

Université de Montréal

**Graphe et Jeu de Poursuite
Policiers et Voleurs Sous Contraintes**

par
Sif El Islam El Harti

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en informatique

Avril, 2006

© Sif El Islam El Harti, 2006.



QA

76

US4

2006

V.047

1005 1011

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Graphe et Jeu de Poursuite
Policiers et Voleurs Sous Contraintes**

présenté par:

Sif El Islam El Harti

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Alain Tapp
président-rapporteur

Geña Hahn
directeur de recherche

Stefan Monnier
membre du jury

Mémoire accepté le 15 Septembre 2006

RÉSUMÉ

Le jeu de poursuite d'un voleur par un policier sur un graphe, dans sa version classique, a au moins trois caractérisations pour les graphes policier-gagnant. Dans cette recherche nous proposons une généralisation du jeu à deux équipes au lieu de deux joueurs en leur imposant des contraintes à respecter lors de leurs déplacements. Nous donnons aussi une caractérisation de graphes policier-gagnant sous contrainte.

Mots clés : graphe, jeu de poursuite, jeu sous contrainte, policier voleur, vecteur degré.

ABSTRACT

The pursuit game of a robber by a cop on a graph, in its classical version, has at least three characterizations for cop-win graphs. In this document we propose a generalization of the game to two teams instead of two players. Each team has a constraint to respect during the game. We give also a characterization of constrained cop-win graphs.

Keywords: graph, evasion game, constrained game, cop and robber game, Degree Vector.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	viii
NOTATION	xi
DÉDICACE	xiii
REMERCIEMENTS	xiv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : LES GRAPHES	6
1.1 Exemples	6
1.2 Définitions et rappels	6
1.3 Homomorphisme et isomorphisme	13
1.4 Sous-graphe et rétracte	14
1.5 Produit de graphes	16
1.6 Matrice d'adjacence	17
CHAPITRE 2 : VECTEUR DEGRÉ	19
2.1 Exemple	19

2.2	Définition	20
2.3	Séquence graphique	22
2.4	Concepts relatifs au vecteur degré	23
2.5	Vecteur degré du graphe complément	25
2.6	Vecteurs degré de deux graphes	25
2.7	Vecteur degré et isomorphisme	29
CHAPITRE 3 : JEU CLASSIQUE		31
3.1	Exemple	31
3.2	Définition du jeu de poursuite	32
3.3	Caractérisation des graphes policier-gagnant	36
3.3.1	Ordre Trivial	36
3.3.2	Dominance	41
CHAPITRE 4 : TANDEM		48
4.1	Exemple	48
4.2	Principaux Résultats	49
CHAPITRE 5 : JEU DE POURSUITE SOUS CONTRAINTE		52
5.1	Exemple	52
5.2	Définition du jeu	53
5.3	Concepts relatifs au jeu sous contrainte	54
5.3.1	Contrainte et C -formation	54
5.3.2	Graphe de C -formations	57
5.3.3	Exemples	58

5.3.4 Isomorphisme	59
5.4 Caractérisation des graphes C-policier-gagnant	61
CONCLUSION	66
BIBLIOGRAPHIE	70

LISTE DES FIGURES

1	Digramme de classification des variantes du jeu de poursuite.	4
1.1	G : graphe d'ordre 4	8
1.2	G : graphe d'ordre 2 avec boucle	8
1.3	K_5 : graphe complet	9
1.4	G : graphe, \overline{G} : complément de G	9
1.5	voisinage : $N(c) = \{a, b, d\}$	10
1.6	G : graphe régulier de degré 4	12
1.7	G et H : graphes isomorphes	14
1.8	G : graphe, H : sous-graphe de G	15
1.9	G : graphe, H : sous-graphe couvrant de G	15
1.10	G : graphe, H : rétracte de G	16
1.11	G : matrice d'adjacence	17
2.1	G : graphe - vecteur degré	19
2.2	G : graphe, \overline{G} : complément de G	25
2.3	G : graphe - contre exemple isomorphisme	29
2.4	H : graphe - contre exemple isomorphisme	30
3.1	G : graphe jeu classique	31
4.1	G : graphe (tandem)	48
5.1	G : graphe (C -formation)	56

5.2	G : graphe (distance 1)	58
5.3	\tilde{G}_C : graphe de C -formations (distance 1)	59
5.4	G : graphe (distance 2)	59
5.5	\tilde{G} : graphe de C -formations (Distance 2)	59
5.6	G : graphe (isomorphisme)	60
5.7	\tilde{G}_C : graphe de C -formations (isomorphisme)	60
5.8	G : graphe (isomorphisme K_3)	60
5.9	\tilde{G}_C : graphe de C -formations (isomorphisme K_3)	61

NOTATION

- \mathcal{N} : Ensemble des entiers naturels
- \mathcal{R} : Ensemble des nombres réels
- $\max(a, b)$: Le plus grand entre a et b
- $\min(a, b)$: Le plus petit entre a et b
- 2^V : Ensemble de parties d'un ensemble V
- $\binom{V}{p}$: Ensemble de parties de taille p d'un ensemble V
- $\binom{n}{p}$: Coefficient binomial de p parmi n
- $A \setminus B$: Ensemble d'éléments appartenant à A mais pas à B
- $A \times B$: Produit cartésien de l'ensemble A par l'ensemble B
- A^2 : Produit cartésien de A par lui même $A \times A$
- $|A|$: Cardinalité d'un ensemble A
- id_A : Fonction identité sur un ensemble A
- $V(G)$: Ensemble de sommets d'un graphe G
- $E(G)$: Ensemble d'arêtes d'un graphe G
- $G(V, E)$: Graphe dont l'ensemble des sommets est V
et l'ensemble des arêtes est E
- $|G|$: Ordre d'un graphe G
- \overline{G} : Complément d'un graphe G
- $N(u)$: Voisinage ouvert d'un sommet u d'un graphe
- $N[u]$: Voisinage fermé d'un sommet u d'un graphe

- $deg(u)$: Degré d'un sommet u d'un graphe
 $[u, v]$: Arête entre deux sommets u et v d'un graphe
 K_n : Graphe complet d'ordre n
 R_k : Graphe k -régulier de degré k
 $G(A)$: Sous graphe induit par les sommets dans A , $A \subseteq V(G)$
 $G \simeq H$: Graphes G et H isomorphes
 NC_k : Contrainte nulle d'ordre k
 FC_k : Contrainte totale d'ordre k
 $\tilde{G}_C(\tilde{V}_C, \tilde{E}_C)$: Graphe de C -formations dual de $G(V, E)$ relatif à la contrainte C .
 \tilde{V}_C : Ensemble des C -formations relatif à V
(étant donné un graphe $G(V, E)$ et une contrainte C).
 \tilde{E}_C : Ensemble des arêtes entre des C -formations relatif à E
(étant donné un graphe $G(V, E)$ et une contrainte C).
 $vd(G)$: Vecteur degré d'un graphe G
 $cd_i(G)$: Classe degré i , ensemble des sommets de degré i d'un graphe G
 $cd(G)$: Ensemble des classes degré d'un graphe G

A ma chère famille...

Et à toute personne pour qui la vie n'est qu'un jeu !

REMERCIEMENTS

Je ne remercierais pas assez toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce travail. Je cite en premier lieu mon directeur de recherche le Professeur Geña Hahn qui n'a pas épargné le moindre effort pour me prodiguer directives, orientation, soutien technique et logistique mais surtout moral pour venir à bout de ce travail. Je lui dois au moins le témoignage que c'est une personne de grande patience et d'assez large ouverture d'esprit. Ma petite et grande famille m'ont grandement épaulé. Ils ont même sacrifié des moments précieux pour cette fin.

Je remercie MITACS qui m'a soutenu financièrement et m'a permis de participer à un groupe de travail sur mon sujet de recherche à Régina Saskatchewan. Lors de ce voyage, j'ai eu l'honneur et le plaisir de faire la rencontre de personnalités de renommé qui s'intéressent au jeu de poursuite. Je cite Brian Alspach, Denis Hanson, Xiangwen Li et Boting Yang et leur groupe d'étudiants. Je les remercie pour leur accueil chaleureux, et pour toutes les interactions fructueuses que nous avons eu.

Je n'oublierais sûrement pas de remercier Tantely Ramanampanoharana, mon compagnon de séjour à Régina et Jeanne MacDonald qui nous a hébergés dans une ambiance familiale.

INTRODUCTION

Marqués par les scènes des films et même parfois des scènes réelles, la première image qui nous vient à l'esprit sur le mot poursuite est une patrouille de police qui essaie d'arrêter un malfaiteur en fuite.

Dans une optique plus large, moins influencée par Hollywood, la poursuite est un jeu que nous jouons tous au quotidien chaque fois que nous planifions et espérons qu'un évènement se produise à un lieu donné et à un moment donné. Prendre un train, par exemple, serait une poursuite où le poursuivi, ici le train, a des horaires et un itinéraire bien connus. Cette poursuite serait plus vraisemblable dans le cas où on rate le train à la station la plus proche et on essaie de le rattraper à la station suivante. La nature, non plus, ne manque pas ce jeu de fuite et de poursuite pour la survie. Ceci nous rappelle les safaris : Un troupeau de gazelles au bord du petit ruisseau entrain d'étancher sa soif et un léopard guetteur. Au bout d'un moment d'observation, le temps de choisir sa proie et de mettre au point sa stratégie, le carnivore passe à l'attaque.

Mais la poursuite est encore plus étendue. Si nous revenons à notre exemple du policier qui poursuit un voleur, nous remarquons que le policier doit commencer par savoir où est le voleur avant de pouvoir l'attraper. Cette information est précieuse et peut faire une très grande différence. Ainsi, allons nous distinguer entre chercher un voleur et attraper un voleur, même si en pratique l'interaction entre ces deux opérations est très forte. La situation peut basculer de l'un des deux modes à l'autre à tout moment, et ne se termine que si le policier tient le voleur dans ses mains

ou finit par abandonner ! En laissant au lecteur l'embarras du choix des raisons, mission impossible, affaire trop coûteuse, un supérieur corrompu et plein d'autres.

Parfois, ou plutôt souvent, les policiers travaillent en équipe, mis à part le cas des chasseurs de prime qui disent toujours, d'une voix grave : "Moi, je travaille seul!". Les membres d'une équipe ont généralement un code à suivre qui les contraint à respecter des règles prédéfinies afin d'assurer une meilleure collaboration voire même pour leur éviter des situations dangereuses. Il en est de même pour une organisation de malfaiteurs.

Pour les mathématiciens, le problème de poursuite est un jeu ! Ceci dit, ils ne cessent de développer de nouvelles techniques et modèles pour savoir dans quel cas le policier pourrait gagner la partie.

Un modèle assez fructueux se sert d'un graphe comme terrain de jeu où les joueurs se déplacent sur les arêtes et s'arrêtent sur les sommets à tour de rôle. Il peut s'agir d'un ou plusieurs policiers à la poursuite d'un ou plusieurs voleurs.

Différentes variantes basées sur ce modèle ont été élaborées dont nous citons le jeu classique d'un policier qui poursuit un voleur sur un graphe fini réflexif [15, 16], le jeu d'un tandem de policiers qui s'entraident pour attraper un voleur sur ce même type de graphe [7, 9]. Une autre variante consiste à jouer sur un graphe infini. Encore une autre variante dans cette liste non exhaustive consiste à chercher un voleur sur un graphe fini réflexif [2].

Remarquons que deux éléments principaux font la distinction entre les variantes du jeu :

- La quantité d'information disponible aux joueurs ;

- Les contraintes imposées aux joueurs ;

Nous proposons une classification des variantes du jeu de poursuite suivant ces deux éléments. Ainsi, nous avons les trois catégories suivantes basées sur le partage d'information entre les joueurs.

- Partage d'information total : variante classique du jeu où les joueurs connaissent mutuellement leurs positions.
- Partage d'information partiel : variante où les joueurs ne peuvent se voir que s'ils sont à une distance minimale donnée supérieure à 1.
- Aucun partage d'information : variante où les joueurs n'ont absolument aucune information les uns sur les autres.

Pour chacune de ces catégories, nous distinguons les deux classes suivantes :

- jeu sous contrainte
- jeu sans contrainte

Le diagramme de la figure 1 donne une synthèse de ces variantes et classes. Actuellement, chacune de ces catégories ou classes est étudiée séparément sans être nécessairement mise dans le contexte défini ci-dessus.

Une ambition naturelle serait de trouver un modèle qui synthétise tous ces cas de figures. Remarquons, tout de même, que le jeu sans contrainte pourrait être vu comme un cas particulier du jeu sous contrainte où la contrainte serait nulle (chapitre jeu sous contrainte). D'autre part, le partage d'information partiel pourrait être exprimé de telle façon que les catégories Aucun partage d'information et Partage d'information total ne soient que des cas particuliers de celui-ci.

Dans ce qui suit nous allons surtout nous intéresser au jeu sous contrainte avec

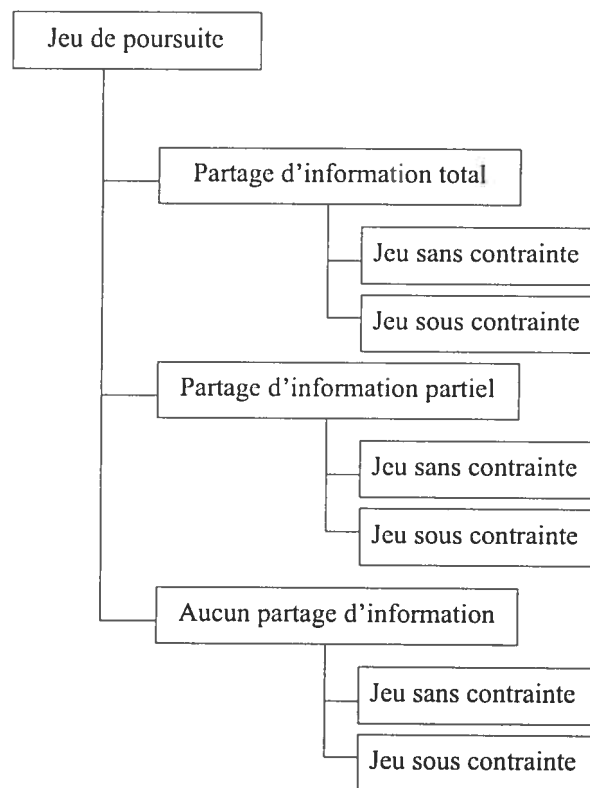


FIG. 1 – Digramme de classification des variantes du jeu de poursuite.

