Université de Montréal

Matériel didactique animé pour l'enseignement des opérations sur les fractions à des élèves de secondaire 1 en adaptation scolaire

par :

Steve Morissette

Département de didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maîtrise ès arts (M.A.)

Juin 2006

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Matériel didactique animé pour l'enseignement des opérations sur les fractions à des élèves de secondaire 1 en adaptation scolaire

Présenté par :

Steve Morissette

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Ewa Puchalska

président-rapporteur

Gisèle Lemoyne

directrice de recherche

Pierre Nonnon

membre du jury

Résumé

Opérer sur des fractions est une tâche difficile pour un grand nombre d'élèves de 1ère secondaire. L'enseignement des opérations sur les fractions se fait souvent dans un contexte scolaire soumis à plusieurs contraintes, résultant fréquemment en une approche didactique axée sur l'exécution d'automatismes laissant de côté la signification des tâches enseignées. Notre projet s'inscrit dans une perspective d'intervention didactique auprès d'élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés d'apprentissage.

Nous avons conçu des capsules informatisées d'enseignement qui permettaient aux élèves de visionner, à leur rythme, une séquence didactique dynamique et animée. En plus de favoriser la libération de leur mémoire de travail, ce dispositif visait la construction de connaissances concernant les opérations sur les fractions. Huit élèves ont donc eu l'occasion d'expérimenter ce matériel et d'effectuer des tâches après le visionnement de chacune des capsules. À l'entrée et à la sortie de cette séquence d'enseignement, ces élèves ont effectué une épreuve comportant diverses applications des opérations sur les fractions. Les conduites des élèves au cours des périodes d'enseignement et lors de l'épreuve présentée à l'entrée et à la sortie de la séquence ont été analysées. Selon ces analyses, les situations d'enseignement que nous avons mises en œuvre ont permis à la majorité des élèves de construire des connaissances non négligeables sur les représentations et les additions et soustractions de fractions; les effets de ces situations sur les représentations et les multiplications de fractions sont, par ailleurs, plus limités. Ces dernières limites sont examinées et diverses perspectives pour des recherches futures sont alors présentées.

Mots-clés : didactique, mathématiques, 1ère secondaire, difficultés d'apprentissage, fraction, opération sur les fractions, représentation de fractions, dessin, capsule d'enseignement, animation flash, ordinateur, environnement informatique.

Abstract

To operate on fractions is a difficult task for a great number of students of 1st secondary. The teaching of operations on fractions is often done in a context of class filled with constraints forcing a didactic approach centered on the execution of automatisms leaving on side the significance of the taught tasks. Our project falls under a prospect for intervention with students of 1st secondary presenting learning difficulties.

We designed computerized teaching capsules which make it possible for the students to view, at their rate/rhythm, a dynamic and animated didactic sequence. The purpose of this material was to help releasing their working memory and constructing significant knowledge concerning the operations on fractions. Eight students had the occasion to try out this material and to carry out tasks after the viewing of each capsule. They were also invited to carry out a test comprising various applications of the operations on the fractions, before and after the teaching. Their behaviours during periods of teaching and at the time of the test presented before and after the teaching were analyzed. According to these analyses, most of these students acquired significant knowledge on the representations and the additions and subtractions of fractions; the effects of the teaching situations on the representations and the multiplications of fractions were limited. These last limits were examined and various prospects for future researches were then presented.

Keywords: didactic, mathematics, 1st secondary, learning difficulties, fraction, operation on fractions, representation of fractions, drawing, teaching capsule, flash animation, computer, data-processing environment.

Table des matières

Chapitre 4

Liste des tableaux

Liste des figures

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement toutes les personnes qui m'ont épaulé et encouragé au cours de ce long et intense processus qu'est la rédaction d'un mémoire de Maîtrise. Je désire remercier tout particulièrement ma directrice de recherche, la Professeure Gisèle Lemoyne. Cette dernière s'est montrée des plus disponibles et une source d'inspiration indispensable. Son expertise dans le domaine de la didactique des mathématiques et sa remarquable capacité d'analyse en font un guide extraordinaire. C'est en communiquant sa passion qu'elle réussit à motiver les gens qui ont la chance de collaborer avec elle.

Je profite de l'occasion pour dire merci à ma conjointe Mélanie qui m'a soutenu, aidé et encouragé sans relâche depuis le tout début. Sans son renfort, l'accomplissement de ce projet aurait été beaucoup plus ardu. Sa patience et sa compréhension m'ont permis de rester concentré sur mon objectif et de mener à bien cette étude. Merci également à mes parents qui m'ont toujours appuyé en ce qui concerne mon éducation, et ce, du primaire jusqu'à l'université.

Je veux aussi souligner l'importante contribution de mon ami Daniel avec qui j'ai eu le plaisir de développer le matériel didactique informatisé utilisé au cours de cette recherche. Sans son approche orthopédagogique unique et son étroite implication, la création d'un tel outil d'enseignement n'aurait sans doute jamais eu lieu.

Enfin, merci à l'école secondaire Fernand-Lefebvre à Sorel-Tracy et à son équipe de direction pour m'avoir permis d'aller de l'avant avec mon expérimentation. Merci également aux enseignants, aux élèves ainsi qu'à leurs parents et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à cette recherche.

Introduction

De nos jours, venir en aide et offrir des services aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage semblent être des besoins essentiels que notre société n'oserait jamais faire disparaître ou même mettre en doute. Pourtant, au Québec, il n'en a pas toujours été ainsi. En effet, avant 1960, rares sont les commissions scolaires qui procurent des services aux enfants présentant des difficultés d'apprentissage ; on retrouve très peu d'interventions systématiques à l'intention de ces derniers (Bouchard, 1985). Ces élèves se retrouvent fréquemment dans des institutions religieuses qui leur offrent simplement un service d'hébergement et quelques activités occupationnelles, et ce, quelles que soient leurs difficultés.

Il faut attendre en 1963 pour voir apparaître dans le système scolaire québécois une ouverture envers les E.H.D.A.A. (Élèves Handicapés ou en Difficulté d'Adaptation ou d'Apprentissage ; pour simplifier la référence à ces élèves, nous convenons d'utiliser généralement le terme « élèves en difficulté »). Le rapport Parent reconnaît le droit à l'instruction et à l'égalité des chances des enfants « exceptionnels ». Ce rapport souligne la nécessité de répondre aux besoins des enfants en indiquant qu'un « *système scolaire vraiment démocratique leur offrira des possibilités de réadaptation et un enseignement approprié à leur condition* » (Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec, 1965, p. 331).

Au milieu des années 60' jusqu'au milieu des années 70', le Québec a été très fortement influencé par le système d'éducation américain (États-Unis) en ce qui concerne ses approches et ses méthodes d'intervention auprès des élèves en difficulté. On assiste en effet à la mise en place d'écoles et de classes spéciales pour les élèves en difficulté. Ces élèves sont généralement regroupés par catégories de difficultés (physiques, mentales, visuelles, auditives, langagières, etc.). On met l'emphase sur le dépistage précoce et la ségrégation (séparation systématique des classes spécialisées et des classes régulières) des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. On prétend que de regrouper ainsi les élèves en difficulté leur permet d'obtenir une plus grande attention individuelle et devrait aussi minimiser le sentiment d'échec en évitant la comparaison avec les élèves qui ne présentent pas de difficultés.

Malheureusement, malgré l'aide que l'on désire apporter aux élèves, trop souvent ces derniers entrent dans le secteur spécial pour ne plus en ressortir. Ces mesures spéciales, qui étaient sensées mieux répondre aux besoins des élèves en difficulté, ne semblaient pas donner les résultats prévus. Dans le milieu québécois de l'éducation, c'est en 1976 qu'apparaît le rapport du Comité provincial de l'enfance inadaptée (COPEX). Ce comité critique sérieusement le système en vigueur à ce moment et dénonce la séparation entre l'enseignement régulier et l'enseignement spécialisé, ainsi que l'intolérance de plus en plus grande du milieu scolaire régulier face aux élèves qui diffèrent de la normalité. Le rapport COPEX recommande donc un système en cascade. Dans cette cascade de services, les mesures spéciales sont utilisées uniquement lorsqu'il n'est pas possible de répondre aux besoins de l'élève dans un cadre régulier. En d'autres mots, il faut scolariser l'enfant dans le cadre le plus normal possible.

Aujourd'hui, les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage sont de plus en plus intégrés en classes régulières. Une telle intégration nécessite l'intervention de l'orthopédagogue (enseignant spécialisé en adaptation scolaire œuvrant auprès des élèves en difficulté) qui travaille en étroite collaboration avec l'enseignant régulier. L'outil privilégié de l'orthopédagogue est le plan d'intervention individualisé (P.I.I.). « *L'élaboration d'un plan d'intervention est le résultat d'une démarche de coordination et de planification de l'aide à donner à un élève pour assurer la continuité, la complémentarité, la qualité des services offerts pour répondre aux besoins particuliers de l'élève.* » (Goupil, 1997, page 27).

Le plan d'intervention individualisé répond à des besoins spécifiques et est au cœur de toutes les interventions faites dans le but d'aider l'élève handicapé ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. Selon Goupil (1997, pages 33-35), ce plan permet notamment de :

- Définir des priorités en ce qui concerne les **besoins d'insertion sociale et d'apprentissage** de l'élève, en fonction de son potentiel.
- Définir des objectifs d'intervention, **des stratégies et des moyens** à prendre pour les atteindre.
- Définir les responsables selon les ressources et les moyens disponibles
- Coordonner le travail de tous les participants.
- Établir un calendrier et des modalités d'évaluation.

Le plan d'intervention est étroitement lié aux contextes dans lesquels se déroulent les processus d'enseignement et d'apprentissage. La situation pédagogique fait intervenir plusieurs composantes dont l'élève, le savoir à acquérir, l'enseignant et le milieu. Le modèle systémique de la situation pédagogique ci-dessous représente bien les différentes relations qui s'installent en classe. Ainsi, l'enseignant établit une relation didactique avec le savoir qui est alors « objet d'enseignement » et devient « objet d'apprentissage » pour l'élève. Des situations d'enseignement/apprentissage sont utilisées et c'est à travers elles que se nouent les relations entre l'élève, l'enseignant et le savoir.

Modèle systémique de la situation pédagogique
(Legendre, R., 1983, page 1168)

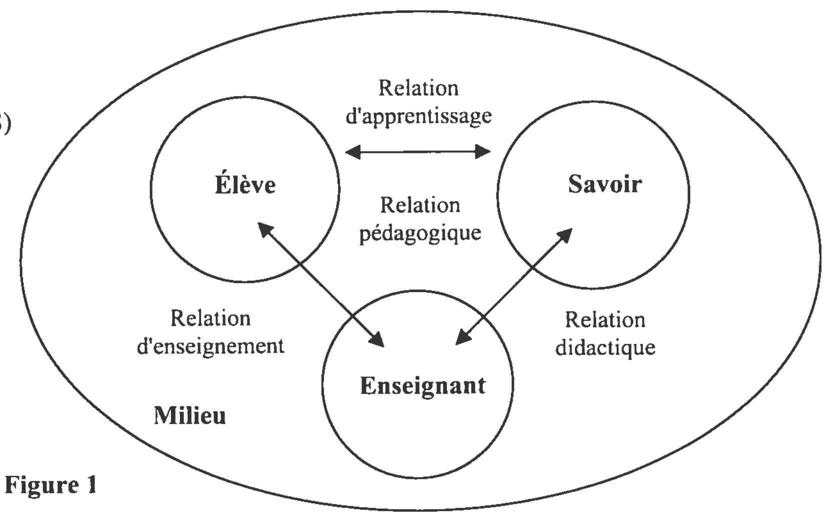


Figure 1

Les élèves en difficulté qui seront sollicités pour la phase d'expérimentation de ce projet de recherche font partie d'une catégorie particulière. Ils présentent des difficultés graves d'apprentissage. Il faut comprendre que difficultés d'apprentissage n'est pas synonyme d'intelligence inférieure. Au contraire, la plupart des élèves EHDAA présentent une intelligence normale et même parfois supérieure à la moyenne. Si l'intelligence n'est pas en cause en ce qui a trait aux difficultés qu'ils éprouvent, quels éléments font en sorte qu'ils aient besoin d'un enseignement particulier ? Voici une liste des difficultés les plus fréquentes que ces élèves peuvent éprouver (D.G.A.) :

- Dyslexie (difficultés de lecture)
- Déficit d'attention
- Difficultés mnémoniques (mémoire)
- Difficultés d'orientation spatiale ou de perception
- Difficultés d'organisation
- Dyscalculie (difficultés marquées en mathématiques)
- Déficit au niveau de la métacognition (autorégulation de l'élève, utilisation de stratégies)
- Manque de motivation face aux tâches scolaires
- Sentiment d'incompétence et/ou de manque de contrôle sur la tâche
- Difficultés calligraphiques

Enseigner à une classe d'élèves présentant tous une ou plusieurs de ces difficultés représente un défi de taille pour l'orthopédagogue. Évidemment, des élèves avec de telles particularités nécessitent un enseignement adapté très différent de ce que l'on peut retrouver au régulier. Les difficultés nommées plus haut sont, dans la plupart des cas, innées. C'est-à-dire qu'il ne s'agit pas de les guérir, les enrayer ou les faire disparaître. Il faut plutôt trouver des moyens originaux et efficaces pour permettre à l'enfant de démontrer tout son potentiel en dépit de ses difficultés. C'est avec cette vision d'intervention que les termes « adaptation et scolaire » prennent tout leur sens.

Trouver des moyens originaux et efficaces pour l'enseignement des mathématiques à des élèves présentant des difficultés motive notre travail depuis plusieurs années. Nous avons ainsi, en collaboration avec un enseignant de l'École Secondaire Vanguard (D. Desrosiers), conçus divers dispositifs informatiques visant à faire entrer les élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans une démarche de construction et de re-construction des savoirs mathématiques.

Notre recherche concerne l'étude d'un dispositif informatique portant sur l'enseignement des nombres rationnels, notamment des opérations sur les fractions, ces savoirs constituant un socle pour la construction d'un nombre important de savoirs mathématiques faisant partie des programmes de tous les cycles de l'enseignement secondaire. Notre intention est d'étudier la pertinence didactique de ce dispositif, une telle pertinence nécessitant que l'on se préoccupe non pas uniquement des apprentissages réalisés par les élèves, mais également de leurs interactions avec le milieu constitué par ce dispositif.

La problématique et le cadre conceptuel de notre recherche seront présentés au premier chapitre. Le second chapitre sera consacré à la méthodologie de notre recherche. L'analyse des résultats de l'enseignement réalisé avec le dispositif informatique sera effectuée au troisième chapitre. Enfin, le quatrième chapitre permettra d'identifier non seulement les contributions, mais également les limites de notre recherche ; quelques perspectives pour des recherches futures seront également proposées.

Chapitre 1 : Problématique et cadre théorique

Les problèmes que pose l'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage sont une source de préoccupations constantes chez les chercheurs en didactique des mathématiques. À ces problèmes, s'ajoutent ceux qui sont spécifiques aux savoirs qui sont objets d'enseignement. Dans notre recherche, il s'agit de savoirs sur les nombres rationnels, notamment les opérations sur les fractions. Nous retenons cette distinction dans la présentation de la problématique et du cadre conceptuel de notre recherche.

1.1. L'enseignement des mathématiques aux élèves du secondaire présentant des difficultés l'apprentissage

L'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage constitue un défi de taille. Tout enseignant qui œuvre auprès de ces élèves pourrait ainsi témoigner des problèmes qu'il rencontre quotidiennement. Tout élève qui subit des échecs en mathématiques, qui ne parvient pas à satisfaire aux exigences du programme, pourrait également témoigner des problèmes qu'il vit. Ces vécus d'enseignants et d'élèves sont tout autant affectifs que cognitifs (ex : voir, entre autres les études réalisées par Boimare, 1999 ; Nimier, 1988 ; Siety, 2001). Dans notre recherche, nous nous préoccupons plus spécifiquement des rapports cognitifs (ou cognitivo-affectifs) aux mathématiques à enseigner et à apprendre. Nous présentons les études didactiques qui nous permettent d'identifier les principaux problèmes qui accroissent la complexité de l'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage. Nous montrons ensuite comment ces études ouvrent la voie à des propositions visant à améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

1.1.1. Problèmes de l'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés

Depuis de nombreuses années, plusieurs chercheurs essaient de mieux comprendre l'origine des difficultés d'apprentissage de nombreux élèves et de trouver des solutions éducatives à ces difficultés, reconnaissant les problèmes majeurs que pose l'enseignement à ces élèves.

L'identification des difficultés d'apprentissage a ainsi été un objectif majeur des recherches effectuées pendant plusieurs décennies. Et avec raison ! Comme le rappellent Lemoyne et Lessard (2003, p. 2) : *« Comment expliquer que, dans des conditions scolaires équivalentes, certains élèves obtiennent des résultats académiques satisfaisants tandis que d'autres ne parviennent pas à réaliser les apprentissages attendus ? »* La recherche de réponses satisfaisantes à cette question a résulté en une prolifération d'études diagnostiques reliant les difficultés des élèves à divers dysfonctionnements cérébraux, comme le souligne bien Fry (1968 : voir Farhnam-Diggory, 1979). Il nous semble pertinent de reproduire la définition retenue par le National Joint Committee for Learning Disabilities, en 1981 (voir Leong, 1982, p.5, Traduction libre).

« Difficultés d'apprentissage est un terme générique qui réfère à un groupe hétérogène de désordres qui se manifestent par des difficultés visibles dans l'acquisition et l'utilisation de l'écoute, de la parole, de la lecture, de l'écriture, du raisonnement ou de difficultés en mathématiques. Ces désordres sont intrinsèques à un individu et présumés être dus à un dysfonctionnement du système nerveux. »

Sans nier le fait qu'un dysfonctionnement du système nerveux puisse expliquer les difficultés en mathématiques rencontrées chez certains élèves, il importe de reconnaître que bien d'autres facteurs peuvent intervenir dans l'avènement de difficultés d'apprentissage chez les élèves, facteurs socio-affectifs, éducatifs et institutionnels. Dans les sections suivantes, nous nous intéressons aux études didactiques sur les difficultés d'apprentissage qui prennent en compte les positions respectives des élèves et des enseignants en classe de mathématiques, ainsi que les pratiques des élèves et des enseignants. Nous faisons d'abord appel à la notion de contrat didactique (Brousseau et Peres, 1981).

1.1.1.1. Le contrat didactique dans les classes de mathématiques

Le concept de contrat didactique est un concept clé pour comprendre les problèmes d'enseignement et d'apprentissage dans les classes de mathématiques. Ce concept a été proposé par Brousseau en 1978 pour rendre compte des échecs répétés des élèves en mathématiques, et des difficultés que pose toute intervention didactique auprès de ces élèves (Brousseau et Pérès, 1981 ; Brousseau, 1998). Le cas Gaël est ainsi présenté par Brousseau. Gaël est un élève présentant des difficultés électives en mathématiques. Brousseau raconte comment, de séances en séances, il ne parvenait pas à engager cet élève dans des situations qui auraient pu lui permettre d'effectuer des apprentissages, cet élève attendant constamment qu'on lui dise quoi faire. Les interactions entre le maître et l'élève s'en trouvaient ainsi fortement affectées.

Brousseau a ainsi appelé ***contrat didactique*** *« l'ensemble des comportements (spécifiques des connaissances enseignées) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître »* (Brousseau, 1980, p.127). Brousseau ajoute aussi que le contrat didactique est *« ce qui détermine explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire (enseignant et élève) va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre »* (Brousseau, 1998, p. 78).

Les rapports de l'enseignant et de l'élève à une situation didactique sont ainsi différents. L'enseignant ne peut ainsi dicter à l'élève ce qu'il doit faire dans une situation-problème, car il compromet alors les apprentissages de l'élève et la construction de connaissances. Brousseau (1986, p. 316) parle en ces termes de ce paradoxe : *« si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir »*. Pour sa part, l'élève doit faire confiance à l'enseignant et s'engager dans une démarche de résolution du problème posé par l'enseignant, sachant qu'il n'a pas de réponse toute faite à ce problème. Il doit, à partir de ses connaissances, mettre en œuvre une solution pour résoudre ce problème, solution qui résultera en la construction d'une nouvelle connaissance. Cette dernière connaissance, comme le souligne Sarrazy (2002), est l'enjeu de la situation didactique.

Le choix de la situation-problème est crucial. Cette situation doit être source d'incertitude et engager l'élève dans un jeu avec un milieu comportant un défi cognitif ; un tel engagement constitue la marque de la réussite de la dévolution de la situation. La dévolution est ainsi définie par Brousseau (1998, p. 325) :

« La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conditions de ce transfert. »

Le jeu de l'élève avec le milieu dans lequel est inscrit la situation doit permettre à l'élève d'anticiper le résultat de ses actions et de tenir compte de ce résultat pour effectuer d'autres tentatives de solution. Il y a apprentissage lorsqu'il y a une adaptation à la situation. *« Il se manifeste par la construction d'une connaissance qui correspond à la « stratégie optimale» (la moins coûteuse et la plus efficace). Elle permet à l'élève de contrôler la situation en réduisant l'incertitude qui y était attachée»* (Sarrazy, 2002, p. 95). Sarrazy ajoute que : *« Dans cette perspective, le contrat didactique est la fiction qui rend possible cette négociation. »*

Un des grands problèmes auquel est confronté l'enseignant qui œuvre auprès d'élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, problème qui devient encore plus prégnant lorsqu'il s'agit d'élèves du secondaire ayant un lourd passé de difficultés en mathématiques, d'échecs en cette matière, est la difficulté de faire dévolution de la situation-problème à ces élèves. Cette difficulté s'installe au fil des ans, à l'insu des enseignants ; elle est un effet pervers du contrat didactique. Les cas similaires au cas Gaël présenté par Brousseau sont nombreux dans les classes incluant des élèves présentant des difficultés en mathématiques depuis plusieurs années. Ces élèves attendent de l'enseignant qu'il leur indique les gestes à faire. Au fil des ans, ils ont mis en place diverses conduites incitant les enseignants à répondre à leurs attentes. Les interactions entre ces élèves et leurs enseignants ont ainsi modifié les attentes des enseignants qui, très souvent, répondent aux attentes des élèves. Les études réalisées par Mercier (1995a) montrent que les enseignants œuvrant auprès d'élèves faibles en mathématiques résistent plus difficilement que les enseignants œuvrant auprès d'élèves moyens ou forts en mathématiques aux demandes de solutions et de réponses des élèves. Le souci des enseignants d'assurer une progression des savoirs enseignés, de respecter les contraintes temporelles, permet aussi de mieux comprendre les conduites respectives des deux groupes d'enseignants. Il est donc important de tenir compte de ces contraintes dans l'analyse des problèmes d'enseignement.

1.1.1.2. La gestion des contraintes temporelles dans les classes de mathématiques

Selon plusieurs études, la gestion du rapport ancien-nouveau déterminant l'avancement du temps didactique (temps d'enseignement et d'apprentissage) pèse lourdement sur les décisions de l'enseignant (Mercier, 1995b). Plusieurs enseignants fournissent ainsi fréquemment aux élèves « les éléments et relations constitutifs de la notion visée » ou se saisissent rapidement d'éléments de réponses des élèves pour organiser cet exposé (Comiti et. al., 1995 ; Conne, 1999 ; Salin, 1999). Certaines de ces pratiques pourraient témoigner d'un souci de faire avancer l'enseignement, d'assurer une rencontre avec le savoir visé (Rouchier, 1996 ; Salin, 1999 ; Sensevy, 1998). Il n'est pas étonnant de retrouver de telles pratiques dans l'enseignement auprès d'élèves présentant des difficultés en mathématiques. Il faut convenir également que les enseignants ont peu d'incitations à recourir à d'autres pratiques.

Dans l'enseignement aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage, on assiste aussi souvent à des « recyclages » de dispositifs, à des révisions et institutionnalisations de gestes qui éloignent des activités mathématiques (Brousseau, 1998 ; Conne, 1999). Plus les enseignants sont informés des conditions « de l'apprentissage antérieur », plus ils peuvent établir *« certaines connexions ou dépendances entre les connaissances »* (Centeno, 1995, p. 133). Cet apport de la mémoire du système didactique croît avec l'âge des élèves ; ses effets sur les dispositifs d'enseignement et sur les apprentissages des élèves méritent d'être examinés.

Dans une étude réalisée en collaboration avec des enseignants de classes spéciales, Gaudreau, Lemoyne et Poirier (2001) ont montré comment cette mémoire peut être initialement invoquée par les enseignants pour justifier une négociation à la baisse des objets du savoir mathématique. Cette étude a cependant montré une évolution à la hausse des objets du savoir, au fur et à mesure que les élèves – il s'agissait d'élèves du 1er cycle du primaire présentant des déficiences intellectuelles – faisaient preuve d'un engagement important dans les situations et de connaissances non soupçonnées au départ par les enseignants. Les enseignants faisaient toujours appel à la mémoire des conduites de leurs élèves, mais cette mémoire avait été transformée.

Dans l'étude précédente, la mémoire des enseignants était enrichie de leurs interactions avec les mémoires des enseignants qui avaient enseignés auparavant à leurs élèves. Une situation comparable est observée chez les enseignants d'une même institution, ce qui permet une accommodation des situations d'enseignement, un retour en classe non seulement sur des épisodes didactiques produits dans cette classe, mais également sur des épisodes produits dans les autres classes auxquelles ces élèves avaient été intégrés antérieurement. Une telle situation n'est pas rencontrée lorsqu'il y a changement d'institution, notamment lors du passage du primaire au secondaire.

Toute entrée dans une nouvelle institution, notamment dans une nouvelle institution d'enseignement, telle l'école secondaire, marque une transition écologique impliquant un repositionnement de valeurs, de conduites, de connaissances (Bronfenbrenner, 1979). Les écoles secondaires et primaires constituent des micro-systèmes différents. Les enseignants et les élèves en sont évidemment affectés. En est également affectée la gestion du temps et de la mémoire didactique.

Dans la gestion du temps didactique, du temps dévolu à l'enseignement et à l'apprentissage des savoirs faisant partie des programmes d'études (Mercier, 1995a, 1995b, 1998), l'enseignant de classes régulières s'appuie sur la progression des savoirs dont font preuve un nombre appréciable d'élèves. Ces élèves témoignent de la correspondance des temps d'enseignement et d'apprentissage, ce qui permet à l'enseignant de clore, du moins temporairement, l'enseignement d'un objet spécifique pour passer à un autre objet. Lorsque l'enseignement est réalisé dans une classe incluant des élèves présentant des difficultés d'apprentissage, l'enseignant est constamment en situation de combler les écarts entre temps d'enseignement et temps d'apprentissage. Cette situation difficile est reconnue par les responsables de l'enseignement qui donnent plus de latitude à ces enseignants, qui leur permettent de prendre le temps requis pour assurer une maîtrise des savoirs. Mais augmenter le temps ne suffit pas. Les élèves ont souvent des rapports problématiques avec des savoirs plus anciens, ainsi que des pratiques d'études et de résolution de problèmes peu efficaces, comme le montrent les études conduites par plusieurs chercheurs (Félix, 2002 (journées Inter-IREM ayant eu lieu à Dijon en mai 2002) ; Lemoyne et Lessard, 2003 ; Mercier, 1995b). L'enseignant doit essayer de composer avec ces divers problèmes. Ces problèmes sont encore plus importants au secondaire qu'au primaire, les élèves du secondaire ayant une histoire didactique plus complexe que ceux du primaire. L'enseignant qui œuvre auprès de ces élèves doit relever des défis de taille.

L'enseignant du secondaire est souvent peu informé des pratiques d'enseignement et d'apprentissage dans les institutions de l'enseignement primaire, des situations ayant été privilégiées pour l'enseignement et l'apprentissage des savoirs mathématiques. S'il enseigne depuis quelques années à des groupes comparables d'élèves, il peut prendre appui sur une mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991 ; Centeno, 1995) constituée par les souvenirs des situations, des événements, des interactions avec les élèves de ces groupes. S'il donne la parole aux élèves, s'il essaie d'interpréter leurs conduites, s'il dispose du temps nécessaire pour examiner les situations proposés dans les manuels du primaire pour l'enseignement/apprentissage de certains des savoirs sur lesquels il doit prendre appui, sa mémoire peut s'enrichir de ces incursions dans le passé des élèves. L'histoire didactique des élèves construite par cet enseignant peut toutefois s'avérer fort différente de celle des élèves, ce qui n'est pas sans poser problème.

Le travail des enseignants dans des classes de 1ère secondaire composées d'élèves présentant des difficultés en mathématiques est donc fort complexe. Cette complexité nous permet de mieux comprendre certaines pratiques de ces enseignants. Comme le montrent, entre autres, les études effectuées par Mercier (1995b) et par Lemoyne et Lessard (2003), on observe souvent, dans ces classes, des reprises ou des aménagements de dispositifs d'enseignement similaires à ceux utilisés au primaire, des révisions de notions maintes fois rencontrées au primaire, et des enseignements de chacun des gestes qui permettent d'effectuer, par exemple, un calcul. Dans ce dernier cas, il peut arriver que les gestes ainsi montrés soient différents de ceux que les élèves ont appris au cours de leurs études primaires ou que les discours accompagnant la présentation de ces gestes soient aussi différents (Matheron et Mercier, 2004). Ces pratiques, il va sans dire, font obstacle à la mise en place d'une pratique mathématique (Brousseau, 1998 ; Conne, 1999). Elles peuvent être aussi démotivantes pour les élèves qui se rendent compte qu'ils ne progressent pas et réagissent souvent de diverses manières: désengagement, indiscipline, réponses impulsives, … (Hinshaw, 1992 ; Desbiens et Bowen, 2002 ; Bowen et al, 2000).

1.1.1.3. Conclusion

Les notions de contrat didactique, de temps et de mémoire didactique, comme le montrent les analyses précédentes, nous permettent de mieux apprécier les problèmes que pose l'enseignement des mathématiques à des groupes d'élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématiques. Les analyses précédentes nous invitent à repenser l'enseignement des mathématiques.

1.1.2. Éléments de solutions aux problèmes de l'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés

Les études décrites précédemment sur les effets du contrat didactique dans l'enseignement auprès d'élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques (Brousseau, 1998 ; Sarrazy, 2002) nous invitent à imaginer des situations qui puissent :

a) favoriser leur engagement cognitif.
b) provoquer un changement de leurs habitudes et un bris du contrat didactique.
c) leur permettre de résoudre des problèmes en faisant confiance à leurs connaissances et à leurs capacités d'apprentissage.
d) leur permettre enfin de participer à l'enseignement (Mercier, 1998).

Alors, comment concevoir de telles situations ? La conception de situations qui permettent d'opérer les changements souhaités ne va pas de soi. Les études sur la gestion du temps et de la mémoire didactique* nous fournissent certaines balises pour une telle conception. En effet, il importe de présenter des situations nouvelles, des situations défis, qui portent sur des objets de savoir sensibles (dans notre recherche, il s'agit des opérations sur les nombres rationnels). Ces dernières doivent éviter un recyclage de situations maintes fois rencontrées par les élèves au cours de leurs études primaires, et offrir à l'élève un milieu suffisamment riche pour lui permettre de s'engager dans la résolution de problèmes, dans la réalisation de tâches nouvelles, tout en pouvant interpréter les résultats de ses actions, de ses tentatives, pour poursuivre son travail. Ces situations doivent permettre à l'élève d'apprécier les connaissances qu'il a mises en œuvre pour résoudre les problèmes, d'en apprécier l'utilité. Ces situations doivent, en un mot, engager les élèves dans une pratique mathématique, leur *faire faire des mathématiques*, comme le proposent Conne (1999) et Favre (1999) dans leurs études réalisées plus spécifiquement auprès d'élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques.

Dans la construction de situations didactiques qui puissent, non seulement favoriser chez les élèves des apprentissages mathématiques importants, mais également transformer leurs habitudes et pratiques d'étude et de travail, il importe de penser la gestion didactique de ces situations, ainsi que les interactions didactiques. L'enseignant doit éviter de fournir aux élèves des réponses, des démarches de résolution de problèmes, des procédés de calcul, ce qui n'est pas chose facile. Il doit, en plus, réhabiliter le statut de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement, faire en sorte que les élèves transforment leurs perceptions de l'erreur. Cette réhabilitation mérite d'être examinée davantage.

* « *La mémoire de l'enseignant sera ce qui conduit à modifier ses décisions en fonction de son passé scolaire commun avec ses élèves... Le caractère «didactique» de cette «mémoire» vient de ce que les décisions modifiées concernent les rapports de l'élève avec le savoir* » (Brousseau et Centeno, 1991, p. 172).

Nombre de chercheurs en didactique des mathématiques se sont préoccupés du traitement de l'erreur dans l'enseignement. Avant d'examiner quelques expériences didactiques, il nous semble important de reproduire les remarques effectuées par Chevallard (1988, p. 75) à la suite d'une étude de la copie d'un élève de terminale, lors d'une interrogation écrite :

« L'erreur de l'élève n'est donc que l'effet et le symptôme, dont la répétition engendrera peut-être une situation d'attribution d'échec, d'un rapport au calcul algébrique – notre objet O – à très faible idonéité. On imagine que, pour supprimer des «étourderies», telle celle constatée plus haut, c'est un travail profond qui devrait être entamé ; rien de moins que le remaniement du rapport de l'élève au calcul algébrique! »

Remanier le rapport des élèves à certains objets du savoir mathématique, en allant au-delà de la face publique de l'erreur, est donc un travail complexe. Intégrer un travail sur l'erreur aux dispositifs usuels d'enseignement peut amener une transformation non négligeable des rapports publics et privés des élèves aux objets mathématiques. Dans son ouvrage, Sensevy (1998, p. 101-108) parle ainsi de l'intérêt du travail sur l'erreur :

« L'intérêt du travail sur l'erreur pourrait donc en classe être double :

- *favoriser une activité de type épistémologique, que fournirait le fait de travailler sur ses propres erreurs ou sur les erreurs des autres. Ce travail serait aussi une tâche d'apprentissage ;*

- *mettre à mal l'allant-de-soi de l'épistémologie quotidienne, aussi bien affectifs (« je suis l'erreur que j'ai commise ») qu'épistémologiques (« le maître seul possède ontologiquement le pouvoir de repérer les erreurs »), ces allant-de-soi pouvant s'apprécier comme nouveaux avatars de la position d'attente.*

Notre intention était de faire en sorte que l'élève construise un rapport à l'erreur désigné de manière déclarative aux élèves de la façon suivante :

Une erreur n'est pas une faute. Il n'y a pas à se sentir coupable de faire une erreur. On peut beaucoup apprendre de ses propres erreurs, ou des erreurs des autres. Il est important de savoir travailler sur ses (des) erreurs ; il faut donc apprendre à le faire. Il est important de retenir certaines erreurs « types », qui vont servir de guide pour les futurs travaux. »

Dans le but de provoquer une rupture des habitudes des élèves dans le traitement de problèmes multiplicatifs, Sensevy invite les élèves à fabriquer des problèmes, à juger de leur pertinence mathématique, à les corriger au besoin. Le repérage de l'erreur tombe ainsi sous la responsabilité de l'élève, plutôt que sur celle de l'enseignant. *« Dans cette perspective, la régulation ne se faisait pas « par les résultats attendus, mais par l'erreur nécessairement détectée et traitée par les élèves »* (Sensevy, 1998, p. 118 ; voir aussi Amigues, 1994, p. 97). Ce travail a contribué à mettre en place des rapports à des objets nouveaux, à créer les habitus d'une pratique nouvelle. Sensevy montre l'intérêt de ce travail dans la transformation des habitudes des élèves, dans leur prise de conscience de leur responsabilité face à la production d'erreurs, dans leur prise de conscience de leurs possibilités d'apprentissage, et dans les apprentissages réalisés.

Concevoir des situations qui engagent l'élève dans une démarche d'apprentissage, qui lui permettent de transformer ses habitudes de travail et ses rapports aux objets du savoir, constitue un travail complexe. Notre recherche vise la construction et la mise à l'épreuve de telles situations dans le cadre d'un enseignement des opérations sur les fractions auprès d'élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématiques. Le choix de l'objet « opérations sur les fractions » prend acte des difficultés importantes des élèves dans la compréhension des fractions et des opérations sur les fractions ; ces difficultés sont observées par les chercheurs et les enseignants. Par ailleurs, si nous disposons d'un nombre important d'études didactiques visant la construction du concept de fractions, il en est autrement en ce qui concerne les opérations sur les fractions, lesquelles occupent pourtant une place importante dans le programme de 1ère secondaire.

1.2. Enseignement des nombres rationnels aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage

L'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage, comme nous l'avons vu précédemment, est une tâche complexe. Cette complexité s'accroît lorsque cet enseignement s'adresse à des élèves de 1[ère] secondaire et qui, de surcroît, concerne les nombres rationnels, et plus spécifiquement les fractions. Comment en effet trouver des situations qui évitent la reprise de situations marquées par l'enseignement primaire, tout en prenant en compte les difficultés des élèves ? C'est dans une telle optique que nous examinons les problèmes que soulèvent l'enseignement et l'apprentissage de ces savoirs et que, par la suite, nous définissons certaines orientations pour la construction de situations didactiques.

1.2.1. Problèmes de l'enseignement des nombres rationnels

Pour mieux interpréter les problèmes que soulève l'enseignement des nombres rationnels, nous identifions brièvement les savoirs sur les nombres rationnels.

1.2.1.1. Les savoirs sur les nombres rationnels

Fractions, nombres décimaux et pourcentages sont diverses représentations et écritures des nombres rationnels qui sont objets d'enseignement. Les fractions constituent toutefois un objet fondamental d'enseignement, la maîtrise de cet objet permettant de donner un sens aux nombres décimaux et aux pourcentages.

En mathématiques, lorsque vient le temps de mesurer, les fractions apparaissent chaque fois que l'unité à représenter n'est pas assez grande pour être représentée d'une manière intégrale (entier). Les élèves, qu'ils présentent des difficultés d'apprentissage ou non, auront tôt ou tard à travailler avec cette notion qui cause souvent problème. Chez les élèves en difficulté d'apprentissage, on observe une tendance à développer des stratégies d'évitement des problèmes mathématiques impliquant les fractions. Ceci fait en sorte qu'ils débouchent fréquemment sur des actions stéréotypées et uniquement procédurales.

Ne sachant établir des relations entre les calculs qu'ils effectuent, les élèves développent une vision presque exclusivement procédurale des mathématiques ; ils construisent de nombreuses règles d'actions qui ne prennent en compte qu'une partie de l'information. Même si une telle manière de travailler peut s'avérer valide dans certains cas, une compréhension du concept de fraction et des opérations sur les fractions doit émerger dans l'esprit des élèves pour qu'ils puissent construire un rapport adéquat aux nombres rationnels. Savoir reproduire de manière mécanique les procédés de représentation des fractions ou de calcul sur les fractions n'est pas en soi une preuve de compréhension du sens de ces procédés. Demander aux élèves d'expliquer pourquoi ils ont choisi une certaine opération pour résoudre un problème constitue une étape essentielle dans l'évaluation des apprentissages et l'identification des difficultés des élèves. Il est ainsi important que les élèves puissent construire des représentations adéquates du concept de fractions, pour accéder à une compréhension des procédés de calcul sur les fractions. Comment favoriser une telle construction ? C'est une question complexe qui commande d'abord une représentation adéquate des savoirs sur les nombres rationnels.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un rapport entre deux nombres entiers (le deuxième nombre étant différent de zéro). Ainsi, les nombres suivants sont des nombres rationnels : 3/10 ; 0,66666... ; 8/3 ; 12 ; 5/1. Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne peuvent s'écrire sous la forme d'un rapport de deux nombres entiers. De Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier (1996, p. 22) proposent la définition suivante des nombres rationnels : «Nombre obtenu à partir du quotient de a et b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0. » L'objet a/b, comme le rappelle bien Comin (2002, p. 145), évoque différentes représentations :

« Si l'on évoque l'objet lui-même, et que l'on vise son statut purement mathématique, on parlera de nombre rationnel, de quotient euclidien, etc., ou, plus généralement, de grandeur, de mesure, de nombre, de scalaire, etc. Si l'on vise son rôle mathématique, on parlera d'opération, de quotient, de rapport de fraction, de fonction numérique, de raison, etc. ... Si, enfin, on évoque son usage dans des environnements particuliers, on sera amené à parler de taux, d'échelle, etc. »

Le concept de fraction est ainsi un concept central qui, comme le montre la citation précédente, évoque diverses réalités. En nous référant à plusieurs études (Blouin, 2002; Blouin et Lemoyne, 2002; Comin, 2002; Kieren, 1988, 1992, 1994, 1995; Rouche, 1998), nous pouvons parler ainsi des sens suivants de la fraction :

- partie-tout
- rapport
- quotient
- opérateur
- mesure

Le sens **partie-tout** est le premier sens de la fraction qui est invoqué dans nombre de situations d'enseignement/apprentissage pour les élèves de l'école primaire. La fraction a/b rend compte d'une relation entre un tout partagé en un nombre b de parties égales et un certain nombre a de ces parties. Le tout peut être une grandeur continue (ex : aire, volume, masse, longueur) ou discrète (ex : une collection). La fraction 3/7 peut ainsi correspondre à 3 parties d'une tablette de chocolat qui a été partagée en 7 parties égales ou encore, à 3 des 7 crayons à bille que comporte un étui.

Le sens **rapport** de la fraction permet de représenter le rapport entre deux grandeurs continues ou discrètes. La fraction 3/7 peut ainsi rendre compte du rapport entre 3 parties d'une tablette de chocolat qui a été partagée en 7 parties égales ou encore, du rapport entre 3 des 7 crayons à bille que comporte un étui et le nombre total de crayons, soit 7. L'écriture 3/7 peut aussi rendre compte du rapport entre 3 parties d'une tablette de chocolat qui a été partagée en 10 parties égales et les 7 autres parties que comporte cette tablette, etc. Elle pourrait aussi rendre compte du rapport entre deux grandeurs continues ou discrètes différentes. Ainsi, 3/7 pourrait aussi rendre du rapport entre les quantités de jus concentré de jus d'orange et d'eau qui composent un breuvage, par exemple, entre 3 litres de jus concentré d'orange et 7 litres d'eau. Dans ces deux derniers exemples, nous avons utilisé l'expression « écriture 3/7 » et non « fraction 3/7 » pour bien rappeler que dans ces situations 3/7 n'est pas une fraction, mais bien une façon d'écrire le rapport 3/7.

Le sens **quotient** de la fraction indique que la fraction peut être considérée comme le résultat d'une division. Ainsi, 3/7 peut rendre compte de la part que chacun des 7 enfants a obtenu, lorsqu'on a partagé également les 3 gâteaux dont on disposait. Selon l'interprétation quotient de la fraction, l'écriture fractionnaire a/b est utilisée pour représenter le résultat de la division de a par b ; a/b est ainsi la solution d'une équation linéaire du type bx = a, dans l'exemple précédent, 7x = 3.

Le sens **opérateur** de la fraction permet d'envisager la fraction d'une manière algébrique. La fraction a/b est ainsi considérée comme une fonction qui peut être représentée par f(x) = a/bx. Dans l'enseignement secondaire, ce sens intervient, entre autres, dans la construction de l'image d'une figure géométrique par des homothéties. Le nombre a/b ne représente plus une quantité ou une comparaison, mais plutôt une transformation. Cette interprétation permet de concevoir la multiplication de fractions comme une composition de fonctions.

Le sens **mesure** de la fraction implique l'existence d'unités de mesures, comme le montre bien la situation portant sur l'épaisseur d'une feuille de papier, situation originale et fondamentale conçue par Guy et Nadine Brousseau (1987). Ainsi, 3/7 cm, et non uniquement 3/7, peut être une mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier. On peut dire également que 3/7 cm est la mesure de la longueur d'une corde ou encore, que les 3/7 d'un gâteau (le gâteau étant l'unité de mesure) ont été mangés. Selon l'interprétation mesure de la fraction, on peut ainsi dire que 3/7 exprime une relation multiplicative. Selon cette interprétation, 1/7 représente la fraction unité et 3/7 serait le résultat de l'itération de la fraction unité 1/7 ; la fraction 3/7 serait alors 1/7 + 1/7 + 1/7. On peut penser l'addition des fractions 3/7 et 5/7, comme une addition répétée de la fraction 1/7.

La coordination des différents sens de la fraction est essentielle à la construction de rapports adéquats aux fractions et aux opérations sur ces nombres. Pour mieux comprendre la complexité de la construction de situations d'enseignement visant une telle coordination et les difficultés rencontrées par un grand nombre d'élèves, il nous est apparu important de rappeler brièvement les résultats d'une étude portant sur les situations d'enseignement des opérations sur les fractions que l'on retrouve dans plusieurs manuels québécois pour l'enseignement primaire et secondaire.

1.2.1.2. L'enseignement des opérations sur les fractions dans les manuels québécois

Pour concevoir des situations d'enseignement qui permettent à des élèves de 1ère secondaire de construire des rapports plus adéquats aux opérations sur les fractions, il nous apparaît nécessaire d'être informé des situations d'enseignement préconisées dans les manuels d'enseignement à l'intention des élèves du primaire. Nous présentons quelques résultats importants de l'étude réalisée par Barallobres et Lemoyne (2006).

Barallobres et Lemoyne ont ainsi examiné divers manuels québécois et argentins et se sont intéressés, entre autres, aux sens de la fraction intervenant dans les situations proposées aux élèves. Les principaux résultats de cette étude sont les suivants :

1. les sens partie-tout et opérateur de la fraction sont privilégiés pour l'addition et la soustraction de fractions.
2. le sens opérateur est privilégié pour la multiplication de fractions.
3. la division de fractions ne fait qu'exceptionnellement appel aux divers sens de la fraction.

Selon ces chercheurs, le choix de privilégier un sens pour l'introduction des opérations semble être davantage une ressource didactique pour l'obtention rapide d'un algorithme que pour la construction du sens des opérations. Les chercheurs montrent aussi, avec plusieurs exemples à l'appui, comment les dispositifs proposés aux élèves pour représenter les fractions, ainsi que les choix des fractions entrant dans les opérations, privent les élèves d'un travail important sur les sens de la fraction, sur la représentation des fractions, sur les fractions équivalentes et sur les opérations sur les fractions. Dans un grand nombre de situations, les élèves disposent aussi de figures géométriques ou de collections. Nous présentons quelques-unes des situations analysées par Barallobres et Lemoyne.

1.2.1.2.1. Addition et soustraction de fractions

La première situation provient du manuel Presto (Lacasse, 2003, 3e cycle, 2e année, Manuel B, Volume 1, p. 39). Elle est ainsi énoncée : « *À l'aide d'un collier de 24 trombones, Ali communique la durée des activités qu'il a réalisées hier. Il passe les 5/12 de cette journée à dormir et le 1/3 à l'école. À quelle fraction du collier la durée des autres activités correspond-elle* » Cet énoncé est accompagné du dessin d'un garçon qui regroupe des trombones de diverses couleurs : 8 trombones verts (1/3), 10 trombones roses (5/12) ; 2 trombones jaunes, 2 trombones rouges et 2 trombones bleus (6 trombones sur 24) sont non rassemblés. Les tâches proposées aux élèves sont ensuite d'indiquer les durées de différentes activités et de comparer les temps consacrés à ces activités. Il leur est aussi demandé de recourir, si possible, à un moins grand nombre de trombones pour représenter les durées totales. L'enseignement se poursuit avec une tâche de complétion d'identités arithmétiques impliquant des fractions comparables à celles utilisées dans les tâches précédentes, par exemple, 1/3 + ? = 9/12 ; ? + 1/3 = 12/24. Pour réaliser ces dernières tâches, les élèves sont enfin invités à recourir à des feuilles quadrillées.

1.2.1.2.2. Multiplication de fractions

Dans l'enseignement primaire, selon le programme actuel, seule la multiplication d'une fraction et d'un nombre naturel est enseignée. La multiplication de fractions, selon les manuels consultés pour l'enseignement secondaire, partage avec l'enseignement primaire un recours privilégié au sens opérateur de la fraction. Ainsi, dans le manuel Carrousel (Breton, 1993, première secondaire, Tome 1), et dans la plupart des manuels que nous avons aussi consultés, on a recours à des formes géométriques, à des droites numériques et à d'autres mesures de longueurs pour représenter les multiplications de fractions. Ces représentations servent d'introduction et, dans le manuel Carroussel par exemple, on associe 3/5 de 2/3 à la multiplication 3/5 x 2/3 sans autre explication. Puis, l'algorithme de la multiplication de fractions est montré et les gestes sont décrits. Nous reproduisons à cet effet le texte cité par Barallobres et Lemoyne (p. 181), texte provenant du manuel (Breton, 1993, p. 228) : « *Il nous faut un algorithme de multiplication de fractions qui respecte les résultats précédents (les 4 exemples présentés). L'algorithme* *suivant satisfait ces exigences ...Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble. »*

1.2.1.2.3. Division de fractions

L'analyse de l'enseignement de la division de fractions, dans les principaux manuels consultés par Barallobres et Lemoyne, montre que les auteurs de manuels effectuent un lien entre la division dans N et la division dans Q (manuels Carrousel (Breton, 1993) et Dimensions (Patenaude et Viau, 1993)) : « *a) Combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende ... b) Combien de fois une fraction est contenue dans le dividende.... ; c) Combien y a-t-il de .... dans ... .* » (Barallobres et Lemoyne, p.15). Ces questions sont explicitées à l'aide de représentations géométriques. Les auteurs de manuels passent toutefois rapidement à la déclaration « toute fraction non nulle a/b a un inverse b/a ... » et à l'énonciation de la règle pour diviser des fractions. La fraction est interprétée comme un opérateur. Des applications impliquant les notions de taux et d'échelle sont souvent proposées.

L'étude réalisée par Barallobres et Lemoyne montre enfin que, dans un bon nombre de manuels, on retrouve diverses situations qui pourraient permettre aux élèves de donner sens aux opérations sur les fractions. On peut s'interroger sur les raisons qui motivent les auteurs à ne pas exploiter davantage ces situations. Il est possible que, reconnaissant la complexité de ce travail de construction et les difficultés rencontrées par un grand nombre d'élèves en ce domaine, les auteurs préfèrent munir les élèves de procédés de calcul qu'ils peuvent immédiatement appliquer dans la résolution de problèmes.

1.2.2. Les difficultés d'apprentissage des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres

Les études réalisées auprès de plusieurs populations d'élèves de l'enseignement primaire et secondaire montrent les représentations inadéquates des nombres rationnels construites par les élèves du primaire et du secondaire. Plusieurs études ont surtout été consacrées à la représentation des nombres rationnels, à la comparaison de ces nombres, aux relations entre diverses écritures des nombres rationnels, au positionnement des nombres rationnels sur la droite numérique (Bezuk et Bieck, 1992 ; Charnay et Mante, 1992 ; Hiebert et Behr, 1988 ; Kieren, 1980 ; 1988 ; Lemoyne, 1993 ; *CRDP- EvaMath, 1994*. Ces études font état de difficultés majeures rencontrées par un grand nombre d'élèves du primaire et du secondaire, difficultés qui entravent l'apprentissage des opérations sur les nombres rationnels (les fractions). Pour mieux comprendre les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des opérations sur les fractions, il nous semble essentiel de résumer brièvement les résultats des études précédentes. Comme le rappellent, à juste titre, Bezuk et Bieck (1992), ainsi que Hiebert et Behr (1988), le développement du sens de l'écriture des fractions, et des concepts d'ordre et d'équivalence, permet d'apprécier les grandeurs relatives de fractions, d'établir des ponts importants entre leurs connaissances sur les fractions et les méthodes plus formelles sur les calculs impliquant les fractions. Faisant nôtres ces points de vue, nous jugeons utile de donner un bref aperçu des études montrant les représentations problématiques des nombres rationnels, notamment des fractions, rencontrées chez un grand nombre d'élèves du primaire et du secondaire.

1.2.2.1. Les représentations problématiques des nombres rationnels chez les élèves du primaire et du secondaire

Dans une étude réalisée auprès d'élèves de 6^{e} année ou du premier cycle du secondaire, Lemoyne (1993) a demandé à ces élèves de répondre à diverses questions impliquant les nombres rationnels. Dans une de ces questions, les élèves étaient invités à placer en ordre croissant plusieurs fractions : 3/7 ; 5/9 ; 1/2 ; 255/510 ; 7/35 ; 171/340 ; 3/8 ; 6/11 ; 7/8 ; 251/504 ; 8/9. Tous ces élèves, sauf un, ont tenté sans succès d'appliquer le procédé appris en classe, procédé qu'ils ont appelé « dénominateur commun ». Se déclarant incapables de poursuivre, ils ont demandé la permission d'utiliser une calculatrice, ce qui leur a été accordé ; le recours à une calculatrice n'a toutefois pas abouti, le nombre de calculs rendant, selon eux, la tâche trop complexe. L'élève qui a pu aisément réussir cette tâche, a montré une coordination de plusieurs connaissances sur les nombres naturels et les fractions. Ainsi, pour comparer 7/8 et 8/9, il a exploité le sens partie-tout de la fraction, en comparant les fractions 1/8 et 1/9, fractions à ajouter aux fractions 7/8 et 8/9 pour obtenir un entier. Cet élève, ainsi que deux autres élèves qui avaient tenté sans succès de trouver un dénominateur commun, ont aussi eu recours à la fraction *repère* 1/2 pour comparer les fractions 255/510, 251/504 et 171/340, disant rapidement que 255 est la moitié de 510, que 171 est un peu plus que la moitié de 340, et que 251 est un peu moins que la moitié de 504. Ces conduites, comme le rappellent Bezuk et Bieck (1992), sont fort précieuses non seulement dans la comparaison de fractions, mais également dans l'estimation des résultats d'opérations, voire dans la compréhension du sens de ces opérations. Mentionnons enfin que dans l'étude réalisée par Lemoyne (1993), une grande majorité des élèves n'a pu également illustrer à l'aide d'un seul rectangle, diverses fractions dont les dénominateurs ne possédaient pas tous des communs multiples ou des communs diviseurs (par exemple, les fractions 62/122, 3/5, 10/20, 3/7).

On pourrait multiplier les exemples faisant état des difficultés des élèves sur les fractions et montrer comment les rapports aux fractions contaminent les rapports aux décimaux, aux nombres à virgule et aux nombres réels (voir, entre autres, Charnay et Mante, 1992 ; Novillis-Larson, 1980 ; Post et Cramer, 1987). Nous nous contentons de rapporter les résultats de deux autres études.

Dans l'étude conduite par Post et Cramer (1987 : voir Bezuk et Bieck, 1992, p. 129, traduction libre), plusieurs élèves ne savent interpréter des questions du type : « Est-ce que 1/2 est plus grand ou plus petit que 1/3, ou ces nombres sont-ils égaux ? » Ces élèves demandent une clarification du sens de la question précédente, clarification du type : « Voulez-vous dire « la taille des pièces » ou « le nombre de pièces » ? Une telle demande peut surprendre, si on ne connaît pas les situations d'enseignement qui ont été proposées à ces élèves, situations amenant souvent une confusion entre « le concept de nombre et ses applications, voir ses illustrations » ; les travaux effectués par Kamii (1990) sur le concept de nombre montrent avec éloquence les dérives possibles des « concrétisations des concepts » dans l'enseignement des mathématiques.

Les résultats d'une évaluation conduite par le *Centre régional de documentation pédagogique de Nice* (CRDP, EvaMath, 1994, pp. 20-21) sont tout aussi révélateurs que ceux de l'étude précédente des difficultés des élèves. Dans cette étude, on a proposé aux 320 élèves de 6^e année de deux collèges (secondaire 1) divers exercices. Nous reproduisons deux de ces exercices et donnons un aperçu des réponses des élèves *(CRDP,* EvaMath, 1994, pp. 20-21*) :*

« 1^{er} exercice :

Dans la liste ci-dessous, entoure les écritures qui représentent 14/10.

140 1,4 1 + 4/10 1,04 1,40 0,14

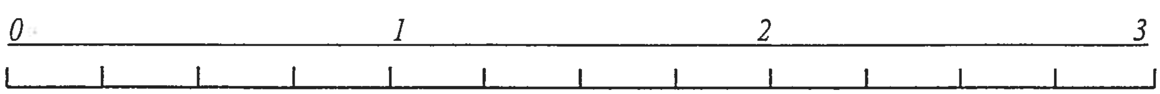
Les pourcentages du tableau ci-après indiquent les erreurs commises par les élèves :

1 + 4/10	*Non entouré*	*66%*
1,40	*Non entouré*	*33%*
1,4	*Non entouré*	*29%*
0,14	*Entouré*	*22%*
140	*Entouré*	*16%*
1,04	*Entouré*	*4%*

2^e exercice :

Sur la droite graduée ci-dessous place les nombres. »

1/2 1,75 9/4 0,25



9/4	*Mal ou pas placé*	*65%*
1/2	*Mal ou pas placé*	*49%*
1,75	*Mal ou pas placé*	*33%*
0,25	*Mal ou pas placé*	*28%*

La très grande majorité des élèves ne savent reconnaître l'équivalence entre 1¼ et 1+¼, au 1^er^ exercice. L'écriture 1¼ n'est pas envisagée comme le résultat d'une composition additive de l'entier 1 et de la fraction 1/4. Le 2^e^ exercice pose problème à un grand nombre d'élèves qui ne savent situer correctement les fractions 1/2 et 9/4, fractions pourtant simples et rencontrées dans maintes situations depuis l'école primaire. Des résultats similaires seraient probablement rencontrés au Québec, si on tient compte des situations et des tâches proposées aux élèves dans la majorité des manuels scolaires (voir, entre autres, celles qui ont été examinées par Barallobres et Lemoyne (2006)). Dans ces manuels, lorsque les élèves doivent placer des nombres rationnels sur une droite, les nombres choisis sont des fractions ou des nombres décimaux simples (ex : 1/2 et 3/4) ; plus encore, les élèves disposent d'un procédé spécifique enseigné et mis en œuvre dans des situations et des tâches comparables à celles qui leur sont présentées par la suite.

Les études précédentes montrent, de toute évidence, des rapports problématiques aux nombres rationnels, ainsi qu'une difficulté à établir des liens entre diverses écritures de ces nombres, voire même entre des écritures qui impliquent la notion de fractions équivalentes. On a peu de mal à imaginer, qu'à défaut de telles connaissances, l'apprentissage des opérations sur les fractions ne peut revêtir un sens. L'élève est ainsi contraint d'enregistrer les gestes qui font partie des techniques de calcul enseignées. L'enseignement des opérations sur les fractions aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage en est ainsi fortement affecté. Cet enseignement doit prendre acte de ce résultat et penser des situations qui permettent aux élèves de reconstruire des représentations plus adéquates des fractions, dans des situations visant par ailleurs l'enseignement des opérations sur les fractions.

1.2.2.2. Les difficultés rencontrées par les élèves du primaire et du secondaire dans les opérations sur les fractions

Les difficultés rencontrées par les élèves du primaire et du secondaire dans les opérations sur les fractions n'ont pas fait l'objet d'une attention comparable à celle qui a été consacrée aux opérations sur les nombres naturels. Les erreurs identifiées dans l'exécution de calculs sur des fractions, comme nous l'avons vu précédemment, sont généralement interprétées comme des événements qui invitent à une re-construction du concept de fraction et du sens des opérations sur les fractions (voir aussi les études effectuées par Vergnaud, Benhadm et Dussouet (1979) et par Sensevy (1998)). C'est dans un tel contexte que nous avons retenu l'étude effectuée par Chevallard et Julien (1989).

Dans une étude visant à mieux comprendre les jeux du contrat didactique dans l'enseignement des fractions au collège (2^{e} secondaire), Chevallard et Julien (1989) ont constitué un questionnaire réunissant une liste d'exercices provenant des *« enquêteurs du programme de recherche britannique « Concepts in Secondary Mathematics and Science »* (Chevallard et Julien, 1989, p. 30). Sous la direction de Hart, un compte rendu a été publié dans l'ouvrage *Children's Understanding of Mathematics : 11-16* (Hart, 1981). Des exercices provenant de l'étude effectuée par Hasemann (1981), étude inspirée du programme précédent ont été ajoutés à cette première liste. Trente-six questions (Chevallard et Julien, 1989, p. 52-57) ont ainsi été adressées à 73 professeurs de collèges, qui devaient indiquer leur accord ou leur désaccord avec chacune de ces questions, ainsi que leur pronostic des performances des élèves. Chacun des exercices a également été effectué par un nombre d'élèves variant entre 55 et 85. Le tableau suivant présente les performances des élèves aux exercices qui font davantage appel à la compréhension des opérations sur les fractions.

Tableau I

Performances des élèves à des exercices sur les fractions et prédictions effectuées par les enseignants sur les performances de ces élèves

Exercices	Performances des élèves	Prédictions des professeurs
1- En se congelant, l'eau augmente son volume des 75/100 de son volume initial. Combien de litres d'eau obtient-on en fondant un cube de glace de 30 cm d'arête ?	Nombre d'élèves ayant réussi : 0 Nombre d'élèves ayant échoué : 85	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 0 réussite acceptable : 9 réussite mauvaise : 16
2- On sait que l'aire d'un rectangle est 1/3 cm^2. Trouvez sa longueur sachant que sa largeur est 3/5 cm.	Nombre d'élèves ayant réussi : 22 Nombre d'élèves ayant échoué : 55	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 4 réussite acceptable : 6 réussite mauvaise : 11
3- Dans une salle de classe, il y a 35 chaises et 30 élèves. Dans une autre, il y a 40 chaises et 36 élèves. Quelle est la classe dans laquelle la plus grande fraction de chaises est utilisée ?	Nombre d'élèves ayant réussi : 3 Nombre d'élèves ayant échoué : 74	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 2 réussite acceptable : 14 réussite mauvaise : 4
4- Lors d'un goûter d'anniversaire il y a du cake à manger. À la fin, il reste 2/7 des morceaux de cake, soit 4 morceaux. Combien y avait-il de morceaux au départ ?	Nombre d'élèves ayant réussi : 35 Nombre d'élèves ayant échoué : 50	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 5 réussite acceptable : 8 réussite mauvaise : 6
5- Une course est composée de relais de 1/8 de km chacun. Chaque coureur court un relais. Combien de coureurs faut-il pour une course de ¾ de km ?	Nombre d'élèves ayant réussi : 20 Nombre d'élèves ayant échoué : 35	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 21 réussite acceptable : 16 réussite mauvaise : 6
6- Complétez par des entiers : 2/3 = ?/ 12 = 10/ ?	Nombre d'élèves ayant réussi : 45 Nombre d'élèves ayant échoué : 32	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 21 réussite acceptable : 3 réussite mauvaise : 0
7- Exprimez par des fractions : Le nombre x de minutes dans une seconde Le nombre y d'heures dans une seconde Le nombre z de jours dans une minute	Nombre d'élèves ayant réussi : 12 Nombre d'élèves ayant échoué : 64	Nombre de professeurs ayant prédit une : réussite bonne : 0 réussite acceptable : 4 réussite mauvaise : 13

Comme le montre le tableau I, les prédictions des professeurs sur les réussites des élèves sont dans l'ensemble fort bonnes. Les analyses et les interprétations de ces prédictions et des conduites des élèves faites par Chevallard et Julien permettent de mieux apprécier les rapports des élèves et des professeurs au traitement des fractions.

Le problème #1 n'est réussi par aucun des élèves. Ce résultat est encore moins positif que celui prédit par les professeurs. Si nous nous référons à la typologie des problèmes multiplicatifs effectuée par Vergnaud (1981), ce problème met d'abord en œuvre un produit de mesures ; en effet, il s'agit de calculer d'abord le volume du cube de glace de 30 cm d'arête. Sept élèves seulement parviennent à trouver la mesure attendue, mais ne savent interpréter correctement la relation entre le volume de glace et le volume initial d'eau ; les chercheurs ne présentent toutefois pas les calculs effectués par ces élèves.

Le problème #2 implique, comme le premier problème, un produit de mesures. Il s'agit de trouver la longueur du rectangle, connaissant sa largeur et son aire. Les commentaires de certains enseignants, comme le montrent les chercheurs, sont particulièrement éclairants. Ainsi, un enseignant déclare qu'il peut y avoir « *un risque d'erreur même par un élève qui a compris les fractions* » (Chevallard et Julien, 1989, p. 68) ; un autre enseignant déclare qu'il s'agit d'un « *exercice intéressant, qui, en plus des techniques opératoires sur les fractions, présente une « mise en équation », ce qui n'est pas toujours évident pour les élèves de quatrième.* » (p. 68). La mention de la mise en équation dans les commentaires des enseignants semble, selon les chercheurs, refléter l'introduction de fractions. Si les mesures d'aire et de largeur avaient été des nombres naturels, il est possible que cette mention n'aurait pas été retenue. Cette interprétation montre bien comment le recours à une fraction dans un problème multiplicatif, pourtant familier aux élèves, transforme le rapport à ce type de problème. Dix-neuf des 22 élèves qui réussissent ce problème ont recours à une mise en équation ; ce procédé rejoint celui prôné par les enseignants précédents.

L'échec massif des élèves au problème #3 est étonnant. En effet, comme le soulignent les chercheurs, « *alors que la comparaison des fractions 30/35 et 36/40 entre dans une rubrique de problèmes légitimes des plus banals, sa mobilisation comme outil approprié de résolution du problème P36 ne laisse pas d'inquiéter les professeurs.* » (p. 45). Deux professeurs seulement prédisent sa réussite. L'ensemble des professeurs semble bien reconnaître sa complexité ; il ne s'agit pas ainsi simplement de comparer les fractions, mais également de reconnaître la nécessité de recourir à ces fractions et de les comparer. Enfin, parmi les élèves qui échouent à ce problème, on observe un élève qui identifie correctement les deux fractions, les simplifie (6/7 et 9/10) et les met correctement sur un même dénominateur, mais conclut que c'est dans la seconde classe qu'il y a un nombre plus grand de chaises utilisées. Les chercheurs mentionnent que cette conclusion correspond vraisemblablement à celle des autres élèves qui répondent incorrectement. Il s'agit d'un résultat important et qui montre bien, comme le soulignent Chevallard et Julien, que les élèves disposent de procédés de traitement des fractions, procédés qu'ils peuvent aussi exécuter correctement ; ces procédés montrent qu'ils ont construit des connaissances sur les fractions, qu'ils peuvent aussi avoir recours à ces connaissances pour « modéliser le problème », tout en choisissant de recourir à des connaissances élémentaires sur les nombres pour produire leur réponse.

Il est assez étonnant de constater que le problème #4 soit échoué par un nombre si important d'élèves de collège. Ce problème multiplicatif impliquant une proportion simple (Vergnaud, 1981 ; Comin, 2002) du type :

1 gâteau ou 7/7 d'un gâteau ⟶ ? morceaux ou parts 2/7
2/7 d'un gâteau ⟶ 4 morceaux ou 4 parts

L'examen effectué par les chercheurs des solutions possibles et des solutions privilégiées par les élèves qui parviennent à trouver la réponse juste est fort intéressant et fait apparaître des écritures et des procédés diversifiés. Voici quelques-uns des procédés utilisés par les élèves (Chevallard et Julien, p. 39-40) :

a) $4 \div 2/7$
$= 4 \times 7/2$
$= \dfrac{2 \times 2 \times 7}{2}$
= 14 morceaux au départ
b) Il y avait 14 morceaux. Il y a 2/7. On fait $4 \div 2 \times 7 = 14$
c) $2/7 = 4$

1/7 = 2

7/7 = 7 x 2 = 14 morceaux

d) 2/7 = 4/14 … 4 morceaux représentent 4/14 du gâteau ; il y avait 14 morceaux

Ces différentes solutions montrent diverses connaissances et pratiques sur les fractions. Comme le rappellent les chercheurs, si les solutions b) et c) semblent prévisibles, du moins si on prend en compte les pratiques usuelles développées dans les problèmes multiplicatifs, les autres solutions le sont moins.

Les performances des élèves au problème #5 sont relativement comparables à celles prévues par les professeurs. Ces professeurs avaient prévu des difficultés arguant que les élèves pourraient montrer une non maîtrise du sens des opérations ou encore, effectuer des erreurs de calcul. Pour ces professeurs, la solution attendue est la division de 3/4 par 1/8. Or, selon l'analyse des solutions, aucun élève ne semble recourir à une telle opération. Et fait encore plus intéressant, cette solution attendue n'est pas celle qui est privilégiée par les chercheurs britanniques qui ont proposé ce problème à des élèves, et qui est effectivement utilisée par ces derniers élèves. Pour les chercheurs britanniques, ce problème fait appel au concept de fractions équivalentes, étant donné les fractions utilisées. Une telle différence pourrait traduire une différence entre les professeurs français et britanniques dans la façon d'envisager l'enseignement des fractions, les professeurs britanniques s'attribuant une plus grande liberté. Cette hypothèse est rejetée par les chercheurs qui, s'appuyant sur d'autres analyses, montrent qu'à l'instar des professeurs français, les professeurs britanniques balisent l'activité en faisant référence à d'autres objets du savoir sur les fractions.

Les difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes faisant appel à des connaissances sur les fractions et sur les opérations sur les fractions, comme le montre l'étude effectuée par Chevallard et Julien (1989), renvoient non seulement à des difficultés notionnelles, mais également à des pratiques privilégiées dans l'enseignement, ces pratiques mettant en jeu des objets du savoir sur les fractions qui peuvent être différents d'une institution à l'autre, d'une culture à l'autre. Elles montrent enfin, chez les élèves, une lecture et une construction de ces pratiques et des objets du savoir sur les fractions qui y sont liés qui peuvent être différentes de celles mises de l'avant ou attendues par le maître. En un mot, leur interprétation ne peut faire abstraction du contrat didactique (Brousseau, 1998). Il nous semble important de donner la parole à Chevallard et Julien (1989, p. 29) qui résument bien ce problème :

« Comme à propos de tout objet d'enseignement, l'enseignant doit, pour remplir correctement sa charge, pouvoir légitimement exiger des élèves, au bout d'un temps donné, qu'ils manifestent, devant certaines situations-problèmes mettant en jeu des fractions, des comportements que l'on puisse interpréter, au moins si l'on adopte le point de vue du professeur, comme l'expression d'un apprentissage réussi.

