Université de Montréal

Le structuralisme en philosophie des mathématiques

par
Tuan-Huy Nguyen

Département de philosophie
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de maître (M.A.)
en philosophie
option enseignement au collégial

Août 2006

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:
Le structuralisme en philosophie des mathématiques

présenté par :
Tuan-Huy Nguyen

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

............Yvon Gauthier............
président-rapporteur

............Jean-Pierre Marquis............
directeur de recherche

............Daniel Laurier............
membre du jury

Résumé

La notion de structure, qui est au cœur de la thèse du structuralisme en philosophie des mathématiques (SPM), trouve diverses conceptions. Nous constatons, dans la littérature, deux orientations méthodologiques pour la théorisation de cette notion. L'une s'articule à l'intérieur d'un cadre ensembliste et modéliste. L'autre se déploie à l'intérieur de la théorie des catégories. La présente recherche porte sur les types de structuralisme se fondant sur la première orientation méthodologique. Plus précisément, nous examinons les thèses de Stewart Shapiro, Michael D. Resnik et Geoffrey Hellman.

Nous montrons que, malgré les divergences entretenues par celles-ci sur le statut ontologique des structures, ces thèses souffrent d'une même limitation interne due à leur orientation méthodologique et à leur conception réaliste de la sémantique. Étant inaptes à nous offrir une notion uniforme de structure pour une compréhension structurelle et générale des mathématiques, elles ne peuvent répondre aux finalités du SPM.

Mots clés : Structuralisme, structure, philosophie des mathématiques, catégoricité, identité, ontologie.

Abstract

The notion of structure, at the core of the thesis of the structuralism in philosophy of mathematics (SPM), finds many conceptions. In the literature, we find two methodological orientations to theorize this notion. One is based on the set theory and the model theory. The other is based on the theory of category. The present research examines the type of structuralism following the first methodological orientation. More precisely, we analyze the thesis of Stewart Shapiro, Michael D. Resnik and Geoffrey Hellman.

We show that in spite of the divergences maintained by these theses on the ontological status of structures they suffer from the same internal limitation due to their methodological orientation and their realistic conception of semantics. Being incapable to construct a uniform concept of structure for a structural and general comprehension of mathematics, these theses cannot answer the finalities of the SPM.

Keywords: Structuralism, structure, philosophy of mathematics, categoricity, identity, ontology.

Table des matières

Introduction

Le terme « structuralisme » a des significations diverses selon le contexte de son usage. Est-ce que parlons-nous du structuralisme en linguistique, en anthropologie, en littérature, ou encore en biologie ? De manière générale, ce terme est utilisé dans divers domaines d'étude pour qualifier une doctrine, à l'intérieur d'un domaine particulier, se fondant sur la notion de structure. La polysémie du terme « structuralisme » est due à la polysémie du terme « structure ». À chaque forme de structuralisme correspond une notion ou des notions de structure qui sont en fonction de la nature du domaine des objets étudiés. Ainsi, chaque structuralisme d'un domaine d'étude particulier n'étudie qu'une classe de « structures » en particulier. Malgré cette diversité, il est possible de traiter uniformément toutes les notions de structures particulières par les méthodes mathématiques en faisant abstraction de la nature des objets situés dans ces structures. Chaque type de structures observées est une exemplification d'une structure mathématique. À examiner la relation inverse entre les mathématiques et les autres domaines, il nous semble que la méthode mathématique est la source conceptuelle par laquelle chaque forme de structuralisme doit prendre racine pour se déployer. En poussant plus loin ce raisonnement, ne pouvons-nous pas conclure que les mathématiques constituent la science générale des structures ? Certains philosophes contemporains semblent adopter une telle position en proposant un structuralisme en philosophie des mathématiques (SPM). Dès lors, le SPM doit répondre à la question en quoi consiste la notion de structure mathématique. Implicitement, la notion d'objet mathématique doit être aussi explicitée. Cette vue structurelle des mathématiques ne date pas d'hier, nous en trouvons des traces en philosophie chez Platon et en mathématiques chez Dedekind, Hilbert, pour ne nommer que ceux-ci.[1] D'après Corry (1996), la notion de structure mathématique a gagné en importance avec le développement de l'algèbre moderne. Pour résoudre des équations ou pour déterminer si un ensemble d'équations possèdent une ou des solutions, les mathématiciens ont orienté leur attention des opérations spécifiques définies sur un domaines d'objets vers les propriétés structurelles des domaines d'objets. Le moteur, derrière ce changement de perspective en mathématiques, a été le développement de nouvelles techniques qui ce sont avérées fructueuses. Corry nous offre l'exemple de la théorie des idéaux des nombres premiers de Dedekind dans le passage suivant :

> « Dedekind gradually uncovered and developed the typical proof techniques that his theory was able to offer, as well as the potential perspective opened by the shift of attention away from the study of operations and relations among the algebraic numbers themselves and increasingly toward the properties of their collections as such, and the interrelations among them. »[2]

Le cas de Dedekind est une extension d'un autre exemple d'importance historique illustrant cette situation, c'est-à-dire le développement de la théorie de Galois et de la notion de groupe. Il n'a pas toujours été le cas que les mathématiciens se représentent la pratique des mathématiques comme essentiellement l'étude de

---

[1] Voir Reck, E. H. (2003), «Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense,» *Source Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, vol. 137, pp. 369-419.

[2] Corry, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser Verlag, p. 91.

structures, mais cette nouvelle compréhension des mathématiques, une fois initiée, a changé substantiellement le panorama de la pratique des mathématiques. Subséquemment, le développement des théories algébriques s'est réalisé sous cette nouvelle approche des mathématiques qui tendra de plus en plus vers l'abstraction. Comme Corry le note : « The rise of the structural image of algebra will imply a change in the conceptual hierarchy : abstract structures will be defined and studied in advance, so the numbers systems may be introduced as specific instances of them. »[3] La venue de cette compréhension structurelle des mathématiques s'est réalisée par (et a permis) le déploiement de nouvelles méthodes tendant vers l'abstraction. Un moment important de cet avènement a été le développement de la méthode axiomatique. Sur ce dernier point, une mise en relation entre une approche structurelle et la méthode axiomatique a souvent été effectuée par une interprétation particulière des travaux d'Hilbert portant sur les fondations de la géométrie.[4] En outre, toute approche structurelle ne prend sens que dans l'idée de l'existence de formes invariantes immanentes à des domaines d'objets. La relation entre une approche structurelle et la méthode axiomatique doit reposer sur la constatation précédente. Mais, dans quelle mesure devons-nous comprendre cette relation ? La situation n'est pas claire, à ce sujet Corry observe que :

> « The search for this kind of intrinsic invariant is central to the structural approach as the axiomatic formulation of concepts. Jordan's example shows

[3] *Ibid.*, p. 39.

[4] Voir Demopoulos, W. (1994), «Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory,» *History and Philosophy of Logic*, vol. 15, pp. 211-225. Shapiro, S. (2005), «Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-Mathematics,» *Philosophia Mathematica*, 13, pp.61-77. Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, p. 157.

> that the former is not logically conditioned by the latter and that, from an historical point of view, both features did not always go hand to hand. »[5]

Le problème est le suivant : la relation entre les formes invariantes et la méthode axiomatique n'est pas directe, une approche structurelle n'en dépend pas essentiellement. En fait, la notion fondamentale pour une approche structurelle des mathématiques est celle d'isomorphie, laquelle est liée directement à l'idée de formes invariantes par le concept de représentation. Plus exactement, l'illustration donnée par Corry, à l'aide du théorème de Jordan sur les groupes de permutations, souligne exactement la primauté de ces concepts. De plus, il n'est pas certain que même Hilbert ait entretenu une compréhension structurelle des mathématiques par la méthode axiomatique. À cet égard, Corry soutient que:

> « Hilbert's own conception of axiomatic did not convey or encourage the formulation of abstract axiomatic system: his work was instead directly motivated by the need to better define and understand existing mathematical and scientific theories. In Hilbert's view, the definition of systems of abstract axioms and their analysis following the above described guideline, were meant to be conducted for established and elaborated mathematical entities. »[6]

Un examen historique nous révèle qu'il y a eu plus ou moins de conceptions précises en termes structurels des mathématiques et que cette dernière ne peut reposer uniquement et essentiellement sur la méthode axiomatique. Un questionnement d'ordre méthodologique est implicite à un questionnement sur la nature structurelle des mathématiques et nous retrouvons davantage en mathématiques une compréhension informelle de la notion de structure. Par

---

[5] Corry, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser Verlag, p. 31.
[6] *Ibid.*, p. 162.

conséquent, si le SPM est justifié de soutenir que les mathématiques sont une science générale des structures, il ne lui est pas seulement nécessaire de nous expliciter ce qu'est une structure mathématique, mais il doit aussi nous montrer que sa notion de structure est celle des mathématiciens.

Dans le cadre de ce mémoire, nous examinons principalement les thèses philosophiques du SPM tenues par Stewart Shapiro, Michael D. Resnik et Geoffrey Hellman. Ces auteurs ont récemment mis de l'avant le SPM comme une position philosophique sérieuse en philosophie des mathématiques. Plus précisément, nous analysons les conceptions de la notion de structure mathématique proposées par ces auteurs. Chacun nous offre une notion de structure répondant à des conceptions métaphysiques spécifiques, et construite à l'aide d'une méthodologie commune de nature modéliste et ensembliste. Dans une discussion sur la notion de structure en mathématiques, il est difficile de ne pas considérer la théorie des catégories, puisqu'un type de ses objets principaux d'étude sont les morphismes préservant la structure de diverses entités mathématiques. Et ces concepts clés sont construits essentiellement sous l'idée d'une détermination unique par l'existence d'un isomorphisme près entre les éléments exemplifiant ces concepts. Les cadres conceptuels de la théorie des catégories constituent donc une position méthodologique originale et sérieuse pour le SPM.[7] En ce sens, notre étude ne couvre qu'une partie du spectre des positions possibles du SPM. Néanmoins, notre examen permet d'identifier les limites et

[7] Voir McLarty, C. (1993), «Numbers Can Be Just What They Have To,» *Nous*, vol. 27, pp. 487-498. Awodey, S. (1996), «Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective,» *Source Philosophia Mathematica*, vol. 4, pp. 209-237.

difficultés spécifiques à certaines orientations ontologiques et méthodologiques pour le développement d'une thèse structuraliste en philosophie des mathématiques. Dans le but de révéler les principaux points de divergences et de circonscrire notre étude à l'intérieur de questions précises, nous articulons dans un premier chapitre une analyse partielle des concepts fondamentaux : d'objet, d'identité et d'objectivité. Par la suite, nous identifions les lieux communs des thèses du SPM et certaines motivations philosophiques spécifiques au SPM. Le second chapitre, qui constitue l'essentiel de notre mémoire, est divisé en deux sections principales correspondant à une classification des thèses selon deux conceptions ontologiques divergentes.[8] Au risque de nous répéter, nous jetons, en premier lieu, un regard critique à la thèse réaliste des structures abstraites de Shapiro. Lequel se base sur la catégoricité d'une classe de théories formelles et sur l'idée d'une théorie des structures abstraites (TSA) qui stipule l'existence des objets de positions pour supporter son réalisme sémantique et ontologique des structures. Puis, dans la dernière sous-section, nous examinons les thèses anti-réalistes des structures de Resnik et Hellman, lesquels refusent de poser l'existence de structures abstraites. Resnik partage avec Shapiro une conception des structures comme étant une collection de positions. Mais il ne comprend pas les positions comme des objets, car pour lui il n'y a pas d'identité entre les positions de structures différentes. Nous offrant une reconstruction schématique des mathématiques sous une logique modale, une structure est essentiellement pour

---

[8] Étant donné des limites du mémoire court, il nous est impossible de mener une analyse exhaustive de ces notions fondamentales en philosophie.

Hellman un système d'objets concrets. Malgré ces différences, l'ensemble de ces thèses du SPM partage en commun une même méthodologie d'inspiration ensembliste fondée sur l'axiome d'extensionalité et une même conception de l'objectivité. De ces raisons, nous qualifions ces thèses sous la rubrique d'un structuralisme orienté objet.[9] En adoptant cette voie méthodologique, il semble à première vue que ces thèses relativement équivalentes ne parviennent pas essentiellement à développer une notion de structure générale et uniforme. Finalement, ce problème se traduit par une incapacité de ces thèses à couvrir l'ensemble des théories mathématiques malgré leurs efforts à expliciter les mathématiques en termes structurels.

[9] En contraste, nous qualifions les thèses adoptant le cadre conceptuel de la théorie des catégories sous la rubrique d'un structuralisme orienté morphisme.

1. Objet, identité, objectivité et le SPM

Dans cette section, nous analysons préliminairement les notions d'objet, d'identité et d'objectivité en général. En procédant ainsi, à partir des éléments considérés comme essentiels à la compréhension abstraite de la notion d'objet et de l'objectivité, nous délimitons à la fois un ensemble de questions et un ensemble de critères pertinents à l'examen critique de la variété des conceptions de la notion de structure du SPM.

1.1 Les Objets et leurs critères d'identité

Qu'est-ce qu'un objet ? Une réponse à une question aussi vague et abstraite dépend, puisqu'elle est en relation avec notre manière de classifier les objets, de ce que nous concevons comme un type d'objets. Indépendamment du fait de l'existence de certains types d'objets, il y a des distinctions essentielles entre un objet physique, un objet mental, un objet abstrait et un objet fictif. Ces distinctions peuvent être déployées à partir des éléments que nous jugeons essentiels à l'identification des types d'objets. Chaque type d'objets peut être distingué par des critères d'identité qui les caractérisent respectivement, et l'identité d'un type d'objets dépend des modes d'être ou des attributs spécifiques à ce type d'objets. D'où, corrélativement à la notion d'objet, il y a la notion de propriété qui est une qualité ou encore un aspect que possède un objet. Par les propriétés que nous attribuons aux objets, nous distinguons différents types d'objets selon les ensembles de propriétés qui leur sont attribuables. En ce sens, nous disons que certaines propriétés sont constitutives d'un certain type d'objets. Nous pouvons aussi distinguer les propriétés dites intrinsèques des propriétés purement relationnelles. Une propriété d'un objet est intrinsèque si elle dépend de la constitution interne de cet objet; par exemple, le fait qu'un objet soit organique dépend essentiellement de la nature des éléments physiques qui le composent. Cependant, dans notre usage courant du langage, nous utilisons des expressions pour qualifier de manière relative les objets. Par ce fait, nous pouvons classer les propriétés intrinsèques en deux classes, celles qui sont internes et celles qui sont externes. Ces dernières sont des propriétés qui dépendent relativement de la constitution interne des objets. Par exemple, le fait que Pierre soit plus grand que Marie dépend de la taille de Pierre et de la taille de Marie. La taille d'un objet étant une propriété intrinsèque interne. Négativement, une propriété purement relationnelle est une propriété qui n'est pas intrinsèque. Bien entendu, une réponse à la première question, à savoir ce qu'est un objet, ne peut consister en l'énumération des catégories ou des types d'objets. Encore faut-il expliciter en quoi consiste « être un objet », ce que tous les types d'objets partagent en commun. Sur ce point, nous pouvons énumérer différentes réponses possibles :

(1) Un objet est le sujet d'une prédication.

