de vitesse dépendant du temps.

Le code optimisé qui a été développé dans le contexte du présent travail pourrait être très utile pour répondre à ces questions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.CONSTANTIN, A.KISELEV, AND L.RYZHIK, *Quenching of flames by fluid advection*, Communications on pure and applied mathematics, **LIV** (2001), 1320-1342.
- [2] N.VLADIMIROVA, P.CONSTANTIN, A.KISELEV, O.RUCHAYSKIY, AND L.RYZHIK, *Flame Enhancement and Quenching in Fluid Flows*, Combustion Theory Modelling, **7** (2003), 487-508.
- [3] B.KHOUIDER, A.BOURLIOUX, AND A.J.MAJDA, *Parametrizing the burning speed enhancement by small-scale periodic flows : I.Unsteady shears, flame residence time and bending*, Combustion Theory Modelling **5** (2001), 295-318.
- [4] R.J.LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press (2002).