En réalité, cette description du contrat auquel est soumis le professeur doit être affinée. Les comportements de réussite des élèves peuvent être vus comme autant d'objectifs assignés à l'action de l'enseignant.

....

Toutefois, l'engagement de la responsabilité du professeur ne se limite pas à la seule mise en œuvre de moyens didactiques, et ceci vaut notamment pour le regard que le professeur lui-même porte sur l'accomplissement de sa charge et pour le jugement que portera sur lui l'institution dont il dépend.

De ce point de vue interne, en effet, sa responsabilité est engagée sur les résultats qu'il obtient de ses élèves. Car, bien que fort incertain, le critère à quoi se reconnaît, en dernière instance, sa capacité à avoir su, d'une part, déterminer, parmi la masse de moyens didactiques disponibles, ceux pertinents à son projet d'enseignement et, d'autre part, à en avoir fait une mise en œuvre « efficace », semble être, de sont point de vue, ... , le fait que, sur un certain corpus de types d'exercices, une proportion non négligeable de ces exercices soient traités avec succès, chacun par une proportion non négligeable d'élèves de la classe – les élèves qui réussissent pouvant d'ailleurs varier d'exercice à exercice. »

Nous pourrions reprendre les propos précédents, en nous situant dans la position de l'élève. L'apprentissage de l'élève est réussi s'il parvient à mettre en œuvre correctement les procédés et les savoirs enseignés, du moins dans une proportion non négligeable d'exercices, comme il est possible de l'observer chez un nombre appréciable d'élèves. Les élèves présentant des difficultés d'apprentissage ne parviennent pas ainsi à réussir un nombre d'exercices comparable à celui des autres élèves de leurs classes, en recourant aux procédés et aux pratiques privilégiés par les enseignants. Lorsque les apprentissages concernent les fractions, les opérations sur les fractions et la résolution de problèmes comportant des fractions, les difficultés d'apprentissage sont le lot d'un grand nombre d'élèves, d'où l'importance de penser des situations qui pourraient permettre à un plus grand nombre d'élèves de construire des pratiques et des savoirs plus adéquats. Notre projet sur l'enseignement des opérations sur les fractions s'inscrit donc dans une telle perspective.

Comment penser de telles situations ? Comment envisager une construction ou re-construction de connaissances sur les fractions et sur les opérations sur les fractions qui puisse prendre appui sur des connaissances et des pratiques de ces élèves, pour les amener à les questionner et à les dépasser, pour leur permettre de donner sens aux opérations sur les fractions, aux techniques usuelles de calcul ?

1.3. La construction de situations pour l'enseignement des opérations sur les fractions aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage : orientations envisagées

La construction de situations pour l'enseignement des opérations sur les fractions, comme le montrent les études dont nous venons de faire état, se doit d'envisager simultanément un travail sur ces nombres, sur les problèmes dans lesquels ils interviennent, sur les opérations et calculs réalisés avec ces nombres. Une telle orientation nous semble un incontournable pour tous les élèves et, à plus forte raison, lorsqu'il s'agit d'élèves de 1ère secondaire qui présentent des difficultés en mathématiques et qui disposent de plusieurs connaissances, habitudes et pratiques construites dans des tâches fort variées, allant de la représentation de fractions, à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs comportant des fractions, des décimaux et des pourcentages, à l'application de techniques de calcul sur les fractions et les décimaux. Comment prendre en compte ces connaissances et pratiques ? Quel dispositif faut-il envisager ?

1.3.1. L'approche didactique privilégiée

L'enseignement auprès d'élèves présentant des difficultés en mathématiques est un lieu où les approches didactiques, voire les idéologies didactico-pédagogiques (selon le sens donné à ce terme par Mercier, 2001), fusent et se côtoient ; l'urgence de trouver des approches qui permettent à ces élèves de faire – de refaire – les mathématiques ratées (Conne, 1999 ; Favre, 1999) fait se positionner les enseignants sur un certain nombre d'approches. Comme le rappelle Blouin (1993 ; 2002), il existe principalement "*deux types d'approches rééducatives*" (Blouin, 1993, p. 280).

- *« La première approche, que nous appellerons le modèle de remédiation, consiste d'abord à révéler dans les conduites de l'élève en difficultés d'apprentissage, une série de "bugs" pour ensuite élaborer et tenter un enseignement correctif par des activités spécifiques pour chacun des "bugs".*

- *La seconde approche, quant à elle, met davantage l'accent sur la signification des savoirs en jeu dans l'enseignement ; cette approche se traduit généralement dans la pratique par une reprise de l'enseignement du savoir tout en tentant d'y associer plus de sens. »*

Les deux approches précédentes s'inscrivent, de toute évidence, dans des visions différentes de la mission didactique, des rapports entre temps d'enseignement et d'apprentissage, des rapports entre les objectifs de connaissances poursuivis et les objectifs plus curriculaires, voire plus épistémologiques. La première approche vise une transformation à court terme, tandis que la seconde envisage davantage les possibilités que d'autres connaissances puissent, à plus ou moins long terme, s'y greffer, que des rapports et des pratiques mathématiques puissent être transformés et permettent par la suite un meilleur investissement par l'élève de sa participation à l'enseignement (Mercier, 1995, 1998 ; Brousseau et Centeno, 1991 ; Conne, 1999). Mais l'ouverture de la seconde approche, ainsi que les possibilités que cette approche puisse à la fois provoquer une évolution des connaissances, une transformation des rapports aux savoirs, une transformation des pratiques mathématiques des élèves, supposent une clarification de ce que nous entendons par « reprise ».

Il importe d'abord de souligner l'impossibilité d'effectuer une « reprise » d'un enseignement. Comme le rappelait le philosophe grec Héraclite (V^{e} siècle, a.c.) : *« On ne peut pas entrer deux fois dans le même fleuve»*. En supposant même que l'enseignant puisse avoir un fidèle livret des tâches, des discours, des explications, des gestes, et des interactions entre l'enseignant et les élèves qui ont marqué le premier enseignement, il devrait prendre en compte le fait que l'élève qu'il a en face de lui n'est plus le même, puisque cet élève a déjà reçu cet enseignement et développé des connaissances, des habitudes de traitement des tâches. Si le terme « reprise » veut rendre compte d'une approche rééducative qui est informée des situations usuelles utilisées dans l'enseignement, afin d'effectuer un choix de situations critiques, de situations qui peuvent avoir marqué les rapports des élèves aux savoirs, pour revisiter autrement ces situations, pour inviter l'élève à les revisiter autrement, nous pensons, en nous appuyant en cela sur les études didactiques citées précédemment, qu'une telle reprise pourrait avoir des effets bénéfiques sur les connaissances et les rapports des élèves. Nous convenons de référer à cette approche par le terme de « reprise éclairée ».

Une « reprise éclairée » d'un enseignement ne peut toutefois faire l'économie d'informations concernant les difficultés des élèves, voire les bugs, qui renvoient à des représentations, à des connaissances, à des savoir-faire inadéquats portant sur des savoirs spécifiques. Comme nous l'avons vu à la section précédente, les représentations, les connaissances et les savoir-faire inadéquats, ou insuffisants, portant sur les fractions et sur les opérations sur les fractions, sont partagés par un grand nombre d'élèves. En ce qui concerne les opérations sur les fractions, nous avons aussi pu mettre en évidence des pratiques d'enseignement que l'on peut caractériser ainsi : recours à des figures géométriques ou à des collections ; partages de ces figures ou de ces collections selon les fractions à représenter et les opérations sur ces fractions ; discours sur les actions effectuées, selon les opérations ; discours sur les relations entre les actions et les techniques usuelles de calcul ; exercices d'application des techniques ainsi montrées. Dans ces conditions, les probabilités que les élèves ne retiennent que les techniques et oublient les représentations et les explications qui pourraient leur donner sens, sont assez élevées, comme en attestent les rapports problématiques des élèves à ces savoirs. Comment faire en sorte que les élèves donnent sens aux représentations, actions et textes qui fondent l'enseignement sur les opérations, et donnent ainsi sens à ces opérations ?

La question qui nous préoccupe, compte tenu de notre visée sur l'enseignement des opérations sur les fractions, est la suivante : ***Est-ce possible d'effectuer une combinaison des approches « remédiatrice » et « reprise éclairée » qui puissent permettre à l'élève de donner un sens aux fractions, aux opérations et aux procédés de calcul, tout en lui permettant d'éprouver l'efficacité de ses procédés de représentation de fractions, de résolution de problèmes impliquant ces nombres et enfin, de calcul sur ces nombres ?*** Répondre positivement à cette question constitue une ambition forte.

1.3.1.1. La pertinence de privilégier le sens partie-tout de la fraction dans l'enseignement des opérations sur les fractions

Dans l'enseignement des fractions et des opérations sur les fractions, comme nous en avons fait état antérieurement, le sens partie-tout de la fraction est privilégié, non sans raisons ! Comme le montrent plusieurs chercheurs (Kieren, 1988 ; Rouche, 1998 ; Brousseau, 1987), le fractionnement d'objets variés, offrant chacun des particularités, permet d'appréhender diverses méthodes pour parvenir à un partage adéquat. Si les objets sont bien choisis, ces méthodes font souvent intervenir des partitions sur des parties d'objets, ces partitions s'appuyant sur l'établissement de rapports entre des parties, certaines des parties acquérant alors le statut d'unités de mesure des parties et des touts. Lorsque les partages sont motivés par la recherche de solutions à des problèmes arithmétiques, lorsqu'ils sont associés à des représentations variées rendant compte des actions effectuées, puis à des représentations symboliques de ces actions (écritures arithmétiques, par exemple) et enfin, à des fractions et opérations sur les fractions, ils s'inscrivent dans une démarche conceptuelle fondamentale, comme le montrent Salaberry et Sensevy (2002).

Les études précédentes nous invitent à recourir à des représentations imagées et symboliques d'actions reliées aux opérations sur les fractions. Il nous semble important de recourir à des représentations imagées d'objets qui, dans les manuels, sont habituellement utilisés : rectangle, cercle, ... De telles figures sont familières aux élèves. Ils les ont rencontrées dans un grand nombre de tâches sur l'identification et la représentation de fractions. Ils les ont rencontrées lors de l'introduction aux opérations sur les fractions ; dans ce dernier cas, les rencontres furent généralement brèves, les élèves se contentant souvent de suivre le discours et les gestes de l'enseignant qui fait un exposé commenté des actions à mener pour effectuer les opérations, cet exposé se terminant par une présentation des techniques usuelles de calcul. Même si l'enseignant invite les élèves à se référer à leur manuel pour mieux comprendre les explications qu'il a données, pour étudier les textes qui présentent les opérations, les élèves se contentent très souvent de retenir les actions à mettre en place pour appliquer les techniques enseignées. Plusieurs des élèves, notamment les élèves présentant des difficultés d'apprentissage, ne sauraient d'ailleurs effectuer une lecture pertinente des textes que l'on retrouve dans les manuels.

Le rapport instrumental d'un grand nombre d'élèves du primaire et du secondaire, voire d'un grand nombre d'adultes, aux opérations sur les fractions (Bezuk et Bieck, 1992 ; Hiebert et Behr, 1988 ; Lemoyne, 1993 ; Lemoyne, René de Cotret, Coulange, 2002 ; Vergnaud, Benhadm et Dussouet, 1979) n'est plus à démontrer. Si l'on demande à des élèves d'expliquer, à l'aide de dessins, les gestes qui entrent dans les calculs, peu savent produire une explication satisfaisante. En revanche, selon les résultats de l'étude réalisée par Lemoyne, René de Cotret et Coulange (2002), la plupart des élèves esquissent un dessin, généralement un rectangle ou cercle, mais ne peuvent traiter leur dessin pour donner un sens aux calculs sur les fractions. Prendre appui sur ces représentations familières pour construire le sens des opérations sur les fractions nous apparaît ainsi important. Mais, comment amener les élèves à mieux lier les représentations, les opérations, les calculs ? Comment faire en sorte que ces représentations soient plus que des introductions aux opérations, aux calculs ?

1.3.1.2. Les possibilités didactiques d'un matériel informatisé dynamique

Depuis des décennies et encore aujourd'hui, le manuel scolaire est l'outil pédagogique le plus répandu dans les établissements scolaires. L'utilisation du livre en enseignement comporte plusieurs avantages. Il permet notamment à l'élève d'avoir accès un ouvrage de référence de format maniable, qui lui donne accès à des définitions des notions mathématiques et à diverses applications de ces notions. Dans la même catégorie d'outil, on peut intégrer tout ouvrage imprimé, destiné à l'élève, auquel peut se rattacher certains documents audiovisuels et d'autres moyens pédagogiques en lien avec un programme d'étude. Par l'entremise de textes imprimés, d'images, de graphiques et de photos, le livre devient un instrument essentiel en éducation. Une utilisation satisfaisante de cet instrument suppose que l'élève puisse lier ces diverses entrées, ce qui, du moins dans le cas des opérations sur les fractions, semble difficile à réaliser.

Nos expériences auprès des élèves présentant des difficultés d'apprentissage nous portent à croire que ces élèves seraient grandement avantagés par l'utilisation de matériel didactique spécialisé et complémentaire au matériel scolaire traditionnel. Ce point de vue est aussi partagé par nos collègues œuvrant auprès de ces élèves, ainsi que par nombre de chercheurs en éducation. En effet, il a été montré depuis longtemps que certains enfants sont des apprenants visuels qui assimilent mieux les idées lorsqu'une représentation concrète leur est présentée (Denis, 1995). D'autres élèves apprennent mieux si la matière est présentée verbalement et structurée d'une manière séquentielle. Un grand nombre d'élèves semblent pour leur part, plus aptes à apprendre lorsqu'ils sont mis dans une situation d'interaction et de contrôle. D'autres élèves apprennent tout simplement mieux en ayant la chance de toucher, de bouger ou de manipuler des objets.

1.3.1.2.1. L'ordinateur, un outil pour une gestion dynamique des représentations

Depuis quelques années, l'ordinateur s'impose de plus en plus comme un outil didactique privilégié, ayant un potentiel pédagogique très intéressant. Toutefois, pour que l'ordinateur puisse remplir une telle fonction, toute activité qui nécessite l'utilisation d'un ordinateur devrait être planifiée soigneusement et avoir un lien avec des objectifs précis.

Il est possible d'utiliser un ordinateur de la même façon dont on utilise un livre, c'est-à-dire simplement comme un média servant à transmettre des informations sous forme de textes, d'images, de graphiques ou de photos. Un tel usage de l'informatique ne révolutionne en rien les approches pédagogiques déjà existantes. Il faut donc arriver à mettre en évidence les avantages qu'offre l'ordinateur. Avec les logiciels disponibles aujourd'hui, il est maintenant possible d'imaginer l'élaboration d'un type de manuel scolaire entièrement animé. Par « animé », on entend une exploitation judicieuse des outils de représentations graphiques. Le matériel créé et visualisé à partir de l'ordinateur s'attaque donc à une dimension absente du manuel scolaire ordinaire : le mouvement.

L'ordinateur permet en effet de déplacer ou de faire bouger des formes à l'écran, de modifier les teintes, les couleurs ou la forme des images ou des objets, d'obtenir une vision tridimensionnelle, de donner le contrôle à l'élève sur le rythme et l'ordre d'apparition (retour en arrière) d'une séquence d'enseignement ou encore, la répétition (avec support visuel simultané) d'un mouvement nécessaire à la réalisation d'une tâche précise. Le recours à ce type de matériel permet une « reprise éclairée » de l'enseignement de certains objets du savoir, reprise ouvrant un espace de liberté nécessaire à l'apprentissage de chacun des élèves.

Le matériel qui sera étudié dans ce travail se destine en premier lieu aux élèves de mathématiques de première secondaire ayant des difficultés d'apprentissage. Il est particulièrement utile à ceux qui ont besoin d'un contenu mettant l'emphase sur l'entrée visuelle et à ceux qui sont insuffisamment motivés par le matériel conventionnel. Un matériel d'enseignement riche et dynamique peut permettre à l'enseignant de combiner, dans une même période, un enseignement papier-crayon et un enseignement informatisé intégrant des leçons interactives et dynamiques, pour ainsi augmenter l'engagement des élèves dans les situations. Il permet de réajuster le rythme d'enseignement en donnant la possibilité de personnaliser le niveau de difficulté et le nombre d'exercices pour chaque élève. L'interactivité peut prendre la forme de choix multiples, de déplacements d'objets par l'utilisateur, d'animations ou de suivis des élèves par un système de base de données qui donne une rétroaction immédiate. Plusieurs logiciels informatiques permettent aujourd'hui de créer du matériel didactique offrant une telle interactivité.

1.3.1.2.2. L'ordinateur, un outil pour une gestion dynamique de la mémoire et de l'apprentissage

La mémoire est l'une des fonctions les plus importantes et l'une des propriétés les plus passionnantes du cerveau. La mémoire est nécessaire à toutes les opérations de l'esprit. Elle régit l'essentiel de nos activités qu'elles soient scolaires, professionnelles, personnelles et ludiques. Elle construit aussi bien l'identité, les connaissances, l'intelligence, la motricité et l'affectivité de chaque être humain.

On peut définir la mémoire comme étant la fonction qui permet de capter, coder, conserver et restituer les stimulations et les informations que nous percevons (Baddeley, 1993). Elle met en jeu aussi bien les structures physiques que psychiques. Il n'existe pas une, mais des mémoires. En effet, on peut distinguer différents types de mémoires ayant chacun un rôle spécifique et des caractéristiques particulières.

Dans le texte qui suit, nous rappelons d'abord les études consacrées au rapport entre mémoire et apprentissage.

1.3.2. Mémoire et apprentissage

Les informations que nous percevons ne sont pas déversées en vrac dans une sorte de mémoire « réservoir ». Elles sont organisées et régies par des systèmes qui fonctionnent en relation permanente (Lieury, 1993 ; Bérubé, 1998). Il n'existe pas de « centre de la mémoire », mais plusieurs sites du cerveau impliqués dans le traitement et la conservation des informations. La mémoire répond ainsi au même schéma que les autres fonctions supérieures du cerveau comme la motricité, le langage, la perception, l'intelligence.

Apprentissage et mémoire entretiennent des relations réciproques et sont intimement liés dans un processus de rétroaction continu entre le sujet et son environnement. On peut dire que l'apprentissage produit des effets que le système nerveux transforme en messages signifiants. Ces informations seront répétées jusqu'à l'obtention d'un résultat acceptable de rétention. Il s'agit alors, au moment de l'acquisition d'habiletés, de fournir à l'apprenant une organisation structurée qui soit efficace, afin que la restitution puisse se faire de façon convenable. C'est la raison pour laquelle l'éducateur doit présenter des informations qui soient à la fois riches et variées (Goussard, 1998).

Il existe plusieurs catégories de mémoire. Parmi celles-ci, on retrouve notamment : la mémoire sensorielle, la mémoire à court terme (MCT) ou mémoire de travail (MT) et la mémoire à long terme (MLT). Nous traiterons davantage des notions de mémoire à court terme et de mémoire à long terme. Nous présenterons plus brièvement la notion de mémoire sensorielle, son influence étant moins perceptible au niveau de l'apprentissage. Il est tout de même pertinent de résumer son rôle et son fonctionnement.

L'image consécutive visuelle est un exemple parfait de mémoire sensorielle, mais nous obtenons des informations sensorielles non seulement par les yeux, mais également par les autres organes des sens, les oreilles, le nez, la peau, la langue, ainsi que les muscles et les articulations. Cela offre une série d'images consécutives. Puisque les images consécutives sont des copies fidèles de l'expérience originale, il semble que dans la mémoire sensorielle, l'information soit codée de façon à donner une représentation fidèle du stimulus originel. Le traitement de l'information modifie très peu ce que les sens ont perçu. Voici donc les caractéristiques de la mémoire sensorielle (Baddeley, 1993, p. 58) :

« 1. Il s'agit d'une mémoire d'une durée très brève. 2. Elle possède une grande capacité. On suppose en fait que la mémoire sensorielle a la capacité de faire face à autant de stimuli que l'organe sensoriel peut en recevoir ; en d'autres termes, notre mémoire sensorielle peut traiter, coder et stocker, même si ce n'est que pour un bref instant, tout ce que les yeux peuvent voir, les oreilles peuvent entendre et la langue peut goûter. 3. Elle code l'information de façon directe, c'est-à-dire que l'image consécutive correspond d'assez près à l'image originelle de l'objet vu, du son entendu ou de la pression ressentie. »

La section suivante rappelle les définitions des différentes catégories de mémoires.

Mémoire à court terme

La mémoire à court terme correspond à la rétention temporaire de l'information en cours de traitement. Sa fonction est de permettre un emmagasinage temporel et en même temps d'effectuer un certain nombre de traitements. La mémoire à court terme semble avoir une capacité d'emmagasinage limitée, mais avec une grande vitesse d'emmagasinage et de lecture (Gathercole, 1996).

Mémoire à long terme

La mémoire à long terme correspond à l'emmagasinage d'information qui a pu bénéficier d'une révision mentale et qui a fait l'objet d'un traitement approfondi. La mémoire à long terme semble avoir une capacité d'emmagasinage illimitée, avec des limitations sélectives sur la récupération des informations (Gathercole, 1996).

Mémoire épisodique

La mémoire épisodique porte sur les faits ou événements qui proviennent de différentes périodes de la vie antérieure ; elle emmagasine les caractéristiques liées aux événements pour les retrouver. Le processus de rappel des événements est conscient (Weil-Barais, 1993).

Mémoire sémantique

La mémoire sémantique est le système par lequel l'individu emmagasine sa connaissance du monde. C'est une base de connaissances, un magasin d'information que nous possédons tous et dont une grande partie nous est accessible rapidement et sans effort.

Si tout le cerveau contribue à la mémoire, il existe des parties plus spécifiques qui sont les lieux où s'exercent le plus les activités mnémoniques. Il existe des aires spécialisées dans le cortex cérébral, mais l'hippocampe et ses aires associées (l'amygdale, le bulbe olfactif...) ainsi que le cervelet, semblent jouer un très grand rôle dans le traitement et la coordination des données de la mémoire.

Il existe plusieurs facteurs influençant les performances de la mémoire. En effet, la longueur du matériel influence beaucoup le temps d'apprentissage. La difficulté ou la facilité du matériel, la signification de celui-ci sont d'autres facteurs importants. Par exemple, plus le matériel est significatif plus il est facile à apprendre. Le rythme de présentation de la matière joue également un rôle. Le fait de laisser plus de temps entre les présentations des items favorise l'apprentissage parce que le sujet a le temps de faire baisser les effets de la frustration due à l'échec et surtout les effets éventuels de la proaction et de la rétroaction négatives (Ehrlich, 1994).

1.3.2.1. Libération de la mémoire de travail à l'aide de représentations visuelles externes

Depuis longtemps, les structures et les contraintes de fonctionnement de la mémoire sont objets d'étude en psychologie cognitive. Dans tous les tests d'intelligence, on retrouve également depuis longtemps des épreuves de mémoire (Binet et Simon, 1967). La mesure de la mémoire à court terme, mesure encore maintenant effectuée par l'empan numérique (digit span), est une des mesures privilégiées en éducation. Pour comprendre l'intérêt des chercheurs en éducation pour cette mesure, il importe de préciser ce qu'on entend par mémoire de travail. Pour ce faire, nous nous référons à quelques ouvrages relativement récents. Notre but n'est pas ainsi de faire une analyse exhaustive des nombreuses recherches sur la mémoire, mais de mettre en évidence certains résultats et concepts qui éclairent notre étude.

La mémoire à court terme correspond à la rétention temporaire de l'information en cours de traitement. Sa fonction est de permettre un emmagasinage temporel et en même temps d'effectuer un certain nombre de traitements. La mémoire à court terme semble avoir une capacité d'emmagasinage limitée, mais avec une vitesse d'emmagasinage et de lecture très élevée (Gathercole, 1996). La mémoire de travail ou mémoire à court terme «*reçoit essentiellement deux types d'information : celles provenant de l'environnement, qui sont filtrées par les récepteurs sensoriels et celles provenant de la mémoire à long terme selon les exigences requises par la tâche à effectuer.*» (Tardif, 1992, p. 167). Il est évident que la mémoire à court terme joue un rôle très important dans les différentes activités d'enseignement et d'apprentissage. Pour mieux appréhender ce rôle dans l'enseignement des mathématiques, il nous semble important de mieux caractériser le concept de mémoire à court terme.

Système fondamental de traitement de l'information chez l'humain, la mémoire à court terme comporte des limites importantes. Elle est d'abord limitée quant au nombre d'informations qu'elle peut simultanément contenir. Les recherches de Miller (1956) ont en effet montré que la mémoire de travail ne peut contenir à la fois qu'entre 5 et 7 unités d'informations. Une unité d'information peut varier d'un sujet à l'autre et d'un domaine à un autre. Ainsi, comme le fait remarquer Tardif (1992), dans un travail d'encodage d'un écrit, une unité pour un jeune élève peut être une partie de lettre, tandis que pour un élève plus âgé qui a appris à écrire et à lire, une unité peut devenir un mot, voire un groupe de mots. Cette limite de la mémoire de travail est importante dans toute activité, notamment dans l'enseignement et l'apprentissage. Dans ce dernier contexte, elle l'est pour tout élève. Chez plusieurs élèves ayant des difficultés graves d'apprentissage, telles un déficit d'attention, des difficultés à retenir ce qui dit, montré, écrit, ou encore, un déficit au niveau de la métacognition, cette limite est encore plus accentuée.

L'efficacité de la mémoire de travail est donc une variable non négligeable en ce qui concerne l'apprentissage et l'appropriation de nouveaux concepts. Étant donné le nombre restreint d'unités d'information, l'organisation des informations emmagasinées dans la mémoire à court terme est essentielle. La possibilité d'établir des relations étroites entre les données, de former des réseaux de concepts, permet à l'humain de mieux organiser l'information recueillie, d'augmenter la vitesse de récupération des données tout en réduisant l'espace de stockage nécessaire. Ce système permet notamment de prévenir une saturation prématurée de la mémoire de travail.

Il importe également de prendre en considération le fait que la mémoire de travail est aussi limitée « *sur le plan de la durée de ces informations, c'est-à-dire du nombre de secondes où elles sont effectivement disponibles à une prise en considération.* » (Tardif, 1992, p. 170). Cette durée est évaluée à une dizaine de secondes environ.

Richard (1982) pense que l'activité de résolution de problèmes dépend dans une très large mesure des activités mnésiques et que pour une grande part, les difficultés rencontrées dans cette tâche par plusieurs élèves sont liées aux contraintes de fonctionnement des systèmes mnésiques. Plusieurs élèves en effet effectuent une lecture des problèmes, en ne prenant aucune note ou encore, en n'organisant pas les informations ; les informations alors retenues peuvent être très rudimentaires (ex : quelques mots clés évocateurs d'opérations à effectuer, évocations souvent trompeuses) et mener à des calculs inadéquats. Dans le même ordre d'idées, Lindsay et Norman (1980) croient également que les contraintes de la mémoire à cour terme chez l'humain limitent sérieusement leur capacité à résoudre des problèmes. Le recours à diverses stratégies de résolution de problèmes constitue alors, non seulement un moyen de pallier ces capacités limitées de mémoire, mais également un levier pour la construction de connaissances nouvelles.

Il importe aussi de mentionner que la rétention en mémoire à court terme diminue avec l'augmentation d'une activité cognitive concomitante. Qui n'a pas ainsi éprouvé à plusieurs reprises des difficultés à effectuer en parallèle diverses tâches, par exemple, entretenir une conversation avec une personne tout en lisant son journal ? Par ailleurs, chez nombre d'élèves présentant, à première vue, des problèmes d'attention, il est possible de déceler, lorsqu'on les observe bien, une propension à effectuer diverses tâches en concomitance.

Tout aussi important est de prendre acte des résultats d'études montrant que plusieurs tâches présentées à de jeunes enfants comportent des exigences mnémoniques qui dépassent leur mémoire de travail, ou plus spécifiquement, leur espace de travail. On ne peut ainsi s'attendre à ce qu'un jeune enfant puisse coordonner plusieurs relations logiques.

Pour optimiser l'activité cognitive de l'apprenant, il serait donc souhaitable de minimiser l'effort de rétention de la mémoire à court terme, ce qui permettrait d'améliorer les stratégies de résolution de problèmes. En utilisant un support externe à la mémoire, il est possible de libérer la mémoire de travail et d'optimiser ainsi le traitement de l'information (Nonnon, 1984). Toutefois, cette optimisation ne sera possible qu'à la condition que le support externe et graphique soit significatif pour l'élève, ce qui n'est pas toujours le cas lorsqu'on examine nombre de supports qui souvent n'ont d'autres fonctions que d'orner des pages de manuels. Mais, si ces supports sont appropriés, en plus de soulager la mémoire de travail et de faciliter la résolution de problèmes chez l'élève présentant des difficultés, ils pourraient également stimuler une assimilation d'une représentation graphique significative, en regard des schèmes de pensée de l'enfant.

L'information conservée au terme d'une activité d'imagerie est par la suite d'une accessibilité plus élevée à court et à long terme que, par exemple, une information verbale n'ayant pas suscité l'imagerie du lecteur (Denis, 1995). Très fréquemment, l'enseignant sera porté à introduire une nouvelle notion en utilisant un exemple simple et significatif pour l'élève. Cet exemple sera, la plupart du temps, introduit verbalement par l'enseignant. C'est à ce moment que la mémoire à court terme de l'élève est sollicitée.

1.3.2.2. Mémoire de travail et enseignement des opérations sur les fractions

Dans les situations d'enseignement des opérations sur les fractions qui font appel à diverses représentations, l'élève peut d'abord faire appel aux informations qu'il possède déjà dans sa mémoire à long terme, et qui deviennent alors accessibles en mémoire de travail. Cet exercice de transfert d'informations peut être à la base du processus d'encombrement qui nuit à la capacité de résolution de problèmes ou à la création de liens primordiaux entre l'exemple donné par l'enseignant et la notion mathématique que ce dernier veut rendre accessible à l'élève.

La mémoire de travail est ainsi responsable de la mise en interaction des informations intégrées dans l'exemple, des connaissances puisées de la mémoire à long terme, et de la codification que prendront les connaissances résultantes. L'absence d'un support visuel lors de l'enseignement de concepts mathématiques, plus particulièrement de concepts abstraits, incite l'élève à utiliser une stratégie de reconstitution mentale. Cette activité cognitive surcharge de façon marquée la mémoire de travail et entre en conflit avec l'objectif premier de l'activité d'enseignement, soit la compréhension par l'élève des relations entre l'exemple donné et le discours sur les connaissances réalisés par l'enseignant.

1.3.3. Vers une reprise dynamique de l'enseignement sur les opérations sur les fractions

L'enseignement des opérations sur les fractions, comme nous l'avons écrit, ne peut faire abstraction du sens de ces opérations. Or, les situations qui auraient pu donner sens à ces opérations ont souvent été transformées en de brefs exposés des actions de partage, de réunion, et de comparaison d'objets structurés. Ces exposés se terminent fréquemment par une présentation des techniques de calcul.

Les rapports problématiques des élèves aux opérations sur les fractions nous ont incité à concevoir une « reprise dynamique » de l'enseignement, en recourant aux possibilités offertes par l'ordinateur de créer des dispositifs qui permettent de produire diverses représentations, de les relier, de les déplacer, de les examiner, si nécessaire, à plusieurs reprises, de manière à pouvoir construire des ponts importants entre les représentations iconiques et symboliques (voire arithmétiques) des opérations sur les fractions, en un mot, à donner sens aux actions effectuées dans les calculs sur les fractions. De tels dispositifs sont également des supports importants pour la gestion des informations en mémoire, pour la libération de la mémoire de travail.

1.4. Objectifs de la recherche

Notre recherche s'inscrit donc dans le champ des études sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Diverses situations visant une re-construction, voir une construction, du sens des fractions, des opérations et calculs sur ces nombres, seront présentées à des élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématiques.

Pour apprécier les effets de ces situations sur l'évolution des connaissances des élèves, nous aurons d'abord recours à une épreuve comportant diverses questions et divers problèmes impliquant les fractions, les opérations et les calculs sur ces nombres ; cette épreuve sera présentée à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement. Nous effectuerons ensuite une analyse des conduites des élèves et des interactions

1.3.3. Vers une reprise dynamique de l'enseignement sur les opérations sur les fractions

L'enseignement des opérations sur les fractions, comme nous l'avons écrit, ne peut faire abstraction du sens de ces opérations. Or, les situations qui auraient pu donner sens à ces opérations ont souvent été transformées en de brefs exposés des actions de partage, de réunion, et de comparaison d'objets structurés. Ces exposés se terminent fréquemment par une présentation des techniques de calcul.

Les rapports problématiques des élèves aux opérations sur les fractions nous ont incité à concevoir une « reprise dynamique » de l'enseignement, en recourant aux possibilités offertes par l'ordinateur de créer des dispositifs qui permettent de produire diverses représentations, de les relier, de les déplacer, de les examiner, si nécessaire, à plusieurs reprises, de manière à pouvoir construire des ponts importants entre les représentations iconiques et symboliques (voire arithmétiques) des opérations sur les fractions, en un mot, à donner sens aux actions effectuées dans les calculs sur les fractions. De tels dispositifs sont également des supports importants pour la gestion des informations en mémoire, pour la libération de la mémoire de travail.

1.4. Objectifs de la recherche

Notre recherche s'inscrit donc dans le champ des études sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Diverses situations visant une re-construction, voir une construction, du sens des fractions, des opérations et calculs sur ces nombres, seront présentées à des élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématiques. L'originalité de cette recherche portera sur l'idée d'utiliser un support externe et dynamique à la mémoire en utilisant l'ordinateur.

Pour apprécier les effets de ces situations sur l'évolution des connaissances des élèves, nous aurons d'abord recours à une épreuve comportant diverses questions et divers problèmes impliquant les fractions, les opérations et les calculs sur ces nombres; cette épreuve sera présentée à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement. Nous effectuerons ensuite une analyse des conduites des élèves et des interactions enseignant/élèves, lors de la réalisation des situations de notre séquence didactique. Cette dernière analyse aura ainsi pour objectifs :

1. d'évaluer la pertinence didactique de ces situations, en retenant divers critères :
    a) l'évolution des connaissances des élèves.
    b) la transformation des pratiques des élèves dans des tâches impliquant diverses représentations des opérations et calculs sur les fractions.
2. de préciser les caractéristiques des situations et les interactions enseignant/élèves qui sont déterminantes (ou non) dans l'évolution des connaissances des élèves.

Chapitre 2 : Méthodologie

Dans ce chapitre consacré à la présentation de la méthodologie de notre recherche, nous présentons d'abord les élèves qui participent à notre étude, ainsi que le milieu scolaire dans lequel ils évoluent. Nous décrivons ensuite les instruments de recherche élaborés, soit les situations d'enseignement des opérations sur les fractions qui seront présentées aux élèves et les épreuves visant une évaluation plus formelle des effets de ces situations sur l'évolution des connaissances de ces élèves. Nous donnons enfin un bref aperçu du traitement des données de notre recherche.

2.1. Précisions sur le type de recherche envisagé

Notre recherche se situe à la croisée des recherches de développement technologique et des recherches-actions. En fonction des objectifs poursuivis, objectifs qui découlent d'une analyse d'études didactiques qui montrent les difficultés rencontrées par un nombre important d'élèves de l'enseignement secondaire dans la construction du sens des opérations sur les fractions et qui font ressortir l'importance de concevoir des dispositifs originaux d'enseignement qui tiennent compte de l'histoire didactique de ces élèves, nous nous sommes orienté vers le développement de dispositifs technologiques originaux. Comme le souligne Nonnon (1993), l'évaluation de ces dispositifs constitue une étape importante en vue de l'amélioration de ces dispositifs. Dans notre recherche, cette évaluation est effectuée auprès d'élèves de l'enseignement secondaire présentant des difficultés en mathématiques.

La mise à l'épreuve des dispositifs technologiques en vue de les améliorer ne constitue qu'un des enjeux de notre recherche. C'est pour cette raison qu'il importe de reconnaître que notre recherche partage avec la recherche-action (Van der Maren, 1996), un objectif fort important, soit celui d'agir sur la pratique d'enseignement des opérations sur les fractions afin de permettre à un plus grand nombre d'élèves d'établir des rapports plus satisfaisants à ces savoirs mathématiques. C'est ainsi que dans notre recherche, nous

nous préoccupons également d'évaluer les effets des dispositifs technologiques d'enseignement mis en œuvre ; cette évaluation commande l'analyse des conduites des élèves à des épreuves présentées à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement, et donc, l'analyse des conduites au cours de la séquence d'enseignement.

2.2. Présentation des élèves et de leur classe de mathématiques

Les élèves qui participent à cette étude fréquentent l'École Secondaire Fernand-Lefebvre ; cette école fait partie de la commission scolaire Sorel-Tracy. Leur classe de 1ère secondaire est constituée d'élèves du régulier. On retrouve en moyenne entre 28 et 32 élèves dans ces classes. Les élèves qui prennent part à cette étude font également partie de la voie régulière. Pour les besoins spécifiques de notre recherche, nous avons consulté tous les enseignants et enseignantes de mathématiques de 1ère secondaire afin de sélectionner parmi l'ensemble de leurs élèves ceux qui éprouvent les plus sérieux problèmes d'apprentissage dans cette matière. À partir de cette liste nous avons procédé à la sélection des élèves. Chaque élève ciblé est rencontré individuellement par l'enseignant-chercheur afin de lui expliquer clairement les raisons pour lesquelles nous demandons sa collaboration. La participation à la recherche est ainsi faite sur une base volontaire car elle se déroule hors des heures régulières de cours. En effet, c'est pendant la pause du dîner que les élèves sont convoqués. Pour accroître la motivation des élèves à s'engager dans ce processus, nous avons mis en place un système d'émulation (tirage). Il va sans dire que les élèves visés par notre étude ne sont pas nécessairement très chauds à l'idée de faire des mathématiques à heure de repos du midi. Une lettre expliquant le projet ainsi qu'une lette d'entente ont été envoyées aux parents des élèves qui acceptent de participer à ce projet, afin d'obtenir leur consentement (documents disponibles aux annexes 2 et 3). Le cours de mathématiques touche quatre principaux domaines :

1. **Numération**
2. **Géométrie**
3. **Système International**
4. **Statistiques**

Les rubriques suivantes résument les différentes notions abordées au cours de l'année scolaire, selon le manuel de référence **Scénarios** utilisé en classe (Soulière et Thibaudeau, 1993) :

Tableau II

Résumé des différentes notions abordées au cours de l'année scolaire, selon le manuel de référence Scénarios

Les nombres naturels (IN)	La géométrie
o Puissance et notion exponentielle o Produit de facteurs o Priorités des opérations o Suites de nombres	o Transformations o Droites, angles et polygones o Périmètre et aire de polygones o Constructions
Les nombres entiers (Z)	**Les statistiques**
o Comparaison de nombres entiers o 4 opérations sur les nombres entiers o Opération d'exponentiation o Priorité des opérations	o Le sondage o Le diagramme à bandes o Le diagramme à ligne brisée o Le diagramme circulaire
Les nombres rationnels (Q)	
o La notation décimale o 4 opérations (notation décimale) o La notation a/b (fraction) o 4 opérations (notation a/b) o Pourcentage	
Le Système International	
o Estimation et mesure o Unités de longueur dans le SI o Notion d'aire	

Tous les élèves de la classe retenue pour notre recherche ont aussi bénéficié d'un enseignement des nombres rationnels au troisième cycle du primaire. Diverses tâches de représentation de fractions (exploitant surtout le sens « partie-tout » de la fraction), de résolution de problèmes impliquant des fractions ou des nombres décimaux, d'addition et de soustraction de fractions et de nombres décimaux et enfin, quelques tâches d'introduction à la multiplication de fractions ont été abordées. Selon les témoignages de leurs enseignants et selon notre connaissance de cette clientèle d'élèves, ces élèves éprouvent des difficultés importantes de compréhension des divers sens de la fraction et des opérations sur les fractions. Ils ont surtout un rapport « technique » ou « instrumental » aux fractions et les erreurs d'interprétation des opérations sur les fractions sont fréquentes. Ces élèves présentent très souvent un déficit au niveau du vocabulaire mathématique ; ce déficit est encore plus accentué lorsqu'il s'agit des nombres rationnels. Les termes exacts sont très rarement utilisés par les élèves. Pour des raisons pratiques et par économie de temps, l'enseignement de ce vocabulaire et de sa signification est fort sommaire ou tout simplement ignoré. Enfin, ces élèves peuvent difficilement envisager qu'entre 0 et 1, il y ait une infinité de nombres rationnels, notamment de fractions, ne pouvant identifier que quelques fractions simples du type 1/2 ou 1/4. Il importe toutefois de reconnaître que ces élèves ont construit des connaissances sur les fractions. Leur rapport à ces nombres et les erreurs commises en témoignent. Les situations que nous avons construites essaient de composer avec cette histoire didactique.

2.3. Description des instruments de recherche

Notre étude vise l'évolution des connaissances des élèves sur les opérations impliquant les fractions. Le dispositif d'enseignement constitue l'instrument majeur de notre recherche ; il prend la forme d'une séquence d'enseignement comportant diverses situations. L'analyse des conduites des élèves et des interactions entre les élèves et l'enseignant lors des situations d'enseignement permet de prendre acte des transformations des connaissances des élèves sur les opérations sur les fractions. Pour des raisons d'écologie institutionnelle, il nous a semblé toutefois pertinent de recourir aussi à une évaluation plus formelle des effets du dispositif d'enseignement ; nous avons ainsi construit une épreuve qui a été présentée aux élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement. Nous présentons donc cette épreuve, puis décrivons le dispositif d'enseignement.

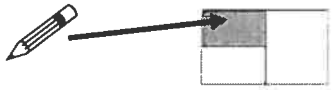
2.3.1. Épreuve présentée aux élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement

L'épreuve présentée aux élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement comporte d'abord des questions et des problèmes similaires à ceux qui font partie des évaluations en usage dans l'institution scolaire où se déroule cette expérience et qui permettent d'évaluer l'atteinte des objectifs sur les nombres rationnels définis dans le programme de 1ère secondaire. Nous avons également jugé utile d'inclure dans cette épreuve, d'autres questions et problèmes qui visent à mieux cerner les bénéfices et les limites du dispositif d'enseignement mis en place. Comme il a été mentionné précédemment, cette épreuve est présentée à deux reprises : à l'entrée et à la sortie. Il nous est apparu pertinent de conserver une même épreuve pour mieux identifier les effets du dispositif.

L'épreuve est composée de 3 questions et de 4 problèmes. Dans les 3 premières questions, l'élève est consécutivement invité à additionner, à soustraire et à multiplier des fractions. Toutefois, avant d'effectuer un calcul, l'élève doit montrer, à l'aide d'un rectangle dont les mesures sont bien choisies, chacune des fractions entrant dans le calcul ainsi que le résultat de l'opération appliquée sur les fractions. Les 4 problèmes qui sont ensuite présentés sont isomorphes aux problèmes additifs et multiplicatifs que l'on retrouve généralement dans les manuels. Voici donc l'ensemble des items que comporte cette épreuve :

1. Effectue les additions suivantes :

a) $\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24}$

Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.  Exemple : 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{6}{12}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{16}{24}$	
Calculs :	$\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24} =$

b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$

Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.  Exemple : 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{26}{52}$	
$\frac{33}{99}$	
Calculs :	$\frac{26}{52} + \frac{33}{99} =$

2. Effectue les soustractions suivantes :

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

<table>
<tr><td>Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

Exemple : 1/4</td><td>Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.</td></tr>
<tr><td>$\frac{7}{8}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calculs : $\frac{7}{8} - \frac{1}{3} =$</td></tr>
</table>

b) $\frac{11}{33} - \frac{22}{66}$

<table>
<tr><td>Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

Exemple : 1/4</td><td>Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.</td></tr>
<tr><td>$\frac{11}{33}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{22}{66}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calculs : $\frac{11}{33} - \frac{22}{66} =$</td></tr>
</table>

3. Effectue la multiplication suivante :

a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

b) $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10} =$

4. **Le $\frac{2}{18}$ des 270 élèves de l'école étaient malades. Combien d'élèves étaient malades ?**

5. **Les $\frac{4}{7}$ des élèves de deux classes de $1^{ère}$ secondaire portent des lunettes. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies ?**

6. **Sylvain achète une lasagne pour son souper de lundi. Il sépare ce repas en 12 parties égales. Il mange les 2/6 le premier soir et le 1/4 le lendemain. Quelle fraction de sa lasagne lui reste-t-il après son deuxième repas ?**

7. **Le grand chef d'un restaurant a reçu une commande pour faire un gâteau de mariage. La recette qu'il suit lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9 Kg de farine qu'il a acheté. Quelle quantité de farine le chef devra-t-il utiliser pour sa recette ?**

2.3.2. Description du dispositif d'enseignement

Nous décrirons de manière détaillée le but visé par chaque capsule didactique animée, la tâche de l'élève et les implications pédagogiques de l'utilisation d'un tel type de matériel en classe. Le matériel a été réalisé à l'aide de la technologie d'animation « Flash ». Le logiciel Flash est tout d'abord un outil utilisé dans la création de contenu Web animé et interactif. Les applications pédagogiques de ce logiciel sont donc très réelles et valent la peine d'être analysées. Nous présentons les capsules didactiques animées portant sur les opérations sur les fractions (disponible sur disque compact à l'annexe 4). Une compréhension satisfaisante de la fraction est nécessaire pour accéder à une compréhension juste du nombre rationnel.

Chacune des situations inclut diverses capsules didactiques animées ; dans ces capsules, on assiste notamment à une construction progressive et commentée des représentations des fractions impliquées dans les calculs. On y retrouve également plusieurs transformations de ces représentations guidées par les opérations à réaliser sur les fractions. Finalement, des relations entre les actions impliquées dans les calculs et les représentations donnent sens à ces actions. Si une telle scène évoque une leçon que peut conduire un maître, en utilisant un tableau, elle s'en distingue par la précision et l'économie des actions et des paroles qui l'accompagnent, par les possibilités offertes aux élèves de revisiter la leçon, de s'attarder à certaines actions et commentaires, etc. Pour mieux apprécier ces possibilités, nous donnons d'abord un aperçu de l'organisation de la séquence didactique. Puis, nous décrivons chacune des situations, en indiquant le but visé par chacune des capsules qu'elle comporte, les connaissances en jeu, les tâches présentées aux élèves, les modalités de gestion de ces tâches et les conduites possibles de ces élèves.

2.4. Organisation de la séquence didactique

Dans un premier temps, les élèves sont invités à examiner chacune des quatre animations portant sur les opérations sur les fractions. Chaque animation permet à l'élève de faire des liens entre le travail mathématique à effectuer et les différentes représentations qui soutiennent cette compréhension. Les quatre animations sont vues, l'une à la suite de l'autre, dans l'ordre suivant : addition, soustraction, multiplication et division. Entre chaque animation, les élèves doivent répondre à un questionnaire portant sur l'opération ainsi enseignée. Chaque animation fait entrer en jeu une série d'éléments visuels clefs, proposant une modélisation visuelle des fractions et des opérations sur ces nombres :

- pizza (tout)
- couteau (division)
- bouche (soustraction)
- formes géométriques (représentation de la notion d'équivalence)
- informations textuelles (définitions et sens de certains termes associés aux fractions)
- couleurs (différence entre dénominateur et numérateur)
- clignotement (emphase sur un ou plusieurs éléments significatifs ou résultats)
- mouvement d'images et de nombres (lien entre différentes données ou opérations)
- transformation de lettres ou d'images en chiffres (contextualisation / modélisation mathématique)

Pour pouvoir tirer profit des animations, l'élève doit être en mesure de comprendre le fonctionnement du milieu qui lui est proposé. Des instructions lui sont données à cet effet. Un menu très convivial, comprenant cinq boutons de base, permet à l'élève de naviguer dans une animation à son rythme et de contrôler son déroulement. Il peut ainsi :

1. **Progresser à travers l'animation (« Bouton Jeu »)**
2. **Réinitialiser l'animation (« Bouton Arrêt »)**
3. **Revoir les étapes précédentes de l'animation en cours (« Bouton Recule »)**
4. **Passer aux séquences ultérieures de l'animation (« Bouton Avance »)**
5. **Arrêter l'animation sur l'image en cours (« Bouton Pause »)**

Enfin, à la suite du visionnement d'une animation, l'élève doit répondre à un questionnaire comportant divers types de questions :

a) **des questions qui lui permettent de faire un choix parmi un certain nombre de réponses.**

b) **des questions l'invitant à verbaliser ou représenter sa compréhension d'une séquence précise de la capsule.**

c) **des questions lui demandant de résoudre diverses situations problèmes.**

L'analyse des réponses de l'élève à ce questionnaire nous permet d'apprécier l'évolution et les limites de ses connaissances ; elle nous donne également un bon indice des liens que l'élève a pu construire entre les représentations visuelles, discursives et symboliques mises en œuvre dans le dispositif. Elle nous permet aussi de prendre acte des transformations souhaitables du dispositif.

2.4.1. Description des capsules sur l'addition et la soustraction de fractions

Pour représenter de façon dynamique et colorée les règles régissant l'addition et la soustraction de fractions de type a/b (représentations et écritures possibles) et leur conférer un sens en faisant appel notamment au sens partie-tout de la fraction, de petites animations interreliées sont présentées à l'élève. Les animations mettent en évidence ces règles en modifiant l'apparence de plusieurs pointes de pizzas animées. Les pointes de pizzas passent par plusieurs transformations tout au long de l'animation en fonction de l'opération demandée. Plusieurs bulles de texte apparaissent à l'écran, ce qui permet de faire le lien entre les actions réalisées sur les pizzas, les représentations des fractions et l'opération mathématique abordée. Lorsque l'ensemble des animations a été étudié par l'élève, il lui est demandé de réaliser quelques tâches. Ces tâches visent une institutionnalisation des connaissances construites durant la séquence et permettent d'éprouver l'utilité des connaissances construites (Conne, 1996 ; Rouchier, 1996). Nous présentons chacune des animations, puis les tâches données à la suite de ces animations.

2.4.1.1. Description des animations sur l'addition et la soustraction de fractions

La première animation (figure 2) montre quatre pizzas identiques coupées de différentes manières. Nous avons choisi ces objets pour une raison précise : ils sont familiers aux élèves ; on pourrait même dire qu'ils sont des objets emblématiques. Cette familiarité ne signifie pas que les élèves ont construit des connaissances adéquates sur les représentations de fractions avec ces objets, ni que les élèves savent utiliser ces objets pour donner sens aux opérations. La première pizza est coupée en quatre parties identiques ; la pointe sélectionnée représente 1/4 de la pizza ; la seconde pizza est séparée en huit parties identiques et 3 de ces parties sont sélectionnées afin de représenter 3/8 de cette pizza. De la même façon, la troisième et la quatrième pizza représentent respectivement 3/4 et 1/8. Les fractions représentées sont inscrites au-dessus de chacune des pizzas. Les signes d'addition (+) ou de soustraction (-) sont insérés entre les fractions pour signaler l'opération attendue.

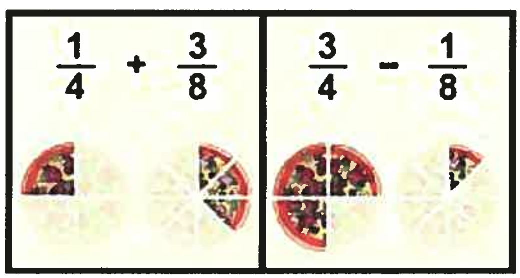


Figure 2

Dans le but d'amener l'élève à donner sens à chacune des parties de cette figure, les tâches suivantes lui sont proposées :

a) La figure suivante est celle produite par un élève à qui on a demandé de résoudre deux problèmes. Selon vous, quels pouvaient être ces problèmes ?
Pouvez-vous écrire deux problèmes qui peuvent être associés à cette figure ?

b) Que pouvez-vous dire des partages effectués sur chacune des pizzas ?
Comment, selon vous, ont-ils été effectués ?

La deuxième animation (figure 3) met en évidence la pertinence de travailler avec des pizzas qui sont séparées de la même manière afin de pouvoir réunir (ou enlever) des parties identiques et de pouvoir représenter par une fraction la réunion ou la différence entre les parties considérées. Le commentaire qui est inscrit rappelle que pour effectuer une addition ou une soustraction de fractions, il importe que ces fractions correspondent à des parties d'un même tout qui a été partagé en un même nombre de parties identiques. À la suite de l'analyse de cette figure, l'élève est invité à expliquer, à l'aide d'un dessin, pourquoi on ne peut pas dire que 2/5 + 1/10 correspond à 3/10 ou que 2/5 – 1/10 correspond à 1/10.

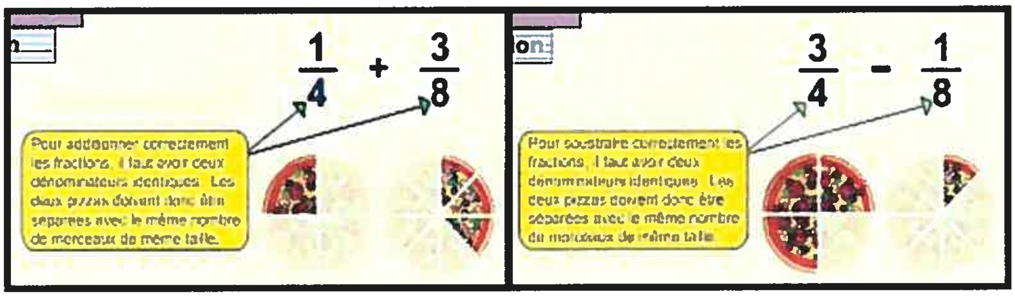


Figure 3

La troisième animation (figure 4) fait intervenir le mouvement et l'imagerie. En effet, c'est en déplaçant la pizza et en la regardant se faire couper que l'élève peut vraiment faire le lien entre le changement de dénominateur et l'apparence de la pizza avec laquelle il travaille. Le numérateur disparaît graduellement au fur et à mesure que la pizza est tranchée tandis que le dénominateur se métamorphose en passant d'un quatre (4) à un huit (8). La même approche est utilisée pour l'addition et la soustraction.

La tâche qui est demandée à l'élève à la suite du visionnement de la figure 3 est définie par la consigne suivante : « Pourquoi, selon vous, a-t-on décidé de partager chacune des parties de la première pizza en 2 ? » Cette question prépare à l'examen de la quatrième animation.

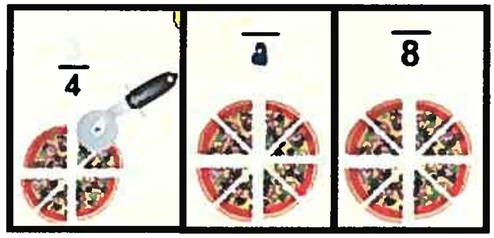


Figure 4

La quatrième animation (figure 5) est également visuellement très forte. Elle permet à l'élève de comprendre, à l'aide d'un support visuel, que les trois pointes du début (3/4) devront être représentées sous une autre forme depuis que la pizza a été coupée en huit morceaux. Les trois morceaux ont donc été coupés en deux, ce qui nous donne six pointes sur huit (6/8). Les pointes quittent donc la pizza et sont représentées par le nombre 6, mesure de la réunion de ces grandeurs, de ces pointes. Ce nombre remonte dans l'écran et vient prendre sa place comme nouveau numérateur de la fraction ainsi représentée.

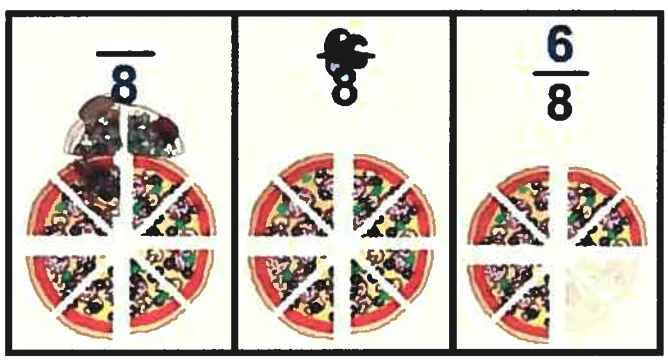


Figure 5

La cinquième animation (figure 6) permet de voir les deux pizzas séparées en huit morceaux de même taille. Afin de bien faire comprendre à l'élève que les différentes pointes du repas peuvent maintenant être mises en commun, une animation met fin à la séquence didactique en représentant le résultat sous forme numérique fractionnaire et à l'aide des pizzas animées. Pour la soustraction, une bouche fait son apparition et la pointe à soustraire (1/8) est engloutie par cette dernière, mettant l'emphase sur le lien mathématique qui existe entre les deux fractions impliquées dans l'opération.

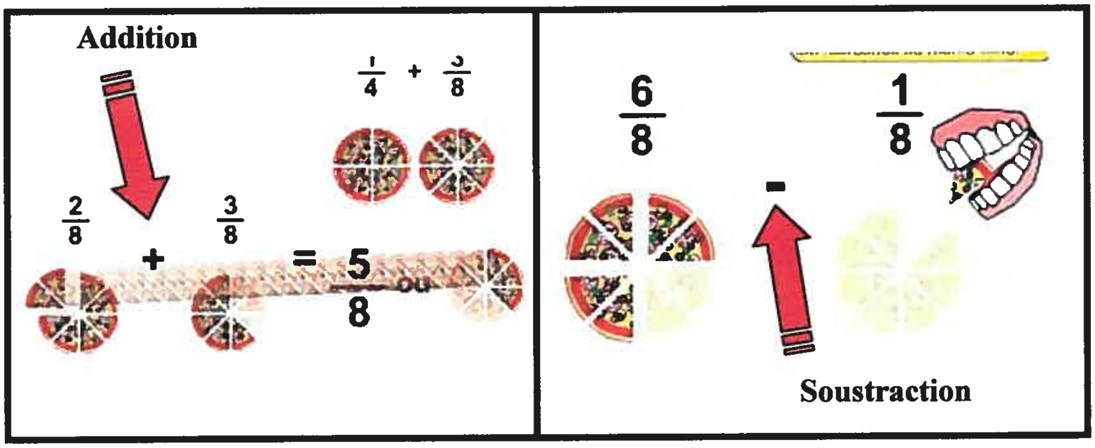


Figure 6

2.4.1.2. Description des tâches faisant suite aux animations sur l'addition

Durant les animations, les élèves sont invités à effectuer certaines tâches directement reliées au contenu de ces animations. Les tâches qui succèdent aux animations visent une consolidation et une généralisation des connaissances. Après le visionnement des animations portant sur les opérations sur les fractions, les élèves sont sollicités afin de réaliser certaines tâches. Ces tâches sont évidemment en lien avec les notions vues lors des animations et permettent de vérifier l'intégration de certaines connaissances ou encore la mise en pratique de stratégies efficaces pour résoudre un problème de cet ordre. Un espace de travail suffisant est donc donné à l'élève afin qu'il puisse mettre sur papier ses stratégies afin d'arriver à un résultat final adéquat. Cette tâche est répétée à quelques reprises afin de confronter l'élève à différentes fractions offrant chacune une particularité. Dans les tâches précédentes, l'élève est invité à laisser le plus de traces possible de ses démarches et de son raisonnement afin de bien cibler comment le visionnement de l'animation a pu modifier ou guider son approche de résolution du problème.

Questions de type A

1. Quel est le rôle du couteau  dans l'animation ?

   a) Obtenir deux fractions ayant un même dénominateur.
   b) Obtenir deux fractions ayant un même numérateur.
   c) Additionner les deux fractions.
   d) Aucune utilité dans l'animation.

2. Dans la situation ci-dessous, pourquoi ne peut-on pas tout simplement compter les parties dans chacune des pizzas et dire que 3/9 correspond à la fraction du tout obtenue en réunissant chacune des parties ?

a) Parce que les deux pizzas n'ont pas la même forme.
b) Parce que la pizza de droite est trop petite.
c) Parce que la pizza de gauche est trop grande.
d) Parce les deux pizzas ne sont pas séparées avec des pointes identiques.

3. Que faudrait-il faire pour pouvoir additionner les deux pizzas lorsqu'elles sont représentées comme sur l'image plus haute ?

a) Ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et additionner.
b) Ne pas tenir compte de la pointe plus grosse dans la pizza de gauche.
c) Obtenir deux pizzas avec des pointes de même grosseur.
d) Ajouter une pointe de plus dans la pizza de droite et additionner ensuite.

Les tâches qui sont proposées comportent : A) des questions reliées à certaines actions, à certaines représentations, à certains commentaires des animations ; B) des questions impliquant des calculs avec des fractions différentes de celles examinées durant les animations ; C) des problèmes additifs impliquant des fractions différentes de celles utilisées durant les animations.

Dans ce premier type de tâches, les questions 2 et 3 sont plus complexes que la question 1 et exigent l'élaboration d'un raisonnement et d'un discours. Pour cette raison, il avait été prévu que l'enseignant donne quelques pistes pour que l'élève puisse y répondre adéquatement. Par exemple, pour la question #3, l'enseignant pouvait interroger l'élève sur la taille des morceaux de la pizza.

- Si tu as très faim, aimerais-tu mieux manger un morceau de la pizza de droite ou de celle de gauche ?
- Pourquoi choisis-tu cette pizza-là ?
- Un ami a mangé deux morceaux dans la pizza de gauche. Combien de morceaux de la pizza de droite devrais-tu manger pour que tu manges la même quantité de pizza ?

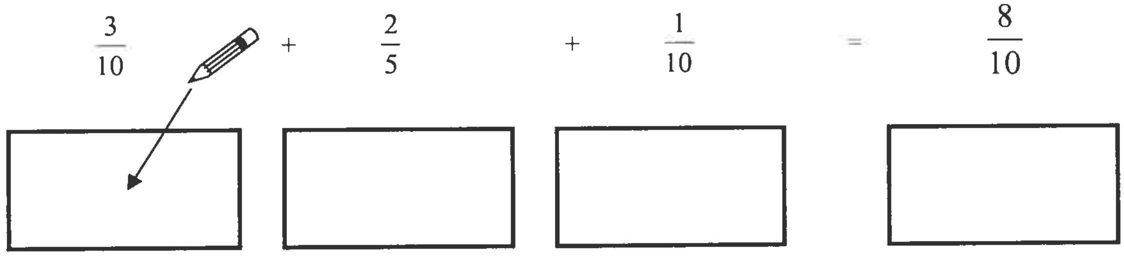
Questions de type B

Les questions de type B, faisant partie du questionnaire, impliquent des calculs avec des fractions différentes de celles examinées durant les animations.

1. Additionne les trois fractions suivantes. Représente-les dans les rectangles en coloriant leur représentation.

L'élève doit représenter chaque fraction et le résultat de l'addition dans le rectangle préalablement fourni. Le résultat de l'opération est intentionnellement donné à l'élève.

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$



2. Il faut trouver la somme des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$ et $\frac{1}{8}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la réunion des parties du tout ainsi obtenues.

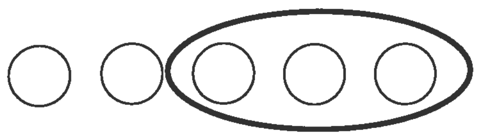
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) **Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.**  Exemple : 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{16}$	
$\frac{1}{8}$	
b) Calculs :	$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} =$

3. Il faut trouver la somme des fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la réunion des parties de la collection (du tout) ainsi obtenues.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

<table>
<tr><td>a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection.
Exemple : 3 billes sur 5
</td><td>Représente l'addition de fractions avec une seule collection.</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{8}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Calculs : $\frac{1}{3}+\frac{3}{8} =$</td></tr>
</table>

Questions de type C

Les questions de type C concernent la résolution de problèmes impliquant les fractions utilisées dans les calculs faisant partie des questions de type B.

Problème #1 :

Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac ; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangés. Et, en comptant les chocolats restants dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ?

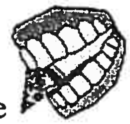
Problème #2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe 1/4 de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?

2.4.1.3. Description des tâches faisant suite aux animations sur la soustraction

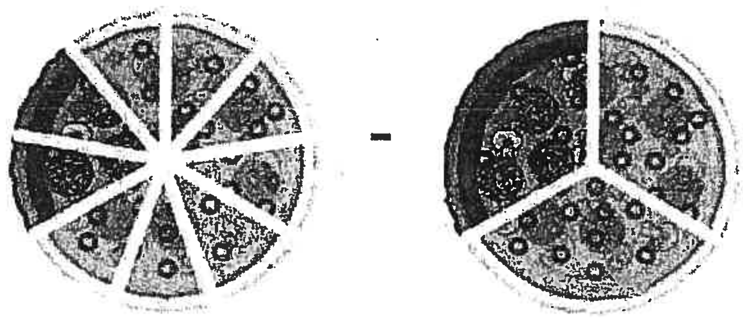
Contrairement aux deux animations sur la division et la multiplication qui sont très différentes (animations que nous présentons par la suite), celles traitant de l'addition et de la soustraction partagent un même environnement et utilisent des symboles très similaires. Les pizzas sont encore utilisées pour représenter les fractions. Un découpage est donc effectué sur ces dernières pour invoquer l'idée d'équivalence. Évidemment, les questions qui sont proposées à l'élève suite au visionnement de cette animation sont semblables à celles qui suivaient la séquence sur l'addition de fractions. Nous retrouvons les trois mêmes types de questions (A, B et C).

Questions de type A

1. Quel est le rôle de la mâchoire  dans l'animation ?

   a) Obtenir deux fractions ayant un même numérateur.
   b) Obtenir deux fractions ayant un même dénominateur.
   c) Représenter l'ajout d'une pointe de pizza dans l'opération.
   d) Représenter la disparition d'une pointe de pizza dans l'opération.

2. Dans la situation ci-dessous, pourquoi ne peut-on pas tout simplement enlever la partie de la pizza de droite à la pizza de gauche et dire qu'il ne reste que 1/9 de pizza en tout ?



a) Parce les deux pizzas ne sont pas séparées avec des pointes identiques.
b) Parce que la pizza de gauche est trop petite.
c) Parce que les deux pizzas n'ont pas la même forme.
d) Parce que les deux pizzas ne sont pas placées dans le bon ordre.

3. Que faudrait-il faire pour pouvoir soustraire les deux pizzas lorsqu'elles sont représentées comme sur l'image ci-dessus ?

a) Ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et soustraire.
b) Obtenir deux pizzas avec des pointes de même grosseur.
c) Ne pas tenir compte de la pointe plus grosse dans la pizza de droite.
d) Ajouter une pointe de plus dans la pizza de gauche et soustraire ensuite.

Tout comme dans le questionnaire sur l'addition, les questions #2 et #3 sont plus complexes que la question #1 et exigent l'élaboration d'un raisonnement et d'un discours. Pour cette raison, il avait été prévu que l'enseignant(e) puisse donner quelques pistes pour que l'élève puisse y répondre adéquatement.

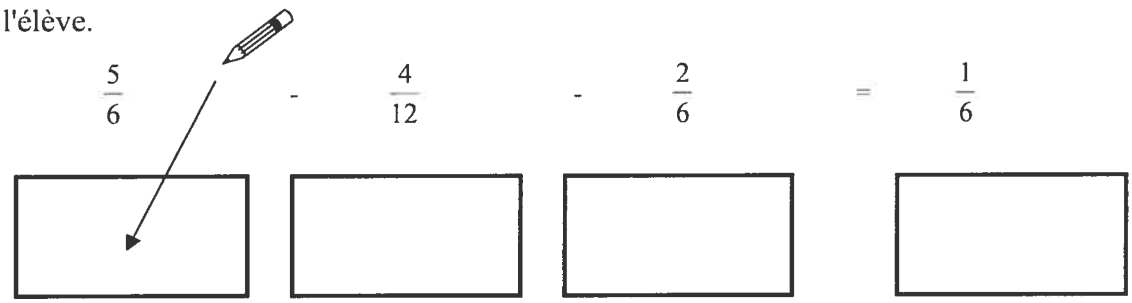
Questions de type B

Les questions de type B que comporte le questionnaire impliquent des calculs avec des fractions différentes de celles examinées durant les animations.

1. Soustrais les trois fractions suivantes. Représente-les dans les rectangles en coloriant leur représentation.

L'élève doit représenter chaque fraction et le résultat de la soustraction dans le rectangle préalablement fourni. Le résultat de l'opération est intentionnellement donné à l'élève.

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{12} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$



2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions.

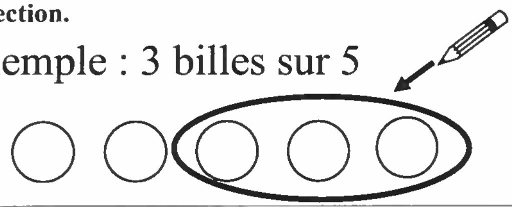
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a)Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple : 1/4	**Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{19}{25}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{4}{25}$	
b) Calculs :	$\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} =$

3. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{21}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la différence entre ces deux parties.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

<table>
<tr><td>a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection.
Exemple : 3 billes sur 5
</td><td>Représente la soustraction de fractions avec une seule collection.</td></tr>
<tr><td>$\frac{6}{7}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{21}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Calculs : $\frac{6}{7} - \frac{3}{21} =$</td></tr>
</table>

Question de type C

Les questions de type C concernent la résolution de problèmes impliquant les fractions utilisées dans les calculs faisant partie des questions de type B.

Problème #1:

Jean-François a reçu un jeu vidéo pour sa fête. Ce jeu comporte en tout 25 missions qu'il doit accomplir. La première semaine, il réussit à accomplir le 4/25 des missions. La deuxième semaine, il continue le jeu et vient à bout du 1/5 des 25 missions. Combien de missions lui reste-t-il pour s'amuser la troisième semaine ?

Problème #2 :

Béatrice joue aux cartes avec son amie. Le but du jeu est d'obtenir le plus de cartes rouges possible en lançant un dé. Au début du jeu, Béatrice a 21 cartes rouges. Elle perd le 6/7 de ses cartes rouges lors du troisième tour. Finalement, elle doit donner trois cartes rouges à son amie après avoir perdu au lancer du dé. Combien de cartes possède Béatrice à ce moment de la partie ?

