

2711, 3090, 10

Université de Montréal

Propriétés magnétiques de la supraconductivité $SO(5)$

par

Marc-André Vachon

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Juillet, 2003

©Marc-André Vachon, 2003



QC

3

U54

2003

V.023

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Propriétés magnétiques de la supraconductivité $SO(5)$

présenté par:

Marc-André Vachon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

M. Yves Lépine,	président-rapporteur
M. Richard MacKenzie,	directeur de recherche
M. Manu Paranjape,	membre du jury

Mémoire accepté le:

Résumé

Une étude approfondie du comportement d'un supraconducteur haute température en présence d'un champ magnétique est réalisée dans le cadre du modèle SO(5) introduit par S.C. Zhang en 1996. Ce modèle unifie la supraconductivité haute température avec le phénomène de l'antiferromagnétisme. Deux paramètres fondamentaux sont en jeu dans ce modèle. Le premier est le paramètre de Ginzburg-Landau κ qui, en supraconductivité conventionnelle, est relié au type de supraconducteur. Le deuxième paramètre, β , est unique au modèle SO(5). Il est relié au dopage du supraconducteur et permet de déterminer la nature du matériau (antiferromagnétique à dopage faible et supraconducteur à dopage élevé).

Ce travail démontre qu'il existe, dans les oxydes supraconducteurs décrits par le modèle SO(5), une zone près de la frontière antiferromagnétisme/supraconductivité où le comportement des supraconducteurs diffère substantiellement de ceux qui sont situés loin de cette frontière. En effet, les supraconducteurs haute température sont normalement de type II extrême. Or, nous avons découvert que ce n'est plus le cas lorsque nous nous approchons de la frontière, où le comportement du supraconducteur est plutôt de type I. Ceci mène à une instabilité du réseau de vortex. Cette conclusion peut avoir d'importantes implications sur l'étude expérimentale des oxydes supraconducteurs et ainsi mener à de nouvelles possibilités de confirmation du modèle SO(5).

Mots-clés : Supraconductivité, Antiferromagnétisme, Modèle SO(5), Vortex, Champs magnétiques critiques, Énergie de Surface.

Abstract

A detailed study of the behavior of high temperature superconductivity in the presence of a magnetic field is realized within the SO(5) model introduced by S.C. Zhang in 1996. This model unifies high temperature superconductivity with the phenomenon of antiferromagnetism. Two fundamental parameters are at play in this model. The first is the usual Ginzburg-Landau parameter κ (which in conventional superconductivity is directly related to the type of superconductor). The second parameter (written β) is unique to the SO(5) model. It is related to the doping of the sample which determines the nature of the material (antiferromagnetic at low doping, superconducting at high doping).

This work shows that, in superconducting oxides described by the SO(5) model, there is a region near the antiferromagnetic/superconductor boundary where the behavior of the superconductor differs substantially from those situated far from this boundary. Indeed, high temperature superconductors are normally highly type II. We find that this is no longer the case when one approaches the boundary : there, the behavior of the superconductor turns out to be type I. This gives rise to an instability of the vortex lattice. This conclusion may have important implications on experimental studies of high temperature superconductivity and, therefore, could provide a new test of the validity of the SO(5) model.

Keywords : Superconductivity, Antiferromagnetism, SO(5) model, Vortex, Critical Magnetic Fields, Surface Energy.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Remerciements	x
Introduction	1
Chapitre 1 : Historique	3
1.1 Avant 1986 : De Onnes à la théorie BCS	3

1.2	Après 1986 : La révolution	8
1.3	Vers le modèle $SO(5)$	10
Chapitre 2 : La théorie de Ginzburg-Landau		13
2.1	Théorie des transitions de phase	14
2.2	Théorie de Ginzburg-Landau	15
2.3	Vortex et supraconducteurs de type II	18
2.4	Champs magnétiques critiques et énergie de surface	22
2.5	Brisure de symétrie et mécanisme de Higgs	26
Chapitre 3 : Le modèle $SO(5)$		29
3.1	Introduction au modèle $SO(5)$	30
3.2	L'Hamiltonien efficace	33
3.3	États fondamentaux	36
3.4	Vortex à centre antiferromagnétique	40

3.5	Condition d'apparition du centre AF	43
3.6	Prédictions du modèle SO(5)	46
Chapitre 4 : Les champs magnétiques critiques		50
4.1	Le champ H_c	51
4.2	Le champ H_{c2}	55
4.3	Type I et type II revisités	60
4.4	Le champ H_{c1}	64
Chapitre 5 : L'énergie de surface		68
5.1	Dérivation des équations	69
5.2	L'énergie de surface SO(5)	70
5.3	Résultats analytiques	75
5.4	Résultats numériques	78
5.5	Énergie des vortex	81

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	vi
Conclusion	83
Bibliographie	xi
Annexe A : Données expérimentales	xiv
Annexe B : Modèles théoriques en matière condensée	xvii
B.1 Le modèle de Hubbard	xvii
B.1.1 Système au demi-remplissage ($U > 0$)	xviii
B.1.2 Loin du demi-remplissage	xix
B.2 Le modèle sigma non-linéaire	xix

Liste des tableaux

3-1	Les états fondamentaux du modèle SO(5)	37
3-2	Les différentes excitations à basse énergie du modèle SO(5).	48
5-1	Quelques valeurs numériques et analytiques de $\kappa_c(\beta)$	80
A-1	Éléments supraconducteurs de type I	xiv
A-2	Composés supraconducteurs de type II	xv
A-3	Oxydes supraconducteurs haute température	xvi

Liste des figures

1-1	Résistance électrique du mercure en fonction de la température.	5
1-2	Diagramme de phase T - δ du $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$	11
2-1	Représentation schématique du vortex d'Abrikosov.	20
2-2	Dépendance en température des champs critiques pour un SC de type II.	23
2-3	Dépendance en κ des champs critiques H_c , H_{c1} et H_{c2}	24
2-4	Variations spatiales des champs ϕ et h dans le modèle $\text{SO}(2)$	25
3-1	Représentation du potentiel du modèle $\text{SO}(5)$	35
3-2	Diagramme des états fondamentaux du modèle $\text{SO}(5)$	37
3-3	Diagrammes de phase T - μ et T - x du modèle $\text{SO}(5)$	39

3-4	Solution du vortex à centre AF	44
3-5	Apparition du centre AF pour des enroulements $n = 1$ à $n = 5$	45
4-1	Valeur du champ critique $H_c(\beta)$ en fonction de β	54
4-2	Valeur du champ critique $H_{c2}(\beta)$ en fonction de β	58
4-3	Induction magnétique dans les SC de type I et II	60
4-4	Valeur critique $\kappa_c(\beta)$ en fonction de β	62
4-5	Valeur du champ critique $H_{c1}(\beta)$ en fonction de β	65
5-1	Variation spatiale des champs ϕ , h et η dans le modèle SO(5)	71
5-2	$\kappa_c(\beta)$ pour $\alpha = \delta = 1$	79
5-3	Énergie de surface du modèle SO(5) en fonction de β	79
5-4	Énergie des vortex en fonction du nombre d'enroulement	82

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de recherche, M. Richard MacKenzie. Sans son appui inconditionnel, son aide, son sens de la précision et sa disponibilité, ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour.

Je veux également remercier Michaël Juneau pour son aide précieuse à l'élaboration des programmes informatiques et au développement du projet. De plus, sans sa présence, mon bureau aurait été bien austère.

Finalement, je veux remercier ma famille et mes amis pour leur soutien moral, ainsi que le fonds FCAR et CRSNG (en n'oubliant point mon directeur de recherche) pour leur précieux soutien financier. Sans ces éléments essentiels, il ne m'aurait pas été permis de vivre, à temps plein, ma passion pour la physique.

Introduction

La découverte de la supraconductivité à haute température, en 1986, a plongé la communauté scientifique dans une course euphorique afin d'expliquer ce nouveau phénomène. Tant les expérimentateurs que les théoriciens ont tenté, à leur manière, de lever le voile sur ce mystère. Les premiers ont réussi à repousser les limites de la supraconductivité jusqu'à un fabuleux 138 K^1 . Les seconds ont usé d'ingéniosité afin de créer et de comprendre certains modèles susceptibles d'expliquer la supraconductivité à haute température. Malheureusement, aucune explication satisfaisante n'est venue, à ce jour, clouer le cercueil de cette lacune - si j'ose m'exprimer ainsi - dans notre compréhension de la nature. Depuis 1986, l'aventure est lancée et dure toujours, limitée par la seule imagination de ceux qui la poursuivent.

Ce fut une grande joie et un honneur d'avoir participé, à ma manière, à cette grande aventure. Je ne dis pas ici que ma contribution fut un succès et que mes recherches auront des répercussions importantes sur l'avenir de la supraconductivité. Je dis simplement que mon niveau de participation fut comme une randonnée initiatique à travers le merveilleux monde de la recherche et le vaste pays de la physique des supraconducteurs. Le fil d'arrivée de cet itinéraire est justement le mémoire que je présente ici, celui-ci se voulant un résumé global et cohérent de ce premier voyage, constitué de mes travaux de recherche sur le modèle $SO(5)$. De cette façon, je puis léguer à mes successeurs une base cohérente à la poursuite des recherches sur le modèle $SO(5)$, ou du moins, une rampe de lancement pour d'éventuelles applications, autres que la supraconductivité, que pourrait permettre mes recherches.

¹Voir à ce sujet, l'excellent site web <http://superconductors.org>.

Le mémoire est construit de la façon suivante. Au chapitre 1, une introduction historique de la supraconductivité est présentée en guise de préliminaire. Le chapitre 2 jette les bases théoriques nécessaires à la compréhension du modèle $SO(5)$ que nous discuterons, de façon assez complète, au chapitre 3. Les deux derniers chapitres présentent le coeur de mes recherches et de mes résultats, basés sur l'étude des champs magnétiques critiques et de l'énergie de surface dans le cadre du modèle $SO(5)$. Enfin, une conclusion propose un résumé de ce qui a été réalisé ainsi qu'une discussion sur les perspectives expérimentales et les applications connexes du modèle $SO(5)$.

Chapitre 1

Historique

La présentation de l'histoire de la supraconductivité est sans aucun doute un parcours judicieux afin d'introduire les concepts physiques et mathématiques propres à la supraconductivité. En effet, la rencontre de ceux et celles qui ont forgé notre conception du sujet nous permettra d'aborder et de comprendre, de façon qualitative, les grandes lignes du phénomène. Ainsi, nous discuterons de presque un siècle de recherche, de la découverte de la supraconductivité jusqu'au supraconducteur haute température, tout en ayant un œil sur ses causes microscopiques et ses manifestations macroscopiques. De plus, une vision globale de la supraconductivité nous permettra d'introduire le modèle $SO(5)$, sujet central de notre étude, dans son contexte historique. Pour une lecture plus approfondie, de nombreux livres proposent une historique plus détaillée [1, 2, 3, 4]. Ce corpus de livres constitue d'ailleurs la base de ce chapitre que je vous présente sans plus tarder.

1.1 Avant 1986 : De Onnes à la théorie BCS

Ce fut en 1911, en Hollande, que l'histoire de la supraconductivité débuta. Dans son laboratoire de l'Université de Leiden, Kamerlingh Onnes travaillait depuis déjà quelque temps sur l'étude des propriétés des métaux à très basse température.

En effet, il fut le premier à réussir à liquifier de l'hélium : c'était le 10 Juillet 1908. Dès lors, il ne fut pas rare d'entendre ici et là que l'endroit le plus froid sur Terre était à Leiden. C'est en étudiant la variation, en fonction de la température, de la résistivité électrique à très basse température qu'il se tourna vers l'essai de métaux de plus en plus purs, en spéculant qu'une substance parfaitement purifiée atteindrait une résistivité nulle à une température supérieure à 0 K. Il opta donc pour le mercure, facilement purifiable à cette époque. C'est ainsi, qu'autour de 4.2 K, il découvrit que la résistance diminuait brusquement (passant de 0.1 à $10^{-5} \Omega$) : la supraconductivité était découverte [5] (voir FIG. 1-1). Pour se convaincre de cette propriété presque miraculeuse, Onnes construisit un anneau supraconducteur et y injecta un courant qui, 24 heures après, avait exactement la même intensité. Après avoir découvert quelques autres métaux supraconducteurs¹, il se tourna vers des expériences portant sur le champ magnétique [6]. Malheureusement, il s'aperçut qu'un champ magnétique d'une centaine de Gauss² détruisait la supraconductivité. Le champ magnétique maximal que peut supporter un supraconducteur est noté H_c et dépend de la température, de façon empirique, comme

$$H_c(T) = H_c(0)[1 - (T/T_c)^2], \quad \text{pour } T < T_c.$$

où $H_c(0)$ est la valeur du champ critique à température nulle et T_c , la température critique du supraconducteur.

Les progrès en restèrent là jusqu'en 1933 lorsque Meissner et Ochsenfeld [7] découvrirent une propriété des supraconducteurs des plus intéressantes. Ceux-ci agissent comme un diamagnétique parfait, c'est-à-dire qu'ils excluent entièrement de leurs intérieurs un champ magnétique environnant H . Les conducteurs parfaits possèdent aussi cette propriété. Par contre, le phénomène se produit également lorsque l'on refroidit le matériau dans un champ magnétique (inférieur à H_c) jusqu'à ce qu'il devienne supraconducteur : le champ magnétique est alors expulsé de l'intérieur. Ceci

¹Une liste des éléments supraconducteurs et de leurs propriétés est présentée en annexe A.

²Équivalent à un aimant de réfrigérateur.

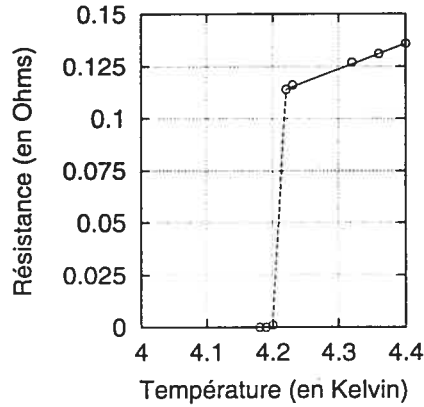


FIG. 1-1 – Résistance électrique du mercure en fonction de la température.

permet de distinguer un supraconducteur d'un conducteur parfait puisque ce dernier aura tendance à emprisonner le champ magnétique en son intérieur à mesure que la température diminue. *L'effet Meissner* confirme donc que l'état supraconducteur est un état d'équilibre réversible, et par conséquent, un état d'équilibre thermodynamique. Cet effet implique également que l'état supraconducteur sera détruit par le champ thermodynamique critique H_c .

La première explication théorique du comportement d'un supraconducteur dans un champ magnétique tenant compte de l'effet Meissner fut apportée par les frères London en 1935 [8] en introduisant le modèle des deux fluides. Ce modèle considère deux types d'électrons : les électrons supraconducteurs, dont la densité est notée $n_s(T)$, et les autres électrons, dit normaux, de densités $n_n(T)$. Ces densités sont reliées à la densité électronique totale, n_e , par $n_n(T) = n_e - 2n_s(T)$. Le résultat le plus intéressant de cette théorie est l'existence d'une profondeur de pénétration $\lambda_L(T)$ du champ magnétique. Celui-ci, en effet, pénètre et s'atténue d'un facteur e dans le matériau à la distance caractéristique $\lambda_L(T)$ dont la dépendance en température est donnée empiriquement par

$$\lambda_L(T) \approx \lambda_L(0)[1 - (T/T_c)^4], \quad \text{pour } T < T_c.$$

L'année 1950 voit apparaître la théorie phénoménologique³ de la supraconductivité (la théorie GL) introduite par Ginzburg et Landau [9] suite à la théorie des transitions de phase développée par ce dernier dans les années trente. En effet, due à la réversibilité de l'effet Meissner, plusieurs ont suggéré de considérer la supraconductivité comme une transition de phase⁴. Selon la théorie GL, il existe un paramètre d'ordre permettant de différencier la phase supraconductrice de la phase normale. La norme au carré du paramètre d'ordre est reliée à la densité d'électrons supraconducteurs $n_s(T)$. Près de la température critique T_c , il est possible d'écrire l'énergie libre de Helmholtz en une série de puissance du paramètre d'ordre, la dynamique de ce dernier étant couplée au champ magnétique. Plusieurs conséquences intéressantes découlent de cette théorie. D'une part, elle introduit un paramètre κ (le paramètre GL) caractérisant les supraconducteurs et permet de classer ceux-ci en deux types : les types I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) et les types II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$). D'autre part, elle permet de déduire différents champs magnétiques critiques (H_c, H_{c1}, H_{c2}) ainsi que d'autres quantités importantes dont l'énergie de surface. Ces quantités seront toutes définies au chapitre 2. Cependant, la conséquence la plus intéressante est sans aucun doute la découverte d'une solution particulière aux équations du mouvement découlant de la théorie. Ce type de solution est appelé soliton ou vortex dans le cas de la supraconductivité. Sortes de tubes magnétiques pénétrant exclusivement les supraconducteurs de type II, ils ont été postulés pour la première fois par Abrikosov en 1957 [10] et confirmés expérimentalement en 1964 par Cribier [11]. Malheureusement, la théorie GL ne fut pas acceptée, à sa sortie, par la communauté scientifique et il fallut attendre la théorie BCS et les travaux de Gorkov avant qu'elle soit reconnue à sa juste valeur. Le chapitre 2 sera consacré à la théorie GL.

Toujours en 1950, Maxwell et Reynolds découvrent l'effet isotopique [12, 13]. La température critique T_c de différents isotopes d'un même élément supraconducteur

³Théorie qui se restreint à expliquer le phénomène et non sa cause première.

⁴Idée introduite pour la première fois en 1911 par P. Langevin et reprise par W. H. Keesom en 1924 [1].

varie comme $1/\sqrt{M}$ où M est la masse atomique de l'isotope. Cet effet confirme le rôle important des ions du réseau dans le phénomène de la supraconductivité. Dans ces mêmes années toujours, l'existence d'un *gap* d'énergie $\Delta(T)$, de l'ordre de $k_B T_c$ à $T = 0$ et devenant nul à $T = T_c$, est confirmé entre l'état fondamental et l'excitation des quasi-particules formant la phase normale [14]. Ceci est en accord avec la création d'états liés entre les électrons supraconducteurs. Tout est alors prêt pour l'élaboration de la théorie microscopique de la supraconductivité qui voit le jour en 1957 sous le nom de la théorie BCS (des auteurs Bardeen, Cooper et Schrieffer) [15]. Le phénomène est expliqué microscopiquement par l'entremise d'une interaction électron-phonon. Dans le cas de deux électrons d'impulsions et de spins opposés, l'interaction est attractive et plus forte que la répulsion coulombienne. Ces électrons liés forment ce qu'on appelle une paire de Cooper⁵ qui voyagent, quant à eux, sans interagir avec leur environnement et sans perdre d'énergie. L'étendue spatiale d'une paire de Cooper est donnée par la longueur de cohérence $\xi_0(T)$. Cette quantité est beaucoup plus grande que la distance interatomique du réseau (de l'ordre des centaines). La théorie prédit également que, pour briser une paire de Cooper, il faut fournir une énergie $E > 2\Delta(0)$ d'où la nécessité d'atteindre une température critique de l'ordre de $\Delta(0)/k_B$ pour briser la phase supraconductrice.

En 1959, Gorkov [17] démontre que la théorie BCS se ramène à la théorie GL lorsque le paramètre d'ordre, relié à la fonction d'onde d'une paire de Cooper, est proportionnel au *gap* Δ et lorsque la température du système se situe au voisinage de T_c . La théorie GL est alors pleinement acceptée avec tout ce qu'elle implique. Dès lors, les scientifiques pensèrent que la supraconductivité était pleinement comprise et que les températures critiques ne pourraient augmenter au-delà d'environ 30 K, limite théorique fixée par la faible interaction électron-phonon de la théorie BCS⁶. Un composé niobium-germanium, le Nb_3Ge , détenait le record, en 1973, avec une

⁵Confirmée expérimentalement via la mesure du quantum de flux [16].

⁶Vers 30 K, les vibrations du réseau atomique sont assez fortes pour que son rôle attractif soit annulé.

T_c de 23 K.

1.2 Après 1986 : La révolution

Pourtant, en avril 1986, une nouvelle vint complètement bouleverser le monde scientifique. Müller et Bednorz [18] découvrirent une substance, le $\text{La}_{1.85}\text{Ba}_{0.15}\text{CuO}_4$, qui devenait supraconducteur à 30 K. Cette découverte donna naissance aux supraconducteurs hautes températures. Contrairement aux précédents supraconducteurs qui appartiennent tous à la classe des métaux, ce nouveau matériau, de la famille des céramiques (ou des oxydes), devenait isolant à la température de la pièce. En février 1987, un autre matériau, toujours de la même famille, est découvert, le $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, supraconducteur à 90 K [19]. Cette découverte fit sensation puisque, pour la première fois, un refroidissement à l'azote liquide était suffisant pour faire apparaître la phase supraconductrice, contrairement à un refroidissement à l'hélium liquide très coûteux pour les précédents. Ces deux découvertes ouvrirent ainsi la porte à toute une nouvelle classe de matériau potentiellement supraconducteur et relancèrent l'espoir de la découverte d'un supraconducteur fonctionnant à la température de la pièce.

Il est tout naturel de se demander quelles sont les caractéristiques et propriétés fondamentales de ces nouveaux supraconducteurs haute température. D'un côté, plusieurs expériences ont montré des similitudes avec les supraconducteurs conventionnels : la théorie BCS semblait donc encore applicable. En effet, des mesures du quantum de flux sur des vortex [20] donnèrent une valeur de $hc/2e$, confirmant toujours la création de paires de Cooper. Certaines expériences trouvèrent un gap d'énergie de l'ordre de $3k_B T_c$ pour $T \ll T_c$ comme le prévoyait la théorie BCS. De plus, la dépendance en température de la profondeur de pénétration λ_L concordait toujours avec la prédiction de la théorie BCS [21, 22]. De l'autre côté, plusieurs

constatations dépassaient le cadre de la théorie BCS. Par exemple, d'autres expériences montrèrent que la valeur du *gap* d'énergie se situait plutôt entre 4 et $8k_B T_c$, au-delà de celle prédite par la théorie BCS. Malheureusement, il semble ne pas y avoir de consensus présentement sur les mesures du *gap* d'énergie dans les supraconducteurs haute température. Également, comme nous l'avons vu, l'efficacité de l'interaction électron-phonon s'estompe pour des températures au-delà de 30 K ; une autre interaction semble donc nécessaire à la compréhension de la supraconductivité haute température. Enfin, le paramètre d'ordre de la supraconductivité ne semble plus être aussi simple que celui utilisé dans le cas classique. Des expériences sur la chaleur spécifique [23] ont suggéré que le paramètre d'ordre pourrait comporter de plusieurs composantes complexes, ce qui remettrait en doute la théorie de Ginzburg-Landau. Toutefois, cette observation reste à être confirmée.

Malgré tout, nous pouvons dégager quatre caractéristiques fondamentales qui, sans aucun doute, les distinguent des supraconducteurs conventionnels. La première caractéristique est, bien sûr, leur température critique *anormalement* élevée. La deuxième caractéristique est leur longueur de cohérence, $\xi_{GL}(T)$, très courte. Cette quantité mesure l'étendue spatiale des fluctuations du paramètre d'ordre. À $T \ll T_c$, elle se situe entre 5 et 30 Å, tandis qu'elle est de l'ordre de 1000 à 10000 Å dans les supraconducteurs classiques. Dû à la petitesse de la longueur de cohérence par rapport à λ_L , les supraconducteurs haute température sont tous fortement de type II puisque le paramètre GL $\kappa = \lambda_L/\xi_{GL}$ devient assez grand. Par conséquent, ces supraconducteurs donnent tous lieu à des réseaux de vortex stables. La troisième caractéristique est la valeur très élevée du champ magnétique critique H_{c2} ⁷ qui brise la phase supraconductrice. Ces nouveaux supraconducteurs peuvent donc transporter d'intenses courants électriques sans problème, ce qui les mènent à d'importantes applications technologiques. La dernière caractéristique est leur structure fortement anisotrope. En effet, les supraconducteurs haute température appartiennent tous

⁷Nous définirons cette quantité au chapitre suivant.

à la classe des perovskites, caractérisée par la présence de plans et de chaînes de CuO, les autres types d'atomes étant intercallés entre les plans. Ainsi, la plupart des quantités mesurées montrent des valeurs différentes dépendant de la direction de la mesure, soit parallèlement ou perpendiculairement au plan : les valeurs caractéristiques des supraconducteurs se retrouvant dans le premier cas. Il y a donc de bonnes raisons de penser que la supraconductivité se manifesterait dans ces plans, ce qui impliquerait un confinement du phénomène à l'espace 2-D.