(2) Un objet est un ensemble de propriétés.[10]

(3) D'un point de vue grammatical et logique, un objet se distingue d'un concept (ou d'un attribut) du fait qu'il est la valeur ou l'objet dénoté par l'expression fonctionnelle du concept.[11]

---

[10] Voir Jacquette, D. (2002), *Ontology*, Montreal: McGill-Queen's University Press.

[11] Cette réponse de Frege se fond sur une mise en correspondance entre les catégories ontologiques de concept et d'objet et les catégories linguistiques de prédicats et de termes.

(4) Sémantiquement et plus généralement, un objet est la valeur de toute variable d'une quantification dans le contexte d'une proposition.[12]

(5) Un objet est toute entité possédant un critère d'identité bien déterminé.[13]

(1), (3) et (4) sont trop imprécises et peu informatives. Elles sont imprécises, car n'importe quelle propriété peut être considérée comme un objet. Premièrement, une propriété peut être le sujet d'une prédication. Deuxièmement, dans des logiques du second ordre et d'ordres supérieurs, il est possible de quantifier sur des propriétés. Elles sont peu informatives, car même en acceptant qu'il soit possible d'attribuer des propriétés aux objets, nous ne savons pas ce qui différencie un objet d'un autre. De plus, affirmer qu'un objet soit la valeur d'une quantification dans un énoncé, c'est-à-dire l'ensemble des objets-dénotés par cette variable, revient à dire qu'un objet est un objet dénoté. Bien entendu, il est possible d'amender (1), (3) et (4) en incluant (5) et en montrant que les propriétés n'ont pas de critères d'identité spécifiques afin d'éviter une inflation de l'ontologie. Ce qui semble essentiel à la notion d'objet est la possibilité de discriminer les objets par ses propriétés, et cela n'est possible que si un objet possède un critère d'identité bien déterminé. D'où le slogan de Quine stipulant qu'il n'y a pas d'entité sans identité. Le problème avec (2) est qu'il signifie que nous pouvons réduire les objets à des

---

Cependant, l'analyse du prédicat prend un tournant « fonctionnel » avec Frege, le prédicat est un concept incomplet analogue à une fonction. Les termes singuliers sont des objets complets, alors que les prédicats sont des concepts qui ont besoin d'être saturés par des objets pour dénoter une valeur de vérité.

[12] Voir Quine, W. V. (1969), *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia University Press.

[13] Voir Lowe, E. J. (1998), *The Possibility of Metaphysics : Substance, Identity, and Time*, Oxford University Press. Section 2. Bien entendu, nous excluons comme bien déterminé des critères circulaires ou triviaux, comme le fait qu'une entité est identique à elle-même.

propriétés. Or, d'un point de vue sémantique, par (3), il doit y avoir une distinction métaphysique entre les objets et leurs propriétés. Une propriété est toujours une propriété de quelque chose. Mais nous pouvons endosser (2) sur la base d'une opposition à la notion aristotélicienne de substance. Il ne fait pas sens de présupposer quelque chose comme une substance sur laquelle viennent se déposer des propriétés, pour la simple raison que nous ne pouvons pas discriminer, ni délimiter cette substance en des entités disjointes. Puisque dépouillée de toutes propriétés, il n'est plus possible de discriminer la substance en diverses entités. Cependant, un adhérent de la thèse (2) serait peu enclin à accepter que n'importe quel ensemble de propriétés puisse constituer un objet, même si, à proprement parler, pour ce dernier, il n'y a pas d'objet. Le point saillant est que, même pour ce dernier un critère d'identité bien déterminé est essentiel pour discriminer certains types d'entités. De plus, si une propriété est toujours une propriété de quelque chose, en quoi peut consister la propriété d'un ensemble, si ce n'est le simple fait que certains éléments y sont contenus. Par conséquent, il faut distinguer un objet de l'ensemble des propriétés le caractérisant. Bien qu'il soit possible d'attribuer une propriété matérielle à un objet matériel, nous ne pouvons pas l'attribuer à l'ensemble des propriétés de cet objet. Par exemple, il est insensé de dire que l'ensemble des propriétés du chien est liquide. Assez des querelles métaphysiques. Ce que nous pouvons retenir pour le reste de notre discussion est que nous pouvons concevoir un objet minimalement par (5) et que, corrélativement à la notion d'objet, sans s'encombrer de la question de leur réductibilité, leur analyse ne peut se faire sans l'analyse de leurs propriétés constitutives.

Précisons qu'il ne fait pas de sens de parler des objets et de leur critère d'identité sans, de manière implicite ou explicite, les comprendre sous un certain type. En ce sens, un critère d'identité, pour être applicable dans sa forme la plus générale, doit référer à des objets d'un certain type. L'identité est alors toujours stipulée entre les objets d'un certain type.[14] En contraste, de la tradition philosophique, nous pouvons évoquer le critère de l'identité des indiscernables de Leibniz : Soit x et y des objets: $(\forall x)(\forall y)((x=y)\rightarrow(P(x) \leftrightarrow P(y)))$. La quantification porte sur l'ensemble de tous les objets, abstraction faite des types d'objets. Cette formulation du critère de Leibniz est moins litigieuse que sa converse qui suppose que l'identité qualitative implique l'identité numérique. Nous laissons de côté une discussion à propos de la forme précise que doit prendre un critère d'identité, car nous risquons de perdre de vue l'objectif principal de cette étude. Il suffit de constater que la forme d'un critère d'identité doit être en fonction de son rôle, c'est-à-dire de déterminer et discriminer des types d'objets : de valider un type d'objet d'un point de vue ontologique. Cela étant dit, la question de l'identité entre structures est déterminante pour les différentes conceptions envisageables du SPM, car elle détermine différentes compréhensions de la notion de structure qui sépare le SPM en différents types. Ainsi, dans le cadre de notre analyse du SPM, pour une forme de structuralisme donnée, nous devons déterminer :

(1) Si le terme « structure » dénote un objet, en quoi consiste l'identité entre structures et la nature de cet objet.

---

[14] *Ibid.*

(2) Quelles sont les propriétés constitutives d'une structure et de quels types sont-elles ?

Concernant (2), il reste à préciser selon les thèses du SPM, si les propriétés relationnelles constituant une structure sont de nature purement relationnelle ou externe.

1.2 Deux conceptions de l'objectivité

Passons à la notion d'objectivité associée à la notion d'objet et d'identité. Selon deux avenues philosophiques divergentes, soit le contenu objectif (ou les conditions de vérité) de nos propositions est fondé sur l'existence de la référence des termes, soit il est fondé sur les relations logiques. Corrélativement, nous pouvons envisager, d'un point de vue strictement sémantique, que la vérité des énoncés mathématiques est déterminée de manière unique. Mais, indépendamment de cette optique réaliste du point de vue sémantique, nous pouvons considérer l'objectivité de ces énoncés comme étant fondée sur l'existence indépendante des objets mathématiques auxquels se réfèrent les termes de nos énoncés. Dès lors, nous sommes des réalistes d'un point de vue ontologique et nous adoptons implicitement une notion d'objectivité fondée sur l'existence de la référence des termes. Conséquemment, sous cette même conception, une proposition d'identité vraie à propos d'un type d'objet conduit nécessairement à l'existence de ce type d'objet. De manière analogue, à la distinction entre une vérité de fait et une vérité logique, dans le second cas, la nature de la vérité mathématique est comprise davantage sous une dimension formelle. Ainsi, la proposition d'identité nous permet de parler objectivement en termes conceptuels de cette entité sans poser la question de son existence.

Sur la distinction entre l'identité comme une détermination sémantique et ontologique, c'est la signification de la notion d'objectivité qui sépare essentiellement ces deux points de vue divergents. En se fondant sur les travaux de Coffa (1991), Landry (2001) donne une défense de l'objectivité des mathématiques reposant sur une conception sémantique (ou formelle) de l'objectivité. Nous pouvons retrouver dans ce texte une distinction entre une conception de l'objectivité reposant sur la référence, c'est-à-dire sur l'existence d'objets extra-linguistiques et une conception interne de l'objectivité d'inspiration carnapienne reposant sur le fait que « les structures partagées sont porteuses d'objectivité ».[15] Ainsi pour le SPM, si l'objectivité dépend de la référence, c'est-à-dire d'objets extra-linguistiques, l'objectivité des mathématiques repose en dernier lieu sur l'existence des structures. Dans le cas contraire, il est essentiel de comprendre conceptuellement la signification du terme « structure ». Conséquemment, dans tous les cas, il est aussi essentiel d'expliciter pour un structuralisme donné :

(3) comment il détermine théoriquement (formellement ou informellement) sa notion de structure et quelles sont les ressources conceptuelles utilisées à cet effet.

---

[15] Landry, E. (2001), «Logicism, Structuralism and Objectivity,» *Topoi: An International Review of Philosophy*, vol. 20, p. 86. Notre traduction.

1.3. Le structuralisme en philosophie des mathématiques

Avant de présenter les thèses principales du SPM, nous caractérisons dans ce qui suit les motivations et conceptions générales communes aux thèses du SPM. Par la suite nous explicitons les points de divergence de nature méthodologique et ontologique séparant ces thèses.

Pour le structuralisme en philosophie des mathématiques (SPM), l'objet d'étude d'une théorie mathématique, c'est la ou les structures exhibées par un ou des systèmes d'objets d'un certain type. Ce qui importe, ce sont les propriétés structurelles et non la nature des objets qui auraient des propriétés intrinsèques. La thèse principale du SPM est que les propriétés constitutives des objets mathématiques sont de nature relationnelle. Par exemple, il nous faut interpréter l'ensemble des axiomes de Peano comme décrivant la structure d'itérations des nombres naturels et comme définissant implicitement la notion de nombre. Dans la mesure où il n'y a pas de saisie ni de compréhension d'un objet isolé, la primauté de la notion de structure sur la notion d'objet s'exprime par un endossement d'une forme d'holisme par le SPM. Sous le prisme du structuralisme, les propriétés constitutives des objets sont de nature relationnelle; un objet est toujours déterminé par l'ensemble de ses relations aux autres objets. Donc, la structure de l'ensemble des relations d'objet détermine entièrement les objets. De cet aspect holistique du SPM, certaines questions, du type « à quoi dénote 2 », sont considérées comme insensées.[16] Dès lors, une première motivation du SPM est d'offrir une compréhension des sciences mathématiques qui soit non-réductionniste. Nous n'avons pas à savoir si les nombres dénotent des classes d'équivalence, les ordinaux de Von Neumann ou les ensembles de ZF, ce qui compte, c'est la structure de la suite des nombres.[17] Mais en quel sens est-ce que le SPM est un anti-réductionnisme ? Plus exactement, la forme d'anti-réductionnisme adoptée par le SPM privilégie une conception des objets mathématiques impliquant une multiplicité d'univers d'objets, donc une relativité de l'ontologie et des références multiples pour l'interprétation des termes de nos théories mathématiques. Étant donné que la référence est relative à un contexte d'interprétation, l'identité entre objets est relative structurellement à un univers d'objets. Il est insensé de savoir si « 2 » est identique à Jules César.[18] Il faut comprendre les termes à l'intérieur de nos théories comme des indexicaux, c'est-à-dire que l'assignation de leurs références dans une interprétation est contextuelle. Toutes ces motivations du SPM s'expriment sous différentes variantes théoriques et différentes acceptions du terme « structure ». Elles partagent néanmoins une méthodologie minimale commune, c'est-à-dire une orientation axiomatique.

---

[16] Précisons que cet aspect holistique peut être local ou global.

[17] Sur la question de la réduction des objets mathématiques, Paul Benacerraf, dans l'article '*What number could not be*', a offert un argument en faveur d'une approche structuraliste. Suivant cette proposition, Hellman, dans un programme pour une reconstruction structuraliste des mathématiques, adopte une attitude anti-réductionniste qui, selon ce dernier, doit caractériser toute approche structuraliste. Voir Benacerraf, P. (1965), «What Numbers Could Not Be,» *Philosophical Review, vol. 74, pp*, 47-73. Hellman, G. (1989), *Mathematics without Numbers : Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford University Press.

[18] Frege, G. (1969), *Les Fondements De L'arithmétique: Recherche Logico-Mathématique Sur Le Concept De Nombre*, Paris: Editions du Seuil.

Pour emprunter une qualification de Reck (2003), abstraction faite des considérations métaphysiques et sémantiques, un structuralisme méthodologique est caractérisé par son adoption de la méthode axiomatique. [19] L'étude d'une structure mathématique est l'étude d'un système d'objets satisfaisant un ensemble de conditions, c'est-à-dire un ensemble d'axiomes. Dans les cadres minimaux communs du SPM, une théorie formelle T est comprise comme une structure abstraite S décrite par la conjonction des axiomes de T, dont les instances sont n'importe quels systèmes d'objets O (ou modèles) satisfaisant les axiomes de T.[20] .L'étude d'une structure S exprimée par les axiomes de T est réalisée par l'étude de n'importe quels systèmes O satisfaisant les axiomes de T. Mais, dans la pratique, les mathématiciens ne s'intéressent pas seulement aux systèmes de T de manière isolée, ils étudient aussi leurs relations et similarités. Dans ce contexte, la notion de *catégoricité* contient un potentiel d'interprétation philosophiquement importante.[21] Comme le note Corcoran (1979): « The notion of isomorphism between two interpretations was adopted as a mathematical formulation of the idea of two interpretations having the same form. »[22] De plus, si tous les systèmes O satisfaisant les axiomes de T sont isomorphes, alors toutes assertions vraies d'un certain système O en particulier seront aussi vraies pour tout autre système isomorphe à O. En somme, se fondant sur la catégoricité de certaines théories

---

[19] L'appellation de Reck correspond à ce que Weaver (1998) dénote par « neutral structuralism ».