2.4.2. Description de la capsule sur la multiplication de fractions

Dans l'enseignement des mathématiques, la multiplication des fractions se résume très fréquemment à la séquence suivante :

1. Mettre les deux fractions une à côté de l'autre.

$$\frac{1}{4} \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{}{}$$

2. Multiplier ensemble les numérateurs.

$$\frac{1}{4} \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{2}{}$$

3. Multiplier ensemble des dénominateurs même s'ils sont différents.

$$\frac{1}{4} \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$$

Malheureusement, cette méthode d'enseignement ne permet pas à l'élève de donner un sens à ce qu'il fait. En mettant en pratique cette série de tâches automatisées, il arrive au résultat sans jamais avoir à se questionner sur les bases théoriques de sa démarche. L'animation Flash met donc l'emphase sur le lien entre la marche à suivre pour arriver correctement au résultat de la multiplication, tout en ayant une référence visuelle permettant de juxtaposer la procédure et les fractions sous forme de tableau. Elle a donc comme rôle de donner sens à chacune de ces tâches. Au lieu de mémoriser une séquence dénudée de sens et que l'élève applique sans comprendre ce qu'il fait, l'animation rattache chaque étape à une imagerie servant d'icône symbolique (fondée sur une ressemblance, une analogie). Cette intégration permet alors de renforcer l'intégration de la tâche par le biais d'une mise en commun des registres symboliques mathématiques et iconiques. S'approprier ce registre permet ensuite d'annoncer, puis de contrôler les traitements applicables au registre fractionnaire et au registre décimal ; coordonner enfin ces trois registres autorise l'objectivation du concept de nombre rationnel.

2.4.2.1. Description de l'animation sur la multiplication de fractions

La première animation (Figure 7) montre d'abord à l'élève que l'écriture mathématique de la multiplication peut être interprétée différemment en remplaçant le symbole habituel de l'opération (X) par un « **de** ». En effet, 1/4 X 2/3 peut très bien signifier prendre 1/4 de 2/3. Une animation transforme donc le symbole X en « **de** » à quelques reprises. Il nous a semblé important de proposer une telle interprétation avant de poursuivre. Les élèves peinent généralement, comme le montrent plusieurs chercheurs (De Serres et Groleau, 1997), à interpréter une écriture mathématique. Enfin, une telle introduction sert d'entrée pour mieux comprendre les gestes posés dans les animations suivantes.

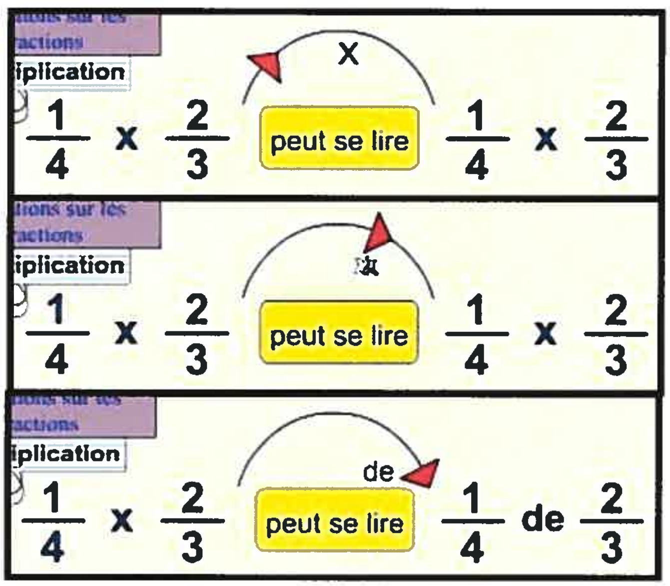


Figure 7

La deuxième animation (Figure 8) représente la même métamorphose du X en « **de** », mais cette fois appliquée directement dans l'écriture symbolique impliquant les deux fractions.

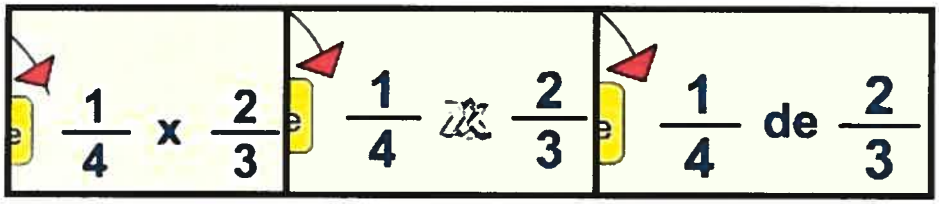


Figure 8

Dans la troisième animation (Figure 9), chacun des symboles composant l'écriture de la multiplication est lié tour à tour à une représentation graphique. Pour des raisons esthétiques et pratiques, la multiplication est abordée à l'aide d'un tableau rectangulaire.

Le choix d'utiliser un tableau plutôt que la pizza vient du fait que le graphisme qui compose la pizza est un élément complexe au niveau des couleurs et que l'animation explicative de la multiplication est, entre autres, basée sur le lien qui existe entre la couleur des chiffres qui composent les fractions (numérateurs et dénominateurs) et le déplacement de ces derniers. De plus, l'utilisation du rectangle permet de mieux visualiser l'explication logique qui se rapporte plus particulièrement à la multiplication des dénominateurs. En plaçant dans un tableau commun la séparation exprimée par chaque dénominateur, il est possible de faire un lien entre le nouveau dénominateur (12) et l'aire du rectangle (4 x 3). Le même principe est également applicable au numérateur représentant la portion sélectionnée.

Les mesures du tableau on été décidées en fonction de deux facteurs. Le premier facteur tient compte de l'espace nécessaire pour que l'animation soit visuellement agréable à regarder. L'espace occupé par le tableau permet de déplacer librement les objets et les nombres et de venir placer certaines informations pertinentes (exemple : résultat de la multiplication) à côté du tableau. Le deuxième facteur est la séparation du tableau en trois sections égales, pour ce qui est du 2/3 (verticalement), et en quatre parties identiques, pour ce qui est du 1/4 (horizontalement). La mesure de chaque section correspond donc à un facteur de la mesure totale de la largeur ou de la longueur du rectangle. Ceci permet d'obtenir une forme découpée sans avoir d'excédants.

Cette représentation graphique (tableau) a comme référence deux couleurs. Chaque couleur est associée à chacune des deux fractions mises en cause, soit 2/3 et 1/4. L'interaction qui existe entre ces deux fractions, lorsqu'elles sont multipliées, est mise en évidence par l'utilisation de ces teintes. Une bulle explicative apparaît au cours de l'animation pour nous indiquer que le rectangle est bel et bien séparé en sections congrues selon le dénominateur en cause. La phrase « prendre un quart de deux tiers » prend alors tout son sens.

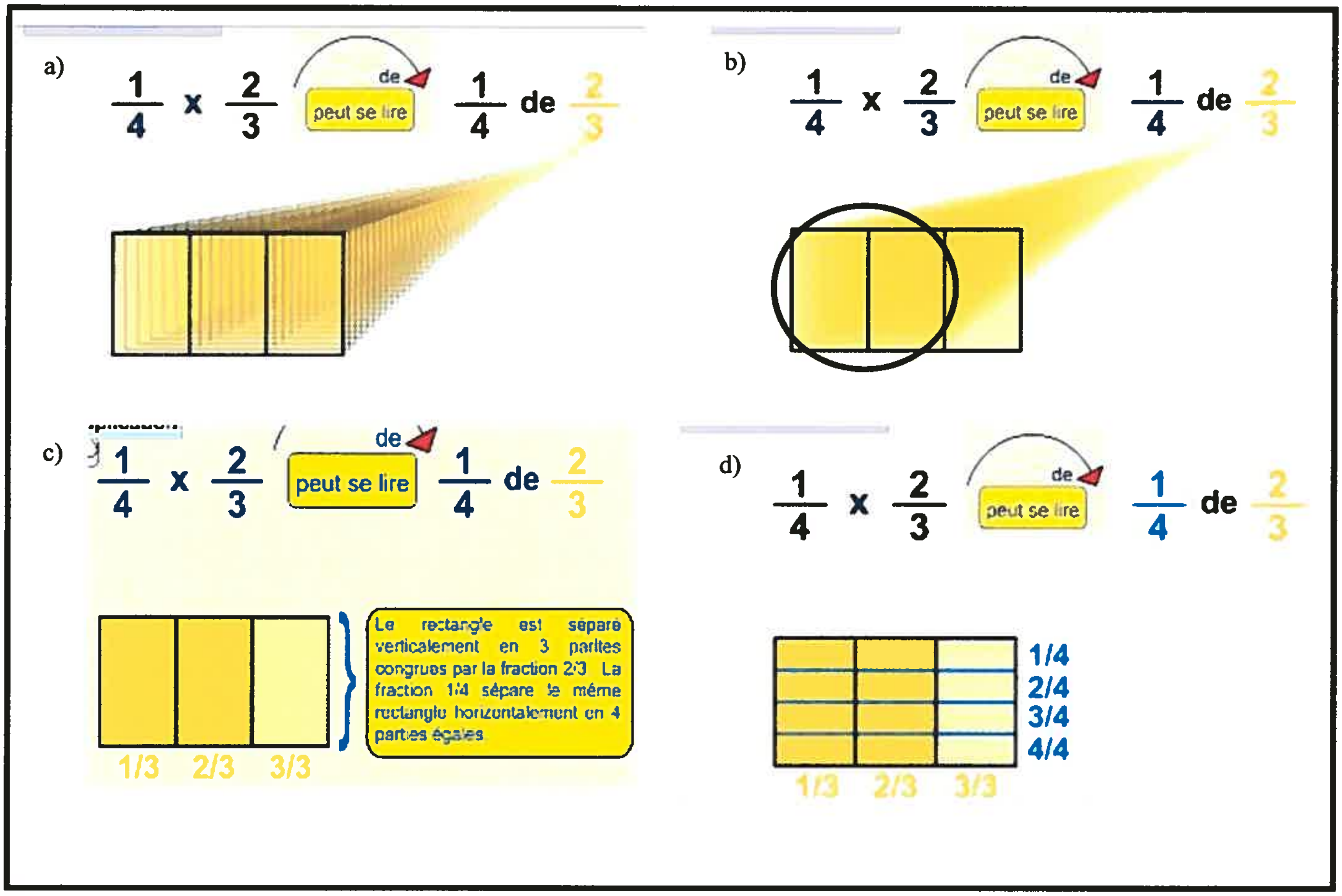


Figure 9

La quatrième séquence (Figure 10) explique de manière visuelle à l'élève pour quelle raison il est possible, pour ne pas dire nécessaire, de multiplier ensemble les deux dénominateurs et numérateurs. Puisque la technique d'animation est identique pour les deux cas (numérateurs et dénominateurs), la figure 9 ne représentera donc que l'explication graphique pour la multiplication des numérateurs. À l'aide d'un tableau rectangulaire, les deux fractions sont représentées à l'aide de couleurs différentes. La couleur orange est associée aux deux tiers du rectangle, alors que la couleur bleue est associée au quart. En juxtaposant les deux quadrillages, on voit apparaître les douze carreaux provenant de la multiplication des deux dénominateurs (4 x 3 = 12). Au même moment où le chiffre douze apparaît, deux petites étoiles rouges s'allument et font le tour complet du rectangle et du chiffre douze, mettant en évidence le lien qui existe entre les deux éléments.

La dernière séquence de la figure 10 fait intervenir les deux petites étoiles rouges. Ces dernières gravitent simultanément autour du numérateur de la fraction multipliée (2) et autour des deux cellules appartenant au rectangle. À ce moment précis, l'élève se retrouve, en seul coup d'œil, face à trois façons différentes de représenter la multiplication de fractions. Il peut le voir sous la forme d'un tableau coloré et animé, mettant l'emphase un aspect graphique très concret. Il peut également lire l'écriture mathématique « *un quart de deux tiers* » (1/4 de 2/3) et observer le produit résultant de la multiplication des deux fractions (2/12).

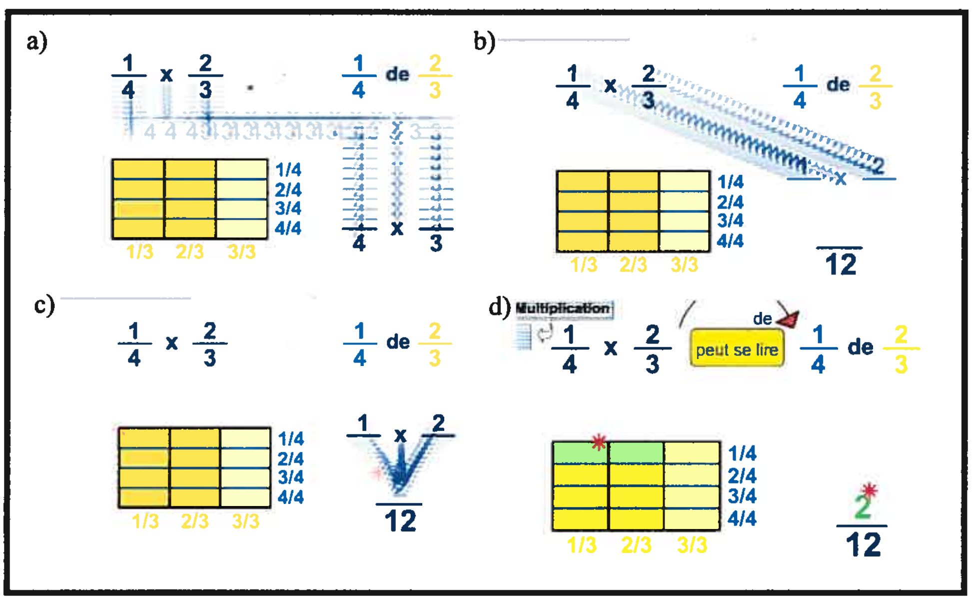


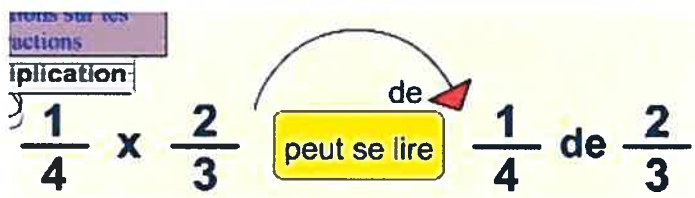
Figure 10

2.4.3.2. Tâches des élèves

Puisque le rectangle vient remplacer la pizza dans ce dernier dispositif didactique, il est important de questionner l'élève sur cette nouvelle représentation. Les questions de type A portent donc sur cette particularité de l'animation. Les questions de type B et C restent axées sur les mêmes compétences que celles sur l'addition et la soustraction.

Questions de type A

1. Dans la figure ci-dessous, nous voyons que l'écriture $\frac{1}{4} x \frac{2}{3}$ peut se lire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$. Quelle phrase semble le mieux expliquer ce que cette image représente ?



a) Nous allons prendre les $\frac{1}{4}$ de la fraction $\frac{2}{3}$.

b) Nous allons prendre les $\frac{2}{3}$ de la fraction $\frac{1}{4}$.

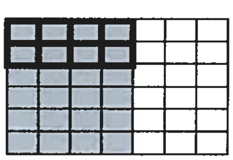
c) La fraction $\frac{1}{4}$ est équivalente à la fraction $\frac{2}{3}$.

d) Il manque $\frac{1}{4}$ pour compléter la fraction $\frac{2}{3}$.

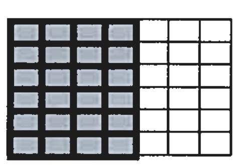
2. Quelle image représente la multiplication suivante ?

$$\frac{2}{6} x \frac{4}{7}$$

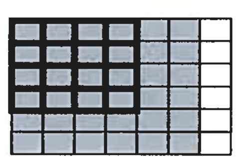
a)



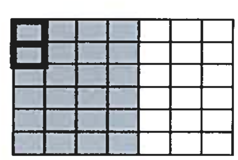
b)



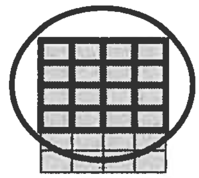
c)



d)



3. Que représentent les sections avec une bordure foncée à la question #2 ?



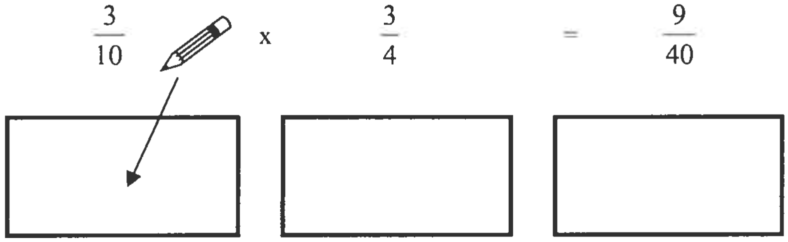
a) Le numérateur de la fraction qui multiplie.
b) Le résultat de la multiplication.
c) Le dénominateur de la fraction multipliée.
d) Le numérateur de la fraction obtenue comme résultat.

Questions de type B

1. Multiplie les deux fractions suivantes. Représente chacune d'elles dans un rectangle en les séparant adéquatement.

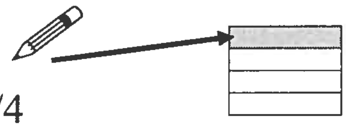
L'élève doit représenter chaque fraction et le résultat de la multiplication à l'aide du rectangle qui lui est fourni. Le résultat de l'opération est intentionnellement donné à l'élève.

$$\frac{3}{10} \quad \times \quad \frac{3}{4} \quad = \quad \frac{9}{40}$$



2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$.

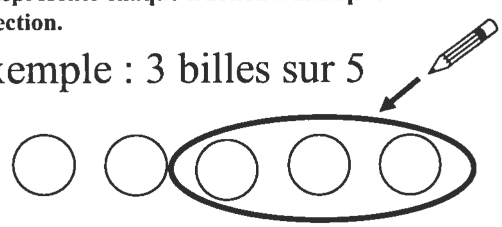
a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions.
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) **Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle.**  Exemple : 1/4	**Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{5}{9}$	
$\frac{2}{4}$	
b) Calculs :	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} =$

3. Il faut multiplier les fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{3}{4}$.

b) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quel nombre de billes correspond le produit de ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a)**Représente chaque fraction à multiplier avec une collection.** Exemple : 3 billes sur 5 	**Représente la multiplication de fractions avec une seule collection.**
$\frac{11}{12}$	
$\frac{3}{4}$	
b) Calculs :	$\frac{11}{12} \times \frac{3}{4} =$

Question de type C

Les questions de type C concernent la résolution de problèmes impliquant les fractions utilisées dans les calculs faisant partie des questions de type B.

Problème #1 :

Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les $\frac{2}{4}$ de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les $\frac{5}{9}$ des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ?

Problème #2 :

Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

2.5. Déroulement de l'étude

L'expérience a été étalée sur une période de 7 semaines, en raison d'environ 1 heure par semaine. L'outil didactique autour duquel toute notre recherche gravite a été présenté aux élèves sur l'heure du midi. La rencontre débutait à 12h00 pour se terminer vers 13h00. Évidemment, l'élève qui avait suffisamment de temps pour visualiser la capsule et répondre correctement aux différentes questions du test écrit pouvait quitter avant 13h00. Puisque pratiquement tous les élèves sélectionnés pour cette étude présentaient de grandes difficultés en mathématiques, leur niveau de motivation laissait quelquefois à désirer. C'est pour cette raison que nous avons jugé pertinent d'instaurer système d'émulation basé sur la présence de l'élève à l'activité pour inciter ces derniers à « sacrifier » leur pause du midi pour venir faire des mathématiques. Cette démarche nous semblait essentielle d'autant plus que lors de trois des sept rencontres, l'heure du midi était précédée d'un cours régulier (inscrit à l'horaire) de mathématiques de 75 minutes. Un tableau affiché sur un des murs du laboratoire permettait aux élèves de coller une étoile dans une grille faisant état de leur assiduité à l'activité. Un tirage a eu lieu à la fin de la dernière rencontre pour les élèves dont la présence a été régulière.

Un laboratoire informatique était disponible pour recevoir les élèves. Ce local comprenait une trentaine de postes informatiques disposés en « U ». Au centre de la classe, une douzaine de tables de travail ont été aménagées. Les élèves étaient donc en mesure de visualiser l'animation à l'ordinateur et compléter l'épreuve écrite sur un des bureaux de travail. Ce transfert était nécessaire vu le manque d'espace autour de l'ordinateur. À tout moment, l'élève pouvait se diriger vers le poste informatique afin de visualiser l'animation ou un de ses extraits.

L'élève avait à sa disposition un crayon à mine, une gomme à effacer, une règle en plastique de 30 cm et le questionnaire papier. De plus, comme nous le mentionnons plus haut, il pouvait se référer à l'ordinateur en cas de besoin. Toutes les questions ainsi que les commentaires des élèves au sujet des capsules didactiques ou des questions écrites ont été consignées sur caméra vidéo (audio-vidéo).

Sur un total de sept sessions, quatre ont été dédiées aux tests d'entrée et de sortie. Les trois autres ont respectivement permis de mettre à l'essai les capsules sur l'addition, la soustraction et la multiplication de fractions.

Chapitre 3 : Analyse des résultats

Pour apprécier les effets de ce dispositif didactique sur l'évolution des connaissances des élèves, l'analyse des résultats se fera sur plusieurs fronts. Les données de la recherche sont constituées :

a) des traces écrites des démarches et réponses des élèves à :
- une épreuve d'entrée.
- une épreuve de sortie.
- trois épreuves en lien avec le visionnement de capsules interactives d'enseignement.

b) des enregistrements audio-visuels des commentaires et questions lors du visionnement des capsules interactives.

c) des enregistrements audio-visuels des interactions élèves/enseignant lors de la réalisation des tâches « papier-crayon » suivant le visionnement des capsules.

L'analyse de l'ensemble de ces données a été effectuée par l'enseignant-chercheur. Une communication étroite a été maintenue entre ce dernier et le chercheur-directeur du mémoire. C'est par le biais de la numérisation (scan), le courrier, le courriel et quelques rencontres ponctuelles que s'est effectué l'échange d'informations. L'analyse aura pour objectifs :

1- Évaluer la pertinence didactique des capsules et leur approche didactique, en retenant divers critères :

a) l'évolution des connaissances des élèves à la suite de l'enseignement (visionnement de la capsule pédagogique), par la mise en relation des connaissances à l'entrée et à la sortie de l'enseignement.

b) l'évolution des connaissances des élèves tout au long de l'expérimentation.

c) l'évolution des connaissances des élèves immédiatement après le visionnement d'une capsule.

d) l'analyse de l'effort et de la qualité des réponses et représentations fournies par l'élève dans les différentes épreuves écrites.

e) l'analyse des réponses écrites (démarches, représentations, réponses) fournies par l'élève dans les différentes épreuves écrites.

2- Vérifier à quel point l'élève se réfère à l'outil didactique informatisé pour :

a) trouver une stratégie.

b) valider cette stratégie en la comparant avec celle proposée par l'outil.

c) visualiser les fractions dans un environnement dynamique pour l'aider à les interpréter correctement.

3- Identifier précisément les forces et les lacunes du dispositif d'enseignement.

3.1. Connaissances et habiletés des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique

Le chapitre 2 (2.3.1.) présente les épreuves utilisées à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique. L'élaboration des questions de ces épreuves a été faite en se basant sur les nombres et les opérations sur ces nombres que l'on retrouve dans les différentes capsules didactiques. À certaines occasions, une question faisant partie des capsules est intégralement reprise dans les épreuves. Certaines opérations mettent également en jeu des nombres qui correspondent aux mêmes multiples que ceux utilisés dans le dispositif. Signalons enfin que douze élèves avaient accepté de participer à l'expérimentation mais seulement huit d'entre eux se sont présentés aux sept sessions prévues et, par le fait même, aux tests d'entrée et de sortie.

3.1.1. Les connaissances et les habiletés des élèves à l'entrée dans la séquence didactique

Il importe de noter que cette épreuve a été présentée individuellement à chacun des élèves. Le test d'entrée a été étalé sur deux rencontres pour donner un temps raisonnable aux élèves pour y répondre. On peut également observer une évolution de la complexité des questions attribuable au choix des nombres. La démarche d'analyse des résultats de notre recherche tient compte des objectifs poursuivis. Nous procédons d'abord à une analyse des conduites des élèves à l'épreuve présentée à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique. Cette analyse permet d'identifier les bénéfices, mais aussi les limites de notre enseignement. L'analyse des conduites des élèves au cours de chacune des situations que comporte notre séquence est ensuite réalisée et permet de mieux comprendre les résultats de ces élèves à l'épreuve présentée à l'entrée et à la sortie de la séquence.

Tout au long de ce chapitre, nous nous intéresserons aux conduites de chacun des élèves aux différentes tâches qui leur ont été présentées. Des extraits numérisés des productions d'élèves viendront appuyer notre analyse. Le texte sera également ponctué d'extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves participant à la recherche. Nous utilisons les codes E1 à E8 pour identifier les élèves et le code EC pour identifier l'enseignant-chercheur.

3.2. Caractéristiques de l'épreuve présentée à l'entrée dans la séquence d'enseignement

L'épreuve présentée à l'entrée dans la séquence d'enseignement, comme nous l'avons précisé au chapitre précédent, est composée de questions et de problèmes similaires à ceux que l'on retrouve dans les évaluations en usage dans notre institution scolaire. Elle inclut également quelques questions et problèmes que nous avons conçus dans le but de mieux cerner les bénéfices et les limites de notre dispositif d'enseignement. Notons enfin que deux des problèmes présentés à la sortie de la séquence comportent des contextes différents des problèmes isomorphes présentés à l'entrée dans la séquence. Puisque peu de temps séparait les deux passations de cette épreuve, il nous est apparu plus prudent de ne pas recourir aux mêmes contextes ; nos élèves étant fort habiles pour détecter ces ressemblances, nous voulions éviter qu'ils désinvestissent ces problèmes. Il est à noter que tous les questionnaires décrits dans ce chapitre sont disponibles à l'annexe 1.

Avant de procéder à l'analyse des conduites des élèves, il est important de souligner que certains élèves nous ont adressé des questions durant la réalisation de l'épreuve. Nous avons jugé pertinent d'enregistrer les échanges que nous avons eus avec ces élèves. Nous en rendrons compte dans notre analyse.

3.2.1. Analyse des conduites des élèves à l'entrée dans la séquence

L'épreuve présentée aux élèves comporte des tâches d'addition, de soustraction et de multiplication de fractions, ainsi que des tâches de résolution de problèmes. Nous convenons de respecter l'ordre de présentation de ces tâches.

3.2.1.1. Addition de fractions

La première tâche comporte deux activités d'addition de fractions. Dans chacune d'elles, il est demandé aux élèves de représenter, dans un rectangle, chacune des fractions à additionner, puis de représenter, également dans un rectangle, l'addition des fractions et enfin, d'effectuer le calcul.

Dans **la première activité**, les fractions à représenter et à additionner comportent des dénominateurs qui sont des multiples de 4, soit : 6/12 ; 3/4 ; 16/24. Nous reproduisons l'activité proposée aux élèves.

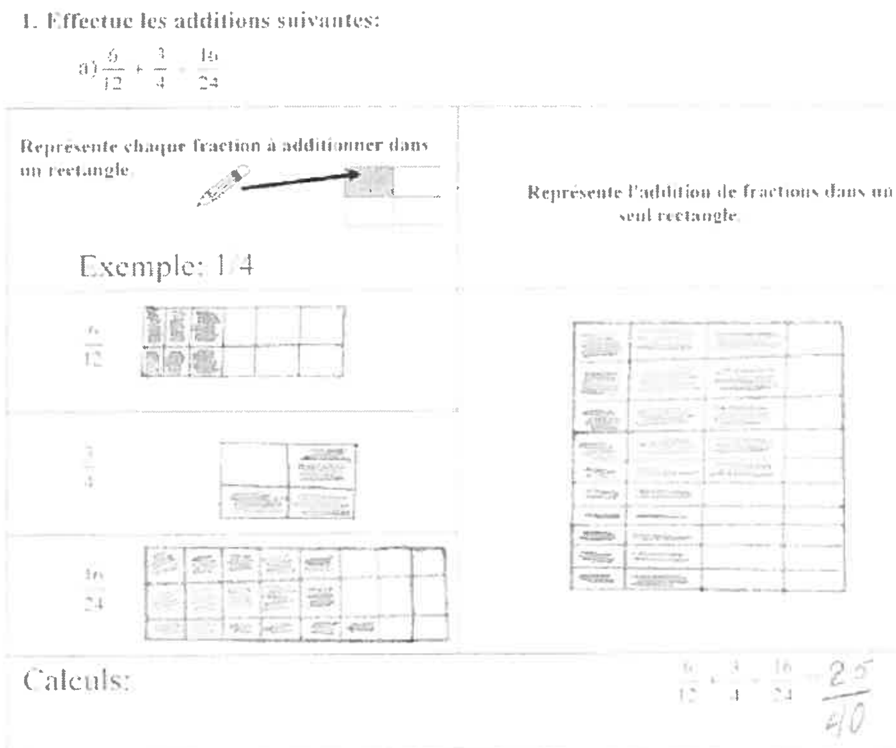
1. **Effectue les additions suivantes:**

a) $\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24}$

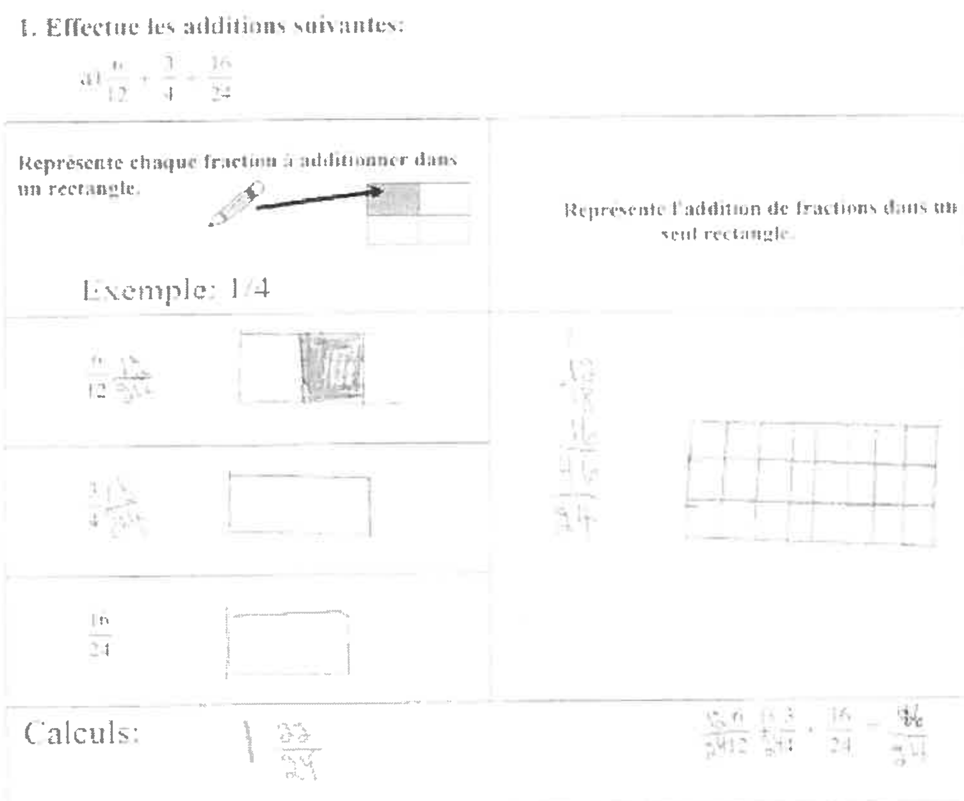
Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.  Exemple: 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{6}{12}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{16}{24}$	
Calculs:	$\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24} =$

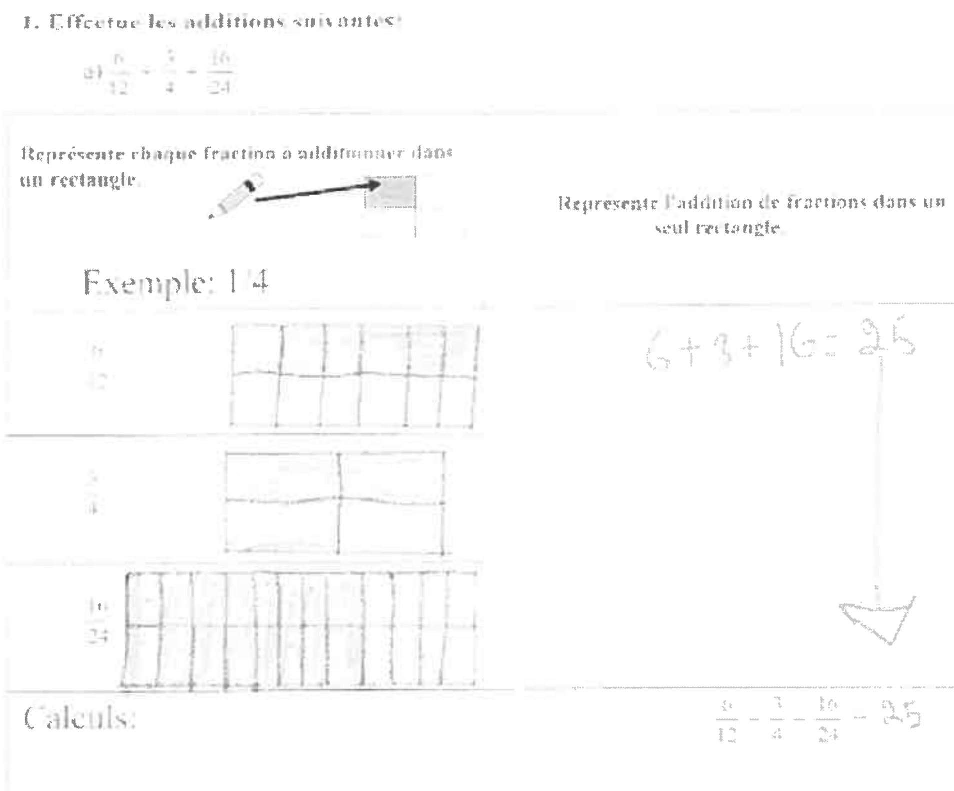
Nous nous intéressons d'abord aux représentations produites pour chacune des fractions. Pour mieux illustrer les analyses que nous effectuons, nous reproduisons, à la page suivante, trois conduites représentatives de l'ensemble des conduites.

E1


1. Effectue les additions suivantes:
a) $\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24}$
Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.
Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.
Exemple: 1/4
$\frac{6}{12}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{16}{24}$
Calculs:
$\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24} = \frac{25}{40}$

E5


1. Effectue les additions suivantes:
a) $\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24}$
Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.
Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.
Exemple: 1/4
$\frac{6}{12}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{16}{24}$
Calculs:
$\frac{33}{24}$
$\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24}$

E6	

Si les représentations de chacune des fractions que produisent les élèves montrent une interprétation juste des numérateurs et des dénominateurs des fractions, elles sont généralement fort approximatives ; seuls les élèves E1, E3, E4, E5 et E7 montrent un souci de partager les rectangles en parties égales ; ces élèves procèdent à une réduction d'au moins une des fractions avant de déterminer les mesures des rectangles. Le nombre de parties produites par les autres élèves correspond aux dénominateurs des fractions.

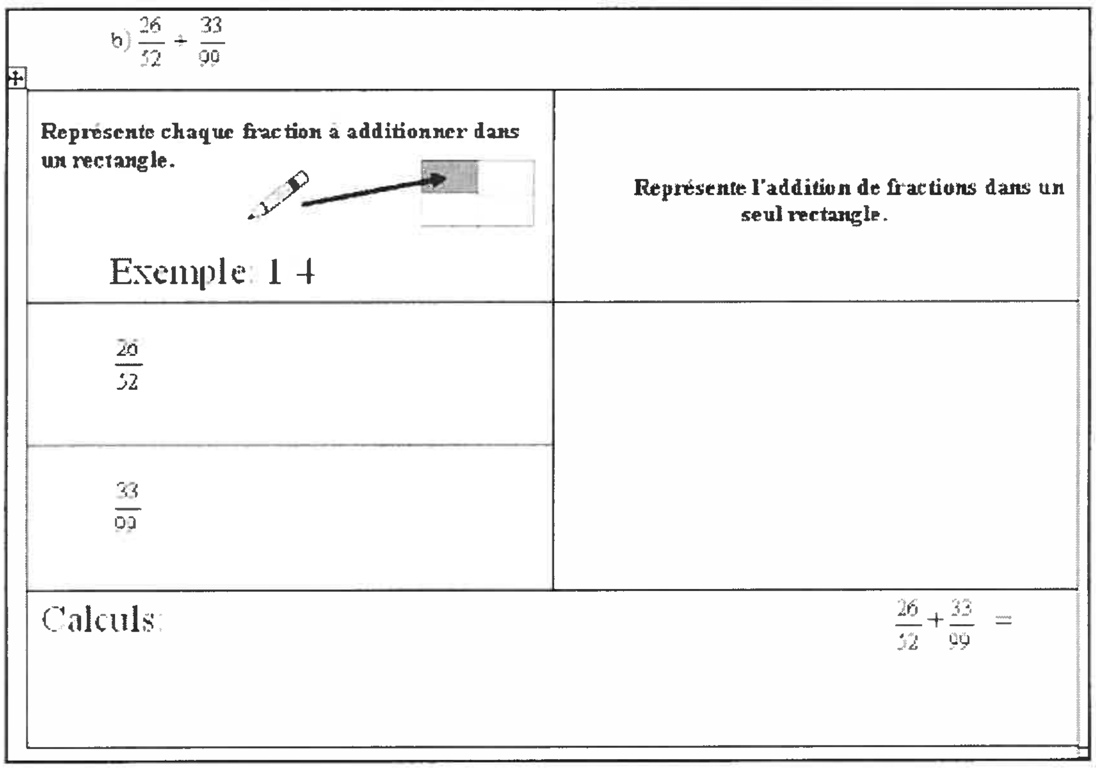
Les élèves E2, E3, E4 et E6 ne produisent aucune représentation de l'addition des fractions. L'élève E5 se contente de produire un rectangle pouvant être partagé en 24 parties. L'élève E7 produit 3 rectangles relativement similaires, mais les partitions effectuées pour les fractions 3/4 et 16/24 sont fort approximatives, voire inadéquates. Enfin, les élèves E1 et E7 produisent des représentations en prenant appui sur la somme des fractions. L'élève E1 produit un rectangle comportant 40 parties, cet élève ayant additionné respectivement les numérateurs et les dénominateurs. L'élève E7 produit un rectangle comportant 8 parties ; cet élève a procédé à une réduction des fractions, obtenant alors les fractions 3/4, 3/4 et 2/3.

L'élève E2 n'effectue aucune addition des fractions. L'élève E6 se contente d'additionner les numérateurs, produisant alors 25 comme réponse ; l'élève E1 produit une fraction dont le numérateur correspond à l'addition des numérateurs et le dénominateur à l'addition des dénominateurs. Les élèves E3, E4, E5 et E7 se montrent capables d'additionner les fractions en procédant soit à une réduction d'au moins une des fractions (E3, E4), soit en utilisant 24 comme dénominateur commun pour trouver les fractions équivalentes à 6/12 et 3/4 (E5 et E7). Quelques-uns de ces élèves procèdent par ailleurs à une réduction de la fraction ainsi trouvée (E3) ou à la production d'un nombre fractionnaire (E4 et E5). Enfin, il nous semble intéressant de noter que ces derniers élèves sont également ceux qui ont procédé à des réductions de fractions avant de les représenter.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la majorité des élèves effectue des représentations approximatives et indépendantes des fractions. Plusieurs ne savent aussi comment interpréter la demande qui leur est faite de représenter les fractions à l'aide des rectangles qui sont dessinés. Nous reproduisons quelques extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E1 et E5, interactions représentatives de celles qui ont eu lieu avec les autres élèves.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E1 et E5 : question #1 a)
Élève E1
E1 – À quoi ça sert ça (montre la représentation donnée en exemple au #1) EC – Ici, c'est un exemple. Si je te demandais de représenter 1/4 dans un carré, tu ferais un… E1 – Carré EC – Coupé en … E1– Quatre EC – Et ça, c'est 1/4. Ici (espace pour représenter chaque fraction), je veux que tu représentes 6/12, 3/4 et 16/24. Mais si c'est un très grand nombre comme ça, vas-tu faire 99 ? E1– Je vais réduire. EC – Je te laisse continuer. Tu peux prendre ta règle... E1– Ça c'est quoi ? Ça sert à quoi ici ? (montre les espaces pour dessiner chaque fraction individuellement) EC – Ça, c'est chaque fraction individuellement : juste le 6/12, juste le 3/4, juste le 16/24. Ça (espace pour la représentation de l'addition) c'est quand tu vas les avoir additionnées, ça va ressembler à quoi ? Ça plus ça, plus ça (les fractions). E1– Ok, je les additionne au complet ? EC – C'est ça.
Élève E5
E5 – Ici, je ne comprends pas comment il faut faire… (montre les espaces pour dessiner chaque fraction individuellement) EC – Regarde ici, il y a un exemple. Ils ont fait 1/4. Ça fait un rectangle séparé en quatre avec un qui est noir. E5 – Ok EC – Si tu avais 6/12, il ressemblerait à quoi ton rectangle ? Et tu mettrais combien de parties noires ? E5 – La moitié EC – Bon, tu me dessines ça. Celui-là, il ressemblerait à quoi et celui-là ressemblerait à quoi ? (pointe les autres fractions) E5 – Ah ok, il ne faut pas faire ça là ? (pointe la section réservée à la représentation de l'addition des fractions) EC – Tu le fais ici à côté. Ici, ce que tu représentes, c'est chacune des fractions individuellement. E5 – Ah, ok.

Dans **la seconde activité,** les fractions à représenter et à additionner comportent des dénominateurs largement supérieurs aux dénominateurs généralement rencontrés par les élèves : 26/52 et 33/99. Représenter ces fractions, étant donné l'espace alloué, suppose une réduction de chacune de ces fractions. L'addition de ces fractions suppose également une réduction de ces fractions, autrement dit, l'application de connaissances sur les fractions équivalentes, notamment sur les sens partie-tout et rapport de la fraction. Nous reproduisons l'activité proposée aux élèves.



b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$

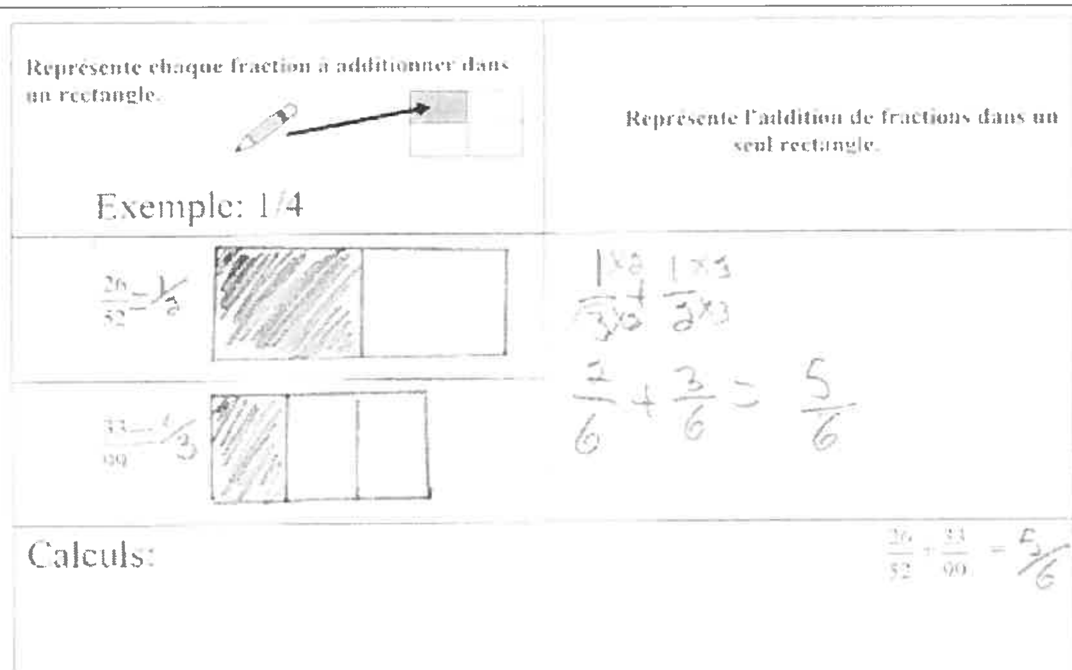
Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle. Exemple: 1 4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{26}{52}$	
$\frac{33}{99}$	
Calculs: $\frac{26}{52} + \frac{33}{99} =$	

Six élèves seulement proposent une représentation d'au moins une des fractions. L'élève E6 effectue une représentation non complétée de la fraction 26/52 ; ne disposant pas d'espace pour dessiner les 52 parties, il ajoute qu'il manque 24 parties. Les élèves E5 et E7 procèdent à une réduction de la fraction 26/52, obtenant alors 13/26 ; ils proposent une représentation de cette fraction uniquement. Les élèves E2, E4, E7 et E8 trouvent des fractions équivalentes à chacune des fractions. L'élève E7 écrit alors 13/26 et 11/33, mais ne produit pas de représentation de la seconde fraction. L'élève E2 propose 1/2 et 1/33 et produit une représentation de chacune de ces fractions, cet élève proposant ensuite 1/3 pour la seconde fraction lors du calcul. L'élève E8 propose 1/2 et 1/11 et effectue une représentation de chacune de ces fractions, considérant plutôt 7/14 que 1/2 pour la représentation de la première fraction. Enfin, seul l'élève E4 produit des représentations de chacune des fractions réduites, soit des fractions 1/2 et 1/3. Mentionnons enfin qu'aucun élève ne propose une représentation de l'addition des fractions.

Les élèves E3 et E7 ne proposent aucun calcul. L'élève E6 se contente d'additionner les numérateurs, sa réponse étant alors 59. Les élèves E1 et E8 produisent une fraction dont le numérateur correspond à l'addition des numérateurs et le dénominateur à l'addition des dénominateurs, soit 59/151. Les élèves E2 et E4 posent le calcul 1/2 + 1/3, mais seul l'élève E4 trouve une réponse juste en représentant chacune des fractions ainsi : 3/6 et 2/6 ; l'élève produit la réponse suivante : 5/6.

Si quelques élèves savent trouver des fractions équivalentes aux fractions 26/52 et 33/99 et peuvent y recourir pour représenter ces fractions, seul un élève, soit l'élève E4 sait exploiter ces représentations dans l'addition de ces fractions. Nous reproduisons la conduite de ce dernier élève.

E4



Le recours à des fractions comportant des nombres beaucoup plus grands aux dénominateurs que ceux que l'on retrouve généralement dans les manuels, comme le montrent les résultats précédents, entraînent chez plusieurs élèves une réduction d'au moins une des fractions à représenter, ce qui ne permet pas, par la suite, de construire une représentation de l'addition des fractions. Nous reproduisons quelques extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E6 et E5. L'élève E6, qui n'a effectué aucune réduction des fractions, semble pris au dépourvu lorsqu'il s'agit de procéder à des calculs. De son côté, l'élève E5 n'a effectué qu'une représentation de la fraction 26/52 sans réduction. Il ne voit pas comment il pourrait, à l'aide d'un seul rectangle, effectuer une représentation de l'addition des fractions 26/52 et 33/99. Les problèmes de ces élèves sont représentatifs des problèmes rencontrés chez plusieurs élèves participant à l'étude.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E6 et E5 : question #1 b)
Élève E6
E6 – Je ne comprends pas ici, comment tu veux que je les fasse mes calculs ? Faut que je trouve la même affaire ici (pointe l'espace réservé aux calculs), mais en calculs ? EC – Avec des calculs pour trouver la réponse E6 – Ok EC – Avec les nombres ici. Ici, c'est avec des dessins. Est-ce que tu peux les additionner ces trois fractions-là ? E6 – Oui EC – Est-ce que tu as le droit ? E6 – Bien ceux-là, je les additionne toutes les celles qui sont coloriées. EC – À droite tu me représentes combien ça fait en tout. E6 – Ok EC – Ça va être ta réponse. E6 – Ok
Élève E5
E5 – Ici, dans ce triangle là, il peux-tu avoir …dans ce rectangle là, il peux-tu y avoir deux rectangles ? (pointe la section réservée à la représentation de l'addition des fractions) EC – C'est possible. Il n'y a pas de limites à ce niveau là. E5 – Ok

3.2.1.2. Soustraction de fractions

La seconde tâche comporte deux activités. Dans chacune d'elles, l'élève est invité à représenter chaque fraction, puis à représenter la soustraction de ces fractions et enfin, à en effectuer la soustraction.

Dans **la première activité**, la soustraction à effectuer est la suivante : 7/8 – 1/3. Nous examinons les conduites des élèves lors de la représentation de chacune des fractions, puis de la représentation de la soustraction de ces fractions. Nous reproduisons l'activité proposée aux élèves.

2. Effectue les soustractions suivantes:

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple 1/4	**Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{7}{8}$	
$\frac{1}{3}$	
Calculs:	$\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$ =

À l'exception de l'élève E5, tous les élèves produisent une représentation de chacune des fractions. Toutefois, les représentations des élèves E2, E6 et E8 sont approximatives, les parties étant souvent grossièrement définies. Seuls deux élèves, soit les élèves E3 et E7, proposent une représentation de la soustraction des fractions ; ils se contentent toutefois de réunir en un seul dessin les représentations de chacune des fractions.

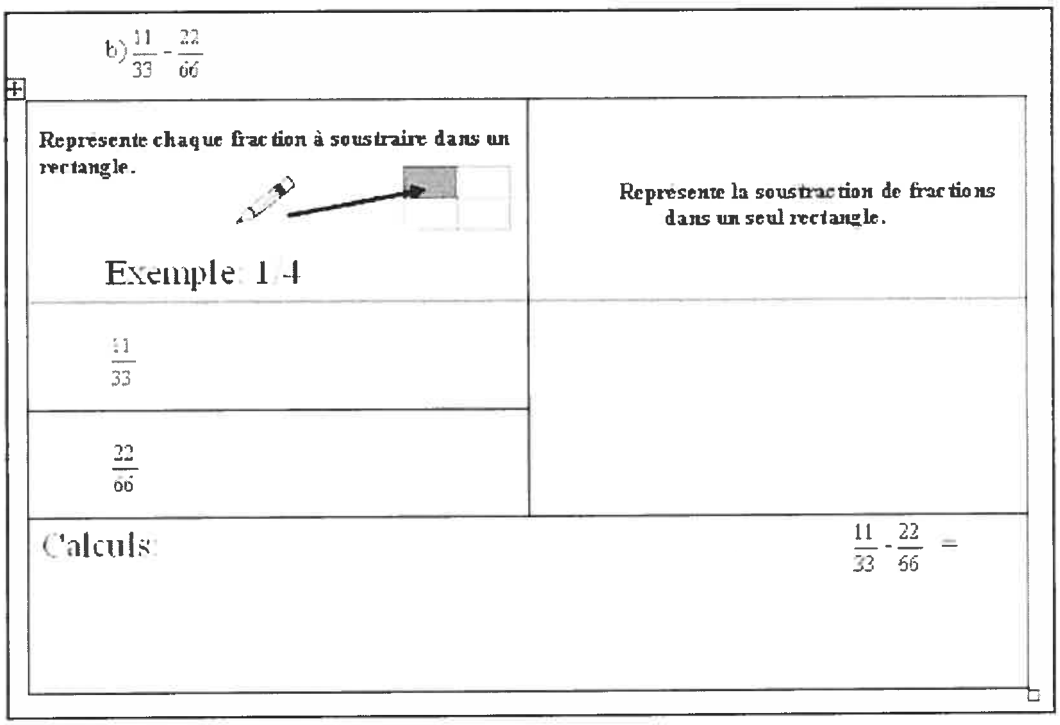
Trois élèves seulement, soit les élèves E3, E4 et E7, effectuent correctement la soustraction en trouvant un dénominateur commun à chacune des fractions : 21/24 – 8/24 = 13/24. Les élèves E1, E2 et E8 produisent la réponse erronée suivante : 1 1/5 ; le numérateur de la fraction correspond à la soustraction des numérateurs et le dénominateur, à la soustraction des dénominateurs. Ces élèves savent cependant trouver le nombre fractionnaire correspondant à 6/5. Enfin, l'élève E6 écrit 2, mais ne laisse aucune trace nous permettant d'interpréter sa conduite.

Lors de la réalisation des tâches que comportait cette première soustraction de fractions, les questions des élèves ont principalement été reliées au calcul à effectuer et à la représentation de la soustraction de fractions. Les extraits suivants des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E3, E1 et E5 donnent un aperçu des problèmes que soulèvent les tâches précédentes.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E3, E1 et E5 : question #2 a)
Élève E3
E3 – Oui. Ça, on es-tu obligé de faire le dessin ? EC – Oui. Fais les calculs, trouve ta réponse puis, après, essaie de faire une représentation de ta multiplication de fractions. Ok ? E3 – Oui
Élève E1
E1 – Mettons ici là, onze. 8 plus 3 ici ça donne 11 (il devait faire une soustraction). Comment on peut mettre ça dans un rectangle ? EC – Toi, tu veux faire 8 plus 3. Ça te donne 11 et tu veux mettre ton rectangle ici ? E1 – Oui EC – Avant de continuer j'aimerais que tu relises la question en suivant chaque mot avec ton doigt, ok ? E1 – Ok. EC – Regarde comme il faut, fais une autre lecture et tu vas voir après tu vas peut-être changer ta manière de répondre au problème. E1 – Ok.

Élève E5
E5 – Ici, faut-tu les mettre mettons avec la même fraction ?
EC – Qu'est-ce que tu veux dire « avec la même fraction » ?
E5 – Comme ici, j'ai 7/8. Là, faut-tu que je mette ça en huitièmes mettons pour…?
EC – Pour toi, ça fait du sens ?
E5 – Oui.
E5 – Ok, est-ce que j'ai le droit de les réduire ?
EC – Oui, tu as le droit de les réduire. C'est peut-être des grosses fractions. Si tu veux les réduire, tu le peux.

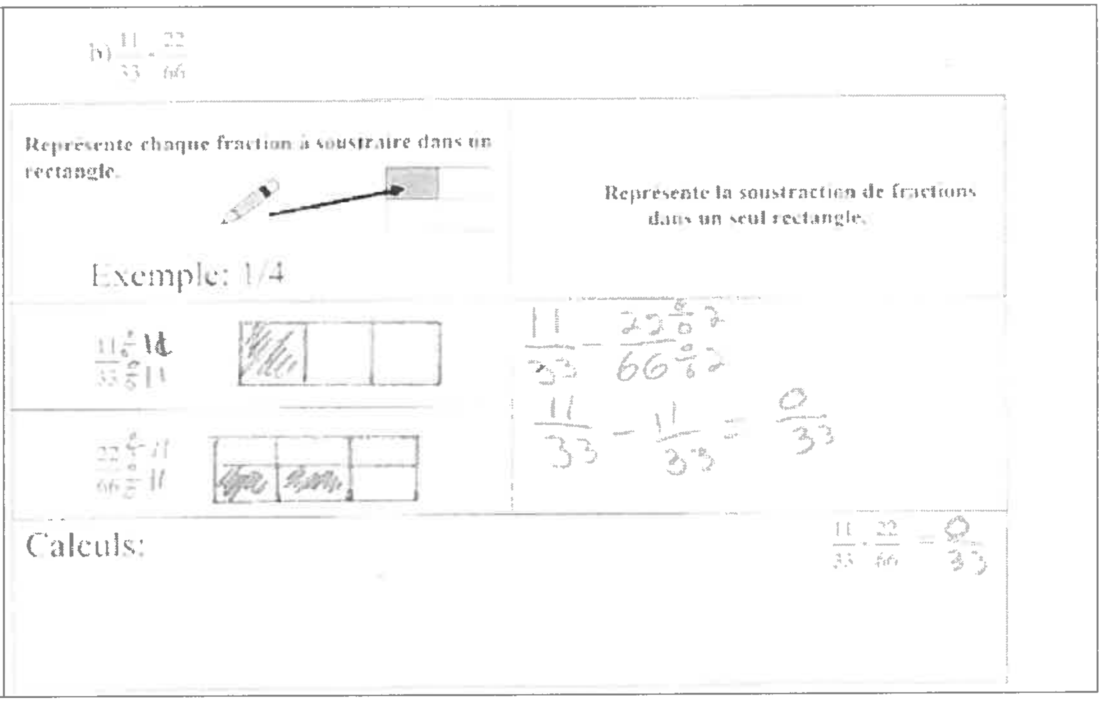
Dans **la seconde activité**, la soustraction à effectuer est la suivante : 11/33 – 22/66. Ces deux fractions correspondent à la fraction irréductible 1/3. Nous reproduisons l'activité proposée aux élèves.



Cinq élèves seulement produisent une représentation des fractions, soit les élèves E2, E3, E4, E7 et E8. Seul l'élève E4 se montre capable de représenter adéquatement les fractions, sachant identifier correctement les fractions équivalentes. Les élèves E2, E3, E7 et E8 associent incorrectement la fraction 1/11 à la fraction 11/33, à la suite d'une division par 11 du numérateur et du dénominateur de la fraction 11/33 ; une erreur similaire est produite dans la réduction de la fraction 22/66 par l'élève E2, obtenant alors 1/22. Enfin, un seul élève propose une représentation de la soustraction de fractions, se contentant de jumeler les représentations des deux fractions.

Un élève, soit l'élève E3, n'effectue pas la soustraction des fractions. Parmi les autres élèves, trois se montrent capables d'effectuer correctement la soustraction en trouvant une fraction équivalente à chacune, soit 11/33 ; il s'agit des élèves E1, E4, et E5. Fait intéressant, les élèves E1 et E5 n'ont pas produit de représentation des fractions. L'élève E4 est le seul qui a produit des représentations justes des fractions. Nous reproduisons les conduites de cet élève.

E4



Chez les élèves qui se montrent incapables d'effectuer correctement la soustraction, on relève diverses conduites. L'élève E2 propose le calcul suivant : 1/3 – 1/22 = 1/19 ; l'élève E7 effectue l'addition suivante : 1/11 + 1/11 et trouve 2/11 ; l'élève procède ainsi : 11/33 – 22/66 et trouve -11/33, effectuant la soustraction des numérateurs et des dénominateurs. La conduite de l'élève E6 est assez particulière ; en effet, cet élève procède en effectuant une soustraction sur chacune des fractions : 33 – 11 = 22 ; 66 – 22 = 44 ; il ne poursuit pas davantage.

3.2.1.3. Multiplication de fractions

La troisième tâche comporte deux activités. Dans chacune d'elles, il est demandé aux élèves de représenter dans un seul rectangle la multiplication des fractions, puis d'effectuer cette multiplication. Les multiplications proposées sont les suivantes : a) 15/16 x 11/12 ; b) 3/15 x 9/10. Nous convenons de traiter simultanément des conduites des élèves à ces deux activités. Nous reproduisons ci-dessous les activités proposées aux élèves.

3. Effectue la multiplication suivante :

a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

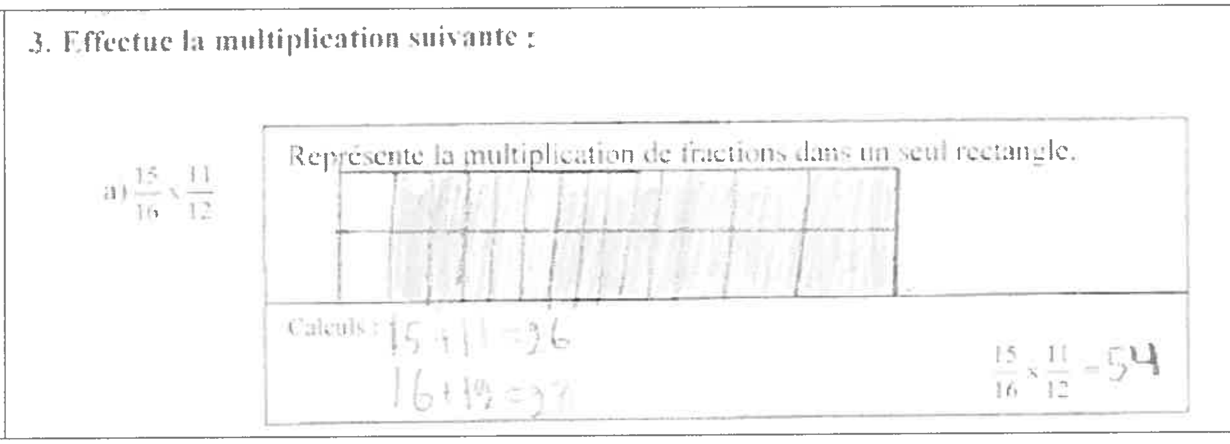
Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

b) $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10} =$

Seul l'élève E3 sait effectuer correctement les multiplications ; il ne produit toutefois aucune représentation des multiplications. Trois élèves, soit les élèves E4, E7 et E8, n'effectuent aucune tentative pour effectuer les multiplications des fractions 15/16 et 11/12. Si les autres élèves, soit les élèves E1, E2, E5 et E6 procèdent à divers calculs, ces calculs sont cependant erronés. L'élève E6 effectue une addition des numérateurs et des dénominateurs. Pour les fractions 15/16 et 11/12, le numérateur alors produit correspond bien à l'addition des numérateurs, mais le dénominateur est la somme de ce nombre et de celui résultant de l'addition des dénominateurs, soit 26/54 ; pour les fractions 3/15 et 9/10, le produit correspond à l'addition des sommes des numérateurs et des dénominateurs, soit 37. Cet élève produit aussi une représentation pour la multiplication des fractions 15/16 et 11/12 ; il dessine un rectangle composé de 2 rangées comportant chacune 14 parties plus ou moins comparables et sélectionne 13 parties par rangée ; le nombre de parties formant le tout correspond à l'addition des dénominateurs et le nombre de parties sélectionnées correspond à l'addition des numérateurs. Nous reproduisons les représentations et calculs de cet élève.

E6



Les calculs effectués par les E1, E2 et E5 prennent appui sur des produits croisés. Seul l'élève E2 effectue correctement ces produits ; à la première multiplication, il trouve la fraction 176/180 et, pour réduire la fraction, il divise par 100 et trouve 76/80 (il se contente d'enlever 100). Cet élève accompagne ce calcul d'une représentation composée de 4 rangées comportant chacune 20 parties ; la partition du rectangle est fort approximative. Les élèves E1 et E5 produisent plusieurs erreurs de calcul (ex : E5 : 11 x 16 = 77 (6 x 11 = 66 et 1 x 11 = 11)) et n'effectuent aucune représentation des multiplications.

L'entrée des élèves dans des tâches de représentation et de calcul de la multiplication de fractions n'est pas évidente, comme le montrent les conduites précédentes. Devant les difficultés des élèves, l'enseignant-chercheur propose aux élèves de procéder d'abord à la multiplication des fractions. Il essaie aussi d'inciter certains élèves à effectuer la représentation de l'opération. Nous reproduisons, à la page suivante, certains extraits des échanges entre l'enseignant-chercheur avec les élèves.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E1, E4, E2 et E5 : question #3 a)
Au groupe et Élève E1
EC (au groupe) – Si vous avez des problèmes avec les représentations, les rectangles et tout ça, trouvez la réponse avec les calculs avec les nombres et les rectangles, laissez-les faire, vous les ferez en dernier. Si vous n'avez pas le temps des faire, ce n'est pas grave. Je veux juste voir comment vous travaillez avec les fractions. Ça n'affectera pas votre notre de bulletin, vous ne coulerez pas. Prenez ça "relax". E1 – C'est la première fois qu'on fait une affaire et qu'on ne peut pas pocher. EC – C'est sûr que vous allez réussir ! (en riant)
Élève E4
E4 – Oui, j'ai trouvé la réponse ici (question 3a), mais ça ne se simplifie pas. Ça se simplifie par cinq ou par trois. Ça fait onze sur douze. Ah, ok, ça se simplifie par trois… EC – Je te laisse continuer… E4 – Ok.
Élève E2
E2 – (Lève la main pour annoncer qu'il a terminé) EC – Représenter la multiplication dans un rectangle, serais-tu capable d'essayer ? E2 – De quoi ? Je ne comprends pas. EC – Ici, un peu comme dans l'addition, on dessinait un rectangle pour représenter la réponse. 15/16 fois 11/12. Serais-tu capable de me donner la réponse dans un rectangle ? E2 – Oui (fais une tentative).
E5 – Ici, je peux-tu faire ça en X (référence au produit croisé) ? EC – Je ne peux pas te dire comment le faire. Vous avez vu les multiplications de fractions à un moment donné dans l'année ? E5 – Oui. EC – Fais-le comme tu t'en rappelles.

3.2.1.4. Résolution du problème #4

Dans la quatrième tâche, l'élève est invité à résoudre un problème multiplicatif n'impliquant qu'un seul espace de mesures. Il s'agit ainsi de trouver le nombre d'élèves malades dans une école, sachant que ce nombre correspond à 2/18 des 270 élèves qui composent cette école. Dans cette situation, le nombre total d'élèves fréquentant cette école (270) est un multiple de 9 et de 18 (dénominateur). La fraction 2/18 peut évidemment être réduite pour obtenir 1/9. Voici l'énoncé de ce problème :

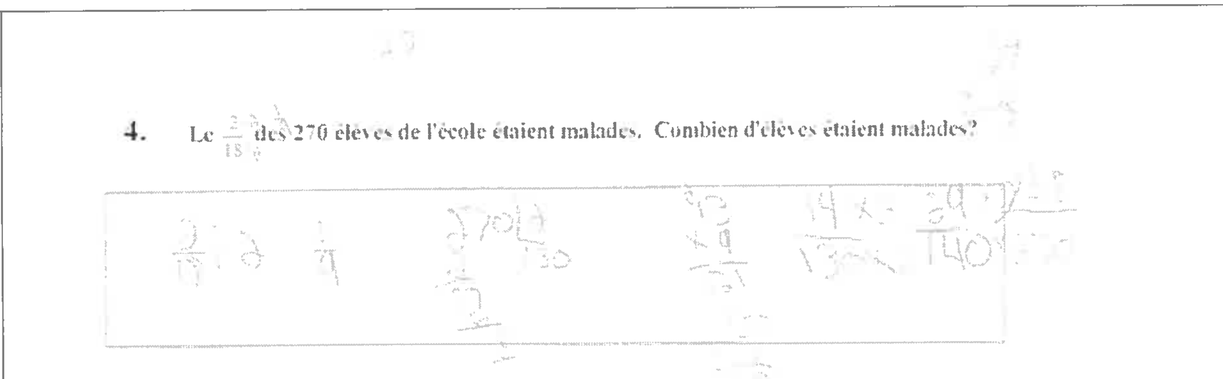
Problème #4 : Les 2/18 des 270 élèves de l'école étaient malades. Combien d'élèves étaient malades ?

L'élève E1 décide de multiplier par 2 le nombre d'élèves de l'école au lieu de réduire la fraction 2/18 et de diviser 270 par 9. Ensuite, il divise ce nombre par le dénominateur (18). Les traces de sa démarche montrent malheureusement une erreur de calcul. Sa division de 540/18 lui donne 32 au lieu de 30 comme résultat.

Les conduites de l'élève E2 sont particulièrement problématiques. La seule partie de la démarche de cet élève qui fait sens est la multiplication du nombre 270 par 2, obtenant alors 540 ; ce premier calcul renvoie à un « procédé » qu'il a rencontré antérieurement. Le reste de sa démarche est particulièrement confus. Il soustrait 270 à 540 et obtient 170 (erreur de calcul). Il termine en divisant 540 par 270 et obtient 2, ce dernier nombre étant la réponse finale de cet élève. Cet élève ne fait aucun lien avec le dénominateur 18 et le nombre total d'élèves dans l'école.

L'élève E3 effectue bien une tentative de résolution du problème, en réduisant la fraction 2/18 pour arriver à 1/9. Il choisit par la suite de diviser 270 par 2. Il ne parvient pas à terminer sa division. Il se retrouve avec 130 au lieu de 135. Pour une raison difficile à comprendre, il poursuit avec les nombres 13 et 14 (provenant peut-être du 130 erroné). Il multiplie 13 par 9 et, sans doute par tâtonnement, multiplie 130 par 2. Le reste de sa démarche est ambiguë et il n'arrive pas à produire une réponse. Nous reproduisons les représentations et les calculs de cet élève.

E3



L'élève E4 résout facilement ce problème en réduisant d'entrée de jeu la fraction 2/18. Ensuite, il divise 270 par 9. Il trouve ainsi que 30 élèves sont malades. La démarche de l'élève E5 est plutôt particulière. Il divise 270 par 18 (sans réduction de la fraction 2/18). Ayant complété cette division, il réalise sans doute que la fraction 2/18 se réduit à 1/9 et que le nombre d'élèves malades devrait être le double du résultat obtenu précédemment. Il multiplie donc 15 (résultat de sa première division) par 2 et arrive au bon nombre d'élèves, c'est-à-dire 30.

La conduite de l'élève E6 est plutôt déroutante. Il produit une longue colonne constituée du nombre 18. Après la 6e entrée de ce nombre, il tire un trait horizontal et inscrit 50. Il entre à nouveau 6 fois le nombre 18, puis tire un second trait et inscrit 100. Il poursuit ainsi jusqu'à 200. Puis, il entre 7 fois le nombre 18, tire un trait et inscrit 268 ; ce nombre est alors encerclé. Dans la section réservée à la démarche, l'élève effectue l'opération suivante : 18/268 = 12. Ce nombre 12 semble être sa réponse finale.

L'élève E7 ne produit qu'une représentation inadéquate de la situation problème. Il dessine un rectangle divisé en huit parties (division approximative des sections). Une des huit parties est ombragée pour représenter 1/8. Au-dessus du rectangle, l'élève inscrit 13 élèves comme résultat, sans laisser de traces de ses calculs.

L'élève E8 semble avoir commencé avec une représentation du dénominateur 18 sur une échelle graduée. Le numérateur n'est pas représenté sur cette échelle. Au-dessus de sa représentation graphique, l'élève effectue l'opération suivante : 270 ÷ 18. Une erreur de calcul (2 x 18 = 26) le force à donner 20 r10 (reste 10) comme réponse finale. Il ne va pas plus loin dans sa démarche et n'utilise pas vraiment la représentation graphique qu'il s'est donné la peine de faire pour solutionner le problème.

