

Université de Montréal

**Propriétés et classification des Hamiltoniens séparables possédant des
intégrales d'ordre trois**

par

Simon Gravel

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

**Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique**

juillet, 2003

©Simon Gravel, 2003



QC
3
U54
2003
V.013

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

**Université de Montréal
Faculté des études supérieures**

Ce mémoire intitulé:

**Propriétés et classification des Hamiltoniens séparables possédant des
intégrales d'ordre trois**

présenté par:

Simon Gravel

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

**Manu Paranjape, président-rapporteur
Pavel Winternitz, directeur de recherche
Véronique Hussin, membre du jury**

Mémoire accepté le:

Résumé

Nous discutons dans ce mémoire de divers sujets reliés à la superintégrabilité. Une partie importante du mémoire est consacrée à la classification des Hamiltoniens bidimensionnels séparables en coordonnées cartésiennes ou polaires et possédant des intégrales qui sont des polynômes d'ordre trois dans les impulsions. Le reste du mémoire traite de sujets d'intérêt plus général, abordant la question de la définition de l'intégrabilité quantique et exposant quelques résultats nouveaux et intéressants à propos des propriétés des systèmes superintégrables quantiques et classiques, en particulier l'isochronicité classique, l'espacement du spectre quantique et la propriété de Painlevé.

Mots clés : intégrabilité quantique, superintégrabilité, superintégrable, isochrone, harmonicité, Painlevé (fonctions transcendentes de), Painlevé (propriété de), quantification.

Abstract

We discuss in this thesis various aspects of superintegrability. An important part of this work is dedicated to classifying two-dimensional Hamiltonian systems that are separable in cartesian or polar coordinates and that admit integrals that are third-order polynomials in the momenta. The remainder of the thesis is dedicated to more general topics, dealing with the problems related to the definition of quantum superintegrability and discussing some new and interesting results concerning the properties of quantum and classical superintegrable systems, such as classical isochronicity, quantum spectrum spacing and the Painlevé property.

Key words : quantum integrability, superintegrability, superintegrable, isochronous, harmonic behavior, Painlevé transcendant functions, Painlevé property, quantization.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Remerciements	viii
Chapitre 1 : Introduction	1
Chapitre 2 : Indépendance d'un système d'intégrales du mouvement	6
2.1 Mécanique classique	6
2.2 Mécanique quantique	7

Chapitre 3 : Classification des systèmes superintégrables	11
3.1 Objectifs	11
3.2 Remarques préalables	12
3.2.1 Termes dominants	12
3.2.2 Séparation des termes pairs et impairs	14
3.2.3 Transformations n'affectant pas l'intégrabilité	16
3.3 Conditions pour l'existence d'une intégrale d'ordre 3	17
3.4 Potentiels possédant des intégrales d'ordre 1	18
3.4.1 Potentiels centraux	19
3.4.2 Potentiels invariants sous translation	20
3.5 Potentiels séparables en coordonnées cartésiennes	24
3.5.1 Cas 1 : $V = V_1(x) + ay^2$	28
3.5.2 Cas 2 : $V = ay + V_1(x)$	35
3.5.3 Cas 3 : $A_{120} = A_{021} = 0$	39
3.5.4 Synthèse des résultats	40

Chapitre 4 : Le théorème de Liouville et la superintégrabilité	45
4.1 Le théorème de Liouville	45
4.2 Quelques applications du théorème de Liouville pour les systèmes super-intégrables	46
4.3 Forme normale et isochronicité	52
Chapitre 5 : Superintégrabilité et mécanique quantique	60
5.1 Potentiels séparables superintégrables et spectres équidistants	60
5.2 Méthodes algébriques	70
5.2.1 Quelques applications	74
Chapitre 6 : Liens entre intégrabilité quantique et intégrabilité classique.	80
Chapitre 7 : Conclusion	83
Bibliographie	i

Liste des tableaux

3-1 Potentiels satisfaisant la condition de compatibilité linéaire pour des coefficients non nuls 27

Liste des figures

- 3-1 Le potentiel $V_1(x)$ en fonction des paramètres c et d 34
- 4-1 Segment d'une trajectoire sur T^{k+1} lorsque ω_i et ω_k sont commensurables 49
- 4-2 Rectification des trajectoires par le changement de variables $(x, p) \rightarrow (X, P)$ 55
- 5-1 Premiers niveaux d'énergie correspondant à x et y pour le potentiel (Q.19) 67
- 5-2 Évolution des premiers niveaux d'énergie de carré sommable et de carré non sommable pour le potentiel $V = ay^2 + b/y^2$ en fonction de b 68

Remerciements

Je tiens à remercier Pavel Winternitz, dont le soutien a rendu possible la rédaction de ce mémoire, pour les nombreuses heures passées à partager avec moi son expérience, son intuition ainsi que les résultats de ses calculs, sans compter les conseils, les conférences et la révision de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier Josée Bérubé, pour les discussions intéressantes, le support moral, la révision de ce mémoire et l'usage de son agrafeuse.

J'ai aussi bénéficié des discussions intéressantes et du support moral de Marc-André Vachon, qui m'a offert en plus son patient soutien informatique et de bonnes occasions de me changer les idées.

Merci finalement à David Gomez, Christiane Rousseau et Piergiulio Tempesta pour leurs idées et suggestions qui m'ont souvent lancé sur des pistes fructueuses.