Partage d'information total. Nous allons d'abord nous rappeler quelques concepts de base sur la théorie des graphes dans le chapitre 1. Les chapitres 3 et 4 rassemblent une partie des travaux antérieurs sur le jeu de poursuite. Dans le chapitre 2, nous définissons de nouveaux concepts tels le vecteur degré pour une nouvelle approche d'analyse de la poursuite sous contrainte, mais malheureusement ceci est resté sans issue. C'est dans le chapitre 5 que se trouve notre plus importante contribution à propos du jeu sous contrainte.

CHAPITRE 1

LES GRAPHERS

1.1 Exemples

Les graphes sont presque partout. Les chemins de fer, les autoroutes, les conduites d'eau et même l'infiniment grand et l'infiniment petit, les galaxies et les molécules, n'y échappent pas. Tous ces mondes aussi diversifiés qu'ils soient et beaucoup d'autres trouveront modèle dans la théorie des graphes. Cependant, les ingrédients de base sont très simples : des noeuds et des arêtes.

Une carte ou un plan de métro, est un bon exemple d'un graphe simple où les stations représentent les sommets du graphe et les lignes entre les stations les arêtes de celui-ci.

Une carte routière est aussi un bon exemple mais d'un graphe plus complexe. Les villes sont des sommets et les routes entre celles-ci sont des arêtes. Remarquons qu'on peut avoir plus d'une seule route qui relie deux villes, c'est un multigraphe !

Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques définitions nécessaires pour la suite de notre recherche, mais qui sont loin de couvrir ce sujet. Le lecteur trouvera plus de définitions dans [5, 14, 23, 24].

1.2 Définitions et rappels

On appelle **graphe simple**, ou juste **graphe**, noté $G(V, E)$, une paire d'ensembles (V, E) , où V est un ensemble d'éléments qu'on appelle des **sommets** ou

noeuds du graphe et E est un ensemble d'**arêtes**, reliant ces sommets, sous ensemble de l'ensemble des paires non ordonnées d'éléments de V . On note une arête entre les sommets u et v $\{u, v\}$ et parfois on étend la définition d'une arête aux paires $[u, u]$; on appelle de telles arêtes des **boucles**.

On utilise également $V(G)$, $E(G)$ pour désigner les sommets et les arêtes, respectivement, d'un graphe G , ce qui est très utile dans le cas de manipulation de plusieurs graphes.

Le nombre de sommets du graphe, noté $|G| = |V(G)|$, est appelé l'**ordre** du graphe.

Si toutes les boucles possibles sur V appartiennent à E , le graphe est dit **réflexif** ou **avec boucle**.

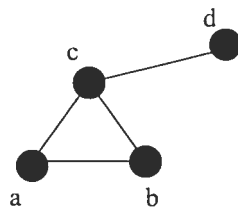
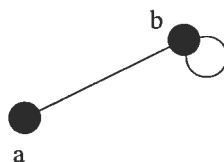
Si le graphe ne contient aucune boucle, on dit que le graphe est **irréflexif** ou **sans boucle**.

Parfois il est intéressant d'ajouter aux arêtes du graphe une pondération. Le meilleur exemple est le graphe des villes où la pondération de l'arête entre deux villes serait la distance entre celles-ci.

Une **pondération** du graphe G est une application P de l'ensemble des arêtes vers un groupe tel $(\mathcal{N}, 0, +)$ ensemble des entiers ou $(\mathcal{R}, 0, +)$ ensemble des réels, munis d'un ordre total \leq . Le graphe G est dit **pondéré** par P et il est noté $G(V, E, P)$.

Observation 1.2.1. *Tout graphe simple est un graphe pondéré où l'application de pondération est une constante, en général égale à 1.*

Schématiquement, un graphe est représenté par des points (les sommets) et des

FIG. 1.1 – G : graphe d'ordre 4FIG. 1.2 – G : graphe d'ordre 2 avec boucle

lignes reliant ces sommets (les arêtes). (voir exemples fig. 1.1 et fig. 1.2)

Le graphe est dit **complet** si entre deux sommets quelconques, non nécessairement distincts, il y a une arête. Un tel graphe est noté K_n où n est l'ordre du graphe. (voir exemple K_5 fig. 1.3)

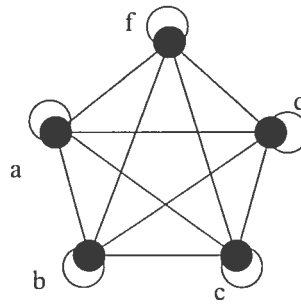
Notons que notre appellation est non standard puisque nous considérons que K_n contient toutes les boucles.

Observation 1.2.2. *Tout graphe complet est réflexif.*

Observation 1.2.3. *Le nombre d'arêtes de K_n , $|E(K_n)|$, est égale à $\binom{n+1}{2}$.*

Le graphe **complémentaire** de G , noté \overline{G} , est le graphe construit à partir des mêmes sommets que G et de toutes les arêtes définies dans K_n et pas dans G . (voir exemples fig. 1.4). On a alors $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = E(K_n) \setminus E(G)$.

Observation 1.2.4. *Si G est réflexif alors le graphe \overline{G} ne contient aucune boucle.*

FIG. 1.3 – K_5 : graphe completFIG. 1.4 – G : graphe, \overline{G} : complément de G

Le graphe complémentaire du graphe complet K_n , noté $\overline{K_n}$, qui ne contient que des sommets sans aucune arête, est appelé **graphe vide**.

Deux sommets u, v du graphe sont **adjacents** si $[u, v] \in E$.

Deux arêtes $[u, v], [w, z]$ sont **incidentes** si elles ont un sommet en commun.

Autrement dit $\{u, v\} \cap \{w, z\} \neq \emptyset$

L'ensemble des sommets adjacents à un sommet u est appelé **voisinage** de u ou **voisinage ouvert** de u . Il est noté $N_G(u)$ ou juste $N(u)$.

$$N(u) = \{v \in V : [u, v] \in E\}$$

Le **voisinage fermé** de u , noté $N[u]$, est égal au voisinage ouvert de u auquel on ajoute le singleton $\{u\}$.

$$N[u] = N(u) \cup \{u\}$$

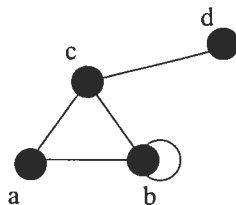


FIG. 1.5 – voisinage : $N(c) = \{a, b, d\}$

Observation 1.2.5. *Pour un graphe réflexif, le voisinage ouvert et le voisinage fermé sont confondus.*

Exemple Soit le graphe $G(V, E)$ (voir fig.1.5), on a les voisinages suivants :

$$N(a) = \{b, c\}, N[a] = \{a, b, c\}$$

$$N(b) = \{a, b, c\}, N[b] = \{a, b, c\}$$

$$N(c) = \{a, b, d\}, N[c] = \{a, b, c, d\}$$

Le **degré** d'un sommet u d'un graphe G , noté $deg_G(u)$ ou juste $deg(u)$ s'il n'y pas d'ambiguïté, est le nombre d'extrémités d'arêtes connectées à ce sommet. Notons que chaque arête a deux extrémités donc une boucle sur un sommet compte pour deux dans le degré de celui-ci.

Observation 1.2.6. *La somme des degrés de tous les sommets du graphe est égale à deux fois le nombre des arêtes du graphe.*

$$\sum_{u \in V} deg(u) = 2 * |E(G)|$$

Démonstration. Soit $[u, v]$ une arête de G .

Si $u \neq v$ alors cette arête est comptée deux fois dans la somme des degrés des sommets du graphe. Une fois dans le degré de u et une autre fois dans le degré de v .

Si $u = v$ l'arête est une boucle et elle est comptée deux fois dans le degré de u .

Donc la somme des degrés compte chaque arête, boucle ou non, deux fois. \square

Observation 1.2.7. Pour un sommet u de G ,

- si u est sans boucle alors $\deg(u) = |N(u)|$,
- si u est avec une boucle alors $\deg(u) = |N(u)| + 1$.

Observation 1.2.8. Dans un graphe complet K_n tout sommet est de degré $n + 1$.

Observation 1.2.9. Pour un sommet u de G , $N_{\overline{G}}(u) = V(G) \setminus N_G(u)$.

Observation 1.2.10. Le degré d'un sommet u dans le graphe complémentaire d'un graphe G d'ordre n est égale à $n + 1 - \deg(u)$.

$$\deg_{\overline{G}}(u) = n + 1 - \deg_G(u).$$

Démonstration. Pour un sommet u de G , si u a une boucle dans G alors il n'a pas de boucle dans \overline{G} et vis versa. i.e. un 1 sera ajouté ou bien à $|N_G(u)|$ ou bien à $|N_{\overline{G}}(u)|$ pour compter la boucle : $\deg_G(u) + \deg_{\overline{G}}(u) = |N_G(u)| + |N_{\overline{G}}(u)| + 1$.

Or le voisinage de u dans \overline{G} est le complément dans $V(G)$ du voisinage de u dans G alors $|N_{\overline{G}}(u)| = |V(G)| - |N_G(u)|$.

$$\text{Donc : } \deg_G(u) + \deg_{\overline{G}}(u) = |V(G)| + 1 = n + 1.$$

$$\text{d'où : } \deg_{\overline{G}}(u) = n + 1 - \deg_G(u). \quad \square$$

Un graphe G est dit **régulier** de degré k si tous ses sommets sont de degré k .

Un tel graphe est aussi dit **k-régulier** et est noté R_k (voir fig.1.6).

Soient u et v deux sommets différents du graphe G . Le sommet v **domine** u si $N[u] \subseteq N[v]$. On dit aussi que u est **irréductible**. Notons qu'il s'agit de voisinages fermés.

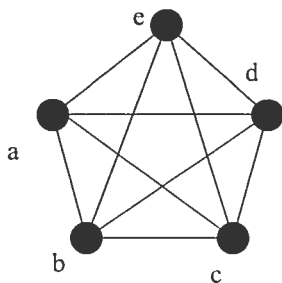


FIG. 1.6 – G : graphe régulier de degré 4

Le sommet u est dit **quasi-irréductible** s'il existe un sommet v de G tel que $N(u) \subseteq N(v)$. Notons qu'il s'agit de voisinages ouverts et que le sommet u n'est pas nécessairement adjacent à v , ce qui est obligatoire dans le cas irréductible.

Une **chaîne** d'un graphe G est une suite des sommets de G , noté, $u_0 \dots u_p$, où p est un entier naturel, telle que $\forall 0 \leq i < p, [u_i, u_{i+1}] \in E$. On dit que cette chaîne est entre u_0 et u_p .

L'entier p est appelé **longueur** de la chaîne, et est noté $L(u_0 \dots u_p)$. Il représente le nombre d'arêtes reliant les sommets de la chaîne.

Dans le cas de graphe pondéré $G(V, E, P)$, le **poids d'une chaîne** $u_0 \dots u_p$, réputé souvent comme sa longueur, est la somme des pondérations sur toutes les arêtes reliant les sommets de la chaîne.

$$\text{Si } p \neq 0 : L(u_0 u_1 \dots u_p) = \sum_{i=0}^{p-1} P([u_i, u_{i+1}])$$

$$\text{Si } p = 0 : L(u_0) = 0$$

Une chaîne C entre u et v est **minimale** si $L(C) \leq L(C')$ pour toute chaîne C' entre u et v .

La **distance** entre deux sommets u et v du graphe est la longueur d'une chaîne minimale reliant ces sommets.

Si le premier et le dernier sommets d'une chaîne $u_0 \dots u_p$ sont égaux et tous les autres éléments de la chaîne sont différents de ceux-ci, cette chaîne est dite **cycle élémentaire ou simple**, et elle est notée $u_0 \dots u_{p-1} u_0$.

On dit qu'un cycle $u_0 \dots u_{p-1} u_0$ possède une **corde** s'ils existent i, j avec $j + 1 \leq i \pmod{|G|}$ tels que $[u_i, u_j] \in E(G)$.

Ainsi, un cycle de longueur 3 n'a pas de corde, un cycle de longueur 4 peut avoir entre 0 et 3 cordes.

Si entre deux sommets quelconques d'un graphe il existe une chaîne qui les relie, le graphe est dit **connexe**, dans le cas contraire, le graphe est dit **non-connexe**.

Si un graphe sans cycle est connexe il est appelé **arbre**.

Un graphe G est dit à **corde** si tout cycle de longueur ≥ 4 possède une corde. Plusieurs autres noms sont utilisés dans la littérature pour désigner un graphe à corde tels que : graphe **monotone transitif**, graphe **triangulé**.