Comme le montrent les données précédentes, seuls deux élèves, soit les élèves E1 et E4, ont réussi à résoudre ce problème multiplicatif. Chez la plupart des autres élèves, on peut voir le recours à des calculs (par exemple, la division par 18) qui font partie des calculs antérieurement enseignés pour trouver une fraction d'une collection. Comme nous avons pu le voir, deux élèves, soit les élèves E2 et E6, recourent à des procédés qui se démarquent de ceux des autres élèves qui ne réussissent pas ce problème. Nous reproduisons ci-dessous les échanges entre ces élèves et l'enseignant-chercheur.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E2 et E6 : problème #4
Élèves E2
E2 – Est-ce que j'ai le droit de multiplier 270 par 2 ? EC – Tu peux certainement si tu penses qua ça va te permettre de trouver le nombre d'élèves malades. E2 – Ok.
Élève E6
E6 – Ici, j'ai vu que ça faisait 50, faque je l'ai répété, jusqu'à ce que ça fasse 166. Je ne peux pas me rendre jusqu'à 270. EC – Tu t'es rendue jusqu'à ? E6 – 268 EC – Et puis, tu as pris les 18 à chaque fois et tu as fait des paquets ? E6 – C'est ça et il y en a 6 dedans. EC – Penses-tu être capable de trouver le nombre d'élèves malades avec ta technique ? E6 – Je pense que oui… EC – Je te laisse continuer puis n'oublie pas de marquer clairement ta réponse finale.

3.2.1.5. Résolution du problème #5

Le problème #5 met en situation deux classes d'une même école. La fraction 4/7 représente le nombre d'élèves portant des lunettes dans les deux classes réunies. Il faut déterminer le nombre d'élèves total faisant partie de ces deux groupes. On sait que le nombre d'élèves est supérieur à 35 et inférieur à 56. La résolution de ce problème implique la notion de fractions équivalentes, la fraction équivalente recherchée doit avoir un dénominateur supérieur à 35 mais inférieur à 56. Voici l'énoncé de ce problème :

Problème #5 : Les 4/7 des élèves de deux classes de 1ère secondaire portent des lunettes. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y-a-t-il d'élève dans les deux classes réunies ?

L'élève E1 laisse peu de traces de ses démarches. Le début de son raisonnement écrit est la fraction 24/46. Il a sans doute voulu trouver une fraction équivalente à 4/7 en multipliant le numérateur et le dénominateur par 6. Évidemment, il a fait une erreur de calcul en effectuant 7 x 6, obtenant 46 plutôt que 42. Puisque le problème fait mention de deux groupes d'élèves, il décide ensuite de doubler le numérateur (24 + 24 = 48) et le dénominateur (46 + 46 = 92) pour finalement donner 48/92 comme réponse finale.

L'élève E2 commence en multipliant 4 par 56. Son résultat est erroné car dans l'opération subséquente, il tente de diviser à nouveau 404 par 56. Il effectue ensuite une multiplication (5 x 56 = 280) et additionne encore deux fois 56 à ce résultat (280 + 56 + 56 = 392), mais il réalise une erreur de calcul et termine avec 382. Il reprend ensuite le nombre 404 et enlève 382. La démarche de l'élève s'arrête là et il place un point d'interrogation sous le problème sans réellement donner de réponse finale.

L'élève E3 effectue une recherche de fractions équivalentes. Il a d'abord fait 4/7 x 2 pour obtenir 8/14 et multiplié de nouveau cette fraction par 4 pour obtenir 32/56. Si l'écriture du calcul pour produire des fractions équivalentes est erronée, le calcul réalisé est juste. La démarche de cet élève se termine là, la réponse ainsi produite est la fraction équivalente 32/56. Il n'y a malheureusement pas de lien fait entre le dénominateur de cette fraction et le nombre total d'élèves. En effet, la réponse finale de cet élève reste la fraction équivalente 32/56.

L'élève E4 réussit à déterminer le nombre d'élèves dans les deux classes (il trouve les multiples de 7 jusqu'à 42 ; nombre qu'il encercle). Malheureusement, il fait une mauvaise interprétation de la question et donne comme réponse finale le nombre d'élèves qui portent des lunettes (24 élèves). Cette réponse montre toutefois qu'il sait donner sens à la fraction équivalente obtenue.

La démarche de l'élève E5 ressemble à celle de l'élève E4. Toutefois, ce dernier ne fait que multiplier 7 par 6 pour arriver à 42. Il tente ensuite de diviser 42 par 4 (le numérateur de 4/7), mais abandonne son travail et ne laisse aucun résultat.

Les élèves E6 et E7 sont incapables de résoudre le problème. Seul l'élève E6 fait une représentation grossière d'un rectangle séparé en 7 sections dont 4 sont ombragées pour représenter la fraction 4/7.

La conduite de l'élève E8 ressemble à celle de l'élève E1. Il sait qu'il doit travailler avec le dénominateur (7) pour trouver le nombre situé entre 35 et 56. Il inscrit ceci sur sa feuille : 7 x ? = « plus que 35 mais moins que 56 ». Sous cette ligne on retrouve la multiplication 7 x 7 = 42. Comme pour l'élève E1, puisque le problème fait mention de deux groupes d'élèves, il décide ensuite doubler le dénominateur trouvé pour donner 84 élèves comme solution au problème (2 x 42).

Bien qu'aucun des élèves ne produisent la réponse attendue, il est important de noter que quatre élèves, soit les élèves E1, E3, E4 et E8, produisent des fractions équivalentes, effectuant ainsi une première interprétation satisfaisante du problème. Ces conduites contrastent avec celles des autres élèves, notamment avec celles des élèves E2, E6 et E7. Pour apprécier les conduites des élèves E1, E3, E4 et E8, nous reproduisons ci-dessous des extraits des échanges entre l'enseignant-chercheur et l'élève E1.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E1 et E5 : problème #5
Élève E1
E1 – Il me reste juste ça. EC – Il n'y a que celui-là ici qui te pose problème ? E1 – Je ne le sais vraiment pas. EC – Ok, je vais te donner quelques indices. Tu sais que la réponse va être entre ces deux chiffres là (35 et 56) ? E1 – Oui. EC – Je te dis que dans les deux classes, il y a 4 élèves sur 7. Penses-tu qu'il n'y a que 7 élèves dans les deux classes ? E1 – Non. EC – Est-ce qu'il y en a plus ou moins ? E1 – Plus. EC – Pourquoi ils ont pris cette fraction-là dans le problème ? Quelle serait la fraction plus grande qui représenterait le nombre d'élèves et que la réponse serait entre ces deux chiffres-là ? Essaie ça. E1 – Ok ! Ils l'ont peut-être mis plus petite, ils l'ont peut-être réduite pour travailler avec elle.

Élève E5
E5 – Ici, je ne comprends pas. EC – Ici, on dit que dans deux classes, il y a 4/7 qui portent des lunettes. Dans ces deux classes-là, il y a un nombre d'élèves. Je te dis que si tu additionnes ces deux classes-là, il y a entre 35 et 56 élèves. Il y a plus que 35 et moins que 56. Essaie de travailler avec ta fraction et de trouver combien qu'il y a d'élèves dans les deux classes et il faut que la réponse… E5 – Il y en a 42. EC – Ah, essaie. Écris-moi comment tu as fait pour arriver à ça. E5 – (Rédige sa réponse.) EC – Tu me dis 42 et pourquoi tu as fait 6 X 7 ici ? E5 – Pour que ça donne 42. EC – Et pourquoi fois 6 ? E5 – Parce que… EC – Pourquoi tu n'a pas fait fois 12 ? E5 – Parce qu'il fallait que ça soit entre 35 et 56. EC – Ça veut dire qu'avec les deux classes ensemble, il y a combien d'élèves ? E5 – Il y a 42 élèves. EC – Est-ce que ça se peut ça ? E5 – Oui. EC – Est-ce que ça correspond à l'information qui est ici (EC pointe la feuille) ? E5 – Oui.

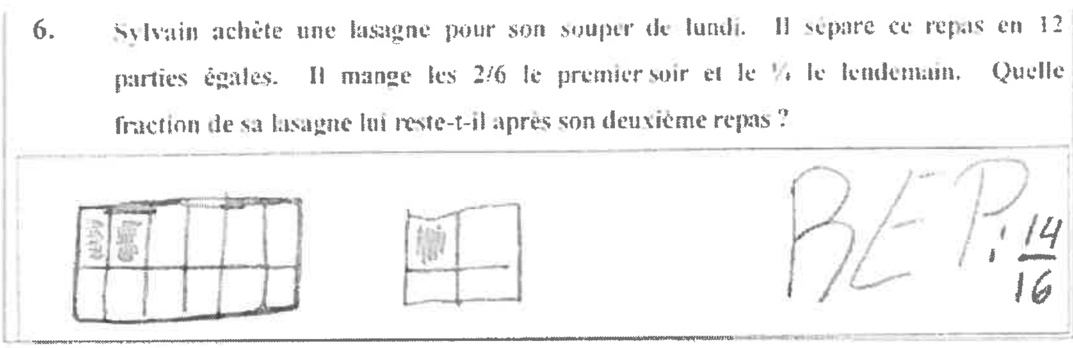
3.2.1.6. Résolution du problème #6

La sixième tâche que les élèves doivent effectuer est la résolution d'un problème de transformation de mesures. Il s'agit ainsi de déterminer ce qui reste d'un tout après deux prélèvements successifs des parties de ce tout, ces parties étant associées à des fractions de ce tout. Pour faciliter la démarche, on indique en combien de parties égales est partagé le tout, le nombre de ces parties étant un multiple de l'un et l'autre des dénominateurs des fractions du tout. Nous reproduisons le problème ainsi proposé aux élèves.

Problème #6 : Sylvain achète une lasagne pour son souper de lundi. Il sépare ce repas en 12 parties égales. Il mange les 2/6 le premier soir et le 1/4 le lendemain. Quelle fraction de sa lasagne lui reste-t-il après sont deuxième repas ?

Les élèves E1, E4 et E6 ne font aucun calcul pour tenter de résoudre le problème. Ils font chacun une représentation de la lasagne à l'aide d'un rectangle divisé en 12 parties. Comme le montre la conduite de l'élève E1 que nous avons reproduite ci-dessous, celui-ci dessine un carré divisé en quatre parties, une de ces parties étant ombragée (1/4) ; il dessine également un rectangle qu'il partage en 12 parties, deux de ces parties étant ombragées (2/12). Les mesures de ces deux figures sont fort différentes et les partitions effectuées fort approximatives. Puis, il donne comme réponse 14/16, aucun calcul ne montrant la provenance de cette réponse. On peut penser qu'il a fait la somme des parties formant les deux dessins ou encore, qu'il a additionné les dénominateurs des fractions ; il a possiblement ensuite compté le nombre de parties non ombragées, commettant une erreur de dénombrement puisque sa réponse est 14/16.

E1


6. Sylvain achète une lasagne pour son souper de lundi. Il sépare ce repas en 12 parties égales. Il mange les 2/6 le premier soir et le ¼ le lendemain. Quelle fraction de sa lasagne lui reste-t-il après son deuxième repas ?

RÉP : $\frac{14}{16}$

L'élève E4 ne fait qu'un seul rectangle divisé en douze parties, à l'intérieur duquel il indique les parties mangées. Il ne fait que rayer 6 sections sur 12 dans le rectangle et donne 1/2 comme résultat. L'élève E6 se contente d'additionner les deux numérateurs des fractions (2 de 2/6 et 1 de 1/4) pour obtenir 3. Dans un grand rectangle séparé en douze, il noircit 3 sections et donne 9/12 comme réponse finale.

Les autres élèves (E2, E3, E5, E7 et E8) réussissent à opérer correctement sur les fractions pour arriver au résultat. Seul l'élève E2 donne 7/12 comme réponse finale au lieu de 5/12 (lasagne mangée au lieu de lasagne restante). La conduite de l'élève E8, que nous reproduisons, est assez représentative de celles des autres élèves ayant également bien opéré sur les fractions.

E8	6. Sylvain achète une lasagne pour son souper de lundi. Il sépare ce repas en 12 parties égales. Il mange les 2/6 le premier soir et le ¼ le lendemain. Quelle fraction de sa lasagne lui reste-t-il après son deuxième repas ? $\frac{2 \times 2}{6 \times 2} = \frac{4}{12}$ $\quad$ $4 + 3 = 7$ $\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$ $\quad$ $12 - 7 = 5$ Rep.: $\frac{5}{12}$

Il nous semble enfin pertinent de souligner que trois des cinq élèves qui réussissent à solutionner correctement ce problème, soit les élèves E3, E4 et E7, avaient su effectuer correctement l'addition des fractions présentées dans la première tâche.

3.2.1.7. Résolution du problème #7

Dans la dernière tâche faisant partie de l'épreuve d'entrée dans la séquence, les élèves sont invités à résoudre un problème très voisin du problème #4. Ils doivent déterminer la quantité de farine nécessaire pour la fabrication d'un gâteau. Le chef a en sa possession un sac de 9 Kg. Il doit utiliser 21/27 de ce sac. Nous reproduisons le problème présenté aux élèves :

Problème #7 : Le grand chef d'un restaurant a reçu une commande pour faire un gâteau de mariage. La recette qu'il suit lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9 Kg de farine qu'il a acheté. Quelle quantité de farine le chef devra-t-il utiliser pour sa recette ?

Seuls les élèves E2 et E3 ont réduit la fraction 21/27 avant de s'attaquer au problème. Les autres élèves ont travaillé avec la fraction non réduite 21/27. L'élève E1 montre un bon raisonnement malgré le fait qu'il travaille avec la fraction non réduite. Si cet élève avait réduit la fraction 21/27, il aurait probablement réussi le problème. Il commence par multiplier le nombre de kilogrammes, soit 9, par le numérateur de la fraction (21 x 9 = 189). Ensuite, il divise ce résultat par le dénominateur de la fraction

(189/27 = 30). Une erreur sur cette dernière division l'amène à donner 30 Kg comme réponse finale.

L'élève E2 commence par dessiner une forme ovale grossière pour représenter un sac de farine. Sur ce sac, l'élève gribouille quelques lignes verticales et inscrit 1 Kg à côté de 3 d'entre-elles. Il termine sa démarche en réduisant la fraction 21/27 à 7/9, soit en la divisant par 3. Il semble vouloir donner 7/9 en guise réponse finale (fraction encerclée). L'élève E3 effectue la multiplication 3 x 9= 27 pour vérifier que 3 est bel et bien un facteur de 27. Il réduit ensuite la fraction 21/27 et cesse ses calculs sans donner de réponse finale.

La conduite de l'élève E4 est très intéressante. Sa représentation graphique est adéquate et lui permet de trouver la bonne réponse avec un minimum de calculs. Un rectangle séparé en 21 morceaux (3 x 9) est représenté dans la zone de réponse. Dans ce rectangle, on remarque que 21 morceaux ont été noircis. Une ligne séparatrice scinde ce grand rectangle en trois parties congrues comprenant chacune 9 morceaux. Un peu plus loin, l'élève effectue la division suivante : 27/9 = 3. Il inscrit alors un commentaire sous le résultat de la division : 3 Kg par 9 carrés. Bien qu'il n'y ait pas de traces écrites montrant que cet élève sait que 3 carreaux du rectangle représentent 1 Kg, sa réponse finale (7 Kg de farine utilisés) nous permet d'avancer l'idée que ce lien a bel et bien été fait. Nous reproduisons les représentations et les calculs de cet élève.

E4

7. Le grand chef d'un restaurant a reçu une commande pour faire un gâteau de mariage. La recette qu'il suit lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9 Kg de farine qu'il a acheté. Quelle quantité de farine le chef devra-t-il utiliser pour sa recette ?

Les élèves E5 et E8 ne font que diviser 27 par 9 pour obtenir 3 comme quotient sans aller plus loin. Les élèves E6 et E7 ont sensiblement la même démarche que les élèves E5 et E8, mais ils divisent un grand rectangle en 21 parties plus ou moins congrues, sans faire de lien réel avec leur calcul.

Si tous les élèves s'engagent dans une démarche de résolution de ce problème multiplicatif, un seul élève parvient à résoudre ce problème, soit l'élève E4. Mais, comme le montrent les extraits des échanges avec l'enseignant-chercheur, cet élève est très fortement orienté vers une interprétation pertinente et un procédé adéquat par l'enseignant-chercheur. Il nous est apparu important de reproduire ces échanges, ainsi que les échanges entre l'enseignant-chercheur et l'élève E2, ces échanges montrant comment les mesures utilisées sont également source de difficultés.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E4, E2 et E5 : problème #7
Élève E4
E4 – C'est parce que ici, il marque ça prend 21/27 du sac de 9 Kg. Comment que je pourrais faire comme pour… moi, je ne comprends pas comment je pourrais faire pour euh diviser ça par ça. EC – Diviser ton 9 par ton 21/27 ? E4 – Oui. EC – Fais-toi un dessin. Dessine ton sac de 9 Kg et montre-moi ça serait quoi le 21/27 du sac en faisant un dessin. E4 – Ok.
Élève E2
E2 – "9 Kg" là, c'est tu neuf kilogr… c'est tu neuf mille, ou c'est combien…? EC – Bien ici, c'est en kilogrammes. C'est comme si je transformais des mètres en kilomètres. Ça reste la même distance. Si c'est 9000 grammes ou 9 Kg de farine, c'est la même quantité de farine. Ce que je veux savoir c'est la quantité de farine qu'il va utiliser s'il en prend juste les 21/27. Tu peux peut-être me dessiner le sac et la fraction qu'il a pris pour me dire combien de kilogrammes qu'il a pris. E2– Ok, je comprends…

Élève E5
EC – Celle-là ici : "Il y a un chef d'un grand restaurant qui veut faire un gâteau et il a besoin d'un sac de 9 Kg de farine mais il ne va pas tout prendre le sac". Il en prend le … E5 – 3/4 EC – Il va donc prendre quelle quantité des 9 Kg ? E5 – Tu fais 27 divisé par 9 ? EC – Vas-y, essaie.

3.2.2. Synthèse de l'analyse des conduites des élèves à l'entrée dans la séquence

L'analyse des conduites des élèves à l'entrée dans la séquence nous a permis d'apprécier les difficultés rencontrées par plusieurs élèves dans le traitement des opérations et dans la résolution de problèmes. Cette analyse nous a également permis de relever des différences appréciables dans les rapports aux fractions des élèves. Il nous a semblé pertinent d'effectuer une synthèse des résultats. Le tableau III présente ainsi, pour chacune des tâches, un sommaire des principales caractéristiques des conduites des élèves.

Tableau III[1]

Sommaire des principales caractéristiques des conduites des élèves à l'entrée dans la séquence didactique

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="4">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="9">1-a) Ad : Addition de fractions :
6/12 + 3/4 + 16/24</td><td colspan="4">Rp : Représentation des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sr : sans réduction de fractions</td><td colspan="2">Ar : avec réduction de fractions</td></tr>
<tr><td>Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète
E1-E2-E6-E8</td><td>Pr :
représentation précise</td><td>Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète</td><td>Pr :
représentation précise
E3-E4-E5-E7</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ad-Fr : Représentation de l'addition des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td colspan="2">E2-E3-E4-E6-E8</td><td>Ns :
représentation non satisfaisante
E1-E5-E7</td><td>Sa :
représentation satisfaisante</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ad-Fr : Addition des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ad-Fr-Nf : addition non effectuée</td><td colspan="2">Ad-Fr-E : addition effectuée</td></tr>
<tr><td colspan="2">E2</td><td>Ad-Fr-E-Er :
addition erronée
E1-E6-E7-E8</td><td>Ad-Fr-E-J :
addition juste
E3-E4-E5</td></tr>
</table>

[1] Voir l'annexe 4 pour le tableau de correspondance des abréviations.

Tâches	Activités			
1-b) Ad : Addition de fractions: 26/52 + 33/99	**Rp : Représentation des fractions (E1 et E3 n'effectuent aucune représentation)**			
	Sr : sans réduction de fractions		Ar : avec réduction de fractions	
	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E6	Pr : représentation précise	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E2 –E5-E7-E8	Pr : représentation précise E4
	Ad-Fr : Représentation de l'addition des fractions			
	Srp : sans représentation		Arp : avec représentation	
	E1-E3-E4-E5-E6-E7-E8		Ns : représentation non satisfaisante E2	Sa : représentation satisfaisante
	Ad-Fr : addition des fractions			
	Ad-Fr-Nf : addition non effectuée		Ad-Fr-E : addition effectuée	
	E3-E5-E7		Ad-Fr-E-Er : addition erronée E1-E2- E6-E8	Ad-Fr-E-J : addition juste E4

Taches	Activités			
2-a) So : Soustraction de fractions : 7/8 – 1/3	**Rp : Représentation des fractions (E5 n'effectue aucune représentation)**			
	Sr : sans réduction de fractions		.Ar : avec réduction de fractions	
	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E1-E2-E6-E8	Pr : représentation précise E3-E4-E7	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète	Ne s'applique pas
	So-Fr : Représentation de la soustraction des fractions			
	Srp : sans représentation		Arp : avec représentation	
	E1-E2-E4-E5-E6-E8		Ns : représentation non satisfaisante E3-E7	Sa : représentation satisfaisante
	So-Fr : soustraction des fractions			
	So-Fr-Nf : soustraction non effectuée		So-Fr-E : soustraction effectuée	
	E5		So-Fr-E-Er : soustraction erronée E1-E2-E6-E8	So-Fr-E-J : soustraction juste E3-E4-E7

117

Tâches	Activités			
2-b) So : Soustraction de fractions : 11/33 – 22/66	**Rp : Représentation des fractions (E1, E5 et E6 n'effectuent aucune représentation)**			
	Sr : sans réduction de fractions		Ar : avec réduction de fractions	
	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E8	Pr : représentation précise	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E2-E3-E7-E8	Pr : représentation précise E4
	So-Fr : Représentation de la soustraction de fractions			
	Srp : sans représentation		Arp : avec représentation	
	E1-E2-E4-E4-E5-E6-E8		Ns : représentation non satisfaisante E7	Sa : représentation satisfaisante
	So-Fr : soustraction des fractions			
	So-Fr-Nf : soustraction non effectuée		So-Fr-E : soustraction effectuée	
	E3		So-Fr-E-Er : soustraction erronée E2-E6-E7-E8	So-Fr-E-J : soustraction juste E1-E4-E5

118

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="3">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="6">3-a) Mu :
Multiplication de fractions :
15/16 x 11/22</td><td colspan="3">Mu-Fr : Représentation de la multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td>E1-E3-E4-E5-E7-E8</td><td>Ns :
représentation
non satisfaisante
E2-E6</td><td>Sa :
représentation satisfaisante</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mu-Fr : multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Mu-Fr-Nf : multiplication non effectuée</td><td colspan="2">Mu-Fr-E : multiplication effectuée</td></tr>
<tr><td>E4-E7-E8</td><td>Mu-Fr-E-Er :
multiplication erronée
E1-E2-E5-E6</td><td>Mu-Fr-E-J :
multiplication juste
E3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="3">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="6">3-b) Mu :
Multiplication de fractions :
3/15 x 9/10</td><td colspan="3">Mu-Fr : Représentation de la multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td>E1-E2-E3-E4-E5-E7-E8</td><td>Ns :
représentation
son satisfaisante
E6</td><td>Sa :
représentation satisfaisante</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mu-Fr : multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Mu-Fr-Nf : multiplication non effectuée</td><td colspan="2">Mu-Fr-E : multiplication effectuée</td></tr>
<tr><td>E7-E8</td><td>Mu-Fr-E-Er :
multiplication erronée
E1-E2-E4-E5-E6</td><td>Mu-Fr-E-J :
multiplication juste
E3</td></tr>
</table>

Tâches	Activités		
4- Pm : problème multiplicatif Nombres : 2/18, 270	**Pm-Fr : Représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E2-E3-E4-E5	Ns : représentation non satisfaisante E6-E7-E8	Sa : représentation satisfaisante
	Pm-Fr : Résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	---	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E2-E3-E6-E7-E8	Pm-Fr-E-J : résolution juste E4-E5

Tâches	Activités		
5- Pm : problème multiplicatif Nombres : 4/7, 35, 56	**Pm-Fr : Représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E2-E3-E4-E5-E7-E8	Ns : représentation non satisfaisante E6	Sa : représentation satisfaisante
	Pm-Fr : Résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	E6-E7	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E2-E3-E4-E5-E8	Pm-Fr-E-J : résolution juste

21

Tâches	Activités		
6- Pm : problème additif Nombres : 2/6, 1/4, 12	**Pm-Fr : Représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E2-E3-E5-E8	Ns : représentation non satisfaisante E1-E4-E6	Sa : représentation satisfaisante E7
	Pm-Fr : résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	---	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E4-E6	Pm-Fr-E-J : Résolution juste E2-E3-E5-E7-E8

Tâches	Activités		
7- Pm : problème multiplicatif Nombres : 21/27, 9	**Pm-Fr : Représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E3-E5-E8	Ns : représentation non satisfaisante E2-E6-E7	Sa : représentation satisfaisante E4
	Pm-Fr : résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	---	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E2-E3-E5-E6-E7-E8	Pm-Fr-E-J : résolution juste E4

Comme le montre le tableau III, seul l'élève E4 réussit à effectuer correctement les additions et les soustractions de fractions proposées dans les tâches #1 et #2. Cet élève sait aussi produire des représentations précises des fractions, procédant, au besoin, à la réduction des fractions. Il ne peut pas, par ailleurs, produire de représentations des additions et des soustractions de fractions. Cette incapacité est observée chez tous les élèves. Elle ne nous étonne guère, compte tenu du fait que, dans l'enseignement primaire, il est rarement, très rarement, demandé aux élèves de produire des représentations d'additions de fractions qui obligent à recourir à des fractions équivalentes, ou encore, qui comportent des nombres relativement grands aux numérateurs et aux dénominateurs.

Les élèves E3, E5 et E7 se montrent capables, à l'occasion, de produire des représentations précises des fractions. Ces élèves parviennent à effectuer correctement au moins deux des additions et des soustractions demandées. À l'exception de l'élève E1, qui parvient à effectuer correctement une des soustractions demandées tout en ne pouvant produire de représentations précises des fractions, tous les élèves qui ne peuvent produire des représentations précises des fractions se révèlent incapables d'effectuer correctement les additions et les soustractions. Enfin, aucun élève ne sait produire des représentations adéquates des multiplications de fractions et un seul élève sait effectuer correctement les multiplications proposées.

Si cinq élèves, soit les élèves E1, E3, E4, E5 et E7 peuvent effectuer correctement certaines des additions et des soustractions demandées, et peuvent généralement produire des représentations appropriées des fractions, procédant au besoin à des réductions des fractions, puisque les problèmes que les élèves devaient résoudre impliquaient des fractions et des nombres naturels comportant des facteurs communs, puisque les problèmes comportaient à l'occasion des fractions non réductibles, puisqu'enfin, certaines des fractions utilisées exigeaient, dans certains problèmes, le recours à des fractions équivalentes, il était à prévoir que les élèves E1, E3, E4, E5 et E7 pourraient s'engager dans des démarches plus adéquates de résolution des problèmes que ne pourraient le faire les autres élèves. Selon les données du tableau III, cette prédiction s'avère relativement confirmée, les élèves E3, E4, E5 et E7 parvenant, plus souvent que les autres, à résoudre correctement les problèmes proposés. L'élève E1 fait exception car il ne réussit aucun problème ; il est important de rappeler que cet élève ne pouvait, dans les tâches précédentes, produire aucune représentation adéquate des fractions. Il est important également de noter que seuls les élèves E4 et E7 peuvent produire, au moins à une occasion, une représentation adéquate des problèmes. Enfin, fait intéressant, les élèves E2 et E8, qui pourtant lors des tâches portant sur les calculs n'étaient pas parvenus à produire des représentations adéquates et à effectuer correctement les calculs, peuvent réussir à résoudre le problème #6. Or, dans ce problème, le nombre de parties composant le tout est donné et ce nombre est un multiple des dénominateurs des deux fractions de ce tout. Il est possible que cette situation soit plus familière à ces élèves que les autres.

3.3. Caractéristiques de l'épreuve présentée à la sortie de la séquence d'enseignement

L'épreuve présentée à la sortie, comme nous l'avons précisé au chapitre précédent, est composée de questions et de problèmes similaires à ceux que l'on retrouve dans les évaluations en usage dans notre institution scolaire. Elle inclut également quelques questions et problèmes que nous avons conçus dans le but de mieux cerner les bénéfices et les limites de notre dispositif d'enseignement. Comme nous l'avons mentionné antérieurement, deux des problèmes présentés à la sortie de la séquence comportent des contextes différents des problèmes isomorphes présentés à l'entrée dans la séquence.

3.3.1. Analyse des conduites des élèves à la sortie de la séquence

L'examen des conduites des élèves à chacune des tâches procède de manière similaire à celle que nous avons adoptée pour l'analyse des conduites à l'entrée dans la séquence. Notons toutefois que les interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves sont moins fréquentes que lors de l'épreuve présentée à l'entrée dans la séquence, les élèves étant maintenant familiers avec les types de tâches.

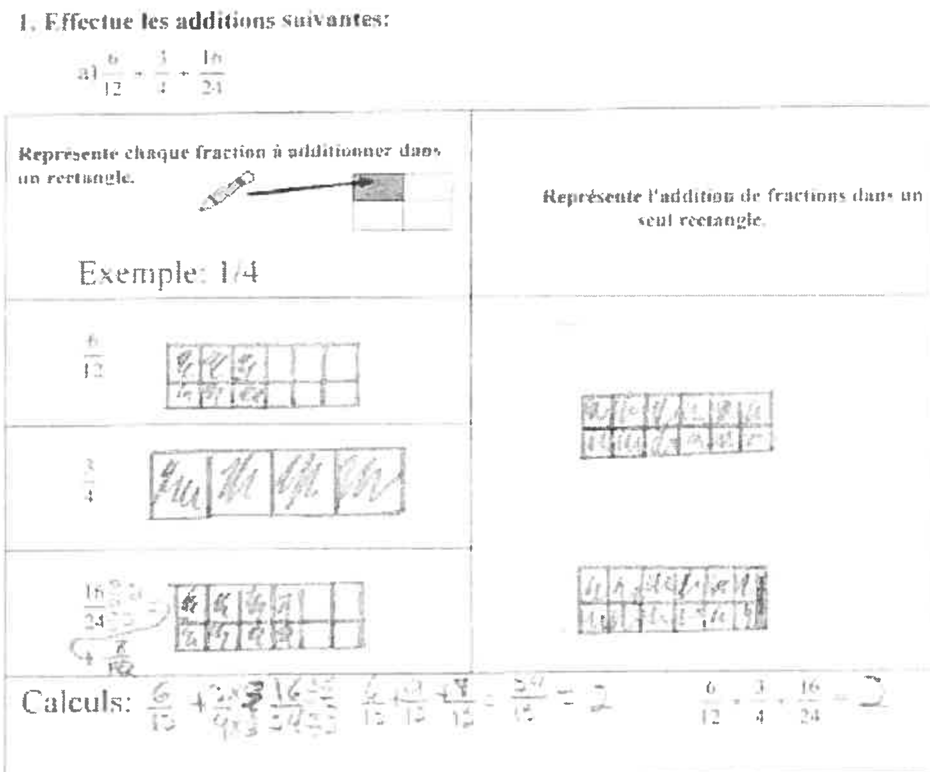
3.3.1.1. Addition de fractions

La première tâche comporte deux activités d'addition de fractions. Rappelons que, dans chacune de ces activités, il est demandé aux élèves de représenter, dans un rectangle, chacune des fractions à additionner, puis de représenter, également dans un rectangle, l'addition des fractions.

Dans la **première activité**, les fractions à additionner sont les suivantes : 6/12, 3/4 et 16/24. Les élèves E1 et E8 représentent chacune des fractions dans un rectangle, sans trouver de dénominateur commun et sans effectuer de réduction. La représentation de l'élève E1 s'avère tout même assez précise en ce qui a trait aux mesures utilisées (dimensions des rectangles et de chacune des parties). Ce dernier a sans doute utilisé sa règle pour tracer ses formes et arriver à un partage dont les proportions sont représentatives des fractions mentionnées dans le problème. En revanche, l'élève E8 sépare, de manière fort grossière, les trois rectangles réservés à la représentation de l'addition de fractions ; il se contente de respecter le nombre de parties correspondant aux différents dénominateurs. La représentation des numérateurs ressemble aussi à un gribouillage approximatif. Les autres élèves (E2, E3, E4, E5, E6 et E7) ont tous utilisé un dénominateur commun (pour au moins deux fractions) pour représenter de manière relativement précise les fractions ; seuls les élèves E5 et E6 se contentent d'un partage approximatif.

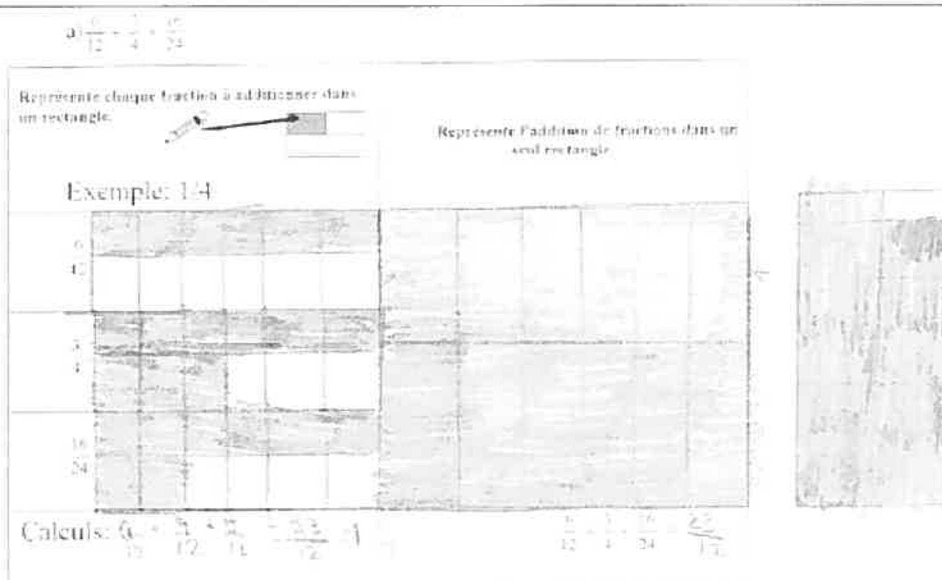
Les élèves E1, E2, E3, et E5 tentent de représenter l'addition de fractions à l'aide d'un ou de plusieurs rectangles, mais leur tentative est infructueuse. Leurs représentations sont trop approximatives et font abstraction des connaissances impliquées dans l'addition de fractions : réduction si possible des fractions, recherche d'un dénominateur commun. L'élève E4 représente de manière très précise le résultat de l'addition (il utilise deux rectangles plutôt qu'un seul). Malheureusement, ce dernier fait une erreur de calcul et obtient le résultat 24/12 au lieu de 23/12. Nous reproduisons le travail effectué par cet élève.

E4



L'élève E7 arrive au bon résultat (23/12) et l'évoque à l'aide de deux rectangles. Toutefois, son dessin est moins précis au niveau du partage et des dimensions que celui réalisé par l'élève E4. Les élèves E6 et E8 ne font aucune représentation de l'addition des fractions. Nous reproduisons la copie de l'élève E7.

E7



Les calculs d'addition de fractions produits par les élèves sont fort intéressants. En effet, sept des huit élèves ont su manipuler correctement les données pour arriver à un résultat significatif. Les élèves E2 et E5 utilisent un nombre fractionnaire pour représenter la somme obtenue, soit 1 et 11/12. L'élève E8 obtient la fraction 46/24, ce qui est une somme juste, mais cet élève ne procède pas à une réduction de cette fraction. L'élève E7 donne la même réponse, mais de manière réduite (23/12). Les élèves E3, E4 et E6 montrent de bonnes connaissances au niveau de l'addition des fractions. Les calculs et les traces qu'ils ont laissés montrent que la notion de "fractions équivalentes" est mise à profit dans l'addition de fractions. Malencontreusement, ces derniers font tous une erreur de calcul lorsqu'il s'agit d'additionner les numérateurs. Les élèves E3 et E6 obtiennent le résultat erroné suivant lorsqu'ils additionnent les trois numérateurs : 12/24 + 18/24 + 16/24 = 36/24. L'élève E4 fait l'erreur suivante : 6/12 + 9/12 + 8/12 = 24/12. Seul l'élève E1 est incapable de déployer un raisonnement mathématique adéquat pour résoudre le problème. Il se contente d'additionner les numérateurs et dénominateurs des fractions originales du problème.

Dans **la seconde activité,** les fractions à représenter et à additionner comportent des dénominateurs largement supérieurs aux dénominateurs généralement rencontrés par les élèves : 26/52 et 33/99. Représenter ces fractions, étant donné l'espace alloué, suppose une réduction de chacune de ces fractions. L'addition de ces fractions suppose également une réduction de ces fractions, autrement dit, l'application de connaissances sur les fractions équivalentes, notamment sur les sens partie-tout et rapport de la fraction. La question présentée aux élèves est reproduite à la page suivante.

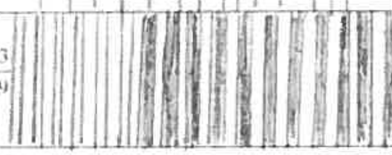
b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$

Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.  Exemple: 1/4	Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{26}{52}$	
$\frac{33}{99}$	
Calculs:	$\frac{26}{52} + \frac{33}{99} =$

La grande taille des chiffres qui composent les deux fractions de cet exercice, et le peu d'espace disponible pour représenter de si grands nombres, amènent plusieurs élèves à trouver une fraction réduite et équivalente à celle proposée. En effet, les élèves E1, E2, E3, E4, E5 et E6 réussissent à réduire au moins une des deux fractions proposées. La représentation est parfois approximative ou incomplète, mais laisse entendre qu'une réduction semblait tout à fait logique pour ces élèves. L'élève E8 n'effectue aucune réduction de fraction et la représentation est fort approximative. Enfin, l'élève E7 ne produit aucune représentation. Voici une numérisation de trois représentations significatives :

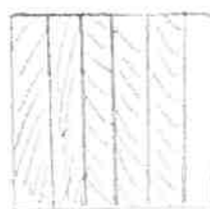
E1

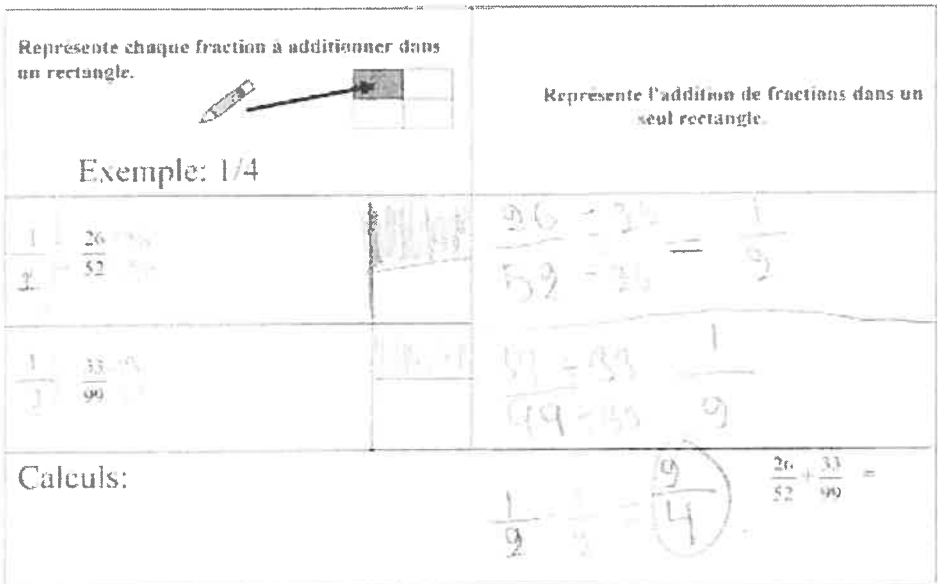
b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$

Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle. Exemple: 1/4	Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{13}{26} < \frac{26}{52}$  $\frac{11}{33} < \frac{33}{99}$ 	
Calculs: $\frac{26}{52} + \frac{33}{99} = \frac{24}{60}$	

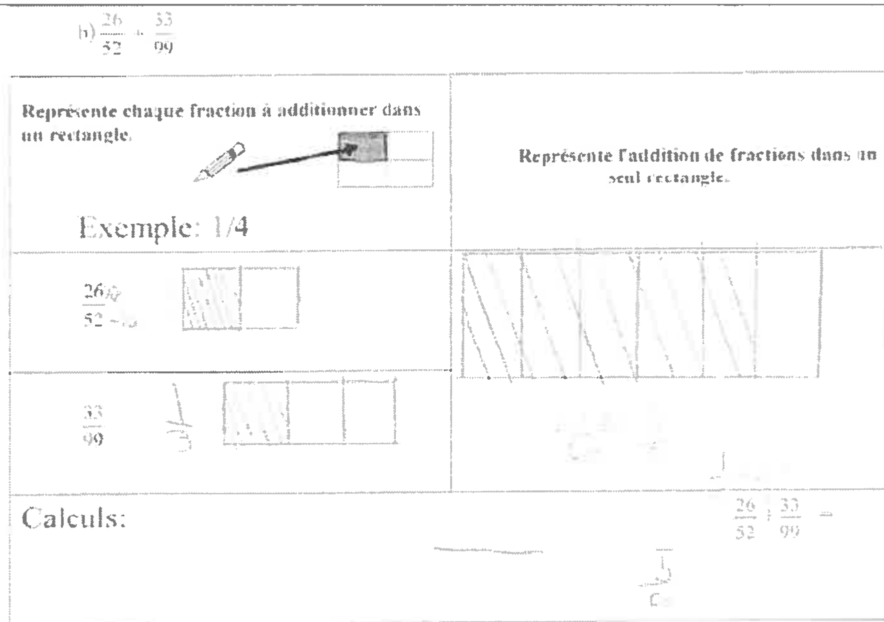
E2

b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$

Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle. Exemple: 1/4	Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{26}{52}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{33}{99}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{1}{3}$ 	
Calculs: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6}$ $\frac{5}{6}$	$\frac{26}{52} + \frac{33}{99} =$

E6	b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$ 

La représentation graphique de l'addition des fractions s'avère fort difficile pour tous les élèves. Parmi ceux qui ne font aucune tentative d'illustration, on retrouve les élèves E4, E5, E6, E7 et E8. Les élèves E2 et E3 (voir la reproduction de l'élève E3 sur la page suivante) arrivent à représenter correctement l'addition de fractions. L'élève E1 propose une représentation, mais cette dernière est basée sur une addition erronée des deux fractions, soit l'addition des numérateurs et des dénominateurs.

E3	

Les élèves E5, E7 et E8 ne procèdent à aucun calcul d'addition des fractions. Les élèves E2 et E3 opèrent bien sur les fractions et arrivent au bon résultat, c'est-à-dire 5/6. Il est à noter que ce sont ces deux élèves qui offrent une représentation adéquate, tant au niveau des fractions elles-mêmes que de l'addition des fractions. L'élève E1 additionne une fois de plus les numérateurs et les dénominateurs pour obtenir 24/60. L'élève E6 arrive à réduire la fraction 26/52 à 1/2. Un peu plus loin dans sa démarche, il propose la même fraction pour réduire 33/99 (33/99 = 1/2). Évidemment, cette réduction erronée aura un impact sur le reste de sa démarche. Son résultat sera 2/4. L'élève E4 commence son calcul en réduisant les deux fractions (26/52 et 33/99). Il utilise l'algorithme usuel (algorithme souvent appelé « méthode par crochet ») pour effectuer la division suivante : 26 ÷ 2 = 13. Il poursuit avec 52 ÷ 2 = 26 et 99 ÷ 3 = 33. Dans l'espace dédié au calcul, il met côte à côte les fractions 13/26 et 11/33 séparées par un symbole d'addition. Par contre, il ne laisse aucune trace de sa réponse finale. Enfin, un seul élève, soit l'élève E3, requiert notre assistance durant la réalisation de cette tâche. Nous reproduisons des extraits des interactions que nous avons eues avec cet élève. Si ces interactions sont fructueuses, elles montrent bien l'orientation des questions de l'enseignant-chercheur vers la réduction de la fraction.

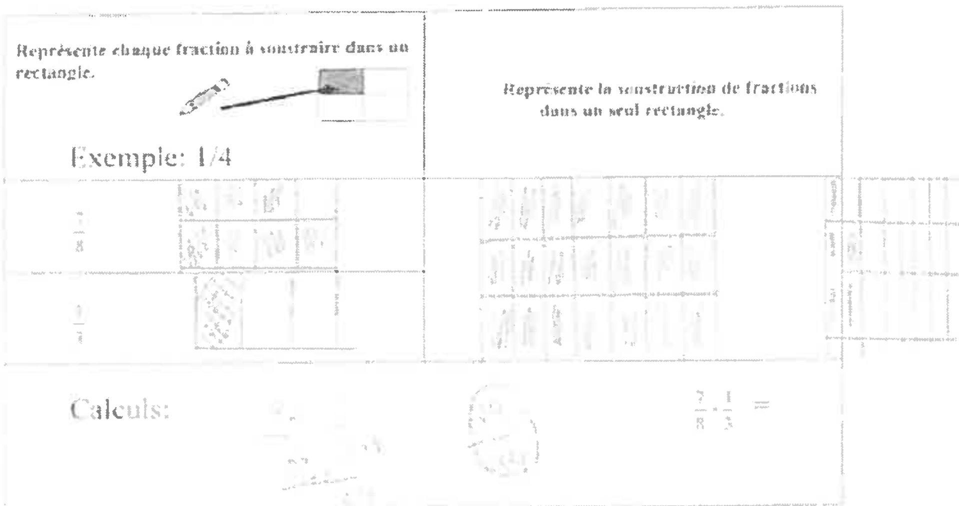
Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E3 : question #1 b)
Élève E3
E3 – Moi, j'ai de la misère mettons, je ne sais pas comment faire 26 affaires de même. À cause que la moitié de 52 c'est 26 faque j'ai divisé par 26 et là, il faut que je fasse 26 dans l'affaire (référence au rectangle) et ça ne rentre pas. EC – Ici, tu as divisé par 26 et ici, tu as divisé par 26. Il y a combien de 26 dans 26 ? E3 – 1, ça fait 1/26. EC – 1 et combien qu'il y a de 52 dans 26 ? Combien qu'il y a de 26 dans 52 ? E3 – 2. E3 – Ah oui, ça fait une demie !

3.3.1.2. Soustraction de fractions

La seconde tâche comporte deux activités. Dans chacune d'elles, l'élève est invité à représenter chacune des fractions, puis à représenter la soustraction de ces fractions. Il doit ensuite effectuer la soustraction de ces mêmes fractions.

Dans **la première activité**, la soustraction à effectuer est la suivante : 7/8 – 1/3. Les élèves E2, E3 et E4 proposent une représentation précise, mais indépendante, de chacune des fractions. L'élève E5 trouve 48 comme dénominateur commun des deux fractions, mais a de la difficulté à multiplier correctement le numérateur de la fraction 7/8. Il obtient 35/48 au lieu de 42/48 (il a probablement fait 7 x 5 = 35). Puisque représenter un rectangle séparé en 48 parties égales s'avère assez difficile, l'élève offre un croquis très vague pour les deux fractions. Les élèves E1, E6 et E8 fournissent une représentation approximative des fractions et ce, sans trouver un dénominateur commun. Enfin, l'élève E7 utilise le dénominateur commun des fractions, soit 24, pour construire sa représentation, mais celle-ci est peu précise. Nous reproduisons les conduites des élèves E2, E5 et E6, conduites représentatives de l'ensemble des conduites.

E2



2. Effectue les soustractions suivantes:

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

Exemple: 1/4

Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.

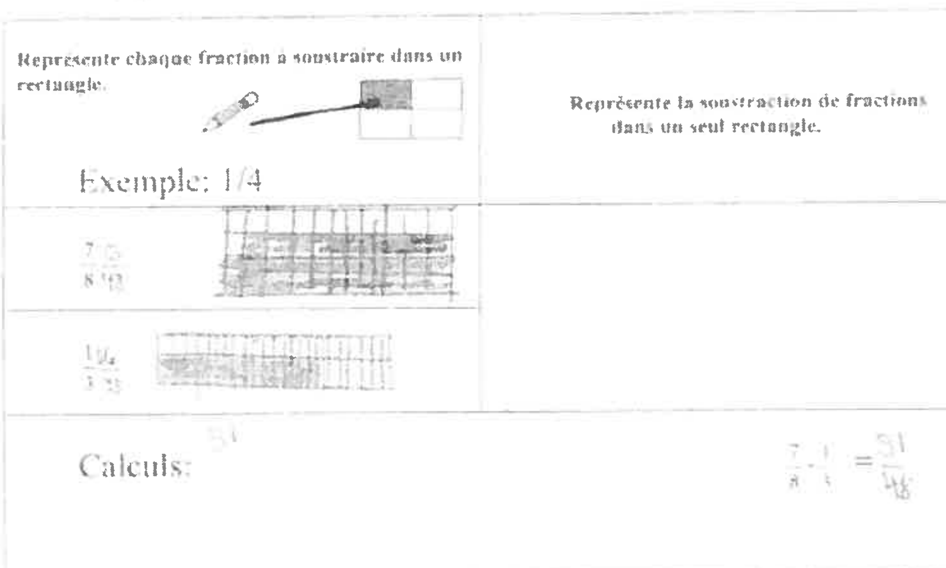
$\frac{7}{8}$

$\frac{1}{3}$

Calculs:

$\frac{7}{8} - \frac{1}{3} =$

E5



2. Effectue les soustractions suivantes:

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

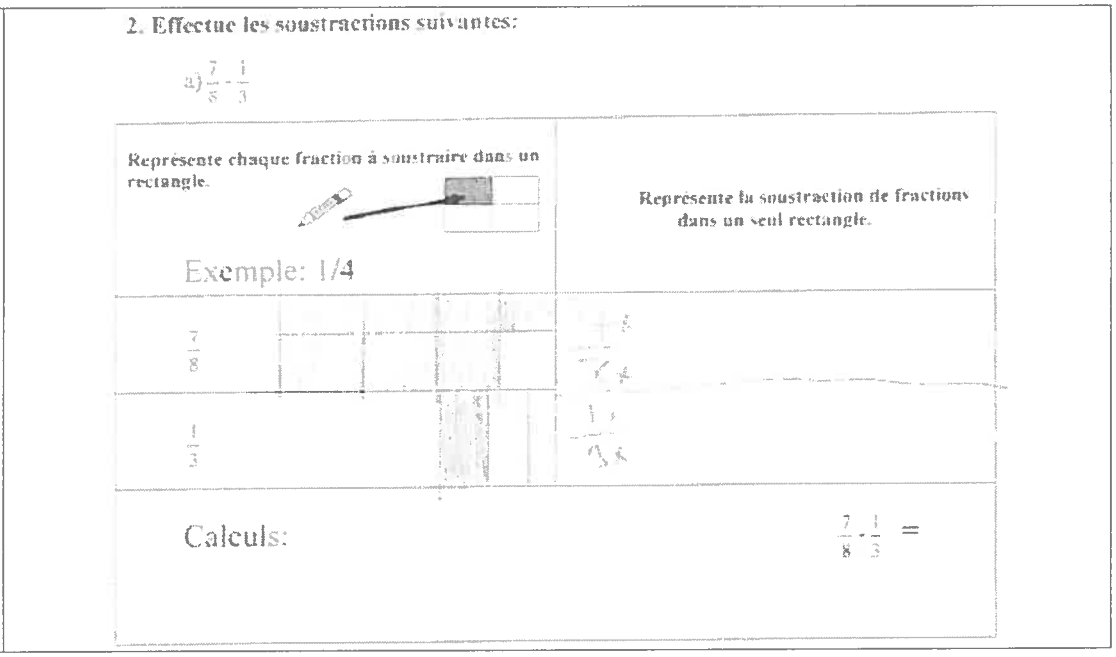
Exemple: 1/4

Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.

Calculs:

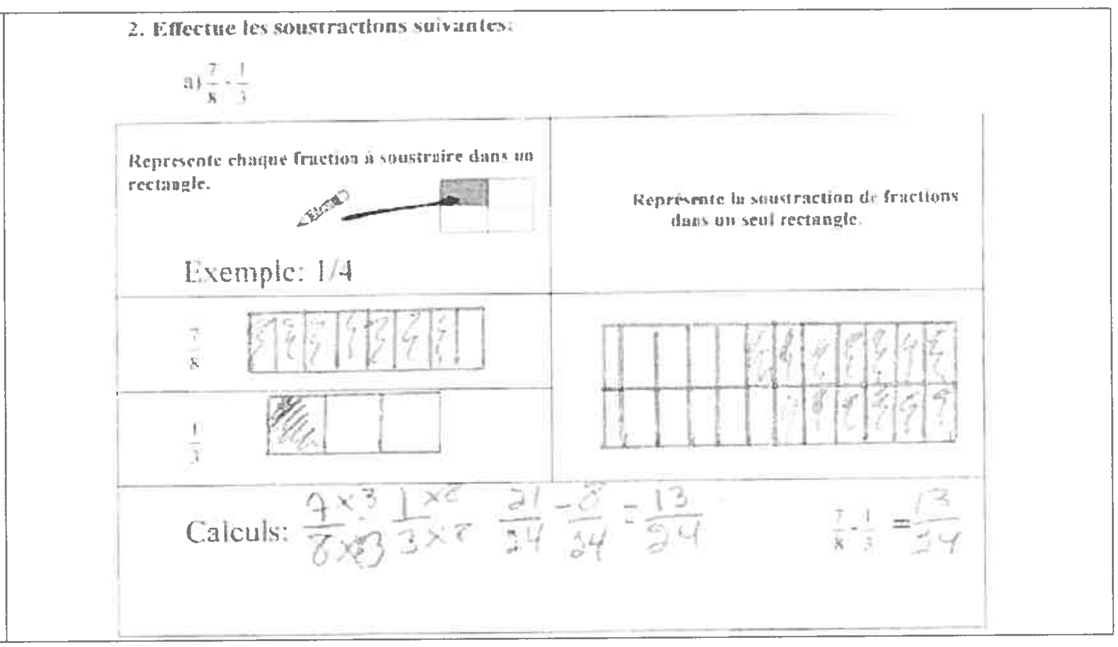
$\frac{7}{8} - \frac{1}{3} = \frac{31}{48}$

E6



Les élèves E4 et E7 sont les seuls en mesure de représenter correctement la soustraction des fractions dans un seul rectangle. Leur représentation respective est juste et précise. Il est à noter que ces deux élèves arrivent au bon résultat lorsque vient le temps de calculer la réponse de la soustraction. Voici une reproduction du travail de l'élève E4 ; il est intéressant de noter que cet élève distingue les représentations de chacune des fractions de celle de la soustraction impliquant ces fractions.

E4



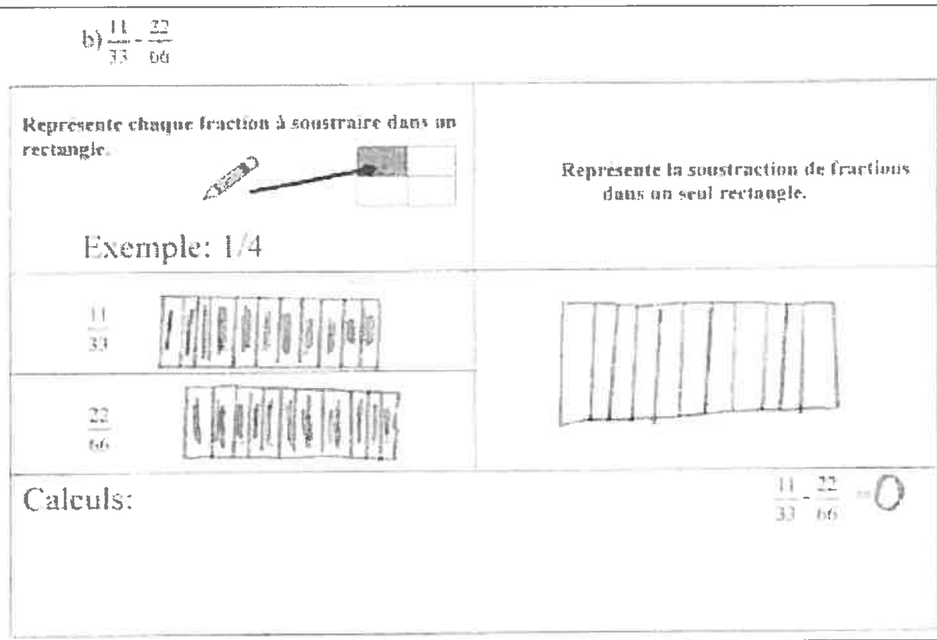
L'élève E2 se serait retrouvé dans la même catégorie que les élèves précédents si seulement il avait soustrait les deux fractions au lieu de les additionner. Les élèves E3, E5, E6 et E8 ne proposent aucune représentation de la soustraction des fractions. L'élève E1 tente une représentation, mais cette dernière est imprécise et non significative.

Quatre élèves sur huit (E3, E4, E7 et E8) parviennent à effectuer correctement la soustraction des fractions. L'élève E2 laisse des traces d'une démarche sans erreur, sauf pour l'addition (au lieu de la soustraction) des numérateurs à la dernière étape (21/24 + 8/24 = 29/24). Les élèves E1 et E5 additionnent directement les numérateurs et dénominateurs et donnent évidemment une réponse erronée. L'élève E6 n'effectue aucun calcul et ne soumet aucune réponse finale.

Dans **la seconde activité**, la soustraction à effectuer est la suivante : 11/33 – 22/66. Ces deux fractions correspondent à la fraction irréductible 1/3.

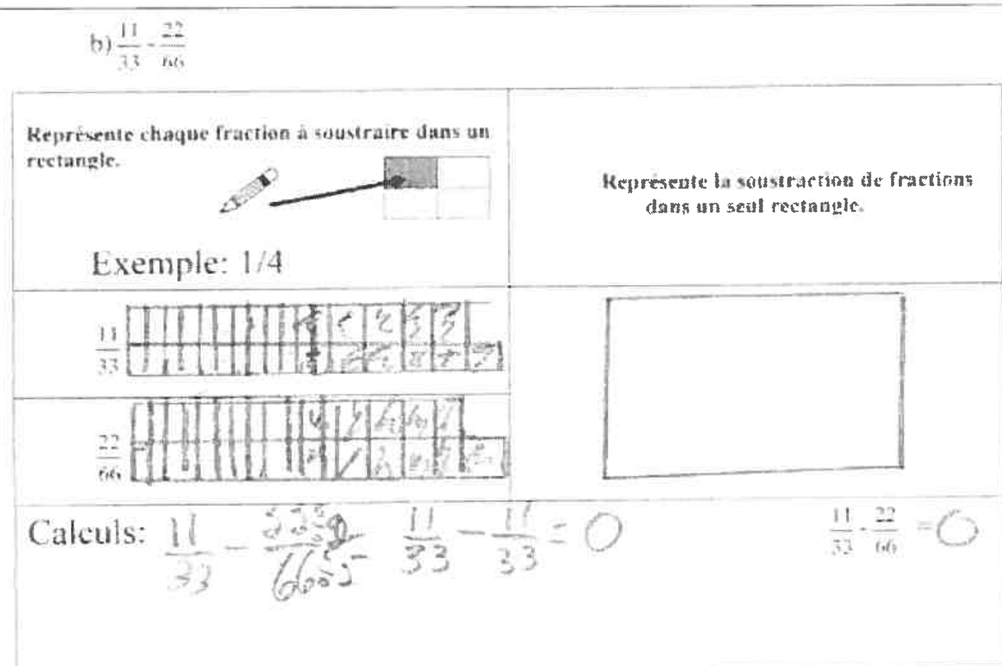
Seul l'élève E8 ne produit aucune représentation des fractions. La représentation de l'élève E1 est difficilement interprétable. Pour représenter chacune des fractions, comme le montre la reproduction de la page suivante, cet élève dessine un rectangle dans l'espace réservé à cet effet ; ce rectangle est grossièrement divisé en onze parties plus ou moins égales. Chacune de ces parties est hachurée comme si l'élève voulait représenter la totalité du rectangle (11/11), ou encore, comme s'il voulait déjà montrer que la différence est nulle.

E1



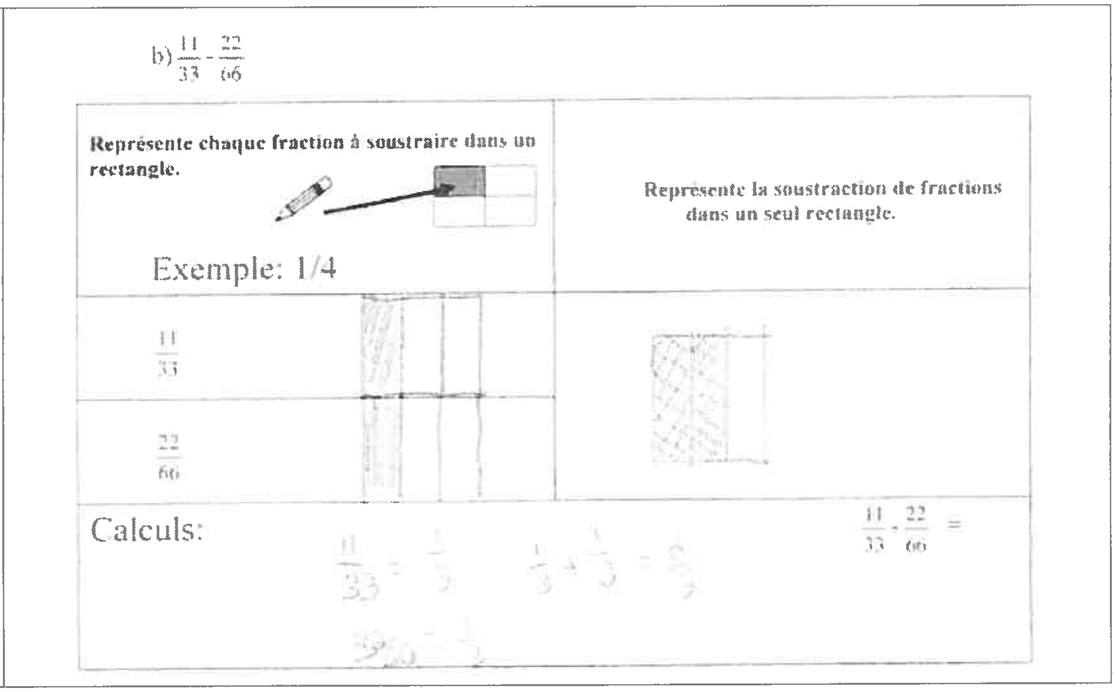
L'élève E4 arrive à réduire la fraction 22/66 à 11/33 et représente les deux fractions en divisant un rectangle (avec trois carreaux supplémentaires pour arriver à 33 morceaux) en 33 et en hachurant 11 sections.

E4



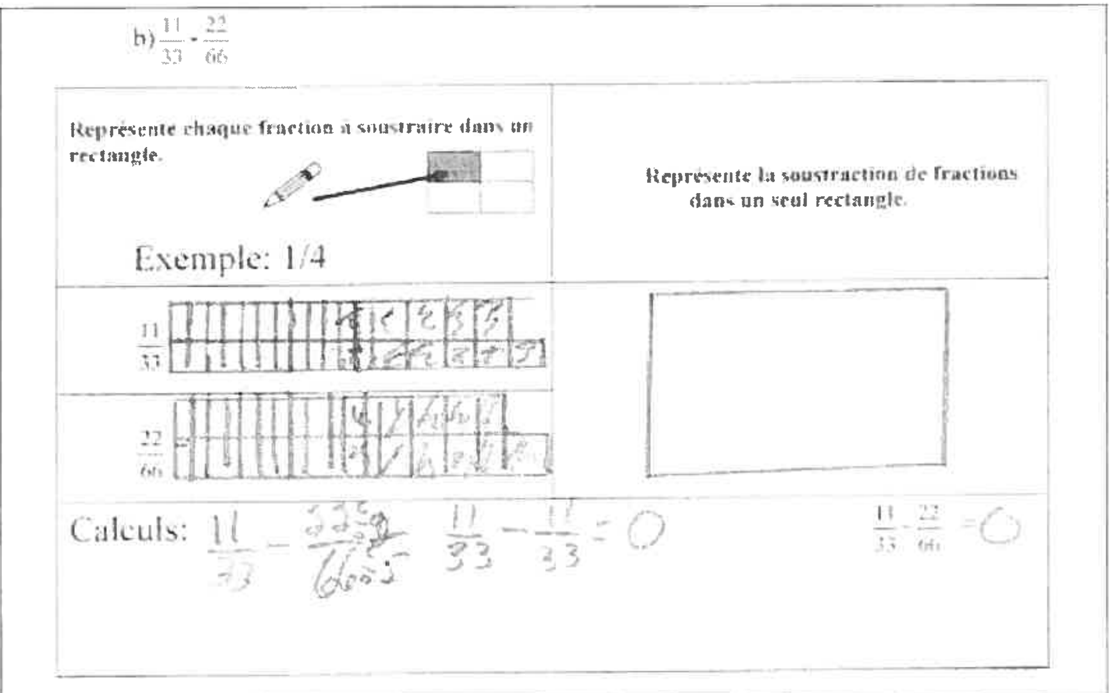
Les élèves E5, E6 et E7 arrivent tous à réduire complètement ou partiellement les fractions, mais leur représentation est très imprécise ou incomplète. L'élève E8 ne fait aucune représentation des fractions. Enfin, les élèves E2 et E3 parviennent à représenter les deux fractions réduites à leurs plus simples expressions (1/3) et ce de manière précise. Voici une reproduction du travail de l'élève E2 :

E2



Les élèves E5 et E6 ne produisent aucune représentation. Les élèves E1, E7 et E8 tentent d'offrir une représentation de la soustraction des fractions. Malheureusement, ils sont incapables d'arriver à un résultat satisfaisant. Les trois représentations sont non significatives et manquent définitivement de rigueur au niveau de la précision. L'élève E3 utilise deux rectangles représentant chacun 1/3. **Les deux rectangles sont côte à côte et au centre, on peut apercevoir un signe de so**ustraction (-) et la fraction 0/3 quelques centimètres plus bas. Comme le montre la reproduction de sa représentation (p. 137), l'élève E4 dessine un grand rectangle vide. Le vide veut sans doute signifier le résultat de la soustraction de deux fractions ayant la même valeur (1/3 - 1/3 = 0).

E4



Malgré plusieurs difficultés à représenter, soit chacune des fractions, soit la soustraction des fractions par un dessin, plusieurs élèves arrivent tout de même à obtenir un résultat significatif lorsque vient le temps d'effectuer la soustraction des fractions. Les élèves E1 et E5 écrivent 0 sur leurs copies respectives, mais ne laissent aucune trace de calcul. L'élève E2 fait la même erreur qu'au numéro précédent, c'est-à-dire qu'il effectue une addition au lieu d'une soustraction. L'élève E3 laisse peu de traces de sa démarche ; il effectue seulement deux divisions pour réduire les fractions. En revanche, ces représentations graphiques adéquates de la soustraction montrent que sa réponse finale (0/3) est basée sur une compréhension de la situation mathématique. Sans réduire complètement les deux fractions, l'élève E4 parvient tout de même au bon résultat en soustrayant les fractions de la manière suivante : 11/33 – 11/33 = 0. Il en va de même pour les élèves E8, E7 et E6.

3.3.1.3. Multiplication de fractions

La troisième tâche comporte deux activités. Dans chacune d'elles, il est demandé aux élèves de représenter dans un seul rectangle la multiplication des fractions, puis d'effectuer cette multiplication. Les multiplications proposées sont les suivantes : a) 15/16 x 11/12 ; b) 3/15 x 9/10.

3. Effectue la multiplication suivante :

a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.

Calculs :

$\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

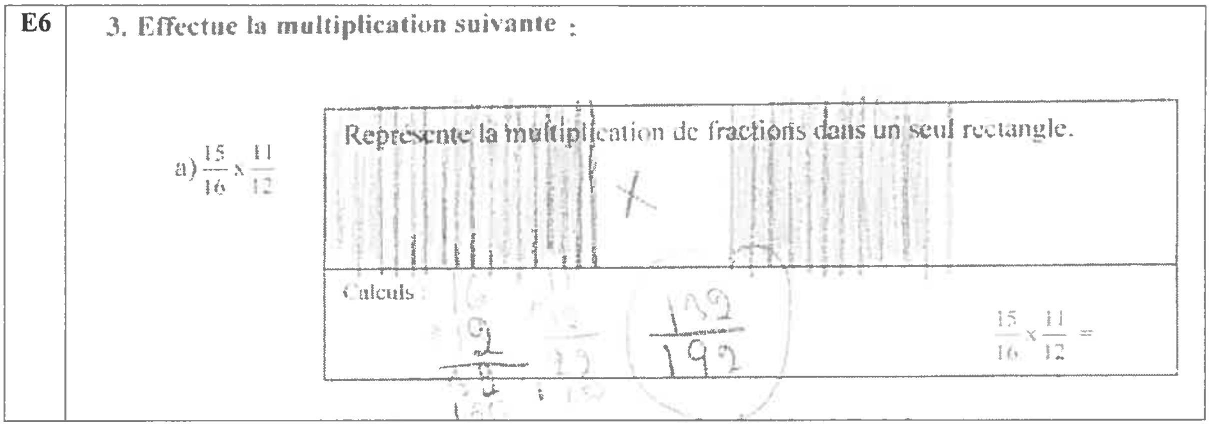
b) $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.

Calculs :

$\frac{3}{15} \times \frac{9}{10} =$

Représenter les multiplications de fractions s'avère une tâche difficile pour l'ensemble des élèves. Les élèves E2, E3 et E7 ne proposent aucune représentation graphique de la multiplication des fractions 15/16 et 11/12. Les autres élèves (E1, E4, E5, E6 et E8) produisent des représentations non satisfaisantes et imprécises. Les conduites lors de la représentation de la seconde multiplication, soit celle des fractions 3/15 et 9/10, sont fort comparables. Nous choisissons de reproduire, à la page suivante, la représentation proposée par l'élève E6 qui illustre bien les difficultés liées à la représentation de la multiplication de fractions.