À la lumière de la discussion précédente, plusieurs questions restent sans réponse⁸. D'une part, l'interaction entre électrons qui donne lieu aux paires de Cooper reste toujours mystérieuse. Les phonons ont-ils encore un rôle à jouer ? Sinon, il faudrait chercher une interaction plus *exotique*, comme une interaction due aux spins des électrons par exemple. D'autre part, nous n'avons aucune certitude quant à la nature du paramètre d'ordre. S'il s'avérait différent, quelles en seraient ses composantes et quel en serait le couplage entre ses diverses composantes ? Toutefois, la réponse à toutes ces questions pourrait venir d'une meilleure compréhension de la transition métal-isolant ainsi que des différents comportements magnétiques et électriques que montrent la phase normale des supraconducteurs : antiferromagnétisme, isolant, semi-conducteur, *etc.* Ces études ouvriraient certainement la porte à une éventuelle compréhension du phénomène de la supraconductivité haute température et mettre fin à un rêve vieux de 17 ans.

1.3 Vers le modèle SO(5)

L'étude intensive par les physiciens et les chimistes des supraconducteurs haute température depuis 1986 a permis de faire un lien entre la supraconductivité et le

⁸Voir [4] pour une liste plus exhaustive.

phénomène de l'antiferromagnétisme. Ce dernier est caractérisé par un état de la matière où les spins des électrons sont alignés de façon anti-parallèle⁹, en opposition au ferromagnétisme où les spins sont tous orientés dans la même direction. La transition de phase s'effectue à la température de Néel T_N . Les premières études sur l'antiferromagnétisme furent réalisées par Louis Néel en 1932 [24] qui y jeta les premières bases théoriques. Dans ces travaux, il considère un plan ferromagnétique (a) intercallé à un autre (b) de spin opposé. Les plans (a) et (b) sont décrits par les paramètres d'ordre η_a et η_b respectivement¹⁰. Ces deux plans forment alors une structure AF de paramètre d'ordre $\eta = (\eta_a - \eta_b)/2$.

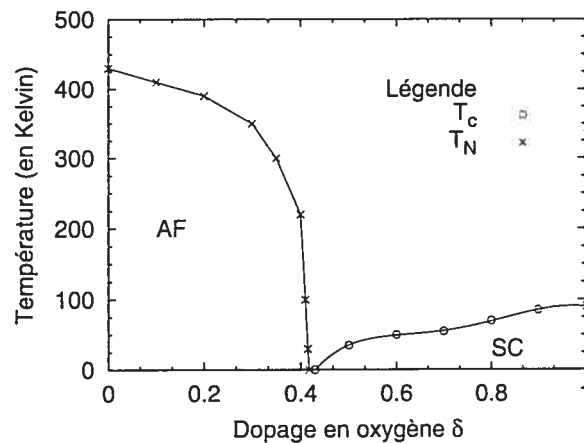


FIG. 1-2 – Diagramme de phase T - δ du $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$. T_N représente la température de transition de la phase AF et T_c , la température de transition de la phase SC. Figure provenant de [4].

La plupart des diagrammes de phase T - δ des différents oxydes supraconducteurs montrent une région où l'antiferromagnétisme se manifeste (voir FIG. 1-2). Ces régions sont accessibles en variant la concentration d'oxygène du matériau, ce qu'on appelle le processus de dopage. La phase supraconductrice est sensible à cette

⁹ Alternance de spin *up* et de spin *down*.

¹⁰ La valeur moyenne de la magnétisation induite par l'alignement des spins dans l'espace constitue le paramètre d'ordre ferromagnétique. Il s'agit donc d'une quantité vectorielle à trois composantes.

Chapitre 2

La théorie de Ginzburg-Landau

Grâce à la découverte dans les années 30 de l'effet Meissner [7], il devenait évident que la supraconductivité (SC) pouvait être traitée comme une transition de phase. Se basant sur ce fait, Ginzburg et Landau publièrent en 1950, comme nous l'avons vu, une théorie phénoménologique de la SC [9], connu sous le nom de la théorie de Ginzburg-Landau (théorie GL). C'est cette théorie qui prévaut présentement pour l'étude de la SC conventionnelle au niveau de ses manifestations macroscopiques. Sa beauté réside dans le fait qu'elle s'étudie sans trop de difficulté et que sa structure mathématique et sa physique ressemblent à plusieurs modèles rencontrés en théorie des champs (théorie ϕ^4 , modèle $SO(2)$, modèle de Higgs et brisure de symétrie).

Les principaux résultats que nous discuterons dans ce chapitre, et qui seront nécessaires à la compréhension de la présente étude, inclueront le calcul des champs magnétiques critiques ainsi que le calcul de l'énergie de surface. Comme ces quantités seront dérivées de façon rigoureuse dans les chapitres suivants, nous ne ferons que les présenter ici pour fins de références. Nous réaliserons ce travail après avoir introduit la structure mathématique et physique de la théorie GL. Nous finirons ce chapitre en présentant le lien entre la théorie GL et le concept de brisure de symétrie, via le mécanisme de Higgs en théorie des champs. Le contenu de ce chapitre se base essentiellement sur les excellents livres de Saint-James [27] et de Tinkham [28].

2.1 Théorie des transitions de phase

On s'intéressera, dans cette section, à la théorie de Landau sur les transitions de phase de deuxième ordre. Celles-ci sont caractérisées par des discontinuités dans certaines quantités thermodynamiques comme la chaleur spécifique (C_v) ou la susceptibilité magnétique (χ). La théorie de Landau se fonde sur les deux points suivants. Premièrement, lorsqu'une transition de phase survient dans un système, une de ses symétries est brisée. On introduit alors un paramètre d'ordre ϕ afin de caractériser l'état non-symétrique. On peut prendre n'importe quelle quantité, en autant que sa valeur soit zéro dans l'état symétrique et non-nulle dans l'état non-symétrique, et que cette variation se produise de façon continue. Deuxièmement, près de la transition de phase (c'est-à-dire près de la température critique T_c), on suppose que l'énergie libre de Helmholtz¹ est assez *gentille* pour qu'on puisse la développer en série de puissances paires du paramètre d'ordre (pris, de façon générale, comme une quantité complexe),

$$F(T) = F_0(T) + a(T)|\phi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\phi|^4. \quad (2.1)$$

Évidemment, ce développement n'est valide que pour un certain intervalle de température autour de T_c , la dépendance étant complètement contenue dans les coefficients de développement $a(T)$ et $b(T)$. Le paramètre a dépend de la température de façon linéaire, $a(T) = \alpha(T - T_c)$ où α est une constante positive. et change de signe à la transition. Le coefficient $b(T)$, quant à lui, est supposé constant près de la transition de phase, $b(T) \approx b(T_0) \equiv b$.

À l'équilibre thermodynamique, l'énergie libre atteint un minimum global. En

¹L'énergie libre sera utilisé ici, sauf mention contraire, pour se référer à l'énergie libre de Helmholtz.

dérivant (2.1), on trouve que le paramètre d'ordre doit prendre les valeurs

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \quad \text{pour } T > T_c, \\ |\phi|^2 &= \frac{\alpha(T_c - T)}{b} \quad \text{pour } T < T_c. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Par conséquent, dans la phase symétrique (pour $T > T_c$) l'énergie libre devient $F(T) = F_0(T)$, tandis que dans la phase non-symétrique (pour $T < T_c$), le paramètre d'ordre acquiert une valeur non-nulle et l'énergie libre devient

$$F(T) = F_0(T) - \frac{\alpha^2}{2b}(T_c - T)^2.$$

de sorte que l'on a bien $F(T) < F_0(T)$ pour $T < T_c$. Notons également que la continuité du paramètre d'ordre à $T = T_c$ est respectée en regard aux équations (2.2).

2.2 Théorie de Ginzburg-Landau

Comme la supraconductivité est une transition de phase, et de fait une transition de phase de deuxième ordre, la théorie de Landau s'applique tout à fait ici, nonobstant quelques modifications. Tout d'abord, le modèle doit tenir compte de la dynamique du supraconducteur, et non pas seulement de ses propriétés à l'équilibre. En effet, le paramètre d'ordre peut varier selon les régions du matériau et un terme *cinétique*, proportionnel au carré du gradient, doit être inséré dans l'expression de l'énergie libre. Ensuite, le paramètre d'ordre est influencé par le champ magnétique environnant qui peut détruire la phase supraconductrice si celui-ci devient trop intense. Le paramètre d'ordre doit donc être couplé au champ magnétique, via le champ de jauge $\hat{\mathbf{A}}$. En tenant compte de ces considérations, l'énergie libre s'écrit²

$$\hat{F}_s = \int_{\Omega} \hat{f}_s dV,$$

²Les chapeaux dénoteront des quantités dimensionnées. Nous passerons par la suite à des quantités sans dimension qui seront notées sans chapeaux.

où Ω est le volume d'intégration et \hat{f}_s , la densité d'énergie libre donnée par

$$\hat{f}_s = \hat{f}_n - \frac{a^2}{2} |\hat{\phi}(\mathbf{r})|^2 + \frac{b}{4} |\hat{\phi}(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^* \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})}{c} \right) \hat{\phi}(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{r})^2}{8\pi}. \quad (2.3)$$

Ici, \hat{f}_n représente la densité d'énergie libre de la phase normale et les dépendances en température ont été enlevées. Le dernier terme correspond à la contribution du champ magnétique, $\hat{\mathbf{h}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}$, à la densité d'énergie libre. Les constantes e^* et m^* réfèrent respectivement à la charge et à la masse effective d'une paire de Cooper³. Le coefficient a^2 change de signe à la transition et est habituellement proportionnel à la température, $a^2(T) = \alpha(T_c - T)$, où α est une constante positive. Le coefficient $b(T)$ variant très peu près de T_c est habituellement supposé constant, $b(T) \equiv b$. Le minimum de $\hat{f}_s(T)$ est atteint, dans le cas de l'équilibre thermodynamique ($\nabla\hat{\phi} = 0$ et $\hat{\mathbf{h}} = 0$), lorsque le paramètre d'ordre atteint les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= 0 \quad \text{pour } T > T_c, \\ |\hat{\phi}|^2 &= a^2/b \equiv v^2 \quad \text{pour } T < T_c. \end{aligned}$$

Puisque Gorkov montra que $v \propto \Delta$, la dépendance en température du coefficient $a^2(T)$ permet de trouver la dépendance en température du *gap* d'énergie près de T_c :

$$\Delta(T) \propto \Delta(0) \sqrt{T_c - T}.$$

Les équations de Ginzburg-Landau (GL), décrivant la dynamique d'un supraconducteur dans un champ magnétique, s'obtiennent en minimisant l'énergie libre $\hat{F}_s(T)$ par rapport au paramètre d'ordre $\hat{\phi}$ (ou $\hat{\phi}^*$) et au champ de jauge $\hat{\mathbf{A}}$ (les

³Originellement, Ginzburg et Landau posèrent $e^* = e$ et $m^* = m$ n'ayant pas trouvé de raison pour qu'il en soit autrement. Toutefois, Gorkov, en partant de la théorie BCS, redérida la théorie GL et trouva $e^* = 2e$, correspondant à la charge d'une paire de Cooper. La masse effective reste, quant à elle, indéterminée, mais il ne serait pas faux de poser $m^* \approx 2m_e$. Nous allons cependant garder la notation e^* et m^* pour le reste de cette étude.

dépendances explicites en \mathbf{r} ont été omises pour fins de clarté). Le résultat de ce calcul variationnel donne les équations

$$\frac{1}{m^*} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*\hat{\mathbf{A}}}{c} \right)^2 \hat{\phi} - a^2\hat{\phi} + b\hat{\phi}|\hat{\phi}|^2 = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\nabla \times \hat{\mathbf{h}}}{4\pi} = \frac{e^*\hbar}{2im^*c} (\hat{\phi}^*\nabla\hat{\phi} - \hat{\phi}\nabla\hat{\phi}^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c^2} \hat{\mathbf{A}}\hat{\phi}^*\hat{\phi}. \quad (2.5)$$

Afin d'alléger l'écriture des équations du mouvement, il est commode d'utiliser des quantités sans dimension (sans chapeau). En redéfinissant la variable spatiale \mathbf{r} , le paramètre d'ordre et le champ de jauge de la manière suivante,

$$\mathbf{r} = \lambda_L \mathbf{s}, \quad \hat{\phi} = v\phi, \quad \hat{\mathbf{A}} = \frac{c\hbar}{e^*\xi_{GL}} \mathbf{A}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \frac{c\hbar}{e^*\xi_{GL}\lambda_L} \mathbf{h}, \quad (2.6)$$

les équations (2.4) et (2.5) prennent la forme simplifiée

$$\frac{1}{\kappa^2} (-i\nabla - \kappa\mathbf{A})^2 \phi - \phi + \phi^3 = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} + \mathbf{A} = \frac{\kappa}{2i} (\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*). \quad (2.8)$$

Ce changement de variable permet d'écrire les équations GL en terme d'un seul paramètre, le paramètre GL défini par

$$\kappa \equiv \lambda_L/\xi_{GL},$$

où λ_L et ξ_{GL} représentent respectivement la profondeur de pénétration et la longueur de cohérence. Ces quantités sont données en terme de a^2 et b par les relations

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m^*c^2b}{4\pi(e^*)^2a^2}} \quad \text{et} \quad \xi_{GL}(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m^*a^2}}. \quad (2.9)$$

La profondeur de pénétration $\lambda_L(T)$ caractérise la distance à laquelle le champ magnétique diminue d'un facteur e dans le supraconducteur. En une dimension, on peut figurer ce comportement par $H(x) = H(0)e^{-x/\lambda_L}$, où $H(0)$ est le champ

magnétique à l'extérieur du SC. La longueur de cohérence ξ_{GL} ⁴ mesure, quant à elle, l'étendue spatiale des variations du paramètre d'ordre. À mesure que l'on s'approche de T_c , le paramètre d'ordre tend à devenir nul. Or, ce processus n'est pas homogène : tout d'abord, de petites régions dans la phase normale, non-connexe et de dimension spatiale ξ_{GL} , se forment et grossissent à mesure que la température approche T_c . Dépassée celle-ci, ces régions englobent tout le matériau qui transite vers une phase normale et homogène. On s'attend donc à une divergence de $\xi_{GL}(T)$ à T_c . De même, lorsque le matériau est dans la phase normale, le champ magnétique est libre d'entrer sans contrainte, et on s'attend également à une divergence de $\lambda_L(T)$ à T_c . En effet, comme ces deux quantités dépendent de la température comme $1/\sqrt{T_c - T}$ (via le paramètre a), elles divergent comme prévu à T_c . Le paramètre GL, de son côté, est approximativement indépendant de T près de T_c comme on peut le remarquer en exprimant κ en terme de (2.9),

$$\kappa = \frac{m^*c}{e^*\hbar} \sqrt{\frac{b}{2\pi}}.$$

2.3 Vortex et supraconducteurs de type II

Une solution particulière aux équations (2.7) et (2.8) a été trouvée par Abrikosov en 1957 [10]. Cette solution, appelée vortex, correspond à des tubes de flux magnétique pénétrant le supraconducteur, le centre du vortex possédant une phase normale. Afin de trouver ces solutions, on introduit les *ansätze* suivants, indépendants de z , en coordonnées cylindriques (s, θ) :

$$\phi(\mathbf{s}) = \varphi(s)e^{in\theta}, \quad A_i(\mathbf{s}) = \epsilon_{ij} \frac{s_j}{s} A(s) = (0, A(s)). \quad (2.10)$$

⁴Cette quantité se ramène à l'étendue spatiale d'une paire de Cooper ξ_0 lorsque $T \ll T_c$.

Les conditions frontières sur les variables dynamiques, imposées par le fait que l'énergie doit être finie, sont

$$\begin{aligned} |\phi| &\rightarrow 1 \quad \text{et} \quad A(s) \rightarrow n/es \quad \text{à} \quad x \rightarrow \infty, \\ \phi &\rightarrow 0 \quad \text{et} \quad A(s) \rightarrow 0 \quad \text{à} \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On note que la phase du paramètre d'ordre n'est pas fixée par les conditions frontières. Cependant, pour des raisons topologiques que nous verrons au prochain chapitre, la phase du paramètre doit s'enrouler n fois autour d'un cercle à l'infini dans l'espace des coordonnées⁵. Le nombre n est un entier positif et s'appelle le nombre d'enroulement (ou simplement l'enroulement) et est relié mathématiquement à la phase $\alpha(\theta)$ du paramètre d'ordre par

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta. \quad (2.11)$$

Évidemment, la solution $\alpha(\theta) = n\theta$ vérifie trivialement (2.11) d'où la forme (2.10) de l'*ansatz* pour ϕ . Une conséquence de cette condition est la quantification du flux magnétique total de chaque vortex :

$$\Phi = nhc/e^* = n\Phi_0$$

où n est le nombre d'enroulement et Φ_0 , le quanta de flux magnétique. L'augmentation du nombre d'enroulement du vortex a pour effet d'élargir le centre du vortex puisqu'un plus grand flux magnétique y pénètre.

L'énergie libre (2.3), après avoir appliqué les transformations (2.6) et (2.10), devient

$$F_v = \frac{1}{2} \int d^2s \left\{ \left(A' + \frac{A}{s} \right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left[\varphi'^2 + \left(\frac{n}{s} + \kappa A \right)^2 \varphi^2 \right] - \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{2} + \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.12)$$

où un prime dénote maintenant une dérivée par rapport à s et l'aire d'intégration, le plan infini formé par les coordonnées s et θ . Une constante a été ajoutée afin d'avoir

⁵Voir à ce sujet [29].

$f_v = 0$ à $s \rightarrow \infty$. Les équations du mouvement qui en découlent sont

$$\frac{1}{\kappa^2} \left[\varphi'' + \frac{1}{s} \varphi' - \left(\frac{n}{s} + \kappa A \right)^2 \varphi \right] + \varphi(1 - \varphi^2) = 0,$$

$$A'' + \frac{1}{s} A' - \frac{1}{s^2} A - \left(\frac{n}{ks} + A \right) \varphi^2 = 0.$$

Aucune solution générale et analytique n'est connue à ce jour et une approche numérique est nécessaire à l'obtention explicite de solutions. Nous avons utilisé la méthode numérique de la relaxation afin de trouver ces solutions (le code a été construit à partir de [30]). Comme le but de ce mémoire n'est pas de présenter avec détails la méthodologie numérique utilisée, le lecteur pourra se référer à l'excellent mémoire de M. Juneau [31] où ce sujet est traité de manière complète. Une solution typique d'un vortex est présentée à la FIG. 2-1 où le paramètre d'ordre (en haut) et le champ magnétique (en bas) sont montrés en fonction de la distance radiale.

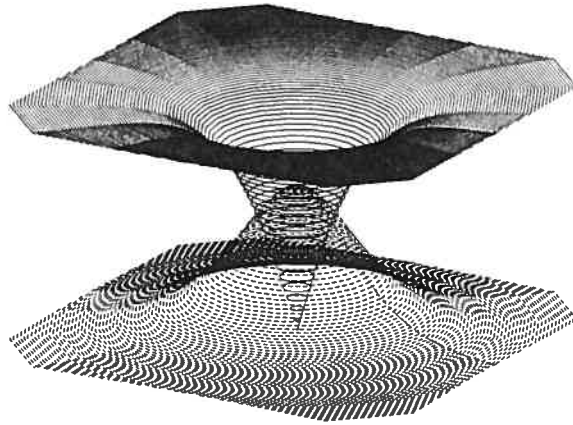


FIG. 2-1 – Représentation schématique du vortex d'Abrikosov. Le plateau du haut montre le paramètre d'ordre tandis que le plateau du bas correspond au champ magnétique.

L'étude énergétique des vortex permet d'obtenir des informations supplémentaires sur le comportement de ceux-ci. Pour ce faire, on remanipule l'énergie libre

(2.12) afin de la présenter sous la forme (selon l'intuition de Bogomol'nyi [32])

$$2\kappa^2 F_v = \int_0^\infty s \, ds \left\{ \left[\varphi' - \left(\frac{n}{s} + \kappa A \right) \varphi \right]^2 + \left[\kappa \left(A' + \frac{A}{s} \right) + \frac{1}{2} (1 - \varphi^2) \right]^2 \right. \quad (2.13)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} \right) (1 - \varphi^2)^2 + \frac{d\chi}{ds} + \frac{1}{\chi} \right\},$$

où $\chi = \kappa A(\varphi^2 - 1) + n\varphi^2/s$. L'intégration des deux derniers termes de (2.13) nous donne le nombre d'enroulement n et permet d'écrire

$$F_v(n) = \frac{n}{2\kappa^2} + \frac{1}{2\kappa^2} \int_0^\infty s \, ds \left\{ \left[\varphi' - \left(\frac{n}{s} + \kappa A \right) \varphi \right]^2 + \left[\kappa \left(A' + \frac{A}{s} \right) + \frac{1}{2} (1 - \varphi^2) \right]^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} \right) (1 - \varphi^2)^2 \right\}.$$

Les termes entre crochets sont définis semi-positifs tandis que le troisième change de signe selon que κ est plus petit ou plus grand que $1/\sqrt{2}$, devenant nul dans le cas particulier où $\kappa = 1/\sqrt{2} \equiv \kappa_c$. Dans cette situation, on peut facilement prouver que les termes entre crochets deviennent nuls : l'énergie libre est alors égale au nombre d'enroulement n . Ainsi, l'énergie d'un vortex d'enroulement n est égale à l'énergie de n vortex d'enroulement 1. La valeur $\kappa = 1/\sqrt{2}$ joue donc un rôle central dans la théorie, car elle fixe la limite entre deux situations différentes. En effet, on peut prouver que pour $\kappa > \kappa_c$, $F_v(n) > nF_v(1)$ montrant que seuls les vortex d'enroulement 1 sont énergétiquement favorisés et par conséquent stables. Un vortex d'enroulement n aura donc tendance à se ceindre en n vortex d'enroulement 1. Inversement, pour $\kappa < \kappa_c$, $F_v(n) < nF_v(1)$ et un seul vortex d'enroulement n sera favorisé. Ce comportement mène à une instabilité du réseau de vortex puisque ceux-ci auront tendance à s'agglutiner et à grossir jusqu'à briser la phase SC. Ces deux comportements différents sont à la base de la classification des SC en deux types. On parlera de SC de type II lorsque $\kappa > \kappa_c$ et de type I lorsque $\kappa < \kappa_c$ ⁶. Outre une

⁶Les éléments simples SC sont, en général, tous de type I et ont été les premiers à être découverts. Les types II sont arrivés plus tard avec la découverte des composés et alliages SC. La théorie GL fut la première à expliquer le comportement *étrange* des types II, ce qu'aucune théorie précédente n'a été en mesure de réaliser.

différence de comportement au niveau de la stabilité des vortex, les deux types de SC montrent d'autres caractéristiques opposées, bien illustrées en introduisant les concepts de champs magnétiques critiques et d'énergie de surface.

2.4 Champs magnétiques critiques et énergie de surface

L'existence de l'effet Meissner réversible implique la destruction de la phase SC par un champ magnétique critique H_c . D'une part, à l'équilibre et en l'absence de champ magnétique microscopique, la formation des paires de Cooper (phase SC) diminue la densité d'énergie libre de Gibbs de la quantité $\hat{f}_n(T) - \hat{f}_s(T)$. D'autre part, l'exclusion d'un champ magnétique externe augmente cette même densité d'énergie libre de $H^2/8\pi$. Lorsque ces deux quantités sont égales, aucune des deux phases n'est favorisée. Cet argument définit H_c , le champ thermodynamique critique, et à l'aide de (2.3), on trouve la relation

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{a_1^4}{4b} = \frac{\alpha^2(T - T_c)^2}{4b}, \quad (2.14)$$

où la dernière égalité définit la dépendance en température de H_c près de T_c (voir FIG. 2-2). Remarquons que la transition de phase occasionnée par H_c est une transition de phase du premier ordre, puisqu'à H_c , $\hat{f}_n(T) - \hat{f}_s(T) \neq 0$. Toutefois, la transition de phase en l'absence de champ magnétique reste une transition de phase de deuxième ordre. En terme de λ_L et ξ_{GL} , le champ thermodynamique critique s'écrit

$$H_c = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda_L\xi_{GL}}, \quad (2.15)$$

où $\Phi_0 \equiv hc/e^*$ est le quanta de flux magnétique.

Un autre champ critique d'intérêt est le champ H_{c2} . La présence d'un réseau de vortex dans le matériau modifie la valeur du champ maximal supportée par le

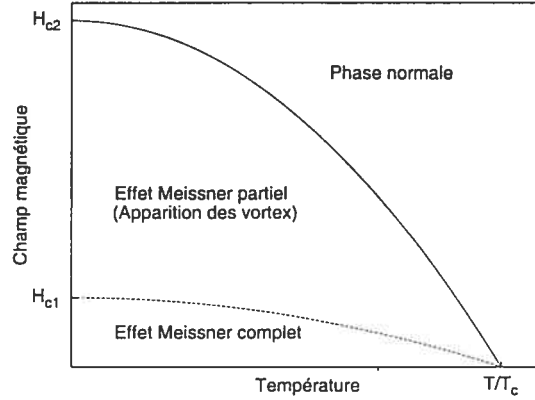


FIG. 2-2 – Dépendance en température des champs critiques pour un SC de type II.