1.3 Homomorphisme et isomorphisme

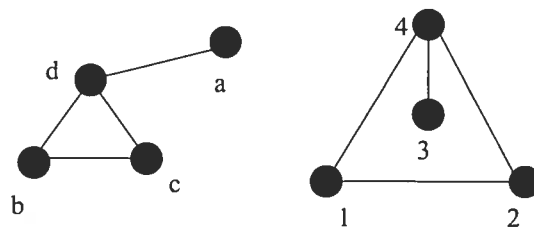
Soient G et H deux graphes. Soit h une application définie de $V(G)$ vers $V(H)$.

$$h : V(G) \rightarrow V(H).$$

L'application h est dite un **homomorphisme** si :

$$- \forall (u, v) \in V(G)^2, [u, v] \in E(G) \Rightarrow [h(u), h(v)] \in E(H)$$

L'application h est dite un **isomorphisme** si :

FIG. 1.7 – G et H : graphes isomorphes

- h est bijective
- $\forall (u, v) \in V(G)^2, [u, v] \in E(G) \Leftrightarrow [h(u), h(v)] \in E(H)$

Les graphes G et H de la figure 1.7 sont isomorphes en considérant l'homomorphisme h telle que :

$$- h(a) = 3, h(b) = 1, h(c) = 2, h(d) = 4.$$

1.4 Sous-graphe et rétracte

Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe H tel que :

- $V(H) \subseteq V(G)$
- $E(H) = \{[u, v] \in E(G) : u, v \in V(H)\}$

C'est le graphe défini à partir d'un sous ensemble de sommets et de toutes les arêtes du graphe engendrées par ce sous ensemble. Si $A = V(H)$, on peut noter le sous-graphe $G|A$ ou $G\langle A \rangle$.

Le graphe H est un sous graphe de G induit par $A = \{a, b\}$ (voir fig. 1.8).

Un **sous graphe couvrant** d'un graphe G est un graphe H tel que :

- $V(H) = V(G)$
- $E(H) \subseteq E(G)$

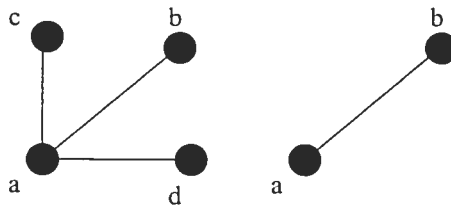


FIG. 1.8 – G : graphe, H : sous-graphe de G

C'est le graphe défini à partir de tous les sommets du graphe et d'un sous ensemble les arêtes du graphe. (voir fig. 1.9)

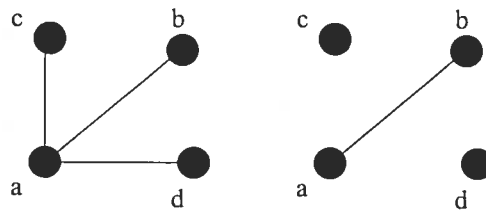
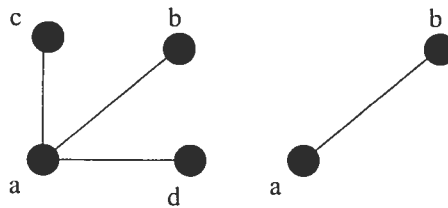


FIG. 1.9 – G : graphe, H : sous-graphe couvrant de G

Un **Rétracte** d'un graphe G est un sous-graphe H de G tel qu'il existe un homomorphisme h de G vers H égal à l'identité sur $V(H)$. L'homomorphisme h est dit **rétraction**.

le graphe H est un rétracte de G (voir fig. 1.10), en considérant la rétraction h telle que :

- $h(a) = a, h(b) = b.$
- $h(c) = b, h(d) = b.$

FIG. 1.10 – G : graphe, H : rétracte de G

1.5 Produit de graphes

Il est parfois utile de composer des graphes pour construire de nouveaux graphes ou réciproquement être capable de formuler un graphe complexe comme composition de graphes plus simples. Ci-dessous, nous exposons trois produits de graphes, le produit cartésien, produit catégorique et le produit complet [26].

Le **produit carré** ou **cartésien** de deux graphes G et H , noté \square , est le graphe $G \square H$ avec :

- $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G \square H) = [(u_1, v_1), (u_2, v_2)] : (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G) \times V(H),$
 $(u_1 = u_2 \text{ et } [v_1, v_2] \in E(H)) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } [u_1, u_2] \in E(G))\}$

Le **produit catégorique** de deux graphes G et H , noté \times , est le graphe $G \times H$ avec :

- $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G \times H) = \{[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] : (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G) \times V(H),$
 $[u_1, u_2] \in E(G) \text{ et } [v_1, v_2] \in E(H)\}$

Le **produit complet** de deux graphes G et H , noté \boxtimes , est le graphe $G \boxtimes H$ avec :

$$\begin{aligned}
 &= V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H) \\
 &= E(G \boxtimes H) = \{[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] : (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G) \times V(H), \\
 &\quad (u_1 = u_2 \text{ et } [v_1, v_2] \in E(H)) \text{ ou} \\
 &\quad (v_1 = v_2 \text{ et } [u_1, u_2] \in E(G)) \text{ ou} \\
 &\quad ([u_1, u_2] \in E(G) \text{ et } [v_1, v_2] \in E(H))\}
 \end{aligned}$$

1.6 Matrice d'adjacence

On appelle **matrice d'adjacence** du graphe $G(V, E)$, la matrice carrée, d'ordre $n = |G|$, $M(a_{ij})$ telle que :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, u_i, u_j \in V$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : [u_i, v_j] \in E \\ 0 & : [u_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

Soit le graphe $G(V, E)$, voir fig. 1.11, la matrice d'adjacence correspondante est la suivante : (voir matrice d'adjacence de G)

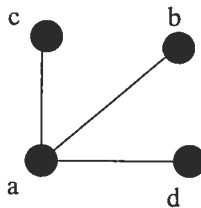


FIG. 1.11 – G : matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence de G

Voici quelques observations concernant la matrice d'adjacence.

Observation 1.6.1. *La matrice d'adjacence est symétrique.*

Observation 1.6.2. *Le nombre de chemins de longueur p entre les sommets u_i et u_j est égale à la valeur de l'entrée (i, j) de la matrice puissance p ième de la matrice d'adjacence.*

Observation 1.6.3. *Les matrices d'adjacence construites à partir des permutations de l'ordre des indices des sommets sont toutes égales, à une permutation près.*

Observation 1.6.4. *Deux graphes G et H sont isomorphes si leurs matrices d'adjacence sont égales, à une permutation près.*

Le chapitre suivant fait partie également des définitions reliées aux graphes. Nous y exposons le concept de vecteur degré et de séquence degré d'un graphe.

CHAPITRE 2

VECTEUR DEGRÉ

Dans le chapitre 5, nous allons voir le jeu de poursuite sous contrainte. Un aspect qui nous a intéressé lors de l'analyse de cette variante du jeu était la classification des contraintes. Malheureusement, cet aspect de notre étude n'est pas intégré au présent travail vu qu'il est resté sans issue. Toutefois, nous avons jugé utile d'ajouter ce chapitre, à titre de référence, pour décrire un outil conceptuel que nous avons défini pour cette fin de classification : le vecteur degré.

Par ailleurs, après l'avoir défini, nous avons trouvé dans la littérature une notion appelée séquence graphique équivalente au vecteur degré.

2.1 Exemple

Soit le graphe $G(V, E)$ (voir fig 2.1). Le graphe G a 8 sommets. Le graphe G a un degré maximal est 3.

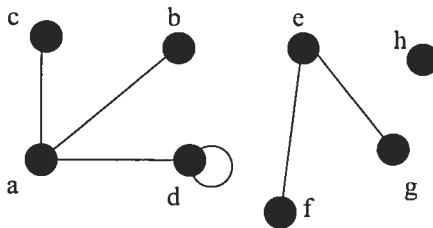


FIG. 2.1 – G : graphe - vecteur degré

Le degré maximal que peut avoir un graphe de 8 sommets est 9 (7 arêtes ad-

jacentes aux 7 autres sommets et 2 pour la boucle). Aussi, un sommet donné du graphe de 8 sommets a nécessairement une valeur comprise entre 0 et 9. Comptons alors ces sommets ayant le même degré.

Dans le cas de G , défini ci-dessus, les sommets sont répartis comme ceci :

- 1 sommet(s) de degré 0,
- 4 sommet(s) de degré 1,
- 1 sommet(s) de degré 2,
- 2 sommet(s) de degré 3
- 0 sommet(s) de degré 4,
- 0 sommet(s) de degré 5
- 0 sommet(s) de degré 6,
- 0 sommet(s) de degré 7
- 0 sommet(s) de degré 8,
- 0 sommet(s) de degré 9

Cette répartition peut être représentée par le vecteur de dimension 10 suivant :

$$(1, 4, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

2.2 Définition

Soit G un graphe d'ordre n . Nous appelons **vecteur degré** de G le vecteur de dimension $n + 2$ indexé de 0 à $n + 1$ où la i ème composante est égale au nombre de sommets de degré i . On note $vd(G)$ un tel vecteur et $vd(G)[i]$ ou juste vd_i la composante d'indice i .

Nous appelons **classe degré** i l'ensemble des sommets de degré i ,

noté $cd_i(G) = \{u \in V(G) : deg(u) = i\}$ ou juste cd_i si aucune ambiguïté ne se pose. Par abus de langage nous dirons que i est le degré de la classe cd_i .

Notons que $vd_i = |cd_i|$.

Nous définissons également l'ensemble des classes degré,

noté $cd(G) = \{cd_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$.

Exemples

Pour le graphe $G(V, E)$ défini plus haut, on a :

- $cd_0 = \{h\}$
- $cd_1 = \{b, c, f, g\}$
- $cd_2 = \{e\}$
- $cd_3 = \{a, d\}$
- $cd_4 = \emptyset, cd_5 = \emptyset, cd_6 = \emptyset, cd_7 = \emptyset, cd_8 = \emptyset, cd_9 = \emptyset$
- $cd(G) = \{\emptyset, \{h\}, \{b, c, f, g\}, \{e\}, \{a, d\}\}$
- $vd(G) = (1, 4, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Voici les vecteurs degré pour quelques graphes particuliers :

- $vd(K_1) = (0, 0, 1), vd(\overline{K_1}) = (1, 0, 0)$
- $vd(K_2) = (0, 0, 0, 2), vd(\overline{K_2}) = (2, 0, 0, 0)$
- $vd(K_3) = (0, 0, 0, 0, 3), vd(\overline{K_3}) = (3, 0, 0, 0, 0)$
- $vd(K_n) = (0, 0, \dots, n)$ (n à la position $n+1$), $vd(\overline{K_n}) = (n, 0, \dots, 0)$
- $vd(R_k) = (0, 0, \dots, 0, n, 0, \dots, 0)$ ($n = |R_k|$ à la position k , pour un graphe régulier de degré k)

2.3 Séquence graphique

Une **séquence graphique** est une séquence de n entiers représentant les degrés du graphe d'ordre n suivant un ordonnancement donné des sommets [25].

Exemple : Ci-dessous quelques séquences graphiques et leurs ordonnancements de sommets correspondants pour le graphe G défini plus haut :

- $(3, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 0), (a, b, c, d, e, f, g, h)$
- $(0, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 3), (h, b, c, d, f, g, e, a)$
- $(3, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 0), (a, e, g, f, d, c, b, h)$
- $(1, 2, 1, 3, 3, 1, 0, 1), (b, e, c, d, a, f, h, g)$
- $(2, 3, 3, 0, 1, 1, 1, 1), (e, d, a, h, b, c, f, g)$

Observation 2.3.1. *Une suite de n entiers quelconques ne correspond pas nécessairement à une séquence graphique.*

Exemple : Il n'existe aucun graphe simple d'ordre 2 dont les sommets ont les degrés $(2, 5)$.

L'observation ci-dessous est due à Erdős et Gallai (1960) [25].

Observation 2.3.2. *Une séquence d'entiers (d_1, d_2, \dots, d_n) est une séquence graphique si ces entiers vérifient la condition suivante pour tout $1 \leq r \leq n - 1$:*

$$\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^n \min(r, d_i)$$

Observation 2.3.3. *Nous remarquerons la parenté entre la séquence graphique et le vecteur degré. Nous jugeons que la représentation par le vecteur degré est plus compacte.*

2.4 Concepts relatifs au vecteur degré

Soit G un graphe d'ordre n . Voici quelques remarques à propos du vecteur degré et des classes degré.

Observation 2.4.1. *La famille des classes degré est une partition de $V(G)$.*

$$\bigcup_{i=0}^{n+1} cd_i = V(G)$$

$$\forall 0 \leq i, j \leq n+1 : i \neq j \quad cd_i \cap cd_j = \emptyset$$

Démonstration. Il est clair que l'intersection de deux classes degré de degrés différents est vide puisque chacune contient des sommets du graphe de degrés différents également. D'autre part tout sommet u du graphe a nécessairement un degré donc il appartient à une classe degré en l'occurrence $cd_{deg(u)}$. \square

Observation 2.4.2. *Pour tous sous ensemble V' de $V(G)$, ils existent p entiers $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p$, tels que la réunion des $cd_{\alpha_1}(G), cd_{\alpha_2}(G) \dots cd_{\alpha_p}(G)$ contient V' et est minimale.*

Démonstration. la famille $(cd_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ est une partition donc pour tout sommet $u \in V'$ il existe un unique $\alpha(u) = deg(u)$ tel que $u \in cd_{\alpha(u)}$.

A l'échelle de tout l'ensemble V' , en considérant le regroupement des sommets de même degrés, nous concluons l'existence d'un entier p comptant les degrés différents des sommets dans V' et de $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p$ entiers représentant les valeurs de ces degrés différents dans V' tels que :

$$V' \subseteq \bigcup_{j=1}^p cd_{\alpha_j}$$

En plus, toute réunion de classes degré contenant V' contient nécessairement $\bigcup_{j=1}^p cd_{\alpha_j}$. Aussi cet ensemble est la plus petite réunion de classes degré contenant V' . \square

Observation 2.4.3. *La somme des éléments du vecteur degré est égale à l'ordre du graphe.*

$$\sum_{i=0}^{n+1} vd_i = |V(G)|$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de l'observation précédente puisque chaque élément vd_i représente la cardinalité de la classe degré cd_i . \square

Observation 2.4.4. *La somme des produits des cardinaux des classes degré par leur degré respectif est égale à la somme des degrés du graphe.*

$$\sum_{i=0}^{n+1} i * vd_i = \sum_{u \in V(G)} \text{deg}(u)$$

Démonstration. Conséquence directe de la définition du vecteur degré. \square

Lemme 2.4.5. *La somme des produits des cardinaux des classes degré par leur degré respectif est égale au double du nombre d'arêtes du graphe.*

$$\sum_{i=0}^{n+1} i * vd_i = 2 * |E(G)|$$

Démonstration. Comme vu dans le chapitre de rappel sur les graphes, la somme des degrés des sommets du graphe est égale au double du nombre des arêtes ; d'où le résultat (voir observation précédente). \square

2.5 Vecteur degré du graphe complément

Lemme 2.5.1. : Dans un graphe G d'ordre n , pour tout i entre 0 et $n + 1$, la composante d'indice $(n + 1 - i)$ du vecteur degré du graphe complémentaire \overline{G} du graphe G est égale à la composante d'indice i du vecteur degré du graphe G .

$$vd(G)[i] = vd(\overline{G})[n + 1 - i].$$

Soient le graphe G et son complément \overline{G} (voir fig. 2.2).