E6

3. Effectue la multiplication suivante :

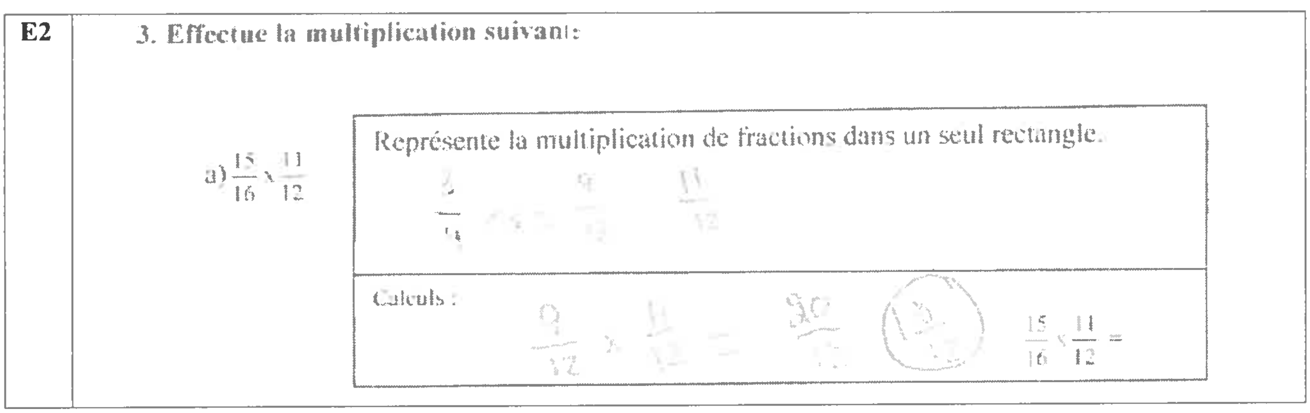
a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.

Calculs :

$\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

Les difficultés des élèves sont également fort importantes dans les calculs de multiplication des fractions. En effet, seul l'élève E3 parvient à effectuer correctement la multiplication des fractions 15/16 et 11/12. Les élèves E4 et E7 effectuent une erreur de calcul, mais ont recours à une démarche adéquate. Les erreurs commises par les autres élèves témoignent de rapports forts problématiques à la multiplication de fractions. L'élève E8 effectue un produit croisé et les élèves E1 et E2 se contentent de représenter les fractions sur un même dénominateur. Enfin, la multiplication des fractions 3/15 et 9/10 donne lieu à des conduites similaires. Seuls les élèves E3 et E7 parviennent à effectuer correctement cette multiplication. Nous reproduisons les conduites de deux élèves, soit les élèves E2 et E3, conduites représentatives des conduites fréquemment observées.


E2

3. Effectue la multiplication suivant:

a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.

Calculs :

$\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

E3	3. Effectue la multiplication suivante ? : a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$ Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle. Calculs : $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

Les difficultés rencontrées par plusieurs élèves dans la représentation de la multiplication de fractions se sont traduites par quelques demandes. Nous reproduisons ci-dessous quelques extraits des échanges avec les élèves E3 et E5. Comme le montrent ces échanges, les interventions de l'enseignant-chercheur permettent aux élèves de faire un retour sur la représentation de la multiplication de fractions, mais aucun de ces élèves ne parvient à produire une représentation. Il est possible toutefois que ces interventions aient eu un effet sur le calcul effectué, puisque l'élève E3 parvient à effectuer correctement ce calcul.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E5 et E6 : question #3
Élève E5
EC – (À *E5*) Tu es rendu au numéro 3 pour les multiplications. Tu vas venir avec moi et tu vas t'installer à un des ordinateurs. Il va y avoir une multiplication. Au lieu d'avoir 15/16 et 11/12, ça va être 1/4 et 2/3. L'animation va te montrer exactement comment dessiner ça et comment trouver la réponse. Tu vas le regarder et après, tu vas essayer de le faire avec des fractions différentes.   E5 – Ok.   EC – Tu vois ici E5, on dit que 1/4 x 2/3 peut se lire, dans notre tête on peut dire…   E5 – De   EC – 1/4 de 2/3. Ici, ma multiplication se transforme en "De". Comment ils font pour représenter ça dans un rectangle ? Regarde bien ce qu'ils font. Le 3 du 2/3 se transforme en un rectangle séparé en 3. Alors ton 3 se trouverait à être lequel de tes nombres?   E5 – Se trouverait à être le 12.   EC – Fais la même chose. Mais au lieu d'avoir un 3, tu vas avoir un 12. Ici, ce que je veux que tu fasses, c'est que tu essaies de faire la même technique qu'on fait avec 1/4 et 2/3 mais avec 15/16 et 11/12. Là, tu as un, comment on appelle ça le chiffre du haut ? Ça c'est ton numérateur et ça c'est ton…   E5 – Dénominateur. Numérateur, dénominateur.   EC – Qu'est-ce qu'ils font en premier ?

E5 – Ils prennent le dénominateur et ils font un rectangle. C'est lequel des nombres ici qui correspondait au 3 ? E5 – C'est le 12. EC – C'est lequel qui est à la même place ? C'est le 12. Ici, on a fait un rectangle qui est séparé en… E5 – 12 ? EC – En 3. Toi, tu veux le séparer en… E5 – Ok, c'est ça, en 12. C'est ce que je vais faire….
Élève E6
E6 – Je ne sais pas ici comment les faire en rectangle. EC – Pour représenter la multiplication en rectangle ? E6 – Oui. EC – Je te laisse quelque secondes pour regarder l'animation. Regarde comment ils font ici avec les fractions pour les mettre dans un rectangle. Ils disent que 1/4 X 2/3, c'est la même chose que si dans notre tête on se dit 1/4… E6 – De. EC – De 2/3. Toi, c'est 15/16 de 11/12. E6 – Ok. EC – Essaie de faire les mêmes étapes avec les fractions de ton problème

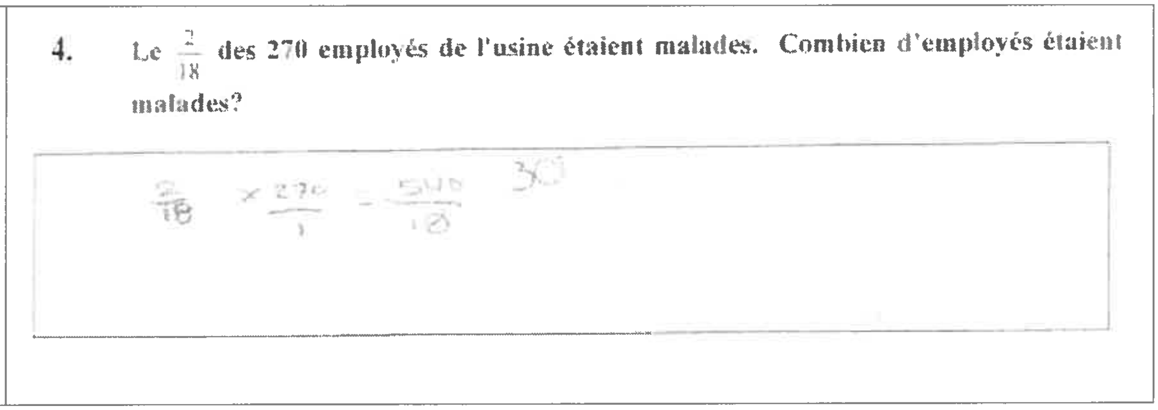
3.3.1.4. Résolution du problème #4

La quatrième tâche met l'élève face à une situation de résolution d'un problème multiplicatif ne comportant qu'un seul espace de mesures. Il s'agit du même problème présenté aux élèves à l'entrée dans la séquence. Seule la situation est légèrement modifiée pour éviter de laisser l'impression aux élèves qu'ils répondent deux fois à la même question. Ils doivent donc trouver le nombre d'employés malades dans une usine à partir de données sous forme de fractions. La question amène l'élève à trouver les 2/18 de 270. Voici l'énoncé du problème :

Problème #4 : Le 2/18 des 270 employés de l'usine étaient malades. Combien d'employés étaient malades ?

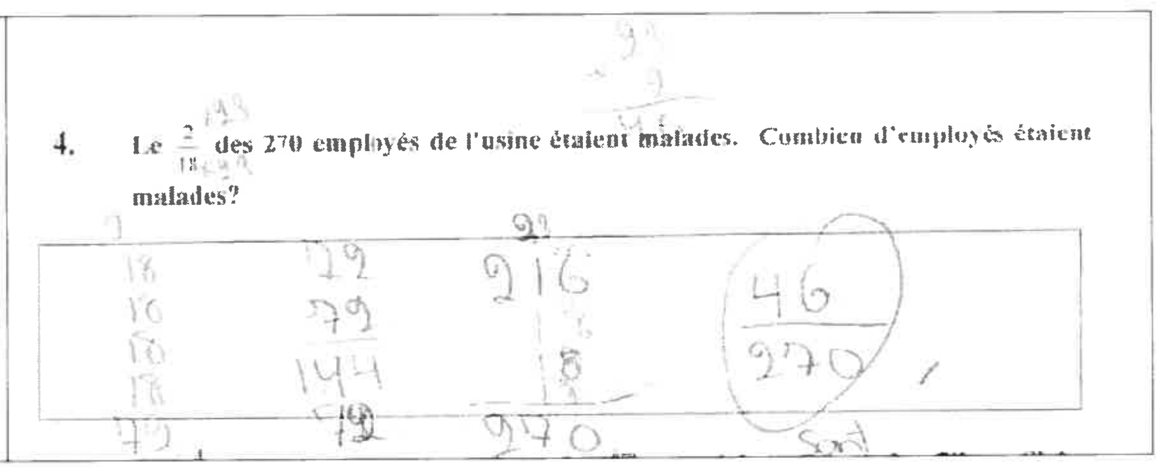
Malgré un grand espace pour répondre, aucun des élèves ne juge nécessaire d'utiliser une représentation graphique pour résoudre le problème ou de réduire la fraction 2/18 afin de travailler avec 1/9. Les élèves E2, E3, E4, E5, et E7 sont tous arrivés au bon résultat en opérant correctement sur les fractions. La démarche de l'élève E7, à la page suivante, est représentative de la technique employée par ces élèves.

E7



L'élève E8 applique un bon raisonnement en divisant 270 par 18 pour ensuite doubler sa réponse. Malheureusement pour lui, le résultat de sa division est erroné (270/18 = 17). Sa réponse finale est donc 34. Une erreur du même type est observée chez l'élève E1. Ce dernier montre une bonne connaissance des règles de la multiplication de fractions. Il termine sa démarche avec 540/18 = 35 alors que le résultat attendu est évidemment 30. La démarche de l'élève E6 est difficile à interpréter. Il semble vouloir trouver une fraction équivalente à 2/18, en cherchant par quel nombre il doit multiplier 18 pour obtenir 270. Il nous semble produire une erreur dans le calcul du nombre de fois que le nombre 18 a été ajouté pour obtenir 270 ; il aurait dû trouver non pas 23, mais bien 15. Il est possible qu'il compte 2 fois le même « 18 », obtenant alors 20 fois 18, puis 3 autres fois 18. Cette approche est similaire à celle qu'il avait utilisée à l'entrée. Enfin, il se contente de produire une fraction qu'il juge équivalente à 2/18. Nous reproduisons la solution de cet élève.

E6



Un seul élève, soit l'élève E7, réclame l'aide de l'enseignant-chercheur durant la résolution de ce problème. Comme le montrent les extraits suivants des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève, cet élève voit mal comment il pourrait utiliser un dessin pour représenter le nombre de personnes ; le recours à une représentation similaire à celles utilisées dans les tâches précédentes est source de problème. Est-ce parce qu'il ne peut concevoir que l'on utilise des parties d'une figure pour représenter des personnes, des « touts » ?

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E7 : problème #4
Élève E7
E7 – Faut tu que je dessine une fraction ou le nombre ? EC – Pour la réponse ? E7 – Oui. EC – Tu peux t'aider d'un dessin pour résoudre le problème. Relis le problème avec moi et dis-moi ce qu'ils demandent exactement ; ce que tu dois trouver. E7 (Relis la question en chuchotant) – …trouver combien de personnes qui étaient malades. Ça peut pas être une fraction parce que c'est des personnes qui étaient malades. EC – Tu ne peux pas dire genre qu'il y a une personne et demie qui était malade. Faut vraiment le nombre de personnes qu'il y avait. E7 – Faut que je le simplifie ? EC – Si tu penses que c'est nécessaire. E7 – Ok.

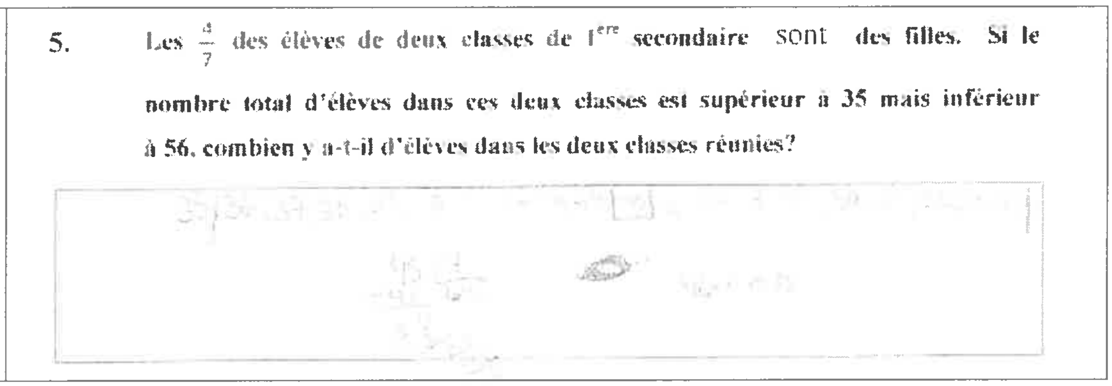
3.3.1.5. Résolution du problème #5

La cinquième tâche met en situation deux classes d'une même école. La fraction 4/7 représente le nombre d'élèves « filles » dans les deux classes réunies. Il faut déterminer le nombre d'élèves total d'élèves faisant partie de ces deux classes. On sait que le nombre d'élèves est supérieur à 35 et inférieur à 56. Comme nous l'avons indiqué précédemment, ce problème implique la notion de fractions équivalentes. La fraction équivalente recherchée doit avoir un dénominateur supérieur à 35 mais inférieur à 56. Voici l'énoncé de ce problème :

Problème #5 : Les 4/7 des élèves de deux classes de 1ère secondaire sont des filles. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y-a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies ?

Sur les huit élèves ayant résolu ce problème, seulement deux élèves, soit les élèves E2 et E6, ont recours à une représentation graphique ; ces représentations ne sont toutefois pas satisfaisantes. Ainsi, comme le montrent les conduites que nous reproduisons plus bas, l'élève E2 ne réalise pas vraiment un dessin, mais utilise plutôt une série de nombres qu'il dispose sur une ligne droite. Cette suite débute à 35 pour se terminer à 56. Au centre de la liste, le nombre 45 est encadré. Le seul indice nous permettant de justifier le choix de ce nombre est qu'il se trouve au centre le la série. Par la suite, il essaie de diviser ce nombre par le dénominateur, en l'occurrence le nombre 7. S'apercevant que le quotient est un nombre à virgule, il abandonne et choisit 46 comme réponse finale.

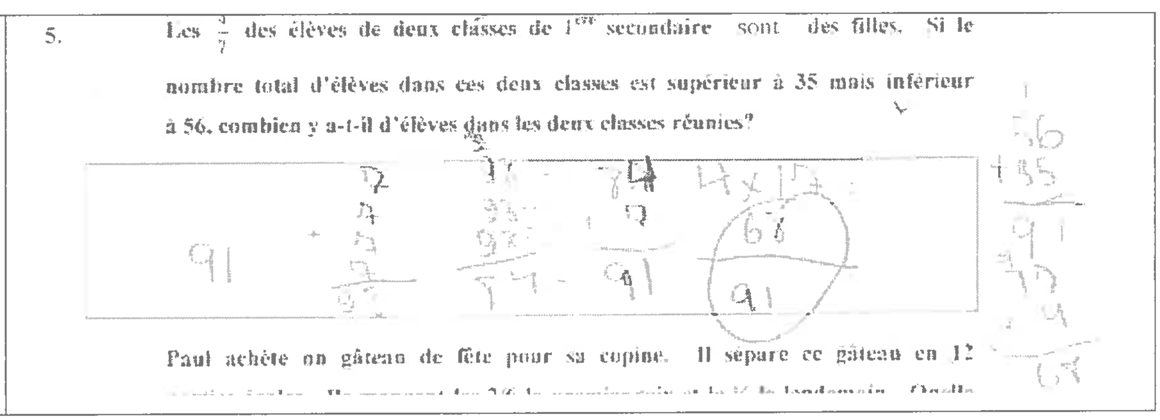
E2



5. Les $\frac{4}{7}$ des élèves de deux classes de 1[ère] secondaire sont des filles. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies?

Comme le montre la solution de l'élève E6 que nous reproduisons ci-dessous, cet élève effectue une série d'additions pour finalement multiplier 4 par 7 et donner 68/91 comme réponse. Cette conduite rappelle celle qu'il a adoptée pour résoudre le problème précédent.

E6



5. Les $\frac{4}{7}$ des élèves de deux classes de 1[ère] secondaire sont des filles. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies?

Paul achète un gâteau de fête pour sa copine. Il sépare ce gâteau en 12

Pour ce qui est des autres élèves, seul l'élève E5 réussit à obtenir une réponse sensée. Il inscrit tout simplement 7 x 6 = 42. Il semble vouloir diviser le 42 par le numérateur de la fraction (4). Tout porte à croire qu'il a trouvé sa démarche un peu trop courte et a ressenti le besoin de continuer à opérer sur le nombre 42. De son côté, l'élève E1 additionne les nombres 35 et 56 provenant du problème (35 + 56 = 91). Il calcule ensuite 4/7 x 91/1. Sa réponse finale est le nombre fractionnaire 6 et 1/7.

L'élève E3 commence par soustraire 56 et 35 pour obtenir 21. La différence entre ces nombres est associée au nombre total d'élèves dans les classes. Il multiplie ainsi la fraction 4/7 par 3 et inscrit 12/21 à côté de son calcul. Considérant que, parmi les 21 élèves, on compte 12 filles, il détermine alors le nombre de garçons en effectuant la soustraction suivante : 21 – 12. Il indique 9 personnes comme réponse finale.

L'élève E4 additionne 35 et le dénominateur de la fraction (35 + 7 = 42). Il multiplie ensuite 7 et 42 et donne 294 élèves en guise de réponse finale. L'élève E7 ne répond pas à la question. Enfin, l'élève E8 multiplie 7 par 7 obtient 49 et double sa réponse (réponse finale = 98 élèves).

Durant la réalisation de ce problème, les élèves E6 et E7 ont requis l'assistance de l'enseignant-chercheur. Comme le montrent les extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et ces élèves, ces élèves éprouvent des difficultés à interpréter les informations concernant l'intervalle définissant le nombre possible d'élèves dans les deux classes. L'enseignant-chercheur procède alors à une interprétation de cette information, ce qui n'entraîne pas, comme nous l'avons vu précédemment, une réussite lors de la résolution du problème.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E6 et E7 : problème #5
Élève E6
E6 – Je ne comprends pas cette question-là. EC – Ici, il y a des élèves. Tu sais que dans notre école, dans les classes, il y a des gars et des filles mélangés. E6 – Oui. EC – 4/7 des élèves de deux classes ensemble par exemple, ta classe, la classe de Cathy

et la classe de Stéphane à côté, le 4/7 de tous ces élèves-là sont des filles. Mais attention, ce que je veux savoir, c'est qu'avec 4/7 qui sont des filles, combien il y a d'élèves en tout dans les deux classes si quand tu additionnes les deux classes, il y a entre 35 et 56 élèves. Ça veut dire qu'il ne peut pas y avoir plus que 56 élèves quand tu additionnes les deux classes mais il ne peut pas y en avoir moins que 35 non plus. E6 – Je vais essayer quelque chose.
Élève E7
E7 – Je ne comprends pas. EC – Ici, tu as 4/7 des élèves de deux classes de 1ère secondaire qui sont des filles. Ça, c'est une fraction. Dans les deux classes, il y en a 4 sur 7 qui sont des filles. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35. Ça veut dire que si tu comptes les deux classes ensemble, il y a plus que 35 élèves, mais il y en a moins que 56. Combien qu'il y a d'élèves dans les deux classes ensemble ? Tu peux faire un dessin ou essayer de le représenter avec un calcul. Si tu essaie et que tu n'es pas capable, passe aux questions 7 et 8 et revient après. E7 – On peut tu prendre n'importe quel chiffre entre 56 et 35 ? EC – N'importe quel chiffre entre 35 et 56. E7 – Ok.

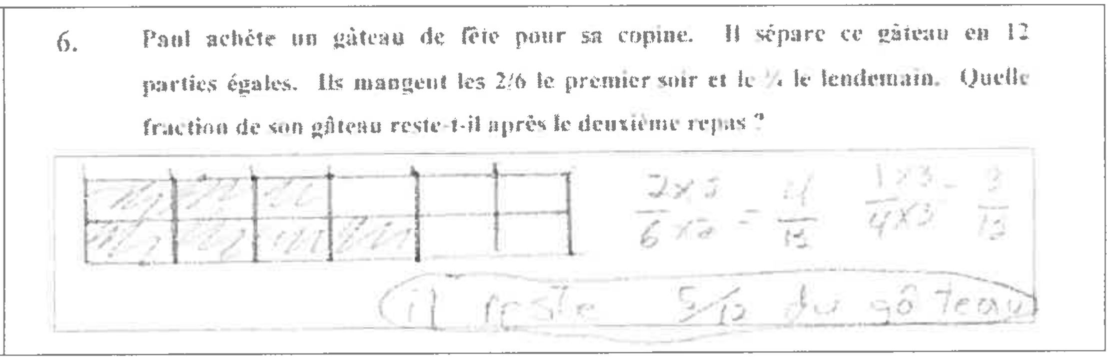
3.3.1.6. Résolution du problème #6

Le problème #6 qui est présenté aux élèves implique une transformation de mesures. Les élèves doivent d'abord trouver la fraction d'un gâteau qui a été mangé en additionnant deux fractions (2/6 et 1/4). Le gâteau est séparé en 12 morceaux de même taille.

Problème #6 : Paul achète un gâteau de fête pour sa copine. Il sépare ce gâteau en 12 parties égales. Ils en mangent les 2/6 le premier soir et le 1/4 le lendemain. Quelle fraction de son gâteau reste-t-il après sont deuxième repas ?

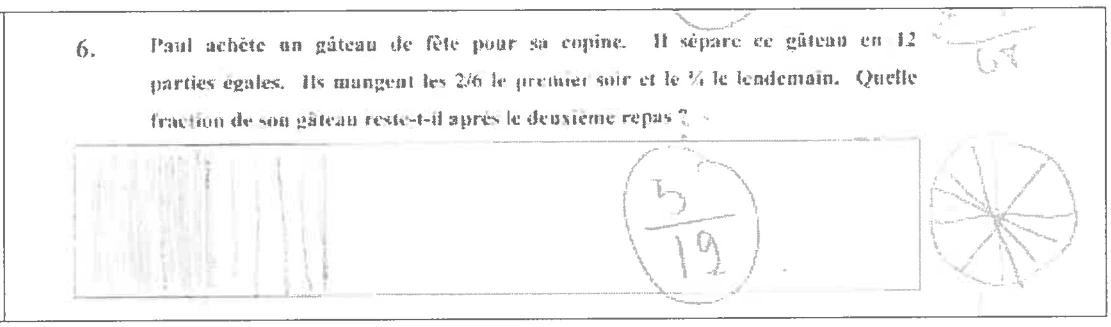
Les élèves E4 et E6 sont les seuls à utiliser une représentation graphique pour résoudre le problème. L'élève E4 parvient à la bonne réponse (5/12) en mettant sur le même dénominateur (12) les fractions 2/6 et 1/4. Il s'aide ensuite d'un rectangle divisé en 12 parties (plus ou moins égales) pour effectuer sa soustraction. Voici la solution produite par cet élève :

E4

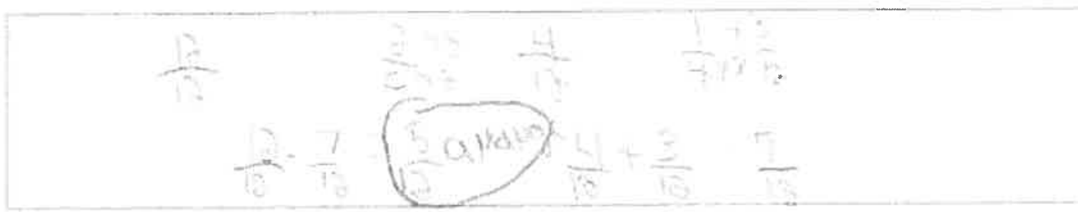


L'élève E6 laisse très peu de calculs pour permettre une analyse précise. Sa représentation (voir plus bas) est toute aussi vague. Il s'agit un rectangle très rapidement dessiné et séparé à l'aide d'une série de lignes anarchiquement placées à l'intérieur de ce dernier. Un autre dessin circulaire à l'allure d'une tarte séparée en pointes de grosseurs différentes est visible non loin de l'espace de calcul. Malgré ces deux représentations qui semblent dénuées de sens, il réussit tout de même à inscrire la bonne réponse finale (5/12).

E6



L'élève E1 démarre bien sa démarche en mettant sur le même dénominateur les deux fractions représentant les parties du gâteau qui ont été mangées. Il additionne correctement les deux fractions correspondant à la quantité de gâteau mangé (4/12 + 3/12 = 7/12). Il prend ensuite la décision de multiplier 7/12 par 12/1 afin d'obtenir 84/12 qu'il divise à nouveau pour arriver à 7 morceaux comme réponse finale. Évidemment, cette réponse correspond au nombre de morceaux mangés et non au nombre de morceaux restants. Cet élève semble avoir procédé trop rapidement, ne prenant pas le temps de bien lire la question formulée. Les élèves E2, E3, E5 et E8 arrivent au bon résultat en opérant correctement sur les fractions. Ils mettent tous sur le même dénominateur les deux fractions représentant les parties du gâteau qui ont été mangées. Ils obtiennent 7/12 et poursuivent leur démarche en soustrayant 7/11 à 12/12 (sauf E2 qui inscrit 5/12 sans fournir de trace de la soustraction décrite précédemment). La réponse finale de ces élèves est 5/12. Voici une numérisation de la démarche de l'élève E3 qui est très représentative de ce type de démarche :

E3	6. Paul achète un gâteau de fête pour sa copine. Il sépare ce gâteau en 12 parties égales. Ils mangent les 2/6 le premier soir et le ¼ le lendemain. Quelle fraction de son gâteau reste-t-il après le deuxième repas ? 

L'élève E7 réussit à mettre les deux fractions (2/6 et 1/4) sur le dénominateur commun 12, mais il décide de soustraire ces deux fractions au lieu de les additionner pour déterminer le nombre total de morceaux mangés (il effectue 4/12 – 3/12 = 1/12 au lieu de faire 4/12 + 3/12 = 7/12). Il propose 1/12 comme réponse finale. Notons enfin qu'aucun élève ne réclame l'assistance de l'enseignant-chercheur durant la résolution de ce problème.

3.3.1.7. Résolution du problème #7

Reprenant l'idée de farine pour la fabrication d'un gâteau, idée qui avait été exploitée dans le problème isomorphe présenté à l'entrée dans la séquence, le problème #7 parle d'un entrepreneur qui a besoin d'une quantité précise de ciment pour effectuer une réparation. Il a besoin des 21/27 des 9 Kg d'un sac de ciment. Il faut donner la quantité dont il fera usage pour la rénovation. Nous reproduisons ce problème avant de procéder à l'analyse des conduites des élèves.

Problème #7 : Un entrepreneur en construction a reçu une commande pour faire une réparation sur un balcon en ciment. La recette pour son ciment lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9 Kg de ciment qu'il a acheté. Quelle quantité de ciment l'entrepreneur devrai-t-il utiliser pour obtenir un ciment adéquat ?

Les élèves E1, E2, E3, E4, et E8 réussissent tous à trouver la bonne réponse au problème (7 Kg) en opérant correctement sur les fractions. Les élèves E3, E4 et E8 effectuent une réduction de la fraction 21/27 ; la division par 3 qu'ils effectuent alors montre bien qu'ils ont pris acte de la relation entre les nombres 27 et 9. Ainsi réduite, il leur est facile de trouver rapidement que 7/9 de 9 Kg est 7 kg. De leur côté, les élèves E1 et E2 sont arrivés au bon résultat, mais ils ont effectué les calculs suivants : 21/27 x 9/1 = 189/27 ; 189/27 = 7 ; 7 Kg.

L'élève E5 est incapable de résoudre le problème et n'effectue que le calcul suivant : 27/9 = 3. L'élève E6 laisse l'espace de réponse totalement vide. Enfin, l'élève E7 effectue correctement le calcul suivant : 21/27 x 9/1 = 189/27 ; il ne pousse toutefois pas plus loin sa démarche.

Seul l'élève E4 réclame l'assistance de l'enseignant-chercheur durant la résolution de ce problème. Comme le montrent les interactions suivantes, cet élève éprouve des difficultés à interpréter la question. L'enseignant-chercheur procède alors à une interprétation du problème, ce qui semble porter fruit puisque l'élève parvient à résoudre correctement le problème.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E4 : problème #7
Élève E4
E4 – J'ai de la misère ici à comprendre la question. EC – La personne veut faire une réparation sur son balcon avec du ciment. E4 – Ok. EC – Il achète un gros sac de 9 kilos en poudre. Mais ça dit sur la recette qu'il n'a besoin que du 21/27 du 9 kilos. Donc quelle est la quantité de poudre qu'il va utiliser pour faire son ciment ? E4 – En kilos ? EC – En relisant le problème, peux-tu me dire s'il va utiliser toute la poudre dans le sac de ciment ? E4 (relis les deux dernières lignes du problème) – Non, il va en rester… EC – Indique-moi la quantité qui va rester et tu choisiras les unités qui conviennent. E8 – Ok.

3.3.2. Synthèse de l'analyse des conduites des élèves à la sortie de la séquence

L'analyse des conduites des élèves à la sortie de la séquence nous a permis d'apprécier les progrès réalisés par plusieurs élèves dans le traitement des opérations et dans la résolution de problèmes. Elle nous a permis également de montrer la persistance de certaines difficultés chez un certain nombre d'élèves. Avant de procéder à un bilan des effets de la séquence sur les rapports des élèves aux fractions, il nous semble approprié d'effectuer une synthèse de l'analyse des conduites des élèves à la sortie de la séquence. Le tableau IV présente ainsi, pour chacune des tâches, un sommaire des principales caractéristiques des conduites des élèves.

Tableau IV

Sommaire des principales caractéristiques des conduites des élèves à la sortie de la séquence didactique

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="4">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="9">**1-a) Ad : Addition de fractions**</td><td colspan="4">**Rp : représentation des fractions**</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sr : sans réduction de fractions</td><td colspan="2">Ar : avec réduction de fractions</td></tr>
<tr><td>Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E8</td><td>Pr : représentation précise E1</td><td>Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E5-E6</td><td>Pr : représentation Précise E2-E3-E4-E7</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Ad-Fr : représentation de l'addition des fractions**</td></tr>
<tr><td colspan="2">Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td colspan="2">E6-E8</td><td>Ns : représentation non satisfaisante E1-E2-E3-E5</td><td>Sa : représentation satisfaisante E4-E7</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Ad-Fr : addition des fractions**</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ad-Fr-Nf : addition non effectuée</td><td colspan="2">Ad-Fr-E : addition effectuée</td></tr>
<tr><td colspan="2">---</td><td>Ad-Fr-E-Er : addition erronée E1</td><td>Ad-Fr-E-J : addition juste E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="4">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="12">1-b) Ad : Addition de fractions</td><td colspan="4">Rp : représentation des fractions (E7 n'effectue aucune représentation)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sr : sans réduction de fractions</td><td colspan="2">Ar : avec réduction de fractions</td></tr>
<tr><td>Ap/Inc :
représentation
approximative ou
incomplète
E8</td><td>Pr :
représentation
précise</td><td>Ap/Inc :
représentation
approximative ou
incomplète</td><td>Pr :
représentation
Précise
E1-E2-E3-E4-E5-E6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ad-Fr : représentation de l'addition des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td colspan="2">E4-E5-E6-E7-E8</td><td>Ns :
représentation
non satisfaisante
E1</td><td>Sa :
représentation satisfaisante
E2-E3</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ad-Fr : addition des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ad-Fr-Nf : addition non effectuée</td><td colspan="2">Ad-Fr-E : addition effectuée</td></tr>
<tr><td colspan="2">E4-E5-E7-E8</td><td>Ad-Fr-E-Er :
addition erronée
E1-E6</td><td>Ad-Fr-E-J :
addition juste
E2-E3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="4">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="9">2-a) So :
Soustraction de fractions</td><td colspan="4">Rp : représentation des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sr : sans réduction de fractions</td><td colspan="2">Ar : avec réduction de fractions</td></tr>
<tr><td>Ap/Inc :
représentation approximative ou incomplète
E1-E6-E8</td><td>Pr :
représentation précise
E2-E3-E4</td><td>Ap/Inc :
représentation approximative ou incomplète
E5-E7</td><td>Pr :
représentation précise</td></tr>
<tr><td colspan="4">So-Fr : représentation de la soustraction des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td colspan="2">E3-E5-E6-E8</td><td>Ns :
représentation non satisfaisante
E1-E2</td><td>Sa :
représentation satisfaisante
E4-E7</td></tr>
<tr><td colspan="4">So-Fr : soustraction des fractions</td></tr>
<tr><td colspan="2">So-Fr-Nf : soustraction non effectuée</td><td colspan="2">So-Fr-E : soustraction effectuée</td></tr>
<tr><td colspan="2">E6</td><td>So-Fr-E-Er :
soustraction erronée
E1-E5</td><td>So-Fr-E-J :
soustraction juste
E2 ?- E3-E4-E7-E8</td></tr>
</table>

Tâches	Activités			
2-b) So : Soustraction de fractions	**Rp : représentation des fractions (E8 n'effectue aucune représentation)**			
	Sr : sans réduction de fractions		Ar : avec réduction de fractions	
	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E1	Pr : représentation précise	Ap/Inc : représentation approximative ou incomplète E4-E5-E6-E7	Pr : représentation précise E2-E3
	So-Fr : représentation de la soustraction de fractions			
	Srp : sans représentation		Arp : avec représentation	
	E5-E6		Ns : représentation non satisfaisante E1-E4-E7-E8	Sa : représentation satisfaisante E2-E3
	So-Fr : soustraction des fractions (E2 effectue une addition)			
	So-Fr-Nf : soustraction non effectuée		So-Fr-E : soustraction effectuée	
	---		So-Fr-E-Er : soustraction erronée E2	So-Fr-E-J : soustraction juste E1-E3-E4-E5-E6-E7-E8

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="3">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="6">3-a) Mu : Multiplication de fractions</td><td colspan="3">Mu-Fr : représentation de la multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td>E2-E3-E7</td><td>Ns :
représentation
non satisfaisante
E1-E4-E5-E6-E8</td><td>Sa :
représentation satisfaisante</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mu-Fr : multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Mu-Fr-Nf : multiplication non effectuée</td><td colspan="2">Mu-Fr-E : multiplication effectuée</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Mu-Fr-E-Er :
multiplication erronée
E1-E2-E6-E7-E8</td><td>Mu-Fr-E-J :
multiplication juste
E3-E4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tâches</th><th colspan="3">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="6">3-b) Mu : Multiplication de fractions</td><td colspan="3">Mu-Fr : représentation de la multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Srp : sans représentation</td><td colspan="2">Arp : avec représentation</td></tr>
<tr><td>E2-E3-E4-E5-E7</td><td>Ns :
représentation
son satisfaisante
E1-E6-E8</td><td>Sa :
représentation
satisfaisante</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mu-Fr : multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Mu-Fr-Nf : multiplication non effectuée</td><td colspan="2">Mu-Fr-E : multiplication effectuée</td></tr>
<tr><td>E4-E5</td><td>Mu-Fr-E-Er :
multiplication erronée
E1-E2-E5-E6-E7-E8</td><td>Mu-Fr-E-J :
multiplication juste
E3-E7</td></tr>
</table>

Tâches	Activités		
4- Pm : problème multiplicatif	**Pm-Fr : représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8	Ns : représentation non satisfaisante	Sa : représentation satisfaisante
	Pm-Fr : résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	---	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E6-E8	Pm-Fr-E-J : résolution juste E2-E3-E4-E5-E7

Tâches	Activités		
5- Pm : problème multiplicatif	**Pm-Fr : représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E3-E4-E5-E7-E8	Ns : représentation non satisfaisante E2-E6	Sa : représentation satisfaisante
	Pm-Fr : résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	---	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E2-E3-E4-E6-E7- E8	Pm-Fr-E-J : résolution juste E3

Tâches	Activités		
6- Pm : problème additif	**Pm-Fr : représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E2-E3-E5-E7-E8	Ns : représentation non satisfaisante E6	Sa : représentation satisfaisante E4
	Pm-Fr : résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	---	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E1-E7	Pm-Fr-E-J : résolution juste E2-E3-E4-E5-E6-E8

Tâches	Activités		
7- Pm : problème multiplicatif	**Pm-Fr : représentation du problème/fraction**		
	Srp : sans représentation	Arp : avec représentation	
	E1-E2-E3-E5-E6-E7-E8	Ns : représentation non satisfaisante	Sa : représentation satisfaisante E4
	Pm-Fr : résolution du problème		
	Pm-Fr-Nf : résolution non effectuée	Pm-Fr-E : résolution effectuée	
	E6	Pm-Fr-E-Er : résolution erronée E5	Pm-Fr-E-J : résolution juste E1-E2-E3-E4-E7-E8

Comme le montrent les données du tableau IV, tous les élèves, sauf E1 et E8, procèdent à une représentation des fractions à additionner et à soustraire. Résultat intéressant, la majorité des élèves effectue une réduction des fractions et leurs représentations sont assez souvent satisfaisantes. Les élèves E2, E3, E4 et E7 se montrent capables de générer des représentations satisfaisantes d'au moins une des additions et des soustractions proposées. Les élèves E2, E3, E4, E5, E6 et E8 savent effectuer au moins une des additions et des soustractions. En revanche, seulement trois élèves, soit les élèves E3, E4 et E7 se montrent capables d'effectuer correctement au moins une des multiplications. Enfin, bien que plusieurs élèves produisent des représentations des multiplications de fractions, aucune n'est satisfaisante.

La majorité des élèves ne propose aucune représentation des problèmes qu'ils doivent résoudre. Par ailleurs, plusieurs élèves savent résoudre correctement trois des problèmes présentés. Seul le problème multiplicatif #5 n'est résolu correctement que par un seul des élèves, soit l'élève E3. Cet élève est celui qui se démarque le plus de son groupe, comme le montrent les données du tableau IV.

3.4. L'évolution des connaissances à la suite de la séquence d'enseignement

La séquence d'enseignement semble avoir eu des effets plus significatifs sur les conduites des élèves dans la représentation des fractions et les calculs d'addition et de soustraction. Ses effets sur la résolution de problèmes semblent beaucoup plus réduits. Au terme de l'analyse des conduites des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence, il nous semble important de regrouper les performances des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence. Le tableau V présente ainsi les performances de ces élèves en calcul et en résolution de problèmes.

Tableau V

Performances des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement

Tâches		Représentations adéquates des fractions	Calculs justes
1-a) Ad : Addition de fractions	Entrée	E3-E4-E5-E7	E3-E4-E5
	Sortie	E1-E2-E3-E4- E7	E2-E3-E4-E5-E6-E8
1-b) Ad : Addition de fractions	Entrée	E4	E4
	Sortie	E1-E2-E3-E4-E5-E6	E1-E2
2-a) So : Soustraction de fractions	Entrée	-	E3-E4-E7
	Sortie	E2-E3-E4	E2-E3-E4-E7-E8
2-b) So : Soustraction de fractions	Entrée	E4	E1-E4-E5
	Sortie	E2-E3	E1-E3-E4-E5-E6-E7-E8
3-a) Mu : Multiplication de fractions	Entrée	-	E3
	Sortie	-	E3-E4-E7
3-b) Mu : Multiplication de fractions	Entrée	-	E3
	Sortie	-	E3-E7

Résolution de problèmes			
Tâches		Représentation juste	Solution juste
4- Pm : problème multiplicatif	Entrée	-	E4-E5
	Sortie	-	E2-E3-E4-E5-E7
5- Pm : problème multiplicatif	Entrée	-	E3
	Sortie	-	E3
6-Pm : problème additif	Entrée	E7	E2-E3-E5-E7-E8
	Sortie	E4	E2-E3-E4-E5-E6-E8
7-Pm : problème multiplicatif	Entrée	E4	E4
	Sortie	E4	E1-E2-E3-E4-E8

Si l'on tient compte du nombre de séances consacrées à l'enseignement, les progrès des élèves sont appréciables. En effet, au terme de la séquence, on relève 20 réussites aux additions et soustractions, comparativement à 10 réussites à l'entrée dans la séquence. L'augmentation des réussites, entre l'entrée et la sortie de la séquence, est aussi accompagnée d'une augmentation, tout aussi appréciable, des représentations justes des fractions produites par les élèves ; on note 16 représentations adéquates de fractions à la sortie de la séquence et 6 seulement à l'entrée dans la séquence.

Les progrès accomplis dans les multiplications proposées sont moins apparents ; on totalise 5 réussites à la sortie de la séquence et 2 à l'entrée. Et fait étonnant, les élèves ne produisent aucune représentation adéquate des fractions à l'entrée et à la sortie de la séquence. Il faut toutefois mentionner qu'il était demandé non pas d'effectuer une représentation des fractions, mais bien de tracer une représentation de la multiplication des fractions, tâche plus complexe impliquant une représentation du sens de cette opération. Il est important de relever enfin que les élèves ont eu très peu d'occasions, au cours de leur scolarité antérieure, d'effectuer de telles représentations. Et, comme le montre le tableau V, seul l'élève E4 produit une représentation juste d'au moins un problème multiplicatif à l'entrée et à la sortie de la séquence.

La réussite des problèmes multiplicatifs, si l'on tient compte des difficultés de représentation figurative de ces problèmes, est assez appréciable. En effet, à la sortie de la séquence, on note 11 réussites des problèmes multiplicatifs, tandis qu'à l'entrée, ce nombre n'est que de 4. Il est possible que les élèves soient plus à l'aise dans une représentation arithmétique (symbolique) de ces problèmes qu'ils ne le soient dans une représentation figurative. Il semble aussi que la séquence d'enseignement ait permis à un certain nombre d'élèves d'acquérir une meilleure maîtrise de ces problèmes. Il nous semble également important de relever le caractère inusité d'un de ces problèmes, soit le problème #5. Relevons enfin les réussites observées dans la résolution du problème additif #6, tant à l'entrée qu'à la sortie de la séquence. L'examen des conduites des élèves et des interactions didactiques au cours des situations que comporte la séquence d'enseignement que nous entreprenons maintenant nous permettra de mieux apprécier les bénéfices de même que les limites de notre séquence.

3.5. Analyse des conduites et des interactions didactiques lors des situations d'enseignement

L'analyse des conduites des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement nous a permis d'apprécier non seulement les gains, mais aussi les limites du dispositif d'enseignement sur les opérations sur les fractions que nous avons mis à l'essai auprès des élèves. Il nous apparaît donc important de procéder maintenant à un examen des conduites de ces élèves et des interactions didactiques lors des situations d'enseignement que comportait notre dispositif. Cette analyse sera suivie, à la fin du chapitre, par un exposé des liaisons les plus significatives entre les conduites des élèves à trois moments différents de l'enseignement que nous avons réalisé, soit : à l'entrée, dans la séquence d'enseignement, au cours des situations d'enseignement et à la sortie de la séquence.

3.5.1. Analyse des conduites et des interactions au cours des situations consacrées aux opérations sur les fractions

Diverses capsules traitant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication de fractions ont été présentées aux élèves. Ces capsules représentaient de façon dynamique les règles régissant ces opérations (représentations et écritures possibles) et visaient à conférer un sens à ces règles. Les élèves étaient d'abord invités à examiner ces animations, cet examen étant orienté par diverses questions. Ils devaient ensuite réaliser quelques tâches, qui leur permettaient de mettre à profit les connaissances construites lors des activités précédentes.

3.5.1.1. Analyse des conduites et des interactions lors des situations consacrées à l'addition et à la soustraction de fractions

Lors de l'enseignement sur l'addition et la soustraction de fractions, les élèves sont d'abord invités à examiner diverses capsules. Cet exercice est orienté par des questions. Nous rendons compte d'abord des conduites et des interactions lors de l'examen de ces capsules. Nous reproduisons ces diverses capsules ; le lecteur est invité à consulter les descriptions plus détaillées présentées au chapitre méthodologique.

La première séance de visionnement d'une capsule d'enseignement informatisée a eu lieu au début de la troisième rencontre sur l'heure du midi. Les élèves étaient invités à prendre place devant un poste informatique du laboratoire. Le visionnement des capsules a été fait de manière individuelle (un poste par élève). Quelques instructions ont été données par l'enseignant-chercheur en ce qui a trait à l'utilisation de l'interface de l'outil (boutons de navigation, signification des animations et icônes, etc.). Ce n'est seulement qu'avant la passation des trois questionnaires traitant des opérations sur les fractions (addition, soustraction, multiplication) que les élèves ont eu à regarder une capsule. Aucune capsule n'a été utilisée avant les tests d'entrée et de sortie.

Il était suggéré aux élèves de regarder la capsule deux fois consécutives pour bien saisir le « message pédagogique » sous-jacent à l'animation et poser des questions au besoin. Le nombre de questions lors du visionnement a été très minime. La majorité de ces dernières portait sur le moment où ils devaient cliquer pour permettre à l'animation de poursuivre et ce, malgré un clignotement du bouton « **Jouer** » au moment opportun.

Les élèves ont été préalablement avertis qu'ils auraient à remplir un questionnaire à la suite de ce visionnement. Une fois le deuxième visionnement terminé, les élèves pouvaient commencer à répondre au questionnaire. Lors de la réalisation des tâches succédant à l'étude de chacune des animations, les élèves avaient la possibilité de retourner voir la capsule afin de confirmer ou d'infirmer une stratégie de résolution de problème, un concept ou une règle mathématique. Puisque les tables mises à la disposition des élèves pour réaliser les tâches succédant aux animations étaient disposées de manière à avoir aisément accès à l'ordinateur, nous avons pu noter les références à chacune des capsules. Le tableau VI indique les fréquences de visionnement supplémentaire des diverses capsules.

Tableau VI

Fréquences de visionnement supplémentaire de chacune des capsules, lors de la réalisation des différentes tâches

	Capsule #1 addition	Capsule #2 soustraction	Capsule #3 multiplication
E1	1	1	2
E2	0	0	1
E3	2	3	3
E4	0	2	4
E5	1	1	1
E6	0	0	1
E7	1	2	3
E8	0	0	0

Comme le montre le tableau précédent, un seul élève, soit l'élève E8, ne juge pas utile de visionner à nouveau l'une et l'autre des capsules. Les élèves E3, E4 et E7 effectuent des visionnements supplémentaires, d'au moins deux des capsules. La capsule sur la multiplication est celle qui donne lieu au plus grand nombre de visionnements supplémentaires. Cet événement ne semble pas étranger aux difficultés de représentation de la multiplication de fractions et de réalisation de cette opération éprouvées par plusieurs élèves, difficultés que nous avons relevées non seulement à l'épreuve présentée à l'entrée dans la séquence, mais aussi à l'épreuve présentée à la sortie de la séquence. Il n'est pas sans intérêt de rappeler aussi que ces élèves sont aussi ceux qui obtiennent les meilleures performances dans la réalisation des multiplications présentées à la sortie de la séquence d'enseignement.

Nous avons enfin remarqué une très bonne attitude de la part des élèves lors du visionnement des capsules. Leur attention était excellente et ils semblaient très motivés à l'idée d'apprendre des notions mathématiques qu'ils considéraient « ardues » (opération sur les fractions), à l'aide d'un nouveau média. Les élèves ont donc été très réceptifs à l'utilisation du logiciel.

3.5.1.1.1. Conduites des élèves à chacune des tâches portant sur l'addition, tâches présentées à la suite de l'observation de la capsule

Nous examinons les conduites de chacun des élèves à chacune des tâches présentées lors de l'expérimentation sur l'addition de fractions, puis nous résumons dans un tableau les principales caractéristiques des conduites de ces élèves.

La **première tâche** comporte trois questions à choix multiples. Chacune de ces questions est directement liée au visionnement d'une capsule d'enseignement informatisée. Pour bien situer l'élève et s'assurer qu'il fasse le lien entre les questions de compréhension qui lui sont posées et l'animation qu'il vient de visualiser, certaines images significatives empruntées à l'animation sont insérées parmi le texte. Les questions portent notamment sur la compréhension des règles de base qui régissent l'addition de fractions (dénominateurs communs, tailles des morceaux à réunir, etc.).

La **première question de la première tâche** (tâche #1A - question de type A) interroge l'élève sur l'utilité d'un couteau à pizza dans l'animation qu'il vient de voir. Ce dernier servait à trancher différentes pointes de pizza afin d'obtenir des morceaux de même taille. Tous les élèves répondent correctement à cette question. Voici la question ainsi formulée :

1. Quel est le rôle du couteau dans l'animation ?

   a) Obtenir deux fractions ayant un même dénominateur.
   b) Obtenir deux fractions ayant un même numérateur.
   c) Additionner les deux fractions.
   d) Aucune utilité dans l'animation.

La **seconde question de la première tâche** (tâche #1A - question de type B) interroge l'élève sur la taille de chacune des pointes de deux pizzas séparées différemment et l'impact de leur taille sur l'addition de fractions. Tous les élèves répondent correctement à cette question. Nous représentons la question adressée aux élèves.

2. Dans le situation ci-dessous, pourquoi ne peut-on pas tout simplement compter les parties dans chacune des pizzas et dire que 3/9 correspond à la fraction du tout obtenue en réunissant chacune des parties ?

a) Parce que les deux pizzas n'ont pas la même forme.
b) Parce que la pizza de droite est trop petite.
c) Parce que la pizza de gauche est trop grande.
d) Parce les deux pizzas ne sont pas séparées avec des pointes identiques.

La **troisième question de la première tâche** (tâche #1A - question de type C) porte sur les modifications à apporter aux pointes des pizzas pour permettre leur addition. Plusieurs stratégies sont offertes à l'élève sous forme de choix de réponses. Sauf l'élève E6 qui propose de laisser tomber la plus grosse pointe de la pizza de gauche pour mieux additionner les fractions, tous les élèves répondent correctement à cette troisième question qui est ainsi formulée :

3. Que faudrait-il faire pour pouvoir additionner les deux pizzas lorsqu'elles sont représentées comme sur l'image plus haute ?

a) Ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et additionner.
b) Ne pas tenir compte de la pointe plus grosse dans la pizza de gauche.
c) Obtenir deux pizzas avec des pointes de même grosseur.
d) Ajouter une pointe de plus dans la pizza de droite et additionner ensuite.

Nous reproduisons ci-dessous des extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E2 lors de l'interprétation de la première question de la première tâche (tâche #1 - question de type A). Comme le montrent ces extraits, cet élève ne sait trop comment interpréter la question. L'enseignant-chercheur rappelle alors le contexte de la représentation proposée dans la capsule.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E2 : tâche #1A - question de type A
Élève E2
E2 – Ici, le rôle du couteau dans l'animation, c'est tu de couper la pizza ? EC – Oui, c'est sûr qu'un couteau, ça coupe. À quoi il a servi ? Pourquoi on a fait des différents morceaux ? Est-ce que c'est pour obtenir deux fractions avec un même dénominateur, obtenir deux fractions avec un même numérateur, additionner les fractions ou ça n'a aucune utilité (relecture des choix) ? E2 – Dénominateur, c'est en bas ça ? EC – Ça, je ne peux pas t'aider. Vas-y avec tes connaissances. Fais jouer l'animation, les réponses sont dans l'animation. E2 – Ok, c'est correct, c'est cool.

La **deuxième tâche** comporte trois questions principales. Ces questions impliquent des calculs avec des fractions différentes de celles examinées durant l'animation. Il est également demandé de produire une représentation similaire à celle exigée lors de l'épreuve d'entrée et de sortie de la séquence didactique.

La **première question de la deuxième tâche** (tâche #2A - question de type A) demande aux élèves de représenter dans des rectangles prédéfinis les trois fractions à additionner, ainsi que la somme de ces fractions, soit 3/10 + 2/5 + 1/10 = 8/10. Le résultat de l'opération est intentionnellement donné à l'élève. Voici la question ainsi formulée :

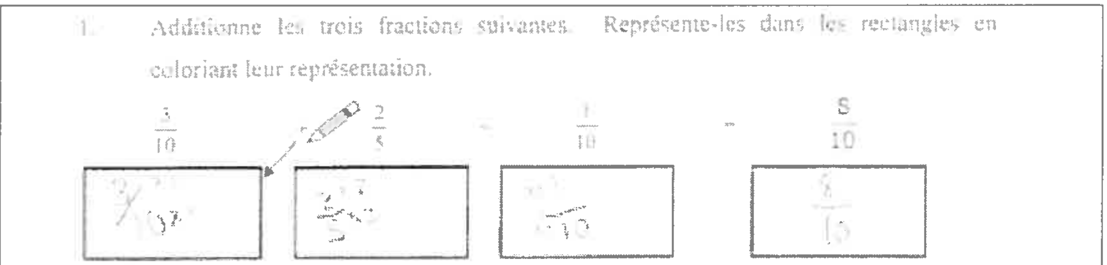
Questions de type B

1. Additionne les trois fractions suivantes. Représente-les dans les rectangles en colorant leur représentation.

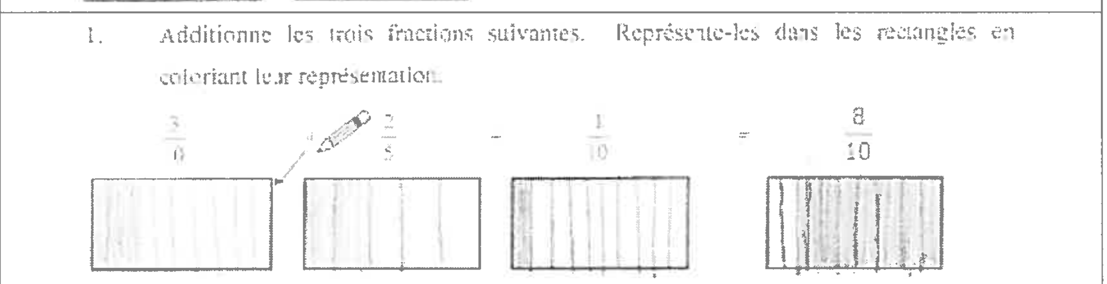
$$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$

Les élèves E1, E4, E5 et E7 représentent correctement chacune des fractions, ainsi que leur somme. Il est à noter que ces élèves prennent le soin de transformer la fraction 2/5 pour qu'elle ait le même dénominateur (10) que les deux autres. Ils procèdent ainsi à un partage en 10 parties du rectangle placé sous cette fraction, 4 de ces parties étant hachurées. Les élèves E3, E6 et E8 effectuent une représentation indépendante de chacune des fractions, ne se préoccupant pas des relations entre les dénominateurs. L'élève E2 ne propose aucune représentation. Par contre, les calculs qu'il inscrit dans les rectangles permettent de supposer qu'il reconnaît l'importance de mettre la fraction 2/5 sur le dénominateur 10. Pour mieux illustrer les démarches des élèves, nous reproduisons trois conduites représentatives.

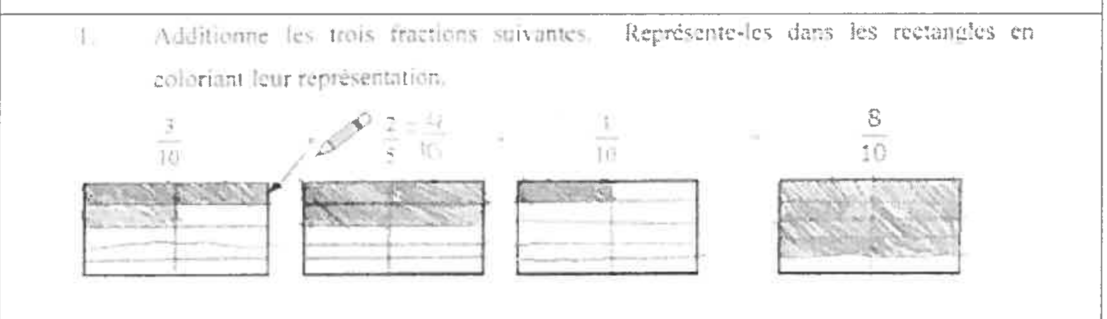
E2



E6



E7



Nous présentons aussi des extraits des interactions avec certains élèves, interactions portant sur la représentation des fractions. On remarque dans l'extrait concernant l'élève E3 que ce dernier demande de revoir l'animation afin de vérifier si la taille des morceaux qu'il utilise dans son dessin aura un impact sur la validité de sa représentation. L'élève E5 est également questionné par l'enseignant-chercheur à savoir si ce qu'il fait est en concordance avec l'animation explicative.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E3, E5 et E8 : tâche #2A - question de type A
Élève E3
E3 – Ça dérange tu si sont pas de la même grosseur ? EC – As-tu regardé ton animation ? E3 – Oui. EC – Dans l'animation, est-ce que la grosseur des pièces est importante ? La grosseur des pointes ? E3 – Oui. EC – Si toi tu penses que c'est important, tu peux les mettre de la même grosseur. Si tu penses que ce n'est pas important, tu peux les laisser à chacun sa grosseur. E3 – Mais euh, je peux-tu revoir l'animation encore ? EC – Oui. E3 – (s'oriente vers l'ordinateur pour revoir la capsule)
Élève E5
E5 – Ça, est-ce que c'est correct cette affaire là ? (référence à sa représentation) EC – Est-ce que tu as bien représenté la fraction ? E5 – D'après moi, oui. EC – Ici aussi, il faut que tu représentes cette fraction-là. Est-ce qu'il y a quelque chose de spécial dans ces deux fractions-là ? E5 – Ça, c'est fois deux et ça donne ça (en pointant les dénominateurs des deux fractions). EC – Est-ce qu'il y a un rapport avec l'animation ? Qu'est-ce qu'il y a de semblable dans l'animation que tu as vu et ce que tu as à faire sur ta feuille ? E5 – On a fait le même numérateur. EC – Ok, dans ce temps-là, tu peux me représenter la fraction ici, dans ce rectangle-la. E5 – Ok, là, si je veux, je peux tu les mettre au même numérateur que là ? EC – Comme tu veux. Si tu penses que c'est ça la bonne manière de l'additionner, tu peux le faire. E5 – Ok.
Élève E8
E8 – C'est tu euh, dans le fond, faut tu séparer ça comme l'affaire sur l'ordi ou mettre la fraction comme pareil pareil ? EC – Oui, tu sépares la fraction qui est ici dans le rectangle un peu comme si c'était la pizza. E8 – Ok.

La **deuxième question de la seconde tâche** (tâche #2A - question de type B) demande aux élèves d'additionner trois fractions dont les dénominateurs sont des multiples de 4 (1/4, 3/16, 1/8). Ils doivent ensuite représenter chaque fraction et leur somme dans un rectangle dont ils choisissent les dimensions. Enfin, un espace leur est alloué pour effectuer un calcul mathématique et donner le résultat de l'addition. Voici cette deuxième question :

2 Il faut trouver la somme des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$ et $\frac{1}{8}$

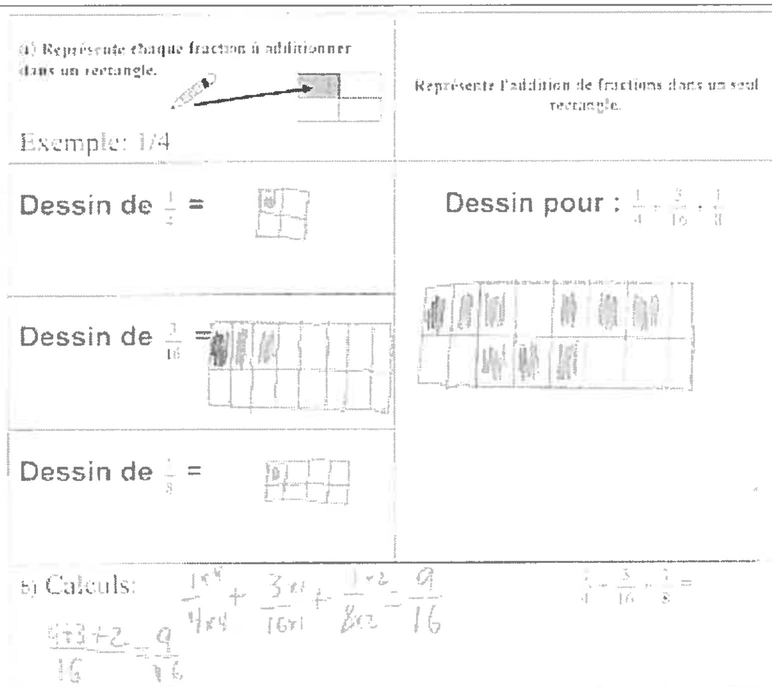
a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la réunion des parties du tout ainsi obtenues

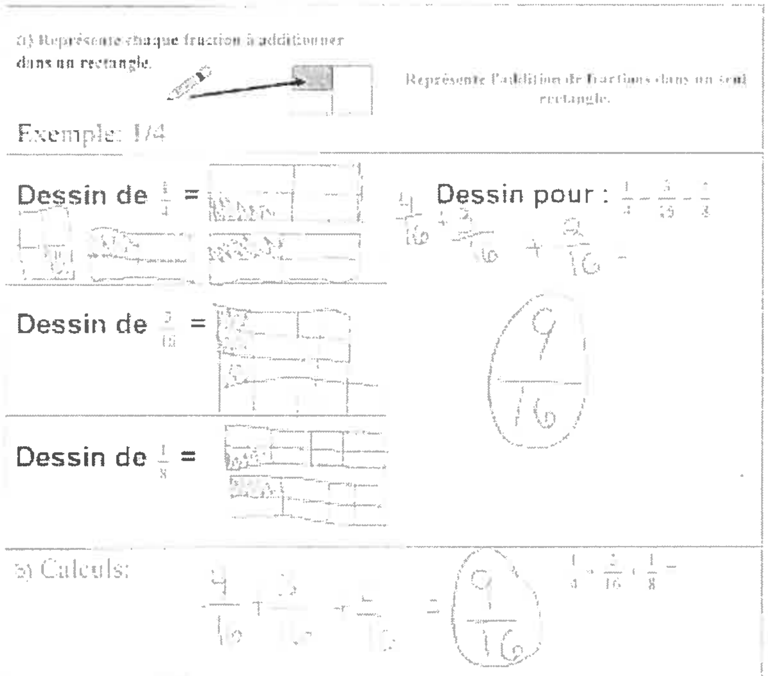
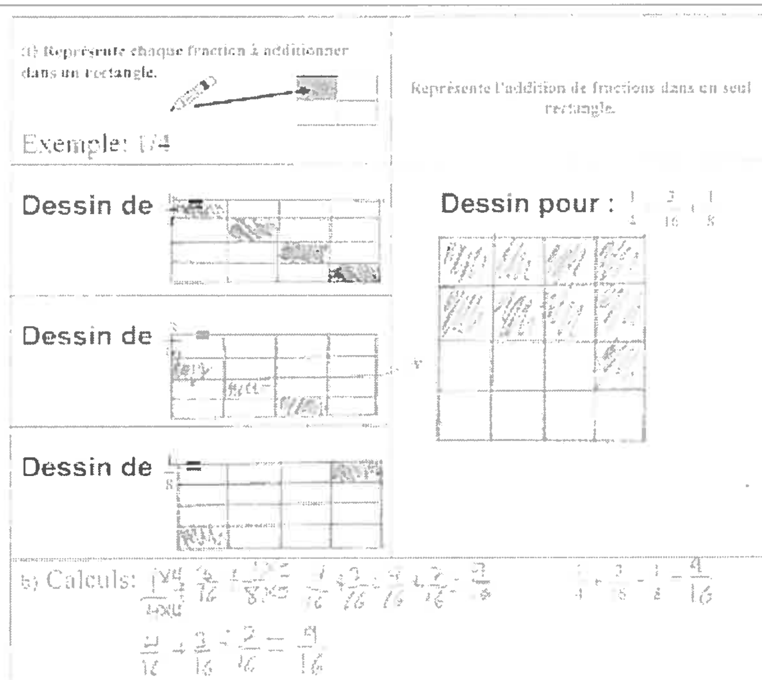
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat

a) **Represente chaque fraction a additionner dans un rectangle.**  Exemple: 1/4	**Represente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{16}$	
$\frac{1}{8}$	
b) **Calculs:**	$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=$

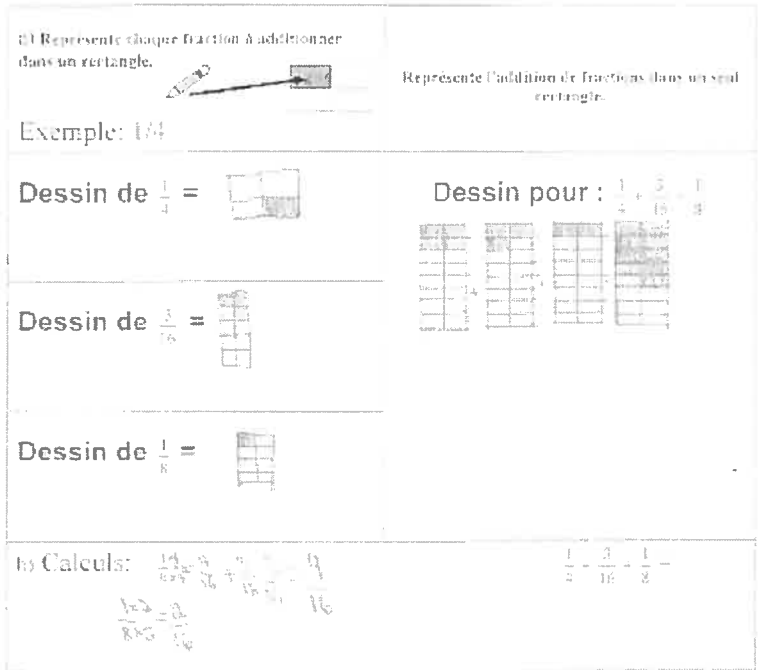
Les élèves E2, E4, E5 et E6 arrivent correctement à représenter chacune des fractions en utilisant 16 comme dénominateur commun. Parmi ces derniers, les élèves E4 et E5 offrent les représentations les plus précises. L'élève E2 a une manière plutôt inusitée de représenter les trois fractions sur le même dénominateur, comme le montrent les traces de sa démarche (voir la reproduction à la page 171). En effet, il effectue 4 représentations de la fraction 1/4, jusqu'à ce que le nombre total de parties soit 16. Cette conduite semble guidée par la fraction équivalente à produire, soit 4/16. Les élèves E1, E3, E7 et E8 offrent tous une représentation sans prendre la peine de mettre les trois fractions sur le même dénominateur. Il est à noter que la représentation de l'élève E8 est très approximative et difficile à interpréter. En ce qui a trait au schéma illustrant l'addition des fractions, les élèves E1, E4, E5, et E7 le font correctement. Les autres n'offrent aucun schéma. Enfin, tous les élèves sont en mesure d'additionner de manière juste les trois fractions. Ils arrivent tous au bon résultat, c'est-à-dire 9/16. Pour mieux illustrer ces démarches, nous reproduisons quatre conduites représentatives.

E1



E2	a) Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle. Exemple: 1/4 Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle. Dessin de $\frac{1}{4}$ = Dessin pour : $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$ $\frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} =$ Dessin de $\frac{3}{16}$ = $\frac{9}{16}$ Dessin de $\frac{1}{8}$ = b) Calculs: $\frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{9}{16}$ $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} =$
E4	a) Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle. Exemple: 1/4 Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle. Dessin de Dessin pour : $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$ Dessin de Dessin de $\frac{1}{8}$ = b) Calculs: $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{4}{16}$ $\frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{9}{16}$

E5



Comme nous l'avons fait précédemment, nous reproduisons également des extraits des interactions avec certains élèves à propos des représentations des fractions. Les interactions entre l'élève E7 et l'enseignant-chercheur sont particulièrement intéressantes car elles montrent comment l'élève s'implique dans la discussion et se réfère au dispositif informatique. Il participe à l'enseignement et tente de résoudre le problème en faisant confiance à ses connaissances.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E1, E3, E6 et E7 : tâche #2A - question de type B
Élève E1
E1 – Est-ce que je peux avoir une autre règle s'il-te-plaît ? EC – Une autre règle ? Elle n'est pas très droite celle-là ! E1 – (Un peu plus tard) – Ici, je n'ai pas pu le faire comme il faut. J'ai pris mon temps mais ma règle était croche. EC – Continue et fait les autres. Moi, je vais quand même regarder le nombre de carrés que tu as fait. Je ne regarderai pas si ta ligne est droite ou pas. Continue avec ta nouvelle règle et on va oublier que celle-là était croche. E1 – Ok.
Élève E3
EC – (À E3 qui ne respectait pas la consigne) – Numéro trois ici, dans la question B, essaie de me le faire avec des regroupements avec des billes : 1/3, 3/8 et regroupe tes billes ensemble. E3 – C'est encore plus facile d'abord !