[20] Du fait que, dans la pratique, certains assimilent le terme « structure » au terme « système », on dira aussi que la théorie T dénote un type de structures.

[21] Une théorie T est catégorique si tous les systèmes O satisfaisant T sont isomorphes.

[22] Corcoran, J. (1980), «Categoricity,» *Source History and Philosophy of Logic*, vol. 1, p. 189.

formelles, les tenants du SPM soutiennent que, d'une part, dans l'étude d'une structure abstraite *S,* nous faisons abstraction de la nature intrinsèque des objets respectifs de tout système d'objet *O*, et, d'autre part, un réalisme sémantique reposant sur la conviction selon laquelle tout énoncé à propos de *S* possède une valeur de vérité.[23]

Il est possible de différencier et de classer de différentes manières les thèses du SPM, selon que nous les examinions, soit d'un point de vue méthodologique, soit d'un point de vue ontologique (et métaphysique). Toutefois, les thèses partageant des positions métaphysiques divergentes peuvent s'accorder sur une méthodologie commune et vice-versa. Par conséquent, quel est le point de vue le plus perspicace pour caractériser l'ensemble des thèses du SPM ? Il est difficile d'affirmer que les considérations d'ordre méthodologique et les considérations d'ordre ontologique sont exclusivement indépendantes. En ce sens, notre caractérisation du SPM s'articulera selon les deux points de vue. Dans la littérature actuelle portant sur le SPM, nous pouvons identifier deux orientations méthodologiques s'affrontant dans un débat afin de déterminer quel est le cadre conceptuel le plus approprié pour une compréhension des structures mathématiques. L'une s'articule sur la méthode de la théorie des modèles et la

---

[23] Bien qu'il soit possible de tenir une position anti-réaliste sur le plan sémantique et une conception structuraliste des mathématiques, aucun auteur jusqu'à présent n'a articulé une thèse philosophique de cette nature. Cela étant dit, nous ne croyons pas que le SPM se caractérise essentiellement par le fait d'un endossement général d'une forme de réalisme sémantique.

notion d'ensembles (et des concepts similaires).[24] L'autre se fonde sur des notions et la méthode de la théorie des catégories. Du point de vue ontologique, le SPM se sépare en deux camps, il y a, d'un côté, un type de structuralisme dénommé *ante rem* et, à l'opposé, il y a un type de structuralisme qualifié d'*in re*. Cette terminologie utilisée par Stewart Shapiro a pour connotation l'opposition entre Platon et Aristote concernant la réalité des universaux. Dans le contexte du SPM, l'opposition est entre la réalité des structures. De façon similaire à la croyance de Platon en l'existence indépendante des universaux en rapport à leurs instances, le structuralisme *ante rem* défend l'existence des structures abstraites indépendamment des systèmes d'objets qui les exemplifient. Alors qu'il n'y a pas réellement de structures abstraites pour le structuralisme *in re,* il n'y a que des systèmes d'objets. L'identité structurelle entre systèmes d'objets nous permet uniquement de *parler* d'une structure commune et non d'effectuer une réification des termes de structures en objets abstraits.

[24] Par exemple, Shapiro (1997) et M. Resnik (1997) conçoivent une structure en termes de collection de positions et Hellman (1989) préfère s'appuyer sur la méréologie pour développer sa conception nominaliste des structures.

2. Un structuralisme orienté objet

Dans ce qui suit, notre analyse porte sur les positions théoriques concernant les structures appartenant à cette catégorie philosophique qui comprend l'objectivité en termes de l'existence de la référence et qui, d'un point de vue méthodologique, s'inspire de la méthode de la théorie des modèles et se fonde sur des concepts similaires à la notion d'ensembles. Malgré ces lieux d'entente, la discorde se trouve sur le plan ontologique. Même en s'accordant sur une même notion d'objectivité, le désaccord survient au moment de déterminer quel type d'objet existe. Le structuralisme *ante rem* clame l'existence indépendante d'objets abstraits comme les structures abstraites, alors que, pour le structuralisme *in re,* il n'y a que des objets concrets comme existant. Pour ce dernier, il n'y a que des systèmes d'objets concrets exemplifiant une structure, mais une structure n'existe pas indépendamment des systèmes d'objets concrets. Nous débutons avec la thèse réaliste de Stewart Shapiro. Ce dernier, pour justifier l'existence indépendante des formes abstraites, pose leurs propres exemplifications par l'existence de systèmes de positions vues comme des objets. Mais, Shapiro omet de nous offrir un critère d'identité pour ces entités abstraites. De l'examen des propositions de Shapiro sur la nature des propriétés purement structurelles caractérisant les objets de positions et de ces indications sur l'identité structurelle, nous pouvons construire un critère d'identité entre positions satisfaisant les exigences réalistes de l'approche de Shapiro. Ce critère est problématique, car il semble révéler une inconsistance dans l'approche *ante rem*. Ignorant ce problème à propos de l'identité entre positions, Shapiro se contente de stipuler la cohérence et l'unicité de sa théorie pour justifier son ontologie. Or, en demeurant imprécis sur ce qu'il entend par cette notion de cohérence informelle, il délaisse les fondations de sa théorie sur un « sol éthéré ». D'un point de vue ontologique diamétralement opposé, un nominaliste n'hésiterait point à ce stade à rayer ce type d'entités de son ontologie. Pour des structuralistes *in re* comme Resnik et Hellman, il n'y a pas lieu de réifier des formes abstraites de systèmes d'objets concrets en objets abstraits. Cependant, le structuralisme *in re* a aussi son lot de problèmes. Celui-ci conçoit que l'objectivité et la vérité des mathématiques sont déterminées par l'existence d'un nombre potentiellement infini d'objets qualifiés de concrets, comme des points géométriques ou des points de l'espace physique.[25] Si « concret » signifie (ou est coextensif) à « matériel », nous pouvons fortement douter de l'aspect concret de ces entités. Plus particulièrement, sur la notion de structure, Resnik considère qu'il y a des entités structurelles particulières abstraites de systèmes d'objets concrets, mais ces entités ne sont pas légitimement des objets, puisque selon Resnik, il n'y a pas d'identité entre les structures. Comme Shapiro, Resnik conçoit qu'une structure est une collection de positions, mais les positions ne sont pas des objets. Du fait, qu'il n'y a pas d'identité structurelle, il n'y a donc pas d'identité de positions. Or, si les

---

[25] Un réaliste comme Shapiro peut accepter une telle position avec la seule réserve que l'objectivité des mathématiques doit se fonder sur des entités de réalité supérieure aux objets concrets. C'est à se demander si cette manière d'articuler le débat du structuralisme, comme le fait Shapiro sur des querelles métaphysiques déjà existantes, apporte une compréhension nouvelle ou rend davantage obscure la contribution possible d'une vue des mathématiques en termes structurels.

sciences mathématiques sont reconnues pour leur applicabilité générale du fait de leur aspect formel, la conception des structures de Resnik, comme des entités particulières dépendantes de la nature des objets par lesquels elles sont abstraites, ne peut tenir compte de cet aspect fondamental des mathématiques. Similairement à Resnik, Hellman exclut de son ontologie les objets de positions et les propriétés purement relationnelles. Cependant, il nous offre une reconstruction structurelle des mathématiques en termes schématiques qui peut être compatible avec la généralité des mathématiques. Une structure abstraite est le schéma d'un système d'objets et l'existence des structures stipulées en termes de possibilité dépend de l'existence possible de certains systèmes d'objets. Sous un scrupule nominaliste, la reconstruction proposée par Hellman prend soin de ne pas référer à des entités considérées comme abstraites, tels que des mondes possibles. Nonobstant, en articulant sa thèse sur la notion de possibilité et sur certains postulats de la méréologie, Hellman est confronté au fait que certaines présuppositions d'ordre métaphysique sous-tendant sa théorie sont en conflit avec ses préférences nominalistes.

2.1 Une théorie réaliste des structures

Examinons la théorie des structures de Shapiro qu'il présente comme un structuralisme *ante rem*. Le réalisme de Shapiro est global, c'est-à-dire qu'il défend à la fois un réalisme sémantique et ontologique des structures abstraites. En se fondant sur la théorie des modèles et la théorie des ensembles, Shapiro donne une défense de son réalisme par la cohérence de sa théorie des structures et la catégoricité de certaines structures mathématiques. Comme nous l'avons mentionné, toute forme de structuralisme dans sa méthodologie débute par une identité entre systèmes d'objets. En ce sens, pour Shapiro l'existence de structures abstraites est donnée en premier lieu par l'identité structurelle des systèmes d'objets qui les exemplifient. Un critère naturel pour l'identité structurelle est l'isomorphie. Cependant, pour des systèmes contenant des relations ou des fonctions différentes, que l'on considère équivalentes par le simple fait que leurs relations ou fonctions sont interdéfinissables, l'isomorphie est un critère trop strict. Un exemple de cette situation est donné par Shapiro par les deux systèmes : $\langle \mathbb{N},+,\bullet,< \rangle$, $\langle \mathbb{N},+,\bullet, \rangle$, où la relation d'ordre peut être exprimée dans le second système par la simple addition. Dans ce cas $\langle \mathbb{N},+,\bullet, \rangle$ est défini comme un sous-système complet de $\langle \mathbb{N},+,\bullet,< \rangle$.[26] L'idée est que plusieurs systèmes sont structurellement équivalents, mais leurs formulations diffèrent en ce qu'elles s'expriment avec des termes primitifs de fonctions et de relations différents. Afin de remédier à cette situation, Shapiro adopte aussi le critère d'équivalence structurelle de Resnik qui stipule que deux systèmes M et N quelconques sont structurellement équivalents si et seulement s'il existe un système P, et, M et N sont isomorphes à tous sous-systèmes complets de P. Ainsi, deux conditions déterminent l'équivalence structurelle :

(i) Les ensembles des éléments respectifs de M, N et P sont coextensifs;

---

[26] Un sous-système de P est un système contenant tous les éléments de P et des relations ou fonctions pouvant définir toutes les relations ou fonctions de P.

(ii) l'ensemble des fonctions et relations de P contient les fonctions et les relations de M et N.

Abstraction faite de (ii), l'équivalence structurelle n'est simplement que l'équivalence définitionnelle entre les termes primitifs de fonctions et de relations de différents systèmes. De (i), nous voyons que la conception des structures de Shapiro et Resnik est orientée par une conception ensembliste basée sur l'axiome d'extensionalité.

Sur la nature des structures, Shapiro nous offre la caractérisation suivante : « A *structure* is the abstract form of a system, highlighting the interrelationships among the objects, and ignoring any features of them that do not affect how they relate to other objets in the system. »[27] Le rapport entre les systèmes (ou modèles) et les théories formelles est sémantique, ils servent à définir dans une interprétation la vérité dans le cadre d'un langage formel, et comme Corcoran le souligne: «… truth in a formal language has nothing to do with the 'essence' of the objects in an interpretation, but rather depend solely on the form of the interpretation or, as it is sometimes put, on the formal interrelations among objects. »[28] Cependant, dans l'optique *ante rem* de Shapiro, l'existence d'une structure, comme la forme abstraite d'un système, ne semble pas dépendre de l'identité entre systèmes. Car, selon le réalisme ontologique de Shapiro stipulant l'existence indépendante des structures, les structures n'ont pas besoin de systèmes

---

[27] Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, p. 74.
[28] *Ibid.* p. 189.

pour être exemplifiées, elles s'auto-exemplifient.[29] De la simple observation du rapport sémantique entre système et théorie, et de la nature purement relationnelle de la notion de vérité dans un langage formel, rien ne permet encore à Shapiro de justifier l'existence indépendante des formes abstraites.

Selon Shapiro, une évidence de l'existence des structures comme des objets abstraits nous est donnée si nous sommes en mesure de parler objectivement de ces entités. L'ensemble de la stratégie *ante rem* de Shapiro s'inspire directement de la stratégie frégéenne pour l'existence des objets de nombres par l'usage grammatical des termes de nombres.[30] Subséquemment, pour parler objectivement des structures, il est essentiel pour Shapiro de posséder un critère d'identité entre structures dans le cadre d'une théorie des structures. Notons que, pour Shapiro, l'ontologie est relative au langage et le langage demeure une convention. Donc, nous pouvons convenir d'un critère d'identité selon les ressources conceptuelles du langage que nous adoptons pour déployer notre théorie. La théorie des structures de Shapiro est exprimée dans une logique du second ordre et l'identité entre structures est donnée par l'isomorphie.

Pour Shapiro, une structure est une entité abstraite et elle est essentiellement une collection de positions et de relations. Un système exemplifie une structure par le fait que ses objets occupent les positions de la structure et

---

[29] Pour emprunter une métaphore de Wittgenstein, dans l'approche *ante rem*, l'identité structurelle entre systèmes est comme une échelle permettant d'atteindre le niveau des structures abstraites, et c'est comme si, une fois parvenus à ce niveau, nous rejetions l'échelle par laquelle nous sommes montés.