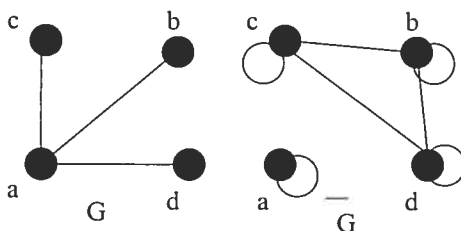


FIG. 2.2 – G : graphe, \overline{G} : complément de G

Nous avons bien : $vd(G) = (0, 3, 0, 1, 0, 0)$ et $vd(\overline{G}) = (0, 0, 1, 0, 3, 0)$

Démonstration. Comme vu dans le chapitre sur les graphes, on a :

$$deg_{\overline{G}}(u) = n + 1 - deg_G(u).$$

Donc, le nombre de sommets de degré i dans G est égal au nombre de sommets de degré $(n + 1 - i)$ dans le complément de G . D'où le résultat \square

2.6 Vecteurs degré de deux graphes

Observation 2.6.1. Si deux graphes ont le même vecteur degré alors leurs graphes complémentaires ont le même vecteur degré.

Démonstration. Une conséquence directe du lemme précédent. \square

Observation 2.6.2. *Si deux graphes ont le même vecteur degré alors ils ont le même nombre de sommets, le même nombre d'arêtes, le même degré maximal et le même degré minimal.*

Démonstration. Soit vd le vecteur degré commun. Comme vu précédemment, nous avons :

- Le nombre de sommets de chacun des deux graphes est : $\sum_{i=0}^{n+1} vd_i$.
- Le double du nombre d'arêtes de chacun des deux graphes est : $\sum_{i=0}^{n+1} i * vd_i$

D'où l'égalité des nombres de sommets et d'arêtes des deux graphes.

D'autre part, nous avons :

- Le degré minimal de chacun des deux graphes correspond à l'indice de la première composante non nulle de vd , en parcourant le vecteur de l'indice 0 à $n + 1$.
- Le degré maximal de chacun des deux graphes correspond à l'indice de la première composante non nulle de vd , en parcourant le vecteur de l'indice $n + 1$ vers 0.

D'où l'égalité des degrés minimal et maximal des deux graphes. \square

Observation 2.6.3. *Si deux graphes G et H ont le même vecteur degré alors leur famille de classe degré sont en bijection.*

Démonstration. Il suffit de faire correspondre les classes degré de même degré. \square

Lemme 2.6.4. : *Soit G et H deux graphes d'ordre supérieur ou égale à 2 ayant le même vecteur degré dont les éléments ne sont pas tous nuls alors ils existent u, u' ,*

deux sommets adjacents dans G , et v, v' deux sommets adjacents dans H , tels que

$$\deg(u) = \deg(v) \text{ et } \deg(u') = \deg(v').$$

Démonstration. Comme vu précédemment, les deux graphes ont nécessairement le même degré minimal, le même degré maximal et le même nombre de sommets.

Soient d_{max} , d_{min} et n les valeurs respectives de ces entiers.

Commençons par traiter le cas où $d_{max} > \frac{n+1}{2}$. Supposons que pour toute paire de sommets $\{u, v\}$, $u \in G$ et $v \in H$, ayant le même degré, il n'existe pas de paire de sommets $\{u', v'\}$, $u' \in N(u)$ et $v' \in N(v)$, ayant le même degré. Autrement dit, tous les sommets dans le voisinage de u et dans le voisinage de v ont des degrés différents deux à deux entre les deux ensembles.

$$\deg(u) = \deg(v)$$

et

$$\forall u' \in N(u), \forall v' \in N(v), \deg(u') \neq \deg(v')$$

D'après l'observation 2.4.2 vue plus haut nous avons ce qui suit :

Le voisinage de u , $N(u)$, est inclus dans $V(G)$, donc ils existent p entiers $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p$, tels que $cd_{\alpha_1}(G), cd_{\alpha_2}(G) \dots cd_{\alpha_p}(G)$ dont la réunion contient $N(u)$ et est minimale.

Le voisinage de v , $N(v)$, est inclus dans $V(H)$, donc ils existent q entiers $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_q$, tels que $cd_{\beta_1}(H), cd_{\beta_2}(H) \dots cd_{\beta_q}(H)$, dont la réunion contient $N(v)$ et est minimale.

$$N(u) \subseteq \bigcup_{i=1}^p cd_{\alpha_i}(G)$$

$$N(v) \subseteq \bigcup_{i=1}^q cd_{\beta_i}(H)$$

Rappelons que $cd_{\alpha_1}(G), cd_{\alpha_2}(G) \dots cd_{\alpha_p}(G)$ et $cd_{\beta_1}(H), cd_{\beta_2}(H) \dots cd_{\beta_q}(H)$ sont les classes degré relatives aux sommets dans $N(u)$ et $N(v)$ respectivement.

Appelons ϕ la bijection entre $cd(G)$ et $cd(H)$ qui fait correspondre à chaque classe degré de G la classe degré de H qui a le même indice (ou degré)- ces classes regroupent les sommets ayant les mêmes degrés-.

Puisque les sommets dans $N(u)$ ont des degrés différents de ceux de $N(v)$ alors $\phi(cd_{\alpha_1}(G)), \phi(cd_{\alpha_2}(G)) \dots \phi(cd_{\alpha_p}(G))$ sont différents des $cd_{\beta_1}(H), cd_{\beta_2}(H) \dots cd_{\beta_q}(H)$.

Ceci s'applique pour tous sommets u dans G et v dans H qui ont le même degré, en particulier si ce degré est le degré maximal commun aux deux graphes d_{max} .

Nous avons supposé plus haut que $d_{max} > \frac{n+1}{2}$, alors :

$$deg(u) = deg(v) = d_{max}$$

$$|N(u)| \leq |\bigcup_{i=1}^p cd_{\alpha_i}(G)| = \sum_{i=1}^p |cd_{\alpha_i}(G)|$$

$$|N(v)| \leq |\bigcup_{i=1}^q cd_{\beta_i}(H)| = \sum_{i=1}^q |cd_{\beta_i}(H)|$$

Par ailleurs

$$\sum_{i=1}^p |cd_{\alpha_i}(G)| = \sum_{i=1}^p |\phi(cd_{\alpha_i}(G))| \text{ (égalité des vecteurs degré)}$$

et

$$\sum_{i=1}^p |\phi(cd_{\alpha_i}(G))| + \sum_{i=1}^q |cd_{\beta_i}(H)| \leq n + 1$$

Donc $|N(u)| + |N(v)| \leq n + 1$ ce qui est absurde puisque $|N(u)| = |N(v)| = d_{max} > \frac{n+1}{2}$.

Dans le cas où le degré maximal d_{max} est inférieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$, nous distinguons les cas suivants :

- $d_{max} = d_{min} = \frac{n+1}{2}$
- d_{min} est strictement inférieur à $\frac{n+1}{2}$.

Si d_{min} est strictement inférieur à $\frac{n+1}{2}$. Nous appliquons la même logique vue plus haut sur les graphes complémentaires de G et de H et nous retrouvons la même contradiction.

Dans le cas où $d_{max} = d_{min} = \frac{n+1}{2}$, le lemme est bien vérifié. En effet, tous les sommets dans les deux graphes ont le même degré d_{max} et chacun des graphes a au moins une arête, donc les sommets reliant cette arête dans G et dans H sont adjacents et ont des degrés égaux. □

2.7 Vecteur degré et isomorphisme

On pourrait croire que si deux graphes ont le même vecteur degré alors ils sont isomorphes, malheureusement ceci n'est pas le cas.

Voici un contre-exemple, soit $G(V, E)$ et $H(V', E')$ deux graphes non isomorphes mais qui ont le même vecteur degré (voir fig. 2.3 et fig. 2.4).

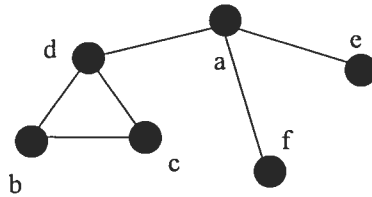


FIG. 2.3 - G : graphe - contre exemple isomorphisme

Les vecteurs degré des deux graphes sont bien égaux mais les graphes ne sont pas isomorphes.

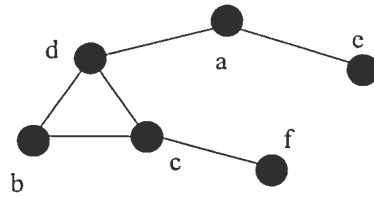


FIG. 2.4 - H : graphe - contre exemple isomorphisme

- $vd(G) = (0, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0)$

- $vd(H) = (0, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0)$

Les résultats présentés ci-dessus restent modestes mais nous sommes confiants que ce concept de vecteur degré peut donner une autre vision pour aborder les problèmes sur les graphes.

CHAPITRE 3

JEU CLASSIQUE

La version classique du jeu de poursuite fait partie de la classe de variantes qu'on appelle avec partage d'information total telle que cité précédemment en introduction.

Dans le reste de l'ouvrage les graphes seront tous réflexifs et les boucles ne seront pas nécessairement représentées sur les figures sauf indication contraire. Rappelons que les graphes complets K_n sont réflexifs.

3.1 Exemple

Soit le graphe G défini par la figure 3.1. Un joueur, le policier, se positionne en d , un autre joueur, le voleur, choisit le sommet a . Le policier se déplace en c en utilisant l'arête $[c, d]$. Le voleur se dirige vers b en espérant rallonger sa durée de vie. Au prochain déplacement du policier, ce dernier décide d'aller sur le sommet a en utilisant l'arête $[c, a]$; et le voleur, qui réussit à s'échapper cette fois, se déplace

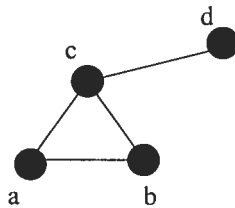


FIG. 3.1 – G : graphe jeu classique

en c . Cette fois, le policier fait le bon choix et retourne sur le sommet c où il attrape le voleur.

3.2 Définition du jeu de poursuite

Le jeu se déroule sur un graphe G entre deux joueurs que nous appelons policier et voleur. Nous appelons **coup** ou **déplacement** l'action faite par un joueur durant un tour du jeu. Un **tour** exprime une étape du jeu où chacun des joueurs joue une seule fois. Une **partie** est une suite de tours consécutifs.

Voici les **Règles** :

- R01 : Le jeu se déroule entre deux joueurs ou l'un doit s'identifier comme policier l'autre comme voleur.
- R02 : Les joueurs jouent en alternance (à chacun son tour).
- R03 : A chaque coup, un joueur (qui a le tour) se déplace en utilisant une arête du graphe et une seule.
- R04 : Après chaque coup, chacun des joueurs doit se trouver sur un sommet du graphe.
- R05 : Le policier commence la partie en choisissant un sommet.
- R06 : Le voleur est attrapé s'il se trouve sur le même sommet que le policier.
- R07 : Le policier oeuvre pour attraper le voleur.
- R08 : Le voleur oeuvre pour ne pas être attrapé.
- R09 : La partie se termine si le voleur est attrapé
- R10 : Le policier gagne la partie si le voleur est attrapé, si non le voleur gagne

Observation 3.2.1. *La partie est infinie si et seulement si le voleur gagne.*

Il est un peu difficile de jouer une partie pour l'éternité, cas de partie infinie. Nous proposons alors une modification des règles du jeu pour des raisons pratiques :

- RA1 : La partie se termine après un certain nombre de tour préalablement fixé. (n , le nombre de sommets du graphe serait un bon choix).
- = RA2 : La partie se termine si l'un des joueurs déclare forfait, dans ce cas ce dernier perd la partie.

Ces dernières règles, pour éviter les parties infinies, ne seront pas considérées par la suite.

Nous pouvons supposer que le jeu est temporisé par une horloge qui régule les tours du jeu. Chaque joueur se déplace après écoulement de deux unités de temps après son dernier déplacement. Le policier commence la partie à l'instant 0 et se positionne en p_0 . Le voleur joue à l'instant 1 et se positionne en r_1 . Puis le policier joue à instant 2 et se positionne en p_2 , puis le voleur joue à l'instant 3 et se positionne en r_3 et ainsi de suite.

Notons (p_a, r_b) le couple formé par la position du policier p_a respectivement la position du voleur r_b avec $|b - a| = 1$. Vu que les déplacements sont temporisés, alors a ne prend que des valeurs paires et b ne prend que des valeurs impaires.

Sur un top d'horloge paire $2t + 2$, c'est le tour du policier de se déplacer vers un sommet, soit p_{2t+2} , étant donné que juste avant ce coup le policier et le voleur se trouvaient en (p_{2t}, r_{2t+1}) .

Sur un top d'horloge impaire $2t + 3$, c'est le tour du voleur de se déplacer vers un sommet, soit r_{2t+3} , étant donné que juste avant ce coup le policier et le voleur se trouvaient en (p_{2t+2}, r_{2t+1}) .