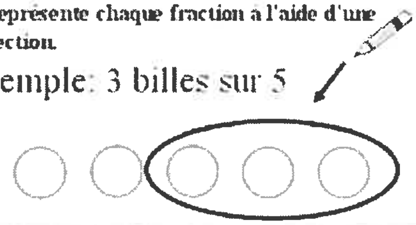
Élève E6
E6 – Je ne comprends pas cette question ici. EC – Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies. Montre quelle fraction équivalente correspond à chacune des fractions… Ce que ça veut dire cette grosse phrase-là, c'est que je veux que tu dessines 1/4, 3/16 et 1/8. Il va falloir que tu les coupes comme il le faut pour être capable de les additionner comme si c'était des pointes de pizza. E6 – Faut les mettre sur le même dénominateur. EC – Quand tu vas avoir trouvé comment les séparer, tu vas me donner un dessin pour l'addition là et me mettre un dessin pour chaque fraction ici. Si tu veux faire des calculs avec des chiffres, tu peux les faire là. Ici, c'est les dessins (en désignant les espaces appropriés). E6 – Ok.
Élève E7
E7 – Parce que ici (pointe vaguement toute la question), je ne comprends pas ce qu'il faut faire. EC – Tu sais tantôt, on parlait des pizzas. Qu'est-ce que j'ai fait avec mon couteau ? E7 – Tu l'as coupé. EC – Pourquoi je l'ai coupé ? E7 – Pour avoir plus de pointes. EC – Oui, mais qu'est-ce qui est important pour mes pointes avant de les additionner ? Admettons que tu veux donner un morceau de pizza à plusieurs amis ? E7 – Faut savoir comment de personnes il y a. (E7 fait rejouer l'animation à la séquence où le couteau est en action) EC – Oui, et qu'est-ce que tu remarques concernant les pointes en les comparant (en pointant l'écran d'ordinateur) ? E7 – Sont pas toutes de la même grosseur. (attend quelques secondes et ajoute : « le couteau fait ça… mettre les grosseurs pareilles ») EC – Tu as le droit de prendre ta règle et de découper un rectangle comme si ta règle c'était le couteau de la pizza. E7 – Ce dessin-là (pointe l'exemple de représentation), faut que je le refasse ? EC – Faut pas que tu le refasses, mais que tu utilises ta règle comme un couteau pour faire des morceaux avec le rectangle de ton choix. E7 – Ben là, mon dessin ça va être ça. (commence à dessiner) EC – Ok, parfait. E7 – Je fais mon dessin tout de suite ? EC – Tu peux le faire tout de suite.

Dans la **dernière question de la seconde tâche** (tâche #2A - question de type C), il est demandé aux élèves d'additionner deux fractions (1/3 et 3/8). Ils doivent ensuite représenter chaque fraction et leur somme à l'aide d'une collection de billes. Enfin, un espace leur est alloué pour effectuer un calcul et donner le résultat de l'addition. Nous reproduisons, à la page suivante, cette dernière question.

3. Il faut trouver la somme des fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la réunion des parties de la collection (du tout) ainsi obtenues.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

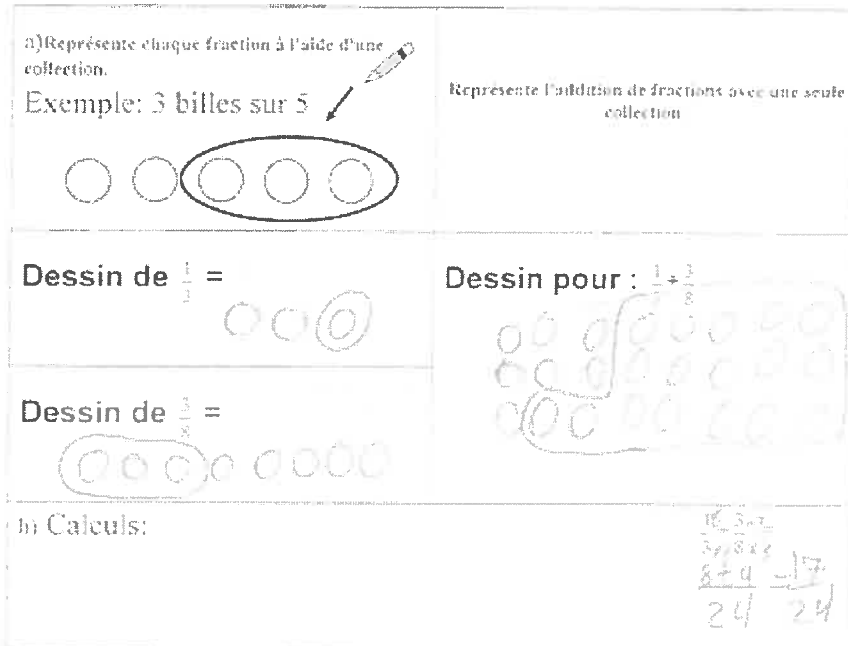
a) Représente chaque fraction à l'aide d'une collection. Exemple: 3 billes sur 5 	Représente l'addition de fractions avec une seule collection.
$\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{8}$	
b) Calculs:	$\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=$

Les élèves doivent d'abord représenter chacune des fractions (1/3 et 3/8) à l'aide d'une collection de billes. Comme pour le partage des différents rectangles dans les questions précédentes, on attend de l'élève une représentation qui tient compte du calcul d'un dénominateur commun aux deux fractions. Après une analyse des réponses des élèves, on remarque qu'un seul d'entre eux, soit l'élève E4, se soucie de faire une telle représentation (voir la représentation de cet élève à la page 176). Les élèves E1, E2, E3, E5, E6, E7 et E8 utilisent tous la même stratégie pour représenter chacune des fractions à l'aide des billes. Une bille sur trois est encerclée dans le cas de la fraction 1/3 et trois billes sur huit sont encerclées dans le cas de la fraction 3/8 (voir les représentations des élèves E1, E5 et E7 qui sont reproduites aux pages 176 et 177). L'élève E4 est enfin le seul à avoir représenté chacune des fractions en se servant de deux collections de billes contenant chacune 24 billes, le nombre de billes correspondant au dénominateur commun.

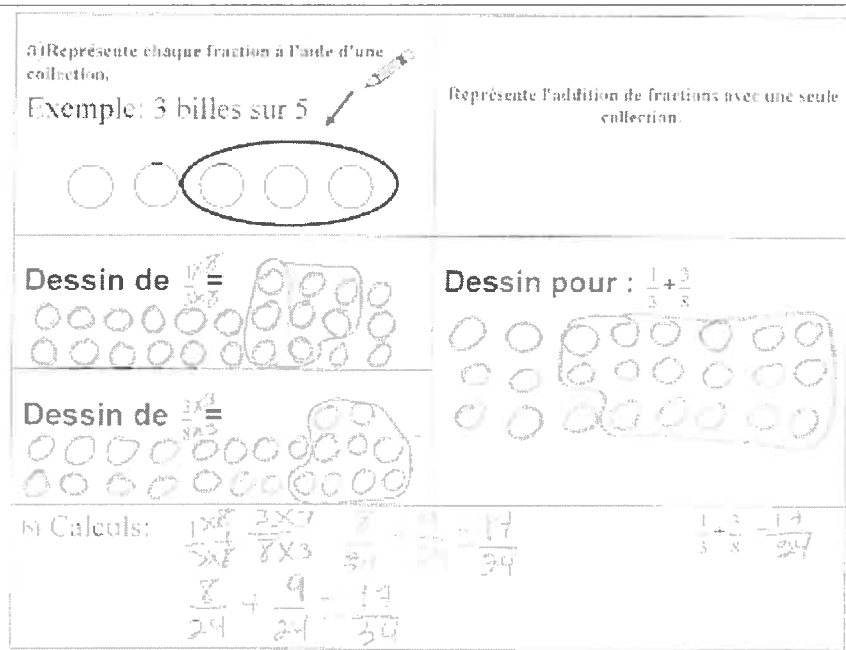
Les élèves E1, E2, E3, E4 et E8 sont tous en mesure de représenter le résultat de l'addition de fractions en utilisant 24 billes dont 17 sont encerclées. L'élève E5 se contente de redessiner trois billes, dont une est encerclée dans le cas de la fraction 1/3 et huit billes, dont trois sont encerclées dans le cas de la fraction 3/8. Un signe d'addition sépare chacun de ses dessins et un symbole « égal » (=) suit le tout. Aucun résultat n'est proposé suite à ce schéma.

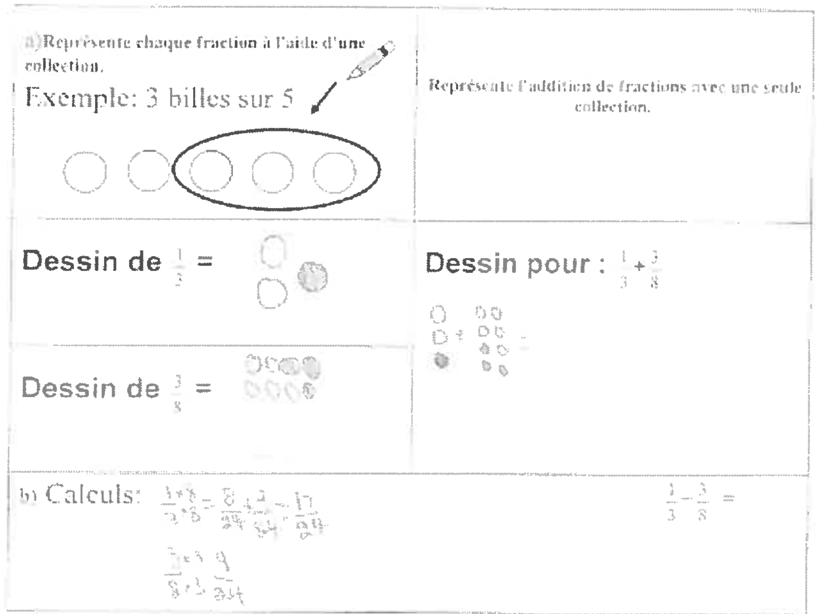
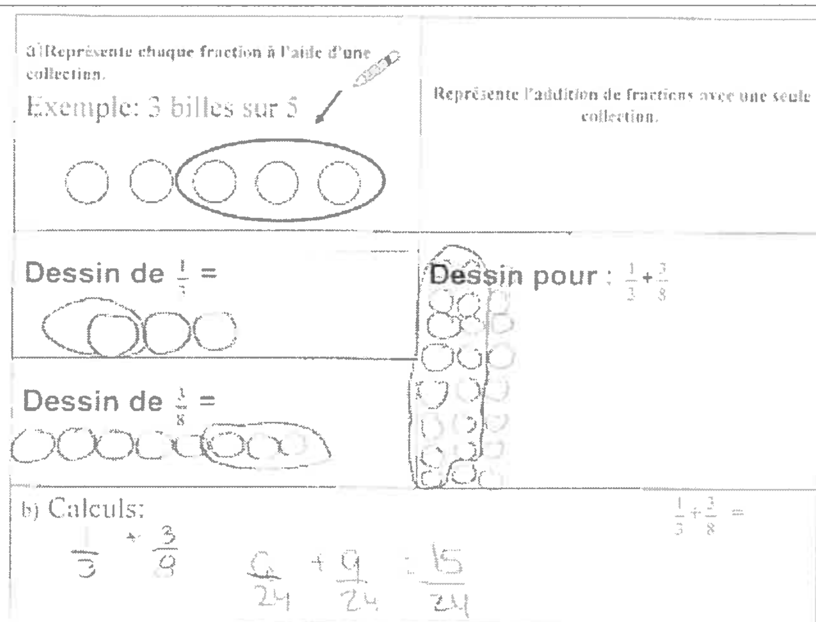
Malgré le fait que seulement un élève semble en mesure de représenter chacune des fractions en tenant compte du dénominateur commun des fractions, tous les élèves, sauf l'élève E7, arrivent au bon résultat (17/24) lorsque vient le temps d'effectuer l'addition. Il faut mentionner que l'élève E7 n'arrive pas au bon résultat à cause d'une simple erreur de calcul. Il parvient à trouver le dénominateur commun, soit 24, mais est incapable de trouver la fraction équivalente pour 1/3 (1/3 = 6/24). Une version numérisée de la démarche de l'élève E7 est présentée à la page 177.

E1


a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection.
Exemple: 3 billes sur 5
Représente l'addition de fractions avec une seule collection.
Dessin de $\frac{1}{3}$ =
Dessin pour : $\frac{1}{3}+\frac{3}{8}$
Dessin de $\frac{3}{8}$ =
b) Calculs:
$\frac{1\times8}{3\times8}\ \frac{3\times3}{8\times3}$
$\frac{8+9}{24} = \frac{17}{24}$

E4


a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection.
Exemple: 3 billes sur 5
Représente l'addition de fractions avec une seule collection.
Dessin de $\frac{1\times8}{3\times8}$ =
Dessin pour : $\frac{1}{3}+\frac{3}{8}$
Dessin de $\frac{3\times3}{8\times3}$ =
b) Calculs:
$\frac{1\times8}{3\times8}\ \frac{3\times3}{8\times3}$ $\frac{8}{24}+\frac{9}{24}=\frac{17}{24}$
$\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=\frac{17}{24}$
$\frac{8}{24}+\frac{9}{24}=\frac{17}{24}$

E5	
E7	

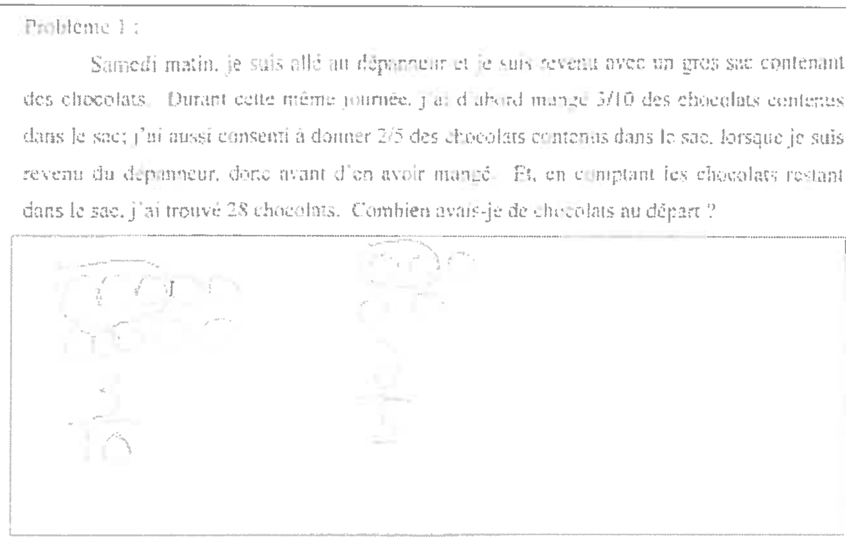
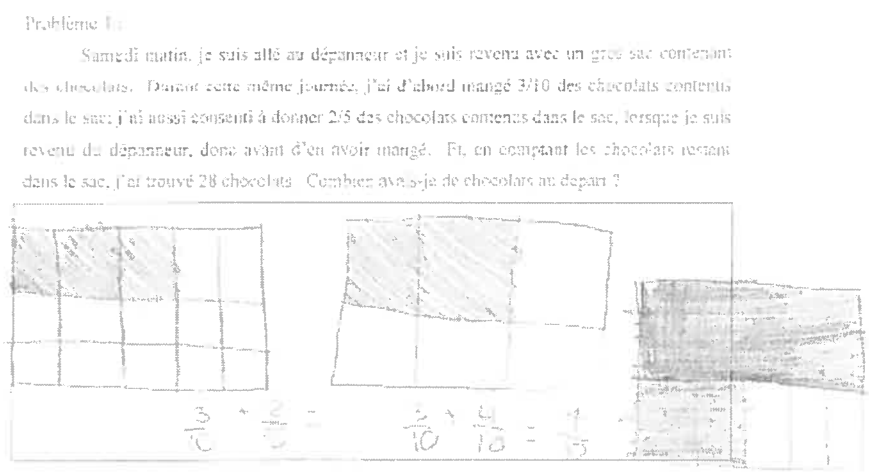
La réalisation de la dernière question de la seconde tâche sur l'addition de fractions donne lieu à de nombreuses interactions entre les élèves et l'enseignant-chercheur. Nous reproduisons, à la page suivante, des extraits représentatifs de ces interactions. Comme le montrent ces extraits, les élèves interrogent l'enseignant-chercheur sur les représentations des fractions et de l'addition de fractions. L'enseignant-chercheur fournit plusieurs indications sur les représentations attendues et rappelle, entre autres, qu'ils doivent utiliser des billes. Remarquons enfin que l'élève E8 déclare ne pas avoir produit de représentation de l'addition de fractions et attend l'approbation de l'enseignant-chercheur. Ce dernier l'invite alors à produire une représentation en recourant toutefois à des billes. Les interventions de l'enseignant-chercheur s'avèrent fécondes puisque tous ces élèves savent produire une représentation adéquate de l'addition des fractions, comme nous l'avons noté précédemment.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves E1, E2, E4 et E8 : tâche #2A - question de type C
Élève E1
EC – (À E1) Ce que je veux, ce n'est pas vraiment un rectangle qui est coupé. Ce que je veux, c'est par exemple, 3 billes sur 5 : tu fais 5 billes et t'en encercles 3. Tu as 1 bille sur 3, tu as 3 billes sur 8. E1 – Dans le fond, ce n'est pas compliqué. EC – Tu peux soit l'effacer ou venir faire le dessin ici à gauche. E1 – Ah, je vais l'effacer.
Élève E2
E2 – Ici, je l'ai mis avec les autres, mais c'est juste qu'il est noir. C'est tu correct ça ? EC – Au lieu de l'avoir encerclé, tu l'as mis en noir. E2 – C'est ça. EC – Ok, tu peux faire la même chose avec les autres, tu montres ton addition avec un dessin et tu donnes la réponse avec les calculs. E2 – Ok.
Élève 4
E4 – C'est comme ça tu parlais pour les billes ? EC – C'est exactement ça que je veux. Je voulais avoir les billes, et que tu encercles le paquet de billes qui correspond à la fraction. Ici, fais juste me marquer ton calcul avec les chiffres et ta réponse. E4 – Ok.
Élève E8
E8 – Ici, il y a juste ce numéro-là que je n'ai pas fait au complet mais j'ai fait les calculs. EC – Ok, tu as fait celui-là, celui-là… (référence aux questions précédentes) E8 – Tout le reste est fait aussi. EC – La seule chose ici, tu as fait des cercles et des rectangles qui sont séparés. Moi, ce que je veux, c'est des billes. Comme ici, 3 billes sur 5, tu dessines 5 billes et t'en prends 3. Si tu avais à le faire avec le 1/3 et le 3/8, à quoi ça ressemblerait ? Tu peux le faire ici à gauche ton dessin. E8 – Ou en dessous. EC – Ou en dessous.

La **troisième tâche** inclut deux problèmes à résoudre ; ces problèmes impliquent les fractions utilisées dans les calculs faisant partie des questions de la seconde tâche. Chaque problème est suivi d'un espace réponse relativement important, ce qui permet à l'élève, s'il le désire, d'effectuer une représentation graphique des relations entre les données des problèmes. Avant de procéder à l'examen des conduites des élèves, il importe de mentionner qu'aucun des élèves ne réclame l'assistance de l'enseignant-chercheur durant la réalisation de cette tâche, ce qui est étonnant, considérant le fait qu'aucun d'entre eux ne parvient à résoudre correctement le premier problème proposé.

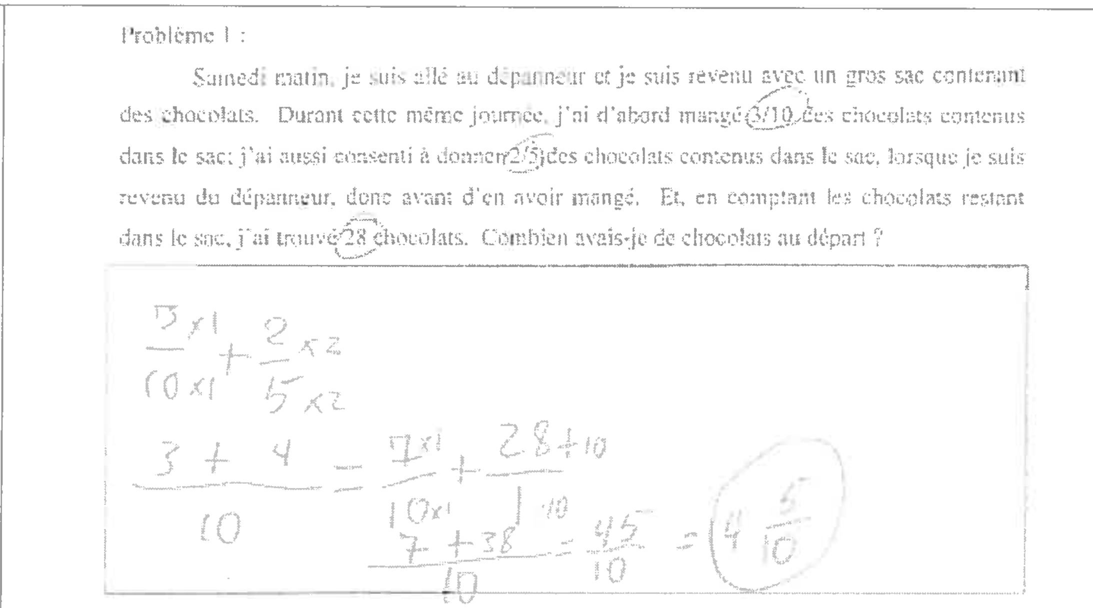
Le **premier problème de cette troisième tâche** (tâche #3A - problème #1) met en jeu une personne qui achète des morceaux de chocolat dans un dépanneur. En route vers sa demeure, cette dernière décide de partager son avoir avec des amis. La quantité de chocolat dont elle se défait est indiquée par deux fractions, soit 3/10 et 2/5. À la fin du problème, on indique qu'il ne reste que 28 morceaux de chocolat dans le sac du propriétaire. On cherche à trouver le nombre total de morceaux de chocolat que contenait le sac avant la distribution. Le libellé de ce problème fait partie des reproductions de quelques-unes des démarches des élèves que nous présentons plus loin.

La majorité des élèves semble prendre appui sur une représentation visuelle des données du problème, uniquement lorsque cette dernière est imposée par la consigne, comme c'était le cas lors de la seconde tâche. Dès que l'élève a la possibilité de court-circuiter cette représentation, il n'hésite pas à le faire. Cette tendance est perceptible dans la résolution des deux problèmes de cette troisième tâche. En effet, six élèves tentent de résoudre le premier problème sans proposer d'illustration. Seuls les élèves E3 et E7 laissent des traces d'une représentation graphique de certaines données du problème (les fractions). L'élève E3 se contente de représenter la fraction 3/10 et 2/5 à l'aide de billes, comme il l'avait fait à la tâche précédente. L'élève E7 accomplit un schéma comparable à celui l'élève E3 en se servant de rectangles. Leur travail est représenté à la page suivante.

E3	 Problème 1 : Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangé. Et, en comptant les chocolats restant dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ?
E7	 Problème 1 : Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangé. Et, en comptant les chocolats restant dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ?

Aucun des huit élèves n'a été en mesure de solutionner ce problème. Les élèves E1, E2, E4, E5, E6 et E7 opèrent correctement sur les deux fractions qui représentent la quantité de chocolat donnée (3/10 + 4/10 = 7/10). Ils réussissent aisément à mettre sur le même dénominateur les deux fractions et à trouver la somme de ces dernières. En revanche, aucun d'entre eux n'arrive à calculer la quantité originale de chocolats que contenait le sac avant la distribution, soit 40 morceaux. L'élève E1 montre une certaine logique lorsqu'il décide d'additionner 7/10 à 28/1 (7/10 + 28/1), mais sa démarche de calcul est incorrecte, comme le montre la reproduction suivante de sa démarche. Il obtient ainsi 45/10 et écrit le nombre fractionnaire correspondant à cette fraction.

E1



Problème 1 :

Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangé. Et, en comptant les chocolats restant dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ?

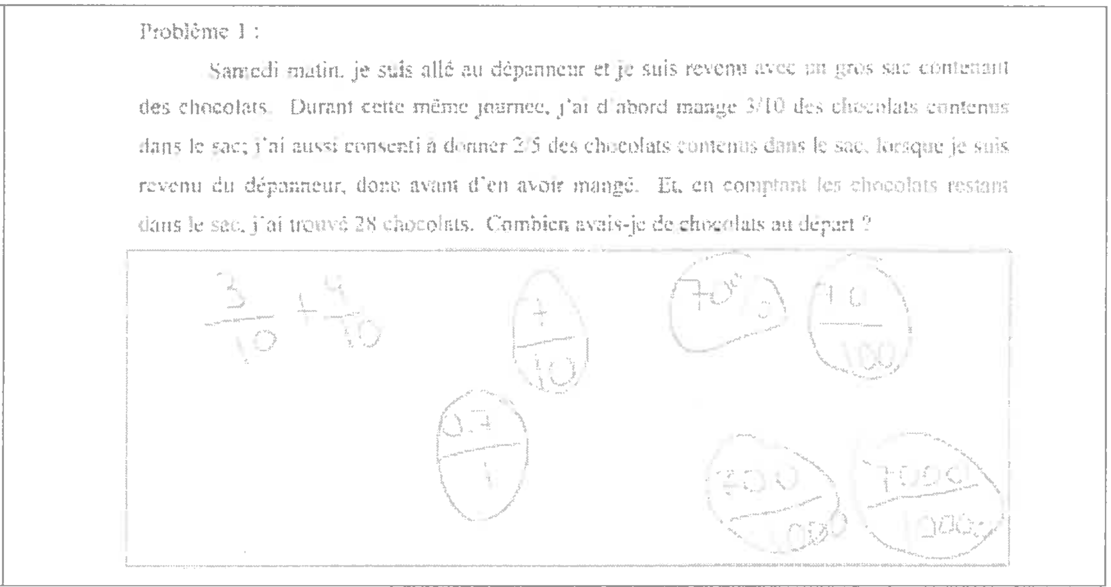
$\frac{3 \times 1}{10 \times 1} + \frac{2 \times 2}{5 \times 2}$

$\frac{3+4}{10} = \frac{7 \times 1}{10 \times 1} + \frac{28 \times 10}{1 \times 10}$

$\frac{7+38}{10} = \frac{45}{10} = 4\frac{5}{10}$

L'élève E2 se contente de donner une multitude de fractions équivalentes au résultat de l'addition des fractions 3/10 et 4/10. Voici la démarche de cet élève :

E2



Problème 1 :

Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangé. Et, en comptant les chocolats restant dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ?

$\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$ $\quad \frac{7}{10}$ $\quad \frac{0.7}{1}$ $\quad \frac{700}{1000}$ $\quad \frac{7000}{10000}$

L'élève E3 n'entreprend aucune démarche et ne laisse aucune trace de réponse. L'élève E4 réussit à additionner les fractions 3/10 et 2/5 pour obtenir 7/10. Par la suite, il décide de multiplier 28 (quantité restante de chocolats) par 10 (28 x 10 = 280). Il tentait sans doute de mettre ce nombre sur le même dénominateur que le résultat de son addition précédente. Il donne 280 morceaux comme réponse finale. Les élèves E5, E6 et E7 aboutissent tous avec une démarche presque identique. Ils trouvent facilement la somme des deux fractions qui représentent les morceaux donnés, mais arrêtent leurs calculs sans être capables de trouver la quantité de chocolats avant le partage.

Les traces de la démarche de l'élève E8, qui sont reproduites ci-dessous, sont difficilement interprétables. Cet élève décide d'utiliser 280 comme dénominateur commun. Il additionne ensuite les numérateurs 94 et 74 (94/280 + 74/280 = 168/280). Un point d'interrogation laisse croire qu'il a abandonné sa démarche avant de donner sens à ce calcul.

E8	Problème 1 : Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangé. Et, en comptant les chocolats restant dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ? $\frac{94+74}{280} = \frac{168}{280}$ 6?

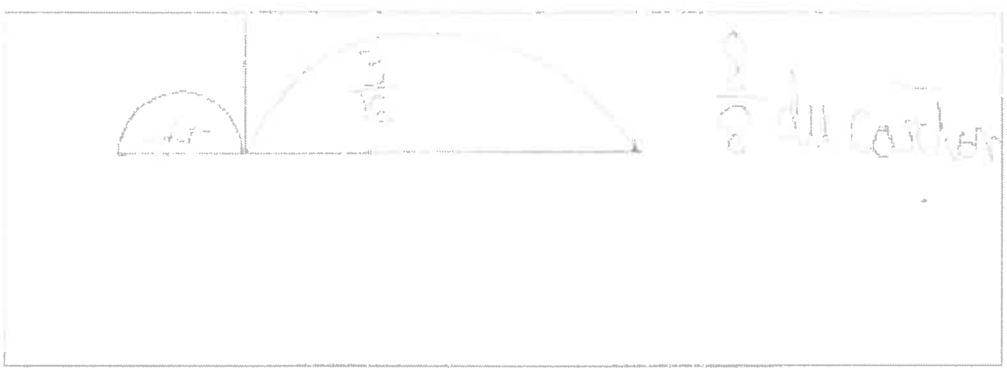
Le **deuxième problème de la troisième tâche** (tâche #3A - problème #2) fait intervenir une dessinatrice et indique la surface sur laquelle elle va peindre deux images. Deux fractions (1/4 et 3/16) représentent respectivement l'espace occupé par ces dessins sur le carton. Les élèves doivent déterminer quelle fraction correspond à l'espace occupé par ces deux dessins. Nous représentons plus bas la question telle que vue par les élèves. Le libellé de ce problème fait partie des reproductions de quelques-unes des démarches des élèves que nous présentons dans les pages qui suivent.

Les élèves E2, E5 et E8 ne proposent aucune représentation graphique des relations entre les données du problème. L'élève E1 ne fait que dessiner un minuscule carré (peu précis) et inscrit « 8 cm » à proximité de deux de ces côtés. La représentation graphique de l'élève E3 est particulière. Cet élève essaie de montrer l'espace occupé par les deux dessins en proposant une figure qui semble représenter une feuille disposée à plat. On reconnaît les dessins grâce à deux arcs de cercles consécutifs sous lesquels une fraction est inscrite. Son dessin est original, mais les proportions ne correspondent pas aux fractions du problème (surtout 3/16). Ce dernier a probablement additionné mentalement les fractions suivantes pour obtenir 8/8 comme réponse : 1/4 + 3/4 = 8/8 ; 3/4 au lieu de 3/16 est utilisé. L'image numérisée ci-dessous permet de voir le schéma de cet élève.

E3

Problème 2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe ¼ de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?

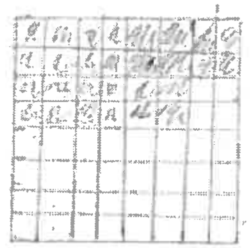


L'élève E4 prend soin de faire un carré précis séparé en 64 morceaux de même taille. Même s'il ne laisse aucune trace de calcul, on comprend très bien en visionnant son dessin qu'il a mis les deux fractions (1/4 et 3/16) sur le dénominateur commun 64 (8 x 8) en se référant à sa représentation graphique. La réponse donnée pour ce problème est 28/64, qu'il réduit pour laisser 7/16 comme résultat final. Voici les traces de la démarche de cet élève :

E4

Problème 2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe ¼ de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?



$\frac{28}{64}$ ou $\frac{7}{16}$

La représentation graphique produite par l'élève E6 est très imprécise et approximative, comme le montre la reproduction ci-dessous. Cet élève dessine un rectangle très mal défini dans le coin supérieur gauche de l'espace réponse. Ce rectangle est divisé en huit sections plus ou moins égales dont 3 sont hachurées. Évidemment, la fraction 7/16 est irréductible, mais l'élève a semblé vouloir la réduire à tout prix car son dessin propose la fraction 3/8.

E6

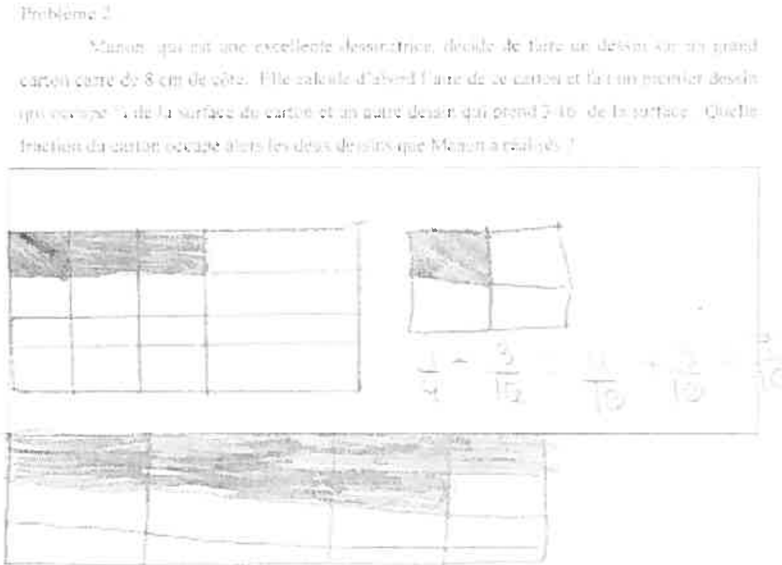
Problème 2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe ¼ de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?

$\frac{1\times4}{4\times4} + \frac{3}{16}$

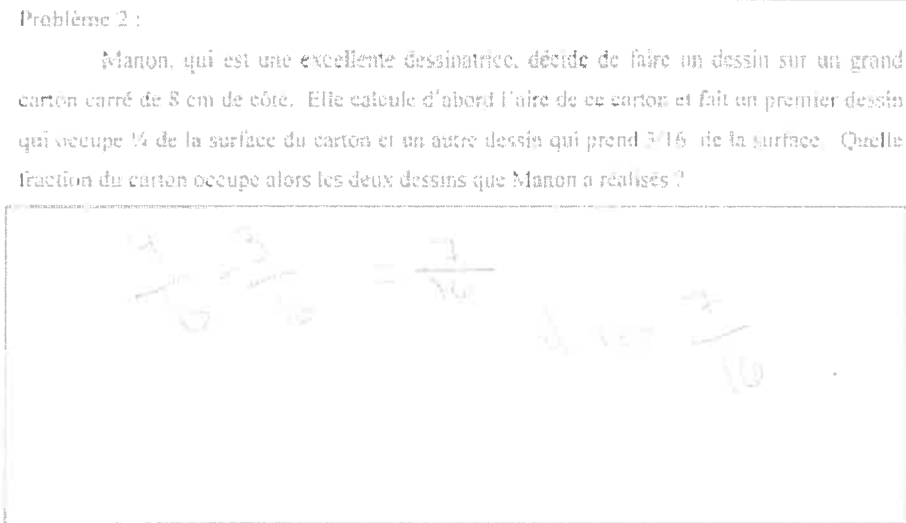
$\frac{4}{16} + \frac{3}{16}$ $\frac{7}{16}$

Sans être très précis, l'élève E7 arrive tout de même à représenter les deux fractions ainsi que leur somme à l'aide de trois rectangles différents. Les fractions sont représentées sans dénominateur commun. Voici une reproduction de la démarche de cet élève :

E7	

En ce qui concerne la résolution mathématique de ce problème, cinq élèves sur huit arrivent au bon résultat (7/16). Il faut noter que l'élève E1 ne parvient pas au bon résultat, en raison d'une simple erreur de calcul, soit 3 + 4 = 6. Sa réponse finale est donc 6/16, fraction qu'il réduit de manière erronée et incomplète à 3/6. L'image de la page suivante représente la démarche de l'élève E2 qui est représentative de celle des autres élèves ayant obtenu un bon résultat.

E2

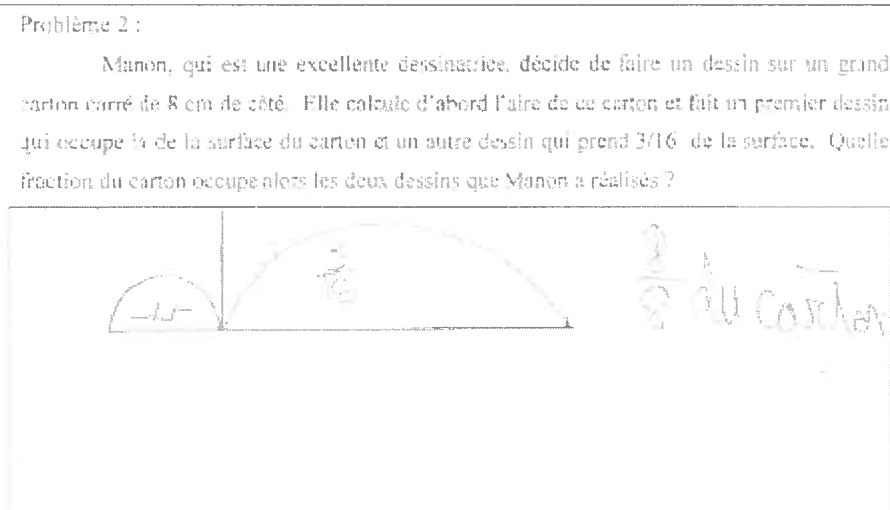


Problème 2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe ¼ de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?

L'élève E3 interprète mal les fractions et confond sûrement 3/16 avec 3/4. En effet, dans sa représentation, il semble laisser entendre que 1/4 + 3/16 = 8/8. Il donne aussi « 8/8 du carton » comme réponse au problème. Voici une reproduction de la conduite de cet élève :

E3



Problème 2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe ¼ de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?

Enfin, l'élève E5 est très loin d'une démarche attendue. Il inscrit seulement les deux écritures suivantes, soit 8 cm – 2 cm et 1/4 = 2 cm, l'une en dessous de l'autre sans indiquer un résultat final.

Le tableau VII présente une synthèse des caractéristiques générales des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches que comporte la première situation sur l'addition de fractions.

Tableau VII

Caractéristiques générales des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches sur l'addition de fractions

<table>
<tr><th colspan="6">Première tâche : représentation de fractions ayant des dénominateurs différents</th></tr>
<tr><th colspan="2">Question #1</th><th colspan="2">Question #2</th><th colspan="2">Question #3</th></tr>
<tr><th>Réponse erronée</th><th>Réponse juste</th><th>Réponse erronée</th><th>Réponse juste</th><th>Réponse erronée</th><th>Réponse juste</th></tr>
<tr><td>---</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8</td><td>---</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8</td><td>----</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E7-E8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="6">Seconde tâche : représentation de fractions, représentation de l'addition de fractions, addition de fractions</th></tr>
<tr><th colspan="2">Question #1 : 3/10 + 2/5 + 1/10 = 8/10</th><th colspan="2">Question #2 : 1/4 + 3/16 + 1/8</th><th colspan="2">Question #3 : 1/3 + 3/8</th></tr>
<tr><th colspan="2">a) représentation des fractions</th><th colspan="2">a) représentation des fractions</th><th colspan="2">a) représentation des fractions</th></tr>
<tr><th>Incorrecte /absente /indépendante</th><th>Correcte</th><th>Incorrecte /absente /indépendante</th><th>Correcte</th><th>Incorrecte /absente /indépendante</th><th>Correcte</th></tr>
<tr><td>E2-E3-E6-E8</td><td>E1-E4-E5- E7</td><td>E1-E3-E7-E8</td><td>E2-E4-E5-E6</td><td>E1-E2-E3-E5-E6-E7-E8</td><td>E4</td></tr>
<tr><th colspan="2">b) représentation de l'addition des fractions</th><th colspan="2">b) représentation de l'addition des fractions</th><th colspan="2">b) représentation de l'addition des fractions</th></tr>
<tr><th>Incorrecte ou absente</th><th>Correcte</th><th>Incorrecte ou absente</th><th>Correcte</th><th>Incorrecte ou absente</th><th>Correcte</th></tr>
<tr><td rowspan="4">E2-E3-E6-E8</td><td rowspan="4">E1- E4-E5- E7</td><td>E2-E3-E6-E8</td><td>E1-E4-E5-E7</td><td>E5-E6-E7</td><td>E1-E2-E3-E4-E8</td></tr>
<tr><th colspan="2">c) addition des fractions</th><th colspan="2">c) addition des fractions</th></tr>
<tr><th>Réponse erronée</th><th>Réponse juste</th><th>Réponse erronée</th><th>Réponse juste</th></tr>
<tr><td>---</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8</td><td>E7</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6-E8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="7">Troisième tâche : résolution de problèmes</th></tr>
<tr><th colspan="3">Problème #1 : fractions → 3/10 et 2/5</th><th colspan="4">Problème #2 : fractions → 1/4 et 3/16</th></tr>
<tr><td>Réponse erronée ou absente</td><td>Réponse partielle</td><td>Représentation des données du problème</td><td>Réponse erronée ou absente</td><td>Réponse juste</td><td colspan="2">Représentation des données du problème</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E3-E8</td><td rowspan="2">E1-E2-E4-E5-E6-E7</td><td rowspan="2">E3-E7</td><td rowspan="2">E1-E3-E5</td><td rowspan="2">E2-E4-E6-E7-E8</td><th>Inadéquate / incomplète/absente</th><th>Adéquate ou partielle</th></tr>
<tr><td>E2-E3-E5-E6-E8</td><td>E4-E7</td></tr>
</table>

Comme montre le tableau VII, tous les élèves, sauf l'élève E7 qui produit une réponse erronée pour la seconde addition, savent effectuer correctement les deux additions de fractions qui leur sont proposées. Il s'agit d'un progrès important. En effet, lors de l'épreuve présentée à l'entrée dans la séquence, seuls les élèves E3, E4 et E5 parvenaient à effectuer correctement au moins une des additions demandées. De plus, alors qu'à l'entrée dans la séquence, seul l'élève E4 pouvait produire une représentation adéquate d'au moins une des additions de fractions, à la suite de la première situation d'enseignement, tous les élèves, sauf l'élève E6, savent représenter correctement au moins une des additions de fractions. Enfin, comme en fait foi le tableau VII, cinq élèves, soit les élèves E2, E4, E6, E7 et E8, parviennent à résoudre adéquatement le second problème ; six élèves, soit les élèves E1, E2, E4, E5, E6 et E7, se montrent capables de traiter convenablement une partie des informations présentes dans le premier problème. Ce résultat est comparable à celui obtenu lors de l'épreuve présentée à l'entrée.

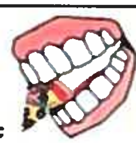
3.5.1.1.2. Conduites des élèves à chacune des tâches portant sur la soustraction, tâches présentées à la suite de l'observation de la capsule

Nous examinons les conduites de chacun des élèves à chacune des tâches présentées lors de l'expérimentation sur l'addition de fractions, puis nous résumons dans un tableau les principales caractéristiques des conduites de ces élèves.

Avant de procéder à ce travail, il importe de rappeler que les animations visant la construction d'un rapport plus adéquat aux fractions, ainsi qu'aux additions et soustractions de fractions, partagent un même environnement et utilisent des symboles très similaires. Les questions liées à la soustraction de fractions sont aussi de mêmes types que celles qui concernent l'addition de fractions.

La **première tâche** comporte trois questions à choix multiples. Chacune de ces questions est directement liée au visionnement de la capsule d'enseignement informatisée. Pour bien situer l'élève et s'assurer qu'il fasse le lien entre les questions de compréhension qui lui sont posées et l'animation qu'il vient de visualiser, certaines images significatives empruntées à l'animation sont insérées dans le texte. Les questions portent notamment sur la compréhension des règles de base qui régissent la soustraction de fractions (dénominateurs communs, tailles des morceaux à retrancher, séquence des actions à effectuer, etc.).

La **première question de la première tâche** (tâche #1S - question de type A), que nous reproduisons ci-dessous, interroge l'élève sur l'utilité d'une mâchoire avalant une pointe de pizza dans l'animation qu'il vient de voir. Cette dernière servait à symboliser la disparition d'une pointe de pizza, montrant une interprétation du sens de la soustraction de fractions.

1. Quel est le rôle de la mâchoire  dans l'animation ?

a) Obtenir deux fractions ayant un même numérateur.
b) Obtenir deux fractions ayant un même dénominateur.
c) Représenter l'ajout d'une pointe de pizza dans l'opération.
d) Représenter la disparition d'une pointe de pizza dans l'opération.

Tous les élèves, sauf les élèves E1 et E2, répondent correctement à cette question Les élèves E1 et E2 déclarent que la mâchoire sert à obtenir deux fractions ayant un même dénominateur. Ces deux élèves ont sans doute cru que la mâchoire avait la même utilité que le couteau dans l'animation sur l'addition de fractions ; dans cette dernière animation, le couteau permettait de séparer les pointes d'une pizza afin d'obtenir une série de morceaux identiques.

La **deuxième question de la première tâche** (tâche #1S - question de type B), que nous reproduisons à la page suivante, interroge l'élève sur les tailles respectives des pointes de deux pizzas et leur impact sur la soustraction de fractions.

2. Regarde le dessin du bas.

Pourquoi on ne peut pas enlever la partie de la pizza de droite à la pizza de gauche et dire qu'il ne reste que 1/9 de pizza en tout ?

a) Parce les deux pizzas ne sont pas séparées avec des pointes identiques.
b) Parce que la pizza de droite est trop petite.
c) Parce que les deux pizzas n'ont pas la même forme.
d) Parce que les deux pizzas ne sont pas placées dans le bon ordre.

Il est assez surprenant de remarquer que seulement la moitié des élèves ont répondu correctement à cette seconde question. Les élèves E1, E3, E4 et E7 affirment à tort qu'on ne peut pas enlever la partie de la pizza de droite à la pizza de gauche et dire qu'il ne reste que 1/9 de pizza en tout car la pizza de droite est trop petite. Un taux d'échec aussi élevé pour une question qui semble relativement simple provient peut-être d'une lecture trop rapide des choix de réponse. Ces élèves ont sans doute interprété le choix b) de la manière suivante : Parce que les morceaux de la pizza de droite sont trop petits.

La **troisième question de la première tâche** (tâche #1S- question de type C) porte sur les modifications à apporter aux pointes des pizzas pour permettre leur soustraction. Plusieurs stratégies sont offertes aux élèves sous forme de choix de réponses. Tous les élèves, sauf l'élève E6, répondent correctement à cette troisième question. L'élève E6 propose de ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et de soustraire les fractions. Voici la question ainsi adressée aux élèves :

3. Que faudrait-il faire pour pouvoir soustraire les deux pizzas lorsqu'elles sont représentées comme sur l'image du haut ?

a) Ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et soustraire.
b) Obtenir deux pizzas avec des pointes de même grosseur.
c) Ne pas tenir compte de la pointe plus grosse dans la pizza de droite.
d) Ajouter une pointe de plus dans la pizza de gauche et soustraire ensuite.

La **deuxième tâche** comporte trois questions principales. Ces questions impliquent des calculs avec des fractions différentes de celles examinées durant l'animation.

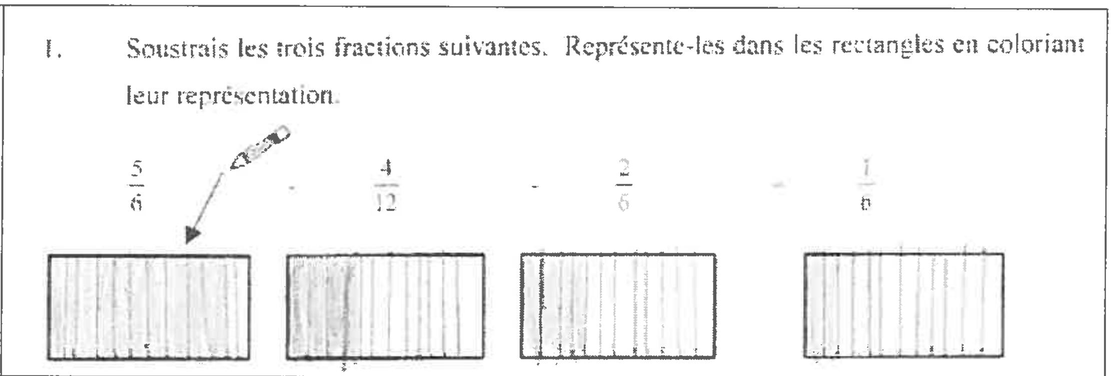
La **première question de la deuxième tâche** (tâche #2S - question de type A) demande aux élèves de représenter, dans des rectangles prédéfinis, trois fractions ainsi que la différence entre ces dernières (5/6 - 4/12 - 2/6 = 1/6). Le résultat de l'opération est intentionnellement donné à l'élève. Quatre rectangles de mêmes dimensions sont disposés sous chacune des fractions. Voici l'énoncé de cette question et les informations associées:

1. Soustrais les trois fractions suivantes. Représente-les dans les rectangles en coloriant leur représentation.

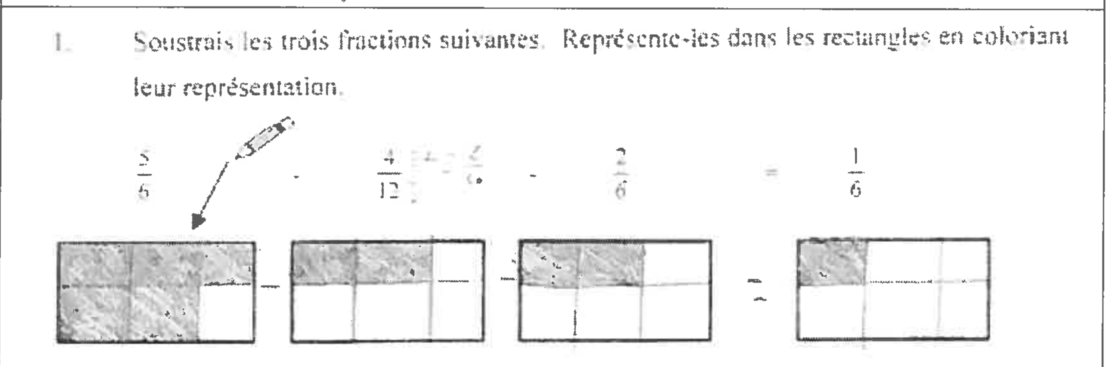
$$\frac{5}{6} - \frac{4}{12} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Les élèves E2, E4 et E7 décident de réduire la fraction 4/12 afin de travailler avec la fraction équivalente 2/6. Leurs représentations graphiques respectives montrent donc quatre rectangles séparés en six morceaux de même taille. Ils sont en mesure de schématiser chacune des fractions, ainsi que le résultat de la soustraction. Les élèves E5 et E6 font un travail comparable, mais décident d'utiliser 12 comme dénominateur commun. Chaque rectangle est donc séparé en 12 sections de même taille. L'élève E3 n'utilise pas de dénominateur commun pour sa représentation. Il prend tout de même le soin de réduire chaque fraction. L'élève E1 représente chaque fraction en utilisant les dénominateurs originaux de la question. Enfin, l'élève E8 fait un travail similaire en utilisant des billes. Les images suivantes sont représentatives des trois types de réponses rencontrées dans l'analyse de ce numéro.

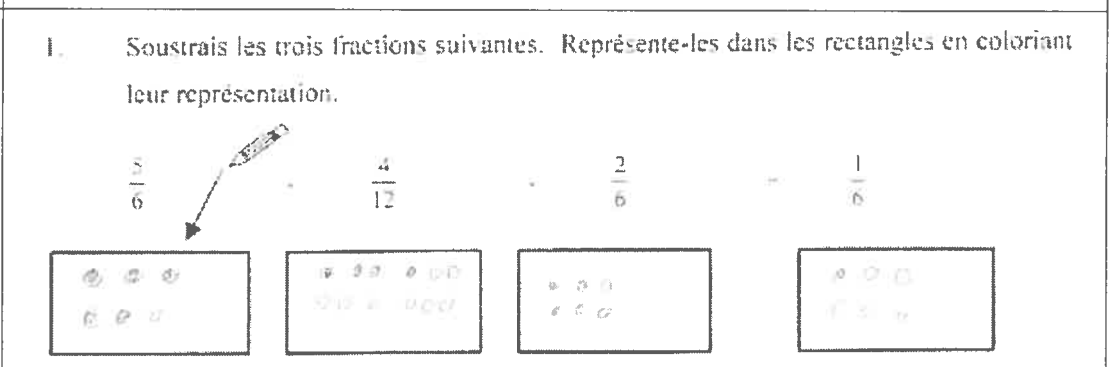
E5



E7



E8



Pour répondre à la première question de cette seconde tâche, un seul élève, soit l'élève E5, demande des précisions sur ce qu'il doit faire. Nous reproduisons à la page suivante les interactions très brèves entre cet élève et l'enseignant-chercheur. Les précisions apportées par l'enseignant-chercheur sont rapidement et adéquatement interprétées par cet élève qui produit une représentation adéquate de la soustraction de fractions.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E5 : tâche #2S - question de type A
Élève E5
E5 – Ici là, c'est quoi qu'il faut que je fasse ? EC – Ici, c'est un peu comme ici (EC indique le numéro 2 a) en référence). Je veux que tu fasses une représentation. Dans le rectangle, tu sépares en coloriant avec ton crayon à mine à quoi ça ressemble 5/6, 4/12 et 2/6 lorsqu'on décide de les additionner. Tu te rappelles de la pizza dans l'animation ? E5 – On les a mis en tous les mêmes dénominateurs. EC – Bien tu peux faire la même chose ?

La **deuxième question de la seconde tâche** (tâche #2S - question de type B) demande aux élèves de soustraire trois fractions dont les dénominateurs sont des multiples de 5 (19/25, 1/5, 4/25). Ils doivent ensuite représenter chaque fraction et leur différence dans un rectangle dont ils choisissent les dimensions. Finalement, un espace leur est alloué pour effectuer un calcul mathématique et donner le résultat de la soustraction. Nous reproduisons ci-dessous cette question.

2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat

a)Represente chaque fraction a soustraire dans un rectangle.  Exemple: 1/4	**Represente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{19}{25}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{4}{25}$	
b) Calculs: $\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} =$	

Les élèves E2, E4, et E7 représentent correctement chacune des fractions en utilisant 25 comme dénominateur commun. Parmi ces derniers, l'élève E4 offre la représentation la plus précise. En revanche, celle de l'élève E2, s'avère beaucoup moins rigoureuse (dessin fait à main levée sans règle). Les autres élèves, soit les élèves E1, E3, E5, E6 et E8, offrent une représentation, mais ne prennent pas en considération la recherche d'un dénominateur commun. L'élève E8 utilise de nouveau une schématisation basée sur une série de billes dont celles qui sont noircies représentent le numérateur, et ce, malgré une consigne claire demandant une représentation à l'aide de rectangle(s).

La représentation de la différence entre les trois fractions est réussie par seulement deux élèves, soit les élèves E4 et E7. L'élève E4 va même jusqu'à réduire le résultat (10/25) à sa plus simple expression (2/5). L'élève E7 se contente de représenter le résultat sans le réduire (10/25). Tous les autres élèves ont proposé une représentation non satisfaisante ou n'ont laissé aucune trace de schéma.

Enfin, seuls les élèves E5 et E6 ne réussissent pas à effectuer correctement la soustraction des fractions. Les autres élèves arrivent tous au bon résultat, c'est-à-dire 10/25. Parmi ces derniers, seul l'élève E4 donne une réponse réduite (2/5), comme il avait pris soin de faire à la question précédente. Pour mieux illustrer ces démarches, nous reproduisons quatre conduites représentatives dans les pages qui suivent.

E4

2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

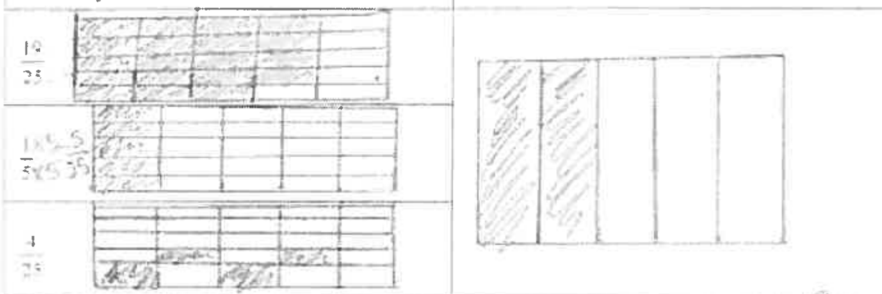
a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

Exemple: 1/4

Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.



b) Calculs: $\frac{19}{25}$ $\frac{1\times5}{5\times5}$ = $\frac{4}{25}$ $\frac{19}{25} - \frac{5}{25} - \frac{4}{25}$ $\frac{14}{25} - \frac{4}{25}$ $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ $\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$

E2

2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

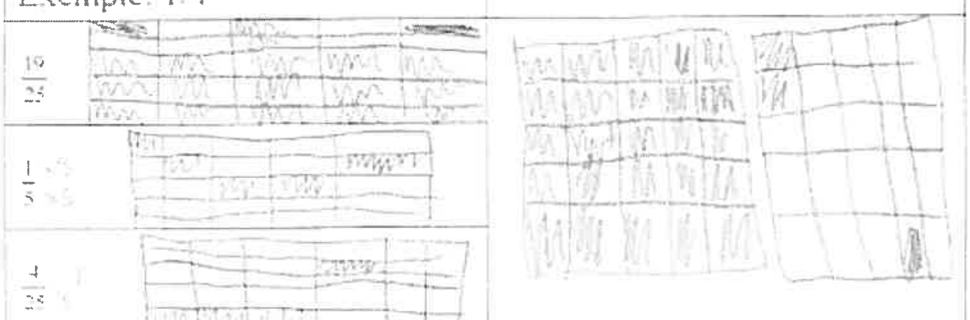
a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

Exemple: 1/4

Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.



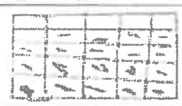
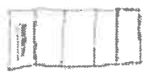
b) Calculs: $\frac{19}{25} - \frac{5}{25} - \frac{4}{25}$ $\frac{10}{25}$ $\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} =$

E1

2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

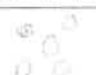
a)Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple: 1/4	Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{19}{25}$ 	$\frac{10}{25}$
$\frac{1}{5}$ 	
$\frac{4}{25}$ 	
b) Calculs: $\frac{19-5-4}{25} = \frac{10}{25}$	$\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{10}{25}$

E8

2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

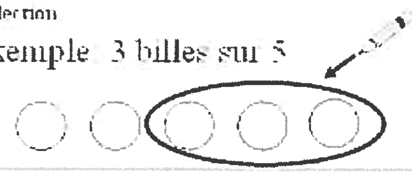
a)Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple: 1/4	Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{19}{25}$ 	
$\frac{1}{5}$ 	
$\frac{4}{25}$ 	
b) Calculs: $\frac{19-5-4}{25} = \frac{10}{25}$	$\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} =$

Dans la **troisième question de seconde tâche** (tâche #2S - question de type C), il est demandé aux élèves de trouver la différence entre les fractions 6/7 et 3/21. Les élèves doivent représenter chaque fraction et leur différence à l'aide d'une collection de billes. Enfin, un espace leur est alloué pour effectuer un calcul mathématique et donner le résultat de la soustraction. Nous reproduisons ci-dessous cette question.

3. **Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{21}$**

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la différence entre ces deux parties.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a)Represente chaque fraction à l'aide d'une collection Exemple 3 billes sur 5 	Represente la soustraction de fractions avec une seule collection
$\frac{6}{7}$	
$\frac{3}{21}$	
b) Calculs	$\frac{6}{7} - \frac{3}{21} =$

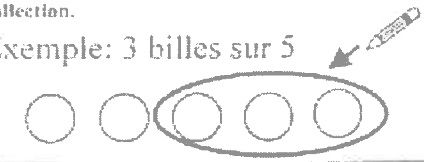
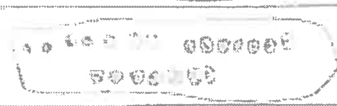
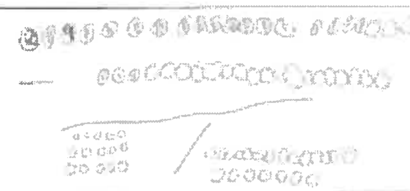
Les élèves doivent d'abord représenter chacune des fractions (6/7 et 3/21) à l'aide d'une collection de billes. Un seul élève, soit l'élève E2, décide de travailler avec le dénominateur commun 21 et de représenter les deux fractions suivantes : 18/21 et 3/21. Un autre élève, soit l'élève E4, procède à la réduction de la seconde fraction avant de la représenter. Tous les autres élèves (E1, E3, E5, E6, E7 et E8) représentent les deux fractions sans en modifier le dénominateur. Pour mieux illustrer ces démarches, nous reproduisons, plus loin, trois conduites représentatives.

E2

3. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{21}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la différence entre ces deux parties.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

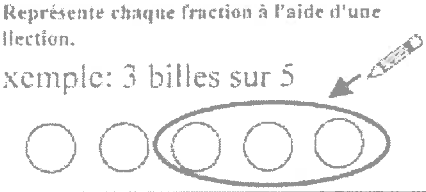
a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection. Exemple: 3 billes sur 5 	Représente la soustraction de fractions avec une seule collection.
$\frac{6}{7}$ 	
$\frac{3}{21}$ 	
b) Calculs: $\frac{6 \times 3}{7 \times 3} - \frac{3}{21}$ $\frac{15}{21}$	$\frac{6}{7} - \frac{3}{21} =$

E4

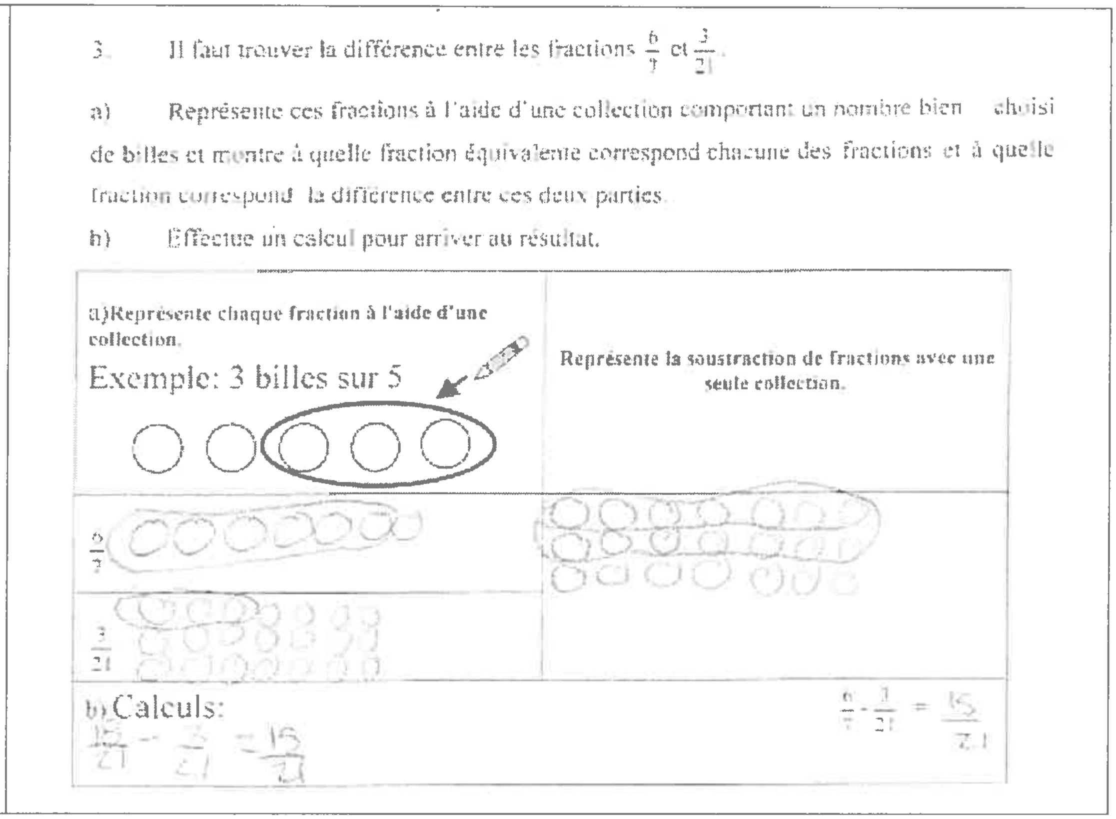
3. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{21}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la différence entre ces deux parties.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection. Exemple: 3 billes sur 5 	Représente la soustraction de fractions avec une seule collection.
$\frac{6}{7}$ 	
$\frac{3 \div 3}{21 \div 3} = \frac{1}{7}$ 	
b) Calculs: $\frac{6}{7} - \frac{3 \div 3}{21 \div 3}$ $\frac{6}{7} - \frac{1}{7}$ $\frac{6}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$	$\frac{6}{7} - \frac{3}{21} = \frac{5}{7}$

E7



3. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{21}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la différence entre ces deux parties.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection. Exemple: 3 billes sur 5	Représente la soustraction de fractions avec une seule collection.
$\frac{6}{7}$	
$\frac{3}{21}$	
b) Calculs: $\frac{18}{21} - \frac{3}{21} = \frac{15}{21}$	$\frac{6}{7} - \frac{3}{21} = \frac{15}{21}$

Les élèves E1, E3, E5, E6 et E8 ne font aucune représentation du résultat de la soustraction. Les élèves E2, E4 et E7 représentent tous la réponse à la question. Par contre, seul l'élève E4 juge important de réduire le résultat final à sa plus simple expression (15/21 = 5/7).

Les huit élèves sont aptes à opérer sur ces deux fractions. Ils parviennent tous au bon résultat (15/21), soit en mettant les deux fractions sur le dénominateur commun (21), ou en réduisant la fraction 3/21, cette réduction n'étant effectuée que par l'élève E4.

La **troisième tâche** concerne la résolution de problèmes impliquant les fractions qui ont été utilisées dans les calculs réalisés lors de la seconde tâche. Deux énoncés de problèmes sont ainsi présentés. L'élève dispose d'un espace suffisant pour effectuer les calculs et, s'il le juge pertinent, pour utiliser une représentation graphique des données.

Dans le **premier problème de la troisième tâche** (tâche #3S - problème #1), l'élève doit déterminer le nombre restant de missions qu'un jeune garçon doit accomplir pour terminer un jeu vidéo. Nous reproduisons ci-dessous l'énoncé de ce problème.

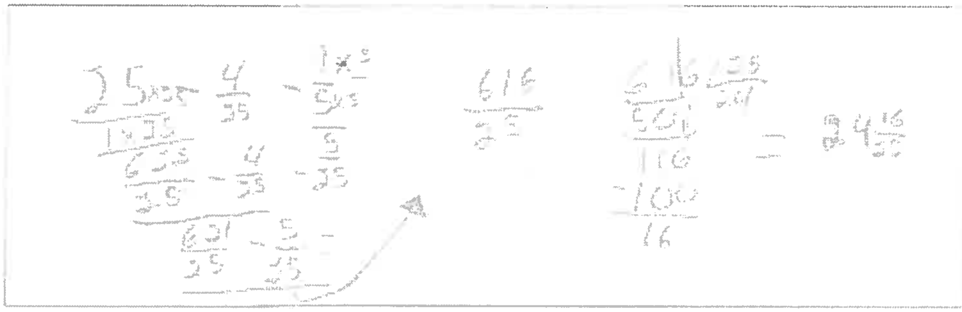
Problème #1 : Jean-François a reçu un jeu vidéo pour sa fête. Ce jeu comporte en tout 25 missions qu'il doit accomplir. La première semaine, il réussit à accomplir le 4/25 des missions. La deuxième semaine, il continue le jeu et vient à bout du 1/5 des 25 missions. Combien de missions lui reste-t-il pour s'amuser la troisième semaine ?

Une fois de plus, on remarque une disparition presque totale de la représentation graphique comme stratégie de résolution de problème lorsque cette dernière n'est pas réclamée dans la consigne. Aucun des huit élèves ne juge nécessaire de représenter le problème par un dessin. Il est intéressant de noter que, lors de la deuxième question de la seconde tâche, les élèves étaient invités à effectuer la soustraction « 19/25 – 1/5 – 4/25 » ; or, deux de ces fractions, soit les fractions 1/5 et 4/25 se retrouvent aussi dans le premier problème de la troisième tâche. Dans le cas de la soustraction des fractions à la seconde question de la deuxième tâche, seulement deux élèves sur huit font une erreur et n'arrivent pas au bon résultat. Lorsque la représentation est laissée de côté et que les fractions sont inscrites dans un énoncé de problème, comme c'est le cas dans le premier problème de la troisième tâche, trois élèves sur huit, soit les élèves E1, E4 et E6, ne parviennent pas à résoudre correctement le problème. L'élève E1 additionne les deux fractions du problème et obtient 9/25. Cette fraction représente évidemment le nombre de missions terminées et non les missions restantes. L'élève E4 tente de soustraire 4/25 et 1/5 au nombre qu'il croit représenter le nombre total de missions, nombre représenté par la fraction 25/1. Il met ensuite ce nombre sur le dénominateur 25 pour se retrouver avec la fraction 625/25. Il soustrait alors 4/25 et 5/25 à 625/25. Il achève son calcul en divisant 616 par 25 (625/25 – 4/25 – 5/25 = 616/25). Sa réponse finale est le nombre fractionnaire 24 et 16/25. Voici une numérisation de sa démarche :

E4

Problème 1 :

Jean-François a reçu un jeu vidéo pour sa fête. Ce jeu comporte en tout 25 missions qu'il doit accomplir. La première semaine il réussit à accomplir le 4/25 des missions. La deuxième semaine, il continue le jeu et vient à bout du 1/5 des 25 missions. Combien de missions lui restent-ils pour s'amuser la troisième semaine ?



L'élève E6 décide de mettre la fraction 1/25 sur le dénominateur 25 (5/25). Il place ensuite les deux fractions du problème côte à côte avec un symbole de soustraction entre les deux. Il arrête sa démarche après cette étape sans proposer de résultat final. Les autres élèves, soit les élèves E2, E3, E5, E7 et E8, parviennent à bien résoudre le problème. L'élève E7 fait une démarche mathématique presque irréprochable. Malheureusement, à la toute fin de sa démarche il fait une erreur de calcul (25 – 9 = 15) et laisse un résultat inexact (15 missions au lieu de 16) ; nous n'avons pas tenu compte de cette erreur dans notre jugement et ainsi, accordé une réussite du problème à cet élève. Notons toutefois que les élèves E3, E5 et E8 se contentent d'inscrire la fraction 16/25 comme réponse, mais les commentaires qu'ils ajoutent montrent qu'ils veulent exprimer l'idée suivante : il reste 16 missions sur 25. Pourtant, la question demande clairement de donner le nombre de missions à accomplir après deux semaines de jeux et non la fraction représentant le nombre de missions. Pour bien répondre au problème, ils auraient dû inscrire leur réponse à la manière de l'élève E2 (voir page 202).