[30] Frege, G. (1969), *Les Fondements De L'arithmétique: Recherche Logico-Mathématique Sur Le Concept De Nombre*, Paris: Editions du Seuil.

satisfont les conditions relationnelles de la structure. Autrement dit, puisque les structures formelles sont des formes abstraites de systèmes, les objets et les relations des systèmes sont respectivement des positions et des relations dans les structures formelles. De ce fait, tous les objets mathématiques sont des positions d'une certaine structure formelle. Néanmoins, Shapiro maintient que nous devons interpréter littéralement les énoncés contenant des termes de positions comme dénotant des objets. Sans éliminer les objets, dans l'option *ante rem,* il est davantage question d'un pluralisme de catégories d'objets. Les termes de positions sont conceptualisés relativement comme des variables et des objets. Exploitant la stratégie frégéenne, pour Shapiro, la relativité de la notion d'objet repose sur un double usage grammatical du verbe « être ». Contrairement à Frege, Shapiro ne privilégie pas l'usage prédicatif ou l'usage du verbe être comme une identité. L'idée est que l'usage de « est » comme une identité soutient la perspective que les positions dans les structures sont des objets. L'usage de « est », en tant qu'une identité entre deux termes, suggère une interprétation des termes comme dénotant un même objet. Étant donné que nous utilisons à la fois les termes singuliers pour exprimer les objets et les positions, le cas d'un énoncé d'identité entre deux positions est grammaticalement similaire au cas où il s'agirait d'une identité entre objets. C'est sur cette similitude grammaticale que repose le point de vue selon lequel les positions sont des objets. Par l'usage prédicatif de « est » comme une copule, la prédication est relative à un système exemplifiant une structure abstraite. Dans ce contexte, les objets sont des positions d'une structure formelle, dans la mesure où ils occupent ces positions en satisfaisant l'énoncé construit à partir des termes de positions interprétés de manière adjectivale. Donc, les éléments à l'intérieur des structures abstraites peuvent être considérés à la fois sous une perspective comme dénotant des objets et sous une autre perspective comme de simples positions (ou variables), tout dépendant du contexte d'usage linguistique. Il faut ajouter que, sous la perspective que les objets sont des positions, les énoncés concernant les positions dans une structure abstraite sont pris comme des généralisations sur tous les systèmes exemplifiant cette structure.[31] À présent, il est facile de comprendre comment les structures s'auto-exemplifient pour Shapiro. Il est évident que l'existence d'un système exemplifiant une structure est donnée par la caractérisation même de la structure abstraite, si son existence repose exclusivement sur l'idée que les positions sont des objets. Mais, l'existence des structures ne peut être fondée sur leurs propres instances en tant que systèmes de positions, l'argument étant alors circulaire. Tout repose sur la cohérence de la théorie des structures abstraites. Comme nous le verrons plus loin, Shapiro demeure obscur sur cette notion de cohérence. Nous pouvons aussi relativiser le couple (structure abstraite/système) par l'application de la même idée que les positions sont des objets. Pour Shapiro, l'isomorphie est aussi un critère d'identité entre structures abstraites. Il est donc possible, de ce point de vue, par l'isomorphie entre structures abstraites, de prendre les structures abstraites comme des objets et définir un système de ces objets, lequel exemplifie une autre structure

[31] Sous une autre catégorisation, le structuralisme soutenu par Shapiro est compatible avec ce que Reck et Price (2000) dénomme un structuralisme universaliste, dans la mesure où les termes d'une théorie formelle sont vus comme des variables dénotant tous les objets de systèmes satisfaisant la théorie.

abstraite. De cette relativité de points de vue possibles, qu'est-ce qui différencie essentiellement une structure abstraite d'un système ? Selon Shapiro : «... a structure is a one-over-many... as pattern is to patterned, as universal is to subsumed particular, as type is to token. »[32] Bien qu'une structure, dans la perspective *ante rem,* peut être considérée comme un système d'objets abstraits, une structure demeure essentiellement un type de structures ou un universel par la relation de participation ou d'instanciation aux systèmes d'objets concrets. En relation à l'aspect « universel » des structures, pour Shapiro, la spécificité des structures repose principalement sur la nature purement formelle de ses relations. En comparaison aux relations entre objets d'un système donné, les relations structurelles sont purement relationnelles. De cette propriété des relations structurelles, l'aspect « universel » des structures abstraites peut être compris comme reposant sur leurs « natures libres », c'est-à-dire qu'elles peuvent être satisfaites par n'importe quel type d'objets particuliers. Trivialement, puisqu'une propriété purement relationnelle, comme nous l'avons définie, est une propriété non intrinsèque, une structure abstraite n'est pas déterminée par des propriétés intrinsèques aux objets. Bien entendu, il nous faut comprendre plus substantiellement en quoi consiste une relation purement relationnelle. Empruntant à Tarski la distinction entre le « logique » et le « non-logique », Shapiro suggère que : « Because, in a permutation, any object can be replaced by any other, a notion that is invariant under all permutation ignores any non structural or intrinsic

---

[32] Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, p. 84.

features of the individual objects. »[33] Il s'ensuit que les propriétés purement relationnelles, déterminant les positions d'une structure, doivent être invariantes sous les automorphismes de la structure.

Explorons plus en détail les autres dimensions de la notion de structure de Shapiro en examinant la TSA. La stratégie *ante rem,* pour l'élaboration d'une théorie des structures abstraites, est d'axiomatiser la notion de structure abstraite à partir du cadre théorique de la théorie des modèles. Dans le cadre théorique de la TSA, les variables et les quantificateurs ont pour domaine d'application l'univers des structures abstraites. Les éléments de l'univers de discours de la théorie comprennent ainsi les collections de positions, les relations et les fonctions. La TSA est équivalente à une reformulation de ZFC dans un langage du deuxième ordre avec les structures abstraites considérées comme des notions primitives. Des axiomes de la TSA, nous retrouvons un axiome d'infinité stipulant l'existence d'une structure abstraite avec une infinité de positions. La taille d'une structure dépend ainsi de la taille de la collection de ses positions. Un autre groupe d'axiomes définissent les conditions d'existence de structures abstraites construites par addition ou soustraction de positions, de relations et de fonctions :

Addition : Si S est une structure et R (respectivement f) est une relation (respectivement une fonction) applicable sur les éléments de S, alors il existe une structure S' isomorphe au système contenant toutes les positions de S les fonctions, les relations de S et R (respectivement f).

Soustraction : Si S est une structure et R (respectivement f) est une relation (respectivement une fonction) de S, alors il existe une structure S' isomorphe au système contenant toutes les positions de S les fonctions et relations de S sauf R (respectivement f).

[33] *Ibid.*, p. 99.

Sous-classe : Si S est une structure et c est la sous-classe des positions de S, alors il existe une structure isomorphe au système, dont la classe des éléments est c, contenant aucune relations et fonctions.[34]

L'assurance de l'existence de structures toujours plus larges est donnée par les axiomes suivants, qui ont leurs analogues aussi dans ZF:

Structure de sous-structures : Si S est une structure et s est l'ensemble de ses positions, alors il existe une structure T et une relation binaire R, tel que pour chaque sous-ensemble s' de s, il y a une position x de T tel que $\forall z(z \in s' \Leftrightarrow Rxz)$.

Remplacement : Si S est une structure et f est une fonction tel que pour toute position x de S, fx est une position d'une structure S_x, alors il existe une structure T et une fonction g tel que pour toute position z de chaque S_x il y a une position y de T tel que $gy=z$.[35]

Ce qui conditionne essentiellement l'existence des structures dans la TSA est énoncé par un axiome indiquant que, la cohérence d'une théorie implique l'existence d'une structure la satisfaisant. Enfin, un dernier schéma d'axiome lié au précédent suppose de la cohérence de la TSA en stipulant que pour une proposition formulée dans la TSA, il existe une structure qui satisfait à la fois la proposition et les axiomes de la TSA. De manière analogue aux théories des ensembles, Shapiro pose la restriction qu'il n'y a pas de structures abstraites de toutes les structures abstraites, la limitation de taille est imposée aux systèmes.

Cela étant dit, la TSA ne semble être qu'une version *ad hoc* de la théorie des ensembles, satisfaisant certains choix métaphysiques à l'égard d'une conception réaliste des structures. Bien que la TSA soit une variante en termes de notation de ZFC exprimée dans une logique du second ordre, puisque la différence

[34] *Ibid.*, p. 94.
[35] *Ibid.*

essentielle demeure dans le choix des notions primitives et de l'univers de discours sous-tendant la théorie, elle comporte certains avantages en comparaison à la théorie des ensembles. La TSA, aussi riche que la théorie des ensembles, semble à première vue échapper à certaines difficultés de la théorie des ensembles. Par exemple, il est possible de traiter de manière purement relationnelle la hiérarchie cumulative des ensembles en évacuant la question de la nature des ensembles purs, parce que les structures abstraites ne sont pas dépendantes ontologiquement d'un système d'objets particuliers. Il est supposé que la notion de collection de positions soit plus compréhensible et éclairante que la notion problématique d'ensembles. Shapiro suggère qu'il n'est pas nécessaire d'organiser les collections de positions en ensembles disjoints, il préfère parler de collection de positions tout court. Les positions ne se distinguent que par leur organisation relationnelle. Autrement dit, une position prise individuellement ne se distingue pas d'une autre. Ainsi, nous pouvons en parler comme d'une collection. Il est permis de prendre une collection de positions d'une structure S comme une position dans une autre structure S'. La raison principale derrière ce choix est que, dans la TSA, il doit être possible de construire des structures arbitrairement grandes. Un autre avantage de l'ontologie relative du structuralisme *ante rem* est qu'elle offre une réponse au problème des réductions multiples. Les nombres naturels ne sont que des positions de la structure des nombres naturels et différents objets concrets ou abstraits peuvent occuper les positions de cette structure. Il n'y a pas *un* système des nombres naturels, mais plutôt *une* structure de la suite des nombres naturels exemplifiée par une multiplicité de systèmes d'objets. Donc, il y a différentes théories des ensembles pouvant satisfaire cette structure qui n'est pas réductible à aucun des modèles construits à partir de ces théories.

2.1.2 Éléments critiques

Comme le remarque Shapiro : « Talk of structures, as primitives, is easily 'translated' as talk of isomorphism or equivalence types over a universe of (primitives) sets. » [36] Par suite, si une structure vue comme un système n'est rien d'autre qu'une collection de positions prises comme des objets, il semble que la notion de collection implicite à la TSA ne semble guère se distinguer de la notion d'ensemble. En fait, la notion de structure dans les cadres de la TSA ne se réduit ainsi qu'à une conception des structures comme des ensembles structurés, mis à part le choix métaphysique de réifier ces ensembles structurés en objets abstraits définis comme une collection de positions. Il est bien étrange que Shapiro juge que la TSA, contrairement à la théorie des ensembles, ne soit pas *ad hoc*. Puisqu'elle comprend un noyau d'axiomes fondamentaux empruntés de ZF, caractérisant la formation des collections de positions. Elle semble être davantage une théorie des ensembles déguisée ou modifiée pour satisfaire certaines exigences métaphysiques à l'égard d'une compréhension particulière de la notion de structure. De surcroît, en quoi consiste l'apport original de la TSA pour notre compréhension des structures en comparaison à une compréhension des structures comme des ensembles structurés ? Sur un autre plan, pour Shapiro, une structure mathématique est une structure abstraite qui ne se réduit pas à un système d'objets

---

[36] *Ibid.*, p. 96.

en particulier, mais, étrangement, la théorie des systèmes de collections de positions constitue *la* théorie de ces structures. Mais, si plusieurs systèmes d'objets abstraits, comme des ensembles ou des collections de positions, peuvent exemplifier une même structure mathématique, et que cette dernière ne se réduit à aucun de ces systèmes en particuliers, alors il n'y a aucune raison de préférer la notion de collection de positions aux différentes notions possibles d'ensemble.

Quant à savoir si la TSA répond aux propres motivations du SPM, il semble qu'en examinant de plus près la notion de collection de positions, la TSA se commet à un univers unique d'objets. Le structuralisme de Shapiro prétend ne fixer aucune ontologie unique. Dans son approche d'inspiration frégéenne, Shapiro, en se fondant sur la notion d'identité dans le langage, fait dépendre la TSA d'une ontologie des objets abstraits en arrière-plan. Il soutient que sa conception de l'ontologie est relative, mais elle n'est relative que dans le sens où elle admet une pluralité de catégories d'objets pouvant exemplifier une structure. Néanmoins, le structuralisme *ante rem* nécessite, en dernier lieu, une théorie pour supporter son « discours » des structures abstraites et elle est donc commise, d'une certaine manière, à une ontologie fixe des positions abstraites. Selon la compréhension que les positions sont des objets, toute structure est (à la fois) un système d'objets. Alors, l'existence indépendante des structures repose, en dernier lieu, uniquement sur l'existence d'un univers de positions organisées en collections arbitraires.

La vague notion de position (et de ses collections), qui est au cœur de la conceptualisation de Shapiro de la notion de structure, souffre gravement d'un traitement non systématique menant directement à certaines ambiguïtés. La TSA est du deuxième ordre, donc nous pouvons quantifier sur les positions et les collections de positions. À partir de la TSA formulée comme tel, nous pouvons en déduire l'existence d'une collection de toutes les positions. Toutefois, cette collection ne peut pas constituer une structure par la limitation de taille imposée aux systèmes. En principe, l'existence d'une structure de sous-structures dépend de l'existence d'une certaine collection de positions constituant une structure. Si la collection de toutes les positions constitue une structure, alors, par l'axiome de structure de sous-structures, nous pouvons en dériver le « paradoxe » de Cantor. La restriction de taille imposée aux systèmes nous empêche donc d'appliquer cet axiome à la collection de toutes les positions. En conséquence, il semble que le problème des totalités non admissibles ne concerne pas la TSA. Mais, rien ne nous empêche de considérer l'existence d'une collection de sous-collections en appliquant l'opération puissance à la collection de toutes les positions. Cette objection que nous devons à Hellman (2001) exploite l'imprécision de la notion de collection de positions utilisée par Shapiro. Hellman en conclut que la collection de toutes les positions doit nécessairement constituer une structure, puisque l'axiome de structure de sous-structures nous assure l'existence d'une structure de sous-structures. La difficulté, ici, est que nous ne savons pas si l'existence d'une structure de sous-structures est conditionnée par l'existence de collection de sous-collections. Shapiro n'offre aucune indication sur la manière précise dont nous devons traiter les collections de positions et leurs relations mutuelles.