SC puisque celui-ci n'est plus à *l'équilibre* (le terme gradient n'est plus nul). H_{c2} représente alors ce champ maximal et est donné par

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL}^2} = \sqrt{2}\kappa H_c. \quad (2.16)$$

La dépendance en température de H_{c2} est représentée à la FIG. 2-2. Ce champ est également nommé le champ de nucléation. Afin d'interpréter (2.16), considérons la situation où un SC est plongé dans un champ magnétique $H > H_{c2}$. On diminue alors celui-ci. Dans le cas des SC de type II, $H_{c2} > H_c$, et la transition vers la phase SC se réalise lorsque le champ magnétique descend en-dessous de H_{c2} . De plus, le paramètre d'ordre ϕ transite vers une valeur finie de façon continue : la transition est de deuxième ordre. Par contre, dans le cas des SC de type I, $H_{c2} < H_c$, et la transition devrait se produire à H_c . Toutefois, le matériau continue à être dans la phase normale. Il faut alors atteindre H_{c2} pour qu'apparaisse la phase SC : c'est le phénomène du *supercooling*. De plus, à la transition, ϕ saute de $|\phi|^2$ à v^2 de façon discontinue : la transition est donc de premier ordre.

L'apparition des vortex n'est pas favorisée lorsque le champ magnétique extérieur est nul et il faut atteindre la valeur H_{c1} , un autre champ magnétique critique, avant que les vortex puissent apparaître. Analytiquement, une expression pour H_{c1}

est impossible à trouver, car nous devons calculer l'énergie totale d'un vortex, accessible que de façon numérique. Le calcul de H_{c1} est montré à la FIG. 2-3 en fonction de κ pour les trois champs magnétiques critiques mentionnés. Remarquons que $H_{c1} > H_{c2}$ pour un SC de type I et inversement pour un SC de type II. Enfin, les trois champs critiques prennent la même valeur à $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Dans la limite $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ (type II extrême), l'expression pour H_{c1} est donnée par

$$H_{c1} = \frac{H_c}{2\pi\sqrt{2}\kappa} (\ln \kappa + 0.08).$$

La dépendance en température de H_{c1} est schématisée à la FIG. 2-2.

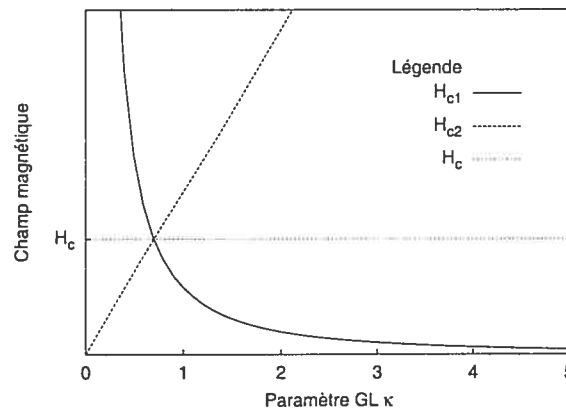


FIG. 2-3 – Dépendance en κ des champs critiques H_c , H_{c1} et H_{c2} . Notons que H_{c1} a été obtenu numériquement.

La dernière nécessité de ce chapitre est d'introduire l'expression analytique pour l'énergie de surface. Ce concept est né de la constatation que l'exclusion d'un champ externe \mathbf{H} ne mène pas à un état de plus basse énergie à moins qu'une énergie de frontière existe. En effet, l'exclusion du champ magnétique externe augmente l'énergie libre de Gibbs de $\mathbf{H}^2/8\pi$. Il se formera alors des couches alternées de phase normale et SC à la frontière de telle sorte que l'énergie de surface résultante excédera, en magnitude, le gain en énergie magnétique. De plus, si l'énergie de surface est positive, le système tentera de minimiser l'aire de la frontière indiquant un SC de type I. Inversement, pour une énergie négative, une maximisation de l'aire (structure

de vortex) sera préférée indiquant un SC de type II. Analytiquement, l'énergie de surface est donnée par

$$\sigma = \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} I$$

où

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{1}{2}(1 - \phi^4) + h^2 - \sqrt{2}h \right\}. \quad (2.17)$$

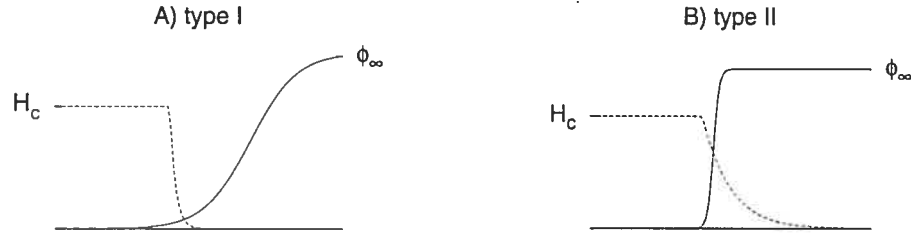


FIG. 2-4 – Schématisation du comportement des champs ϕ et h dans le cas des SC de type I A) et de type II B).

Qualitativement, il est possible d'en dégager deux comportements opposés en considérant les longueurs caractéristiques des champs. D'une part, lorsque $\xi_{GL} \gg \lambda_L$ (FIG. 2-4 A), le champ magnétique diminue beaucoup plus rapidement que le paramètre d'ordre. La contribution positive à l'énergie de surface due à l'exclusion du champ magnétique sera alors préférée à la contribution négative venant de l'énergie de condensation, puisque celle-ci varie lentement. L'énergie de surface sera donc positive. Ceci correspond au comportement des SC de type I. D'autre part, lorsque $\xi_{GL} \ll \lambda_L$ (FIG. 2-4 B), la situation est inversée et l'énergie de surface est négative, caractéristique des SC de type II. Dans les limites $\kappa \ll 1/\sqrt{2}$ (type I extrême) et $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ (type II extrême), on peut en dégager, respectivement, les résultats analytiques suivants

$$\sigma = \frac{H_c^2}{8\pi} \frac{4\sqrt{2}}{3} \xi_{GL}, \quad \sigma = -\frac{H_c^2}{8\pi} \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3} \lambda_L. \quad (2.18)$$

Notons un dernier aspect intéressant sur l'énergie de surface. On peut montrer que $I(\kappa)$ est une fonction continue et doit passer par zéro. Réalisé à $\kappa = 1/\sqrt{2}$, ce fait

permet de différencier, grâce au concept de l'énergie de surface, les SC de type I de ceux de type II. Cette technique sera utilisée dans l'étude de l'énergie de surface dans le cadre du modèle SO(5) au chapitre 5.

2.5 Brisure de symétrie et mécanisme de Higgs

Il est intéressant de faire le lien entre la théorie GL et le concept de brisure de symétrie en théorie des champs. D'une certaine façon, on peut dire que la brisure de symétrie permet à un champ (classique ou quantique) d'acquérir une masse. Le concept de la masse d'un champ en théorie des champs quantique est relié à l'étendue de la force d'interaction que crée celui-ci. Généralement, la portée d'une force décroît exponentiellement comme $\exp(-r/\lambda_c)$ où λ_c est la longueur de Compton et est égale à l'inverse de la masse⁷ des particules médiatrices de la force, celles-ci étant interprétées comme les oscillations d'un champ quantique de masse m . Par exemple, le photon, de masse nulle, véhicule la force électromagnétique. La longueur de Compton du photon est donc infinie, de sorte que la portée de la force électromagnétique est, elle aussi, infinie.

Considérons, afin d'illustrer ces concepts, le modèle de Higgs en théorie des champs⁸ dont la densité lagrangienne est donnée par

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - V(|\phi|),$$

où ϕ est un champ complexe et $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Ce lagrangien est invariant sous une transformation locale U(1). Si on choisit le potentiel de la forme

$$V(\phi) = \mu^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\phi|^4,$$

⁷En supposant bien sûr $\hbar = c = 1$.

⁸La notation et les dérivations subséquentes ont été prises partiellement de [33].

le minimum de celui-ci se trouvera à $\phi = 0$. Par contre, lorsque $\mu^2 < 0$, le minimum du potentiel acquiert une valeur moyenne non-nulle, donnée à une phase près par

$$\langle \phi \rangle = v = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}}.$$

Pour comprendre l'effet de l'acquisition d'un état fondamental non-nul, ce qu'on appelle une brisure de symétrie, on développe le lagrangien autour du minimum

$$\phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2),$$

avec ϕ_1 et ϕ_2 réels. En ne gardant que les termes quadratiques, le lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} (F_{\mu\nu})^2 - 2\mu^2 \phi_1^2 - 2e^2 v^2 A_\mu A^\mu \right\}.$$

où le champ ϕ_2 a été absorbé par une redéfinition du champ de jauge A_μ . On remarque donc qu'après la brisure de symétrie, les champs ϕ_1 et A_μ ont acquis une masse $m_{\phi_1} = \sqrt{2}\mu$ et $m_A = \sqrt{2}ev$ respectivement. Leurs longueurs de Compton sont

$$\lambda_\phi = 1/\sqrt{2}\mu, \quad \lambda_A = \sqrt{\lambda}/\sqrt{2}e\mu.$$

Puisque A_μ décrit le champ électromagnétique, la portée de cette force, après la brisure de symétrie, n'est plus infinie mais décroît d'un facteur e sur la longueur caractéristique λ_A . Cette situation semble être exactement la même qu'en SC. En effet, la phase normale permet à un champ magnétique de pénétrer complètement le matériau. Par contre, à la transition de phase (lorsque la brisure de symétrie intervient), le champ magnétique ne peut pénétrer le SC que sur la distance caractéristique λ_L . L'apparition de la phase SC est donc un processus de brisure de symétrie. En effet, avant la brisure de symétrie, le lagrangien est invariant sous une transformation de jauge locale U(1). Or, après la brisure de symétrie, cette symétrie n'est plus valide puisque le champ de jauge A_μ acquiert une masse⁹ : la symétrie U(1) est donc brisée. Parallèlement, dans la phase normale, la fonction d'onde de chaque électron possède une phase qui diffère d'un électron à l'autre, ceux-ci étant indépendants les uns des

⁹Il est connu qu'un champ de jauge massif n'est pas invariant sous transformation de jauge.

autres. Localement, il y a donc symétrie $U(1)$. Or, lorsque la phase SC apparaît, les électrons se *condensent* deux à deux pour former des paires de Cooper. Or, dans cette situation, une seule fonction d'onde, avec une phase bien précise, est suffisante pour décrire tous les électrons : la symétrie $U(1)$ est donc brisée.

Il est aisé de remarquer que les définitions de λ_L et de ξ_{GL} , expressions (2.9, dans la théorie GL sont équivalentes aux définitions de λ_A et de λ_ϕ dans le modèle de Higgs, les facteurs de conversions étant

$$a = \frac{\hbar}{\sqrt{m^*}} \mu \quad \text{et} \quad b = \frac{2\pi\sqrt{2}\hbar^2}{(m^*)^2 c^2} \lambda.$$

Ainsi, on peut relier le paramètre GL avec le rapport des longueurs de Compton des deux champs :

$$\lambda_A/\lambda_\phi = \frac{e}{\lambda} = \sqrt{2} \frac{m^* c}{e^* \hbar} \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \frac{\sqrt{2}}{b} = \sqrt{2} \kappa.$$

La valeur critique $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$ correspond donc à la situation particulière où les masses des champs sont égaux.

Chapitre 3

Le modèle SO(5)

La découverte d'une multitude d'oxydes SC à haute température ainsi que l'étude intensive de leur structure atomique ont permis de relier la SC au phénomène de l'antiferromagnétisme (AF). En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1, une diminution de la concentration d'oxygène dans ces oxydes SC conduit à l'apparition d'une phase AF. Ceci contraste avec les SC conventionnels (ceux du moins décrit par la théorie BCS) où seules les phases SC et normale existent. Cependant, plusieurs caractéristiques propres aux SC conventionnels se retrouvent dans les SC haute température dont la formation du réseau de vortex, l'effet Meissner et l'existence de champs magnétiques critiques. Au point de vue phénoménologique, la théorie de Ginzburg-Landau (ou le modèle SO(2)) décrit de façon satisfaisante toutes ces caractéristiques. Par conséquent, il serait intéressant de prolonger le modèle SO(2) de telle sorte qu'il puisse englober les caractéristiques propres à l'apparition de la phase AF. C'est ce que tente de réaliser le modèle SO(5), théorie introduite par Zhang en 1996 [25].

Nous débuterons ce chapitre par une introduction qualitative au modèle SO(5) pour passer ensuite aux aspects mathématiques et physiques de la théorie. Nous discuterons, entre autres, des différents états fondamentaux ainsi que de l'existence des vortex à centre AF. La dernière section sera consacrée aux prédictions et à certaines critiques qui ont été adressées au modèle SO(5). Malheureusement, aucune

monographie n'existe présentement sur le modèle $SO(5)$ de sorte que les concepts présentés ici se basent essentiellement sur les articles de Zhang [25], Arovas et *al.* [34] ainsi que sur nos propres articles [35, 36].

3.1 Introduction au modèle $SO(5)$

Il a été noté [37, 38] qu'un bon point de départ pour l'élaboration d'un modèle susceptible de décrire les effets des fortes corrélations entre les électrons dans les oxydes pourrait être le modèle de Hubbard ou le modèle t-J près du demi-remplissage¹. Malheureusement, ces modèles sont excessivement difficiles à résoudre, même en deux dimensions, et leurs solutions exactes en une dimension ne nous éclairent que très peu. Cependant, on peut en tirer un fait général : deux échelles d'énergie entrent en jeu dans la physique qu'elles décrivent. La première partie, celle à *haute énergie*, est responsable de la formation locale de paires d'électrons. Ce secteur se caractérise par une température T_{MF} (variant de 0 à 1000 K). Dans les supraconducteurs BCS (ou SC conventionnel), cette température est la même que la température de transition T_c . Par contre, dans les oxydes SC, T_c est beaucoup plus basse que T_{MF} , ce qui semble anormal. Il doit donc y avoir une autre physique, en dessous de T_{MF} , qui gouverne la destinée des paires d'électrons : c'est le rôle de la deuxième partie, celle à *basse énergie*. En effet, les paires peuvent s'ordonner dans l'espace pour former un état fondamental AF. Elles peuvent également se lier deux à deux pour donner un état fondamental SC. Elles peuvent finalement se mélanger pour donner des états fondamentaux exotiques (*phase separation*, *spin-bag phase*, etc.). Afin de décrire les différents états fondamentaux en compétition, nous avons besoin d'un hamiltonien efficace qui décrit convenablement le secteur *basse énergie* du modèle t-J ou du modèle de Hubbard. Sa forme n'étant pas triviale à première

¹On pourra se référer à l'Annexe B pour une brève description de ces modèles.

vue, nous utiliserons les symétries des hamiltoniens efficaces des états AF et SC séparément afin de limiter les choix possibles. On sait que l'hamiltonien efficace à basse énergie d'un AF est le modèle quantique σ non-linéaire $SO(3)$. Ce modèle s'applique également aux oxydes faiblement dopés. De son côté, l'hamiltonien efficace de la SC est décrit par le modèle quantique σ non-linéaire $U(1)$, appelé parfois le modèle XY. Au point de vue des symétries, la partie AF est invariante sous rotation du spin dans l'espace 3-D, donc de symétrie $SO(3)$, tandis que la partie SC est invariante sous la conjugaison de charge, de symétrie $U(1)$. Il est donc essentiel que notre hamiltonien recherché possède les symétries mentionnées comme sous-groupes d'un groupe plus large. Le groupe compatible avec ces restrictions est le groupe $SO(5)^2$.

Une façon simple de construire ce groupe est d'introduire le concept de superspin. C'est un vecteur à 5 composantes qui forme le paramètre d'ordre de la théorie : $\mathbf{m} = (\phi_1, \phi_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Les deux premières composantes de ce vecteur correspondent au paramètre d'ordre SC, $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont des champs scalaires réels. Les trois dernières viennent des trois composantes spatiales du paramètre d'ordre AF, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Une rotation générale du superspin est décrite en terme des générateurs du groupe $SO(5)$ qui sont au nombre de 10. Quatre d'entre eux commutent avec l'hamiltonien du modèle t-J : un venant de la symétrie $U(1)$, les trois autres, de la symétrie $SO(3)$. Qu'arrive-t-il avec les 6 autres générateurs ? En fait, ceux-ci ne commutent pas exactement avec l'hamiltonien, de sorte que la symétrie $SO(5)$ en est une approximative. Cette symétrie approximative aura des conséquences physiques très intéressantes.

Afin de bien choisir notre hamiltonien, regardons comment se comporte le superspin sous une diminution de la température du système. Lorsque la température

²Il existe d'autres groupes plus petit possédant comme sous-groupes, les symétries mentionnées. Cependant, pour être en accord avec certaines expériences, que nous allons voir à la section 3.6, le groupe minimal pour les oxydes SC semble être le groupe $SO(5)$.

descend en-dessous de T_{MF} (secteur *haute énergie*), le superspin acquiert une amplitude non-nulle, mais sa direction reste toujours indéterminée. La symétrie $SO(5)$ de l'état fondamental est donc brisée spontanément en une symétrie $SO(4)$ ³. Cependant, le choix des phases AF et SC correspond à une direction fixe du superspin (secteur *basse énergie*). La symétrie $SO(5)$ du lagrangien est donc brisée explicitement en une symétrie $SO(3) \times U(1)$. Le choix de la direction du superspin sera fixé par l'ajout d'un terme anisotropique dans notre hamiltonien efficace qui permettra au superspin de choisir entre l'espace 3-D AF ou le plan 2-D SC. Ce terme est relié au potentiel chimique μ des électrons⁴. Par convention, le potentiel chimique est égal à zéro lorsque chaque site possède un électron (on parle aussi de demi-remplissage), c'est-à-dire lorsque le système est dans la phase AF. L'ajout d'électrons augmente la valeur du potentiel chimique et, dépassé une certaine valeur critique μ_c , il en résulte l'apparition de la phase SC, comme nous l'avons discuté à la section 1.5. Notons finalement que la température caractérisant le secteur *basse énergie* coïncide avec les températures critiques des phases AF et SC. Ainsi, lorsque la température descend en-dessous de T_c (si le superspin est orienté dans la direction du plan SC), la symétrie $U(1)$ de l'état fondamental est brisée spontanément et la phase SC apparaît. De la même façon, si le superspin est orienté dans la direction de l'espace AF, la symétrie $SO(3)$ de l'état fondamental est brisée spontanément lorsque $T < T_N$ (la température de Néel) et la phase AF se manifeste.

Il est intéressant, à ce point, de discuter qualitativement du comportement du superspin lorsque le système passe de l'état fondamental AF à l'état fondamental SC. Pour fixer les idées, une bonne analogie est de considérer un matériau AF possédant un axe anisotropique, par exemple l'axe z . En-dessous de la température de Néel, le paramètre d'ordre AF apparaît et s'alignera le long de cet axe. On applique alors un champ magnétique \mathbf{H} parallèle à l'axe z . Pour \mathbf{H} faible, le paramètre d'ordre

³Le lagrangien reste quant à lui toujours invariant sous le groupe $SO(5)$.

⁴Le potentiel chimique est quant à lui relié à la densité des porteurs de charges δ .

AF aura tendance à rester aligné le long de l'axe z , mais si on augmente le champ magnétique jusqu'à une certaine valeur critique, la paramètre AF s'orientera plutôt parallèlement au plan xy . Le spin subit alors ce qu'on appelle une transition *spin-flop* : une certaine direction est privilégiée par rapport à une autre, dépendant du champ magnétique externe. L'apparition de la SC haute température peut être vue comme une transition *spin-flop* avec le superspin à la place du spin et le potentiel chimique μ à la place du champ magnétique \mathbf{H} . En effet, à $\mu = 0$, le superspin s'aligne dans la direction de l'espace 3-D (η_1, η_2, η_3) , résultant un état fondamental AF. Lorsque le potentiel chimique augmente et atteint une certaine valeur critique μ_c , le superspin aura tendance à s'orienter plutôt dans la direction du plan 2-D (ϕ_1, ϕ_2) : le système devient SC. On parle alors d'une transition *superspin-flop*. C'est ainsi, selon S.C. Zhang, que la SC haute température apparaît :

La supraconductivité est une conséquence inévitable de la symétrie $SO(5)$ et de l'état AF au demi-remplissage. De ce point de vue, un état AF peut en quelque sorte être perçu comme un solide formé de paires de Cooper et la transition «superspin-flop» est une transition du premier ordre d'un solide vers un superfluide de paires de Cooper.

3.2 L'Hamiltonien efficace

Pour aller plus loin dans la construction et la description du modèle, il nous faut une expression mathématique de l'hamiltonien efficace à basse énergie. Il est décrit en terme de l'énergie libre de Helmholtz⁵

$$\hat{F} = \int_{\Omega} \hat{f} dV$$

⁵À moins d'un avis contraire, on utilisera l'énergie libre pour parler de l'énergie libre de Helmholtz.

où Ω est le volume d'intégration et \hat{f} , la densité d'énergie libre donnée par

$$\hat{f} = \frac{\hbar^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(-i\nabla - \frac{e^*}{\hbar c} \hat{\mathbf{A}} \right) \hat{\phi} \right|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla \hat{\eta})^2 + V(|\hat{\phi}|, |\hat{\eta}|), \quad (3.1)$$

où $\hat{\mathbf{h}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}$ est le champ magnétique microscopique. Les constantes e^* et m^* correspondent toujours à la charge et à la masse effective d'une paire de Cooper. Notons que la dynamique de $\hat{\eta}$ n'est pas couplée au champ de jauge puisque la magnétisation moyenne d'un matériau AF reste sensiblement nulle lorsqu'un champ magnétique externe est appliqué.

Le potentiel est donné par le développement de Taylor des paramètres d'ordre SC et AF jusqu'au quatrième ordre, en omettant les termes linéaires et cubiques

$$V(\hat{\phi}, \hat{\eta}) = -\frac{a_1^2}{2} \hat{\phi}^2 - \frac{a_2^2}{2} \hat{\eta}^2 + \frac{b_1}{4} \hat{\phi}^4 + \frac{b_3}{2} \hat{\phi}^2 \hat{\eta}^2 + \frac{b_2}{4} \hat{\eta}^4, \quad (3.2)$$

où l'on a écrit $\hat{\phi} = |\hat{\phi}|$ et $\hat{\eta} = |\hat{\eta}|$. La FIG. 3-1 représente le potentiel de façon schématique. Nous avons posé les coefficients de développement a et b tous différents afin de posséder le plus général des potentiels invariant sous symétrie $SO(3) \times SO(2)$ ⁶. Puisque l'hamiltonien efficace doit décrire le secteur basse énergie du système, la symétrie $SO(5)$ doit déjà être brisée en faveur d'une symétrie $SO(3) \times SO(2)$ et on remarque, en effet, que le potentiel (3.2) est bel et bien invariant sous la rotation des paramètres d'ordre SC et AF séparément. Plus particulièrement, les coefficients $-a_1^2$ et $-a_2^2$ sont déjà explicitement négatifs afin d'accéder aux états fondamentaux désirés comme nous le verrons à la prochaine section. Quelques restrictions s'imposent aussi sur les coefficients b . Pour que le potentiel possède un minimum global, celui-ci doit tendre vers l'infini lorsque les champs $\hat{\phi}$ et $\hat{\eta}$ tendent vers l'infini. D'une part, si $\hat{\phi} \rightarrow \infty$ et $\hat{\eta} = 0$, le terme dominant sera $\frac{b_1}{4} \hat{\phi}^4$ de sorte que nous devons nécessairement avoir $b_1 > 0$. La même considération pour $\hat{\eta} \rightarrow \infty$ mène à la condition $b_2 > 0$. Le cas

⁶Il serait plus juste de parler d'une symétrie $SO(3) \times U(1)$ puisque le paramètre d'ordre SC est un champ complexe. Cependant, les groupes $U(1)$ et $SO(2)$ étant isomorphes, nous avons préféré utiliser le groupe $SO(2)$.

où $\hat{\phi}$ et $\hat{\eta}$ ne sont pas nuls en même temps, la condition d'un minimum global impose $b_3 > -\sqrt{b_1 b_2}$. Notons en terminant que lorsque η est nul, l'expression (3.1) redonne

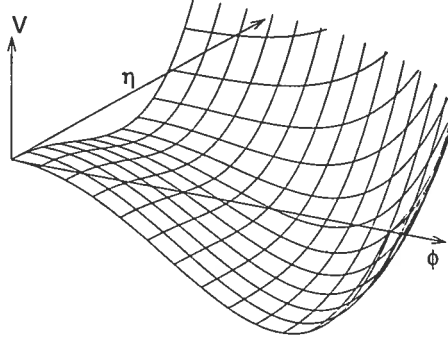


FIG. 3-1 – Représentation du potentiel (3.2) du modèle SO(5). Le système est dans l'état fondamental SC.

la densité d'énergie libre du modèle SO(2), l'expression (2.3). On peut donc voir le modèle SO(5) comme une généralisation du modèle SO(2) permettant de considérer l'effet d'un paramètre d'ordre AF sur le comportement de la phase SC.