Nous appelons **stratégie** la fonction qui définit la nouvelle position d'un joueur en fonction de sa position courante et de la position de son adversaire.

Stratégie du policier :

$$S_p : V(G)^2 \rightarrow V(G), p' = S_p(p, r)$$

Stratégie du voleur :

$$S_r : V(G)^2 \rightarrow V(G), r' = S_r(p, r)$$

Si nous combinons les tours d'horloge et les stratégies des joueurs nous avons $\forall t \in \mathcal{N}$:

$$p_{2t+2} = S_p(p_{2t}, r_{2t+1})$$

$$r_{2t+3} = S_r(p_{2t+2}, r_{2t+1})$$

avec p_0 et r_1 les positions initialement choisies par le policier et le voleur respectivement.

Le graphe est dit **policier-gagnant** si il existe une stratégie S_p et une position p_0 initiale du policier à partir de laquelle le policier peut attraper le voleur quelque soit la position initiale r_1 de ce dernier et sa stratégie S_r .

Le graphe est dit **voleur-gagnant** si quelque soit la stratégie du policier S_p et la position initiale du policier p_0 , il existe une position initiale du voleur r_1 et une stratégie S_r telles qu'il peut toujours s'échapper.

Il est légitime de se poser la question suivante : quelle sorte de graphe est policier-gagnant ? Ce que nous allons explorer plus bas.

Remarquons que nous n'avons émis aucune restriction concernant la réflexivité du graphe. Cependant, le jeu est grandement affecté si il est joué sur un graphe réflexif ou un graphe sans boucle.

Observation 3.2.2. *Dans un graphe sans boucle, après chaque tour, chacun des joueurs se trouve sur un sommet différent de celui qu'il occupait avant.*

Observation 3.2.3. *Dans un graphe réflexif, un joueur peut rester sur le même sommet après avoir joué son coup.*

Observation 3.2.4. *Tout graphe non-connecté est voleur-gagnant.*

Dans ce qui suit nous nous intéressons plutôt aux graphes réflexifs connexes.

Observation 3.2.5. *Le graphe complet K_n est policier-gagnant.*

Démonstration. Le voleur est attrapé après au plus un déplacement du policier en utilisant l'arête qui le relie à la position du voleur s'ils ne sont pas déjà sur le même sommet. □

Observation 3.2.6. *Tout arbre fini est policier-gagnant.*

Démonstration. Le policier choisit n'importe quel sommet au début. Pour tous les autres coups le policier va toujours se diriger vers le sous-arbre du graphe où se trouve le voleur. Puisque l'arbre est fini alors au bout d'un nombre fini de coups le policier va piéger le voleur sur une feuille de l'arbre. □

Une extension de cette version du jeu consiste à faire jouer plusieurs policiers au lieu d'un seul. Tous les policiers se déplacent au même temps. Si on met n policiers

sur les n sommets d'un graphe d'ordre n , un policier par sommet, ces n policiers gagnent toute partie contre un voleur et même plusieurs voleurs. Il est donc logique de définir la notion de **nombre de policiers** [2, 12, 13] (cops number ou search number), noté $sn(G)$ qui exprime le nombre de policiers suffisants pour capturer le voleur.

3.3 Caractérisation des graphes policier-gagnant

Grand nombre de travaux ont été élaborés pour caractériser les graphes réflexifs policier-gagnant. Par ordre chronologique nous citons les travaux effectués A.Quilliot [20] et [19]. Également les travaux effectués indépendamment par R.Nowakowski et P.Winkler [15]. Et encore une fois indépendamment aussi, G.Hahn et G.MacGillivray qui ont développé une caractérisation algorithmique des graphes policier-gagnant [12] pour une équipe de policiers à la recherche d'une équipe de voleurs.

Dans ce qui suit, nous exposons la caractérisation par ordre trivial et par dominance.

3.3.1 Ordre Trivial

Soit $G(V, E)$ est un graphe réflexif fini. soit la relation binaire indexée par l'entier α , qu'on note $<_{\alpha}$ sur $V(G)$, définie comme suit [15] :

$\forall x \in V$ et $y \in V$,

$$x <_{\alpha} y \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \alpha = 0 \text{ et } & x = y \\ \text{Si } \alpha > 0 \text{ et } & \forall u \in N(x) \exists v \in N(y), \exists \beta < \alpha : u <_{\beta} v \end{cases}$$

On définit $< = <_\alpha$ où α est le plus petit entier tel que $<_{\alpha+1} = <_\alpha$; un tel α existe car $<_{|G|} = <_{|G|+1}$.

Inversion de la définition : Soient x, y deux sommets du graphe G ,

$$x \not<_\alpha y \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \alpha = 0 \text{ et } & x \neq y \\ \text{Si } \alpha > 0 \text{ et } & \exists u \in N(x) : \forall v \in N(y), \forall \beta < \alpha \text{ on a } u \not<_\beta v \end{cases}$$

Voici quelques observations concernant la relation $<$, mais avant rappelons ces définitions à propos des relations binaires.

Une relation R est dite **triviale** si pour tout x, y dans l'ensemble de définition, $x R y$ ou si $R = \emptyset$. Notons que $<_\alpha \neq \emptyset$ pour tout α .

Une relation R est dite **pré-ordre** si elle est réflexive et transitive.

Observation 3.3.1. Pour tous entiers $\beta <_0 \subseteq <_\beta$

Observation 3.3.2. Pour tous entiers β et γ , $\beta \leq \gamma \Rightarrow <_\beta \subseteq <_\gamma$

Démonstration. Il est clair que pour les cas $\gamma = 0$, $\beta = 0$ et $\beta = \gamma$ la relation est vérifiée. Supposons que $\gamma > 0$ et que $\beta < \gamma$. Soient x, y deux sommets du graphe tels que $x <_\beta y$:

$$\Rightarrow \forall u \in N(x) \exists v \in N(y), \exists \delta < \beta : u <_\delta v$$

$$\Rightarrow \forall u \in N(x) \exists v \in N(y), \exists \delta < \beta < \gamma : u <_\delta v$$

$$\Rightarrow x <_\gamma y$$

En particulier pour $\gamma = \alpha$ on a alors : $<_\beta \subseteq <_\alpha = <$ □

Observation 3.3.3. Pour tout entier β , $<_\beta$ est un pré-ordre.

Démonstration.

– Réflexivité :

Pour tout $x \in G$, $(x, x) \in \prec_0 \subseteq \prec$ donc \prec est réflexive.

– Transitivité :

Soient x, y et z trois sommets du graphe. Soit β un entier.

Pour $\beta = 0$, on a $x \prec_0 y$ et $y \prec_0 z \Rightarrow x = y = z \Rightarrow x \prec_0 z$

Pour $\beta > 0$, supposons que pour tout entier $\delta < \beta$, \prec_δ est transitive et montrons par récurrence que \prec_β l'est aussi.

Supposons que $x \prec_\beta y$ et $y \prec_\beta z$, montrons que $x \prec_\beta z$.

Soit u un sommet dans le voisinage de x .

$u \in N(x) \Rightarrow \exists v \in N(y), \exists \gamma < \beta : u \prec_\gamma v$

$v \in N(y) \Rightarrow \exists w \in N(z), \exists \theta < \beta : v \prec_\theta w$

Soit $m = \max(\gamma, \theta)$ on a alors $\prec_\gamma \subseteq \prec_m$ et $\prec_\theta \subseteq \prec_m$:

$\Rightarrow u \prec_m v$ et $v \prec_m w$

$\Rightarrow u \prec_m w$ (hypothèse de récurrence)

$\Rightarrow u \prec_\beta w$ (puisque $\prec_m \subseteq \prec_\beta$)

Donc la relation \prec est transitive. □

Les deux lemmes qui suivent constituent la caractérisation des graphes policier-gagnant telle que démontrée par R.J.Nowakowski and P.Winkler [15].

Lemme 3.3.4. *Si la relation \prec est triviale alors G est policier-gagnant.*

Démonstration. Soit p_0 une position initiale arbitraire du policier. Le voleur choisit une position r_1 , Nécessairement $r_1 \prec p_0$ car la relation est triviale.

$r_1 < p_0$ et $r_1 \in N(r_1) \Rightarrow \exists p_2 \in N(p_0), \exists \alpha_1 < \alpha : r_1 <_{\alpha_1} p_2$.

Le policier choisit p_2 comme prochain déplacement.

Au prochain tour du policier les joueurs sont en (p_2, r_3) et on a :

$r_1 <_{\alpha_1} p_2$ et $r_3 \in N(r_1) \Rightarrow \exists p_4 \in N(p_2), \exists \alpha_3 < \alpha_1 : r_3 <_{\alpha_3} p_4$.

Nous répétons la même approche à l'instant $2t + 2$, où les joueurs sont en (p_{2t+2}, r_{2t+1}) et c'est le tour du policier. On a :

$r_{2t+1} <_{\alpha_{2t+1}} p_{2t+2}$ et $r_{2t+3} \in N(r_{2t+1}) \Rightarrow \exists p_{2t+2} \in N(p_{2t}), \exists \alpha_{2t+3} < \alpha_{2t+1} :$
 $r_{2m+3} <_{\alpha_{2t+3}} p_{2t+2}$.

Nous avons ainsi construit une suite (α_{2t+1}) de nombres entiers positifs ou nul, strictement décroissante. Donc il existe un entier m fini tel que $\alpha_{2m+1} = 0$. Or $r_{2m+1} <_{2m+1} p_{2m+2}$, donc $r_{2m+1} = p_{2m+2}$. Le policier et le voleur sont alors à la même position et le graphe est ainsi policier-gagnant. \square

Avant d'énoncer le deuxième lemme ajoutons l'observation suivante :

Observation 3.3.5. Soient x, y deux sommets de G , $y \not<_{\alpha} x \Rightarrow \exists y' \in N(y) :$
 $\forall x' \in N(x), y' \not<_{\alpha} x'$.

Démonstration. $y \not<_{\alpha} x$

$$\Rightarrow y \not<_{\alpha+1} x$$

$$\Rightarrow \exists y' \in N(y) : \forall x' \in N(x), \forall j < \alpha + 1, y' \not<_j x'$$

$$\Rightarrow \forall x' \in N(x), y' \not<_{\alpha} x'.$$

\square

Lemme 3.3.6. Si G est policier-gagnant alors la relation $<$ est triviale.

Démonstration. Pour ceci, nous allons supposer que la relation n'est pas triviale. Soient p_0 et r_0 deux sommets du graphe ne vérifiant pas la relation. Nous supposons aussi que le policier est obligé de commencer à partir de la position p_0 (restriction que nous allons traiter par la suite).

$$r_0 \not\prec p_0 \Rightarrow \exists r_1 \in N(r_0) \forall p \in N(p_0), r_1 \not\prec p$$

Le voleur se déplace en r_1 et quelque soit la nouvelle position p_1 choisie par le policier, qui est nécessairement dans $N(p_0)$, on a $r_1 \not\prec p_1$.

Nous répétons la même approche à l'instant $2t + 3$, les joueurs se trouvent en (p_{2t+2}, r_{2t+1}) $r_{2t+1} \not\prec p_{2t+2} \Rightarrow \exists r_{2t+3} \in N(r_{2t+1}) \forall p \in N(p_{2t+2}), r_{2t+3} \not\prec p$

Le voleur se déplace en r_{2t+3} et quelque soit la nouvelle position p_{2t+4} choisie par le policier, qui est nécessairement dans $N(p_{2t+2})$, on a $r_{2t+3} \not\prec p_{2t+4}$.

Ainsi, on démontre que quelque soit la position r_{2t+3} du voleur et la position p_{2t+4} du policier, on a toujours $r_{2t+3} \not\prec p_{2t+4} \Rightarrow r_{2t+3} \not\prec_0 p_{2t+4} \Rightarrow r_{2t+3} \neq p_{2t+4}$. Donc le voleur ne sera jamais attrapé.

Pour revenir à la restriction qu'on a imposée au début, concernant le sommet de départ du policier, si le policier avait une autre position de départ gagnante il l'aurait atteint à partir de p_0 (un graphe policier-gagnant est forcément connexe) et il aurait gagné. \square

Théorème 3.3.7. *G est policier-gagnant si et seulement si $<$ est triviale.*

Démonstration. En utilisant les lemmes 3.3.6, 3.3.4 nous avons l'équivalence. \square

Ceci définit une première caractérisation des graphes réflexifs policier-gagnant. Dans la section suivante nous exposons une deuxième caractérisation qui s'applique aux graphes réflexifs finis.

3.3.2 Dominance

Rappelons qu'un sommet v domine u , deux sommets d'un graphe G , si $N[u] \subseteq N[v]$. On dit aussi que u est irréductible. Rappelons aussi que si v domine u alors $u \in N[v]$.

Un graphe $G(V, E)$ d'ordre n est **démontable** s'il existe un ordonnancement des sommets $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ tel que pour tout i ($0 < i < n$), u_i est irréductible dans le graphe $G_i = G\langle u_{j_i \leq j \leq n} \rangle$.

Notons $N_i[u]$ le voisinage de u dans G_i .

$\forall 0 < i < n, \exists j_i, i < j_i \leq n : N_i[u_i] \subseteq N_i[u_{j_i}]$ dans $G_i : G$ est démontable

R.Nowakowski et P.Winkler ont démontré le lemme suivant [15].

Lemme 3.3.8. *Si H est un rétracte d'un graphe G policier-gagnant alors H est policier-gagnant.*

Démonstration. Soit h une rétraction de G vers H . Le graphe G est policier-gagnant alors le policier dispose d'une stratégie gagnante. Jouons une partie sur le graphe H . Les sommets que peuvent choisir les joueurs sont sur H . Le policier va adopter sa stratégie gagnante comme si le jeu se déroulait sur G en remplaçant les sommets dans G qui ne sont pas dans H par leurs images par h dans H . Remarquons que la rétraction nous garantit que les sommets que va occuper le policier sur H forment une chaîne. Puisque le voleur finit par être capturé sur G alors il le sera dans H également. Ceci est valide quand le policier commence à partir de la position initiale gagnante p ou son image $h(p)$ et pour toute position initialement choisie par le voleur sur H .