Rappelons qu'en rejetant l'échelle par laquelle il a atteint les structures abstraites, c'est-à-dire l'identité entre systèmes d'objets, Shapiro s'est retrouvé à justifier l'auto-exemplification des structures par une ontologie de positions, lesquelles peuvent être envisagées comme des objets, du fait que nous pouvons former des énoncés d'identité entre les termes de positions. Dans ce cas, il est légitime d'exiger un critère d'identité entre positions. Malheureusement, par les indications de Shapiro, la TSA est ouverte à un argument qui lui est fatal, ou du moins qui semble nous faire pencher en faveur d'une conception *in re* des structures. Malgré le fait que Shapiro n'explicite aucun critère pour l'identité entre positions, nous pouvons reconstruire un critère qui satisfait les exigences spécifiées par Shapiro à l'égard des restrictions suivantes : (1) il n'y a pas d'identité entre positions de structures différentes et (2) nous ne devons comprendre la notion d'objet que relativement à un certain cadre conceptuel. De (2), il s'ensuit naturellement (1), pourtant Shapiro affirme, par exemple, que la position « 3 » est la même pour les structures des nombres naturels, des entiers et des réels. Selon lui, cette identité est convenue et non déterminée par un certain critère général. Mais dans le cadre général de la TSA, il y a des variables de position. Dès lors, il est possible de former dans le langage de la TSA des énoncés d'identité du type :

ID $\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow (?))$,

où le critère d'identité reste à spécifier. Puisque (2) est une restriction à la définition d'un critère général d'identité dans la TSA, nous ne pouvons formuler un critère que pour une classe de positions d'une même structure. Concédons à

Shapiro qu'à l'intérieur d'une conception relative de l'ontologie, il est absurde de se demander si deux éléments de « natures structurelles » différentes sont identiques. Comme il n'est pas sensé de se demander si « 2 » est identique à Jules César. Cependant, nous pouvons exiger de la position réaliste de Shapiro qu'elle nous offre au moins une conception de l'identité entre positions d'une même structure. À ce point, l'argument contre le structuralisme de Shapiro consiste à montrer qu'il n'y a qu'une seule manière de définir l'identité *intra-structurelle* entre positions qui concorde avec sa conception réaliste, et cette identité est problématique pour des structures symétriques. Dans ce qui suit, nous reprenons, en gros, l'argument de Keränen (2001). Pour une structure $\boldsymbol{S}$ d'un système S, une position $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{S}$ est déterminée à partir de l'ensemble des propriétés relationnelles de l'élément x dans S qui occupe la position $\boldsymbol{x}$. De plus, par la nature libre des structures, nous ne pouvons caractériser l'identité des positions que par des propriétés purement relationnelles. Par la restriction (2), ces propriétés relationnelles ne peuvent qu'être des propriétés *intra-structurelles*. D'où nous pouvons préciser ID comme

IDP $\quad \forall x \forall y \big(x = y \Leftrightarrow \forall \phi \big(\phi \in \Phi \Rightarrow \big(\phi(x) \Leftrightarrow \phi(y) \big) \big) \big)$,

x, y sont des positions d'une structure $\boldsymbol{S}$, et ϕ est une propriété purement relationnelle de l'ensemble Φ des propriétés relationnelles de $\boldsymbol{S}$. La formule IDP nous indique que deux termes de positions d'une structure dénotent la même position si et seulement si leurs référents respectifs partagent les mêmes propriétés purement relationnelles. Le point crucial de l'argument repose sur le fait qu'une propriété ϕ est restreinte par (2), par le critère d'identité entre structures et par ce que Shapiro conçoit comme une relation formelle ou structurelle. En effet, si une structure $\boldsymbol{S}$ doit être identique à elle-même par un automorphisme, nécessairement toutes les propriétés purement relationnelles nous permettant de déterminer les positions de $\boldsymbol{S}$ doivent être invariantes sous les automorphismes de $\boldsymbol{S}$. Le problème surgit lorsque nous considérons, par exemple, le groupe $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ et l'automorphisme qui envoie chaque élément à son inverse. Nous nous retrouvons dans la structure de ce groupe avec le fait que « 1 » est identique à « -1 », puisque toutes les propriétés purement relationnelles, invariantes sous l'automorphisme, de « 1 » sont identiques à ceux de « -1 ». Pour satisfaire aux exigences du point de vue réaliste des structures, Shapiro ne peut s'appuyer sur l'identité entre systèmes, toutes les propriétés ϕ purement relationnelles sont telles qu'elles ne peuvent pas contenir dans leur spécification des constantes qui ont pour références, soit des éléments de *S,* soit des positions de $\boldsymbol{S}$. Les seules propriétés admises dans l'ensemble Φ ne peuvent être spécifiées que par des formules contenant des variables libres. S'il était possible de spécifier les propriétés relationnelles avec des constantes dans le structuralisme *ante rem*, le problème de l'identité de « 1 » et « -1 » ne pourrait pas surgir. Or, les propriétés relationnelles doivent être invariantes sous les automorphismes, ce qui contraint le structuralisme *ante rem* à ne pouvoir spécifier ces propriétés qu'à partir de variables libres. Face à ce problème, il semble qu'une solution est d'adopter l'usage de constante dans la spécification des propriétés relationnelles des positions, mais cette option n'est compatible que pour une conception nominaliste ou *in re* des structures abstraites.

2.1.3 Cohérence et catégoricité

Sur le plan métathéorique, pour Shapiro, les conditions d'existence et d'unicité des structures dépendent de la cohérence et de la catégoricité de la TSA. Sur cette relation entre l'existence et la cohérence, Shapiro s'exprime comme suit : « Mathematical objects are tied to structures, and a structure exists if there is a coherent axiomatisation of it. »[37] Remarquons que cette exigence est énoncée comme un axiome dans la TSA, donc la cohérence ne peut être explicitée circulairement par l'existence d'une structure dans les cadres de la TSA. Prise comme une notion primitive qui doit être comprise intuitivement, la cohérence n'est pas entendue formellement comme la consistance ou la complétude déductive, car la TSA est du second ordre et, par certaines conséquences du résultat de Gödel sur l'incomplétude, il ne peut y avoir de complétude relative entre les relations de conséquence syntaxique et de conséquence sémantique pour la TSA. Néanmoins, Shapiro nous offre quelques indices lorsqu'il dit: « une habileté à parler de manière cohérente d'une structure est une évidence de son existence. » [38] Nous pouvons nous demander alors en quoi consiste notre habilité à parler de manière cohérente des structures abstraites. Shapiro ne peut faire mieux que de faire reposer cette notion sur son usage ordinaire dans une compréhension

---

[37] *Ibid.*, p. 133.
[38] *Ibid.*, p. 118. Notre Traduction.

tacite du terme. Par ailleurs, Shapiro croit que la cohérence s'apparente, ou du moins, qu'elle est analogue à la notion de satisfaction en théorie des modèles. Cette notion est de nature sémantique et nous voyons difficilement comment elle peut contribuer d'un point de vue épistémologique à la position réaliste de Shapiro. Nous pouvons parler « objectivement » et de manière articulée dans un langage conceptuel d'un domaine d'objets conceptuels et les considérer comme existant sans pour autant croire qu'ils existent réellement. Dans le même ordre d'idées, contre Shapiro, nous pouvons citer la critique de Wright et Hale (2002):

> «... in mathematics, as elsewhere, there is a gap between concept and object, that it is one thing to give the most precise characterisation of a way an object, or field of objects, might be and another to have reason for thinking that there actually are some objects which are that way. »[39]

Les conditions d'assertion contenues dans le cadre théorique de la TSA, par lesquelles nous pouvons énoncer des vérités, à propos de ces entités, dans une interprétation, sont nettement insuffisantes pour être des conditions d'existence de ces entités. Malgré cela, Wright et Hale s'accordent avec Shapiro sur une stratégie générale pour expliciter les objets mathématiques en termes d'objets abstraits. Mais, ils jugent insuffisante l'épistémologie des structures abstraites proposée par Shapiro. Notons que Wright et Hale (2002) nous offrent une interprétation des thèses contemporaines en philosophie des mathématiques comme étant guidées par une tentative à la résolution de ce qu'on a appelé le dilemme de Benacerraf. Essentiellement, Benacerraf (1973) pose qu'une sémantique des théories

---

[39] Hale, B., et Wright, C. (2002), «Benacerraf's Dilemma Revisited,» *European Journal of Philosophy*, vol. 10, p. 113.

mathématiques doit être compatible avec une épistémologie raisonnable. [40] Ce que Wright et Hale entendent par un fossé entre le concept et l'objet suggère une critique épistémologique faisant référence aux problèmes de l'accès aux objets mathématiques.[41] Le problème principal dans cette manière de poser le problème de l'objectivité des mathématiques est qu'elle présuppose que les objets mathématiques doivent être conceptualisés sous le modèle des objets physiques. Que nous acceptions ou non ce cadre d'interrogations philosophiques à propos des mathématiques, il n'en demeure pas moins que la thèse de Shapiro est parsemée d'imprécisions. À regarder de plus près, si la cohérence est similaire (sans être identique) à la satisfaction, alors l'existence d'une structure dépend de l'existence d'un système de positions extrait, par abstraction, à partir d'un système d'objets. Par contre, ce système d'objets ne peut être un système de positions vues comme des objets. De manière non circulaire, il est nécessaire de justifier l'ontologie des objets de positions par une abstraction à partir d'un domaine de systèmes d'objets, qui ancre en dernier lieu la condition d'existence des structures dans l'existence des systèmes d'objets qui ne sont pas des systèmes de positions. Le structuralisme *ante rem* ne peut être « cohérent » avec sa propre conception ontologique des structures, car elle ne peut se débarrasser des systèmes d'objets. Soulignons, en dernier lieu, qu'il est injustifié d'introduire une notion de cohérence pour stipuler l'existence de certaines entités sans quelques critères stricts.

---

[40] Voir la note 65 à la page 66.

[41] Voir Hale, B. (1996), «Structuralism's Unpaid Epistemological Debts,» *Philosophia Mathematica*, vol. 4, pp. 124-147. MacBride, F. (2004), «Can Structuralism Solve the 'Access' Problem?,» *Source Analysis*, vol. 64, pp. 309-317.

Pour l'unicité des structures, Shapiro s'appuie sur la propriété de catégoricité des théories du second ordre. Étant donné que la TSA s'apparente à la théorie des ensembles et qu'elle est une théorie du deuxième ordre, elle échappe au paradoxe de Skolem qui s'applique aux théories des ensembles du premier ordre. En étendant la force expressive du langage par l'ajout de quantificateurs du second ordre, nous savons qu'il est possible pour certaines théories d'obtenir un modèle à un isomorphisme près. Mais, en s'appuyant sur ce résultat de catégoricité, si la TSA ne comprend que des structures uniques, au sens qu'elle ne se limite qu'aux théories catégoriques, le structuralisme *ante rem* de Shapiro ne peut nous donner un portrait général des mathématiques en termes structurels. D'autant plus que les seuls exemples dont les philosophes structuralistes comme Shapiro se servent pour illustrer leur point sont la théorie des nombres et l'analyse. Bien que ces théories puissent être caractérisées de manière catégorique et qu'elles constituent une part fondamentale des mathématiques, il n'en demeure pas moins qu'une autre portion fondamentale des mathématiques comme l'algèbre contienne des théories non-catégoriques. En termes terminologiques, Shapiro croit que nous n'avons affaire en mathématique qu'à des structures concrètes, c'est-à-dire catégoriques, en opposition à des structures dites algébriques. De cette limitation du structuralisme de Shapiro, nous voyons une défense possible contre l'argument de Keränen, puisque l'argument de Keränen s'appuie sur l'identité entre des structures de groupe, lesquelles sont algébriques. Seulement, une telle défense ne vient que souligner l'incapacité du structuralisme *ante rem* à circonscrire à l'intérieur de son cadre théorique toute la variété des structures mathématiques. De plus, indépendamment de la nature des structures utilisées, l'argument de Keränen est applicable pour des structures symétriques qu'elles soient concrètes ou algébriques. L'unicité des structures par la catégoricité est un ingrédient essentiel à la position réaliste de Shapiro, car elle vient appuyer son réalisme sémantique. Par un résultat fondamental en théorie des modèles, nous savons que si une théorie est catégorique, alors elle est sémantiquement complète, si et seulement si la théorie admet des modèles non finis. [42] L'existence d'une structure unique *S,* décrite par une théorie *T,* formulée dans un langage *L,* permet de déterminer sémantiquement une valeur de vérité unique aux énoncés du langage *L.* De son réalisme sémantique, nous voyons exactement pourquoi Shapiro ne peut admettre une conception algébrique des structures mathématiques. Sous une telle conception, un énoncé peut prendre différentes valeurs de vérité selon le contexte d'interprétation. Dans quelle mesure, précisément, la catégoricité est-elle utile aux réalistes sémantiques ? Citons à cet égard Walmsley (2002):

> « The realist has found three applications of categoricity. The model-theoretic categoricity result enables her to explain how the truth-values of arithmetical sentences are determined; it provides for an argument against the algebraic construal of arithmetic; and as was mentionned in passing, it gives the technical ressources for a structuralist reconstrual of arithmetic truth. These applications generalize to any model-theoretic categoricity result for any mathematical subject with an intended interpretation. »[43]

[42] Ce résultat est connu sous le nom du théorème de Vaught. Voir, Rothmaler, P. (2000), *Introduction to Model Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, p. 199.

[43] Walmsley, J. (2002), «Categoricity and Indefinite Extensibility,» *Proceedings of the Aristotelian Society, vol. 102,* p. 223.