Dans les chapitres à venir, nous aurons à utiliser les équations du mouvement découlant de (3.1). Par les techniques du calcul variationnel standard, elles sont données par

$$\frac{1}{m^*} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^* \hat{A}}{c} \right)^2 \hat{\phi} - a_1^2 \hat{\phi} + b_1 \hat{\phi} |\hat{\phi}|^2 + b_3 \hat{\eta}^2 \hat{\phi} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\nabla \times \hat{\mathbf{h}}}{4\pi} = \frac{e^* \hbar}{2im^* c} \left(\hat{\phi}^* \nabla \hat{\phi} - \hat{\phi} \nabla \hat{\phi}^* \right) - \frac{e^{*2}}{m^* c^2} \hat{A} \hat{\phi}^* \hat{\phi}. \quad (3.4)$$

$$\frac{\hbar^2}{m^*} \nabla^2 \hat{\eta} - a_2^2 \hat{\eta} + b_2 |\hat{\eta}|^3 + b_3 \hat{\phi}^2 \hat{\eta} = 0. \quad (3.5)$$

Ces équations du mouvement sont tout à fait générales et peuvent s'appliquer tant dans la phase SC que dans la phase AF, puisqu'aucun état fondamental particulier n'a été sélectionné. Nous aurons l'occasion de les utiliser dans de nombreuses situations.

3.3 États fondamentaux

L'information sur les états fondamentaux du modèle SO(5) est donnée par le minimum global du potentiel (3.2). Nous pouvons, qualitativement, en retirer trois situations différentes. D'une part, le minimum global peut se situer soit sur l'axe SC ou sur l'axe AF auquel cas l'état fondamental sera respectivement l'état SC et l'état AF. D'autre part, le minimum global peut se retrouver à tout autre endroit entre les deux axes AF et SC auquel cas l'état fondamental sera un mélange des états SC et AF, que nous appellerons l'état mixte. Les différents états fondamentaux dépendront évidemment des valeurs prises par les coefficients a et b .

Débutons premièrement par les conditions d'obtention des états purs SC et AF. Ces minimums se situent sur les axes AF et SC respectivement et leurs valeurs sont déterminées par la dérivée première du potentiel. Pour le minimum sur l'axe SC, la condition est donnée par

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \hat{\phi}} \right|_{\hat{\eta}=0} = (-a_1^2 + b_1 \hat{\phi}^2) \hat{\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\phi}^2 = \frac{a_1^2}{b_1} \equiv v^2,$$

tandis que sur l'axe AF,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \hat{\eta}} \right|_{\hat{\phi}=0} = (-a_2^2 + b_2 \hat{\eta}^2) \hat{\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\eta}^2 = \frac{a_2^2}{b_2}. \quad (3.6)$$

À ces points, le potentiel prend les valeurs suivantes :

$$V_{SC} = -\frac{a_1^4}{4b_1} \quad \text{et} \quad V_{AF} = -\frac{a_2^4}{4b_2}.$$

Une condition nécessaire (mais non suffisante) à l'obtention d'un état fondamental SC est donnée par $V_{SC} < V_{AF}$. Cette condition est remplie lorsque

$$\frac{a_1^4}{4b_1} > \frac{a_2^4}{4b_2} \quad \rightarrow \quad \frac{a_2^4}{a_1^4} \equiv \beta^2 < \frac{\alpha}{\delta},$$

où l'on a défini

$$\alpha \equiv \frac{b_3}{b_1} \quad \text{et} \quad \delta \equiv \frac{b_3}{b_2}.$$

De la même façon, l'état fondamental sera AF si $V_{SC} > V_{AF}$, la condition nécessaire étant satisfaite pour $\beta^2 > \alpha/\delta$. La condition trouvée ci-haut n'est pas suffisante pour s'assurer d'un minimum global SC (ou AF), car ce minimum pourrait être en fait un point de selle. Pour écarter cette situation, il faut nous assurer que la dérivée seconde dans la direction AF (ou SC), évaluée au point du minimum ($\hat{\phi} = v, \hat{\eta} = 0$), soit positive, c'est-à-dire que

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\eta}^2} \right|_{\substack{\hat{\phi}=v \\ \hat{\eta}=0}} > 0. \quad (3.7)$$

Après un minime calcul, on trouve que cette condition est respectée pour l'état SC lorsque $\beta < \alpha$ et lorsque $\beta > 1/\delta$ pour l'état AF. Les conditions sur les paramètres pour l'obtention des états fondamentaux AF et SC sont résumées au TAB. 3-1 et montrées à la FIG. 3-2.

Phase	Conditions sur les paramètres
	$\alpha = b_3/b_1, \beta = a_2^2/a_1^2, \delta = b_3/b_2$
SC	$\beta^2 < \alpha/\delta$ et $\beta < \alpha$
AF	$\beta^2 > \alpha/\delta$ et $\beta > 1/\delta$
mixte	$\beta > \alpha$ et $\beta < 1/\delta$

TAB. 3-1 – Résumé des différents états fondamentaux du potentiel (3.2).

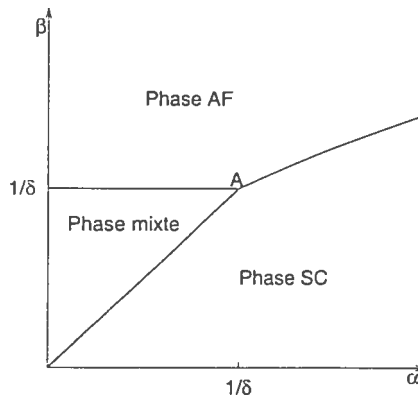


FIG. 3-2 – Diagramme des états fondamentaux du modèle SO(5).

Lorsque la dérivée seconde (3.7) est négative plutôt que positive, les minimums sur les axes sont en fait des points de selles et le vrai minimum global se retrouve quelque part entre les deux axes SC et AF. Comme la dérivée seconde est négative lorsque $1/\delta > \beta > \alpha$, cet intervalle de valeurs donne la condition pour trouver un état fondamental mixte. Cette condition est également résumée au TAB. 3-1 et à la FIG. 3-2.

Lorsque α , β et δ sont égales à 1, on se retrouve au triple point A de la FIG. 3-2. Ces valeurs particulières font en sorte que le potentiel possède une symétrie $SO(5)$ et ne permet pas de différencier les trois états fondamentaux disponibles. Cependant, la variation du paramètre β (en laissant fixe α et δ) permet de choisir entre l'état AF et l'état SC. Ce paramètre brise donc explicitement la symétrie $SO(5)$ et doit être relié au potentiel chimique des électrons μ précédemment introduits. La relation entre ces deux quantités est donnée par (lorsque $\alpha = \delta = 1$)

$$\beta = 1 - \frac{8m^*}{\hbar^2} \xi^2 \chi (\mu^2 - \mu_c^2), \quad (3.8)$$

où ξ_{GL} est la longueur de cohérence (3.10), χ , la susceptibilité magnétique, μ , le potentiel chimique et μ_c , la valeur critique du potentiel chimique qui redonne la symétrie $SO(5)$ ⁷. L'expression (3.8) permet ainsi de relier le paramètre β à des quantités physiques accessibles expérimentalement. Plus particulièrement, l'état fondamental SC est assuré lorsque $0 < \beta < 1$. De (3.8), le potentiel chimique doit alors prendre des valeurs entre $\mu_{max}^2 > \mu^2 > \mu_c^2$, avec

$$\mu_{max}^2 \equiv \mu_c^2 + \frac{\hbar^2}{8m^* \xi^2 \chi}.$$

De la même façon, le système sera dans la phase AF lorsque $0 < \mu^2 < \mu_c^2$, c'est-à-dire lorsque β varie entre 1 et β_{max} donné par

$$\beta_{max} = 1 + \frac{8m^*}{\hbar^2} \xi^2 \chi \mu_c^2.$$

⁷L'expression (3.8) résulte de la différence de formulation entre notre modèle et celui introduit par [25] et [34].

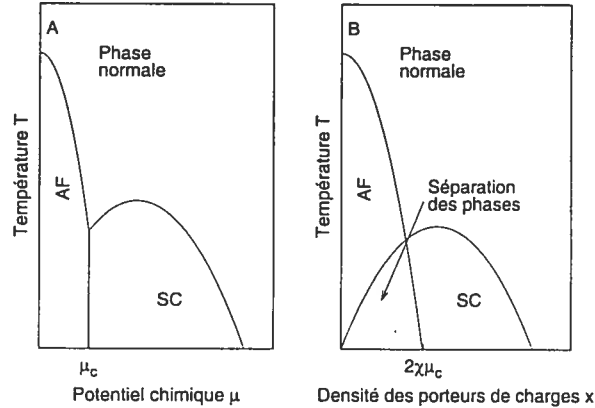


FIG. 3-3 – Représentation schématique d'un diagramme de phase $T-\mu$ (A) en comparaison avec un diagramme de phase $T-x$ (B).

La plupart des diagrammes de phase des SC haute température sont exprimés en fonction de la densité des porteurs de charge x (ce qu'on appelle le dopage), facilement accessible expérimentalement⁸. Or, il semble difficile de relier cette quantité au potentiel chimique des électrons (et ainsi au paramètre β). Cependant, Zhang discute de la variation de la densité des porteurs de charge à $T = 0$. Pour $\mu < \mu_c$, la densité de ceux-ci est nulle puisque le système est dans l'état AF⁹. Par contre, à μ_c , la densité de trou saute de façon discontinue pour atteindre une valeur de $2\chi\mu_c$. Ensuite elle augmente, approximativement de façon linéaire, avec le potentiel chimique permettant à la phase SC d'apparaître¹⁰. Cette discontinuité dans la densité de charge fait surgir une région de séparation des phases AF et SC que l'on ne voit pas dans les diagrammes de phase $T-\mu$. En effet dans ceux-ci, à μ_c , une ligne de

⁸Diagramme de phase $T-x$ ou $T-\delta$.

⁹Puisqu'un matériau AF est isolant, tous les électrons sont en-dessous du niveau de Fermi. Aucune orbitale n'est occupée au-dessus du niveau de Fermi (densité des porteurs de charges nulle), ce qui revient à dire que toutes les orbitales en-dessous du niveau de Fermi sont occupées (densité de trous nulle).

¹⁰La phase SC se caractérise par une forte densité de trous puisqu'une bonne fraction des électrons se retrouve au-dessus du niveau de Fermi (densité des porteurs de charges élevées) permettant au matériau de devenir conducteur (ou SC).

transition de premier ordre délimite la phase AF de la phase SC (voir FIG. 3-3 A), à l'endroit où apparaît la discontinuité dans la densité de charge. Par contre, dans le diagramme de phase $T-x$, à $T = 0$, il y a une séparation des phases AF et SC dans la région $0 < x < 2\chi\mu_c$. La question de la relation entre le potentiel chimique et la densité des porteurs de charge est plus amplement discutée dans [39, 40, 41].

3.4 Vortex à centre antiferromagnétique

Une conséquence intéressante du modèle $SO(5)$, et dont les implications seront loin d'être triviales, concerne l'existence de vortex à centre AF lorsque le système est dans l'état fondamental SC. Puisque le modèle $SO(5)$ est une généralisation du modèle $SO(2)$, ce dernier, comme nous l'avons vu au chapitre 2, possède des solutions de type vortex à centre normal¹¹. Ces dernières existent certainement dans le modèle $SO(5)$ lorsque le paramètre d'ordre AF est nul. Cependant, une autre configuration peut survenir dans laquelle un paramètre d'ordre AF non-nul apparaît au centre du vortex. On peut s'en convaincre à l'aide d'arguments qualitatifs. Loin du centre du vortex, $|\hat{\phi}| = v$ et l'énergie est minimisée lorsque $\hat{\eta} = 0$ (le terme gradient étant nul). Au centre du vortex, $\hat{\phi} = 0$ et le potentiel est maintenant minimisé pour $\hat{\eta} \neq 0$, mais le terme gradient (l'énergie cinétique) n'est plus nul. Puisque l'énergie potentielle (minimisée par $\hat{\eta} \neq 0$) et l'énergie cinétique (minimisée par $\hat{\eta} = 0$) sont en compétition, il y aura apparition ou non d'un paramètre d'ordre AF au centre du vortex dépendant du terme dominant. Comme l'augmentation du paramètre β dans le potentiel accentue le «caractère AF» du système, l'apparition d'un centre AF se fera pour des valeurs de β plus proche de 1 que de 0. La possibilité de vortex à centre AF a été mentionnée pour la première fois par Zhang dans son article original et plusieurs auteurs ont développé cette idée plus en profondeur [34, 42, 35].

¹¹C'est-à-dire dans la phase normale.

Cependant, aucune expérience n'est venu, à ce jour, confirmer hors de tout doute l'existence de vortex à centre AF, mais tous affirment avoir détecté un certain ordre dans l'alignement des spins au centre du vortex (présence d'ondes de densité de spin), prémices au phénomène AF [43, 44, 45].

Afin de prouver l'existence de telles solutions, nous devons dériver les équations du mouvement du vortex. Avant toute chose, un changement de variable s'impose afin d'alléger l'écriture et ainsi de travailler avec des quantités sans dimension. On pose donc

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{s}, \quad \hat{\phi}(\mathbf{x}) = v\phi(\mathbf{s}), \quad \hat{\eta}(\mathbf{x}) = v\eta(\mathbf{s}), \quad (3.9)$$

avec $v \equiv a_1/\sqrt{b_1}$. Les champs $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{h}}$ sont définis de la même manière qu'au chapitre 2, expression (2.6), tandis que les longueurs caractéristiques sont données par

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^*c^2b_1}{4\pi(e^*)^2a_1^2}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m^*a_1^2}}, \quad (3.10)$$

où l'on note que seuls les coefficients a_1^2 et b_1 font partie des expressions (3.10). Avec ces changements de variables, la densité d'énergie libre (3.1) devient $\hat{f} = v^2f$ avec

$$f = \mathbf{h}^2 + \frac{1}{\kappa^2} |(-i\nabla - \kappa\mathbf{A})\phi|^2 + \frac{1}{\kappa^2} (\nabla\eta)^2 - \phi^2 - \beta\eta^2 + \frac{1}{2}\phi^4 + \alpha\phi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\delta}\eta^4 + \frac{1}{2}. \quad (3.11)$$

où une constante a été rajoutée afin que $f = 0$ à $s \rightarrow \infty$.

Pour obtenir les solutions de type vortex, ceux-ci doivent dépendre des coordonnées polaires (s, θ) . Ceci est possible puisque le vortex est invariant sous translation de la coordonnée z . L'espace des configurations est donc le plan infini 2-D¹². Ensuite, le paramètre d'ordre SC doit être une quantité complexe (muni d'une phase) et le champ de jauge ne doit posséder qu'une composante en θ qui ne dépend que de s afin que la dérivée covariante, $(-i\nabla - \kappa\mathbf{A})\phi$, s'annule à $s \rightarrow \infty$. Enfin, sans perdre

¹²La restriction à l'espace 2-D est nécessaire à l'existence de soliton topologique comme nous allons le voir plus loin.

de généralité, nous supposons que le paramètre d'ordre AF prend une direction fixe \mathbf{e} dans l'espace¹³. En tenant compte de ces restrictions, on choisit les *ansätze* suivants

$$\phi(\mathbf{s}) = \varphi(s)e^{in\theta}, \quad A_i(\mathbf{s}) = \epsilon_{ij} \frac{s_j}{s} A(s), \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{e}}\eta(s). \quad (3.12)$$

Les solutions recherchées doivent être telles que l'énergie totale du vortex soit finie (une définition du soliton). Une condition suffisante est obtenue lorsqu'on contraint les champs ϕ et η à atteindre asymptotiquement leur valeur respective qui minimise le potentiel. De cette façon, puisque les termes cinétiques s'annulent à $s \rightarrow \infty$, la densité d'énergie libre s'annulera lorsque $s \rightarrow \infty$. Afin d'atteindre cette configuration, le champ $\varphi(s)$ doit tendre vers 1 et ce, peu importe la valeur de la phase $n\theta$. Les champs $A(s)$ et $\eta(s)$ doivent quant à eux tendre asymptotiquement vers 0. Notons que la phase n'est pas fixée par les conditions frontières imposées : elle peut donc varier, *a priori*, de façon arbitraire. Par contre, un argument topologique restreint les degrés de liberté de la phase. Nous avons vu que le minimum du potentiel est fixé à une phase près, c'est-à-dire que l'espace des minimums est le cercle unitaire défini par $e^{in\theta}$. De plus, $\phi(s, \theta)$ doit nécessairement atteindre asymptotiquement (c'est-à-dire à l'infini spatial) les valeurs sur ce cercle. Les conditions frontières appliquent donc l'infini spatial sur ce cercle. Comme l'infini spatial est lui-même un cercle (nous sommes en 2-D), ceci équivaut à l'application d'un cercle sur un cercle. Or, par une considération des groupe d'homotopies, les applications non triviales d'un cercle sur un autre viennent en une infinité discrète de classe d'homotopie, caractérisée par un entier n , que l'on nomme le nombre d'enroulement. Celui-ci correspond au nombre de fois que la phase de ϕ est enroulée autour d'un cercle à l'infini de l'espace des configurations. Pour une phase quelconque $\alpha(\theta)$, n est donnée par

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} d\theta.$$

trivialement satisfaite lorsque $\alpha(\theta) = n\theta$.

¹³La direction de $\boldsymbol{\eta}$ n'est pas restreinte à l'espace 2-D et peut très bien posséder une composante en z .

L'énergie libre (3.11), après substitution des *ansätze* (3.12), prend la forme

$$F(n) = \frac{1}{2} \int s \, ds \, d\theta \left\{ \left(A' + \frac{A}{s} \right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left[\varphi'^2 + \left(\frac{n}{s} + \kappa A \right)^2 \varphi^2 + \eta'^2 \right] - \varphi^2 - \beta \eta^2 + \frac{1}{2} \varphi^4 + \alpha \phi^2 \eta^2 + \frac{\alpha}{2\delta} \eta^4 + \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.13)$$

où maintenant $F(n)$ est explicitement une fonction de l'enroulement n . Les équations du mouvement qui découlent de (3.13) sont

$$\frac{1}{\kappa^2} \left[\varphi'' + \frac{1}{s} \varphi' - \left(\frac{n}{s} + \kappa A \right)^2 \varphi \right] + \varphi(1 - \varphi^2 - \alpha \eta^2) = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\kappa^2} \left(\eta'' + \frac{1}{s} \eta' \right) + \eta(\beta - \alpha \varphi^2 - \frac{\alpha}{\delta} \eta^2) = 0, \quad (3.15)$$

$$A'' + \frac{1}{s} A' - \frac{1}{s^2} A - \left(\frac{n}{\kappa s} + A \right) \varphi^2 = 0. \quad (3.16)$$

Afin de trouver une solution explicite à ces équations non-linéaires couplées, nous devons les résoudre numériquement. Nous avons donc utilisé les mêmes techniques que celles choisies pour la résolution des équations du mouvement du vortex dans le modèle SO(2). Nous nous sommes aperçus que les vortex à centre AF pouvaient bel et bien être obtenus. Une de ces solutions est montrée à la FIG. 3-4, où les valeurs des champs φ , η et h sont présentées en fonction de la distance radiale s .

3.5 Condition d'apparition du centre AF

La compétition entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du paramètre d'ordre AF détermine si celui-ci apparaîtra ou non au centre du vortex. À la section précédente, nous avons utilisé des arguments qualitatifs afin de déterminer la condition d'obtention du centre AF : ici, le traitement sera plus mathématique. Lorsque

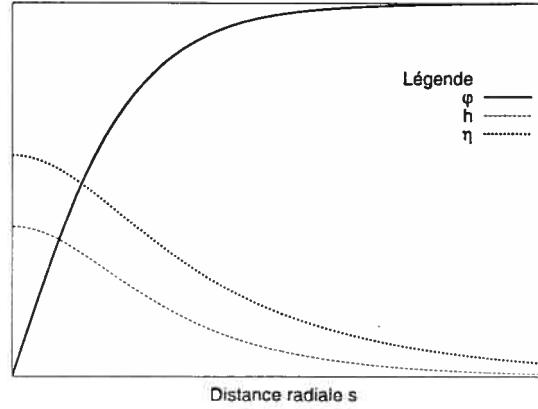


FIG. 3-4 – Solution du vortex à centre AF dans le modèle SO(5) avec $\kappa = 2$, $\beta = 0.9$ et $\alpha = \delta = 1$.

le centre du vortex commence à acquérir un paramètre d'ordre AF non-nul, l'amplitude de celui-ci reste très faible de sorte que nous pouvons linéariser (3.15) autour de $\eta = 0$ ce qui nous laisse avec (nous allons poser $\alpha = 1$)

$$-\left(\eta'' + \frac{1}{s}\eta'\right) + \kappa^2(\varphi^2 - \beta)\eta = 0. \quad (3.17)$$

Cette équation est de la même forme que l'équation de Schrödinger radiale en une dimension, $-\nabla^2\psi + V(s)\psi = E\psi$, avec le potentiel $V(s) = \kappa^2(\varphi^2 - \beta)$ et $E = 0$. Puisque le paramètre d'ordre SC croît de $\varphi = 0$ à $s = 0$ jusqu'à $\varphi = 1$ à $s \rightarrow \infty$, le potentiel est attractif près de $s = 0$ avec un minimum à $V(0) = -\kappa^2\beta$. Le potentiel croît ensuite de façon monotone à mesure que s augmente jusqu'à atteindre la valeur asymptotique $V(\infty) = \kappa^2(\alpha - \beta)$. L'apparition d'un centre AF est assurée en notant que s'il existe une solution d'état lié normalisable, alors le vortex avec $\eta = 0$ au centre ne sera plus favorisé et celui-ci adoptera une configuration de moindre énergie avec $\eta \neq 0$. L'existence d'états liés dans notre cas particulier est loin d'être trivial puisqu'on ne peut résoudre exactement l'équation (3.17). Cependant, pour $\beta = 1$, le potentiel est défini négatif pour tout s et l'on sait que, dans ce cas, l'équation de Schrödinger admet au moins une solution d'état lié¹⁴. Il y a donc apparition d'un

¹⁴Voir par exemple *The Feynman Lectures on Physics* III section 16.6.

centre AF pour $\beta = 1$. Par continuité, il doit encore exister une solution d'état lié pour $\beta \lesssim 1$. Enfin, pour $\beta = 0$, le potentiel est défini positif pour tout s , de sorte qu'aucun état lié n'est possible et la solution $\eta = 0$ minimise alors l'énergie. En résumé, il existe donc une valeur de β , pas trop loin de 1, pour lequel le centre du vortex devient AF. Cette valeur critique sera notée β_{AF} . Ainsi, pour $\beta \geq \beta_{AF}$, le vortex possèdera un centre AF.

Puisque nous ne pouvons trouver, de façon analytique, la valeur de β à laquelle le centre devient AF, nous nous sommes tournés vers le calcul numérique. Pour un κ fixe, nous avons résolu les équations (3.14)-(3.16) en faisant varier β jusqu'à temps qu'un paramètre d'ordre AF non-nul apparaisse. Nous nous sommes aperçus que β_{AF} dépendait de κ ainsi que du nombre d'enroulement n . Les résultats pour $n = 1$ jusqu'à $n = 5$, avec $\alpha = \delta = 1$, sont présentés à la FIG. 3-5. Il est intéressant de

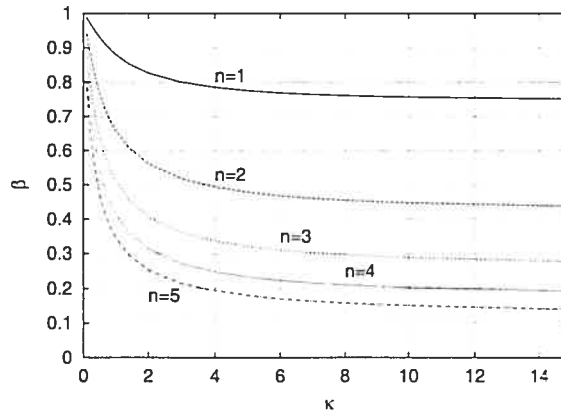


FIG. 3-5 - β_{AF} pour des enroulements $n = 1$ à $n = 5$. Les paramètres α et δ sont égales à 1.

noter que pour $\kappa = 0$, $\beta_{AF} = 1$, et ce pour toute valeur du nombre d'enroulement. Ceci peut se comprendre en regardant la densité d'énergie libre (3.13) lorsque $\kappa = 0$,

$$F(n) = \frac{1}{2} \int s ds d\theta \left\{ \varphi'^2 + \frac{n^2}{s^2} \varphi^2 + \eta'^2 \right\}.$$

Puisque les équations du mouvement (3.14)-(3.16) sont découplées pour $\kappa = 0$, on en

conclut que $F(n)\big|_{\eta=0}$ est toujours plus petit que $F(n)\big|_{\eta\neq 0}$. Ainsi, l'apparition d'un paramètre d'ordre AF n'est jamais favorisée, et ce pour toute valeur de $\beta < 1$. Or, nous avons vu au paragraphe précédent qu'à $\beta = 1$, un centre AF doit nécessairement apparaître¹⁵. Ainsi, à $\kappa = 0$, $\beta_{AF} = 1$. À l'opposé, pour $\kappa \gg 1$, β_{AF} semble atteindre des valeurs asymptotiques¹⁶. Nous avons constaté que la relation suivante, trouvée empiriquement et basée sur aucune théorie physique, donnait approximativement les dites valeurs limites :

$$\beta_{AF}(\kappa \gg 1) \approx 0.747 - 0.319 \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}},$$

où n est le nombre d'enroulement. Cette relation semble un peu mystérieuse, et, malheureusement, le temps nous manque pour tenter d'y amener une quelconque explication.