Notons que la réflexivité des graphes est importante ici. \square

Lemme 3.3.9. *Si r, p sont deux sommets d'un graphe réflexif et p domine r alors $G\langle V(G) \setminus \{r\} \rangle$ est un rétracte de G .*

Démonstration. On pose :

$$G_1 = G$$

$$G_2 = G\langle V(G) \setminus \{r\} \rangle$$

Soit l'application $h : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tel que $h(r) = p$ et $h(x) = x, \forall x \neq r$.

Montrons que h est un rétracte.

D'abord, la restriction de h à $V(G_2)$ est égale à id_{G_2} , l'identité sur G_2 , par définition.

Pour u, v deux sommets de G_1 avec $[u, v]$ une arête G_1 . Nous avons les cas suivants :

- Si u et v sont deux éléments de $V(G_2)$ alors $[h(u), h(v)] = [u, v]$ qui est aussi une arête de G_2 .
- Si u et v sont tous les deux égaux à r alors $[h(u), h(v)] = [p, p]$ qui est une arête de G_2 puisque le graphe G_1 est réflexif.
- Si les deux sommets sont différents et l'un d'eux est égale à r , soit $u = r$. Le sommet v appartient au voisinage de r qui est inclus dans le voisinage de p donc $[h(u), h(v)] = [p, v]$ qui est aussi une arête de G_2 .

Alors, l'application h est une rétraction de G_1 et G_2 est un rétracte de G_1 . \square

Théorème 3.3.10. *Extension de graphe policier-gagnant*

Soit G un graphe réflexif fini, soit u un sommet dominé. Si $G \langle V(G) \setminus \{u\} \rangle$ est policier-gagnant alors G est policier-gagnant.

Nous proposons la démonstration suivante :

Démonstration. Soit $G' = G \langle V(G) \setminus \{u\} \rangle$. Soit v un sommet de G dominant u . Soit la stratégie du policier sur G consistant à jouer la même stratégie gagnante sur G' en supposant que le voleur se trouve en v chaque fois qu'il se déplace en u et en se déplaçant vers v chaque fois que la stratégie désigne u comme prochaine position. Montrons que cette stratégie du policier est gagnante sur G .

En effet, si le voleur ne se déplace que sur les sommets appartenant à $V(G')$ le policier gagne. Si pendant une partie le voleur se déplace d'un sommet w vers u , ce déplacement est considéré par le policier comme un déplacement vers v car w est adjacent à u (v domine u dans G').

Si le voleur se déplace de u vers un sommet w du G alors ce déplacement est considéré comme un déplacement de v vers w car w est adjacent à u (v domine u dans G').

Dans le cas où le voleur est en u et le policier est en v , le cas de la partie sur le graphe G' sensée se terminer en v , le voleur n'a plus aucune échappatoire. En effet, Si c'est le tour du policier, celui-ci va se déplacer vers u et capturer le voleur. Si c'est le tour du voleur, pour tout sommet où il peut se déplacer, incluant u , le policier va pouvoir le capturer à partir de v car le voisinage de u et inclus dans celui de v . □

Théorème 3.3.11. *Un graphe réflexif fini est policier-gagnant si et seulement si G est démontable.*

Démonstration. Commençons par montrer que si le graphe G est policier-gagnant alors G est démontable.

Si le graphe est policier-gagnant alors le policier dispose d'une stratégie gagnante en un nombre fini de coups. Soit p_0 la position initiale du policier et t_m le nombre maximal de déplacements du policier pour attraper le voleur. Soit r_0 la position du voleur nécessitant ce nombre t_m de déplacements du policier.

Soit u_1 la dernière position occupée par le voleur juste avant d'être arrêté par le policier qui se trouve en p obligatoirement différente de u_1 puisque le voleur n'est pas encore arrêté. En ce moment, toute position possible pour un nouveau déplacement du voleur est accessible par le policier. Autrement dit, Le voisinage de u_1 est inclus dans le voisinage de p ou encore que u_1 est dominé par p .

$$u_1 \neq p \quad N[u_1] \subseteq N[p]$$

On pose :

$$G_1 = G$$

$$G_2 = G_1 \langle V(G_1) \setminus \{u_1\} \rangle$$

Le graphe G_2 est un rétracte de G_1 . Il suffit de considérer l'application qui envoie u_1 vers p . Donc en utilisant le lemme 3.3.8 G_2 est policier-gagnant.

Ainsi nous avons :

- u_1 qui est irréductible dans G_1
- G_2 policier-gagnant

Nous appliquons la même logique sur G_2 pour obtenir un graphe

$G_3 = G_2 \langle V(G_2) \setminus \{u_2\} \rangle = G_1 \langle V(G_1) \setminus \{u_1, u_2\} \rangle$, où u_2 est la position du voleur juste avant d'être capturé dans G_2 .

Plus généralement, après avoir éliminé t sommets de G , nous construisons une suite de sommets $(u_i)_{1 \leq i < t}$ et une suite de graphes $(G_i)_{1 \leq i < t}$ telles que :

- Le sommet u_i est irréductible dans G_i .
- Le graphe $G_i = G_1 \langle V(G_1) \setminus \bigcup_{1 \leq j < i} \{u_j\} \rangle$,
- Le graphe G_i est policier-gagnant.

Donc le graphe G est démontable.

Montrons cette fois que si le graphe G est démontable alors il est policier-gagnant.

Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un ordonnancement de dominance des sommets du graphe.

On pose :

$$G_1 = G$$

$$G_i = G_1 \langle V(G_1) \setminus \bigcup_{1 < j < i} \{u_j\} \rangle, \forall 1 < i < n$$

Pour $i = n - 1$, $V(G_1) \setminus \bigcup_{1 < j < n-1} \{u_j\} = \{u_n\}$ le seul sommet restant du graphe.

Donc Le graphe $G_{n-1} = G_1 \langle V(G_1) \setminus \bigcup_{1 < j < n-1} \{u_j\} \rangle = G \langle \{u_n\} \rangle$ est policier-gagnant.

De même, le graphe $G_{n-2} = G \langle \{u_{n-1}, u_n\} \rangle$ qui est un graphe connexe à deux sommets et est donc policier-gagnant.

Supposons que G_{n-i} est policier-gagnant et montrons que $G_{n-(i-1)}$ est policier-gagnant aussi pour tout $1 < i < n - 1$

Remarquons que $G_{n-i} = G_{n-(i-1)} \langle V(G_{n-(i-1)}) \setminus \{u_{n-i}\} \rangle$. Le graphe $G_{n-(i-1)}$ est policier-gagnant et le sommet u_{n-i} est dominé par un des sommets dans G_{n-i} donc en appliquant le théorème 3.3.10, le graphe G_{n-i} est policier-gagnant.

Il s'en suit que le graphe G_1 , qui n'est autre que le graphe G , est lui même policier-gagnant. \square

Ceci définit une deuxième caractérisation des graphes réflexifs finis policier-gagnant.

Dans [15], on trouve aussi un résultat plus étendu concernant le produit de graphes policier-gagnant.

Théorème 3.3.12. *Si G est un produit cartésien fini de graphes policier-gagnant alors G est policier-gagnant.*

Démonstration. Soit $G = \square_{1 \leq i \leq m} G_i$ produit de graphes policier-gagnant.

Remarquons, tout d'abord, qu'à tout sommet S de G correspond une projection (une composante) et une seule S_i dans le graphe G_i du produit.

Jouons une partie sur le graphe G .

À l'étape initiale de la partie, le policier commence par occuper le sommet $p_0 = (p_{0_1}, p_{0_2}, \dots, p_{0_i}, \dots, p_{0_m})$ où p_{i_0} correspond à la position initiale gagnante pour le policier dans le graphe du produit G_i . Le voleur choisit également sa position initiale sur G $r_1 = (r_{1_1}, r_{1_2}, \dots, r_{1_i}, \dots, r_{1_m})$.

A l'étape $2t$ de la partie, le policier se déplace en $p_{2t} = (p_{2t_1}, p_{2t_2}, \dots, p_{2t_i}, \dots, p_{2t_m})$ où p_{t_i} correspond à la stratégie gagnante du policier dans le graphe G_i du produit.

Une fois qu'une projection de la position du voleur sur un graphe G_i est attrapée la projection du policier sur G_i va tout simplement suivre les déplacements de la projection du voleur sur G_i jusqu'à ce que toutes les composantes soient attrapées.

Ceci implique que le voleur est attrapé sur le graphe G . \square

Dans ce chapitre nous avons eu l'occasion de définir le jeu de poursuite dans sa version classique et d'exposer principalement deux caractérisations des graphes policier-gagnant. Nous tenons à souligner que ceci ne couvre pas l'ensemble des travaux à propos de ce sujet. Nous incitons vivement le lecteur à explorer les documents en bibliographie pour avoir une plus large vision. Nous recommandons principalement la caractérisation algorithmique [12] des graphes policier-gagnant. C'est un algorithme de décision pour statuer si un graphe est policier-gagnant pour k policiers à la poursuite de p voleurs en un temps polynomial.

Dans les chapitres qui suivent nous abordons une variante du jeu où plusieurs joueurs participent au jeu et sont restreints à respecter des contraintes : jeu de poursuite sous contrainte.

CHAPITRE 4

TANDEM

Une variante du jeu de poursuite consiste à faire jouer deux policiers au lieu d'un seul à la poursuite d'un voleur sur un graphe réflexif. Les deux policiers sont obligés de garder une distance inférieure ou égale à 1 tout au long de la partie. Cette version est appelée jeu de poursuite avec policiers en tandem. Elle fait partie de la classe des jeux avec partage d'information total sous contrainte.

Un graphe est **tandem-gagnant** si le tandem a une stratégie gagnante. N.E. Clarke et R.J. Nowakowski [8], [9] ont étudié le cas des tandems.

4.1 Exemple

Soit le graphe réflexif $G(V,E)$ (voir fig 4.1, boucles non représentées). Le tandem de policiers peut occuper le même sommet ou des sommets adjacents. Remarquons que pour ce graphe le tandem est gagnant.

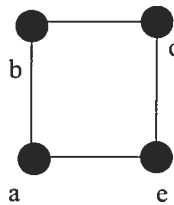


FIG. 4.1 – G : graphe (tandem)

Définition 4.1.1. *Un graphe est dit **tandem-gagnant** si il existe des positions*

initiales pour le tandem et une stratégie telles que quelque soit la position choisie par le voleur le tandem serait capable de le capturer en un temps fini.

4.2 Principaux Résultats

Observation 4.2.1. *Tout graphe policier-gagnant est tandem-gagnant.*

Démonstration. Il suffit que l'un des deux policiers suive la stratégie gagnante pour un seul policier et que le second se contente de le suivre. \square

Théorème 4.2.2. *Tout rétracte d'un tandem-gagnant est tandem-gagnant.*

Démonstration. Soit h une rétraction de G vers H . G est tandem-gagnant alors le tandem policier dispose d'une stratégie gagnante. Jouons une partie sur le graphe H . Les sommets que peuvent choisir les joueurs sont sur H . Le tandem va adopter sa stratégie gagnante comme si le jeu se déroule sur G en remplaçant les sommets dans G qui ne sont pas dans H par leurs images par h dans H . Remarquons que la rétraction nous garantit que les sommets que vont occuper les policiers du tandem sont aussi en tandem et que la suite des sommets occupés par chacun des policiers forment une chaîne. Puisque le voleur finit par être capturé sur G alors il le sera dans H également. \square

Rappelons la définition suivante :

Définition 4.2.3. *Un sommet u d'un graphe G est **quasi-irréductible** s'il existe un sommet v de G tel que le voisinage de u est inclus dans v .*

$$N(u) \subseteq N(v) : u \text{ est quasi-irréductible.}$$

Remarquons que le sommet u n'est pas nécessairement adjacent à v , ce qui est obligatoire dans le cas irréductible. Mais notons également que dans notre cas, puisque nous nous intéressons juste au cas de graphe réflexif, un sommet quasi-irréductible est aussi irréductible.

Il est aussi sujet de dominance ouverte et dominance fermée dans [8] qui est utile dans le cas de graphe non réflexif. Mais encore ces distinctions ne sont pas nécessaires dans notre cas.

Théorème 4.2.4. *Soit u un sommet quasi-irréductible d'un graphe G . Le graphe G est tandem-gagnant si et seulement si le graphe $G' = G \langle V(G) \setminus \{u\} \rangle$ est tandem-gagnant.*

Démonstration. D'après le lemme 3.3.9, le graphe G' est un rétracte du graphe G . Par application du théorème 4.2.2 si G est tandem-gagnant alors le graphe G' l'est aussi. Ce qui démontre le premier sens de l'équivalence.

Supposons cette fois que G' est tandem-gagnant et montrons que G l'est aussi. Soit v un sommet de G dominant le sommet u . Soit la stratégie du tandem sur G consistant à jouer la même stratégie gagnante sur G' en supposant que le voleur se trouve sur v chaque fois qu'il se déplace en u . Montrons que cette stratégie est tandem-gagnante sur G .

En effet, si le voleur ne se déplace que sur les sommets appartenant à $V(G')$ le tandem gagne. Si pendant une partie le voleur se déplace d'un sommet w vers u , ce déplacement est considéré par le tandem comme un déplacement vers v car w est adjacent à u (v domine u dans G').

Si le voleur se déplace de u vers un sommet w du G alors ce déplacement est

considéré comme un déplacement de v vers w car w est adjacent à u (v domine u dans G').

Dans le cas où le voleur est en u et au moins l'un des policiers est en v , le cas de la partie sur le graphe G' sensée se terminer en v , le voleur n'a plus aucune échappatoire. En effet, Si c'est le tour du voleur, il ne peut aller nul part sans être capturé puisque tous les sommets où il peut aller sont accessibles par le policier positionné en v . Si c'est le tour du tandem, le policier en v va rester sur place pour assurer la capture du voleur s'il bouge de sa place, l'autre policier va se déplacer vers u et va attraper le voleur en un maximum de trois coups, Ainsi le graphe G est tandem-gagnant.