La catégoricité est utile à l'argument réaliste pour toutes théories catégoriques, par la supposition de l'existence de modèles non finis pour ces théories.[44] Abstraction faite des conditions d'existence des structures, Shapiro, par son réalisme ontologique, semble se commettre à l'existence de structures infinies, avec une conception d'un infini actuel. Une justification d'ordre épistémologique concernant notre saisie des structures infinies semble difficile à satisfaire dans ces conditions. Mais cela n'est pas vrai pour le SPM en général. Certains structuralistes, comme Hellman par exemple, parleront d'existence possible pour adopter une conception d'un infini potentiel. L'interprétation des résultats de la catégoricité d'une classe de théories vient aussi, semble-t-il, appuyer une compréhension des systèmes mathématiques en termes de propriétés purement structurelles. Bien que l'isomorphie entre systèmes révèle une identité structurelle, pour conclure que les propriétés mathématiques se réduisent à des propriétés purement structurelles, il faut procéder à une abstraction à partir d'un domaine de systèmes d'objets comportant des propriétés non-structurelles. Dans quel sens, cette abstraction justifie le fait que les propriétés mathématiques sont de nature purement structurelle ? Indépendamment de la nature des objets, pour un système d'objets, nous pouvons affirmer que les fonctions ou les relations à l'intérieur de ce système décrivent des propriétés internes ou externes de ces objets. Par la définition de l'isomorphie, un isomorphisme de systèmes nous informe seulement

---

[44] La catégoricité est seulement fondamentale pour les thèses du SPM qui souscrivent à une certaine conception réaliste d'un point de vue sémantique, mais elle n'est pas essentielle au SPM en général. En fait, nous pouvons nous demander si en endossant cette forme de réalisme sémantique, ces thèses posent, en entrée de jeu, une limitation interne à leur approche structurelle.

qu'il existe une bijection entre les ensembles des éléments respectifs de ces systèmes, préservant le « rapport » relationnel et/ou fonctionnel entre les éléments de ces ensembles respectifs. À partir de ce point, pour conclure qu'une théorie, qui est satisfaite par ces systèmes, décrit des propriétés purement structurelles de ces systèmes, il faut faire abstraction de la signification particulière des relations et fonctions contenues dans ces systèmes. Autrement dit, il faut faire abstraction des propriétés internes et externes des systèmes d'objets. Cette situation est problématique pour le structuralisme *ante rem* de Shapiro. L'abstraction réalisée à partir d'un isomorphisme entre systèmes nous montre seulement que nous ne pouvons pas nous débarrasser du sol des systèmes d'objets à partir duquel nous atteignons les structures abstraites. De plus, elle met en évidence comment les propriétés non-structurelles jouent un rôle important dans une conception structuraliste se fondant sur une telle abstraction.

En relation à nos dernières remarques, mais situé sur un autre plan, Weaver (1998) note que : « While non-structural difference between isomorphic system appear to receive scant attention in discussion of categoricity results, they play a more prominent role in discussion of representation theorems. »[45] Une autre application de la notion d'isomorphie se trouve dans les théorèmes dits de représentation. Suivant Weaver, dans sa forme générale, un théorème de représentation affirme l'existence d'un isomorphisme entre chaque système d'une

---

[45] Weaver, G (1998), «Structuralism and Representation Theorems,» *Philosophia Mathematica*, vol. 6, p. 262.

classe de systèmes *T* et un système de sa sous-classe de systèmes *T'*.[46] La classe *T* contient des systèmes d'un même type satisfaisant une théorie donnée, alors que les domaines des systèmes de la sous-classe *T'* sont constitués d'un même type d'objets et les opérations définies pour ces systèmes sont fermées. Similairement, à l'interprétation donnée dans le contexte de la catégoricité, une interprétation de l'isomorphie entre systèmes par les théorèmes de représentation peut être donnée comme une généralisation ou abstraction effectuée à partir de la classe *T'*. Cette interprétation, Weaver l'attribue à Stoll (1963), Henkin, Monk et Tarski (1971). À la différence du contexte de la catégoricité, *T'* est dite « uniforme », puisque ses systèmes contiennent des domaines d'un même type d'objets clos sous les mêmes opérations et, comme le note Weaver, : « abstraction proceeds by finding 'laws' which hold in all members of *T'* and treating these laws as axioms or postulates. »[47] L'ensemble de ces axiomes constitue la théorie satisfaite par les systèmes de *T*. Les systèmes de *T'* sont qualifiés de concrets par le fait que leurs objets, leurs fonctions et leurs relations sont biens déterminés, alors que les systèmes de *T* n'appartenant pas à *T'* sont qualifiés d'abstraits. Par exemple, selon le théorème de représentation de Stone, toute algèbre booléenne est une algèbre d'une famille d'ensembles d'un certain ensemble. La détermination qu'un système est abstrait ou concret est relative aux différents théorèmes de représentation formulables pour une classe *T* de systèmes relativement aux sous-classes de *T*. Dans le cas de l'algèbre de Boole, elle peut être représentée par des treillis ou des algèbres

---

[46] *Ibid.*
[47] *Ibid.*, p. 265.

d'espaces topologiques. Un treillis sera concret ou abstrait relativement à une algèbre d'espaces topologiques selon le théorème de représentation en question. Étant donné que le domaine des objets de la classe des systèmes concrets possèdent des opérations bien déterminées et connues, il peut être plus facile de construire des modèles pour la théorie en question. Plus particulièrement, l'on peut travailler plus aisément, par exemple avec des algèbres d'ensembles pour construire une algèbre booléenne avec certaines propriétés recherchées. De ce fait, Weaver en conclut que : « The distinction between abstract and concrete systems found in many discussions of representation theorems suggests that some non-structural differences between isomorphic systems are recognized in practice. »[48] Selon Weaver, cet avantage des systèmes concrets repose sur la nature de leurs objets, leurs fonctions et leurs relations, et non sur des aspects purement structurels, car la distinction entre une classe de systèmes concrets et une classe de systèmes abstraits dépend de l'uniformité d'un domaine d'objets; et cet aspect dépend en dernier lieu de la nature des objets en question. Ajoutons que derrière la notion de catégoricité, c'est la notion d'isomorphie qui est essentielle pour le SPM en général. L'isomorphie entre systèmes n'exclut point les structures algébriques d'une compréhension structurelle des mathématiques. Par un théorème de représentation pour une structure donnée, nous pouvons identifier une classe de systèmes constituant des modèles « naturels » pour cette structure.

À ce point de notre discussion sur le structuralisme *ante rem* de Shapiro, nous voyons qu'il est difficile de parler d'existence indépendante des structures

---

[48] *Ibid.*

abstraites. Si Shapiro veut soutenir son réalisme sémantique et soutenir l'unicité des structures par les résultats de la catégoricité, il est pris avec le fait que les propriétés purement structurelles sont abstraites des propriétés non-structurelles des systèmes. Donc, son réalisme sémantique est en conflit avec son réalisme ontologique. Il reste un dernier recours pour le réaliste des structures abstraites, celui d'articuler une théorie des structures qui soit non triviale et « rationnellement » acceptable. Or, il s'avère que la TSA est une variante de ZFC au second ordre, et ses notions primitives de positions et de collections de positions sont problématiques sur plusieurs aspects. Tout semble pencher en faveur de l'optique *in re* qui, sans éliminer les systèmes d'objets, ne procède pas à une réification des structures en objets abstraits par l'identité entre systèmes.

2.2 Un anti-réalisme des structures

Sous une conception nominaliste des structures abstraites, le structuralisme *in re* rejette complètement l'existence indépendante des abstractions comme les structures et les positions. Caractérisée d'approche « éléminative » ou de structuralisme sans structure, sous l'option *in re,* la classe des systèmes identiques, soit par l'isomorphie, soit par le critère d'équivalence de structures, exemplifie une structure dont l'existence est conditionnelle à l'existence de ces systèmes. Il suffit d'éliminer les systèmes et les structures ne sont plus. Similairement au structuralisme méthodologique, le structuralisme *in re* ne considère pas que nos théories mathématiques portent sur un système d'objets spécifiques. Néanmoins, cette position n'est pas pour autant neutre sur le plan sémantique et ontologique.

Les énoncés mathématiques dans la perspective *in re* sont des généralisations sur un ensemble de systèmes partageant une même structure. L'interprétation de la référence des termes est effectuée sur la base d'un choix particulier d'un modèle. Une structure est conceptualisée relativement à un domaine d'objets. Mais, si les termes dénotant des objets sont vus comme des positions, nous obtenons un structuralisme *in re* à la Resnik (1997). Mis à part les différences métaphysiques avec le structuralisme de forme *ante rem* concernant les structures et les positions, les structures sont conceptualisées, par Resnik, aussi comme des collections de positions contenant des propriétés purement structurelles. En général, le structuralisme *in re* est aussi un « anti-fondationalisme » qui refuse de réduire les objets mathématiques à un univers unique d'un même type d'objets. Cet aspect « anti-fondationalisme » est exprimé, chez Resnik, par le refus d'une identité entre positions de structures différentes. L'identité de positions n'est définie que dans un contexte *intra-structurel*. Plus précisément, en accord seulement avec la perspective que les objets sont des positions, pour un anti-réaliste des structures tel que Resnik (1997), il n'y a pas de fait concernant l'identité de positions de structures différentes. Les structures, sans être des objets, sont comprises comme des entités particulières abstraites de systèmes d'objets. De ce fait, toute forme de structuralisme *in re* est pris avec le même problème. En tenant une vue structurelle des mathématiques, sans poser l'existence des structures abstraites, elle doit offrir une justification de son discours portant sur les structures. Sur le plan épistémologique, puisque qu'une structure est extraite par une abstraction effectuée sur un domaine d'objets, l'objectivité du discours portant sur les structures, compris en termes de la référence, est fondée ultimement sur une ontologie d'objets concrets. Même en considérant les termes de structures et de positions comme des « fictions » ou des « constructions » du langage, les énoncés portant sur ces entités abstraites n'ont de significations biens déterminées que s'il existe des objets à partir desquels il est possible d'extraire les positions et les structures. Un structuraliste *in re* est un anti-réaliste des structures abstraites, mais il demeure un réaliste sur le plan sémantique. Dès lors, la difficulté pour ce type de structuralisme est de « trouver » une ontologie qui soit compatible avec son réalisme sémantique. Suivant la typologie de Shapiro, à ce point, deux stratégies s'offrent au structuralisme *in re*, soit, suivant Hellman (1988), il peut adopter la stratégie modale, soit adopter une ontologie d'objets particuliers.

2.2.1 La stratégie ontique

Considérons le cas de l'arithmétique, celui qui est le plus habituellement discuté. Le structuralisme *in re* prétend que nos propositions de l'arithmétique porte sur une suite-ω quelconque, puisqu'il n'y a qu'une structure de toute suite-ω. L'existence d'une telle suite est nécessaire à la non-vacuité des énoncés arithmétiques. La question revient alors à savoir s'il existe une suite-ω d'objets concrets ou abstraits. Dans une optique nominaliste, l'adoption d'une ontologie d'objets physiques semble être le choix le plus naturel à faire, mais il reste à savoir si l'univers contient une infinité d'objets ou un nombre suffisamment grand d'objets pour assurer la non-vacuité des énoncés mathématiques. Il semble fort douteux que nous puissions affirmer qu'il y ait actuellement dans l'univers une infinité d'objets physiques. La conjonction des idées de nature nominaliste et du réalisme sémantique, jusqu'à présent, nous semble ne pas être une association dénuée de tensions. Plus le nominalisme tentera de préserver son réalisme sémantique, plus il devra avoir recours aux abstractions. Une tentative de sa part serait de recourir à la géométrie de nos théories physiques, dans laquelle l'espace est divisible à l'infini, ou encore en considérant les points de l'espace. [49] Dans le premier cas, nous avons le concept d'un infini potentiel, et, dans le second cas, si les points de l'espace existent en nombre infini, il est moins certain que ces entités soient des objets physiques. Fait à remarquer, ce type de nominaliste semble faire reposer la justification des mathématiques, en dernier lieu, sur nos théories physiques. Dans ce cas, qu'est-ce qui nous assure que nos théories acceptées actuellement le seront toujours à l'avenir ? Parsons, à notre avis, a fortement raison de souligner que :

> « The problem with the appeal to a physical model to deal with the problem of objective reality is that it makes mathematics presuppose an hypothesis that is stronger and more specific than needed...making the justification of mathematics turn on a hypothesis about the physical world, which is more vulnerable to refutation than the mathematics. » [50]

Si celui qui adopte une stratégie *in re* ne peut être assuré par une ontologie d'objets concrets, il peut toujours recourir à d'autres types d'abstractions qu'il juge moins problématiques ou plus acceptables que les structures et les positions. Par exemple, en adoptant la conception itérative des ensembles et en considérant

---

[49] Parsons, C. (1990), «The Structuralist View of Mathematical Objects,» *Source Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, pp. 303-346

[50] *Ibid.* p. 325.

l'univers des ensembles comme l'ontologie supportant les structures. Ainsi, il y aurait assez d'objets pour la structure de la suite-ω. Ce qui est étrange dans cette stratégie est que ce type de structuralisme ensembliste semble bien, d'une part, s'accommoder sans difficulté d'une conception platonisante des ensembles, puisqu'il adopte l'univers des ensembles dans son ontologie, et, d'autre part, refuser, pour des motivations nominalistes, l'existence des structures abstraites. Malheureusement, en quoi l'existence d'ensembles purs de cardinalités inaccessibles est-elle plus acceptable que l'existence de structures abstraites ?