3.6 Prédications du modèle SO(5)

Au début des années 90, des expériences de diffusions de neutrons sur le $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ (voir entre autres [46]) ont montré un pic de résonance entre 25 et 41 meV apparaissant dans la section efficace des neutrons lorsque le matériau est dans la phase SC. Il a été noté que l'intensité du pic dépendait du dopage et disparaissait à $T = T_c$. Zhang et Demler [47] ont postulé que ce pic de résonance résultait de la création de bosons de Goldstone approximatifs, dû à la brisure spontanée de la symétrie U(1) dans la phase SC. La théorie SO(5) et le concept de superspin permettent d'expliquer la nature de ces excitations. En effet, dans la phase SC, lorsque la symétrie U(1) de l'état fondamental est brisée spontanément, le champ de jauge acquiert une masse (même scénario discuté dans la section 2.5). Or, l'état

¹⁵À cette valeur, le potentiel est de symétrie SO(5) et aucune phase n'est favorisée.

¹⁶Pour $n = 1$, nous trouvons une valeur de 0.7470, compatible avec celle de 0.7455 mentionnée dans [42].

fondamental SC du modèle SO(5) possède toujours une symétrie SO(3) non-brisée due à la partie AF du superspin. Il en résulte donc, par le théorème de Goldstone, en la création de trois bosons de Goldstone. Cependant, puisque la symétrie SO(5) n'est qu'approximative, ces bosons posséderont une masse. L'observation du pic de résonance est une conséquence directe de la symétrie SO(3) du superspin qui reste intacte dans la phase SC.

Puisque les concepts présentés ici (les mêmes que dans la section 2.5) sont beaucoup plus facile à traiter en usant des techniques de la théorie des champs plutôt que ceux de la matière condensée, nous utiliserons un lagrangien relativiste issu de l'énergie libre (3.1) du modèle SO(5). L'ajout des aspects temporel et relativiste dans cette analyse n'affectera pas nos conclusions lorsque nous retournerons à une vision plus *matière condensée*. Nous prendrons donc un lagrangien de la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ |D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\eta})^2 + a_1^2 \phi^2 + a_2^2 \boldsymbol{\eta}^2 - \frac{b_1}{2} \phi^4 - \frac{b_2}{2} \boldsymbol{\eta}^4 - b_3 \phi^2 \boldsymbol{\eta}^2 \right\} \quad (3.18)$$

où la plupart des constantes ont été omises afin de simplifier les calculs. Puisque le pic de résonance est détecté dans les SC haute température, il est tout naturel de prendre l'état fondamental SC. Dans ce cas, le potentiel est minimisé pour $|\phi| = v$, $\boldsymbol{\eta} = 0$ et $A_\mu = 0$. On développe alors le lagrangien (3.18) autour de ces minimums

$$\phi(x_\mu) = [v + f(x_\mu)] e^{i\theta(x_\mu)}, \quad \boldsymbol{\eta}(x_\mu) = \mathbf{n}(x_\mu),$$

et après avoir laissé tomber les termes supérieurs aux termes quadratiques, le lagrangien (3.18) devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu f)^2 - 2a_1^2 f^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + e^2 v^2 A_\mu^2 + (\partial_\mu \mathbf{n})^2 - a_1^2 (\alpha - \beta) \mathbf{n}^2 \right\} \quad (3.19)$$

où le champ θ a été absorbé par une redéfinition du champ de jauge (mécanisme de Higgs). On remarque alors que, comme dans le modèle SO(2), le champ f acquiert une masse $m_f = \sqrt{2}a_1$, de même que le champ de jauge A_μ avec $m_A = ev$. Ceci mène aux caractéristiques bien connues des SC. Cependant, et c'est la nouveauté

Symétrie de départ de l'état fondamental : SO(3)×U(1)			
	Groupe brisé	Symétrie restante de l'état fond.	Boson de Goldstone créée
Phase SC	U(1) locale	SO(3) globale	3 bosons massifs π^i
Phase AF	SO(3) globale	SO(2)×U(1)	2 bosons sans masse (<i>spin-wave</i>) 2 bosons π^\pm massif

TAB. 3-2 – Les différentes excitations à basse énergie du modèle SO(5).

du modèle SO(5), le champ \mathbf{n} acquiert lui aussi une masse $m_n = a_1 \sqrt{\alpha - \beta}$, dû à l'invariance de l'état fondamental sous la symétrie SO(3). Les excitations quantiques du champ \mathbf{n} sont précisément les bosons de Goldstone approximatifs recherchés (Zhang les note par π^i avec $i = 1, 2, 3$). Découlant directement de la brisure de symétrie locale U(1) de l'état fondamental, on remarque que ces trois particules deviennent sans masse lorsque $\beta = \alpha$ ¹⁷, consistant avec le fait que lorsque la symétrie SO(5) est exacte, les bosons de Goldstone doivent être sans masse. De plus, elles doivent disparaître du spectre des excitations à basse énergie à T_c puisqu'à cette température la symétrie U(1) est retrouvée. Finalement, à mesure que β croît, les excitations sont de moins en moins intenses, consistant avec le fait que l'énergie du pic de résonance décroît avec le dopage. Zhang interprète ces excitations comme le précurseur de l'AF dans la phase SC. Puisque la symétrie SO(3) n'est pas brisée dans la phase SC, on peut voir la SC comme un fluide de paires de Cooper (invariant sous rotation 3-D). À mesure que β augmente, ces excitations sont de moins en moins énergiques jusqu'à devenir nulle lorsque la phase AF est atteinte. Dans ce cas, le fluide se solidifie, brisant la symétrie SO(3) et les π^i disparaissent.

¹⁷Pour $\alpha \leq 1$, il y a une transition de phase à $\beta = \alpha$ et les bosons deviennent de masse nulle à cette valeur. Par contre, pour $\alpha > 1$, la transition survient à $\beta = \sqrt{\alpha} < \alpha$, de sorte que les particules restent massives lorsque survient la transition. Ceci pourrait être détecté (ou non) expérimentalement.

De la même façon, dans la phase AF, on peut montrer que la brisure de symétrie globale $SO(3)$ vers une symétrie $SO(2)$ mène à la création de deux bosons de Goldstone, les modes *spin-wave*. Le modèle $SO(5)$ introduit également, à cause de la symétrie $U(1)$ non-brisée du superspin, deux nouveaux bosons de Goldstone approximatifs, nommés les modes de charge π^\pm avec charge ± 2 , et précurseur de la SC dans la phase AF. Or, un des problèmes que le modèle $SO(5)$ a dû faire face dès son apparition provient justement de ces modes de charge. En effet, des expériences sur les oxyde SC montrent l'existence d'un large gap de charge de quelques eV dans l'état AF au demi-remplissage ainsi que des excitations *spin-wave* sans gap. L'état AF au demi-remplissage fait partie de ce qu'on appelle un isolant de Mott caractérisé par l'existence d'un gap d'énergie qui bloque le transport des charges (le gap de charge). Le modèle $SO(5)$, dû à sa symétrie $SO(5)$ approximative, introduit bel et bien un gap de charge, mais son énergie est incompatible avec l'expérience. Afin de remédier à ce problème, un nouveau modèle, appelé le modèle $SO(5)$ projeté, a été introduit [40] où le gap de charge est pris en compte correctement par une projection de Gutzwiller qui permet aux états doublement occupés d'être retirés. Cette projection n'affecte pas la physique de l'état SC. De plus, il a été montré que, malgré cette projection, la partie statique du modèle $SO(5)$ reste valide. Comme notre étude porte exclusivement sur la partie statique du modèle $SO(5)$, le modèle $SO(5)$ projeté a peu d'impact ici. Conséquemment, nous ne nous attarderons point sur ce sujet et nous allons passer, sans plus attendre, au cœur même de notre étude.

Chapitre 4

Les champs magnétiques critiques

Nous avons vu précédemment que l'une des caractéristiques les plus surprenantes des SC était l'expulsion complète (ou partielle) d'un champ magnétique de leur intérieur (l'effet Meissner). Ce phénomène ne se réalise que pour un champ magnétique inférieur à une certaine valeur au-delà de laquelle le spécimen retourne dans sa phase normale, seule possibilité du modèle SO(2). Nous avons de plus introduit, au chapitre 2, les expressions de trois champs magnétiques critiques de la théorie GL, applicable selon la situation physique considérée. Le modèle SO(5), quant à lui, permet au système d'acquiescer une phase AF ou mixte, modifiant ainsi les possibilités de transitions causées par l'application d'un champ magnétique externe. En effet, il est maintenant possible de transiter vers la phase AF en appliquant un champ magnétique externe. Dépendant du «caractère AF» dans la phase SC, la valeur des champs magnétiques critiques variera en fonction du paramètre β .

L'analyse des champs magnétiques critiques H_c et H_{c2} nous permettra de découvrir quelques aspects fort intéressants et nouveaux que nous offre le modèle SO(5). En effet, et c'est là la conséquence la plus importante du modèle (et sur les oxydes SC si le modèle s'avérait effectivement applicable), la notion de SC de type I et de type II est altérée par l'ajout d'un paramètre d'ordre AF, comme nous allons le voir dans la troisième section de ce chapitre. Les résultats que nous allons présenter dans cette section sont entièrement nouveaux et constituent le sujet central de ce

mémoire.

Dans ce chapitre, trois champs magnétiques critiques mériteront notre attention. Nous débuterons en dérivant le champ thermodynamique critique H_c . Ensuite, il sera question de H_{c2} , le champs critique supérieur. Enfin, nous terminerons avec le champ critique inférieur H_{c1} , le champ magnétique minimal nécessaire à l'apparition des vortex. Une analyse et une discussion suivront après la dérivation de chaque expression, en soulignant les conséquences possibles sur les oxydes SC. Mentionnons ici qu'aucun champ magnétique critique n'est traité dans l'article original de Zhang, et seule une brève analyse est apportée dans [34] sans toutefois y inclure aucune justification mathématique. Une partie du travail composant ce chapitre a fait l'objet d'une publication [36]. Toutefois, ici, d'autres avenues seront parcourues dans lesquelles quelques idées nouvelles seront proposées.

4.1 Le champ H_c

Lorsqu'un champ magnétique externe \mathbf{H} , suffisamment fort, est appliqué à une certaine partie d'un matériau, le paramètre d'ordre SC $\hat{\phi}$ devient nul et la phase SC disparaît. De façon à minimiser l'énergie libre de Gibbs du système dans le modèle SO(5), un paramètre d'ordre AF non-nul doit apparaître dans la région considérée. En effet, $\hat{\phi}$ étant contraint à être zéro par le champ magnétique, le potentiel (3.2) sera minimisé pour $\hat{\eta} = a_2/\sqrt{b_2}$ (voir (3.6)). À l'équilibre thermodynamique, l'énergie potentielle négative de l'état AF¹ (relatif à l'état fondamental SC) est en compétition avec l'énergie magnétique positive $\mathbf{H}^2/8\pi$. L'égalité entre ces deux énergies nous

¹Dans le modèle GL, cette énergie est appelée l'énergie de condensation des paires de Cooper et est donnée par la différence des densités d'énergies libres des phase SC et normale, $f_s - f_n$. Dans le modèle SO(5), nous pouvons définir cette même énergie de condensation donnée par la différence des densités d'énergies libres des phase SC et AF à l'équilibre.

donnera la valeur du champ critique thermodynamique H_c . Ce champ magnétique induit donc une transition entre la phase SC et la phase AF. Afin de dériver une expression analytique pour le champ magnétique thermodynamique H_c , il est nécessaire d'introduire la densité d'énergie libre de Gibbs. Cette quantité est reliée à la densité d'énergie libre de Helmholtz $\hat{f}(h, T)$ par la transformation de Legendre

$$g(\mathbf{H}, T) = \hat{f}(h, T) - \frac{1}{4\pi} \hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{H}, \quad (4.1)$$

où \mathbf{H} est le champ magnétique appliqué et $\hat{\mathbf{h}}$, le champ magnétique microscopique. Notons que le second terme de l'équation (4.1) est la version microscopique de $(4\pi)^{-1}\mathbf{BH}$, puisque l'induction magnétique est définie par $\mathbf{B}(r) = \langle \mathbf{h}(r) \rangle$. Le champ magnétique H_c est alors défini comme la valeur nécessaire au champ magnétique appliqué pour égaler les densités d'énergies libre de Gibbs dans les phases SC et AF :

$$g_{sc}(H_c, T) = g_{af}(H_c, T).$$

Afin d'explicitier l'énergie libre de Gibbs dans la phase SC et AF, considérons un spécimen qui possède pour $x \rightarrow \infty$ une région SC et pour $x \rightarrow -\infty$, une région AF. Dans la région SC, le potentiel est minimisé lorsque le paramètre d'ordre SC prend la valeur $\hat{\phi} = v \equiv a_1/\sqrt{b_1}$. De plus, le champ magnétique microscopique (dû à l'effet Meissner) et le paramètre d'ordre AF sont tous deux contraints à être nuls : $\hat{\mathbf{h}} = 0$ et $\hat{\eta} = 0$. En substituant ces valeurs dans l'expression (3.1) pour la densité d'énergie libre de Helmholtz, la densité d'énergie libre de Gibbs (4.1) dans la phase SC devient à l'équilibre thermodynamique

$$g_{sc}(\mathbf{H}, T) \approx g(\hat{\mathbf{h}} = 0, T) = \hat{f}(T) = -\frac{a_1^4}{4b_1}. \quad (4.2)$$

Dans la région AF ($x \rightarrow -\infty$), le paramètre d'ordre SC devient nul et le potentiel est alors minimisé pour $\hat{\eta} = a_2/\sqrt{b_2}$, tandis que le champ magnétique microscopique devient égal au champ magnétique externe $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{H}$. En utilisant (3.1), la densité d'énergie libre de Gibbs dans la phase AF prend la forme

$$g_{af}(\mathbf{H}, T) = -\frac{a_2^4}{4b_2} - \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}. \quad (4.3)$$

En égalant les deux énergies libres de Gibbs, nous trouvons une expression pour le champ critique thermodynamique $H_c(\beta)$,

$$\frac{H_c^2(\beta)}{8\pi} = \frac{a_1^4}{4b_1} - \frac{a_2^4}{4b_2} \equiv \hat{f}_{sc} - \hat{f}_{af}.$$

La dernière égalité définit l'énergie de condensation dans le modèle SO(5), l'expression conventionnelle pour l'énergie de condensation étant retrouvée lorsque $a_2^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque $\beta = 0^2$. En introduisant les définitions pour β , α et δ , la dernière expression devient

$$H_c(\beta) = H_c \sqrt{1 - \beta^2 \delta / \alpha}, \quad (4.4)$$

où $H_c^2/8\pi = a_1^4/4b_1$ est l'expression conventionnelle (2.14) dans la théorie GL (bien sûr avec $b = b_1$). Notons que la dépendance explicite de β est montrée dans $H_c(\beta)$ afin de différencier cette quantité de son homologue H_c dans le modèle SO(2). Ainsi on s'assure, qu'à $\beta = 0$, on retrouve bien l'expression conventionnelle. $H_c(\beta)$ est montrée à la FIG. 4-1 pour différentes valeurs du paramètre α (pour $\delta = 1$ et $\kappa = 1$), à $T = 0$ (la dépendance en température se retrouvant dans H_c).

Procédons à quelques analyses afin de mieux décanter l'expression trouvée, que nous simplifierons en posant $\delta = 1$. Premièrement, l'équation (4.4) s'annule pour $\beta^2/\alpha = 1$. Cette valeur particulière des paramètres correspond à la transition de l'état SC vers un autre état fondamental, soit AF ou mixte. Ainsi, en l'absence de champ magnétique, le système transite vers l'état AF pour $\alpha \geq 1$ (FIG. 4-1 A et FIG. 4-1 B) et vers l'état mixte pour $\alpha < 1$ (FIG. 4-1 C). Comme le champ critique thermodynamique ne prend son sens que dans la phase SC, il semble tout naturel que celui-ci devienne nul lorsque les autres phases sont atteintes. Plus particulièrement, la FIG. 4-1 A montre le champ critique thermodynamique pour $\alpha = 1$. Dans ce cas, la transition vers la phase AF, à $H = 0$, s'effectue à $\beta = 1$. À $\beta = 0$, le champ critique est maximal et on se retrouve avec la valeur suggérée par la théorie GL. À mesure que β augmente, $H_c(\beta)$ diminue. Il est donc suffisant, pour détruire la phase

²Ainsi, lorsque $\beta = 0$, le modèle SO(5) redonne le modèle SO(2).

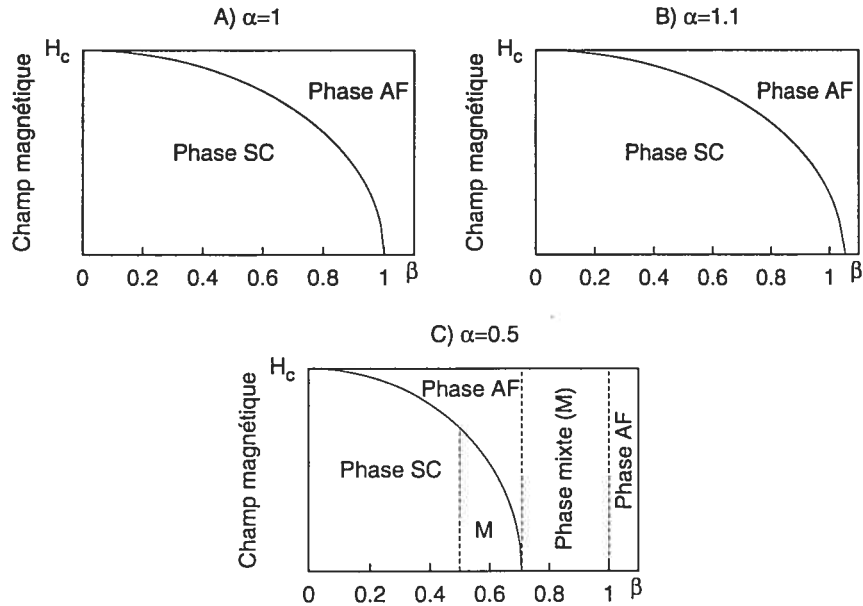


FIG. 4-1 – Valeur du champ magnétique critique $H_c(\beta)$ en fonction de β pour différentes valeurs de α ($\delta = 1$ et $\kappa = 1$) à $T = 0$.

SC et ainsi passer à une phase AF, d'appliquer un champ magnétique externe moins intense à mesure que β augmente. Ceci est logique puisque la différence d'énergie entre les deux états fondamentaux devient de moins en moins prononcée³. Notons également que la transition vers la phase AF est une transition de phase de premier ordre puisqu'il y a discontinuité entre l'énergie libre de Helmholtz de l'état SC et son homologue dans la phase AF, la différence étant proportionnelle au carré du champ critique. Cependant, à $\beta = 1$, lorsque la symétrie $SO(5)$ exacte est retrouvée, la transition est du deuxième ordre. On retrouve exactement le même scénario à la FIG. 4-1 B sauf qu'ici la transition vers l'état fondamental AF (à $H = 0$) se fait pour $\beta = 1.1$. La FIG. 4-1 C est plus intéressante, car avec $\alpha = 0.5$, il y a possibilité d'une phase mixte, entre la phase SC et AF. En l'absence de champ magnétique, il y a une transition de la phase SC à la phase mixte à $\beta = 0.5$ et une autre vers

³Selon le modèle $SO(5)$, à mesure que β croît, le processus de formation des paires d'électrons est de moins en moins énergitique.

la phase AF à $\beta = 1$. Si β se trouve entre 0 et 0.5, le comportement de $H_c(\beta)$ est le même que dans les deux cas précédent. De même, lorsque $0.5 \leq \beta \leq \sqrt{2}$, l'état fondamental est mixte et H_c définit également une transition du premier ordre entre la phase mixte et la phase AF. Par contre, entre $\sqrt{2} \leq \beta \leq 1$, l'état fondamental est toujours mixte, mais H_c n'est plus défini. Ceci peut s'expliquer en notant que pour $0.5 \leq \beta \leq \sqrt{2}$, la phase mixte possède un «caractère» plus *SC* que *AF*⁴, tandis que pour $\sqrt{2} \leq \beta \leq 1$, le contraire prévaut. Ainsi, le «caractère» *SC* n'est plus assez présent pour qu'il y ait effet Meissner de sorte que le champ magnétique peut pénétrer complètement le matériau⁵. Il en résulte que, pour $\sqrt{2} \leq \beta \leq 1$, la phase est mixte pour toute valeur de \mathbf{H} .

En terme du potentiel chimique μ , (4.4) s'écrit à l'aide de (3.8)

$$H_c(\mu) = H_c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{8m^*}{\hbar^2} \xi^2 \chi(\mu^2 - \mu_c^2)\right)^2}. \quad (4.5)$$

Dans leur article sur les vortex à centre AF [34], les auteurs trouvent pour le champ thermodynamique critique l'expression $H_c \propto \sqrt{\mu - \mu_c}$ qui n'est manifestement pas de la forme (4.5), même dans la limite $\mu \approx \mu_c$. Malheureusement, aucune justification mathématique n'est apportée à leur expression. Cependant, par la rigueur mathématique portée à la dérivation de notre expression, tout porte à croire à une erreur de leur part.

4.2 Le champ H_{c2}

Le deuxième champ magnétique qui nous intéressera se nomme le champ critique supérieur H_{c2} . Lorsque nous avons dérivé l'expression pour H_c , nous avons

⁴Le minimum global du potentiel se trouvant plus près de l'axe $\hat{\phi}$ que de l'axe $\hat{\eta}$.

⁵Une analyse de la brisure spontanée de symétrie dans la phase mixte pourrait confirmer ce fait.

supposé que le SC était à l'équilibre, c'est-à-dire que les termes gradients étaient nuls et que l'effet Meissner était complet. Or, il existe des situations stables où cela n'est pas le cas, par exemple lorsqu'il y a présence de vortex. Ainsi, nous devons utiliser les équations du mouvement de la théorie afin de trouver une expression pour le champ magnétique maximal que peut supporter un SC. Pour ce faire, notons premièrement que près de H_{c2} , le système est assez près de la transition pour supposer le paramètre d'ordre SC suffisamment faible de façon à pouvoir linéariser, autour de $\hat{\phi} = 0$, l'équation du mouvement (3.3) pour $\hat{\phi}$. Ceci donne

$$\frac{1}{m^*} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*\hat{A}}{c} \right)^2 \hat{\phi} - a_1^2 \hat{\phi} + b_3 \hat{\eta}^2 \hat{\phi} = 0. \quad (4.6)$$

où l'on prit soin de garder le terme en $\hat{\eta}^2$ (non-linéaire en $\hat{\eta}$, mais linéaire en $\hat{\phi}$). De plus, on peut montrer que le champ microscopique $\hat{\mathbf{h}}$ peut être pris égal, au premier ordre, au champ appliqué \mathbf{H} . Ainsi, on peut choisir la jauge de Landau $\mathbf{H} = H\hat{z}$ de sorte que $\hat{\mathbf{A}} = \hat{A}\hat{y} = Hx$. Finalement, on suppose que la transition s'effectue vers la phase AF. Le système est alors minimisé pour $\hat{\eta} = a_2/\sqrt{b_2}$. En tenant compte de ces considérations, l'équation du mouvement linéarisée (4.6) devient, après avoir explicité le terme au carré,

$$\frac{\hbar^2}{m^*} \left[-\nabla^2 + \frac{2ie^*Hx}{c\hbar} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{e^*Hx}{c\hbar} \right)^2 \right] \hat{\phi} - a_1^2 \hat{\phi} + \frac{b_3}{b_2} a_2^2 \hat{\phi} = 0. \quad (4.7)$$

Comme le potentiel efficace⁶ ne dépend que de x , on pose une solution de la forme

$$\hat{\phi} = e^{ik_y y} e^{ik_z z} v f(x),$$

et avec quelques réarrangements, l'équation (4.7) devient

$$\frac{\hbar^2}{m^* a_1^2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \left(k_y - \frac{e^*Hx}{c\hbar} \right)^2 + k_z^2 \right] f(x) - f(x) + \beta\delta f(x) = 0.$$

On effectue alors le changement de variable $x = \lambda s$ de sorte que la précédente équation s'écrit maintenant

$$\frac{1}{\kappa^2} \left[-\frac{d^2}{ds^2} + \left(\lambda k_y - \frac{e^*H\lambda^2 s}{c\hbar} \right)^2 + \lambda^2 k_z^2 \right] f(s) = (1 - \beta\delta) f(s).$$

⁶Les deux premiers termes dans l'expression entre crochet.