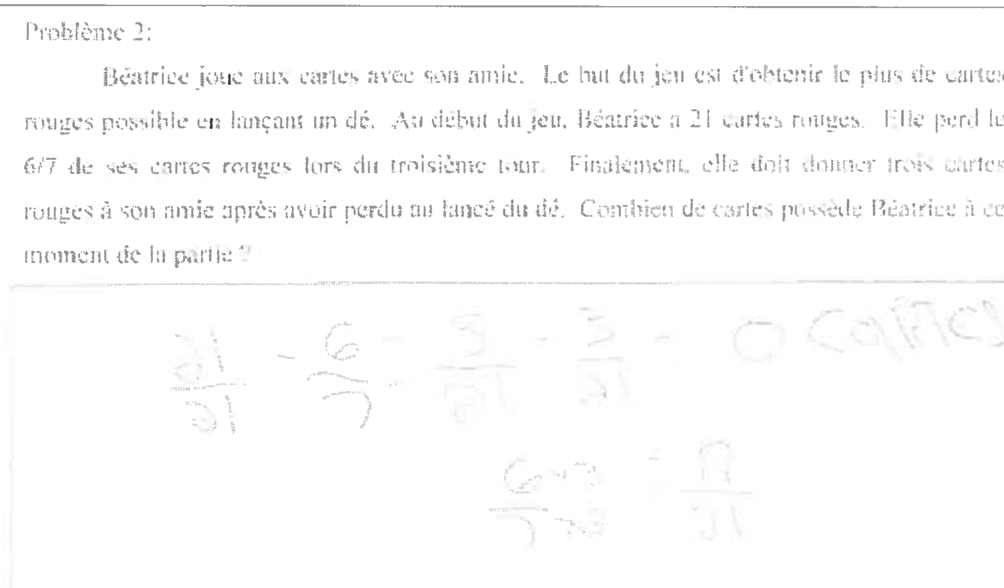
E2	Problème 1: Jean-François a reçu un jeu vidéo pour sa fête. Ce jeu comporte en tout 25 missions qu'il doit accomplir. La première semaine il réussit à accomplir le 4/25 des missions. La deuxième semaine, il continue le jeu et vient à bout du 1/5 des 25 missions. Combien de missions lui restent-ils pour s'amuser la troisième semaine ? 25 missions $4/25$ $1/5_{\times 5}$ $\frac{5}{25}$ = $\frac{9}{25}$ $\begin{array}{r} 25 \\ -9 \\ \hline 16 \end{array}$ 16 missions restantes
E3	Problème 1: Jean-François a reçu un jeu vidéo pour sa fête. Ce jeu comporte en tout 25 missions qu'il doit accomplir. La première semaine il réussit à accomplir le 4/25 des missions. La deuxième semaine, il continue le jeu et vient à bout du 1/5 des 25 missions. Combien de missions lui restent-ils pour s'amuser la troisième semaine ? $\frac{4}{25} + \frac{1^{\times 5}}{5_{\times 5}} = \frac{9}{25}$ $\frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ à faire

Le **deuxième problème de la troisième tâche** (tâche #3S - problème #2) qui a été proposé aux élèves est le suivant :

Problème #2 : Béatrice joue aux cartes avec son amie. Le but du jeu est d'obtenir le plus de cartes rouges possible en lançant un dé. Au début du jeu, Béatrice a 21 cartes rouges. Elle perd le 6/7 de ses cartes rouges lors du troisième tour. Finalement, elle doit donner trois cartes rouges à son amie après avoir perdu au lancer du dé. Combien de cartes possède Béatrice à ce moment de la partie ?

Aucun élève ne produit une représentation graphique des données de ce deuxième problème. Les élèves E2, E3 et E4 trouvent la réponse en utilisant une stratégie équivalente. Ils déterminent d'abord combien de cartes Béatrice a en main après en avoir perdu le 6/7 au troisième lancer du dé. Ils constatent alors que Béatrice n'a plus que trois cartes en sa possession. Ils font rapidement le constat que Béatrice se retrouve sans carte après le dernier lancer du dé car elle a dû donner 3 de ses cartes à son amie. Voici une démarche représentative d'une telle résolution :

E3



Problème 2:

Béatrice joue aux cartes avec son amie. Le but du jeu est d'obtenir le plus de cartes rouges possible en lançant un dé. Au début du jeu, Béatrice a 21 cartes rouges. Elle perd le 6/7 de ses cartes rouges lors du troisième tour. Finalement, elle doit donner trois cartes rouges à son amie après avoir perdu au lancé du dé. Combien de cartes possède Béatrice à ce moment de la partie ?

$\frac{21}{21} - \frac{6}{7} = \frac{3}{21} - \frac{3}{21} = 0$ cartes

$\frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{18}{21}$

Les élèves E1, E2, E5 et E6 font tous la même erreur d'interprétation. Dans le problème, il est mentionné que Béatrice perd 6/7 de ses cartes rouges. Ces élèves sont en mesure de mettre la fraction 6/7 sur 21 (18/21) afin de connaître le nombre de cartes perdues. Leur erreur consiste à associer le nombre 18 à la quantité restante de cartes et non à la quantité perdue. Ils enlèvent ensuite trois autres cartes à cette quantité pour terminer leur démarche avec 15/21. La numérisation suivante montre clairement cette erreur d'interprétation.

E6

Problème 2:

Béatrice joue aux cartes avec son amie. Le but du jeu est d'obtenir le plus de cartes rouges possible en lançant un dé. Au début du jeu, Béatrice a 21 cartes rouges. Elle perd le 6/7 de ses cartes rouges lors du troisième tour. Finalement, elle doit donner trois cartes rouges à son amie après avoir perdu au lancé du dé. Combien de cartes possède Béatrice à ce moment de la partie ?

$\frac{6\times3}{7\times3} - \frac{3}{21}$

$\frac{18}{21} - \frac{3}{21}$

$\frac{15}{21}$

L'élève E8 est seul à exploiter une stratégie complètement distincte. Au lieu d'effectuer deux soustractions successives, il procède par multiplication pour trouver le nombre de cartes restantes. Il soustrait alors 3 au produit de sa multiplication. Voici une numérisation de sa démarche :

E8

Problème 2:

Béatrice joue aux cartes avec son amie. Le but du jeu est d'obtenir le plus de cartes rouges possible en lançant un dé. Au début du jeu, Béatrice a 21 cartes rouges. Elle perd le 6/7 de ses cartes rouges lors du troisième tour. Finalement, elle doit donner trois cartes rouges à son amie après avoir perdu au lancé du dé. Combien de cartes possède Béatrice à ce moment de la partie ?

$\frac{6}{7}$ de $21 = 3 - 3 = 0$

Le tableau VIII présente une synthèse des caractéristiques générales des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches que comporte la seconde situation sur la soustraction de fractions.

Tableau VIII

Caractéristiques générales des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches sur la soustraction de fractions

Première tâche : représentation de fractions ayant des dénominateurs différents

Question #16		*Question #2*		*Question #3*	
Réponse erronée	Réponse juste	Réponse erronée	Réponse juste	Réponse erronée	Réponse juste
E1-E2	E3-E4-E5-E6-E7-E8	E1-E3-E4- E7	E2- E5-E6-E8	E6	E1-E2-E3-E4-E5-E7-E8

Seconde tâche : représentation de fractions, représentation de la soustraction de fractions, soustraction de fractions

Question #1 : 5/6 – 4/12 – 2/6 = 1/6		***Question #2 : 19/25 – 1/5 – 4/25***		***Question #3 : 6/7 – 3/21***	
a) représentation des fractions		**a) représentation des fractions**		**a) représentation des fractions**	
Incorrecte /absente /indépendante	**Correcte**	**Incorrecte /absente /indépendante**	**Correcte**	**Incorrecte /absente /indépendante**	**Correcte**
E1-E3-E8	E2-E4-E5-E6-E7	E1-E3-E5-E6-E8	E2-E4-E7	E1-E3-E5-E6-E7-E8	E2-E4
b) représentation de la soustraction de fractions		**b) représentation de la soustraction de fractions**		**b) représentation de la soustraction de fractions**	
Incorrecte ou absente	**Correcte**	**Incorrecte ou absente**	**Correcte**	**Incorrecte ou absente**	**Correcte**
E1-E3-E8	E2-E4-E5-E6-E7	E1-E2-E3-E5-E6-E8	E4-E7	E1-E3-E5-E6-E8	E2-E4*-E7 ***réduction de la fraction**
		c) soustraction des fractions		**c) soustraction des fractions**	
		Réponse erronée	**Réponse juste**	**Réponse erronée**	**Réponse juste**
		E5-E6	E1-E2-E3-E4-E7-E8	---	E1-E2-E3-E4*-E5-E6-E7-E8 *réduction de la fraction

Troisième tâche : résolution de problèmes

Problème #1 : fractions → 4/25 et 1/5			**Problème #2 : fraction → 6/7**		
Réponse erronée ou absente	Réponse juste	Représentation des données du problème	Réponse erronée ou absente	Réponse juste	Représentation des données du problème
E1-E4-E6	E1-E2-E3 - E5-E6-E7-E8	---	E1-E2-E5-E6	E2-E3-E4-E8	---

Comme le montrent les résultats consignés au tableau précédent, cinq élèves se montrent capables de représenter adéquatement les soustractions de fractions faisant partie d'au moins une des tâches portant sur la représentation et la soustraction de fractions. Il s'agit d'un progrès appréciable, compte tenu du fait qu'à l'entrée dans la séquence d'enseignement, aucun des élèves n'était en mesure de le faire. À la suite des capsules d'enseignement, on observe aussi que six élèves savent effectuer correctement les deux soustractions qui leur sont présentées, alors qu'un seul élève pouvait le faire au moment de l'entrée dans la séquence. Enfin, tous les élèves savent résoudre correctement un des deux problèmes impliquant une soustraction de fractions qui leur sont présentés à la suite des capsules d'enseignement. Parmi ceux-ci, quatre réussissent à résoudre correctement les deux problèmes présentés. Comme nous l'avons indiqué précédemment, les interactions entre l'enseignant-chercheur et les élèves, lors de la réalisation des tâches accompagnant cet enseignement sur la soustraction de fractions, ont possiblement contribué à engager certains des élèves dans des démarches pertinentes de réalisation et d'interprétation des tâches. Il fallait toutefois que ces élèves disposent de connaissances suffisantes pour tirer profit de ces interactions et des interventions de l'enseignant-chercheur.

3.5.1.2. Analyse des conduites et des interactions lors des situations consacrées à la multiplication de fractions

Lors de l'enseignement de la multiplication de fractions, les élèves sont d'abord invités à observer diverses capsules. Cette observation est orientée par des questions. Nous rendons compte d'abord des conduites et des interactions lors du visionnement de ces capsules. Nous reproduisons ces diverses capsules ; le lecteur est invité à consulter les descriptions plus détaillées présentées au chapitre méthodologique.

3.5.1.2.1. Conduites des élèves à chacune des tâches portant sur la multiplication de fractions, tâches présentées à la suite de l'observation de la capsule

Nous examinons les conduites de chacun des élèves à chacune des tâches présentées lors de l'expérimentation sur la multiplication de fractions, puis nous résumons dans un tableau les principales caractéristiques des conduites de ces élèves.

La **première tâche** comporte trois questions à choix multiples. Chacune de ces questions est directement liée au visionnement d'une capsule d'enseignement informatisée. Pour bien situer l'élève et s'assurer qu'il fasse le lien entre les questions de compréhension qui lui sont posées et l'animation qu'il vient de visualiser, certaines images significatives empruntées à l'animation sont insérées parmi le texte. Les questions portent notamment sur la compréhension du sens de l'opération, sur la représentation de l'opération et sur les règles de base qui régissent la multiplication de fractions.

La **première question de la première tâche** (tâche #1M – question de type A) interroge l'élève sur la signification mathématique d'une animation qui propose l'interprétation suivante de l'écriture « 1/4 x 2/3 » : 1/4 de 2/3. L'élève doit choisir la phrase qui semble le mieux expliquer ce que cette animation représente. Nous reproduisons ci-dessous la question adressée à l'élève.

1. Dans la figure ci-dessous, nous voyons que l'écriture $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ peut se lire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

Quelle phrase semble le mieux expliquer ce que cette image représente ?

a) Nous allons prendre les $\frac{1}{4}$ de la fraction $\frac{2}{3}$.

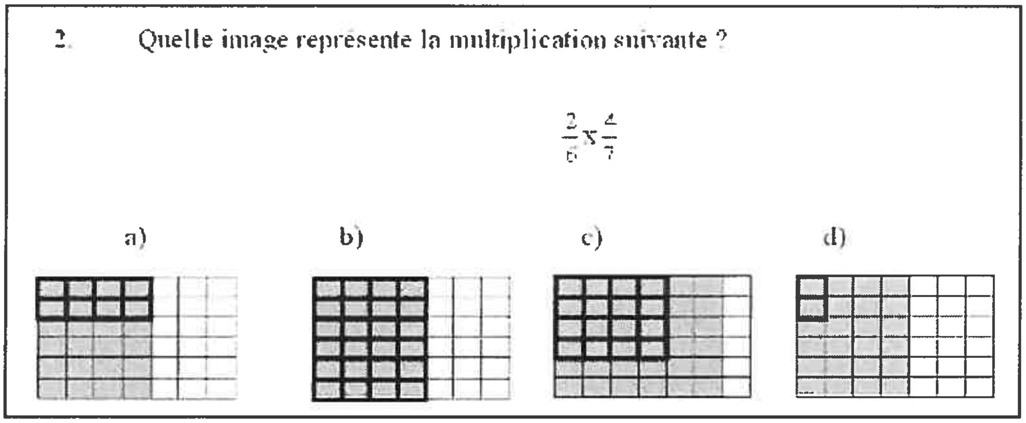
b) Nous allons prendre les $\frac{2}{3}$ de la fraction $\frac{1}{4}$.

c) La fraction $\frac{1}{4}$ est équivalente à la fraction $\frac{2}{3}$.

d) Il manque $\frac{1}{4}$ pour compléter la fraction $\frac{2}{3}$.

Les élèves E1, E5, E7 et E8 choisissent la bonne réponse a). Selon eux, l'animation vue à l'ordinateur avait pour but de symboliser une opération consistant à prendre le 1/4 de la fraction 2/3. Les élèves E3 et E4 sélectionnent la lettre c) en guise de réponse, alors que les élèves E2 et E6 optent pour la lettre b).

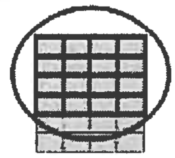
À **la deuxième question de la première tâche** (tâche #1M – question de type B), l'élève doit identifier parmi quatre schémas celui qui représente la multiplication de fractions suivante : 2/6 x 4/7. Nous reproduisons ci-dessous cette seconde question.



Les élèves E1, E4, E5, E6 et E7 choisissent tous la bonne réponse, c'est-à-dire la lettre a). Les élèves E2 et E8 font une erreur en sélectionnant la lettre c). Enfin, l'élève E8 ne fait aucun choix parmi les quatre proposés.

La **troisième question de la première tâche** (tâche #1M – question de type C) sonde la compréhension des élèves au niveau du système employé pour représenter visuellement la multiplication de fractions. Dans un tableau rectangulaire, une zone est mise en évidence à l'aide d'une bordure foncée entourant une partie correspondant au produit des deux fractions impliquées dans la question. Les élèves doivent donc choisir la réponse qui résume cette idée. Voici la question adressée aux élèves :

3. Que représentent les sections avec une bordure foncée à la question #2 ?



a) Le numérateur de la fraction qui multiplie.
b) Le résultat de la multiplication.
c) Le dénominateur de la fraction multipliée.
d) Le numérateur de la fraction obtenue comme résultat.

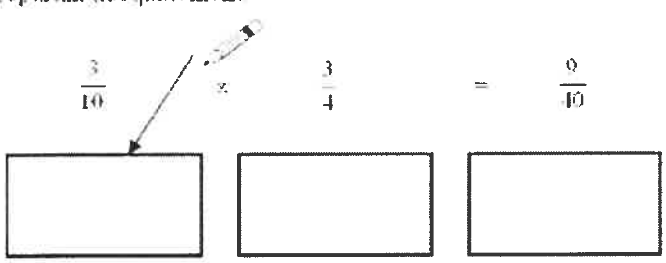
Les élèves E1, E5, E6, E7 et E8 répondent correctement à la question #3. Les autres élèves font une erreur en sélectionnant soit la réponse b) (E3), soit la réponse c) (E2 et E4). Par ailleurs, il faut convenir que cette question est relativement ambiguë.

La **deuxième tâche** comporte trois questions principales. Ces questions impliquent des calculs avec des fractions différentes de celles examinées durant l'animation. On demande également une représentation semblable à celle exigée lors des épreuves d'entrée et de sortie de la séquence d'enseignement.

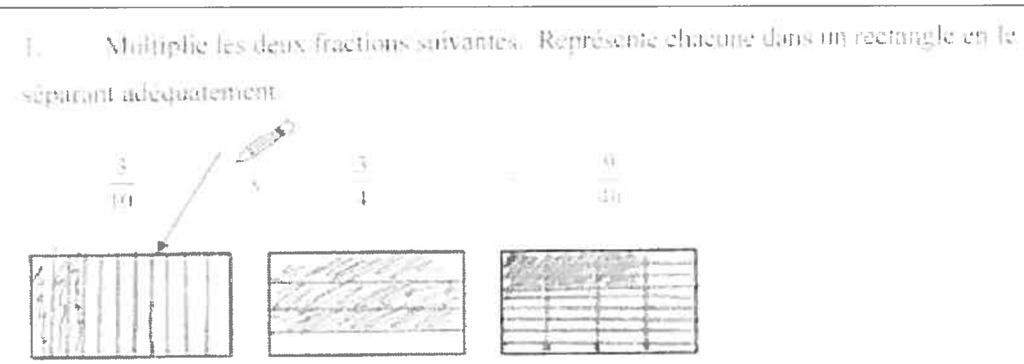
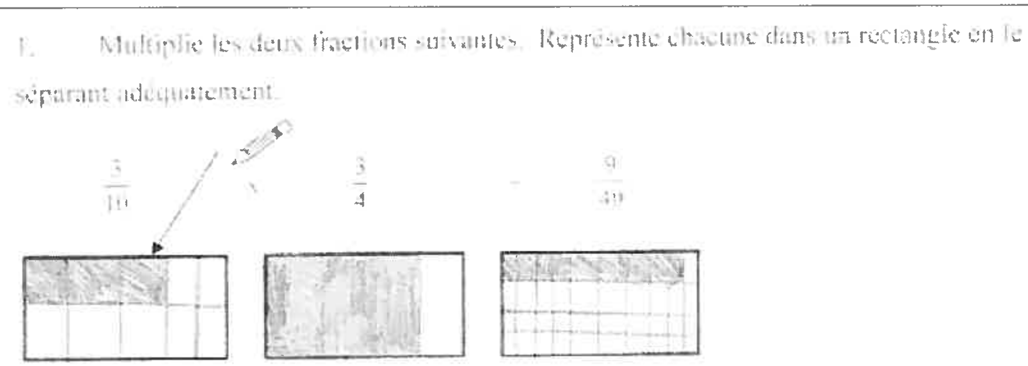
La **première question de la deuxième tâche** (tâche #2M – question de type A) demande aux élèves de représenter des fractions dans des rectangles prédéfinis, ainsi que le produit de ces dernières (3/10 x 3/4 = 9/40). Le résultat de l'opération est intentionnellement donné à l'élève. Trois rectangles de même dimension préalablement imprimés sont présents sous chacune des fractions. Nous reproduisons ci-dessous cette première question.

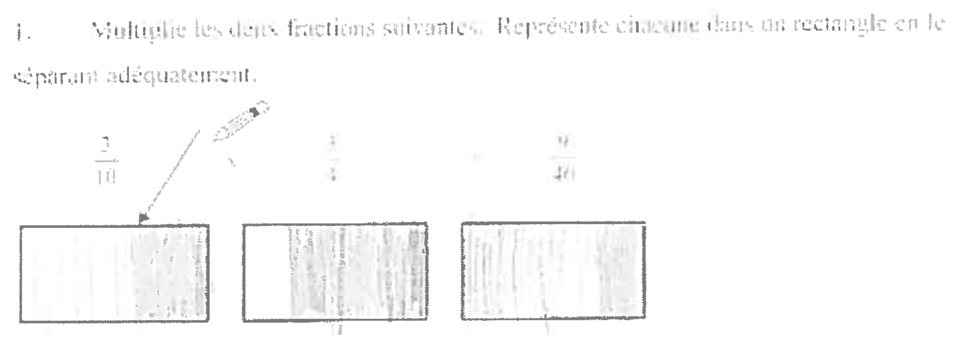
1. Multiplie les deux fractions suivantes. Représente chacune dans un rectangle en le séparant adéquatement.

$\frac{3}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{40}$



Tous les élèves produisent des représentations relativement satisfaisantes des fractions. En revanche, la représentation graphique d'une multiplication de fractions ne semble pas être une tâche naturelle pour les élèves. En effet, seul l'élève (E4) offre une représentation respectant le modèle exploité dans l'animation vue sur ordinateur. Il représente d'abord les deux fractions à multiplier de façon précise. On remarque sa compréhension de l'opération dans le schéma qu'il produit pour montrer le résultat de la multiplication. Il sépare son rectangle en dix sections horizontales de même hauteur. Il sépare ensuite le même rectangle à la verticale en quatre colonnes de même largeur. Lorsque nous multiplions les deux numérateurs des fractions en cause, nous obtenons neuf comme résultat. L'élève prend bien soin de noircir neuf cases de son rectangle, tout en respectant les contraintes imposées par les deux fractions du problème (il sélectionne trois rangées horizontales et trois colonnes verticales). Il est possible d'examiner son travail sur l'image ci-dessous. Il est aussi possible de voir les productions des élèves E7 et E6 qui sont représentatives du travail de schématisation des autres élèves ayant produit des représentations fort approximatives.

E4	
E7	

E6	

Ce faible taux de réussite de la représentation de la multiplication (surtout du produit) provient peut-être de la faible utilisation de cette stratégie didactique, tant par les enseignants que par les auteurs de manuels scolaires reliés à l'enseignement des mathématiques. Les extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E3, que nous reproduisons ci-dessous, témoignent bien des malaises observés chez les élèves dans la réalisation de cette tâche.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E3 : tâche #2M – question de type A
Élève E3
E3 – Ici, c'est quoi qu'il faut faire, je ne comprends pas. EC – Ici, tu as une multiplication. Je multiplie 3/10 et 3/4. Comme on a fait dans l'animation (EC indique l'écran). Il est arrivé quelque chose avec les carrés, on les a animés d'une certaine manière. Avec les deux fractions qu'il y a là, sépare le rectangle de la même manière. Sépare les deux rectangles qui sont ici (EC indique le questionnaire), puis représente la réponse. E3 – Ouf… Y s'est passé beaucoup de choses dans l'animation. Je me rappelle des couleurs qui bougent et qui se transforment en genre de lignes… Je vais avoir besoin de la regarder encore. EC – Apporte ton questionnaire avec toi et retourne la voir.

Dans la **deuxième question de la seconde tâche** (tâche #2M – question de type B), il est demandé aux élèves de multiplier les fractions 5/9 et 2/4. Les élèves doivent aussi représenter chaque fraction et leur produit dans un rectangle dont ils choisissent les dimensions. Enfin, un espace leur est alloué pour effectuer la multiplication. Nous reproduisons cette deuxième question à la page suivante.

2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle Exemple: 1/4	Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle
$\frac{5}{9}$	
$\frac{2}{4}$	

b) Calculs: $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} =$

Au niveau de la représentation des deux fractions concernées dans cette opération, aucun des huit élèves ne s'attarde à réduire la fraction 2/4 afin de travailler avec 1/2. Ils se contentent de diviser le rectangle en quatre sections plus ou moins égales et d'hachurer ou de noircir deux sections. Un procédé similaire est utilisé pour la fraction 5/9. Les représentations des élèves E3, E4 et E6 sont toutefois plus précises. Nous reproduisons, à la page 213, les représentations des élèves E6 et E2 qui illustrent bien les différences entre les représentations satisfaisantes (celle de l'élève E6) et celles fort approximatives (celle de l'élève E2) produites par les élèves.

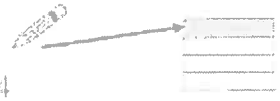
E6

2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

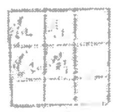
a) Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle.



Exemple: 1/4

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.

$\frac{5}{9}$



$\frac{2}{4}$

b) Calculs: $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{5 \times 2}{9 \times 4} = \frac{10}{50} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$

E2

2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

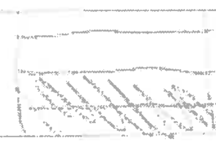
a) Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle.

Exemple: 1/4

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.

$\frac{5}{9}$

$\frac{2}{4}$

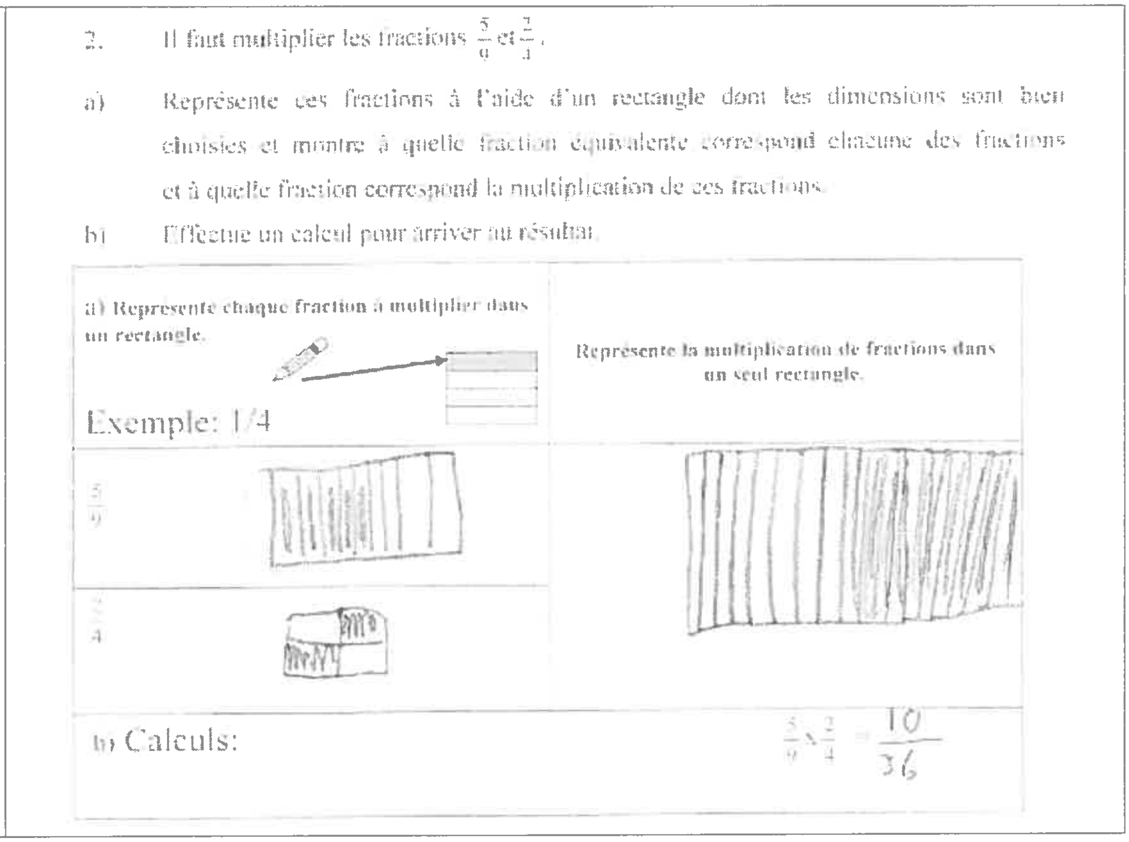


$10/36$

b) Calculs: $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{37}{36}$ $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4}$

Une fois de plus, la représentation graphique de la multiplication des fractions pose problème à la majorité des élèves. Les élèves E3, E5, E6 et E8 ne font aucune tentative de représentation. Les élèves E4 et E7 représentent assez bien le résultat de la multiplication. En revanche, comme nous l'avons mentionné lors de l'analyse de la première question de cette seconde tâche, leurs représentations ne respectent pas le modèle exploité dans l'animation visionnée sur l'ordinateur. Ce constat est aussi effectué à propos des représentations des élèves E1 et E2, ces élèves effectuant des représentations plus approximatives que ne le font les élèves E4 et E7. Pour mieux illustrer ces démarches, nous reproduisons deux conduites représentatives.

E1



2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$.

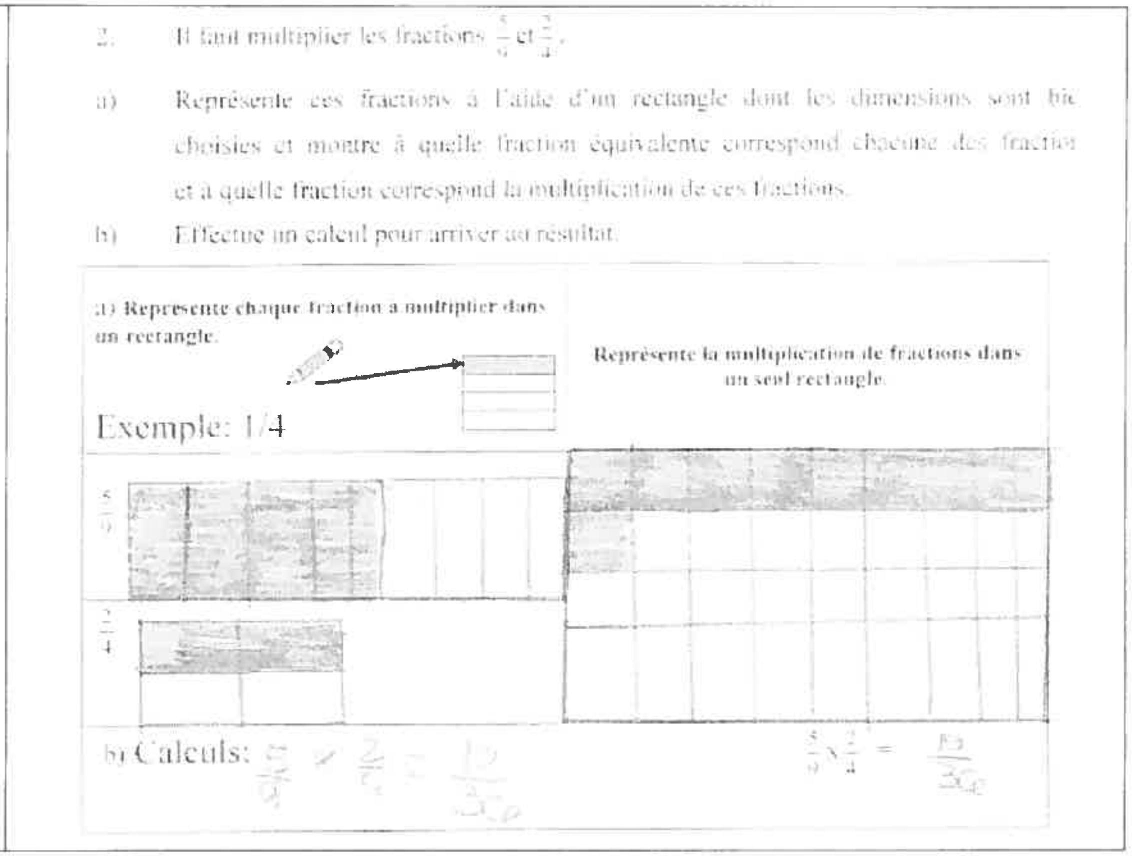
a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

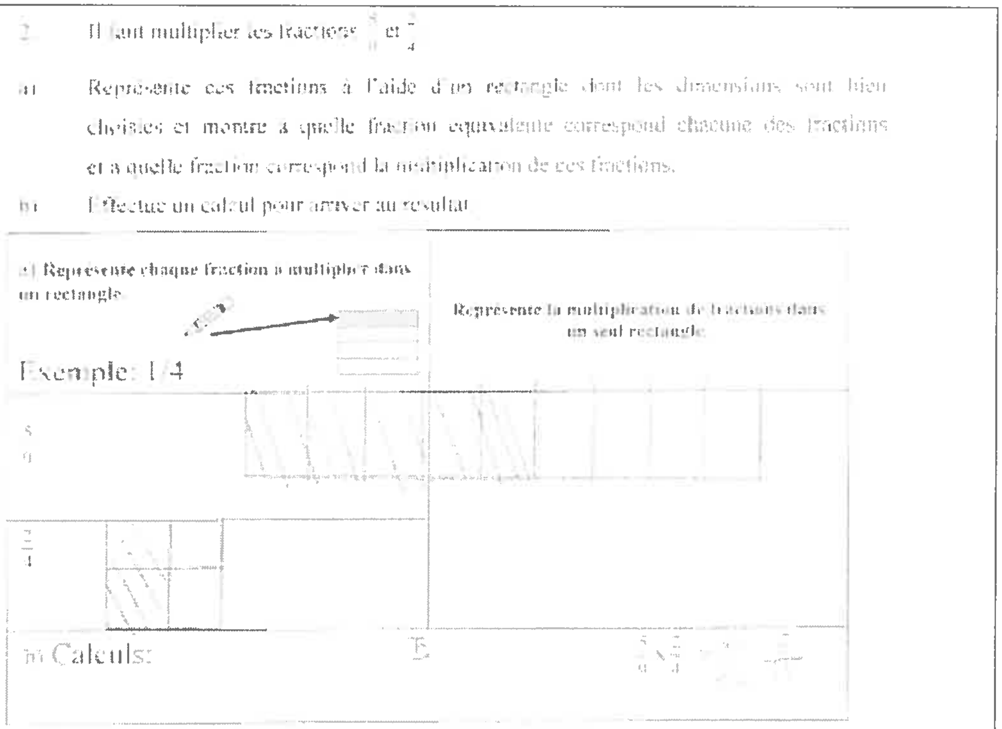
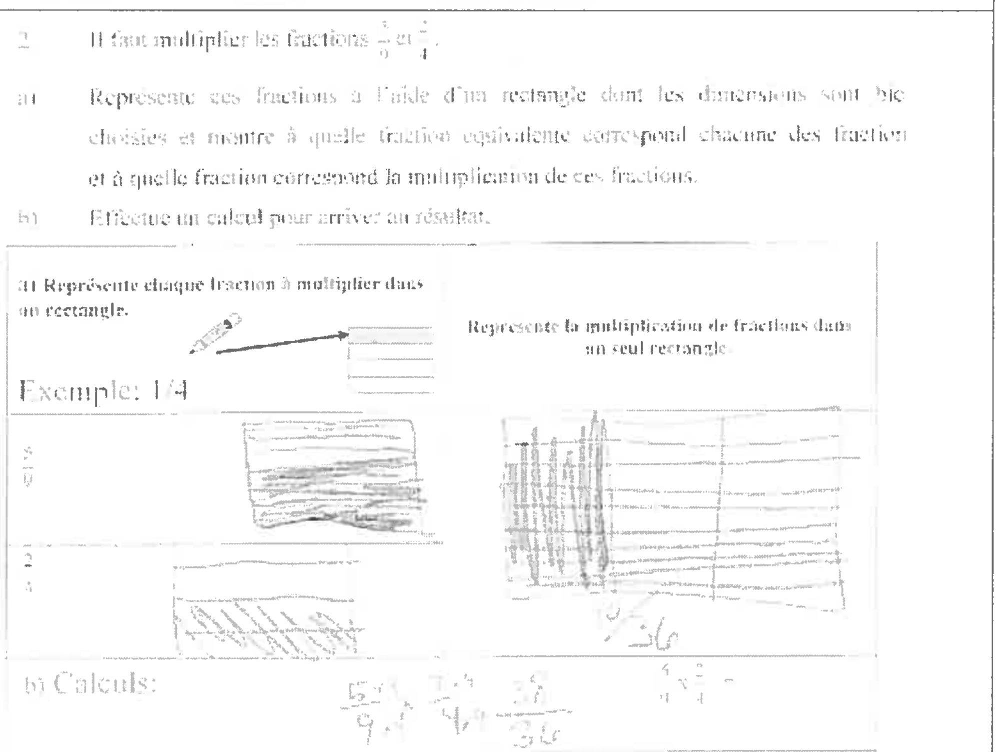
a) Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle. Exemple: 1/4	Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{5}{9}$	
$\frac{2}{4}$	

b) Calculs: $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{10}{36}$

E7



Malgré cette faible proportion de réussite en ce qui concerne la représentation graphique de la multiplication, plusieurs élèves se montrent compétents lorsque vient le temps d'opérer sur les fractions. C'est l'élève E3 qui offre la réponse la plus complète, allant même jusqu'à réduire le résultat de la multiplication à sa plus simple expression (5/18). Les élèves E1, E6 et E7 obtiennent une réponse exacte (10/36) sans réduire ce résultat. L'élève E2 fait sûrement une confusion entre la technique à adopter pour additionner les fractions et celle pour les multiplier. En effet, il multiplie par quatre le numérateur et le dénominateur de la première fraction (5/9). Il fait de même avec la deuxième fraction (2/4), mais en utilisant le nombre 9. Il additionne ensuite le résultat des deux multiplications des numérateurs et écrit 38 en guise de numérateur pour la fraction réponse. Il procède différemment pour les dénominateurs. Le fait que la multiplication des dénominateurs était 9 x 4 dans les deux cas semble avoir incité cet élève à inscrire 36 au dénominateur, sans additionner les deux produits comme il l'avait fait pour les numérateurs. Nous reproduisons à la page suivante les démarches des élèves E3 et E2.

E3	 2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$ a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions. b) Effectue un calcul pour arriver au résultat. a) Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle. Exemple: 1/4 Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle. $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{4}$ b) Calculs: $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} =$
E2	 2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$. a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions. b) Effectue un calcul pour arriver au résultat. a) Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle. Exemple: 1/4 Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle. $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{4}$ b) Calculs: $\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} =$

L'élève E4 déploie un raisonnement mathématique adéquat lorsqu'il tente d'effectuer la multiplication. Malheureusement, il fait une simple erreur de calcul en multipliant les dénominateurs. Il obtient 50 comme résultat en multipliant 9 et 4. L'élève

E8 tente d'effectuer la multiplication de fractions en utilisant le produit croisé. Son résultat est évidemment erroné (20/18). Enfin, l'élève E5 ne propose aucune démarche pour cette multiplication et laisse l'espace de réponse vide.

Un seul élève réclame de l'aide lors de la réalisation de cette tâche, soit l'élève E4. Cet élève s'interroge sur la pertinence de procéder à une simplification de la fraction 2/4. Comme le montrent les extraits suivants des échanges avec l'enseignant-chercheur, l'enseignant-chercheur lui répond positivement et en profite pour l'inciter à effectuer les représentations des fractions et de la multiplication de ces fractions.

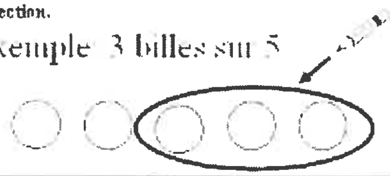
Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E4 : tâche #2M – question de type B
Élève E4
E4 – Ici, on peut tu simplifier ? (référence à la section calculs) EC – Ici, tu peux simplifier, il n'y a pas de problème et ici je veux que tu fasses une représentation un peu comme le rectangle ici. E4 – Ok. EC – Montre les fractions sous forme de dessins et ta réponse sous forme de dessin.

La **dernière question de la seconde tâche** (tâche #2M – question de type C) demande aux élèves de multiplier les fractions 11/12 et 3/4. Les élèves doivent représenter chaque fraction et leur produit à l'aide d'une collection de billes. Enfin, un espace leur est alloué pour effectuer un calcul mathématique. Nous représentons plus loin cette dernière question.

3. Il faut multiplier les fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{3}{4}$

a) Represente ces fractions a l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre a quel nombre de billes correspond le produit de ces deux fractions

b) Effectue un calcul pour arriver au resultat

a)Represente chaque fraction a multiplier avec une collection. Exemple 3 billes sur 5 	Represente la multiplication de fractions avec une seule collection
$\frac{11}{12}$	
$\frac{3}{4}$	
b) Calculs	$\frac{11}{12} \times \frac{3}{4} =$

Comme nous venons de le mentionner, les élèves doivent d'abord représenter chacune des fractions (11/12 et 3/4) à l'aide d'une collection de billes. Dans la majorité des cas depuis le début de l'expérimentation, les élèves avaient la possibilité, soit de réduire une des deux fractions, soit de trouver un dénominateur commun aux deux fractions avant d'opérer sur celles-ci. Cette dernière question de la seconde tâche fait exception, car les deux fractions sont irréductibles et la recherche d'un dénominateur commun n'est pas nécessaire pour effectuer la multiplication. Les huit élèves parviennent donc aisément à représenter les deux fractions à l'aide d'une collection de billes. Seul l'élève E8 déroge quelque peu de la consigne en noircissant le nombre de billes représentant le numérateur au lieu de les encercler. Les deux images de la page suivante permettent de voir un exemple d'une représentation qui respecte la consigne (E1) et d'une autre qui ne la respecte pas (E8).

E1

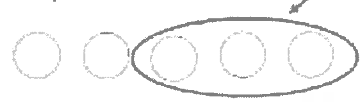
a) Il faut multiplier les fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{3}{4}$

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quel nombre de billes correspond le produit de ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) Représente chaque fraction à multiplier avec une collection

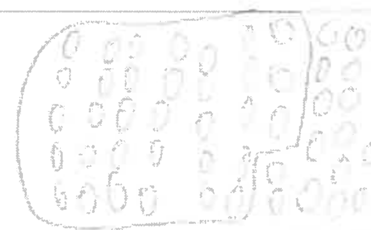
Exemple: 3 billes sur 5



Représente la multiplication de fractions avec une seule collection.

$\frac{11}{12}$

$\frac{3}{4}$



b) Calculs:

$\frac{11}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{33}{48}$

E8

a) Il faut multiplier les fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{3}{4}$

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quel nombre de billes correspond le produit de ces deux fractions.

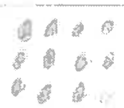
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) Représente chaque fraction à multiplier avec une collection.

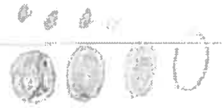
Exemple: 3 billes sur 5

Représente la multiplication de fractions avec une seule collection.

$\frac{11}{12}$



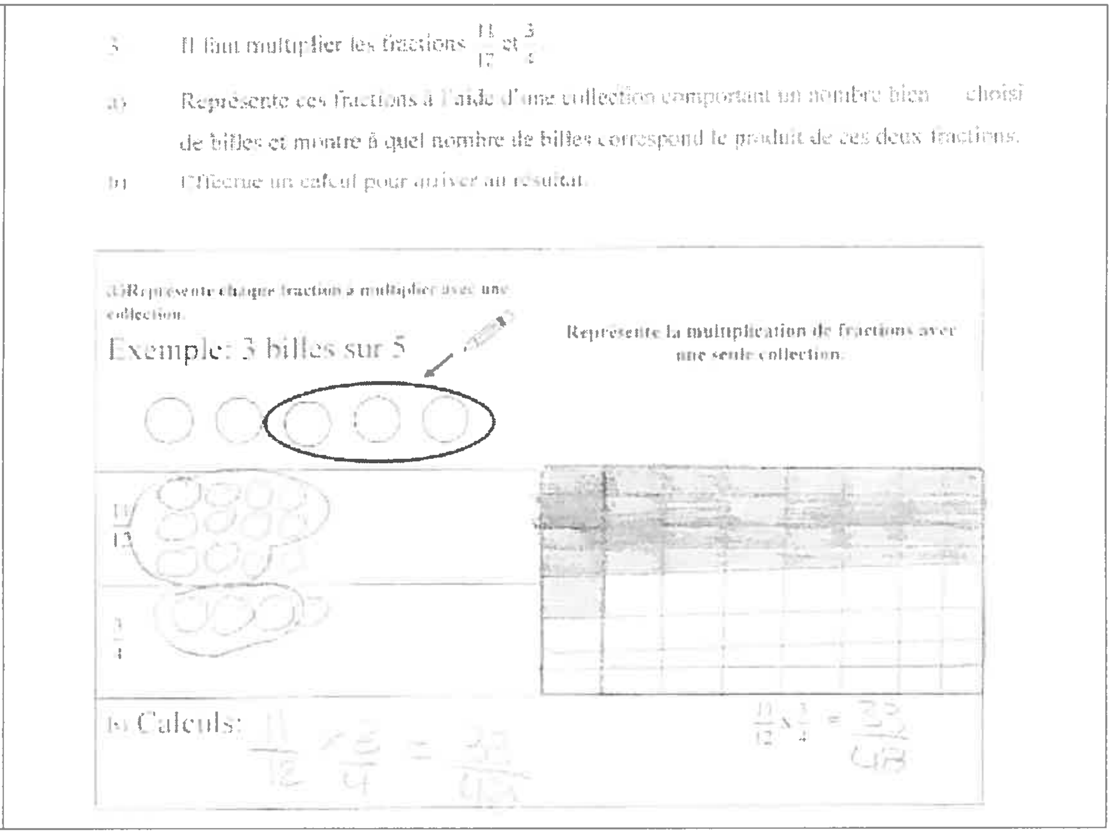
$\frac{3}{4}$



b) Calculs: $\frac{3}{4} \times \frac{11}{12}$

$\frac{11}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{36}{44} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$

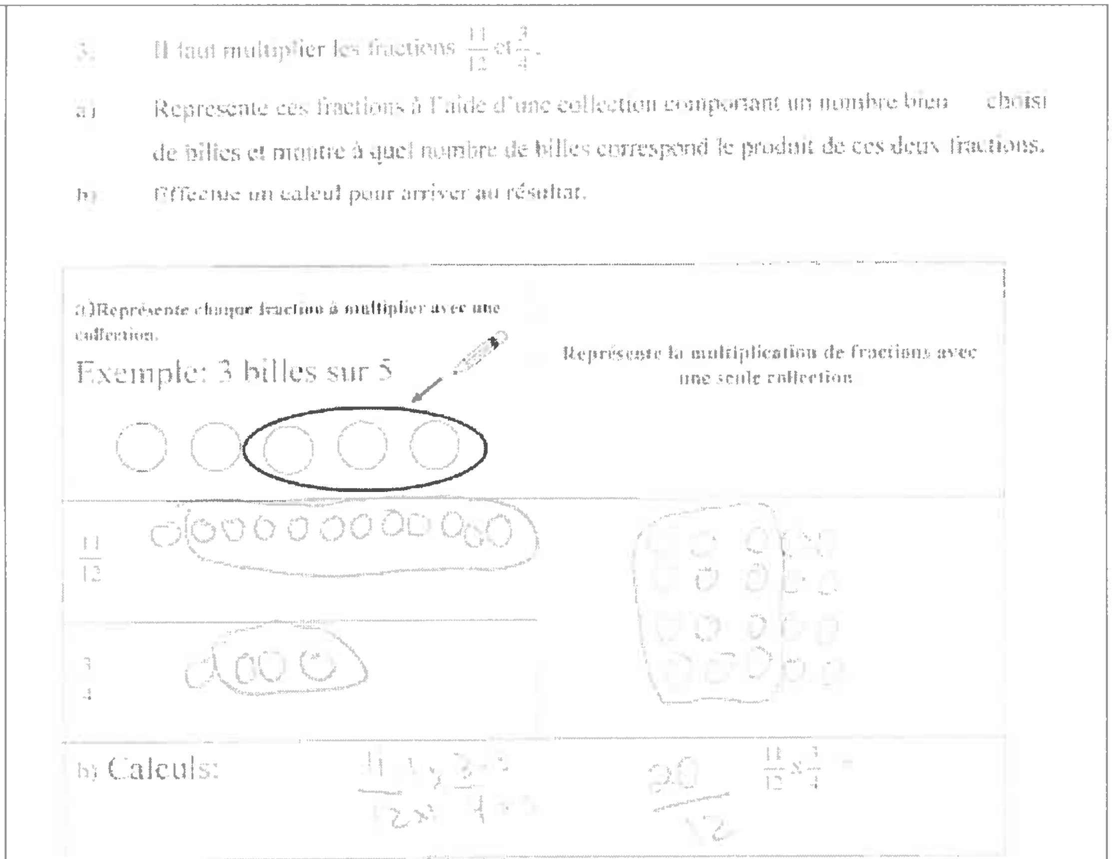
En ce qui concerne la représentation du produit des deux fractions, il était difficile pour les élèves de la schématiser en utilisant la technique exploitée dans l'animation, cette dernière étant basée sur une méthode spécifique de subdivision d'un rectangle. La représentation à l'aide d'une collection de billes se révélait beaucoup plus complexe. Prendre en considération cet obstacle était donc justifié lors de l'analyse. L'élève E1, étant le seul à avoir réussi à représenter le produit (le résultat juste étant 33/48) des fractions avec les billes, se voit attribuer la mention « Juste » (voir la conduite de cet élève qui est reproduite à la page précédente). L'élève E7 est également en mesure de schématiser la réponse, mais il le fait en dessinant un rectangle dont 33 sections sont noircies. Voici le dessin de l'élève E7 :

E7	

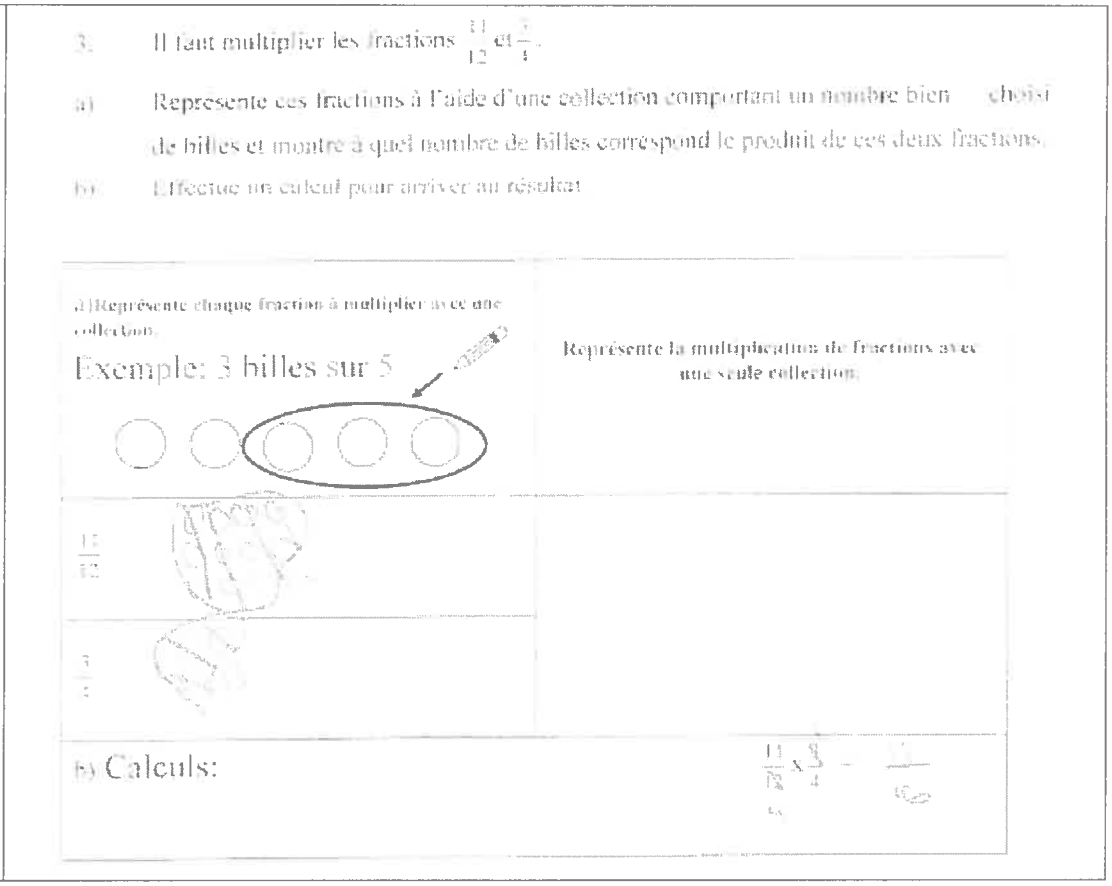
Les élèves E3, E5, E6 et E8 ne font aucune représentation du résultat de la multiplication. Les élèves E2 et E4 produisent une représentation basée sur un produit erroné, ces élèves étant incapables d'effectuer ce type d'opération.

Les élèves E1, E6 et E7 effectuent correctement la multiplication des fractions. Ils parviennent tous au bon résultat (33/48) en multipliant respectivement les numérateurs et dénominateurs de chaque fraction. L'élève E2 effectue une addition de fractions au lieu d'une multiplication (11/12 x 3/4 = 20/12). L'élève E3 divise par 3 le dénominateur de la première fraction (11/12) et le numérateur de la deuxième fraction. Il multiplie ensuite ces deux fractions partiellement réduites pour proposer 11/16 comme résultat final. Une conduite identique est observable chez l'élève E4. La démarche de l'élève E5 est incomplète. Il entame sa multiplication en mettant les deux fractions sur le même dénominateur (12). Il abandonne ensuite son travail et ne laisse aucune réponse dans l'espace dédié à cet effet. Enfin, l'élève E8 tente d'arriver au bon résultat en appliquant la règle du produit croisé ; le résultat ainsi obtenu est 9/11 (voir la démarche de cet élève reproduite à la page 219). Les démarches des élèves E2 et E3 sont reproduites ci-dessous.

E2



E3



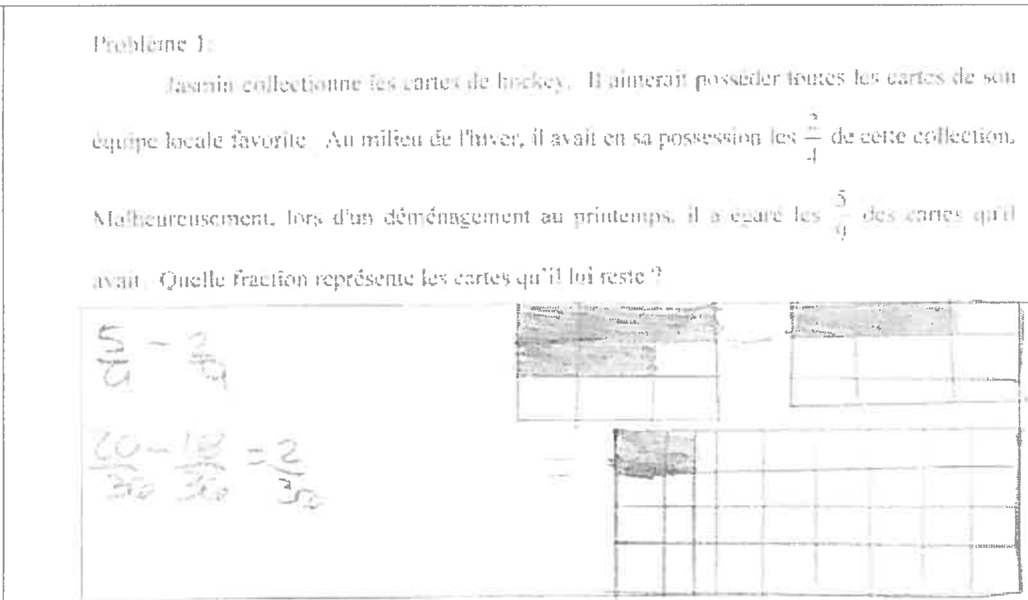
La **troisième tâche** sur la multiplication de fractions concerne la résolution de problèmes impliquant les fractions utilisées dans les calculs faisant partie des questions de la seconde tâche. Chaque problème est suivi d'un espace réponse très volumineux. Cet espace permet à l'élève d'effectuer, s'il le désire, une représentation graphique des problèmes. Avant d'examiner les conduites des élèves, il apparaît important de noter qu'un élève seulement interroge l'enseignant-chercheur durant la réalisation d'un des problèmes. Le fait que les élèves ne soient pas contraints de réaliser des représentations nous semble expliquer en partie cette situation.

La **première question de la troisième tâche** (tâche #3M – problème #1) met en situation un garçon collectionnant des cartes de hockey de son équipe favorite. Ce dernier a accumulé les 2/4 de la totalité des cartes de cette collection. Lors d'un déménagement, il égare les 5/9 de ses cartes. La question demande aux élèves de trouver la fraction qui représente les cartes qu'il lui reste après ce fâcheux événement. Nous représentons ci-dessous cette première question.

Problème #1 : Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les 2/4 de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les 5/9 des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ?

Une fois de plus, on remarque une disparition presque totale de la représentation graphique comme stratégie de résolution de problème. Seul l'élève E7 juge pertinent d'appuyer sa démarche sur une représentation graphique. Voici la représentation effectuée par cet élève, ainsi que sa démarche de résolution du problème #1 :

E7

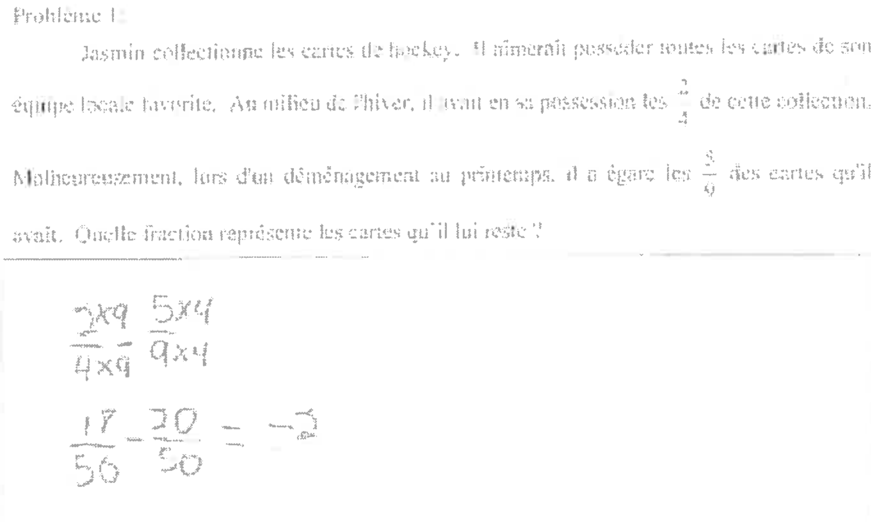


Trois élèves seulement (E1, E5 et E6) parviennent à trouver la fraction qui représente le nombre de cartes restantes. Les élèves E1 et E5 procèdent à une réduction de la fraction 10/36 (réponse : 5/18). Nous reproduisons les démarches des élèves E1 et E6 à la page 224.

E1	Problème 1: Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les $\frac{2}{4}$ de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les $\frac{5}{9}$ des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ? $\frac{2}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
E6	Problème 1: Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les $\frac{2}{4}$ de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les $\frac{5}{9}$ des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ? $\frac{9}{4} \times \frac{5}{9}$ $\frac{10}{36}$

L'élève E2 décide d'utiliser la technique normalement employée pour additionner les fractions afin de résoudre ce problème. Son dénominateur commun devient donc 36 (4 x 9 = 36) et son résultat final est 38/36. L'élève E4 propose une démarche semblable, en plus de faire une erreur de calcul en multipliant 9 et 4 (9 x 4 = 50). Sa réponse finale est un nombre négatif (il reste -2 cartes au garçon). L'élève E7 a une approche identique pour résoudre ce problème. La seule différence avec l'élève E4 repose sur l'ordre d'apparition des fractions dans la soustraction effectuée en fin de démarche. En effet, l'élève E7 inverse l'ordre de ses fractions et obtient deux cartes restantes comme réponse (+2 cartes). Voici la démarche de l'élève E4 :

E4



Problème 1 :

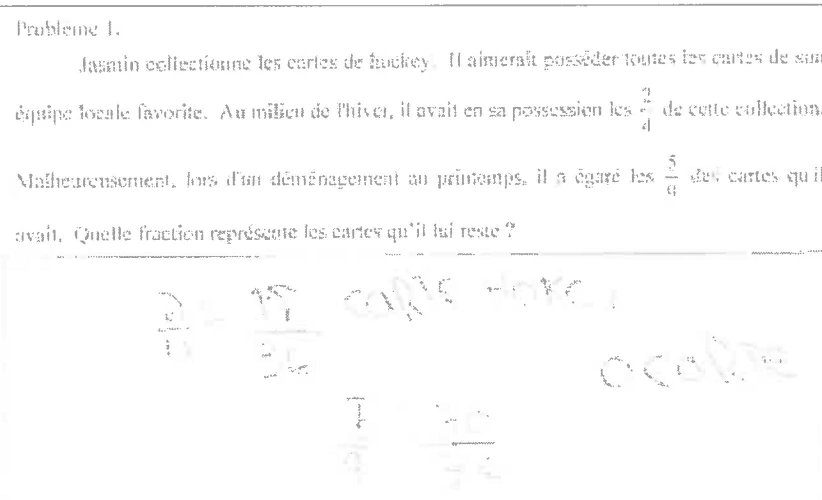
Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les $\frac{2}{4}$ de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les $\frac{5}{9}$ des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ?

$\frac{2 \times 9}{4 \times 9}$ $\frac{5 \times 4}{9 \times 4}$

$\frac{17}{56} - \frac{20}{50} = -2$

L'élève E3 a un raisonnement semblable à celui de l'élève E2. Il travaille aussi avec deux fractions ayant 36 comme dénominateur. La fraction représentant le nombre de cartes que le garçon possédait avant le déménagement est 18/36 alors que celle qui représente la quantité de cartes égarées est 20/36. Sans vraiment laisser de traces d'une soustraction de fractions, on devine par la réponse qu'il propose (il reste zéro carte au garçon) que c'est l'opération qui a été choisie par l'élève pour résoudre ce problème. Nous reproduisons la démarche de cet élève.

E3



Problème 1.

Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les $\frac{2}{4}$ de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les $\frac{5}{9}$ des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ?

Enfin, l'élève E8 propose une démarche incomplète et ne laisse aucune réponse. L'écriture inscrite sur sa feuille est la suivante. Cette écriture semble indiquer qu'il interprète ce problème comme un problème additif :

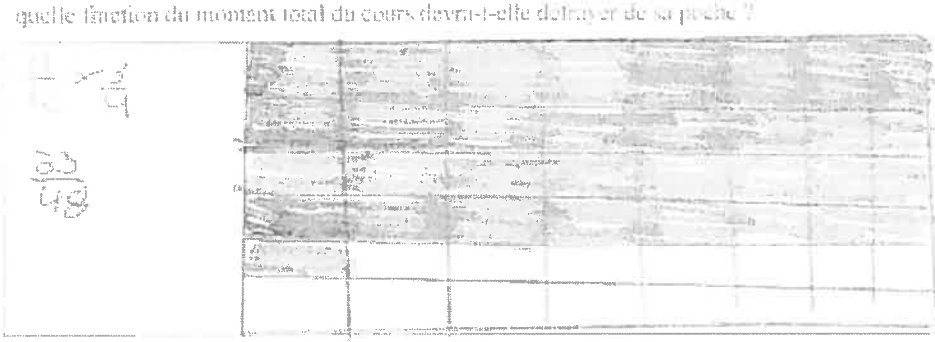
$$\frac{18-?}{36}$$

Dans **le deuxième problème de la troisième tâche** (tâche #3M – problème #2), nous retrouvons Camille qui désire obtenir son permis de conduire. La compagnie qui offre les cours propose un spécial sur le prix des leçons. Le montant à débourser correspond aux 11/12 du prix habituel. De plus, les parents de Camille vont contribuer en payant les 3/4 des frais si elle maintient de bons résultats scolaires. Voici l'énoncé de ce problème :

Problème #2 : Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le 11/12 du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les 3/4 du cours si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

Seul l'élève E7 effectue une représentation de ce problème. Il trace un grand rectangle comportant huit colonnes et six rangées. À l'intérieur de rectangle, 33 sections sont noircies pour représenter le numérateur de la réponse (33/48). Voici une numérisation de sa démarche :

E7



Problème 2:

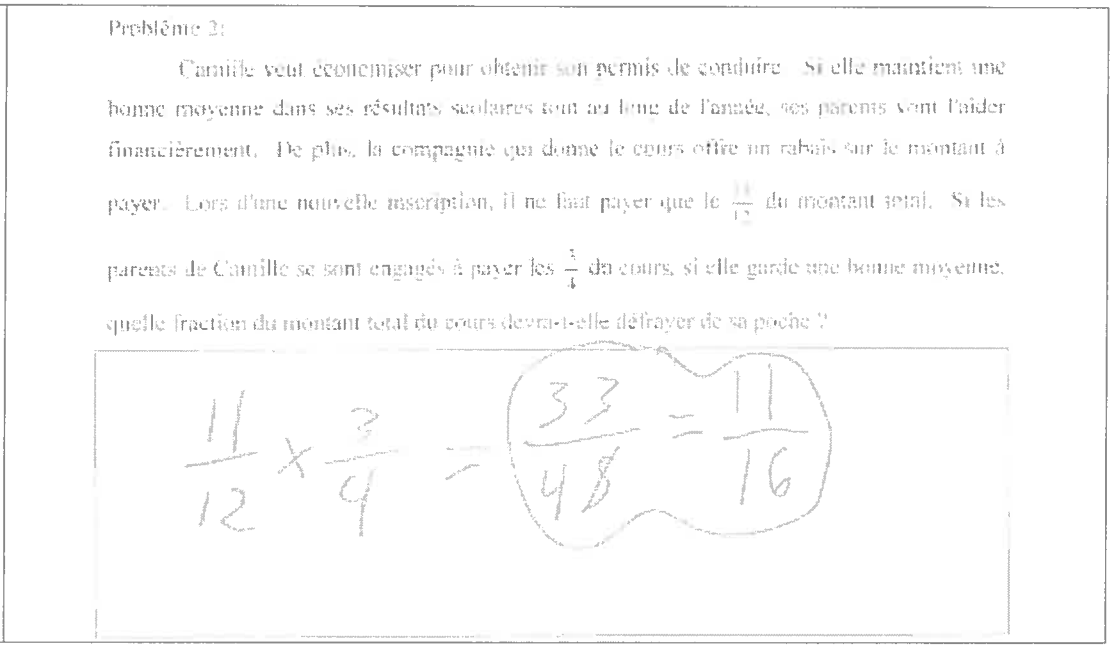
Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours, si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

$\frac{11}{12} \times \frac{3}{4}$

$\frac{33}{48}$

Malgré une consigne claire qui demande aux élèves de trouver la fraction correspondant au montant que Camille devra défrayer pour ses cours en considérant le rabais de la compagnie et l'aide de ses parents, aucun des huit élèves ne répond vraiment à la question. Quatre élèves seulement, soit les élèves E1, E5, E6 et E7, effectuent un premier calcul adéquat, mais ne complètent pas leur solution. Ces élèves sont tous en mesure de trouver la fraction qui correspond au montant que Camille <u>n'aura pas à payer</u> (33/48). Par contre, aucun d'entre eux n'en vient à calculer le montant <u>qu'elle devra payer</u> (15/48). L'élève E1 est le seul à réduire la fraction 33/48 lors de sa démarche. Voici un exemple représentatif d'une telle résolution :

E1

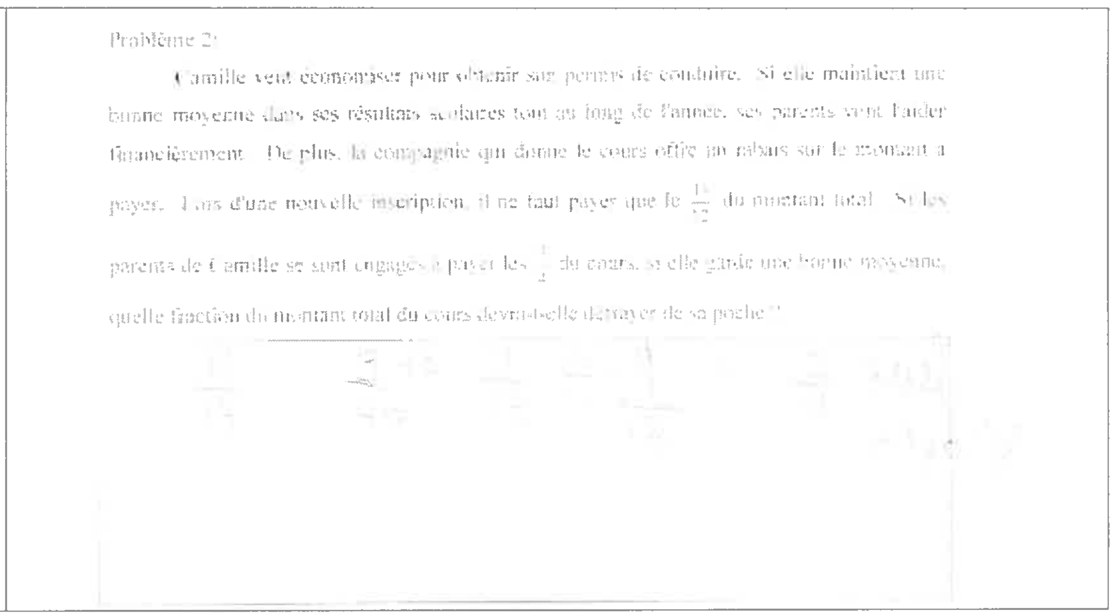

Problème 2:

Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours, si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

$$\frac{11}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$$

L'élève E2 additionne les fractions 11/12 et 3/4 en utilisant le dénominateur commun 12. Sa réponse finale est la fraction réduite 5/3. L'élève E3 propose une démarche très similaire à celle de l'élève E2. Il met tout d'abord la fraction 3/4 sur 12 (9/12). Il soustrait ensuite cette fraction à 12/12 pour obtenir 3/9. Il indique à côté de cette fraction que c'est le montant que Camille devra payer. L'image suivante montre clairement l'erreur décrite plus haut.