Indépendamment de la justification épistémologique de son ontologie privilégiée, il reste à savoir, avec plus de détails, dans quelle mesure un discours sur les structures peut être articulé pour le structuralisme *in re.* Il est intéressant à ce point de préciser la position de Resnik. Du fait qu'il n'y a pas d'ontologie des structures abstraites dans l'optique *in re,* il ne peut y avoir de théorie des structures abstraites, puisqu'une théorie des structures abstraites contiendrait des quantificateurs portant sur un univers de structures. Par suite, il serait possible de formuler des identités de structures abstraites. Selon Resnik, il faut restreindre la bivalence à ce type d'énoncés. Acceptant l'irréductibilité des objets mathématiques comme un fait à s'accommoder dans notre compréhension des mathématiques, Resnik limite son réalisme sémantique par une conception immanente de la vérité, seuls les énoncés *intra-théoriques* sur les objets mathématiques possèdent une valeur de vérité. Les énoncés d'identités structurelles entre structures abstraites sont, en dernière analyse, des énoncés *extra-théoriques*, car chaque structure abstraite fait référence à un domaine d'objets différents de théories différentes. Selon Resnik : « Each theory was developed to speak only of elements of a certain structure and has no means to identify or distinguish these from element of another structure. »[51] D'après Resnik, seuls les énoncés d'identité entre positions d'une même structure sont significatifs. Néanmoins, Resnik reconnaît la nécessité de préciser le discours des structures par une formalisation. S'il y a une théorie formelle des structures abstraites, c'est seulement dans un sens faible. Évidemment, pour Resnik, une logique qui sous-tendrait une telle théorie doit contenir une restriction sur l'identité des positions. Étrangement, il admet qu'il soit possible de modéliser une théorie des structures abstraites en s'inspirant de la géométrie ou de la théorie des ensembles. Une structure ne serait rien de moins qu'un ensemble d'ensembles purs ou une collection de positions spatiales. Citons Resnik à ce propos :

> « A second (logically cleaner) approach construct a pattern theory, along lines of geometry, by positing a space of positions…A third approach refines the second by reducing patterns to sets of positions…One can push this even further and construe positions themselves as pure sets… » [52]

L'inconvénient est qu'il serait possible, dans ce cas, d'articuler un énoncé d'identité de positions de structures abstraites différentes qui aurait une valeur de vérité, puisqu'il serait formulé dans le cadre d'une théorie portant sur un domaine d'objets en particulier. Resnik croit que ces théories seraient une réduction de son concept de structure en une autre entité, mais cette réduction n'identifie pas ce qu'il entend par une structure abstraite à ces entités. Cette explication est certes

---

[51] Resnik, M. D. (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, p. 211.
[52] *Ibid.*, p. 213.

insatisfaisante. Elle indique seulement qu'il est contre intuitif de ne pas reconnaître qu'il y a des identités entre structures abstraites, et celles-ci, dans la pratique, ont une signification précise sans peut-être déterminer existentiellement les structures abstraites. Bien que Resnik n'avoue pas entièrement qu'il ne peut y avoir de théorie précise des structures abstraites, par sa conception relative des structures, il semble suggérer qu'il y a des difficultés insurmontables pour une entreprise de cette nature. Ce que nous considérons comme une structure et un type de structures dépendent relativement des ressources langagières utilisées pour caractériser une structure :

> « The structures we recognize will be relative to our devices for specifying forms, or transformations or equivalence relations. Furthermore by enriching or curtailing these devices we will obtain different notions of structure, count different things as among the same structure, and recognizing different relationships between structures. »[53]

Le choix d'un langage formel détermine notre notion de structure et il n'est pas clair quel type de langage formel nous devons adopter. En adoptant un langage formel en particulier, nous sommes confinés à une certaine notion de structure, laquelle peut ne pas être en mesure de saisir des configurations que nous sommes portés intuitivement à reconnaître comme une structure.[54] De plus, même si nous décidions d'élaborer nos théories dans un langage relativement expressif pour qu'elles soient catégoriques, il n'y a pas un langage formel unique adéquat à cette fin. Ainsi, il n'y a pas de traitement uniforme de la notion de structure, puisqu'il

---

[53] Resnik, M. D. (1997), *Mathematics as a Science of Patterns, Clarendon Press,* p. 250-251.

[54] Par exemple, dans un langage du second ordre, il est possible de donner une description de toute suite croissante constante, mais il faut adopter un langage plus riche afin de décrire toute suite croissante non constante.

n'y a pas un langage formel universel pour généraliser la notion de structure. Peut-être, le choix d'un langage formel est dès lors une question de conventions qui dépend de nos objectifs et de nos besoins pratiques.

En concevant l'identité comme une détermination existentielle, pour Resnik, il n'y a pas lieu de traiter les structures comme des objets et, s'il y a une identité entre structures abstraites, nous n'avons pas accès aux faits déterminant cette identité. De toutes les relations définissables entre les structures, aucune ne peut constituer un critère d'identité, puisque différentes structures contenant différentes positions peuvent être liées par ces relations. Or, ce qui doit déterminer l'identité structurelle est l'identité de positions.

> « Of the equivalence relationship which occur between patterns, congruence is the strongest, equivalence the next, and mutual occurrences the weakest. Yet none of these is suitable as identity, because, presumably, identical patterns have the same position whereas equivalent, mutually occurring, and congruent patterns need not. »[55]

Donc, nous sommes réduits à parler de similarités structurelles en termes d'équivalence, de congruence et d'occurrence. Sans critères d'identité entre structures abstraites, nous avons une notion de structure comme une entité particulière de nature non « objectuelle ». Par conséquent, comment la généralité des mathématiques peut-elle être explicitée à l'aide de ces entités ? Le problème est le suivant. Pour tout système et sous-système d'objets, il y correspond une structure abstraite particulière. Mais, il n'y a pas d'identité entre les structures et sous-structures, car chaque sous-structure est considérée comme une structure à part et il n'y a pas d'identité entre positions de structures différentes. Par exemple,

---

[55] *Ibid.*, p. 209.

la structure de la suite croissante des nombres pairs, même en étant isomorphe à la structure de la suite croissante des nombres naturels, n'y est pas identique, parce que, pour Resnik : « A pattern can be congruent to a sub-pattern which does not contain all its positions. »[56] La relation entre une structure et sa sous-structure est caractérisée par Resnik en termes d'occurrence. Ainsi, il y a une multiplicité de structures abstraites particulières, lesquelles sont dépendantes d'un domaine particulier d'objets. Si nous comprenons la généralité des mathématiques par l'aspect formel de ses théories, qui peut être interprété sous une variété de domaines d'objets indépendamment de la nature de ces objets, alors, la notion de structure de Resnik comme une entité abstraite particulière ne peut satisfaire cet aspect formel de la généralité des mathématiques.

2.2.2 La stratégie modale

Une difficulté majeure pour le structuralisme *in re* est de soutenir à la fois un réalisme sémantique et une ontologie qui soit compatible avec sa compréhension nominaliste des structures mathématiques. Pour supporter la non-vacuité d'une classe d'énoncés, il doit adopter une ontologie qui le commet, soit à la référence d'objets abstraits, soit à l'existence d'un infini actuel. Ce qui le met dans une situation inconfortable, vu ses présuppositions nominalistes. Afin d'échapper à cette tension entre ces différents *desiderata*, Hellman (1989) propose une reconstruction structurelle des énoncés mathématiques dans le cadre d'une logique modale: S5. Les considérations existentielles, dans ce contexte, grâce à un

[56] *Ibid.*

placement astucieux des opérateurs modaux, sont traduites en considérations épistémologiques par une compréhension de l'infini comme un infini potentiel. Le réalisme sémantique est obtenu par une reformulation catégorique d'une classe de théories mathématiques à l'aide de quantificateurs d'ordre supérieur. Poursuivant avec le cas de l'arithmétique, illustrons la reconstruction des énoncés mathématiques sous l'option modale de Hellman. Cette reconstruction contient deux éléments. Le premier stipule l'existence possible d'une structure arithmétique,

I-$\Diamond\exists$X(X est une ω-séquence). [57]

Soit PA^2 la conjonction des axiomes de Peano incluant l'axiome d'induction formulé avec une variable libre et un quantificateur du second ordre, X est nécessairement un modèle satisfaisant PA^2. Le second élément affirme la nécessité que pour tout énoncé A de la théorie de PA^2, cet énoncé est satisfait pour tout X,

II-$\Box\forall X\forall f\left[PA^2 \supset A\right]^X\binom{s}{f}$. [58]

La disposition des opérateurs modaux dans cette reconstruction de l'arithmétique évite toute quantification sur un domaine de mondes possibles. De plus, par une formulation dans une logique de second ordre, la catégoricité est à portée de main pour supporter un réalisme sémantique. De manière purement schématique, afin de parler d'une structure satisfaisant certaines conditions relationnelles, la fonction *s*

[57] Hellman, G. (1989), *Mathematics without Numbers : Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford University Press, p. 17.
[58] *Ibid.*, p. 23.

est substituée par une variable de fonctions *f*. Ainsi, une structure arithmétique est n'importe quel système satisfaisant PA^2.

L'aspect structurel de cette reconstruction est révélé par le fait que la référence porte uniquement sur les fonctions et les relations de systèmes; il n'y a pas de quantifications sur les objets du premier ordre. Ces objets sont pris en considération seulement à l'intérieur d'un système structuré et leur nature intrinsèque est abstraite, car, ce qui compte, c'est une similarité structurelle régie par les conditions relationnelles données par PA^2. La similarité entre les structures par l'isomorphie décrit un type de structures, lequel n'est pas édifié en objet abstrait. Il semble que pour Hellman, il n'y a pas d'identité structurelle, la reconstruction schématique nous permet seulement de parler d'identité schématique entre structures. Une structure abstraite n'est qu'un schéma, à l'intérieur duquel les variables peuvent dénoter n'importe quelles fonctions, n'importe quelles relations et, indirectement, des objets d'un système en particulier. Cette approche, en comparaison à celle de Resnik, a l'avantage, par son traitement schématique, de satisfaire la compréhension de la généralité des mathématiques, car chaque structure concrète particulière peut satisfaire différents schémas. La compréhension schématique d'une structure abstraite repose sur l'existence de systèmes d'objets par lesquels est abstrait ou articulé un discours schématique. Cet aspect est mis en évidence par une souscription nominaliste de la part de Hellman dans son traitement des quantificateurs. En restreignant la quantification du second ordre sur la somme méréologique d'objets discrets atomiques, toute structure arithmétique est considérée comme étant de nature concrète.[59] Hellman (1996) nous offre davantage de précisions de sa position nominaliste dans le passage suivant :

> « One can first postulate logical possibility of an infinitude of atoms (atomic individuals, governed by the axioms of atomic mereology…, and then interpret 'finite set' as 'finite sum (or whole, or fusion) of atoms'…With this postulate, one has the essentials of a mereological model of EFSC (elementary theory of finite sets and classes)[60] axioms …Now, within such a model of EFSC there is mereological model of the PA^2 axioms…Moreover, as the class variables are taken to range over arbitrary individuals (fusion of atoms), we even have a *full* second-order PA^2 model in the classical sense, in which arbitrary sets of numbers correspond to arbitrary fusions of the individuals serving as numbers. »[61]

Ainsi, les modèles nominalistes sont obtenus par l'intermédiaire d'une compréhension prédicative de la quantification réinterprétée dans les cadres de la méréologie. Pour parler schématiquement de l'arithmétique des nombres naturels et de manière objective, Hellman doit supposer l'existence d'une collection d'objets concrets potentiellement infinie. Sans poser l'existence actuelle d'une telle collection, Hellman pose la possibilité de son existence en termes logiques. Le problème à présent est de savoir que signifie exactement une telle possibilité. Hellman précise que la sémantique des mondes possibles ne lui est pas utile, dans la mesure où elle est seulement une heuristique pour comprendre les opérateurs modaux dans la reconstruction des énoncés mathématiques. Sa notion de possibilité est strictement logique, elle ne dépend pas d'une sémantique fondée sur la théorie des ensembles ou des mondes possibles. La position de Hellman sur les modalités est principalement motivée par son scrupule nominaliste qui l'entraîne à

---

[59] La somme méréologique de deux objets x, y dénote un objet consistant des partis appartenant à x ou à y.
[60] Notre ajout.
[61] Hellman, G. (1996), «Structuralism without Structures,» *Philosophia Mathematica*, vol. 4, p. 108-109.

interdire toute référence à des objets abstraits comme des mondes possibles ou des ensembles. De la sorte, une difficulté liée à la conception de Hellman des modalités apparaît lorsqu'il est question d'énoncés portant sur les objets existant actuellement. Pour évaluer un simple énoncé portant sur la cardinalité d'un ensemble d'objets observés, dans les cadres de S5 nous devons tenir compte de tous les modèles possibles de PA^2, et, parmi ces possibilités, il peut être le cas que les objets en question n'existent pas ou que l'énoncé est simplement faux. Dès lors, pour échapper à cette difficulté, Hellman introduit une clause de non interférence entre ces possibilités et le monde actuel. Les seules possibilités admises sont celles qui préservent le monde actuel intact. Hellman s'exprime comme suit :

> «...there is a crucial proviso that must be understood : in entertaining an ω-sequence, it is assumed that such a structure does not interfere in any way with the actual material situation to be described..., we must *stipulate* from the outset that the only possibilities we entertain in employing the '□' are such as to leave the actual world entirely intact .»[62]

Sans introduire un nouvel opérateur modal dit d'actualité qui assurerait le fait que n'importe quelle possibilité réfère au monde actuel, Hellman préfère restreindre la notion de possibilité selon la dernière clause, car, la première stratégie implique une relation entre les mondes possibles et le monde actuel. En somme, la notion de possibilité de Hellman n'est pas strictement logique, puisqu'elle prend une autre signification que celle comprise en logique modale, si nous la considérons dans le

[62] Hellman, G. (1989), *Mathematics without Numbers : Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford University Press, p. 99.

contexte des mathématiques appliquées. [63] Hellman reconnaît la difficulté à expliciter la notion de possibilité qu'il comprend, pareillement à Shapiro pour la notion de cohérence, comme une notion primitive. Malgré cette difficulté Hellman (2001) croit que son approche ne s'embourbe point dans des problèmes métaphysiques profonds concernant la nature d'entités abstraites posées de manière *ad hoc*. Est-ce vraiment le cas ?

Nous pouvons aussi douter fortement du statut nominaliste de la position de Hellman lorsqu'il est question de la nature des objets pouvant réaliser les modèles possibles de PA^2. Sans justification détaillée, celui-ci croit que l'aspect nominaliste de son approche est appuyé par une conception méréologique dite nominaliste. Selon Hellman (1996), un modèle nominaliste pour PA^2 peut être construit à partir d'une conception de la somme méréologique d'atomes et d'individus inspirée de Burgess et de Lewis. Or, nous pouvons douter qu'une telle conception de la méréologie puisse être qualifiée de nominaliste. En ce sens, Hellman doit nous donner d'une justification indépendante concernant le statut des atomes et des individus.[64] Nos remarques précédentes sur une résolution nominaliste du problème de la non-vacuité des énoncés mathématiques s'appliquent aussi à Hellman. En résumé, l'introduction des modalités, contrairement à ce que croit Hellman, n'est pas un avantage réel. Si la notion de

---

[63] Voir Resnik, M. D. (1992), «A Structuralist's Involvement with Modality,» *Mind: A Quarterly Review of Philosophy*, vol. 101, pp.107-122. Resnik, M. D. (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, p. 70-72. Chihara, C. S. (2004), *A Structural Account of Mathematics*, Clarendon Press, Appendic A.