Cette dernière se comprend mieux si on la met sous la forme

$$-f'' + \left(\frac{e^* H \lambda^2}{c \hbar} \right)^2 (s - s_0)^2 f = (\kappa^2(1 - \beta\delta) - \lambda^2 k_z^2) f. \quad (4.8)$$

avec $s_0 = \frac{\lambda k_y c \hbar}{e^* H \lambda^2}$ une constante. Cette équation est de la même forme que l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} f'' + \frac{1}{2} k (s - s_0)^2 = E f,$$

dont les énergies des états liés prennent la forme $E = \hbar\omega(n + 1/2)$ avec $\omega = \sqrt{k/m^*}$ et $n \in 0, 1, 2, \dots$. En multipliant par $\hbar^2/2m^*$ l'équation (4.8), on trouve

$$\omega = \frac{e^* H \lambda^2}{cm^*},$$

et de l'expression pour les énergies de l'oscillateur harmonique, on en déduit la relation

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} (\kappa^2(1 - \beta\delta) - \lambda^2 k_z^2) = \frac{\hbar e^* H \lambda^2}{cm^*} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

La condition $E = \hbar\omega(n + 1/2)$ n'impose pas une quantification de l'énergie libre (celle-ci ne pouvant pas être discrète), mais mène plutôt à une expression quantifiée pour le champ magnétique H ,

$$H_n = \frac{c \hbar}{2e^* \lambda^2} \left(\frac{\kappa^2(1 - \beta\delta) - \lambda^2 k_z^2}{n + 1/2} \right).$$

La plus grande valeur possible pour H_n est atteinte lorsque $n = 0$ et $k_z = 0$. Ces conditions définissent évidemment le champ critique supérieur H_{c2}

$$H_{c2}(\beta) = \frac{c \hbar}{e^* \lambda^2} \kappa^2(1 - \beta\delta),$$

qui à l'aide de la définition (2.15) peut s'écrire sous la forme

$$H_{c2}(\beta) = \frac{\Phi}{2\pi\xi^2} (1 - \beta\delta) = \sqrt{2}\kappa H_c (1 - \beta\delta). \quad (4.9)$$

La dernière égalité montre le lien entre $H_{c2}(\beta)$ et le champ critique thermodynamique H_c (et non pas $H_c(\beta)$). Encore une fois ici, l'expression se ramène à celle du modèle

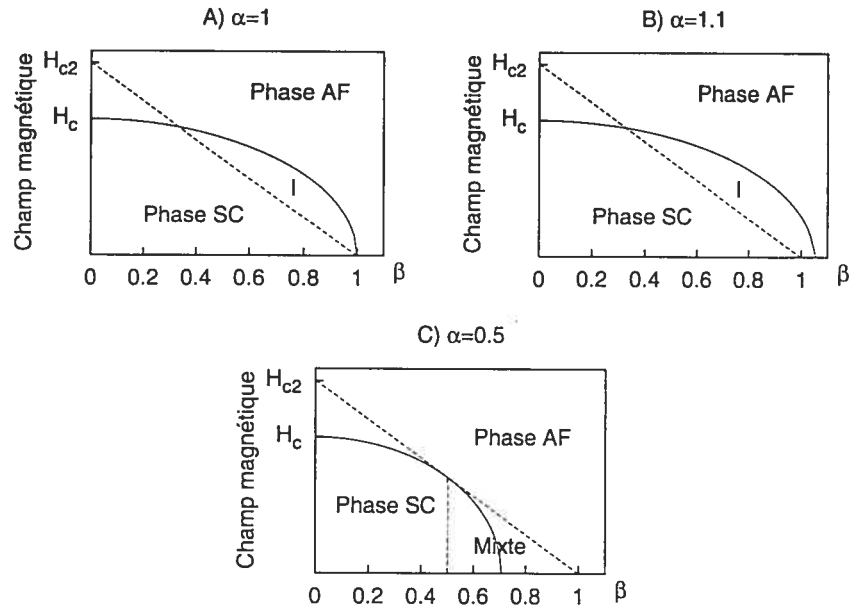


FIG. 4-2 – Valeurs des champs magnétiques critiques $H_c(\beta)$ et $H_{c2}(\beta)$ en fonction de β pour différentes valeurs de α ($\delta = 1$ et $\kappa = 1$) à $T = 0$.

SO(2) lorsque $\beta = 0$. L'expression (4.9) est représentée à la FIG. 4-2 et juxtaposée à l'expression pour le champ critique thermodynamique (FIG. 4-1) pour différentes valeurs de α (toujours pour $\delta = 1$ et $\kappa = 1$) à $T = 0$.

La FIG. 4-2 A montre les deux champs magnétiques pour $\alpha = 1$. Dans ce cas, $H_{c2}(\beta)$ est supérieur à $H_c(\beta)$ pour β proche de 0 et le premier tient lieu de champ magnétique maximal que peut supporter le SC. De plus, la transition vers la phase AF est de deuxième ordre puisque $\phi = 0$ à $H = H_{c2}(\beta)$. Par contre, lorsque β atteint une certaine valeur (autour de 0.3), c'est $H_c(\beta)$ qui devient supérieur à $H_{c2}(\beta)$ ⁷, et une phase intermédiaire (I) apparaît. Celle-ci survient lorsque l'on diminue le champ magnétique externe jusqu'à la valeur $H_c(\beta)$. À cette valeur, la phase SC n'apparaît pas immédiatement, mais ils se forment des régions distinctes SC et

⁷Ce fait aura des conséquences très importantes sur le comportement des SC que nous discuterons plus en détail à la prochaine section.

AF (processus de nucléation). Cette hétérogénéité disparaît complètement lorsque le champ magnétique externe diminue pour atteindre la valeur $H_{c2}(\beta)$. La FIG. 4-2B montre la même situation, sauf qu'entre $1 < \beta < 1.1$, le champ $H_{c2}(\beta)$ n'est plus déterminé, puisqu'il ne dépend pas de α . Cette situation est très intéressante, puisqu'elle mène à un comportement assez exotique dans la région $1 < \beta < 1.1$. En effet, la phase intermédiaire (I) doit disparaître lorsque l'on diminue H jusqu'à $H_{c2}(\beta)$. Cependant, ici, $H_{c2}(\beta)$ n'est plus défini de sorte que la phase intermédiaire persiste, même à $H = 0$. Par contre, en l'absence de champ magnétique (toujours à $T = 0$), le matériau est SC et ce jusqu'à ce qu'on augmente H de 0 à $H_c(\beta)$, où la transition vers la phase AF s'effectue. Finalement, la FIG. 4-2C montre les champs $H_c(\beta)$ et $H_{c2}(\beta)$ pour $\alpha = 0.5$. Dans cette situation, la phase intermédiaire n'existe pas de sorte que, pour toute valeur de β , le champ $H_{c2}(\beta)$ est supérieur au champ $H_c(\beta)$ et ce jusqu'à la transition AF ($\beta = 1$). On remarque que $H_c(\beta) = H_{c2}(\beta)$ à $\beta = 0.5$, c'est-à-dire à la frontière entre l'état SC et l'état mixte, mais ceci est juste une coïncidence (à cause que nous avons pris $\kappa = 1$). De plus, dans la phase mixte ($0.5 < \beta < 1$), il existe maintenant un champ magnétique critique produisant une transition vers la phase AF. Ce champ devient évidemment nul lorsque l'état AF apparaît à $\beta = 1$.

Encore une fois ici, on peut exprimer (4.9) en fonction du potentiel chimique μ à l'aide de (3.8) ce qui donne

$$H_{c2}(\mu) = \frac{8m^*\Phi\chi}{2\pi\hbar^2}(\mu^2 - \mu_c^2).$$

ce qui la même expression citée par [34]. C'est tout de même étrange que les auteurs de l'article trouvent une expression correcte pour $H_{c2}(\beta)$ et une erronée pour $H_c(\beta)$.

4.3 Type I et type II revisités

Il est nécessaire ici, afin de mener à bien notre analyse, de revenir sur quelques notions de la théorie GL et plus particulièrement sur la signification des champs magnétiques critiques H_c et H_{c2} . Nous avons mentionné au chapitre 2 que, pour un SC conventionnel de type II, H_{c2} est plus grand que H_c de sorte que le champ magnétique maximal supporté par un SC est H_{c2} . Comme nous l'avons vu à la section précédente, cette situation arrive également dans le modèle SO(5) pour certaines valeurs de β et de α (voir FIG. 4-2). Lorsque le champ magnétique extérieur décroît et atteint H_{c2} , le matériau commence une nucléation, c'est-à-dire que des régions isolées SC commencent à apparaître : c'est la création du réseau de vortex. À mesure que le champ externe diminue, le flux total traversant le matériau diminue jusqu'à disparaître lorsque $H = H_{c1}$. En-dessous de cette valeur, l'effet Meissner est complet. Ce comportement est représenté à la FIG. 4-3 B où l'on montre l'induction magnétique B en fonction du champ magnétique extérieur appliqué H pour un SC de type II. Nous avons également vu que pour un SC de type I, H_c est plus grand que H_{c2} ,

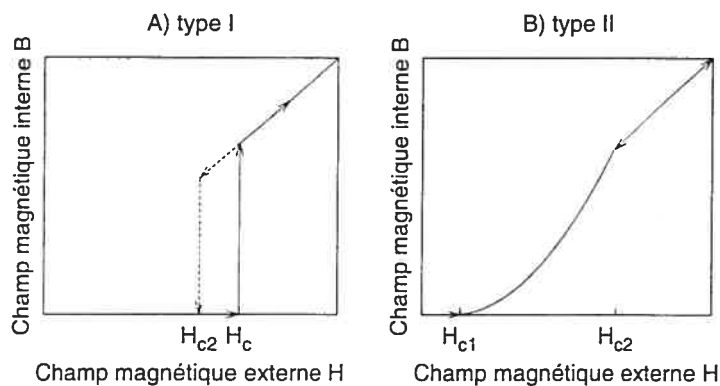


FIG. 4-3 – Induction magnétique B en fonction du champ magnétique externe H pour A) un SC de type I et pour B) un SC de type II. Les flèches indiquent le sens de l'augmentation du champ H .

de sorte que la phase normale apparaît pour $H > H_c$. Par contre, la phase SC avec

effet Meissner complet apparaît pour $\mathbf{H} < H_{c2}$ (phénomène de *supercooling* que nous avons vu à la section 2.4). Entre ces deux valeurs du champ magnétique critique, il apparaît une phase intermédiaire composée de régions alternées SC et normale. Cette situation arrive également dans le modèle SO(5) pour certaines valeurs des paramètres β et α (voir FIG. 4-2, région I). Cependant, ici, la phase intermédiaire devrait se composer de régions alternées SC et AF. Ce comportement est représenté à la FIG. 4-3 A.

À la lumière de ce qui a été dit au paragraphe précédent, introduisons la définition suivante :

Définition 1 *Un SC sera dit de **type I** lorsque la condition $H_{c2} < H_c$ est satisfaite et ce, peu importe le modèle théorique considéré. De la même façon, un SC sera dit de **type II** lorsque la condition $H_{c2} > H_c$ est satisfaite.*

Cette définition est bien sûr tout à fait en accord avec la théorie GL : nous ne faisons que la généraliser ici afin d'inclure tous les modèles susceptibles de décrire correctement le comportement d'un SC. En particulier, dans le modèle SO(5), ces deux types de régions existent bel et bien et dépendent des paramètres β et α . En effet, il existe une région bien définie dans les FIG. 4-2 où $H_{c2} > H_c$ et une région bien définie où $H_{c2} < H_c$. La frontière entre ces deux régions est obtenue par l'égalité entre les champs critiques $H_{c2}(\beta)$ et $H_c(\beta)$ et donne comme résultat :

$$\kappa_c(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \delta / \alpha}}{1 - \beta \delta}. \quad (4.10)$$

Dans la théorie GL, la frontière séparant les deux types de SC est donnée par la valeur particulière $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$: la frontière est donc un point. Dans le modèle SO(5), la frontière est plutôt une courbe dans le plan κ - β donné par (4.10). L'expression définit donc, en fonction de β , un paramètre GL critique $\kappa_c(\beta)$ tel que pour un

β fixé, $\kappa > \kappa_c$ détermine la région $H_{c2} > H_c$ (type II) et pour $\kappa < \kappa_c$, la région $H_{c2} < H_c$ (type I). De plus, comme on s'y attendait, cette même expression se ramène à $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$ lorsque $\beta = 0$, c'est-à-dire la valeur critique du modèle SO(2). Le fait que la frontière entre les type I et les type II ne soit plus aussi triviale aura des conséquences profondes sur le comportement des SC décrit par le modèle SO(5).

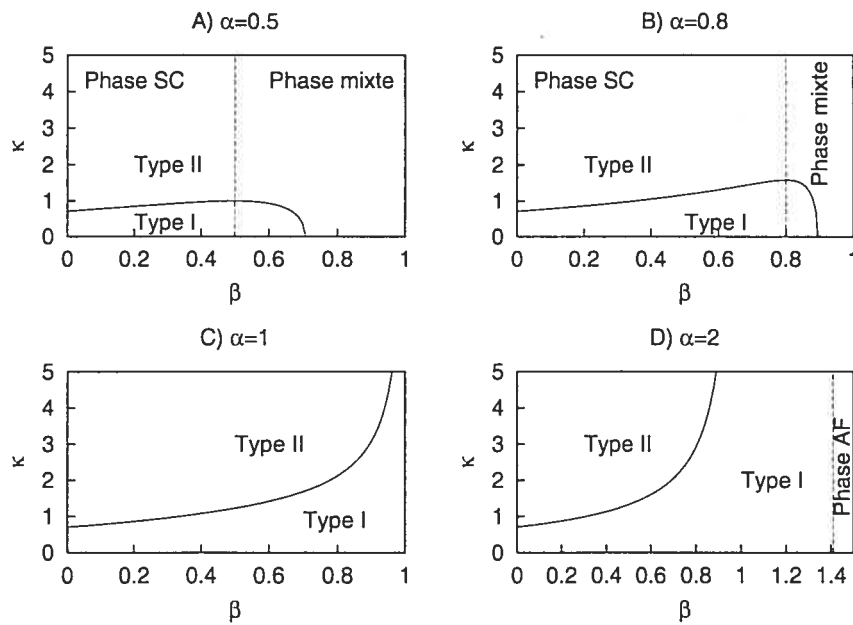


FIG. 4-4 - $\kappa_c(\beta)$ en fonction de β pour différentes valeurs de α ($\delta = 1$).

L'expression (4.10) est montrée à la FIG. 4-4 en fonction de β pour différentes valeurs de α (avec $\delta = 1$). La première analyse pertinente à effectuer est de trouver les extremums de la fonction (4.10). En posant $\delta = 1$ et en différenciant par rapport à β , on trouve que les seuls extremums possibles sont situés à $\beta = \alpha$, de sorte que κ_c prend la valeur,

$$\kappa_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}. \quad (4.11)$$

On en conclut qu'un maximum existe si et seulement si $\alpha < 1$. Dans cette situation (FIG. 4-4 A et FIG. 4-4 B), la fonction est monotone croissante jusqu'à $\beta = \alpha$ et décroissante pour $\beta > \alpha$. À $\beta = \alpha$, l'état fondamental devient l'état mixte tandis que la fonction (4.10) n'est plus définie pour $\beta > \sqrt{\alpha/\delta}$. Pour $\alpha > 1$, $\kappa_c(\beta)$ est une

fonction monotone croissante, divergeant lorsque $\beta \rightarrow 1$. Ainsi, pour tout $\kappa > 1/\sqrt{2}$, il existe un $\beta_c(\kappa)$ tel que le SC passe d'un comportement de type II à celui de type I, cette tendance diminuant à mesure que κ augmente.

En pratique, il est plus facile de varier le paramètre β (via le potentiel chimique μ) que le paramètre GL κ dans un matériau. L'inversion de (4.10) définit un β_c , en fonction de κ , plus utile pour l'analyse expérimentale donnée par l'expression

$$\beta_c = \frac{2\kappa^2\delta - \sqrt{2\kappa^2(\delta^2 - \delta/\alpha) + \delta/\alpha}}{2\kappa^2\delta^2 + \delta/\alpha}. \quad (4.12)$$

Cette dernière se ramène à

$$\beta_c = \frac{2\kappa^2 - 1}{2\kappa^2 + 1}$$

lorsque $\alpha = \delta = 1$. En considérant donc un SC avec une valeur de κ fixe, plusieurs comportements différents s'en dégagent. Pour $\alpha = 1$ (FIG. 4-4 C) on trouve que pour $\beta > \beta_c$ le matériau montrera un comportement de type I. De même, pour de haute valeur de κ , il faudra que β approche de plus en plus près de 1 pour qu'un comportement de type I puisse se montrer. Pour $\alpha = 2$ (FIG. 4-4 D), la zone de type I est beaucoup plus prononcée et il suffit d'un β moindre pour accéder à cette zone. De l'autre côté, pour $\alpha = 0.5$ (FIG. 4-4 A) et $\alpha = 0.8$ (FIG. 4-4 B), la zone de type I est presque inexistante. En effet, pour de grande valeur de κ , le SC reste de type II, tandis qu'il faudrait des valeurs de κ près de 1 pour apercevoir un comportement de type I.

Cette analyse est très importante lorsque l'on veut confronter ces résultats avec l'expérience. En effet, la détection de la région de type I est étroitement liée avec la valeur du paramètre α . Si, par exemple, un matériau possède une phase mixte ($\alpha < 1$) entre la phase SC haute température (un SC avec $\kappa \gg 1$) et la phase AF, il ne devrait pas y avoir de transition vers un comportement de type I à mesure que le paramètre β augmente. Ceci pourrait confirmer le fait qu'aucune expérience à ce jour n'a montré un comportement de type I pour un SC haute température. Par

contre, ceci n'exclut pas la possibilité pour un SC de transiter vers un comportement de type I pour des valeurs de β près de β_c . La détection d'une telle situation semble très ardue puisqu'il est nécessaire d'atteindre une grande précision au niveau du dopage, chose difficile présentement au niveau expérimental.

4.4 Le champ H_{c1}

Le dernier champ magnétique qui nous intéressera dans ce chapitre est le champ critique inférieur H_{c1} ⁸. Il est défini comme le champ minimal nécessaire à l'apparition d'un réseau de vortex dans le spécimen. En effet, à \mathbf{H} faible, l'exclusion totale du champ magnétique est favorisée dans le SC : l'effet Meissner est alors complet. Par contre, lorsque le champ magnétique appliqué dépasse H_{c1} , le système favorise la formation d'un réseau de vortex ; l'énergie libre de Gibbs est alors plus petite que son homologue sans vortex. À H_{c1} précisément, aucun état n'est favorisé par rapport à l'autre, et les énergies libres de Gibbs avec ou sans vortex sont égaux.

$$G_{sc}(\mathbf{H}, T) = G_{vo}(\mathbf{H}, T) \quad (4.13)$$

Puisque $G = F - \mathbf{H} \cdot \int \hat{\mathbf{h}} d^3x$ et dû à l'effet Meissner complet, l'énergie libre de Gibbs sans vortex est tout simplement

$$G_{sc}(\mathbf{H}, T) = F_{sc},$$

où F_{sc} est l'énergie libre de Helmholtz. Lorsque le premier vortex apparaît, l'énergie libre de Helmholtz augmente de $\epsilon_1 L$ où ϵ_1 est l'énergie par unité de longueur transportée par un vortex et L , la longueur du vortex dans le SC. Ainsi, l'énergie libre de Gibbs devient à H_{c1}

$$G_{vo} = F_{sc} + \epsilon_1 L - \frac{H_{c1}}{4\pi} \int \hat{\mathbf{h}} d^3x = F_{sc} + \epsilon_1 L - \frac{H_{c1} \Phi_0 L}{4\pi}$$

⁸La discussion qui suivra est largement inspirée de [28].

où Φ_0 est le quantum de flux transporté par le vortex. L'égalité (4.13) sera alors satisfaite pour

$$H_{c1}(\beta) = \frac{4\pi\epsilon_1(\beta)}{\Phi_0}, \quad (4.14)$$

expression qui définit le champ critique inférieur. Malheureusement, comme nous ne connaissons pas de façon analytique l'énergie d'un vortex, nous devons recourir à une analyse numérique pour déterminer l'expression (4.14). Par contre, il est évident que l'expression dépendra du paramètre β puisque l'énergie du vortex (3.13) dépend explicitement du paramètre d'ordre AF. Nous avons inclus, à la FIG. 4-5, outre la valeur des champs critiques $H_c(\beta)$ et $H_{c2}(\beta)$, le calcul numérique de $H_{c1}(\beta)$ pour les mêmes valeurs de α et de δ rencontrées précédemment.

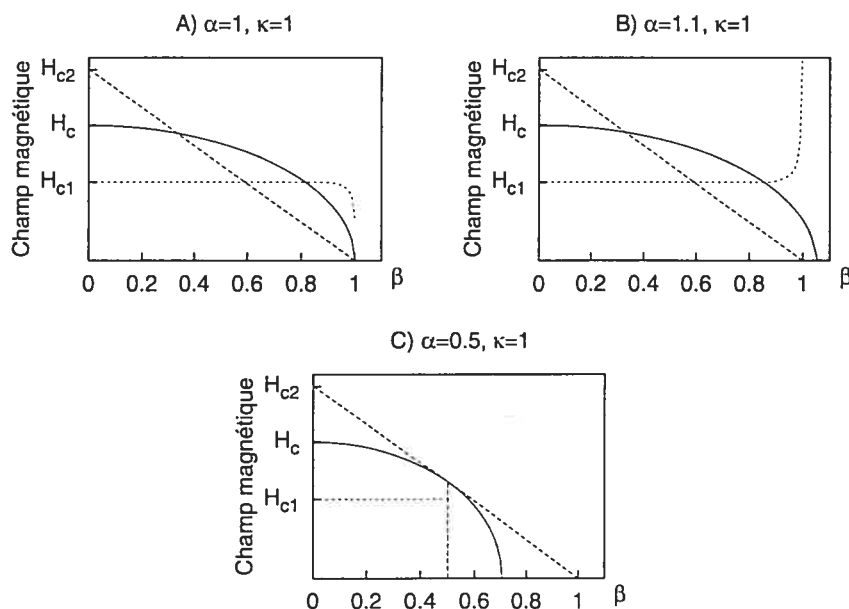


FIG. 4-5 – Champ magnétique critique H_{c1} pour différentes valeurs de α ($\delta = 1$ et $\kappa = 1$) à $T = 0$.

Rappelons que dans le modèle SO(2), le champ critique H_{c1} ne prend son sens que dans le cas des SC de type II, puisque ceux-ci favorisent un réseau de vortex stable. Dans cette situation, nous avons toujours $H_{c1} < H_c < H_{c2}$. Les vortex ne peuvent exister dans les SC de type I de sorte que H_{c1} n'a pas lieu d'être. Par

contre, vu la FIG. 2-3, H_{c1} est toujours bien défini mathématiquement et nous avons $H_{c2} < H_c < H_{c1}$. Dans le modèle SO(5), cette distinction n'est plus tout à fait valide, ce qui porte un peu d'ombre à l'analyse. La FIG. 4-5 A montre la valeur des trois champs critiques, à $T = 0$, pour $\alpha = \delta = \kappa = 1$. À $\beta = 0$, nous avons bien $H_{c1} < H_c < H_{c2}$, indiquant que nous retrouvons bel et bien le cas conventionnel d'un SC de type II. Cette situation reste valide jusqu'à $\beta \approx 0.35$ où H_c devient plus grand que H_{c2} . Nous sommes donc en présence d'un SC de type I et on devrait avoir H_{c1} plus grand que H_c , ce qui n'est manifestement pas le cas ici⁹. À $\beta \approx 0.6$, H_{c2} devient plus petit que H_{c1} , mais le comportement reste le même. La situation du modèle SO(2) pour les SC de type I est atteinte lorsque $\beta > 0.85$ où l'on retrouve, dans cette région, $H_{c2} < H_c < H_{c1}$. Notons que H_{c1} varie de sa valeur conventionnelle (à $\beta = 0$) que lorsqu'un paramètre d'ordre AF apparaît au centre du vortex, c'est-à-dire lorsque $\beta \geq \beta_{AF}$. Pour des valeurs de β plus grande de β_{AF} , H_{c1} dépendra des paramètres α et β (et de δ possiblement). Notons, pour finir, que H_{c1} n'est pas nul à $\beta = 1$ (L'arrêt brusque de H_{c1} à $\beta = 1$ n'est pas dû à une erreur numérique). La FIG. 4-5 B montre sensiblement le même scénario pour $\alpha = 1.1$. Par contre, H_{c1} n'est plus défini pour $\alpha > 1$, mais ne diverge pas à $\alpha = 1$ comme le laisse croire la figure ($H_{c1} \approx 1.74$ à $\beta = 1$). Le dernier cas, FIG. 4-5 C, montre les champs critiques lorsque $\alpha = 0.5$. Dans le cas où le système est dans l'état fondamental SC ($0 < \beta < 0.5$), le comportement semble des plus normal. En effet, nous avons $H_{c1} < H_c < H_{c2}$, ce qui définit bien un SC de type II. Lorsque l'état fondamental mixte est atteint, H_{c1} n'est plus déterminé pour la simple et bonne raison que les *ansätze* utilisés pour le vortex SC ne sont valides que lorsque l'état fondamental est SC. Afin de prolonger H_{c1} au-delà de l'état fondamental SC, il faudrait refaire les calculs en choisissant un état fondamental mixte.