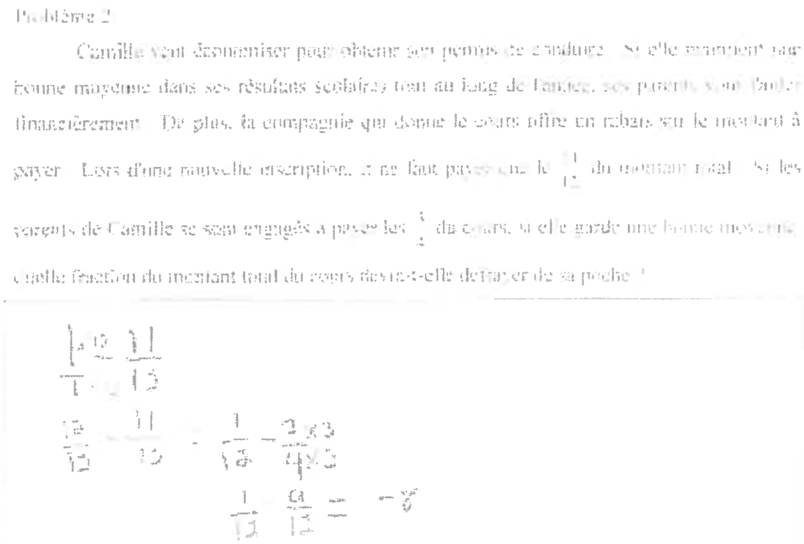
E3


Problème 2:

Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours, si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

L'élève E4 procède en soustrayant 11/12 à 12/12. Il aboutit avec 1/12 auquel il soustrait 9/12 (3/4 préalablement mis sur le dénominateur 12). Sa réponse finale est -8. Voici sa démarche :

E4



Problème 2

Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours, si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

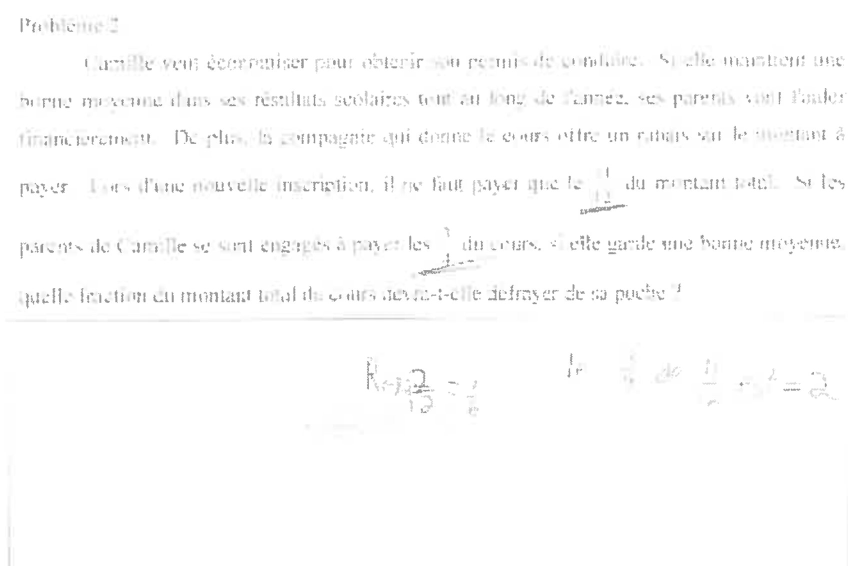
$\frac{1\times 12}{1\times 12}$ $\frac{11}{12}$

$\frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} - \frac{3\times 3}{4\times 3}$

$\frac{1}{12} - \frac{9}{12} = -8$

Enfin, l'élève E8 propose une démarche plutôt confuse. Il prétend que le 3/4 de 11/12 équivaut à 2. Un peu plus loin, il inscrit la fraction 2/12 qu'il réduit à 1/6. Cette dernière fraction semble être sa réponse finale. Pour mieux comprendre ce qu'il a voulu faire, nous insérons ci-dessous une numérisation de sa démarche.

E8



Problème 2

Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours, si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

R= $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $\frac{3}{4}$ de $\frac{11}{12}$ = 2

Comme nous l'avons mentionné antérieurement, un seul élève, soit l'élève E7, demande l'aide de l'enseignant-chercheur au moment de la réalisation du second problème. Comme le montrent les extraits suivants, cet élève déclare qu'il ne comprend pas le problème. L'enseignant-chercheur effectue alors une interprétation du problème, interprétation au cours de laquelle la multiplication de fractions est évoquée. L'élève semble profiter de cette intervention, car il réussit à résoudre correctement le problème.

Extraits des interactions entre l'enseignant-chercheur et l'élève E7 : tâche #3M – problème #2)
Élève E7
E7 – Je ne comprends pas le problème #2. EC – La fille veut économiser pour son permis de conduire si elle a des bonnes notes à l'école. Puis, la compagnie va lui donner un rabais. Comme ça, ça va être moins cher pour elle. Lors de l'inscription, il faut payer le 11/12 du montant total. Les parents de Camille se sont engagés à payer le 3/4 de 11/12. C'est quoi la fraction de ce qu'elle va avoir à payer ? E7 – Ok, je fais 3/4 (l'élève écrit)... EC – Regarde à l'écran. Qu'est-ce qu'il faut faire quand on fait une multiplication ? (EC indique l'écran) E7 – C'est marqué dans la partie qui bouge au début que le "X" peut se lire 1/4 de 2/3. Ici, c'est pas 1/4 de 2/3, ça va être 3/4 de… (regarde brièvement le questionnaire) 11/12.

Le tableau IX de la page suivante présente une synthèse des caractéristiques générales des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches que comporte la troisième situation sur la multiplication de fractions.

Tableau IX

Caractéristiques générales des conduites des élèves lors de la réalisation des tâches sur la multiplication de fractions

<table>
<tr><th colspan="6">Première tâche : interprétation des écritures et des illustrations de la multiplication de fractions</th></tr>
<tr><td colspan="2">Question #1 : multiplication :
1/4 x 2/3</td><td colspan="2">Question #2 : multiplication :
2/6 x 4/7</td><td colspan="2">Question #3 : multiplication :
2/6 x 4/7</td></tr>
<tr><td>Réponse erronée</td><td>Réponse juste</td><td>Réponse erronée</td><td>Réponse juste</td><td>Réponse erronée</td><td>Réponse juste</td></tr>
<tr><td>E2-E3-E4-E6</td><td>E1-E5-E7-E8</td><td>E2-E3-E8</td><td>E1-E4-E5-E6-E7</td><td>E2-E3-E4</td><td>E1-E5-E6-E7-E8</td></tr>
<tr><th colspan="6">Seconde tâche : représentation de fractions, représentation de la multiplication des fractions</th></tr>
<tr><td colspan="2">Question #1 : 3/10 x 3/4 = 9/40</td><td colspan="2">Question #2 : 5/9 x 2/4</td><td colspan="2">Question #3 : 11/12 x 3/4</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) représentation des fractions</td><td colspan="2">a) représentation des fractions</td><td colspan="2">a) représentation des fractions</td></tr>
<tr><td>Incorrecte /absente</td><td>Satisfaisante</td><td>Fort approximative, non réduction de la fraction 2/4</td><td>Satisfaisante, non réduction de la fraction 2/4</td><td>Incorrecte /absente</td><td>Satisfaisante</td></tr>
<tr><td></td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8</td><td>E1-E2-E5-E7-E8</td><td>E3-E4-E6</td><td>---</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6-E7-E8*
*noircit plutôt que d'encercler les billes</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) représentation de la multiplication des fractions</td><td colspan="2">b) représentation de la multiplication des fractions</td><td colspan="2">b) représentation de la multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Non satisfaisante</td><td>Satisfaisante</td><td>Absente/Non satisfaisante</td><td>Satisfaisante</td><td>Absente/Non satisfaisante</td><td>Juste/Satisfaisante</td></tr>
<tr><td rowspan="4">E1-E2-E3-E5-E6-E7-E8</td><td rowspan="4">E4</td><td>E3-E5-E6-E8</td><td>E1-E2-E4-E7</td><td>E2-E3-E4-E5-E6-E8</td><td>E1*-E7 **
*juste-avec des billes
**satisfaisante-avec un rectangle</td></tr>
<tr><td colspan="2">c) multiplication des fractions</td><td colspan="2">c) multiplication des fractions</td></tr>
<tr><td>Réponse erronée/absente</td><td>Réponse juste</td><td>Réponse erronée</td><td>Réponse juste</td></tr>
<tr><td>E2-E5-E8</td><td>E1-E3*-E4** E6-E7
*avec réduction de la fraction
** erreur de calcul</td><td>E2-E3-E4-E5-E8</td><td>E1-E6-E7</td></tr>
<tr><th colspan="6">Troisième tâche : résolution de problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="3">Problème #1 : fractions → 2/4 et 5/9</td><td colspan="3">Problème #2 : fractions → 3/4 et 11/12</td></tr>
<tr><td>Réponse erronée ou absente</td><td>Réponse juste</td><td>Représentation des données du problème</td><td>Réponse erronée ou absente</td><td>Réponse partielle</td><td>Représentation des données du problème</td></tr>
<tr><td>E2-E3-E4-E7-E8</td><td>E1*-E5*-E6
* avec réduction de la fraction</td><td>E7</td><td>E2-E3-E4-E8</td><td>E1-E5-E6-E7</td><td>E7</td></tr>
</table>

Comme le montre le tableau IX, représenter la multiplication de fractions n'est pas une tâche évidente pour plusieurs élèves. En effet, seuls les élèves E1 et E7 produisent une représentation satisfaisante de cette opération lors des deuxième et troisième questions de la seconde tâche. Deux autres élèves, soit les élèves E2 et E4 se montrent capables de représenter adéquatement la multiplication des fractions 5/9 et 2/4 présentées à la seconde question de la tâche précédente. Ces résultats sont toutefois positifs, si l'on tient compte du fait que lors de l'épreuve d'entrée dans la séquence, aucun élève ne pouvait produire une représentation de la multiplication des fractions. Tout aussi positif est le résultat qui concerne la réalisation de cette opération. À l'entrée dans la séquence d'enseignement, un élève seulement, soit l'élève E3, pouvait effectuer correctement les multiplications de fractions. À la suite des activités d'enseignement, cinq élèves, soit les élèves E1, E3, E4, E6 et E7, effectuent correctement au moins une des deux multiplications.

À la suite des activités d'enseignement, les élèves E1, E5 et E6 résolvent correctement le premier problème multiplicatif qui leur est présenté. Au second problème multiplicatif, ces élèves, ainsi que l'élève E7, réalisent des calculs adéquats, mais ne complètent pas leur solution. De prime abord, il ne semble pas que les activités d'enseignement aient eu un effet significatif sur les conduites des élèves en résolution de problèmes. En effet, à l'entrée dans la séquence, trois élèves, soit les élèves E3, E4 et E5, parvenaient à résoudre correctement au moins un des problèmes multiplicatifs qui leur étaient présentés. Et, curieusement, les élèves E3 et E4 ne peuvent résoudre adéquatement aucun des problèmes qui leur sont présentés à la suite des capsules sur la multiplication. Il faut toutefois convenir que les problèmes multiplicatifs qui sont présentés sont difficilement comparables. À l'entrée dans la séquence, les problèmes multiplicatifs sont similaires à ceux que l'on retrouve généralement dans les manuels ; les références aux mesures sur lesquelles les fractions sont appliquées sont explicites, ce qui n'est pas le cas dans les problèmes présentés à la suite des capsules d'enseignement, problèmes qui présentent un plus haut niveau de difficulté. Le fait que quatre élèves parviennent à traiter adéquatement ces derniers problèmes constitue donc un événement important. Il aurait été pertinent que nous incluions aussi dans les problèmes présentés à la suite des capsules d'enseignement, des problèmes similaires à ceux présentés à l'entrée. Cependant, cette inclusion n'a pas été possible, faute de temps. Nous avons donc opté pour des problèmes plus complexes, option qui s'est avérée heureuse, si on considère qu'à la sortie de la séquence, sept des huit élèves parviennent à résoudre adéquatement au moins un des problèmes qui leur sont présentés.

3.6. Les conduites des élèves à l'entrée dans la séquence d'enseignement, au cours des situations d'enseignement et à la sortie de la séquence

Pour conclure cette analyse des résultats, il est apparu pertinent de caractériser brièvement les conduites des élèves ayant participé à cette étude et ce, au cours de moments importants de cette expérience, soit à l'entrée dans la séquence d'enseignement, au cours des situations d'enseignement et à la sortie de la séquence.

À l'entrée dans la séquence, aucun des élèves ne sait produire de représentations adéquates des additions, des soustractions et des multiplications de fractions ; cet événement n'a pas de quoi étonner car, à notre connaissance, il est rare que les élèves de l'enseignement primaire aient à effectuer de telles représentations et, encore plus rare, qu'ils aient à produire des représentations comportant des fractions composées de dénominateurs fort différents, voire des fractions composées de numérateurs et de dénominateurs relativement grands. Par ailleurs, la moitié des élèves, soit les élèves E3, E4, E5 et E7 peuvent produire, à l'occasion, des représentations indépendantes et précises des fractions sur lesquelles portent les additions et les soustractions ; cette habileté est généralement associée à une effectuation correcte des additions et des soustractions. Aucun élève ne produit de représentations adéquates des multiplications de fractions et un seul élève sait effectuer correctement les multiplications que comporte l'épreuve. Enfin, l'examen des conduites des élèves lors de la résolution des problèmes met en évidence les relations entre les habiletés à représenter et à opérer sur les fractions et les habiletés à résoudre des problèmes comportant des fractions.

Si on prenait en considération les conduites des élèves à l'entrée dans la séquence, il était possible de prévoir que les élèves E3, E4, E5 et E7 pourraient, plus que les autres, interpréter correctement les représentations faisant partie des capsules sur les opérations, du moins sur l'addition et la soustraction de fractions, et parvenir ainsi à une meilleure réussite des tâches accompagnant ces capsules. On pouvait aussi prévoir que les autres élèves bénéficieraient donc davantage des capsules sur l'addition et sur la soustraction. Il était par ailleurs plus difficile de s'engager dans des prédictions sur les bénéfices des capsules portant sur la multiplication de fractions, compte tenu que la très grande majorité des élèves ne savait, à l'entrée de la séquence, effectuer les multiplications de fractions. Or, qu'observe-t-on au cours des situations d'enseignement ?

Les prédictions précédentes ne sont, fort heureusement, qu'en partie confirmées. En effet, non seulement les élèves E3, E4, E5 et E7, mais également les autres élèves se montrent capables, à la suite des capsules portant sur l'addition de fractions, d'effectuer correctement les additions de fractions. Les représentations des additions de fractions faisant partie des capsules s'avèrent profitables à sept des huit élèves. Cet événement est important et montre bien que « savoir représenter des fractions » et « savoir effectuer des additions de fractions » ne signifie pas que l'on sait réunir dans une même représentation les fractions qui entrent dans les opérations, que l'on sait interpréter les « gestes » qui sont utilisés dans le calcul des additions. Le fait que devant des capsules comportant des représentations qui permettent de donner sens aux additions de fractions, tous les élèves, quelles que soient leurs habiletés en calcul, partagent des apprentissages, semble appuyer notre interprétation précédente. Enfin, les conduites des élèves en résolution de problèmes sont comparables à celles observées à l'entrée dans la séquence ; la grande majorité des élèves parvient ainsi à résoudre au moins un des problèmes présentés. Des résultats fort similaires sont observés lors de la réalisation des tâches succédant aux capsules qui portent sur la soustraction de fractions.

Notre prédiction à l'effet que tous les élèves, en raison de leurs difficultés à représenter et à effectuer les multiplications de fractions, profiteraient des capsules portant sur la multiplication de fractions, s'avère relativement fondée. En effet, deux des quatre élèves (soit les élèves E1 et E2) qui savent produire au moins une représentation adéquate de la multiplication de fractions ne pouvaient, à l'entrée dans la séquence, produire au moins une représentation précise des fractions entrant dans les additions et les soustractions de fractions. Et, plus encore, cinq élèves (soit les élèves E1, E3, E4, E6 et E7) effectuent correctement au moins une des multiplications de fractions faisant suite aux capsules sur la multiplication ; un seul de ces élèves (soit l'élève E3) pouvait effectuer correctement les multiplications de fractions lors de l'entrée dans la séquence.

Enfin, les réussites des élèves lors de la résolution des problèmes impliquant des multiplications de fractions, problèmes présentés à la suite des capsules d'enseignement, sont comparables à celles observées à l'entrée dans la séquence. Toutefois, comme nous l'avons fait remarquer antérieurement, les problèmes multiplicatifs présentés à la suite des capsules sont plus complexes que ceux présentés à l'entrée dans la séquence. Puisque les problèmes multiplicatifs présentés à la sortie de la séquence sont comparables à ceux présentés à l'entrée, il est ainsi possible de mieux voir si les capsules sur la multiplication de fractions ont entraîné des progrès dans la réussite aux problèmes multiplicatifs. Or, comme le montrent les analyses effectuées à l'entrée et à la sortie, tous les élèves résolvent adéquatement au moins un des problèmes multiplicatifs présentés à la sortie, tandis qu'à l'entrée dans la séquence, deux élèves seulement obtenaient une performance comparable (soit les élèves E4 et E5).

Nous avons pu observer, lors de l'analyse précédente, des gains importants au niveau de la représentation de la multiplication des fractions à la suite des capsules concernant cette opération. En effet, quatre élèves, comparativement à aucun élève lors de l'entrée dans la séquence, savent produire au moins une représentation adéquate de cette opération. À la sortie de la séquence, bien que plusieurs représentations soient produites par les élèves, aucune n'est satisfaisante. Même les élèves qui avaient réussi à le faire à la suite des capsules n'y parviennent plus durant l'épreuve présentée à la sortie. Cet événement témoigne, une fois de plus, des difficultés des élèves à illustrer à l'aide d'une représentation imagée (figures géométriques et autres objets) le sens de cette opération. Par ailleurs, il semble que les progrès réalisés par les élèves dans les calculs sur la multiplication de fractions se soient davantage maintenus, puisque lors de l'épreuve présentée à la sortie, trois des cinq élèves qui avaient effectué correctement les multiplications lors de la séquence d'enseignement parviennent encore à le faire, lors de l'épreuve présentée à la sortie.

Rappelons en terminant l'évolution appréciable des capacités des élèves à représenter adéquatement les additions et les soustractions de fractions, à la suite de l'étude des capsules consacrées à ces opérations ; les progrès ainsi réalisés se sont maintenus à la suite de l'enseignement, comme en font foi les conduites des élèves à l'épreuve présentée à la sortie de la séquence.

L'examen des conduites des élèves à l'entrée dans la séquence d'enseignement, au cours de l'enseignement et enfin, à la sortie de la séquence d'enseignement, permet d'apprécier l'évolution des connaissances de ces élèves, mais aussi les limites du dispositif d'enseignement que nous avons conçu et mis à l'essai.

Chapitre 4 : Conclusion

Malgré un nombre croissant de recherches sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques et une prolifération rapide de matériel didactique destiné aux élèves présentant des difficultés, l'enseignement des mathématiques demeure un défi de taille pour les professionnels de l'éducation amenés à œuvrer auprès de ces élèves. Comme nous en avons fait état au premier chapitre de notre mémoire, l'enseignement à des élèves du secondaire qui présentent des difficultés en mathématiques constitue un défi qui doit être relevé à brève échéance, compte tenu du fait que les échecs en cette matière compromettent les études secondaires et les orientations professionnelles, en un mot l'avenir de ces élèves. Cette situation, ainsi que notre engagement dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, nous ont incité à concevoir et à mettre à l'épreuve un dispositif informatique sur l'enseignement des opérations sur les fractions à des élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématiques.

Si nous disposons d'un nombre important d'études didactiques concernant la construction du concept de fractions, on ne peut en dire autant en ce qui concerne les opérations sur les fractions, lesquelles occupent pourtant une place prédominante dans le programme de 1ère secondaire et dont les acquis survivent mal au transfert entre le primaire et le secondaire. Parmi la multitude de notions mathématiques que l'élève doit maîtriser, celles qui concernent les nombres rationnels, notamment les opérations sur les fractions, sont aussi celles qui jouissent de la pire réputation en ce qui concerne l'apparition de « nœuds pédagogiques ». Nous entendons par « nœud pédagogique » tout contenu notionnel ou concept à transmettre qui oblige l'enseignant à faire des concessions entre l'enseignement idéal que ce dernier pourrait donner aux élèves et celui réellement dispensé. Plusieurs études permettent également d'identifier les principaux problèmes qui ajoutent à la complexité de l'enseignement des mathématiques aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage. Dans notre recherche, les problèmes suivants ont particulièrement retenu notre attention :

- La possibilité que certaines difficultés d'apprentissage résultent d'un dysfonctionnement du système nerveux chez l'élève, laissant très peu de contrôle à l'enseignant (ainsi qu'à l'élève en question) sur l'évolution positive de sa situation face à ses apprentissages (Farhnam-Diggory, 1979).

- Les contraintes découlant du contrat didactique, c'est-à-dire « *l'ensemble des comportements du maître qui sont attendues de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître* » (Brousseau, 1980, p. 127). Dans les classes comportant des élèves en difficulté, le contrat didactique qui s'installe au fil des ans, mène souvent à un enseignement « figé » au cours duquel l'enseignant met l'emphase sur des techniques que les élèves doivent machinalement reproduire dans diverses situations. Tout cela en escamotant représentations et explications qui pourraient donner un sens à ce qu'ils font.

- La gestion des contraintes temporelles dans les classes de mathématiques force plusieurs enseignants à présenter aux élèves les éléments et les relations constitutifs de la notion visée dans le but de « faire avancer l'enseignement » et d'assurer une atteinte des objectifs ou encore, l'apparition de compétences attendues. De plus, lorsque l'enseignant est confronté à une classe incluant des élèves présentant des difficultés d'apprentissage, ce dernier doit constamment combler les écarts entre temps d'enseignement et temps d'apprentissage (Rouchier, 1996 ; Salin, 1999 ; Sensevy, 1998).

- L'enseignant du secondaire est souvent peu informé des pratiques d'enseignement privilégiées au niveau primaire. Il ne peut alors aiguiller son enseignement (sa pédagogie) à l'aide d'éléments constitués par les souvenirs des situations, des événements, des interactions de ses élèves avec leurs enseignants antérieurs. Cette situation affecte la mémoire didactique. L'histoire didactique alors construite par cet enseignant peut s'avérer très fragmentaire, voir même erronée (Brousseau et Centeno, 1991 ; Centeno, 1995).

Dans l'optique où la recherche que nous avons effectuée visait l'exploration de propositions visant à améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, les principaux objectifs retenus étaient les suivants :

a) Favoriser l'engagement cognitif des élèves en difficultés d'apprentissage (présenter des situations nouvelles, des situations défis, qui portent sur des objets de savoir sensibles).
b) Provoquer un changement de leurs habitudes et un bris du contrat didactique.
c) Permettre à ces élèves de résoudre des problèmes en faisant confiance à leurs connaissances, à leurs capacités d'apprentissage.
d) Permettre à ces élèves de participer à l'enseignement (s'engager dans la résolution de problèmes, interpréter leurs résultats, leurs tentatives pour poursuivre leur travail).

Notre recherche constitue ainsi une première étude visant la conception, la mise à l'épreuve et l'évaluation d'un dispositif didactique original dont l'objectif principal est de favoriser l'évolution des connaissances et des pratiques en lien avec les savoirs sur les nombres rationnels, plus précisément sur les opérations sur les fractions. La clientèle visée lors de cette recherche était constituée des élèves de 1ère secondaire présentant des difficultés en mathématique. Notre question générale de recherche était la suivante :

Est-ce possible d'effectuer une combinaison des approches « remédiatrice » et « reprise éclairée » qui puissent permettre à l'élève de donner un sens aux fractions, aux opérations et aux procédés de calcul, tout en lui permettant d'éprouver l'efficacité de ses procédés de représentation de fractions, de résolution de problèmes impliquant ces nombres et enfin, de calcul sur ces nombres ?

La pertinence de notre dispositif réside d'abord dans le choix des différentes représentations (images et symboliques d'actions) reliées aux opérations sur les fractions. Il nous a semblé primordial de recourir à des représentations imagées d'objets qui, dans les manuels, sont communément utilisés (rectangle, cercle, etc.). De plus, le matériel créé et visualisé à partir de l'ordinateur exploite une dimension que le manuel scolaire conventionnel ne peut offrir : **le mouvement**. L'ordinateur offre la possibilité de déplacer ou de faire bouger des formes à l'écran, de modifier les teintes, les couleurs ou la forme des images ou des objets. En plus de donner le contrôle à l'élève sur le rythme et l'ordre d'apparition (retour en arrière) d'une séquence d'enseignement, la répétition (avec support visuel simultané) d'un processus explicatif empreint de sens nécessaire à la réalisation d'une tâche précise s'avère un atout important. Le recours à ce type de matériel permet une « reprise éclairée » (voir 1.3.1.) de l'enseignement de certains objets du savoir. Un tel matériel d'enseignement riche et dynamique peut permettre à l'enseignant d'utiliser en complémentarité un environnement « papier-crayon » et une interface informatisée intégrant des leçons interactives. Il permet de personnaliser le niveau de difficulté ainsi que le nombre d'exercices pour chaque élève. Afin de pouvoir donner sens aux actions effectuées dans les calculs sur les fractions, l'élève utilise l'ordinateur pour apprécier diverses représentations, les associer, les déplacer, les examiner à plusieurs reprises selon le besoin. De tels dispositifs contribuent également à une gestion plus efficace de la mémoire ; notamment au niveau de la libération de la mémoire de travail et du traitement des informations.

Nous avions ciblé deux principaux objectifs à atteindre dans cette recherche. Nous voulions :

1. Évaluer la pertinence didactique de ces situations, en retenant divers critères :
   a) l'évolution des connaissances des élèves.
   b) la transformation des pratiques des élèves dans des tâches impliquant diverses représentations des opérations et calculs sur les fractions.
2. Préciser les caractéristiques des situations et les interactions enseignant/élèves qui sont déterminantes dans l'évolution des connaissances des élèves.

Nous croyons avoir atteint ces objectifs dans la mesure où nous avons effectivement conçu et adapté le dispositif d'enseignement décrit plus haut, que nous l'avons mis à l'essai, et que nous en avons évalué les effets sur la construction et l'intégration des connaissances sur le sens des opérations sur les fractions, ainsi que sur les habiletés de représentation graphique des connaissances sur les fractions. Mais qu'en est-il plus précisément de ses effets, des résultats de cet enseignement ?

Pour répondre à la question précédente, nous présentons les conclusions que nous avons tirées suite à l'analyse de nos résultats. Pour ce faire, nous exposerons les principaux résultats de notre recherche par rapport aux conduites des élèves au cours des séquences didactiques, ainsi qu'à leurs performances à l'épreuve présentée à l'entrée et à la sortie de la séquence. Enfin, nous nous pencherons sur les limites et les retombées de notre recherche, ce travail nous permettant d'identifier quelques questions susceptibles d'orienter des recherches futures.

4.1. Synthèse des principaux résultats de notre recherche

La synthèse des principaux résultats de notre recherche portera sur deux aspects primordiaux. Nous caractériserons d'abord l'évolution des conduites des élèves de notre projet et de leurs interactions au cours des séquences didactiques (opérations sur les fractions). Nous ferons état ensuite des conduites des élèves lors de l'épreuve administrée à l'entrée et à la sortie de la séquence.

4.1.1. Synthèse des conduites des élèves et des interactions lors des séquences didactiques

L'analyse des conduites des élèves et de leurs interactions nous a permis de nous prononcer sur l'évolution progressive de leurs connaissances sur les opérations sur les fractions. Nous avons aussi été en mesure d'analyser chacune des situations qui constituent notre recherche. En effet, chaque item de chaque épreuve a été soigneusement analysé. Nous avons par la suite colligé l'ensemble de ces données dans une série de tableaux ergonomiques. Cet exercice nous a non seulement permis de mettre en perspective les résultats individuels et collectifs des élèves, mais également d'en extraire les éléments importants en ce qui concerne l'évolution de leurs connaissances.

Les représentations animées de l'addition de fractions vues à l'ordinateur s'avèrent bénéfiques pour sept des huit élèves. Cette observation est importante et nous permet d'en conclure que « savoir représenter des fractions » et « savoir effectuer des additions de fractions » ne signifie pas que l'on sait :

1. Réunir dans une même représentation les fractions entrant dans les opérations.
2. Interpréter les « gestes » qui sont utilisés dans le calcul des additions.

Il semble donc que tous les élèves, quelles que soient leurs habiletés en calcul, partagent des apprentissages communs suite au visionnement des capsules. Enfin, les conduites des élèves en résolution de problèmes sont comparables à celles observées à l'entrée dans la séquence. L'analyse des tâches et des conduites des élèves sur la soustraction nous amène aux mêmes constats.

Les élèves ont eu, tout au long de la recherche, beaucoup de difficultés à effectuer les multiplications de fractions. Nous avons donc vu dans cette situation une occasion unique d'apprécier l'effet potentiellement favorable des capsules d'enseignement portant sur cette habileté. Lors de la séquence d'entrée, nous dénombrions quatre élèves incapables de produire au moins une représentation précise des fractions entrant dans les additions et les soustractions de fractions. Suite au visionnement de la capsule informatisée, deux de ces quatre élèves (soit les élèves E1 et E2) savent produire au moins une représentation adéquate de la multiplication de fractions. De plus, à la séquence d'entrée, nous avions remarqué qu'un seul des élèves (soit l'élève E3) pouvait effectuer correctement les multiplications de fractions. Suite aux capsules sur la multiplication, cinq élèves (soit les élèves E1, E3, E4, E6 et E7) effectuent correctement au moins une des multiplications de fractions.

En ce qui concerne la résolution de problèmes multiplicatifs, nous avons jugé plus pertinent de comparer les résultats des problèmes présentés à l'entrée à ceux obtenus à la sortie. Cette décision vient principalement du fait que leur complexité est beaucoup plus comparable (il s'agit de problèmes isomorphes). Or, comme le montrent nos analyses, tous les élèves résolvent adéquatement au moins un des problèmes multiplicatifs présentés à la sortie, tandis qu'à l'entrée dans la séquence, deux élèves seulement y arrivent (soit les élèves E4 et E5).

Enfin, la représentation de la multiplication de fractions semble également profiter du visionnement de la capsule. En effet, quatre élèves, comparativement à aucun élève lors de l'entrée dans la séquence, savent produire au moins une représentation adéquate de cette opération.

4.1.2. Synthèse des conduites des élèves à l'épreuve passée à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique

Une analyse rigoureuse des résultats provenant de la séquence d'entrée nous a permis de mettre en évidence les difficultés rencontrées dans le traitement des opérations et dans la résolution de problèmes.

Parmi les constats les plus importants à retenir, nous retrouvons, chez tous les élèves, l'incapacité à produire des représentations du résultat des additions et des soustractions de fractions. Loin de nous surprendre, cette difficulté des élèves est sans doute attribuable au fait qu'une telle tâche n'est pratiquement jamais exigée des élèves en classe. Nous remarquons également que tous les élèves inaptes à produire des représentations précises des fractions se révèlent incapables d'effectuer avec succès les additions et les soustractions de fractions (E1, E2, E6, E7 et E8). De plus, aucun élève ne sait faire des représentations appropriées des multiplications de fractions et un seul élève sait opérer correctement sur les multiplications proposées. Enfin, l'examen des conduites des élèves lors de la résolution des problèmes met en évidence la relation étroite entre les habiletés à représenter et à opérer sur les fractions et les habiletés à résoudre des problèmes intégrant des fractions.

L'étude des conduites des élèves à la sortie de la séquence nous a permis d'observer des progrès significatifs en ce qui concerne le traitement des opérations et la résolution de problèmes, mais également la persistance de certaines difficultés chez plusieurs élèves.

Tous les élèves (sauf les élèves E1 et E8) parviennent à réaliser une représentation convenable des fractions à additionner et à soustraire et ce, en réduisant les fractions. Les élèves E2, E3, E4 et E7 se montrent capables de produire des représentations adéquates d'au moins une des additions et des soustractions proposées (comparativement à aucune représentation lors de la séquence d'entrée). Les élèves E2, E3, E4, E5, E6 et E8 savent effectuer au moins une des additions et des soustractions, alors que seuls les élèves E3, E4 et E5 y étaient parvenus à l'entrée.

En ce qui concerne la représentation de la multiplication de fractions, nous observons une fois de plus une incapacité des élèves à effectuer cette tâche. Même les élèves qui ont été en mesure de le faire, suite au visionnement de la capsule portant sur la multiplication, n'y parviennent plus durant l'exercice de sortie. Ce constat est très révélateur des difficultés des élèves à illustrer le sens de cette opération à l'aide de figures géométriques. Par ailleurs, trois des cinq élèves qui avaient effectué correctement les multiplications lors de la séquence d'enseignement parviennent encore à le faire lors de l'épreuve présentée à la sortie (E3, E4 et E7). Les acquis concernant l'exécution de multiplications de fractions semblent donc se consolider plus efficacement que ceux concernant la représentation graphique de cette même opération.

Malgré une amélioration appréciable des performances dans la résolution des problèmes mathématiques présentés à l'épreuve de sortie (plusieurs élèves savent résoudre correctement 3 des problèmes présentés), la majorité des élèves ne fournit aucune représentation des problèmes qu'ils doivent solutionner.

Somme toute, à en croire les analyse effectuées à partir des épreuves présentées à l'entrée et à la sortie de la séquence d'enseignement, c'est la capacité des élèves à représenter adéquatement les additions et les soustractions de fractions qui semble le plus bénéficier de l'utilisation du dispositif informatisé.

4.2. Limites de la recherche

L'analyse des conduites des élèves à l'entrée dans la séquence d'enseignement, au cours de l'enseignement et enfin, à la sortie de la séquence d'enseignement, nous a permis de mettre en évidence l'évolution de certaines connaissances des élèves, mais aussi les limites du dispositif d'enseignement que nous avons imaginé et mis à l'essai.

Une première limite concerne la petite taille de l'échantillon d'élèves présentant des difficultés (huit élèves). Les résultats de notre recherche ont donc été interprétés avec discernement, en décrivant le plus précisément possible les conditions de réalisation de l'étude, évitant ainsi des généralisations abusives. Les retombées de notre recherche sont donc dépendantes des précisions apportées sur ces situations et leurs réalisations.

Une seconde limite concerne les conditions de réalisation de notre projet. Le fait que chaque séance ait eu lieu pendant la pause du dîner (hors du contexte habituel de leur cours de mathématiques) a certainement eu une incidence (positive ou négative) sur l'investissement des élèves dans la tâche et leur niveau de motivation. Certains d'entre eux avaient le sentiment d'être privilégiés de pouvoir prendre part à une telle recherche, alors que d'autres considéraient l'exercice simplement comme une période de travail académique supplémentaire. Le moment de réalisation des séances a aussi été une contrainte pour l'enseignant-chercheur qui n'a pu disposer du temps nécessaire pour susciter les interactions ou permettre aux élèves de partager leurs interprétations.

Une autre limite a trait au moment de l'année scolaire à laquelle a eu lieu cette expérimentation. Effectuée en fin d'année, quelques semaines avant les vacances d'été, les élèves ont bénéficié de nombreuses activités de révision et d'évaluation formative en classe. Il est donc hasardeux de prétendre que l'amélioration de certaines performances des élèves soit uniquement attribuable à l'utilisation de notre dispositif d'enseignement informatisé.

Enfin, une des limites importantes découle du fait que l'enseignant-chercheur qui a effectué l'enseignement n'était pas l'enseignant titulaire de la classe de mathématiques des élèves qui ont participé à cette étude. Les élèves ont été sélectionnés parmi l'ensemble des classes de mathématique de 1ère secondaire. La relation entre l'enseignant-chercheur et les élèves était donc fragile car l'enseignant-chercheur ne correspondait pas à une figure significative pour eux. Cette situation peut avoir eu un impact sur l'effort fourni par certains élèves.

4.3. Perspectives de recherche

Notre recherche doit être considérée comme une recherche exploratoire qui, nous l'espérons, ouvrira des voies pour des recherches ultérieures.

Il est évident que l'action de représenter des fractions et le résultat d'une opération impliquant ces fractions a une influence sur les stratégies que les élèves déploient et sur la manière dont ils abordent le problème auquel ils font face. Il en va de même en ce qui concerne le visionnement de capsules d'enseignement.

En effet, si les données obtenues suite aux analyses portant sur les additions et les soustractions de fractions étaient assez comparables, il en a été tout autrement en ce qui concerne la multiplication de fractions. Il serait très intéressant de comprendre pourquoi le visionnement des capsules, accompagné d'une exigence de représentation visuelle des fractions, a semblé si avantageux pour les élèves dans l'addition et la soustraction de fractions alors que cet effet positif a été beaucoup moindre avec la multiplication de fractions. Des modifications devraient peut-être être apportées à la séquence didactique choisie dans cette dernière capsule en particulier. Le recours à une diversité d'objets pour représenter la multiplication de fractions et l'exploitation de divers sens de l'opération, exploitation s'appuyant notamment sur les travaux réalisés par Vergnaud (1981), pourraient être envisagés.

Dans des recherches futures, il serait intéressant d'approfondir les situations consacrées à chacune des opérations sur les fractions et de séparer les opérations en deux grands champs de recherche.

1. Addition et soustraction de fractions.
2. Multiplication et division de fractions.

Enfin, il serait important d'examiner le processus d'intégration d'un tel outil d'enseignement informatisé dans une classe régulière comportant plusieurs élèves éprouvant des difficultés d'apprentissage, et ce, tout au long d'une année scolaire. Il serait bien sûr également essentiel d'en examiner les effets sur la construction des connaissances des élèves sur les opérations sur les fractions et sur la résolution de problèmes impliquant des fractions.

Bibliographie

Amigues, R. (1994). *Construction des faits d'enseignement et voies de recherche en psychologie de l'éducation*. Un exemple, les technologies éducatives, Habilitation à diriger des recherches, Université de Provence, Aix-Marseille 1.

Baddeley, Alan. (1993). *La mémoire humaine, théorie et pratique,* (Traduction de l'anglais (LEA, 1990) sous la direction de Solange Hollard). Presses Universitaires de Grenoble.

Barallobres, G. & Lemoyne, G. (2006). L'enseignement des opérations sur les fractions : une visite commentée de manuels québécois et argentins. In M. Lebrun (dir.), *Le manuel scolaire. Un outil à multiples facettes* (p.159-189). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Bérubé, L. (1998). *Terminologie de neuropsychologie et de neurologie du comportement.* Montréal: Les Éditions de la Chenelière Inc.

Bezuk, N. S. et Bieck, M. (1992). Current Research on Rational Numbers and Common Fractions : Summary and Implications for Teachers. In D. T. Owens (Editor), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics* (p. 118-136). National Council of Teachers of Mathematics New York : Macmillan Publishing Company.

Binet, A. et Simon, T. (1967) *La mesure du développement de l'intelligence chez les jeunes enfants.* Paris: Armand Colin Editeur, 16e éditions.

Blouin, P. (1993). *Dessine-moi un bateau: La multiplication par un et demi.* Montréal: Éditions Bande Didactique, Presses de l'Université du Québec à Montréal.

Blouin, P. (2002). *Dessine-moi un bâteau : la multiplication par un et demi*, Montréal : Editions Bande Didactique, Presses de l'Université du Québec à Montréal.

Blouin, P., Lemoyne, G. (2002). L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficultés d'apprentissage: une approche didactique de la rééducation et ses effets. *Petit x*, 58, 7-23.

Boimare, S. (1999). *L'enfant et la peur d'apprendre.* Paris : Édition Dunod.

Bouchard, G.-E. (1985). *Un enfant, un besoin, un service.* Montréal: Conseil scolaire de l'Île.

Bowen, F., Desbiens, N., Rondeau, M., Ouimet, I. (2000). La prévention de la violence et de l'intimidation en milieu scolaire. In F. Vitaro et C. Gagnon (Éds.). *Prévention des problèmes d'adaptation chez les enfants et les adolescents* (p. 165-229). Montréal : Les Presses de l'Université du Québec.

Breton, G. (1993). Carrousel mathématique 1, Première secondaire/Tome 1. Anjou : Centre éducatif et culturel.

Bronfenbrenner, U. (1979). *The ecology of Human Development : experiments by nature and design*. Cambridge : Harvard University Press.

Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de laryngologie otologie rhinologie*, no. 3-4, 107-131.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthode de la didactique des mathématiques*. Bordeaux : Université de Bordeaux.

Brousseau, N. et G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1988). *Le contrat didactique : le milieu.* Recherche en didactique des mathématiques, vol.9 n° 3, Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage, p. 78.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Dans Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. et Warfield, V. (1998) *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Brousseau, G., Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11/2.3., Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage, 167-210.

Brousseau, G., Peres, J. (1981). *Étude d'un enfant en difficulté en mathématiques. « Le cas de Gaël »*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Brousseu G, Wargield, V. (1998). The case of Gael, *Journal of Mathematical Behavior*, no.18.1, 1-46.

Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant*. Thèse Posthume. Bordeaux : LADIST.

Champagne, G. et Bardier, J.-C. (1987). *Mathématique au primaire FLG : avec résolution de problèmes*, Manuel de l'enseignant(e) : Corrigé du manuel de l'élève, Montréal : Éditions HRW.

Charnay R. et Mante M. (1992). De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-médiation. *Repères-IREM*. 7, 3-31.

Chevallard, Y et Julien, M. (1989). *L'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche et société*, Marseille : Publications de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1988). *Notes sur la question de l'échec scolaire*, Publications de l'IREM d'Aix Marseille, no. 13.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 22/2.3, Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage, 135-183.

Comiti C., Grenier D, Margolinas C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier et A. Tiberghien (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 123-144). Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec, (1965). *Rapport Parent* (3e éd.). Québec: Gouvernement du Québec.

Conne, F. (1996) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, in J. Brun (dir.) *Didactique des mathématiques* (p. 275-338). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne et F. Conne (éds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 31-69). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

De Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P., et Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique, enseignement secondaire*. 2e édition, Montréal : Les éditions du triangle d'or.

De Serres, M. & Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages*, Collège Jean-de-Brébeuf

Denis, B & Leclercq, D. (1995). *Apprentissage et multimédia*. Faculté Notre-Dame de la Paix, Namur.

Desbiens, N., Bowen, F. (2002). *Le développement de la compétence sociale chez les enfants : un moyen d'intervention auprès des élèves qui présentent des difficultés d'adaptation en milieu scolaire*, 27e Congrès de l'ACFAS. Université de Sherbrooke.

Ehrlich, M-F. (1994). *Mémoire et compréhension du langage*. Lille: Presses Universitaires de Lille.

Evamath (1994). Réflexions et activités. CM2-6ème, CRDP Nice.

Farhnam-Diggory, S. (1979). *Learning Disabilities*, Guilford, London and Worcester : Éditions Billing & Sons.

Favre, J.-M. (1999) Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant, In G. Lemoyne et F. Conne (Éds.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 235-261). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Gathercole, S.E. (1996). *Models of short-trem memory*. Bristol: Psychologoy Press.

Gaudreau, A., Lemoyne, G., Poirier, L. (2001). Interactions enseignants-chercheurs dans la conception, la mise à l'essai et l'analyse de situations d'enseignement des mathématiques en classe spéciale. In G. Lemoyne et G. Lessard (Éds.) *L'éducation au tournant du nouveau millénaire* (p. 141-166). Montréal : Université de Montréal, FSE, vice-décanat à la recherche.

Goupil, G. (1997). *Les élèves en difficultés d'adaptation et d'apprentissage.* Montréal: Gaëtan Morin Éditeur.

Goupil, G. (1997). *Les élèves en difficultés d'adaptation et d'apprentissage.* Montréal: Gaëtan Morin Éditeur.

Goussard, J-P. (1998). Le guide de l'enseignant. Édition Revue EPS.

Hart, K.M. (1981). *Children's Understanding of mathematics* , Londres : John Murray.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 71-87.

Hiebert, J. et Behr, M. (1988). Capturing the major themes. In J. Hierbert et M. Behjr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grade* (p. 1-18). Hillsdale, NJ. : Erlbaum, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Hinshaw, S. P. (1992). Externalizing Behavior Problems and Academic Underachievement in Childhood and Adolescence: Causal Relationships and Underlying Mechanisms, *Psychological bulletin*, Washington: American Association Bulletin, 111, no. 1, 127-155.

Kamii C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique.* Berne: Éditions Peter Lang.

Kieren, T. E. (1980). Knowing rational numbers : Ideas and symbols. In M. M. Lindquist (Ed*) Selected issues in mathematics education* (p. 69-81) . Berkely, CA : Mc Cuchan.

Kieren, T. E. (1988). Personal knoledge of rational numbers. In J. Hierbert and M. Behr (Eds.*) Numberts concepts and operation in the middle grade* (p. 1-18). Hillsdale, NJ : Erlbaum : Reston, FA : National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T.E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam et R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (p. 323-371). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieren, T.E. (1994). Reflections and interactions on rational number thinking, learning and teaching. In D. Kirshner (dir.), Proceedings of the 16th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Baton Rouge: Louisiana State University, vol. 1, p. 53-56.

Kieren, T.E. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J. T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (p. 31-65). Albany: State University of New York Press.

Lacasse, C. (2003). Presto, Mathématique, 3e cycle du primaire, 2e année, Manuel B (volume 1), Anjou : Éditions CEC Inc.

Legendre, R. (1983). *Dictionnaire actuel de l'éducation.* Montréal: Gaëtan Morin Éditeur.

Lemoyne, G. (1993). La quête de sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In P. Jonnaert et Y. Lenoir (dir.): *Sens des didactiques et didactique du sens* (p. 263-288). Éditions du CRP, Université de Sherbrooke.

Lemoyne, G., Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants, *Éducation et francophonie,* vol.31, no.2, 35 pages, Numéro thématique sur la spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.

Lemoyne, G., René de Cotret, S., Coulange, L. (2002*). La dynamique du couple représentation-interprétation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques,* In J.C. Sallaberry et G. Sensevy (dir.), *Les représentations en éducation*, *L'Année des Sciences de l'éducation*, p152-179.

Leong, C. K. (1982). Promising areas of research into learning disabilities with emphasis on reading disabilities. In J. P. Das, R. F. Mulcahy and A. E. Wall (Éds.) *Theory and Research in Learning Disabilities* (p. 3-26). New York: Plenum Press.

Lieury A. (1993). *La mémoire du cerveau à l'école.* Paris: Éditions Dominos Flammarion.

Lindsay, P.H., et Norman, D. A. (1980). Traitement de l'information et comportement humain : une introduction à la psychologie. Montréal : Études Vivantes.

Lyons, M. et R. Lyons. (1987). *Défi mathématique 4*, Manuel de l'élève, Laval : Mondia.

Matheron, Y. & Mercier, A. (2004). Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. In G. Lemoyne (rédactrice invitée). *Revue des sciences de l'éducation*, Numéro thématique *: Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*, vol. xxx, No 2, p. 355-377.

Mercier, A. (1995a). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage, 15.1, 97-142.

Mercier, A. (1995b). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier et A. Tiberghien (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 145-169). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage, 18 (3), 279-310.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information *Harvard Psychological Review*, vol. 63, 81-97

Nimier, J. (1988). *Les modes de relations aux mathématiques*. Paris : Édition Méridiens Klincksieck.

Nonnon, P. (1984). *La lunette cognitive : Laboratoire d'initiation aux sciences assistée par ordinateur*. Montréal, Laboratoire de robotique pédagogique.

Nonnon, P. (1993), *Proposition d'un modèle de recherche développement technologique en éducation*, Regard sur la robotique pédagogique, Liège, Université de Liège.

Novillis-Larson, C. (1980). Locating proper fractions. *School Science and Mathematiics*, 53 (5), 423-428.

Patenaude, P. et Warisse, C. (1994). Saint-Laurent : Éditions du Renouveau Pédagogique.
Patenaude, P. et L. Viau. (1993). Dimensions, Mathématique 116, Saint-Laurent : Éditions du Renouveau Pédagogique.

Post, T. R. et Carmer, K. A. (1987). Reserach into practice : Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, 35(2), 33-35.

Richard, J. F. (1982). Planification et organisation des actions dans la résolution du problème de la Tour de Hanoï par des enfants de 7 ans. *Année Psychologique*, 82, 307-336.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Rouchier A. (1996). Connaissance et savoirs dans le système didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage, 16 (2),177-196.

Rouchier, A. (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en didactique des mathématiques.* Grenoble : Éditions: La Pensée Sauvage, vol. 16/2, no. 47, 177-196.

Salin, M.H., (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. In G. Lemoyne et F. Conne (éds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, (p. 327-349). Montréal: Presses de l'Université de Montréal.

Sallaberry , J.-C. et Sensevy, G. (2002). Les représentations en éducation, *L'Année des Sciences de l'éducation.*

Sarrazy, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educationnal studies in mathematics.* Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers. vol. 49, no1, 89-117.

Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques. Étude et Autonomie à l'école élémentaire.* Paris : Presses Universitaires de France.

Siety, A. (2001). *Mathématiques ma chère terreur.* Paris : Édition Calmann-Levy

Soulière, M., Thibaudeau, J.-G. (1993). *Scénarios mathématiques*, Laval : Les Éditions HRW

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique.* Montréal: Éditions Logiques.

Van der Maren, J.M. (1996), Méthodes de recherche pour l'éducation, Montréal : Les presses de l'Université de Montréal.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Éditions Peter Lang.

Vergnaud, G., Benhadj, J. et Dussouet, A. (1979). *La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen et la classe de sixième*, Paris, INRP.

Weil-Barais, A. (1993). *L'homme cognitif.* Paris: Éditions Presses Universitaires de France.

Annexes

Annexe 1

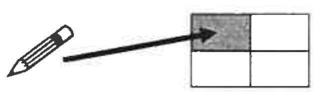
Nom : ______________________________

1. Effectue les additions suivantes :

a) $\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24}$

Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.  Exemple: 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{6}{12}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{16}{24}$	
Calculs :	$\frac{6}{12} + \frac{3}{4} + \frac{16}{24} =$

b) $\frac{26}{52} + \frac{33}{99}$

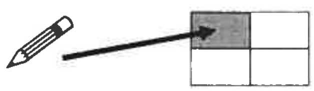
Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.  Exemple : 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{26}{52}$	
$\frac{33}{99}$	
Calculs :	$\frac{26}{52} + \frac{33}{99} =$

2. Effectue les soustractions suivantes :

a) $\frac{7}{8}-\frac{1}{3}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple : 1/4	Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{7}{8}$	
$\frac{1}{3}$	
Calculs :	$\frac{7}{8}-\frac{1}{3}=$

b) $\frac{11}{33}-\frac{22}{66}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple : 1/4	Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{11}{33}$	
$\frac{22}{66}$	
Calculs :	$\frac{11}{33}-\frac{22}{66}=$

3. Effectue la multiplication suivante :

a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

b) $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10} =$

4. Le $\frac{2}{18}$ des 270 élèves de l'école étaient malades. Combien d'élèves étaient malades?

5. Les $\frac{4}{7}$ des élèves de deux classes de 1ère secondaire portent des lunettes. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies?

6. Sylvain achète une lasagne pour son souper de lundi. Il sépare ce repas en 12 parties égales. Il mange les 2/6 le premier soir et le ¼ le lendemain. Quelle fraction de sa lasagne lui reste-t-il après son deuxième repas ?

7. Le grand chef d'un restaurant a reçu une commande pour faire un gâteau de mariage. La recette qu'il suit lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9 Kg de farine qu'il a acheté. Quelle quantité de farine le chef devra-t-il utiliser pour sa recette ?

Nom : ________________________________

Questions de type A

Encercle la bonne réponse.

1. Quel est le rôle du couteau  dans l'animation ?

   a) Obtenir deux fractions ayant un même dénominateur.
   b) Obtenir deux fractions ayant un même numérateur.
   c) Additionner les deux fractions.
   d) Aucune utilité dans l'animation.

2. Regarde le dessin ci-dessous.

   Pourquoi on ne peut pas compter les parties dans chacune des pizzas et dire que 3/9 correspond à l'addition des deux fractions ?

a) Parce que les deux pizzas n'ont pas la même forme.
b) Parce que la pizza de droite est trop petite.
c) Parce que la pizza de gauche est trop grande.
d) Parce les deux pizzas ne sont pas séparées avec des pointes identiques.

3. Que faudrait-il faire pour pouvoir additionner les deux pizzas lorsqu'elles sont représentées comme sur l'image plus haute ?

a) Ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et additionner.
b) Ne pas tenir compte de la pointe plus grosse dans la pizza de gauche.
c) Obtenir deux pizzas avec des pointes de même grosseur.
d) Ajouter une pointe de plus dans la pizza de droite et additionner ensuite.

Questions de type B

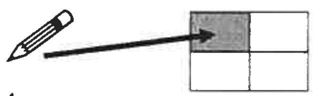
1. Additionne les trois fractions suivantes. Représente-les dans les rectangles en coloriant leur représentation.

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$

2. Il faut trouver la somme des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$ et $\frac{1}{8}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la réunion des parties du tout ainsi obtenues.

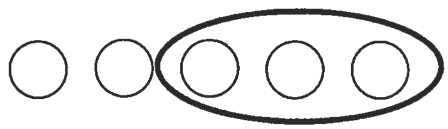
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) **Représente chaque fraction à additionner dans un rectangle.**  Exemple : 1/4	**Représente l'addition de fractions dans un seul rectangle.**
Dessin de $\frac{1}{4}$ **=**	**Dessin pour :** $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$
Dessin de $\frac{3}{16}$ **=**	
Dessin de $\frac{1}{8}$ **=**	
b) Calculs :	$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} =$

3. Il faut trouver la somme des fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la réunion des parties de la collection (du tout) ainsi obtenues.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

<table>
<tr>
<td>a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection.
Exemple : 3 billes sur 5
</td>
<td>Représente l'addition de fractions avec une seule collection.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dessin de $\frac{1}{3}$ =</td>
<td rowspan="2">Dessin pour : $\frac{1}{3}+\frac{3}{8}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Dessin de $\frac{3}{8}$ =</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">b) Calculs : $\frac{1}{3}+\frac{3}{8} =$</td>
</tr>
</table>

Questions de type C

Problème #1 :

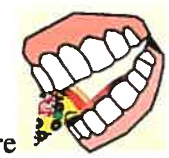
Samedi matin, je suis allé au dépanneur et je suis revenu avec un gros sac contenant des chocolats. Durant cette même journée, j'ai d'abord mangé 3/10 des chocolats contenus dans le sac ; j'ai aussi consenti à donner 2/5 des chocolats contenus dans le sac, lorsque je suis revenu du dépanneur, donc avant d'en avoir mangé. Et, en comptant les chocolats restants dans le sac, j'ai trouvé 28 chocolats. Combien avais-je de chocolats au départ ?

Problème #2 :

Manon, qui est une excellente dessinatrice, décide de faire un dessin sur un grand carton carré de 8 cm de côté. Elle calcule d'abord l'aire de ce carton et fait un premier dessin qui occupe 1/4 de la surface du carton et un autre dessin qui prend 3/16 de la surface. Quelle fraction du carton occupe alors les deux dessins que Manon a réalisés ?

Questions de type A

Encercle la bonne réponse.

1. Quel est le rôle de la mâchoire  dans l'animation ?

  a) Obtenir deux fractions ayant un même numérateur.
  b) Obtenir deux fractions ayant un même dénominateur.
  c) Représenter l'ajout d'une pointe de pizza dans l'opération.
  d) Représenter la disparition d'une pointe de pizza dans l'opération.

2. Regarde le dessin du bas.

   Pourquoi on ne peut pas enlever la partie de la pizza de droite à la pizza de gauche et dire qu'il ne reste que 1/9 de pizza en tout ?

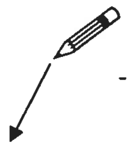
a) Parce les deux pizzas ne sont pas séparées avec des pointes identiques.
b) Parce que la pizza de droite est trop petite.
c) Parce que les deux pizzas n'ont pas la même forme.
d) Parce que les deux pizzas ne sont pas placées dans le bon ordre.

3. Que faudrait-il faire pour pouvoir soustraire les deux pizzas lorsqu'elles sont représentées comme sur l'image du haut ?

a) Ne pas tenir compte de la grosseur des pointes et soustraire.
b) Obtenir deux pizzas avec des pointes de même grosseur.
c) Ne pas tenir compte de la pointe plus grosse dans la pizza de droite.
d) Ajouter une pointe de plus dans la pizza de gauche et soustraire ensuite.

Questions de type B

1. Soustrais les trois fractions suivantes. Représente-les dans les rectangles en coloriant leur représentation.



$$\frac{5}{6} \quad - \quad \frac{4}{12} \quad - \quad \frac{2}{6} \quad = \quad \frac{1}{6}$$

2. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{19}{25}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{25}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre quelle est la différence entre ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

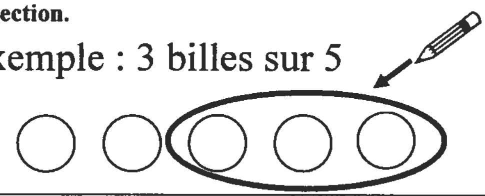
<table>
<tr><td>a)Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.

Exemple : 1/4</td><td>Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.</td></tr>
<tr><td>$\frac{19}{25}$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{5}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{25}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Calculs : $\frac{19}{25} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} =$</td></tr>
</table>

3. Il faut trouver la différence entre les fractions $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{21}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la différence entre ces deux parties.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

<table>
<tr><td>a)Représente chaque fraction à l'aide d'une collection.
Exemple : 3 billes sur 5
</td><td>Représente la soustraction de fractions avec une seule collection.</td></tr>
<tr><td>$\frac{6}{7}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{21}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Calculs : $\frac{6}{7} - \frac{3}{21} =$</td></tr>
</table>

Question de type C

Problème #1 :

Jean-François a reçu un jeu vidéo pour sa fête. Ce jeu comporte en tout 25 missions qu'il doit accomplir. La première semaine, il réussit à accomplir le 4/25 des missions. La deuxième semaine, il continue le jeu et vient à bout du 1/5 des 25 missions. Combien de missions lui reste-t-il pour s'amuser la troisième semaine ?

Problème #2 :

Béatrice joue aux cartes avec son amie. Le but du jeu est d'obtenir le plus de cartes rouges possible en lançant un dé. Au début du jeu, Béatrice a 21 cartes rouges. Elle perd le 6/7 de ses cartes rouges lors du troisième tour. Finalement, elle doit donner trois cartes rouges à son amie après avoir perdu au lancer du dé. Combien de cartes possède Béatrice à ce moment de la partie ?

Questions de type A

Encercle la bonne réponse.

1. Dans la figure ci-dessous, nous voyons que l'écriture $\frac{1}{4} x \frac{2}{3}$ peut se lire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

Quelle phrase semble le mieux expliquer ce que cette image représente ?

a) Nous allons prendre les $\frac{1}{4}$ de la fraction $\frac{2}{3}$.

b) Nous allons prendre les $\frac{2}{3}$ de la fraction $\frac{1}{4}$.

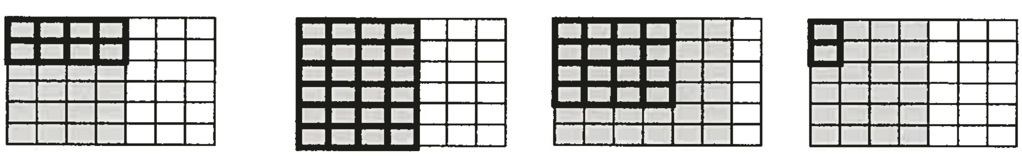
c) La fraction $\frac{1}{4}$ est équivalente à la fraction $\frac{2}{3}$.

d) Il manque $\frac{1}{4}$ pour compléter la fraction $\frac{2}{3}$.

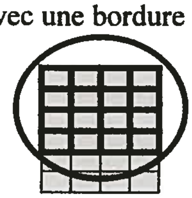
2. Quelle image représente la multiplication suivante ?

$$\frac{2}{6} x \frac{4}{7}$$

a) b) c) d)



3. Que représentent les sections avec une bordure foncée à la question #2 ?



a) Le numérateur de la fraction qui multiplie.
b) Le résultat de la multiplication.
c) Le dénominateur de la fraction multipliée.
d) Le numérateur de la fraction obtenue comme résultat.

Questions de type B

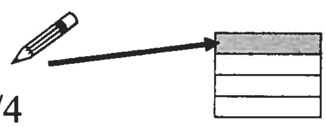
1. Multiplie les deux fractions suivantes. Représente chacune d'elles dans un rectangle en les séparant adéquatement.

$\frac{3}{10}$  $\frac{3}{4}$ $=$ $\frac{9}{40}$

2. Il faut multiplier les fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{4}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'un rectangle dont les dimensions sont bien choisies et montre à quelle fraction équivalente correspond chacune des fractions et à quelle fraction correspond la multiplication de ces fractions.

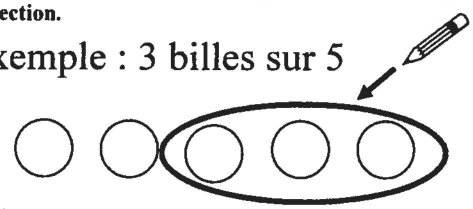
b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

a) **Représente chaque fraction à multiplier dans un rectangle.**  Exemple : 1/4	**Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.**
$\frac{5}{9}$	
$\frac{2}{4}$	
b) Calculs :	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{4} =$

3. Il faut multiplier les fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{3}{4}$.

a) Représente ces fractions à l'aide d'une collection comportant un nombre bien choisi de billes et montre à quel nombre de billes correspond le produit de ces deux fractions.

b) Effectue un calcul pour arriver au résultat.

<table>
<tr><td>a)Représente chaque fraction à multiplier avec une collection.
Exemple : 3 billes sur 5
</td><td>Représente la multiplication de fractions avec une seule collection.</td></tr>
<tr><td>$\frac{11}{12}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Calculs : $\frac{11}{12} \times \frac{3}{4} =$</td></tr>
</table>

Question de type C

Problème #1 :

Jasmin collectionne les cartes de hockey. Il aimerait posséder toutes les cartes de son équipe locale favorite. Au milieu de l'hiver, il avait en sa possession les $\frac{2}{4}$ de cette collection. Malheureusement, lors d'un déménagement au printemps, il a égaré les $\frac{5}{9}$ des cartes qu'il avait. Quelle fraction représente les cartes qu'il lui reste ?

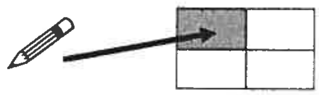
Problème #2 :

Camille veut économiser pour obtenir son permis de conduire. Si elle maintient une bonne moyenne dans ses résultats scolaires tout au long de l'année, ses parents vont l'aider financièrement. De plus, la compagnie qui donne le cours offre un rabais sur le montant à payer. Lors d'une nouvelle inscription, il ne faut payer que le $\frac{11}{12}$ du montant total. Si les parents de Camille se sont engagés à payer les $\frac{3}{4}$ du cours, si elle garde une bonne moyenne, quelle fraction du montant total du cours devra-t-elle défrayer de sa poche ?

2. Effectue les soustractions suivantes :

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.



Exemple : 1/4

Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.

$\frac{7}{8}$

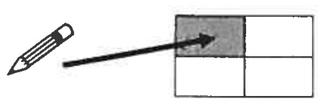
$\frac{1}{3}$

Calculs :

$\frac{7}{8} - \frac{1}{3} =$

b) $\frac{11}{33} - \frac{22}{66}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.



Exemple : 1/4

Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.

$\frac{11}{33}$

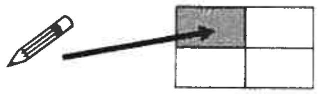
$\frac{22}{66}$

Calculs :

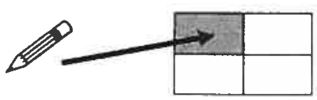
$\frac{11}{33} - \frac{22}{66} =$

2. Effectue les soustractions suivantes :

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple : 1/4	Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{7}{8}$	
$\frac{1}{3}$	
Calculs :	$\frac{7}{8} - \frac{1}{3} =$

b) $\frac{11}{33} - \frac{22}{66}$

Représente chaque fraction à soustraire dans un rectangle.  Exemple : 1/4	Représente la soustraction de fractions dans un seul rectangle.
$\frac{11}{33}$	
$\frac{22}{66}$	
Calculs :	$\frac{11}{33} - \frac{22}{66} =$

3. Effectue la multiplication suivante :

a) $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{15}{16} \times \frac{11}{12} =$

b) $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10}$

Représente la multiplication de fractions dans un seul rectangle.
Calculs : $\frac{3}{15} \times \frac{9}{10} =$

4. **Le $\frac{2}{18}$ des 270 employés de l'usine étaient malades. Combien d'employés étaient malades ?**

5. **Les $\frac{4}{7}$ des élèves de deux classes de 1ère secondaire sont des filles. Si le nombre total d'élèves dans ces deux classes est supérieur à 35 mais inférieur à 56, combien y a-t-il d'élèves dans les deux classes réunies ?**

6. **Paul achète un gâteau de fête pour sa copine. Il sépare ce gâteau en 12 parties égales. Ils mangent les 2/6 le premier soir et le 1/4 le lendemain. Quelle fraction de son gâteau reste-t-il après le deuxième repas ?**

7. **Un entrepreneur en construction a reçu une commande pour faire une réparation sur un balcon en ciment. La recette pour son ciment lui indique qu'il aura besoin des 21/27 du sac de 9 Kg de ciment qu'il a acheté. Quelle quantité de ciment l'entrepreneur devra-t-il utiliser pour obtenir un ciment adéquat ?**

Annexe 2

Projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur

Aux parents de ________________________,

Nous avons construit des activités d'enseignement des mathématiques sur ordinateur et nous comptons faire participer votre enfant à ces activités. Il s'agit d'activités fort importantes pour l'apprentissage en mathématiques portant sur les opérations de base sur les fractions. La personne responsable de la réalisation de ce projet est un enseignant de l'École Secondaire Fernand-Lefebvre. Des professeurs de l'Université de Montréal sont également impliqués dans ce projet pour mieux effectuer par la suite les analyses.

Nous comptons aussi réaliser quelques activités sans ordinateur et il nous faudra enregistrer certaines conversations audio de ces activités pour pouvoir mieux comprendre ce qui sera fait. Si nous faisons état des réponses de votre enfant dans notre rapport, son nom ne sera pas mentionné ; nous utiliserons un code pour chacun des enfants et ce code ne sera connu que des professeurs et des enseignants.

Pour la réalisation de ces activités, il faut compter environ 7 périodes de tutorat qui ont lieu sur l'heure du midi (1 période par semaine pendant 7 semaines).

Nous espérons que vous permettrez à votre enfant de participer à ces activités qui lui permettront de faire des apprentissages importants et de qualité sur la notion de fraction.

Avant de remplir le formulaire suivant, il faut aussi que vous sachiez qu'en tout temps, vous pouvez retirer votre consentement. Si vous ne souhaitez plus que votre enfant participe à ce projet, nous vous assurons qu'il pourra bénéficier d'autres activités scolaires durant les périodes consacrées à ce projet et que ces activités respecteront les horaires et les programmes.

Après avoir complété ce formulaire, vous pourrez l'envoyer à l'enseignant par l'entremise de votre enfant.

Nous vous remercions à l'avance.

Steve Morissette, enseignant et étudiant-chercheur

____

Gisèle Lemoyne, responsable du projet

Annexe 3

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

______oui ______non

Noms des parents :

____

____

Nom de l'enfant :________________________________

Date :__________________

Signature des parents :

____

____

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

___✓___oui ______non

Noms des parents :

[redacted]

Nom de l'enfant : [redacted]

Date : 22 avril 05

Signature des parents :

[redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

_X_ oui ____ non

Noms des parents : [redacted]

Nom de l'enfant : [redacted]

Date : 10-04-2005

Signature des parents : [redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

✓ oui ______non

Noms des parents :

[redacted]

Nom de l'enfant [redacted]

Date : 13 avril 2005

Signature des parents :

[redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

X oui ____ non

Noms des parents :

[redacted]

Nom de l'enfant : [redacted]

Date : 8 AVRIL 2005

Signature des parents :

[redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

X oui ____ non

Noms des parents :

[redacted]

Nom de l'enfant [redacted]

Date : 18 avril 2005

Signature des parents :

[redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

✓ oui ______ non

Noms des parents :

[redacted]

Nom de l'enfant : [redacted]

Date : 07/04/05

Signature des parents :

[redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

X oui ______non

Noms des parents : [redacted]

Nom de l'enfant : [redacted]

Date : 11/4/05

Signature des parents : [redacted]

Formulaire

J'accepte que mon enfant participe au projet sur l'enseignement des mathématiques avec l'ordinateur.

_✓____oui ______non

Noms des parents : [redacted]

Nom de l'enfant : [redacted]

Date : 7/4/2005

[redacted]

Annexe 4

Abréviations utilisées dans les tableaux de synthèse

- Fr : fractions
- Ad : addition de fractions
- So : soustraction de fractions
- Mu : multiplication de fractions
- Di : division de fractions
- Rp : représentation des fractions
- Srp : sans représentation des fractions
- Pr : représentation précise des fractions
- Appx : représentation approximative des fractions
- Ar : avec réduction des fractions
- Sr : sans réduction des fractions
- Dc : dénominateurs communs
- Sdc : sans dénominateurs communs
- E : effectuée (ex : Ad-E-J: addition de fractions effectuée ; résultat juste)
- Er : avec erreur (ex : Ad-E-Er : addition de fractions effectuée ; résultat erroné)
- Erc : erreur de calcul
- J : juste (ex : Ad-E-J : addition de fractions effectuée ; résultat juste)
- Inc : incomplète (ex : Fr-Rp-Sr-Inc : représentation de fractions sans réduction des fraction ;, représentation incomplète)
- Ns : non satisfaisante (ex: Mu-Ar- Ns : multiplication de fractions avec représentation non satisfaisante)
- Nf : non fait
- Ec: enseignant-chercheur

Annexe 5