[64] À cet effet, pour plus de détail, nous référons le lecteur à l'examen de Chihara (2004), car une discussion dans cette direction risque de nous mener trop loin de notre sujet d'étude.

structure admise dans l'approche modale ne subsume uniquement que des structures dites concrètes particulières, pour préserver un réalisme sémantique, il doit poser l'existence des structures mathématiques en termes possibles.[65] Afin d'évacuer toute abstraction dans son approche structurelle, Hellman échange les difficultés relatives au réalisme des structures abstraites pour un autre lot de problèmes relatifs au réalisme des modalités et du nominalisme. Pour récapituler, les notions de structure du structuralisme *ante rem* et *in re* se distinguent par le fait qu'elles sont comprises, soit comme un objet abstrait universel, soit comme une entité abstraite particulière, soit comme un objet concret particulier. Toutefois, Shapiro a raison de souligner que les différentes approches théoriques, malgré leurs oppositions métaphysiques, sont « définitionnellement » équivalentes. En dépit qu'elles se distinguent par le choix des notions primitives, un énoncé est traduisible d'un cadre réaliste à un cadre anti-réaliste et vice-versa. De cette symétrie, elles sont équivalentes d'un point de vue définitionnel. Dans ces conditions, nous comprenons mal comment Shapiro peut soutenir que l'approche *ante rem* est plus perspicace et plus simple. Malgré leur opposition métaphysique à propos des abstractions structurelles, en articulant leurs compréhensions structurelles des mathématiques, soit en termes de collections d'objets concrets, soit en termes de collections de positions, les réalistes et les anti-réalistes des structures abstraites parviennent aux mêmes difficultés épistémologiques. Puisque leur conception de la sémantique et de l'objectivité est articulée en termes de la

[65] Le sens du qualificatif concret ici est double, il signifie, d'une part, dans une terminologie particulière que les structures sont catégoriques, et, d'autre part, qu'une structure est simplement un système d'objets concrets.

référence. Cet aspect est encore plus saillant lorsque le problème de la non-vacuité des énoncés mathématiques est pris au sérieux par ces théoriciens, étant donné qu'elle dérive d'une conception épistémologique de la sémantique qui conçoit la signification des termes par notre relation causale à leurs extensions.[66]

[66] Sur la notion de vérité en mathématique, Benacerraf (1973) pose deux restrictions. La première stipule que nous devons donner un traitement homogène de la sémantique de nos théories scientifiques et de la sémantique du langage ordinaire. La seconde stipule que la vérité en mathématique doit être compatible avec une épistémologie raisonnablement acceptable. Mais dans le contexte de l'article, c'est la théorie causale de la connaissance qui est supposée comme étant raisonnablement acceptable. Souvent qualifiée de dilemme, la seconde restriction nous mène naturellement à poser le problème de l'objectivité des mathématiques en termes de notre relation causale avec les objets mathématiques, donc à poser le problème de l'objectivité en termes de l'existence de la référence des termes de nos théories.

Conclusion

Les thèses structuralistes de Shapiro, Resnik et Hellman évoquent une conception structuraliste ensembliste à la Bourbaki. Elles nous offrent une conception des structures abstraites, selon divers types de structures mathématiques, se moulant aux particularités de ces types de structures, sans englober de manière générale les relations possibles ou existantes entre les types de structures. [67] Ces auteurs n'offrent aucun traitement systématique des relations entre les types de structures et ils ne posent aucunement la question de l'organisation structurelle des structures mathématiques. Ce qui est symptomatique de l'ensemble de ces thèses est qu'elles échouent à nous offrir une notion de structure uniforme pour une compréhension générale des mathématiques en termes structurels. De plus, les thèses de Shapiro et Hellman, contrairement à l'approche de Bourbaki, ne sont pertinentes que pour des théories catégoriques. Un débat strictement d'ordre métaphysique avec des considérations épistémologiques masque la limitation interne de ces approches structurelles se fondant sur une méthodologie de nature ensembliste. Sur ce dernier point, il nous faut préciser davantage la notion de structure chez Bourbaki. En donnant une compréhension formelle de la notion de structure dans une caractérisation à partir d'une théorie des ensembles, Bourbaki cherchait à édifier une conception unifiée des

---

[67] Voir Bourbaki, N. (1950), «The Architecture of Mathematics,» *The American Mathematical Monthly*, 57, pp. 221-232.

mathématiques. [68] Mais le rôle de cette définition formelle n'a pris qu'une place mineure ou presque nulle dans la suite de ses travaux. [69] Dans une compréhension informelle, pour Bourbaki, il y a trois types de structures qui constituent le noyau des mathématiques : les structures de nature algébrique ou « compositionnelle », les structures ordonnées et les structures topologiques. L'ensemble de l'édifice des mathématiques est organisé et se déploie à partir du « sol » de ces structures-mères. Essentiellement, chaque type de structure est compris comme un ensemble abstrait structuré par des constructions caractérisant chacun de ces types. De la même manière, chez Shapiro, Resnik et Hellman nous avons une conception des structures comme un ensemble structuré. Ce qui différencie essentiellement ces auteurs réside dans le choix du type d'éléments pouvant constituer un ensemble structuré. Cette situation est reflétée par le fait que ces approches sont relativement équivalentes, même si elles s'expriment par des notions primitives différentes. Ironiquement, la théorie ensembliste des structures mathématiques, développée par Bourbaki, n'a connu ni suite ni d'application dans le projet général de décrire de manière systématique les mathématiques.[70] La notion de structure dans les mathématiques s'est développée et se comprend davantage, aujourd'hui, sous la méthodologie de la théorie des catégories. La raison principale, derrière ce fait, repose sur la possibilité de traiter uniformément, d'un point de vue syntaxique, la

---

[68] Voir Bourbaki, N. (1970), *Théorie Des Ensembles*, Hermann.

[69] Voir Corry, L. (1992), «Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure,» *Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, vol. 92, pp. 315-348.

[70] *Ibid.* Corry, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser Verlag.

notion de structure à l'intérieur de la théorie des catégories. Cette possibilité réside, semble-t-il, sur le fait que la théorie des catégories ne dépend pas conceptuellement de la notion d'ensemble. D'après Corry :

> « Bourbaki's concepts, claimed Mac Lane, define ' Mathematical structures ' by taking an abstract set and appending to it an additional construct; in category theory there is no subordination of 'Mathematical Structures' to sets, and this is the source of the supremacy of this theory over that of Bourbaki. »[71]

Cependant, cette compréhension de la théorie des catégories n'est pas communément partagée. Hellman (2003) croit que la théorie des catégories n'est pas un cadre conceptuel approprié pour le SPM. Différenciant son approche d'une approche ensembliste, pour Hellman, la théorie des ensembles doit être subsumée par une théorie des structures indépendante.[72] Reprenant la critique de Ferferman (1969), Hellman croit que la théorie des catégories est dépendante conceptuellement à une certaine notion d'ensemble.[73] Or, Marquis (2006) montre qu'une différence fondamentale entre la théorie des catégories et la théorie des ensembles est révélée par leurs critères d'identité. En outre, l'identité entre les ensembles est déterminée par l'axiome d'extensionalité qui est stipulé en termes des éléments appartenant aux ensembles. L'approche catégoriale est essentiellement de faire abstraction des éléments en se fondant sur la notion de

---

[71] *Ibid.*, p.382.

[72] À ce sujet, la théorie de Hellman ne peut nous offrir une reconstruction structurelle de la théorie des ensembles, puisque cette dernière n'est pas catégorique. La proposition de Hellman d'adopter une nouvelle sémantique inspirée des travaux de Putnam révèle davantage le caractère *ad hoc* de sa solution.

[73] Voir aussi Hellman, G. (2005), "Structuralism," in *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, ed. S. Author Shapiro. Awodey, S. (2004), «An Answer to Hellman's Question: 'Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?'» *Source Philosophia Mathematica*, vol. 12, pp. 54-64.

morphisme. Un autre lieu de différence avec une conception ensembliste et une conception catégoriale demeure dans leurs méthodologies inhérentes. Awodey (2004) distingue une méthodologie ascendante (*bottom up*) d'une méthodologie descendante (*top down*). La méthodologie ascendante reflète une conception classique « fondationaliste » orientée par l'idée de l'existence d'un univers d'éléments constituant le socle sur lequel les mathématiques doivent reposer. En contraste, la méthodologie descendante est articulée par une compréhension schématique des énoncés mathématiques décrivant des conditions structurelles sans poser la question de l'existence des éléments satisfaisant ces conditions. En somme, si le SPM est une position sérieuse en philosophie, elle doit avant tout tenir compte de la question méthodologique : de l'approche descendante ou ascendante, laquelle est la plus perspicace pour le SPM et laquelle permet de comprendre la notion de structures mathématiques ? Un premier élément de réponse a été donné dans ce mémoire. Pour les raisons identifiées plus haut, un structuralisme orienté objet d'inspiration ensembliste et de nature ascendante renferme une limitation interne, laquelle l'empêche de nous offrir une compréhension générale des mathématiques par une notion de structure uniforme.

Bibliographie

Awodey, S. (1996), «Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective,» *Philosophia Mathematica*, vol. 4, pp. 209-237.

Awodey, S. (2004), «An Answer to Hellman's Question: 'Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?',» *Philosophia Mathematica*, vol. 12, pp. 54-64.

Benacerraf, P. (1965), «What Numbers Could Not Be,» *Philosophical Review, vol. 74, pp*, 47-73.

Bourbaki, N. (1970), *Théorie Des Ensembles*, Paris, Hermann.

Benacerraf, P. (1973), «Mathematical Truth,» *Journal of Philosophy*, vol. 70, pp. 661-679.

Bourbaki, N. (1950), «The Architecture of Mathematics,» *The American Mathematical Monthly*, 57, pp. 221-232.

Chihara, C. S. (2004), *A Structural Account of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.

Corcoran, J. (1980), «Categoricity,» *Source History and Philosophy of Logic*, vol. 1, pp. 187-208.

Corry, L. (1992), «Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure,» *Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, vol. 92, pp. 315-348.

Corry, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Boston, Birkhäuser Verlag.

Demopoulos, W. (1994), «Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory,» *History and Philosophy of Logic*, vol. 15, pp. 211-225.

Ferferman, S. (1969), «Set-Theoretical Fondations of Category Theory,» dans *Reports of the Midwest Category Seminar III*, M. Barr, S. MacLane , eds., New York, Springer, pp. 201-247.

Frege, G. (1969), *Les Fondements De L'arithmétique: Recherche Logico-Mathématique Sur Le Concept De Nombre*, Paris, Editions du Seuil.

Hale, B. (1996), «Structuralism's Unpaid Epistemological Debts,» *Philosophia Mathematica*, vol. 4, pp. 124-147.

Hale, B., and Wright, C. (2002), «Benacerraf's Dilemma Revisited,» *European Journal of Philosophy*, vol. 10, pp.101-129.

Hellman, G. (1989), *Mathematics without Numbers : Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford, Oxford University Press.

Hellman, G. (1996), «Structuralism without Structures,» *Philosophia Mathematica*, vol. 4, pp. 100-123.

Hellman, G. (2001), «Three Varieties of Mathematical Structuralism,» *Philosophia Mathematica*, vol. 9, pp. 184-211.

Hellman, G. (2003), «Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?,» *Philosophia Mathematica*, vol. 11, pp. 129-157.

Hellman, G. (2005), «Structuralism,» dans *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, ed. S. Shapiro, Oxford, Oxford University Press.

Henkin, L., Monk, J. D., and Tarski, A. (1971), *Cylindric Algebras*, Amsterdam, North-Holland.

Jacquette, D. (2002), *Ontology*, Montreal, McGill-Queen's University Press.

Landry, E. (2001), «Logicism, Structuralism and Objectivity,» *Topoi: An International Review of Philosophy*, vol. 20, pp. 79-95.

Landry, E. & Marquis, J.-P. (2004), «Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical,» *Philosophia Mathematica,* vol. 13, pp. 1-43.

Lowe, E. J. (1998), *The Possibility of Metaphysics : Substance, Identity, and Time*, Oxford, Oxford University Press.

MacBride, F. (2004), «Can Structuralism Solve the 'Access' Problem?,» *Analysis*, vol. 64, pp. 309-317.

Marquis, J.-P. (1997), «Category Theory and Structuralism in Mathematics : Syntactical Considerations,» dans *Episteme 22 : Philosophy of Mathematics Today,* Agazzi, E., Darvas, G., eds., Boston, Kluwer.

Marquis, J.-P. (2006), «Categories, Sets and the Nature of Mathematical Entities,» dans *The Age of Alternative Logics. Assessing philosophy of logic and mathematics today*, J. Van Benthem, G. Heinzmann, Ph. Nabonnand, M. Rebuschi, H. Visser, eds., New York, Springer.

McLarty, C. (1993), «Numbers Can Be Just What They Have To,» *Nous*, vol. 27, pp. 487-498.

Parsons, C. (1990), «The Structuralist View of Mathematical Objects,» *Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, pp. 303-346.

Quine, W. V. (1969), *Ontological Relativity and Other Essays*, New York, Columbia University Press.

Reck, E. H. (2003), «Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense,» *Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, vol. 137, pp. 369-419.

Resnik, M. D. (1992), «A Structuralist's Involvement with Modality,» *Mind: A Quarterly Review of Philosophy*, vol. 101, pp.107-122.

Resnik, M. D. (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford, Clarendon Press.

Rothmaler, P. (2000), *Introduction to Model Theory*, Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers.

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford, Oxford University Press.

Shapiro, S. (2005), «Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-Mathematics,» *Philosophia Mathematica*, 13, pp .61-77.

Stoll, R. R. (1963), *Set Theory and Logic*, San Francisco, Freeman.

Walmsley, J. (2002), «Categoricity and Indefinite Extensibility,» *Proceedings of the Aristotelian Society, vol. 102,* pp. 217-235.

Weaver, G (1998), «Structuralism and Representation Theorems,» *Philosophia Mathematica*, vol. 6, pp. 257-271.