En conclusion, ce chapitre a montré que la notion de champ magnétique critique

⁹Les vortex sont-ils encore stables dans cette région, même si $H_c > H_{c2}$? La question reste malheureusement sans réponse au niveau de cette étude.

existe bel et bien dans le modèle $SO(5)$. Les expressions que nous avons trouvées mènent à une variété de nouveaux comportements possibles pour un SC plongé dans un champ magnétique externe. La conséquence la plus intéressante est sans aucun doute la possibilité qu'un SC, pour lequel $\kappa > 1/\sqrt{2}$, puisse se comporter comme un SC de type I. La frontière entre les type I et les type II dans le modèle $SO(5)$ est délimitée par (4.10), contrairement à $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$ dans le modèle $SO(2)$. Nous verrons, au prochain chapitre, que l'étude de l'énergie de surface dans le cadre du modèle $SO(5)$ confirme les résultats obtenus dans ce chapitre.

Chapitre 5

L'énergie de surface

Il est instructif d'étudier, parallèlement aux champs magnétiques critiques, l'énergie de surface entre une région SC et une région AF dans le cadre du modèle SO(5). Cet exercice nous permettra de confirmer les résultats et observations obtenus au chapitre précédent. En effet, nous avons mentionné au chapitre 2 que l'étude de l'énergie de surface dans le cadre de la théorie GL permet d'obtenir la valeur critique du paramètre GL κ qui sépare les SC de type I des SC de type II. De même ici, les résultats analytiques et numériques de l'énergie de surface du modèle SO(5) permettront de confirmer la courbe critique dans le plan κ - β , celle délimitant les régions de type I et de type II (FIG. 4-4 C), trouvée à l'aide des champs magnétique critiques $H_c(\beta)$ et $H_{c2}(\beta)$.

Nous débuterons ce chapitre en dérivant l'expression de l'énergie de surface après avoir argumenté qualitativement des valeurs possibles que peut prendre celle-ci en fonction du paramètre β . Nous exposerons ensuite quelques résultats analytiques suivie de la présentation des résultats numériques. Nous finirons avec une brève mention sur l'étude de l'énergie des vortex. Les résultats de ce chapitre ont été publiés, en partie, dans [36].

5.1 Dérivation des équations

De façon qualitative, l'énergie de surface est définie comme l'énergie libre de Gibbs par unité d'aire d'un matériau SC de longueur infini dont une des extrémités est plongée dans le champ magnétique critique H_c . Dans le modèle SO(2), l'application d'un champ H_c produit une transition vers la phase normale. Ainsi la situation physique à considérer dans ce cas est constituée d'une phase normale à une extrémité (que nous situerons à $x \rightarrow -\infty$) et une phase SC à l'autre extrémité (située à $x \rightarrow \infty$). Comme le champ magnétique et le paramètre d'ordre GL varient significativement sur des distances λ et ξ respectivement, il se formera une région de dimension $\max(\lambda, \xi)$ dans laquelle la dynamique ne sera plus négligeable. Cette région est appelée la surface ou le mur. De la même façon, dans le modèle SO(5), l'application d'un champ magnétique $H_c(\beta)$ produit une transition de phase vers l'état AF. Ainsi, à $x \rightarrow -\infty$, le matériau sera non plus dans la phase normale, mais dans la phase AF. Le paramètre d'ordre AF variera significativement sur une distance l_η (à définir plus tard). En choisissant le mur parallèle au plan yz , les champs dépendront uniquement de la variable x . Par conséquent, on pose

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \hat{\phi}(x), \quad \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \hat{A}(x)\mathbf{e}_x, \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\mathbf{x}) = \hat{\eta}(x)\mathbf{e}_x,$$

où \mathbf{e}_x représente un vecteur unitaire dans la direction x . La densité d'énergie libre de Helmholtz (3.1) prend alors la forme

$$\begin{aligned} \hat{f} = & \frac{\hat{h}^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\hat{\phi}}{dx} \right)^2 + \frac{(e^*)^2}{2m^*c^2} \hat{A}^2 \hat{\phi}^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\hat{\eta}}{dx} \right)^2 \\ & - \frac{a_1^2}{2} \hat{\phi}^2 - \frac{a_2^2}{2} \hat{\eta}^2 + \frac{b_1}{4} \hat{\phi}^4 + \frac{b_3}{2} \hat{\phi}^2 \hat{\eta}^2 + \frac{b_2}{4} \hat{\eta}^4, \end{aligned} \quad (5.1)$$

où $\hat{h} = \frac{d\hat{A}}{dx}$. Minimisant par rapport aux variables dynamiques $\hat{\phi}$, \hat{A} et $\hat{\eta}$, on obtient les équations GL SO(5) en une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{m^*} \frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} - \frac{(e^*)^2}{m^* c^2} \hat{A}^2 \hat{\phi} + a_1^2 \hat{\phi} - b_1 \hat{\phi}^3 - b_3 \hat{\eta}^2 \hat{\phi} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{d^2 \hat{A}}{dx^2} = \frac{4\pi(e^*)^2}{m^* c^2} \hat{A} \hat{\phi}^2, \quad (5.3)$$

$$\frac{\hbar^2}{m^*} \frac{d^2 \hat{\eta}}{dx^2} + a_2^2 \hat{\eta} - b_2 \hat{\eta}^3 - b_3 \hat{\eta} \hat{\phi}^2 = 0. \quad (5.4)$$

Il est à noter que lorsque $\eta = 0$ dans les deux premières équations, on retrouve comme prévu les équations GL conventionnelles (voir par exemple [28]).

5.2 L'énergie de surface SO(5)

Dans cette section, nous allons dériver une expression mathématique pour l'énergie de surface dans le modèle SO(5). Toutefois, avant de s'atteler à cette tâche, il est intéressant d'analyser qualitativement le comportement de l'énergie de surface dans certains cas limites. Pour ce faire, rappelons les conditions frontières nécessaire à la résolution du problème. L'état SC est atteint à $x \rightarrow \infty$ lorsque les champs prennent les valeurs

$$\hat{\phi} \rightarrow v \equiv a_1 / \sqrt{b_1}, \quad \hat{h} \rightarrow 0, \quad \hat{\eta} \rightarrow 0.$$

Ce sont les valeurs des champs qui minimisent l'énergie libre de Gibbs. Dans la région AF, à $x \rightarrow -\infty$, les champs doivent, quant à eux, prendre les valeurs

$$\hat{\eta} \rightarrow a_2 / \sqrt{b_2}, \quad \hat{h} \rightarrow H_c(\beta), \quad \hat{\phi} \rightarrow 0,$$

afin de minimiser l'énergie libre de Gibbs dans la phase AF. Afin d'analyser qualitativement l'énergie de surface, considérons la FIG. 5-1. Dans la région AF, lorsque $x \rightarrow -\infty$, l'énergie libre de Gibbs (4.3) devient constante¹(la constante étant égale à $g_{sc}(H, T)$). Dans la région SC, lorsque $x \rightarrow \infty$, l'énergie libre de Gibbs devient l'expression (4.2). Puisque qu'à $\pm\infty$ l'énergie libre de Gibbs reste constante, ce sera à l'intérieur de la surface que la variation des champs contribueront à l'énergie de surface. Le détail de ces variations déterminera le signe de l'énergie de surface.

¹Dû au fait que la région est plongée dans le champ thermodynamique $H_c(\beta)$.

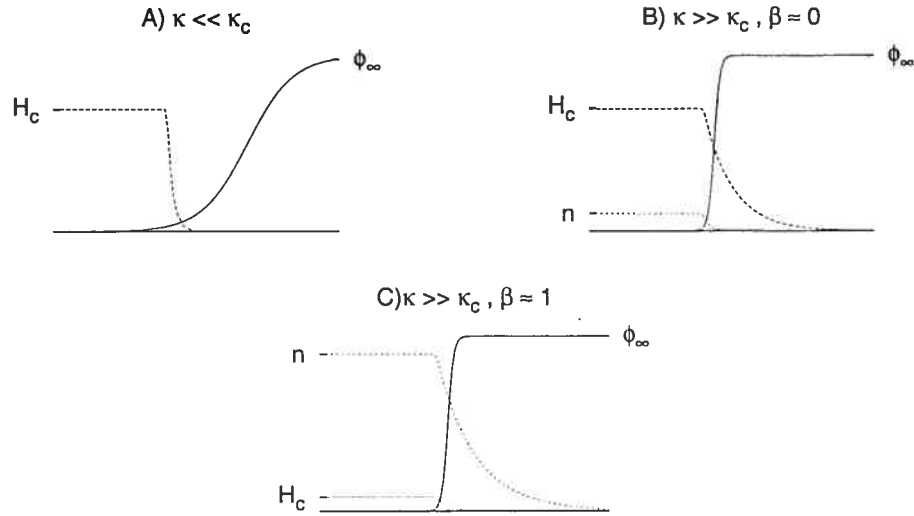


FIG. 5-1 – Schématisation du comportement des champs pour A) $\kappa \ll \kappa_c \equiv 1/\sqrt{2}, \beta$ quelconque B) $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ et $\beta \approx 0$ et C) $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ et $\beta \approx 1$.

On peut définir la variation des champs par leur longueur caractéristique. Pour ce faire, on considère les équations (5.2)-(5.4) dont on applique les transformations (3.9) afin de rendre les champs sans dimension. Le résultat aboutit aux équations

$$\frac{1}{\kappa^2} \phi'' - A^2 \phi + \phi(1 - \phi^2 - \alpha \eta^2) = 0, \quad (5.5)$$

$$A'' - A\phi^2 = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{\kappa^2} \eta'' + \eta(\beta - \frac{\alpha}{\delta} \eta^2 - \alpha \phi^2) = 0. \quad (5.7)$$

où les dérivées sont maintenant par rapport à s . En linéarisant ces équations autour des minimums des champs, c'est-à-dire en posant

$$\phi(x) = 1 - f(x), \quad \eta(x) = n(x) \quad \text{et} \quad A(x) = a(x),$$

les solutions des équations linéarisées seront de la forme e^{-x/l_i} , où l_i est une longueur caractérisant la variation de chaque champ. Quelques calculs élémentaires nous donnent les longueurs

$$l_A = 1, \quad l_\phi = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa}, \quad l_\eta = \frac{1}{\kappa\sqrt{1-\beta}} \quad (5.8)$$

où l_A , l_ϕ et l_η tiennent lieu des longueurs caractéristiques pour les champs A , ϕ et η respectivement. En allant d'un comportement asymptotique à l'autre, les champs scalaires et le champ magnétique peuvent varier rapidement. Si un des champs scalaires varie rapidement, le champ magnétique pénétrera et variera lentement dans la région SC. La densité d'énergie magnétique positive ainsi créée dans la zone de transition sera compensée par la densité d'énergie négative produite par le champ scalaire, celui-ci atteignant plus rapidement sa valeur à l'équilibre que le champ magnétique. Le résultat sera une énergie de surface négative. Si, au contraire, le champ magnétique varie plus vite qu'un des champs scalaires, la situation est renversée et l'énergie de surface sera positive. Il suffit donc de comparer la plus grande des longueurs entre l_η et l_ϕ avec l_A . Nous voyons de (5.8) que l_η est toujours plus grand que l_ϕ , alors l_η déterminera la *vitesse* de variation du champ scalaire.

Considérons le cas où $\kappa \ll 1/\sqrt{2}$. À l'aide de la FIG. 5-1 A, on remarque que le champ ϕ (et ce, peu importe le champ η) varie moins rapidement que le champ magnétique, de sorte que l'énergie de surface sera toujours positive, qu'il y ait ou non présence d'un paramètre d'ordre AF. Deux cas sont importants pour nous lorsque $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$. Premièrement, lorsque β est petit (FIG. 5-1 B), on trouve de (5.8) que $l_A > l_\eta$ et, comme décrit plus haut, l'énergie de surface sera négative. Deuxièmement, lorsque β est tout près de 1 (FIG. 5-1 C), on se retrouve dans la situation opposée : $l_A < l_\eta$, et l'énergie de surface sera positive. Afin de faire le lien entre la valeur de l'énergie de surface et les types de SC, il est nécessaire d'introduire la définition suivante :

Définition 2 *Un SC sera dit de **type I** lorsque l'énergie de surface sera positive et ce, peu importe le modèle théorique considéré. De la même façon, un SC sera dit de **type II** lorsque l'énergie de surface sera négative.*

Cette deuxième définition fait suite à la première introduite au chapitre précédent. Elle se veut un prolongement de l'idée au-delà du modèle SO(2), afin de pouvoir l'utiliser dans le modèle SO(5). Notons que les deux définitions sont intimement reliées. En effet, dans le cas du modèle SO(2), il est possible de prouver $H_c = H_{c2} \iff \sigma = 0$, contrairement au modèle SO(5), du moins jusqu'à preuve du contraire. Pour cette raison, nous avons été obligés ici d'introduire une définition plutôt qu'un théorème. À partir de cette définition, une énergie de surface négative correspond à un SC de type II et nous voyons que le cas $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ et β petit correspond à un comportement de type II. À l'opposé, le cas où β est grand correspond au comportement d'un SC de type I. Ainsi, il est possible pour un SC, dont $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$, de se comporter comme un SC de type I, comme nous l'avons vu au chapitre 4. Par continuité entre les deux cas limites (β petit et grand), il doit exister, pour tout $\kappa > 1/\sqrt{2}$, un β critique tel qu'à cette valeur l'énergie de surface devient zéro. Ceci définit un $\beta_c(\kappa)$ comme dans (4.12) ou, inversement, un $\kappa_c(\beta)$ comme dans (4.10)²

Physiquement, l'énergie de surface σ est définie comme la différence entre l'énergie libre de Gibbs $G(H_c(\beta), T)$ et la valeur que celle-ci posséderait si le comportement asymptotique $G_s(H_c(\beta), T) = G_{af}(H_c(\beta), T)$ restait valide tout le long du spécimen. De cette façon, la densité d'énergie de surface s'annule à $\pm\infty$ de sorte que l'énergie de surface reste une quantité finie. Ainsi,

$$\sigma \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \{g(H_c(\beta), T) - g_{af}(H_c(\beta), T)\},$$

où $g(H, T)$ est la densité d'énergie libre de Gibbs. En utilisant (4.1) et (4.3), la

²Il n'est pas possible de trouver les conditions analytiques telles que l'énergie de surface (5.12) soit nulle. En effet, il est facile de remarquer numériquement que lorsque (5.12) est nulle, l'intégrant lui ne l'est pas. Ceci contraste avec l'énergie de surface dans le modèle SO(2) où l'intégrant est strictement nul à $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

dernière expression devient

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \hat{f} - \frac{\hbar H_c}{4\pi} - \left(-\frac{a_2^4}{4b_2} - \frac{H_c^2(\beta)}{8\pi} \right) \right\}. \quad (5.9)$$

En utilisant l'expression pour l'énergie libre de Helmholtz (5.1) et en réarrangeant un peu les termes, (5.9) devient

$$\begin{aligned} \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\hat{\phi}}{dx} \right)^2 + \frac{(e^*)^2}{2m^*c^2} \hat{A}^2 \hat{\phi}^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\hat{\eta}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \left(\hat{h} - H_c(\beta) \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{a_1^2}{2} \hat{\phi}^2 - \frac{a_2^2}{2} \hat{\eta}^2 + \frac{b_1}{4} \hat{\phi}^4 + \frac{b_3}{2} \hat{\phi}^2 \hat{\eta}^2 + \frac{b_2}{4} \hat{\eta}^4 + \frac{a_2^4}{4b_2} \right\}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

On peut éliminer les dérivées dans cette expression en multipliant les équations du mouvement (5.2) et (5.4) par $\hat{\phi}$ et $\hat{\eta}$ respectivement et en intégrant par partie les termes en dérivés. En utilisant le fait que ceux-ci s'annulent à $\pm\infty$, on trouve ainsi les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\hat{\phi}}{dx} \right)^2 + \frac{(e^*)^2}{2m^*c^2} \hat{A}^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left(-a_1^2 \hat{\phi}^2 + b_1 \hat{\phi}^4 + b_3 \hat{\eta}^2 \hat{\phi}^2 \right) \right\} = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\hat{\eta}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-a_2^2 \hat{\eta}^2 + b_2 \hat{\eta}^4 + b_3 \hat{\phi}^2 \hat{\eta}^2 \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

En substituant ces identités dans (5.10), on trouve l'expression suivante pour l'énergie de surface :

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{b_1}{4} \hat{\phi}^4 - \frac{b_2}{4} \hat{\eta}^4 - \frac{b_3}{2} \hat{\phi}^2 \hat{\eta}^2 + \frac{1}{8\pi} \left(\hat{h} - H_c(\beta) \right)^2 + \frac{a_2^4}{4b_2} \right\}.$$

On passe alors à des quantités sans dimension en utilisant la version unidimensionnelle des relations (3.9) ce qui donne

$$\sigma = \frac{a_1^4}{4b_1} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ -\phi^4 - \frac{b_2}{b_1} \eta^4 - 2 \frac{b_3}{b_1} \phi^2 \eta^2 + \frac{b_1 H_c^2}{a_1^4 2\pi} \left(\frac{\hat{h}}{H_c} - \sqrt{1 - \frac{\delta}{\alpha} \beta^2} \right)^2 + \frac{b_1 a_2^4}{b_2 a_1^4} \right\}.$$

où l'on a utilisé la relation (4.4) pour le champ critique $H_c(\beta)$. En usant des relations (2.6) et (2.15), on trouve $\hat{h}/H_c = \sqrt{2}h$, et puisque $a_1^4/4b_1 = H_c^2/8\pi$, le tout devient

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{H_c^2}{8\pi} \lambda \left\{ -\phi^4 - \frac{\alpha}{\delta} \eta^4 - 2\alpha\phi^2\eta^2 + \left(\sqrt{2}h - \sqrt{1 - \frac{\delta}{\alpha}\beta^2} \right)^2 + \frac{\delta}{\alpha}\beta^2 \right\}. \quad (5.11)$$

Il est plus conventionnel d'écrire l'énergie de surface sous la forme

$$\sigma = \frac{H_c^2}{8\pi} \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = 2\lambda I \quad \text{une longueur et,}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \phi^4 - \frac{\alpha}{\delta} \eta^4 \right) - \alpha\phi^2\eta^2 + h^2 - \sqrt{2}h \sqrt{1 - \frac{\delta}{\alpha}\beta^2} \right\}, \quad (5.12)$$

où l'on a pris soin de développer le terme au carré dans (5.11). Ce dernier résultat représente l'expression finale pour l'énergie de surface dans le modèle SO(5). Une remarque s'impose avant de passer à la résolution de (5.12). Premièrement, la dépendance en β apparaît exclusivement dans I , de sorte que λ et H_c restent les expressions conventionnelles de la théorie GL. Ceci est consistant, car de la sorte on retrouve l'expression de l'énergie de surface du modèle SO(2) (2.17) lorsque $\beta = 0$ et $\eta = 0$.

5.3 Résultats analytiques

Cette section présente quelques résultats analytiques de l'énergie de surface (5.12). Rappelons que, dans le modèle GL, des résultats analytiques sont obtenus lorsque l'on considère les deux cas limites $\kappa \ll 1/\sqrt{2}$ et $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$, présentés au chapitre 2 par les expressions (2.18). Guidés par ces résultats, nous avons trouvé une expression analytique dans le cas où $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ et $\beta \approx 0$ et pour le cas $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ et $\beta = 1$. La situation générale (pour β quelconque) semble difficile à résoudre analytiquement.

Considérons donc, en premier lieu, le cas $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ et $\beta \approx 0$. Une première approximation est effectuée en négligeant les termes en dérivées proportionnels à $1/\kappa^2$ dans les équations (5.5) et (5.7), ce qui nous donne :

$$(1 - A^2)\phi - \phi^3 - \alpha\eta^2\phi = 0, \quad (5.13)$$

$$A'' = A\phi^2, \quad (5.14)$$

$$\beta\eta - \frac{\alpha}{8}\eta^3 - \alpha\eta\phi^2 = 0. \quad (5.15)$$

En insérant (5.14) dans (5.13) afin d'éliminer A et en notant $A' = h$, on trouve

$$h' = -\phi^2(1 - \phi^2 - \alpha\eta^2)^{1/2}, \quad (5.16)$$

où le signe négatif a été retenu afin de tenir compte du fait que h décroît lorsque s croît. De plus, en dérivant (5.14) par rapport à s et en isolant h , on trouve

$$h = \frac{h''}{\phi^2} - \frac{2h'\phi'}{\phi^3} = \frac{d}{ds} \left(\frac{h'}{\phi^2} \right) = -\frac{d}{ds} (1 - \phi^2 - \alpha\eta^2)^{1/2} \quad (5.17)$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant (5.16). La deuxième approximation est de considérer $\eta \approx 0$ (i.e. $\beta \approx 0$). Dans ce cas, le champ magnétique h variera plus vite que les termes en η^4 et η^2 . Ceci permet de négliger le terme η^2 dans (5.16) et (5.17). En posant $u = (1 - \phi^2)^{1/2}$, il est facile de remarquer, à l'aide de (5.17) puis de (5.16), que u doit satisfaire l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{ds^2} = u - u^3.$$

L'intégrale première de cette dernière est

$$\frac{du}{ds} = -u \left(1 - \frac{u^2}{2} \right)^{1/2} = -h,$$

puisque du/dx doit être négatif et la constante d'intégration égale à zéro. La dernière égalité se justifie en remarquant (5.17).

Attaquons maintenant l'expression de l'énergie de surface (5.12) qui devient maintenant, grâce à nos approximations,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{1}{2}(1 - \phi^4) + h^2 - \sqrt{2}h\sqrt{1 - \delta\beta^2/\alpha} \right\}. \quad (5.18)$$

Comme $\beta \approx 0$, on peut développer la racine $\sqrt{1 - \delta\beta^2/\alpha} \approx 1 - \delta\beta^2/2\alpha$. De plus, un petit calcul nous confirme que $\frac{1}{2}(1 - \phi^4)^2 = h^2$ de sorte que (5.18) devient simplement

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ 2h - \sqrt{2} + \frac{\delta}{2\alpha}\beta^2 \right\} h.$$

En terme de la variable u , la dernière expression prend la forme

$$I = \int_0^1 du \left[2u \left(1 - \frac{u^2}{2} \right)^{1/2} - \sqrt{2} + \frac{\delta}{2\alpha}\beta^2 \right].$$

Celle-ci s'intègre facilement pour donner

$$I = -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{u^2}{2} \right)^{3/2} - \sqrt{2}u + \frac{\delta}{2\alpha}\beta^2 u \Big|_0^1 = -\frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1) + \frac{\delta}{2\alpha}\beta^2.$$

Finalement, l'expression pour l'énergie de surface σ devient

$$\sigma = -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda \left[\frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1) - \frac{\delta}{2\alpha}\beta^2 \right],$$

montrant ainsi que nous avons bien une énergie de surface négative pour $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$, c'est-à-dire que cette situation correspond à des SC de type II, et que l'énergie commence à croître à mesure que β augmente.