□

CHAPITRE 5

JEU DE POURSUITE SOUS CONTRAINTE

Dans le chapitre du jeu de poursuite classique, nous avons introduit la notion de nombre de policiers $sn(G)$ où on cherche le nombre de policiers nécessaires et suffisants pour attraper un voleur. Implicitement, il s'agit d'une variante de jeu de poursuite où il est question de deux équipes plutôt que de deux joueurs. Une équipe à un seul joueur : le voleur et une équipe à un ou plusieurs joueurs : les policiers qui doivent coopérer en harmonie lors de leurs déplacements pour attraper le voleur.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas de deux d'équipes à plusieurs joueurs chacune. De plus, nous imposons à chacune des équipes une contrainte, ou une restriction, à respecter durant ses déplacements (voir définition de contrainte plus bas).

Aussi, nous introduisons des concepts nouvellement définis tels les formations, les contraintes et les graphes de formations pour arriver à démontrer notre principale contribution : une caractérisation des graphes policier-gagnant pour le jeu de poursuite sous contrainte.

5.1 Exemple

Dans le chapitre précédent, nous avons vu le jeu avec un tandem de policiers qui constitue un cas particulier du jeu de poursuite sous contrainte.

En effet, les deux policiers du tandem sont contraints à se déplacer en vis à vis.

Après tout déplacement, les deux policiers doivent être sur des sommets adjacents.

Il y a au moins deux façons pour formuler la contrainte sur les policiers :

- *la distance entre les policiers est inférieure ou égale à un.*
- *Le sous-graphe induit par les sommets occupés par les policiers est isomorphe à K_2 , le graphe complet à deux sommets ou à K_1 .*

Remarquons que l'équipe des voleurs a un seul joueur et ne doit respecter aucune contrainte.

5.2 Définition du jeu

Le jeu se déroule sur un graphe G entre deux équipes de joueurs que nous appelons équipe de policiers et équipe de voleurs. Nous appelons **coup** ou **déplacement** l'action faite par une équipe de joueurs durant un tour du jeu. Un **tour** exprime une étape du jeu où chacune des deux équipes joue une seule fois. Une **partie** est une suite de tours consécutifs.

Étant donné que le jeu de poursuite sous contrainte dérive de la version classique du jeu, nous rappelons ci-dessous juste les règles spécifiques à cette variante

- RC1 : Un voleur est attrapé s'il se trouve sur le même sommet qu'un policier.
- RC2 : La partie se termine si tous les voleurs sont attrapés.
- RC3 : L'équipe de policiers gagne la partie si tous les voleurs sont attrapés si non l'équipe de voleurs gagne.
- RC4 : Tous les joueurs d'une équipe jouent au même temps.
- RC5 : Chaque équipe doit respecter la contrainte qui lui est imposée.

Le graphe est dit **C-policier-gagnant** s'ils existent des positions initiales pour

les policiers à partir desquelles les policiers peuvent attraper tous les voleurs, au même temps, quelques soient les positions initiales de ces derniers. Le graphe est dit **C-voleur-gagnant** si les voleurs réussissent toujours à s'échapper.

5.3 Concepts relatifs au jeu sous contrainte

A chaque déplacement, une équipe doit satisfaire la contrainte qui lui est imposée. Autrement dit, les joueurs d'une équipe ne peuvent occuper que les sous-ensembles de sommets du graphe qui respectent la contrainte imposée à cette équipe.

Une équipe ne peut passer d'un sous ensemble de sommets à un autre que si :

- Les deux sous ensembles vérifient la contrainte.
- Les deux sous ensembles sont "adjacents".

Par adjacents, nous entendons que tous les joueurs d'une équipe peuvent passer du premier sous ensemble au deuxième en utilisant au plus une arête par joueur.

Observation 5.3.1. *Le nombre de sommets occupés par les joueurs d'une équipe n'est pas nécessairement égale au nombre de joueurs de celle-ci puisque deux joueurs peuvent occuper le même sommet.*

Dans ce qui suit, nous formalisons la notion de contrainte. Nous définissons également pour un graphe $G(V, E)$ réflexif, fini et une contrainte C donnée un C -graphe dual de G où les joueurs de l'équipe concernée par la contrainte peuvent évoluer.

5.3.1 Contrainte et C -formation

Soit $G(V, E)$ un graphe réflexif fini.

Une **contrainte** est une application de l'ensemble des parties de V vers la paire $\{0, 1\}$.

$$C : 2^V \rightarrow \{0, 1\}$$

Cette application attribut à chaque élément de l'ensemble des parties de V la valeur 0 ou 1. Quand un élément a pour image 1, on dit qu'il **vérifie la contrainte** C .

Pour une contrainte C donnée, une **C -formation** est un ensemble f , sous ensemble de V , vérifiant la contrainte C .

L'**ordre d'une contrainte** C est le maximum des tailles de ses C -formations.

Nous appelons **contrainte nulle** d'ordre k , notée \mathbf{NC}_k , la contrainte dont l'ensemble de \mathbf{NC} -formations est l'ensemble des sous ensembles de V de taille inférieure ou égale à k .

$$\tilde{V}_{\mathbf{NC}_k} = \{f \subseteq V : |f| \leq k\}$$

Nous appelons **contrainte totale** d'ordre k , notée \mathbf{FC}_k , la contrainte dont le graphe induit par tout élément de l'ensemble de ses \mathbf{FC}_k -formations dans G est isomorphe au graphe complet K_k .

$$\tilde{V}_{\mathbf{FC}_k} = \{f \subseteq V : G\langle f \rangle \cong K_k\}$$

Exemple :

Soit $G(V, E)$ le graphe réflexif suivant (Voir fig. 5.1 -boucles non représentées-). Ci-dessous nous donnons des exemples de C -formations pour différentes contraintes.

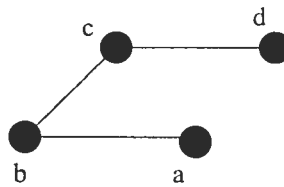


FIG. 5.1 – G : graphe (C -formation)

- Soit la contrainte C : la distance entre 2 policiers est inférieure ou égale à 1 (Comme vu précédemment avec les tandems).

Les sous ensembles suivants sont des C -formations : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ et $\{c, d\}$.

- Pour la contrainte nulle d'ordre 2, NC_2 , les sous ensembles de V suivants sont des NC_2 -formations :

Les deux policiers sont sur le même sommet : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ et $\{d\}$.

Les deux policiers sont sur des sommets différents : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ et $\{c, d\}$.

- Pour la contrainte nulle d'ordre 3, NC_3 , les sous ensembles de V suivants sont des NC_3 -formations :

Les trois policiers sont sur le même sommet : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ et $\{d\}$.

Un policier est sur un sommet différent des deux autres : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ et $\{c, d\}$.

Les trois policiers sont sur des sommets différents : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ et $\{b, c, d\}$

- Pour la contrainte totale d'ordre 3, FC_3 , aucun sous ensemble de V n'est une FC_3 -formation :

5.3.2 Graphe de C -formations

Soit C une contrainte d'ordre k .

Nous appelons **ensemble des C -formations** l'ensemble des sous ensembles de V vérifiant la contrainte C .

$$\tilde{V}_C = \{f \in 2^V : C(f) = 1\}$$

Le fait de dire que les k joueurs d'une équipe respectent la contrainte C se lit : les sommets occupés par les joueurs est une C -formation.

Soient f et f' deux C -formations. On note comme suite la possibilité que les joueurs d'une équipe, qui occupent la formation f , puissent se déplacer vers f' en empruntant pas plus d'une arête par joueur :

$$f \rightarrow f'$$

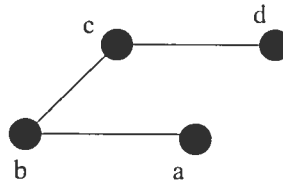
Autrement dit, les joueurs d'une équipe occupent les sommets de la formation f . Après avoir jouer, chaque joueur est parti d'un sommet u qu'il occupait dans f vers un sommet u' dans f' tel que $[u, u']$ est une arête du graphe G .

Ceci nous permet de définir un ensemble de paires de formations de \tilde{V} non nécessairement distinctes.

$$\tilde{E}_C = \{[f, f'] : f, f' \in \tilde{V}_C \text{ et } f \rightarrow f'\}$$

Les deux ensembles \tilde{V}_C et \tilde{E}_C définissent respectivement les sommets et les arêtes d'un graphe dual qu'on appelle **graphe de C -formations** de G :

$$\tilde{G}_C(\tilde{V}_C, \tilde{E}_C) : \text{graphe de } C\text{-formations}$$

FIG. 5.2 – G : graphe (distance 1)

Puisque \tilde{G}_C est un graphe donc il hérite de tous les concepts définis pour les graphes ; entre autres la notion de voisinage. Soit f un sommet de \tilde{G}_C .

$$N(f) = \{f' \in \tilde{V}_C : [f, f'] \in \tilde{E}_C\}$$

Observation 5.3.2. *Le graphe \tilde{G}_C est un graphe réflexif fini.*

En effet, G est fini donc \tilde{G}_C est fini. D'autre part, si les joueurs d'une équipe occupent une formation f alors ils peuvent se déplacer de f vers f en utilisant les boucles héritées du graphe G .

5.3.3 Exemples

5.3.3.1 Distance

- Soit la contrainte C : *la distance entre deux voleurs est égale à 1.*

Appliquons cette contrainte sur le graphe $G(V, E)$ (voir fig.5.2).

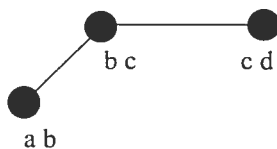
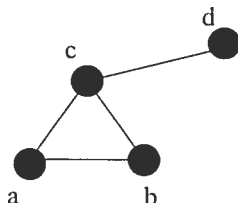
$$V = \{a, b, c, d\}$$

Le graphe G et la contrainte C génèrent un graphe dual (voir fig.5.3) dont l'ensemble de sommets est le suivant :

$$\tilde{V}_C = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$$

- Soit la contrainte C : *la distance est égale à 2.*

Appliquons cette contrainte sur le graphe $G(V, E)$ (voir fig.5.4).

FIG. 5.3 – \tilde{G}_C : graphe de C -formations (distance 1)FIG. 5.4 – G : graphe (distance 2)

$$V = \{a, b, c, d\}$$

Le graphe G et la contrainte C génèrent un graphe dual (voir fig.5.5) dont l'ensemble de sommets est le suivant :

$$\tilde{V}_C = \{\{a, d\}, \{b, d\}\}$$

Observation 5.3.3. *Le sommet c n'appartient à aucune formation dans \tilde{G}_C .*

5.3.4 Isomorphisme

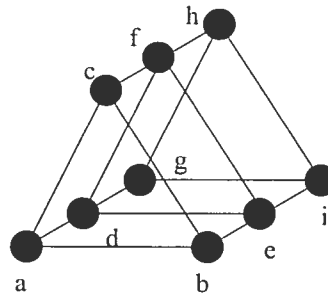
– Soit la contrainte C : le graphe induit par les positions des policiers est isomorphe à K_3 .

Appliquons cette contrainte sur le graphe $G(V, E)$ (voir fig.5.6).

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

Le graphe G et la contrainte C génèrent un graphe dual (voir fig.5.7) dont

FIG. 5.5 – \tilde{G} : graphe de C -formations (Distance 2)

FIG. 5.6 – G : graphe (isomorphisme)FIG. 5.7 – \tilde{G}_C : graphe de C -formations (isomorphisme)

l'ensemble de sommets est le suivant :

$$\tilde{V}_C = \{\{a, d, c\}, \{d, e, f\}, \{g, i, h\}\}$$

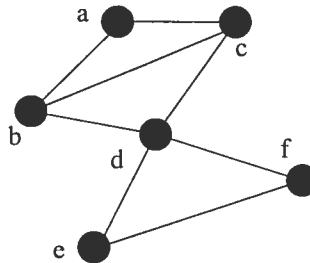
- Soit la contrainte C : le graphe induit par les positions des policiers est isomorphe à K_3 .

Appliquons cette contrainte sur le graphe $G(V, E)$ (voir fig.5.8).

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Le graphe G et la contrainte C génèrent un graphe dual (voir fig.5.9) dont

l'ensemble de sommets est le suivant :

FIG. 5.8 – G : graphe (isomorphisme K_3)

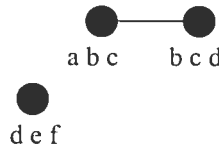


FIG. 5.9 – \tilde{G}_C : graphe de C -formations (isomorphisme K_3)

$$\tilde{V}_C = \{\{a, d, c\}, \{b, c, d\}, \{d, e, f\}\}$$

Observation 5.3.4. Soit C une contrainte sur k joueurs. $|\tilde{V}_C| \leq \sum_{i=1}^k \binom{n}{i}$ où n est l'ordre du graphe G , $\binom{n}{i}$ est le coefficient binomial de i parmi n .

Démonstration. Une formation peut avoir au maximum k sommets si chacun des joueurs occupe un sommet distinct des sommets occupés par les autres joueurs de la même équipe. Une formation peut au minimum avoir un seul sommet si tous les joueurs sont regroupés sur le même sommet. Donc le nombre de possibilités de choix des formations est inférieur ou égal au nombre des choix de sous ensembles de $V(G)$ de taille entre 1 et k . \square

5.4 Caractérisation des graphes C-policier-gagnant

Dans ce qui suit, nous donnons une caractérisation des graphes C-policier-gagnant.

$G(V, E)$ est un graphe réflexif fini, C_p une contrainte sur k_p policiers et C_v une contrainte sur k_v voleurs. Soit $\tilde{G}_{C_p}(\tilde{V}_p, \tilde{E}_p)$ le graphe de C_p -formations relatif à G sous la contrainte C_p . Soit $\tilde{G}_{C_v}(\tilde{V}_v, \tilde{E}_v)$ le graphe de C_v -formations relatif à G sous la contrainte C_v .

On définit une relation binaire ordinale α , noté $<_\alpha$, entre les ensembles \tilde{V}_p et \tilde{V}_v comme suite :

Soient $g \in \tilde{V}_v$ et $f \in \tilde{V}_p$.

- $\alpha = 0, g <_0 f \Leftrightarrow g \subseteq f$

- $\alpha > 0, g <_\alpha f \Leftrightarrow \forall g' \in N(g) \exists f' \in N(f), \exists p < \alpha : g' <_p f'$

Nous définissons $\leq = <_\alpha$ où α le plus petit entier tel que $\leq_{\alpha+1} = <_\alpha$.

Théorème 5.4.1. *Soit G un graphe, C_p une contrainte sur k_p policiers et C_v une contrainte sur k_v voleurs.*

G est C -policier-gagnant sous les contraintes C_p, C_v si et seulement si $<$ est triviale. Par triviale nous entendons que $\forall g \in \tilde{V}_v$ et $\forall f \in \tilde{V}_p g < f$.

Démonstration. Dans un premier temps, Montrons que le graphe est C -policier-gagnant si la relation $<$ est triviale .

Appelons $f_0, f_1, f_2, \dots, f_t$ respectivement $g_1, g_2, g_3, \dots, g_t$ les C_p -formations respectivement les C_v -formations que vont occuper les policiers respectivement les voleurs durant une partie du jeu.

Ainsi à l'étape $t > 0$, les policiers se trouvent sur la formation f_t , les voleurs sur la formation g_t et c'est le tour des voleurs pour jouer.

Initialement, les policiers choisissent une C_p -formation arbitraire : f_0 . Les voleurs choisissent leur C_v -formation initiale g_1 . Nécessairement $g_1 < f_0$ car la relation est triviale.

$g_1 < f_0$ et $g_1 \in N(g_1) \Rightarrow \exists f_1 \in N(f_0), \exists \alpha_1 < \alpha : g_1 <_{\alpha_1} f_1$.

Les policiers choisissent f_1 comme prochaine C_p -formation.

Montrons par récurrence qu'à l'étape $t+1$, si g_{t+1} est la nouvelle C_v -formation des voleurs, il existe un entier α_{t+1} et une C_p -formation f_{t+1} dans le voisinage de f_t tels que :

$$\alpha_{t+1} < \alpha_t$$

et

$$g_{t+1} <_{\alpha_{t+1}} f_{t+1}$$

en supposant que c'est vrai pour l'étape t .

On a $g_{t+1} \in N(g_t)$, la nouvelle C_v -formation des voleurs est nécessairement dans le voisinage de l'ancienne C_v -formation des voleurs, g_t :

$$g_t <_{\alpha_t} f_t \Rightarrow \exists \alpha_{t+1} < \alpha_t, \exists f' \in N(f_t) : g_{t+1} <_{\alpha_{t+1}} f_{t+1}$$

Les policiers choisissent $f_{t+1} = f'$ comme nouvelle C_p -formation pour les policiers. Nous avons ainsi construit une suite (α_i) de nombres entiers positifs ou nuls, et une suite (f_i) de C_p -formations dans le graphe \tilde{G}_p occupées par les policiers.

La suite entière (α_i) est strictement décroissante, donc il existe un entier p fini tel que $\alpha_p = 0$ et $g_p <_{\alpha_p} f_p$. Or $g_p <_0 f_p \Leftrightarrow g_p \subseteq f_p$. Ainsi, l'ensemble des sommets occupés par les voleurs est contenu dans l'ensemble des sommets occupés par les policiers et alors les policiers gagnent la partie.

Montrons cette fois, que si le graphe est C -policier-gagnant alors la relation $<$ est triviale. Pour ceci, nous allons supposer que la relation n'est pas triviale.

Soit AP une C_p -formation et AV une C_v -formation telles que $AV \not\prec AP$.

Appelons $f_0, f_1, f_2, \dots, f_t$ respectivement $g_0, g_1, g_2, \dots, g_t$ les C_p -formations respectivement les C_v -formations que vont occuper les policiers respectivement les voleurs durant une partie du jeu.

Ainsi à l'étape $t = 0$ les policiers se trouvent sur la C_p -formation f_t , les voleurs sur la C_v -formation g_t et c'est le tour aux policiers pour jouer.

Nous supposons aussi que les policiers sont obligés de commencer à partir de

la C_p -formation AP (Restriction que nous allons traiter par la suite). Les voleurs peuvent commencer n'importe où, donc ils peuvent choisir de commencer en AV.

$$g_0 \not\prec f_0$$

$$\Rightarrow g_0 \not\prec_{\alpha+1} f_0$$

$$\Rightarrow \exists g_1 \in N(g_0) : \forall f \in N(f_0), \forall j < \alpha + 1, g_1 \not\prec_j f$$

$$\Rightarrow \forall f \in N(f_0), g_1 \not\prec_\alpha f.$$

$$\Rightarrow \forall f \in N(f_0), g_1 \not\prec f$$

Ainsi les voleurs peuvent se déplacer en $g_1 \in N(g_0)$ telle que quelque soit la nouvelle C_p -formation des policiers $f_1 \in N(f_0)$ $g_1 \not\prec f_1$.

Montrons par récurrence que pour jouer à l'étape $t+1$, si f_t est la C_p -formation courante des policiers,

$$\exists g_{t+1} \text{ } C_v\text{-formation} : \forall f_{t+1} \in N(f_t), g_{t+1} \not\prec f_{t+1}$$

en supposant que ceci est vrai pour l'étape t .

$$\text{On a } g_t \not\prec f_t$$

$$\Rightarrow g_t \not\prec_{\alpha+1} f_t$$

$$\Rightarrow \exists g' \in N(g_t) : \forall f \in N(f_t), \forall j < \alpha + 1, g' \not\prec_j f \text{ (en particulier pour } f_t).$$

$$\Rightarrow \forall f \in N(f_t), g' \not\prec_\alpha f.$$

$$\Rightarrow \forall f \in N(f_t), g' \not\prec f$$

On pose $g_{t+1} = g'$, et pour la nouvelle formation f_{t+1} du policier, qui est nécessairement dans $N(f_t)$, on a $g_{t+1} \not\prec f_{t+1}$.

Ainsi on démontre que quelque soit l'étape t du jeu les voleurs sont capables de trouver une C_v -formation g_t telle que pour f_t C_p -formation on a : $g_t \not\prec f_t$. $g_t \not\prec f_t \Rightarrow g_t \not\prec_0 f_t \Rightarrow g_t \not\subseteq f_t$. Donc les voleurs ne seront jamais attrappés.

Pour revenir à la restriction qu'on a imposée au début à l'équipe des policiers, concernant la C_p -formation de départ, si les policiers avait une autre C_p -formation de départ gagnante ils l'auraient atteint à partir de f_0 (un graphe policier-gagnant est forcément connexe) et les policiers auraient gagné. \square

La classification des contraintes serait une suite logique à explorer après cette caractérisation des graphes C-policier-gagnant.

CONCLUSION

Le jeu de poursuite sur un graphe est développé sous différentes variantes définies suivant le partage d'information entre les joueurs, le nombre de joueurs impliqués dans le jeu et les éventuelles contraintes qui leurs sont imposées.

Nous disposons d'une caractérisation structurelle des graphes policier-gagnant pour la version classique du jeu. Dans ce cas, un policier et un voleur se déplacent en alternance sur les arêtes du graphe.

Dans le présent document, nous proposons et démontrons une caractérisation des graphes policier-gagnant sous contrainte. Ce cas est une généralisation de la version classique du jeu en faisant intervenir une équipe de policiers à la recherche d'une équipe de voleurs tout en imposant à chacune des équipes une contrainte à respecter. Cette variante représente une unification de toutes les variantes où le partage de l'information est total entre les adversaires. Nous jugeons également que cette variante se rapproche d'un grand nombre d'applications pratiques telles que vécues sur le terrain.

Cette vision du jeu peut-être étendue pour couvrir les autres variantes où le partage de l'information est partiel voire nul. Une voie à explorer également serait la classification des contraintes. Aussi, dirait-on qu'un graphe policier-gagnant pour une contrainte d'un ordre donné le serait pour une contrainte moins restrictive mais d'ordre moins élevé.

La partie n'est pas finie... !

Index

- adjacent (jeu sous contrainte), 54
- adjacents (sommets), 9
- arête, 7
- arêtes incidentes, 9
- arbre (graphe policier gagnant), 35
- arbre (graphe), 13
- avec boucle (graphe), 7
- boucle, 7
- C-formation, 55
- C-policier-gagnant, 53
- C-voleur-gagnant, 54
- chaîne d'un graphe, 12
- chaîne minimale, 12
- classe degré i , 20
- complet (graphe policier-gagnant), 35
- contrainte, 55
- contrainte nulle, 55
- contrainte totale, 55
- corde (cycle), 13
- corde (graphe à), 13
- coup, 32, 53
- cycle élémentaire (graphe), 13
- cycle simple (graphe), 13
- démontable, 41
- déplacement, 32, 53
- deg, 10
- degré, 10
- distance, 13
- domine, 11
- ensemble classes degré, 21
- ensemble des C -formations, 57
- FC_k , 55
- graphe, 6
- graphe complémentaire, 8
- graphe complet, 8
- graphe connexe, 13
- graphe de C -formations, 57

graphe simple, 6
graphe vide, 9
homomorphisme, 13
incidentes (arêtes), 9
irréductible, 11
irréflexif, 7
isomorphisme, 13
k-régulier (graphe), 11
longueur (chaîne), 12
matrice d'adjacence, 17
monotone transitif (graphe), 13
 NC_k , 55
noeud, 7
nombre de policiers, 36
non-connexe (graphe voleur gagnant),
35
non-connexe (graphe), 13
ordre d'une contrainte, 55
ordre du graphe, 7
partie, 32, 53
poids (chaîne), 12
policier-gagnant, 34
pondéré (graphe), 7
pondération, 7
pré-ordre, 37
produit carré (de graphes), 16
produit cartésien (de graphes), 16
produit catégorique (de graphes), 16
produit complet (de graphes), 16
quasi-irréductible, 12, 49
réflexif, 7
régulier (graphe), 11
rétracte, 15
rétraction, 15
règle du jeu (classique), 32
règle du jeu (sous contrainte), 53
relation triviale, 37
séquence graphique, 22
sans boucle (graphe), 7
sn, 36
sommet, 6
sommets adjacents, 9
sous graphe couvrant, 14

sous-groupe, 14

stratégie, 34

tandem-gagnant, 48

tour, 32, 53

triangulé (graphe), 13

triviale (relation), 37

vecteur degré, 20

voisinage, 9

voisinage fermé, 9

voisinage ouvert, 9

voleur-gagnant, 34

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Aigner and M. Fromme, A game of cops and robbers, Discrete Math. Note
A. Tang, Zero-visibility cops and robber, Master's thesis, Dalhousie University,
2004.
- [2] B. Alspach and X. Li, Searching Graphs and Directed Graphs, University of
Regina, 2003.
- [3] T. Andreae, Note on a pursuit game played on graphs, Discrete Appl. Math.
(1984)
- [4] T. Andreae, On a pursuit game played on graphs for which a minor is excluded,
J. Combin, Theory Ser (1986).
- [5] C. Berge, Graphe et hypergraphe, Dunod, Paris 1970
- [6] V. Chepoi, Bridged Graphs Are Cop-Win Graphs : An Algorithmic Proof,
University of Hamburg, 1995.
- [7] N. E. Clarke, Constrained Cops and Robber, Ph.D. Thesis, Dalhousie Univer-
sity, 2002.
- [8] N. E. Clarke and R.J. Nowakowski, Tandem-win Graphs, Discrete Math., to
appear 2005.
- [9] N. E. Clarke and R.J. Nowakowski, A tandem version of the cops and robber
game on products of graphs, preprinted.
- [10] I. Hole, Discrete Pursuit-Evasion Algorithms, Dalhousie University, 2004.
- [11] G. Hahn, Cops, robbers and graphs, February 2005.

- [12] G. Hahn and G. MacGillivray, A note on k -cop, 1 robber games on graphs, Université de Montréal, October 2004.
- [13] G. Hahn, F. Laviolette, N. Sauer and R.E. Woodrow, On cop-win graphs, Discrete Mathematics, 2002.
- [14] P. Lopez, Cours de graphes, LAAS-CNRS (Avril 2003).
- [15] R. J. Nowakowski and P. Winkler, Vertex-to-vertex pursuit in graph, Discrete Math, 1983.
- [16] G. Owan Game Theory W. B. Saunders Compagny (1968).
- [17] T. D. Parsons, Pursuit-evasion in graphs, Proc. International Conference in Graph Theory, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, May 1976.
- [18] T. D. Parsons, The search number of connected graph, Proc. Ninth Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congress. Num. XXI, Winnipeg, 1978.
- [19] A. Quilliot, Problèmes de jeux, de point fixe, de connectivité et de représentation sur des graphes, des ensembles ordonnés et des hypergraphes ; Paris VI, Thèse d'Etat, juin 1983.
- [20] A. Quilliot, Jeux et Points Fixes sur les graphes, thèse de 3^e cycle, Paris VI, 1978
- [21] A. Tang, Zero-visibility cops and robber, Master's thesis, Dalhousie University, 2004.
- [22] G. Th Guilbaud, Éléments de la théorie mathématique des jeux, Dunod, Paris, 1968.

- [23] D. B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [24] R. J. Wilson, Introduction to Graph Theory, Academic Press, New York and London, 1972.
- [25] <http://mathworld.wolfram.com/GraphicSequence.html>
- [26] <http://mathworld.wolfram.com/GraphProduct.html>