Malheureusement, il n'est pas possible (du moins jusqu'à preuve du contraire) de prouver analytiquement que l'énergie de surface devient positive à partir d'une certaine valeur de β . Il est possible, cependant, de trouver la valeur de l'énergie de surface à $\beta = 1$ et $\alpha = \delta = 1$. Dans ce cas précis, à cause des conditions frontières, le champ magnétique h est nul tout le long du spécimen de sorte que l'énergie de surface (5.12) devient

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{1}{2}(1 - \phi^4 - \eta^4) - \phi^2\eta^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\phi^2 + \eta^2)^2 \right\}. \quad (5.19)$$

Or, à $\beta = \alpha = \delta = 1$ et $h = 0$, les équations (5.5) et (5.7) deviennent $1 - \phi^2 - \eta^2$ de sorte que l'intégrand dans (5.19) s'annule. Ainsi, à $\beta = 1$, l'énergie de surface est

zéro. Ceci s'explique par le fait que l'état fondamental du système est invariant sous le groupe $SO(5)$. Ainsi, aucune symétrie brisée n'apparaît, et pour des raisons topologiques (puisque l'énergie de surface peut être traitée comme un soliton), l'énergie de surface doit être zéro à $\beta = 1$. Il est important de noter que la dernière analyse n'est valide que pour $\alpha = \delta = 1$. Pour d'autre valeur de ces paramètres, l'état fondamental n'est plus symétrique sous $SO(5)$ et l'énergie de surface doit différer de zéro à $\beta = 1$.

5.4 Résultats numériques

Une analyse plus complète de l'énergie de surface est obtenue en résolvant numériquement les équations (5.5)-(5.7) sujettes aux conditions frontières

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow 0, & \quad h \rightarrow \sqrt{1 - \beta^2}/\sqrt{2}, & \quad \eta \rightarrow \sqrt{\beta}, & \quad \text{à } x \rightarrow -\infty, \\ \phi \rightarrow 1, & \quad h \rightarrow 0, & \quad \eta \rightarrow 0, & \quad \text{à } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lorsque les solutions sont trouvées, il est facile de calculer l'énergie de surface sans dimension I en fonction du paramètre β par intégration numérique de (5.12). Nous présenterons ici les résultats dans le cas spécifique où $\alpha = \delta = 1$ puisque notre publication sur ces calculs [36] s'est restreinte à ces valeurs. Dans ce cas, la valeur critique κ_c (4.10) séparant la région type I de la région type II prend la forme particulière

$$\kappa_c(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (5.20)$$

La FIG. 5-2 visualise cette expression en fonction de β .

Les résultats du calcul numérique sont présentés ici pour les cas $\kappa = 0.707$ (la valeur critique du modèle $SO(2)$) à la FIG. 5-3 a et $\kappa = 7.07$ à la FIG. 5-3 b. La situation où $\kappa < 1/\sqrt{2}$ est sans intérêt pour nous puisque l'énergie de surface est

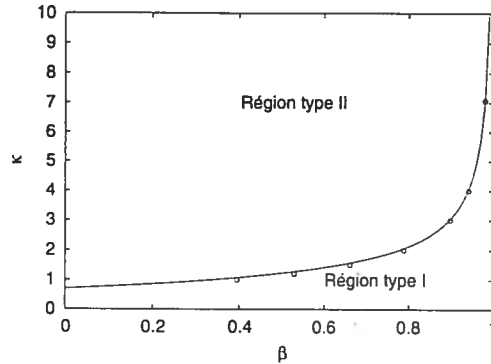


FIG. 5-2 - $\kappa_c(\beta)$ pour $\alpha = \delta = 1$. Les points représentent les résultats du calcul numérique de l'énergie de surface.

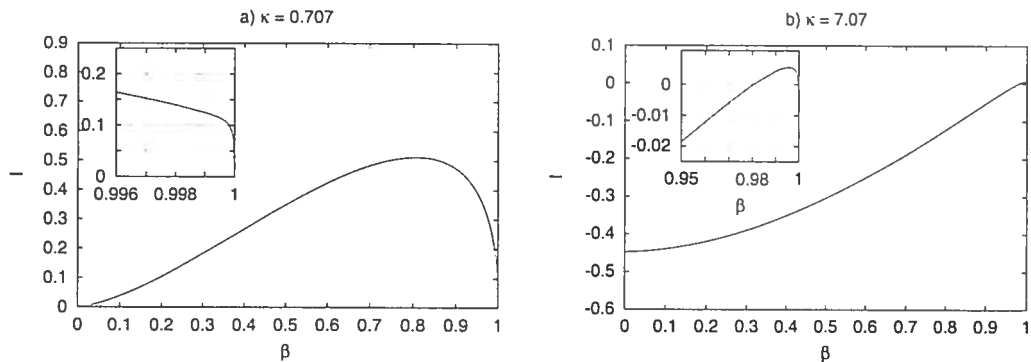


FIG. 5-3 - Énergie de surface $I(\beta)$ pour a) $\kappa = 0.707$ et b) $\kappa = 7.07$.

positive pour tout β , de même que les valeurs $\kappa > 7.07$ qui montrent sensiblement le même comportement que le cas $\kappa = 7.07$.

La FIG. 5-3 a correspond à la valeur critique κ_c du modèle GL. Premièrement, on remarque que l'énergie de surface est zéro pour $\beta = 0$, résultat que nous espérons puisqu'à cette valeur particulière on se retrouve dans le cas SO(2). Pour toute autre valeur de β , nous obtenons une énergie de surface positive indiquant que le SC reste dans la région de type I pour toute valeur du paramètre β . Ceci est en accord avec (4.10), comme on peut le voir à la FIG. 5-2. Notons également que l'énergie

atteint un maximum et décroît jusqu'à ce qu'elle rejoigne encore zéro à $\beta = 1$, compatible avec le résultat analytique. Un cas plus intéressant est présenté à la FIG. 5-3 b, correspondant à $\kappa = 7.07$ (dans le cas conventionnel, un SC de type II). La courbe débute à $\beta = 0$ à la valeur donnée par la théorie GL et augmente jusqu'à ce qu'elle passe par zéro à $\beta \approx 0.98$. En-dessous de cette valeur critique, le SC possède un comportement de type II. Au-dessus, l'énergie de surface est positive et le SC devrait se comporter comme celui d'un type I, c'est-à-dire que les vortex dans cette région ne seront pas favorisés énergétiquement. Encore ici, les résultats concordent avec la FIG. 5-2 et avec (4.10), la transition entre type I et type II arrivant vers $\beta \approx 0.98$. On observe également que l'énergie de surface est encore zéro à $\beta = 1$ comme prévue.

β	$\kappa_c(\beta)$	De (5.20)
0.3945	1	1.07
0.5288	1.2	1.27
0.6620	1.5	1.57
0.7887	2	2.06
0.8976	3	3.04
0.9410	4	4.06
0.98	7.07	7.04
0.9998	70.7	70.71

TAB. 5-1 – Quelques valeurs numériques et analytiques de $\kappa_c(\beta)$.

Globalement, nous trouvons pour chaque valeur de $\kappa > 1/\sqrt{2}$ une région d'énergie de surface positive et une négative. La frontière, l'ensemble des points (κ_c, β) tel que $I(\beta) = 0$, se comporte effectivement comme (5.20). Le TAB. 5.4 résume quelques valeurs de κ_c que nous avons calculées numériquement³. Nous les avons

³En fait, pour une valeur de $\kappa_c(\beta)$ fixée, nous avons trouvé numériquement la valeur de β telle que l'énergie de surface est zéro. Cette valeur est alors injectée dans (5.20) afin de trouver la valeur

également reportées à la FIG. 5-2. L'étude de l'énergie de surface mène donc aux mêmes conclusions que l'étude des champs magnétiques critiques.

5.5 Énergie des vortex

Afin de compléter ce chapitre, il est à mentionner qu'une étude de l'énergie des vortex mène à des conclusions similaires. En effet, nous avons vu à la section 2.3 que si l'énergie libre de Helmholtz d'un vortex de nombre d'enroulement n , notée $F(n)$, est plus grand que n vortex de nombre d'enroulement 1, le réseau de vortex sera favorisé. D'autre part, lorsque $F(n)$ est plus petit que $nF(1)$, les vortex de grand nombre d'enroulements sont préférés menant à une instabilité du réseau de vortex. Ces différents comportements permettent de classer les SC en type II et type I respectivement :

$$F(n) > nF(1) \quad \rightarrow \quad \text{Comportement de type II,}$$

$$F(n) < nF(1) \quad \rightarrow \quad \text{Comportement de type I.}$$

En calculant numériquement la fonction $\mathcal{F}(n) \equiv F(n)/n$ en fonction de n , on peut conclure que si $\mathcal{F}(n)$ est une fonction croissante, on se retrouve dans la situation d'un SC de type I. Inversement, si $\mathcal{F}(n)$ est une fonction décroissante, le SC est de type II. Enfin, lorsque $\mathcal{F}(n)$ est une constante, on trouve la valeur critique $\beta_c(\kappa)$. Le but, ici, n'étant pas de rentrer dans les détails, on pourra se référer à [31] et [35] pour de plus amples informations. Le résultat pour les cas $\kappa = 0.707$ et $\kappa = 7.07$ est montré à la FIG. 5-4 (m tenant lieu dans ces figures du nombre d'enroulement).

Le premier graphique montre que, pour toute valeur de β , $\mathcal{F}(m)$ est décroissante, montrant un caractère de type I pour un SC décrit par $\kappa = 0.707$. Ceci de κ_c théorique correspondante.

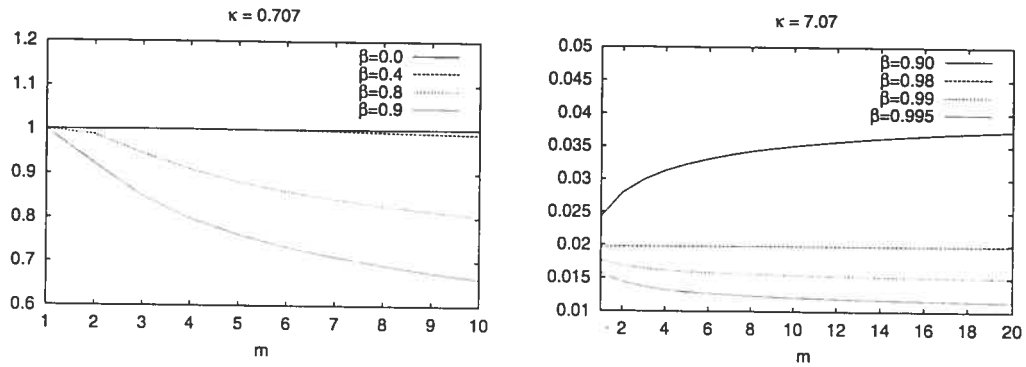


FIG. 5-4 – $\mathcal{F}(m)$ pour différentes valeurs de β dans les cas $\kappa = 0.707$ et $\kappa = 7.07$ ($\alpha = \delta = 1$).

est complètement en accord avec l'analyse de l'énergie de surface (FIG. 5-3 a). Le deuxième graphique laisse paraître les deux types de comportement. Pour $\beta < 0.98$, la fonction $\mathcal{F}(m)$ est croissante, correspondant au comportement usuel des SC de type II. Par contre, pour $\beta > 0.98$, $\mathcal{F}(m)$ est plutôt décroissante, caractéristique des SC de type I. Encore une fois ici, l'analyse concorde parfaitement avec celle de l'énergie de surface (FIG. 5-3 b). La frontière entre les deux comportements est obtenue lorsque $\mathcal{F}(m)$ égale une constante, ce qui est réalisé ici pour $\beta \approx 0.98$, tout à fait en accord avec (5.20).

Conclusion

L'étude des champs magnétiques critiques dans le cadre du modèle SO(5) a permis de mettre à jour plusieurs comportements nouveaux et exotiques, inexistants dans la phénoménologie du modèle SO(2). Nous avons démontré que la frontière entre les SC de type I et ceux de type II n'aborde plus la simplicité du cas conventionnel. Ainsi, il est possible qu'un SC, pour lequel $\kappa > 1/\sqrt{2}$, se comporte comme un SC de type I pour un certain intervalle des paramètres α et β . Grâce à l'étude des champs magnétiques critiques, nous avons pu dégager deux situations notables. Premièrement, pour $\alpha \geq 1$, le modèle décrit un matériau possédant, à basse température, les phases AF ($\beta > \sqrt{\alpha}$) et SC ($\beta < \sqrt{\alpha}$). Dans ce cas, le modèle prédit un comportement de type I près de la phase AF (dopage faible) malgré le fait que le matériau soit caractérisé par $\kappa > 1/\sqrt{2}$. De plus, il est possible, dans l'intervalle $1 < \beta < \alpha$, que la diminution du champ magnétique externe, de $\mathbf{H} > H_c$ à $\mathbf{H} = 0$ n'induit pas de phase SC, comme on pourrait s'y attendre normalement avec le phénomène de *supercooling*. Deuxièmement, pour $\alpha < 1$, le modèle dispose, à basse température, des phases SC ($0 < \beta < \alpha$), mixte ($\alpha < \beta < 1$) et AF ($\beta > 1$). Dans cette situation, les SC de type II extrême se comportent tous normalement, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de transition vers un comportement de type I à mesure que l'on s'approche de la phase mixte ou AF.

Grâce aux résultats de ce mémoire, le portrait expérimental du modèle SO(5) pourrait en être perturbé. En effet, plusieurs expériences sont maintenant à notre portée afin de confirmer ou d'infirmer le modèle SO(5). Une d'entre elles pourrait s'occuper de mesurer directement les champs magnétiques critiques en fonction du

dopage du matériau. À ma connaissance, il n'y a pas d'expérience qui ait été faite dans cette direction et peu de mesures cohérentes sont disponibles présentement. La difficulté d'une telle manipulation vient du fait qu'il faut créer un nouveau spécimen à chaque fois que l'on veut changer la concentration en oxygène, rendant ainsi la comparaison incohérente entre les mesures à différents dopages. De plus, il est nécessaire d'atteindre des valeurs de dopage assez précises, chose difficile à obtenir expérimentalement. Toutefois, une nouvelle technique est apparue récemment permettant de modifier la concentration de trous (ou d'électrons) dans un matériau sans en refaire un nouveau [48, 49]. Ainsi, la mesure des champs magnétiques critiques, ou d'autres quantités dépendant du dopage, serait moins problématique. Une autre expérience pourrait viser l'étude de la stabilité d'un réseau de vortex en fonction du dopage. Il serait possible, en effet, de détecter une altération dans la structure géométrique du réseau de vortex à mesure que l'on s'approche de la phase AF, ou tout simplement une disparition du réseau du vortex plus tôt que prévu. Une expérience [50] semble confirmer ce genre de comportement. Encore une fois ici, les expériences de ce type devront fabriquer et utiliser des matériaux avec des dopages extrêmement précis.

Il ne faut pas se le cacher, les esprits sont partagés quant à la validité du modèle $SO(5)$ et une lutte s'est installée entre les différentes parties. De plus, les expériences menées jusqu'à ce jour sont loin de régler la question et des efforts devront être appliqués au point de vue expérimental afin qu'un consensus solide voit enfin le jour. En espérant que ce mémoire puisse servir de guide à une meilleure compréhension, tant expérimentale que théorique, du modèle $SO(5)$ et de la supraconductivité à haute température.

Avant de clore définitivement, notons que l'analyse et l'interprétation de nos résultats sur le modèle $SO(5)$ ont été appliquées exclusivement aux oxydes supraconducteurs. Cependant, d'autres phénomènes et théories physiques utilisent la même

structure mathématique que le modèle $SO(5)$. Par exemple, en optique non-linéaire, il existe une solution stable (un mode de propagation) aux équations du mouvement connue sous le nom de vortex optique, exactement comme les vortex du modèle $SO(2)$. En couplant un second mode de propagation au premier, le vortex peut servir de guide d'onde au second mode (voir [51] pour un résumé et d'autres références). Dans cette théorie, les premier et second modes sont l'analogie de nos champs ϕ et η respectivement. Toutefois, les modes ne sont pas couplés à un champ de jauge. Un autre exemple provient des cordes cosmiques bosoniques supraconductrices [52]. Dans ce modèle, un premier champ complexe de symétrie de jauge locale $U(1)_1$ est couplé à un second champ complexe chargé de symétrie de jauge locale $U(1)_2$ de la même façon que dans le modèle $SO(5)$. Le groupe $U(1)_2$ représente le champ de jauge de l'électromagnétisme. La symétrie $U(1)_1$ est spontanément brisée menant à une solution de type vortex pour le premier champ (c'est la corde cosmique). À cause du potentiel, le second champ scalaire peut acquérir une valeur non-nulle à l'intérieur de la corde cosmique, produisant ainsi une corde cosmique supraconductrice à cause du second champ qui est chargé. Enfin, le modèle $SO(5)$ peut se voir comme une théorie de transition de phase à deux paramètres d'ordre et peu de recherches ont été effectuées sur ce sujet. Ce mémoire, ainsi que l'étude de l'interaction des vortex dans ce modèle [53], pourrait permettre une meilleure compréhension de la structure mathématique des transitions de phase à deux paramètres d'ordre dont les applications physiques futures ne cesseront, j'en suis sûr, d'augmenter.

Bibliographie

- [1] J.G. BEDNORZ et K.A. MÜLLER. *Earlier and Recent Aspects of Superconductivity*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] E.A. ANDRYUSHIN et V.L. GINZBURG. *Superconductivity*. World Scientific, 1994.
- [3] G. VIDALI. *Superconductivity, the next revolution?* Cambridge University Press, 1993.
- [4] D.M. GINSBERG. *Physical Properties of high Temperature Superconductors I*. World Scientific, 1989.
- [5] H.K. ONNES. *Leiden Comm.* **122b** (1911).
- [6] H.K. ONNES. *Leiden Comm.* **139f** (1914).
- [7] W. MEISSNER et R. OCHSENFELD. *Naturwissen* **21** (1933), p. 787.
- [8] F. LONDON et H. LONDON. *Proc. Roy. Soc. A* **149** (1935), p. 71.
- [9] V.L. GINZBURG et L.D. LANDAU. *Zh. Eksperim. Teor. Fiz.* **20** (1950), p. 1064.
- [10] A.A. ABRIKOSOV. *Sov. Phys. JETP* **5** (1957), p. 1174.
- [11] D. CRIBIER et al. *Phys. Lett.* **9** (1964), p. 106.
- [12] E. MAXWELL. *Phys. Rev.* **78** (1950), p. 477.
- [13] C.A. REYNOLDS et al. *Phys. Rev.* **78** (1950), p. 487.
- [14] W.S. CORAK. *Phys. Rev.* **96** (1954), p. 1442.
- [15] J. BARDEEN, L.N. COOPER, et J.R. SCHRIEFFER. *Phys. Rev.* **108** (1957), p. 1175.
- [16] B.S. DEEVER, Jr et W.M. FAIRBANK. *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961), p. 43.

- [36] M. JUNEAU, R. MACKENZIE, et M. A. VACHON. *Ann. Phys.* **298** (2002), p. 421.
- [37] P.W. ANDERSON. *Science* **235** (1987), p. 1196.
- [38] S.-C. ZHANG et T.M. RICE. *Phys. Rev. B* **37** (1988), p. 2891.
- [39] M. VEILLETTE, Y. BAZALIY, A.J. BERLINSKY, et C. KALLIN. *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999), p. 2413.
- [40] S.-C. ZHANG et al. *Phys. Rev. B* **60** (1999), p. 13070.
- [41] C.P. BURGESS et C.A. LÜTKEN. *Phys. Rev. B* **57** (1998), p. 8642.
- [42] S. ALAMA, A.J. BERLINSKY, L. BRONSARD, et T. GIORGI. *Phys. Rev. B* **60** (1999), p. 6901.
- [43] P. DAI et al. *Nature* **406** (2000), p. 965.
- [44] V.F. MITROVIC et al. *Nature* **413** (2001), p. 501.
- [45] B.G. LEVI. *Physics Today* **55(2)** (2002), p. 14.
- [46] H.A. MOOK et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), p. 3490.
- [47] E. DEMLER et S.-C. ZHANG. *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), p. 4126.
- [48] A.H. MACDONALD. *Nature* **414** (2001), p. 409.
- [49] J.H. SCHÖN et al. *Nature* **414** (2001), p. 434.
- [50] J.E. SONIER et al. *Phys. Rev. B* **61** (2000), p. R890.
- [51] Y.S. KIVSHAR et B. LUTHER-DAVIES. *Phys. Rep.* **298** (1998), p. 81.
- [52] E. WITTEN. *Nucl. Phys. B* **249** (1985), p. 557.
- [53] R. MACKENZIE, M.A. VACHON, et U.F. WICHOSKI. *Phys. Rev. D* **67** (2003), p. 105024.
- [54] C.P. POOLE. *Handbook of Superconductivity*. Academic Press, 2000.
- [55] E. FRADKIN. *Field Theories of Condensed Matter Systems*. Addison-Wesley, 1991.

Annexe A

Données expérimentales

TAB. A-1 – Quelques éléments supraconducteurs de type I. Les valeurs sont tirées de [54].

Élément	T_c (K)	H_c (mT)	λ_L (Å)	ξ_{GL} (Å)	κ
Cd	0,56	2,8	1 100	7 600	0.14
Al	1,18	10,5	450	15 500	0.03
Tl	2,38	17,8	-	2700	-
Sn	3,72	30,5	420	1800	0.23
Hg	4,15	41,1	-	-	-
Ta	4,47	82,9	-	-	-
Pb	7,23	80,3	390	870	0.45

TAB. A-2 – Quelques composés supraconducteurs de type II. Les valeurs sont tirées de [54].

Élément	T_c (K)	H_{c1} (mT)	H_{c2} (T)	λ_L (Å)	ξ_{GL} (Å)	κ
Nb	9,25	198	$\approx 0,4$	520	390	1,3
PbIn	7	-	0,2	1 500	200	7,5
NbN	16	9	15	2 000	50	40
V_3Ga	15,3	40	23	900	25 ± 5	38 ± 8
V_3Si	16,3	55	23	600	30	20
Nb_3Sn	18,0	35	23	650	30	21,7
Nb_3Ge	23,2	-	39	900	30	30

Annexe B

Modèles théoriques en matière condensée

B.1 Le modèle de Hubbard

Le modèle de Hubbard s'applique aux systèmes d'électrons fortement corrélés. C'est un modèle dans lequel les électrons de bandes interagissent, deux à deux, via l'interaction répulsive de Coulomb. On suppose que les bandes sont indépendantes les unes des autres et on restreint les interactions d'un site avec ceux de ses plus proches voisins. L'hamiltonien du modèle, résultant de la seconde quantification, est donné par (voir [55])

$$H = -t \sum_{\substack{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle \\ \sigma = \uparrow, \downarrow}} (c_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r})c_{\sigma}(\vec{r}') + c.c.) + U \sum_{\vec{r}} n_{\uparrow}(\vec{r})n_{\downarrow}(\vec{r}), \quad (\text{B.1})$$

où $c_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r})$ crée un électron au site \vec{r} de spin σ et où \langle , \rangle dénote les plus proches voisins. De plus,

$$n_{\sigma}(\vec{r}) \equiv c_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r})c_{\sigma}(\vec{r}) \quad (\text{B.2})$$

représente le nombre d'électrons de spin σ présent sur le site \vec{r} . Du principe d'exclusion de Pauli, nous avons nécessairement $n_{\sigma} = 0, 1$ à chaque site. Le premier terme de (B.1) représente l'énergie nécessaire pour qu'un électron saute d'un site à un autre site de son voisinage le plus proche. On peut voir ce terme comme un terme cinétique. Le deuxième terme représente l'énergie coulombienne (ou l'énergie potentielle) des électrons sur un site.

Il est plus commode d'écrire (B.1) en terme de l'opérateur de spin $\vec{S}(\vec{r})$ défini par

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2} c_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \tau_{\sigma\sigma'} c_{\sigma'}(\vec{r}), \quad (\text{B.3})$$

où τ tient lieu des matrices de Pauli usuelles. Avec (B.3), le modèle de Hubbard se présente sous la forme

$$H = -t \sum_{\substack{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle \\ \sigma=\uparrow, \downarrow}} (c_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) c_{\sigma}(\vec{r}') + c.c.) - \frac{2U}{3} \sum_{\vec{r}} \left(\vec{S}(\vec{r}) \right)^2 + \frac{N_e U}{6}, \quad (\text{B.4})$$

où N_e est le nombre d'électrons du système. Deux cas sont importants lorsque l'on considère la limite de couplage fort, c'est-à-dire $U \rightarrow \infty$.

B.1.1 Système au demi-remplissage ($U > 0$)

Le terme d'interaction

$$H_{int} = -\frac{2U}{3} \sum_{\vec{r}} \left(\vec{S}(\vec{r}) \right)^2 \quad (\text{B.5})$$

force le spin \vec{S} à être le plus grand possible lorsque U devient infiniment grand. L'occupation double des sites est alors interdite et un seul électron est permis sur chaque site (comme chaque site est à demi-rempli, on parle alors d'un système au demi-remplissage). On peut montrer que l'hamiltonien efficace dans cette limite est le modèle quantique antiferromagnétique d'Heisenberg donné par

$$H'_0 = J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(\vec{r}'), \quad (\text{B.6})$$

avec la constante de couplage $J \equiv \frac{2t^2}{|U|}$. Notons que le terme cinétique est disparu de (B.6). En effet, puisque l'occupation double est interdite et que chaque site est occupé par un électron, ceux-ci ne peuvent voyager d'un site à l'autre.