Chapitre 1

Introduction

Nous discuterons dans ce mémoire de différentes questions liées à l'intégrabilité et, en particulier, à la superintégrabilité en mécanique quantique et en mécanique classique.

On dit d'un système hamiltonien classique en n dimensions qu'il est intégrable s'il possède n constantes du mouvement (ou intégrales) indépendantes et en involution, c'est-à-dire si on peut trouver des fonctions $\{X_i(\vec{x}, \vec{p})\}_{i=1, \dots, n}$ qui Poisson-commutent entre elles et avec le Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p})$,

$$\begin{aligned} \{H, X_i\}_{CP} &= 0, \\ \{X_i, X_j\}_{CP} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

et qui sont fonctionnellement indépendantes.

Cette définition est justifiée par le théorème de Liouville, qui affirme entre autres qu'un tel système peut être résolu par quadratures, c'est-à-dire en effectuant uniquement des opérations algébriques et des intégrales. Nous discuterons plus à fond du théorème de Liouville dans la section 4.1.

Il est tout d'abord important de remarquer que l'intégrabilité est un phénomène plutôt rare. Tous les systèmes hamiltoniens possèdent au moins une intégrale du mouvement, le Hamiltonien, mais l'existence d'une intégrale supplémentaire est une condition restrictive. Le cas unidimensionnel, où tous les systèmes sont intégrables, fait donc figure

d'exception.

Malgré cette rareté, les Hamiltoniens intégrables sont d'une importance capitale. En effet, le théorème de Liouville nous indique que nous pouvons connaître bien davantage sur le comportement de tels Hamiltoniens, et donc sur les systèmes qu'ils modélisent, que ce que nous aurions pu savoir si les Hamiltoniens avaient été non-intégrables. En effet les cas non-intégrables imposent souvent l'utilisation de méthodes numériques qui, tout en étant extrêmement utiles, posent des problèmes de stabilité et de convergence et fournissent souvent moins d'intuition physique (ou mathématique) que les solutions exactes. Les systèmes intégrables sont ainsi utilisés pour étudier et comprendre des phénomènes qui auraient été fort difficiles à étudier autrement, en particulier les comportements à long terme. En d'autres mots, les systèmes non-intégrables sont souvent chaotiques, tandis que les systèmes intégrables ne le sont jamais. En ce sens, l'intégrabilité est souvent considérée comme le contraire du chaos.

L'intégrabilité est une propriété non seulement rare, mais aussi sensible aux perturbations. En effet, il suffit de perturber très légèrement un Hamiltonien intégrable pour qu'il perde cette propriété. Ceci peut sembler un défaut majeur pour une propriété dont on souhaite qu'elle ait un sens physique puisqu'on ne connaît jamais un système réel avec une précision absolue. Il existe fort heureusement des méthodes perturbatives qui permettent d'étudier les propriétés des systèmes qui sont suffisamment proches de systèmes intégrables, dans la zone de transition entre intégrabilité et chaos. C'est en particulier ce que fait la théorie KAM (pour Kolmogorov-Arnold-Moser), qui a mené directement au développement de la théorie du chaos.

On dit d'un système intégrable qu'il est superintégrable s'il possède, en plus des intégrales $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, un ensemble $\{Y_j\}_{j=1,\dots,k}$ d'intégrales supplémentaires. L'ensemble des intégrales X_i et Y_j doivent être indépendantes, mais on n'exige pas des Y_j qu'elles soient en involution entre elles ou avec les X_i . On dit finalement d'un système qu'il est maximalelement superintégrable si $k = n - 1$. Nous verrons en effet au chapitre 2 qu'un Hamiltonien classique ne peut posséder plus de $2n - 1$ intégrales indépendantes.

La superintégrabilité est une propriété plus rare encore que l'intégrabilité. Pour se convaincre de son importance, mentionnons que le potentiel de Képler, l'oscillateur harmonique et le potentiel constant, potentiels importants s'il en est, sont tous trois superintégrables. Non seulement sont-ils faciles à résoudre et donc souvent utilisés comme modèles, mais ils sont en plus très présents dans la nature. Notons que le fait qu'ils soient relativement faciles à résoudre n'est pas très surprenant ; les potentiels simplement intégrables étant déjà «gentils», on pouvait s'attendre à ce que les potentiels superintégrables le soient encore plus !

Les définitions de l'intégrabilité et de la superintégrabilité en mécanique quantique sont très semblable aux définitions classiques. Il s'agit tout simplement de remplacer le crochet de Poisson par le commutateur ; une intégrale en mécanique quantique est un opérateur qui commute avec le Hamiltonien. Sont donc intégrables les systèmes qui possèdent n intégrales en involution, superintégrables ceux qui possèdent en plus k intégrales supplémentaires et maximalelement superintégrables ceux pour lesquels $k = n - 1$.

Il manque toutefois à ces définitions un ingrédient essentiel qui est la définition de l'indépendance d'un système d'intégrales. Nous ne connaissons actuellement aucune telle définition qui soit parfaitement satisfaisante, et nous tenterons d'établir des résultats qui ne dépendent pas du choix d'une telle définition. Nous discuterons des problèmes reliés à l'élaboration d'une définition appropriée au chapitre 2.

Nous verrons plus loin que l'intégrabilité quantique et l'intégrabilité classique sont deux phénomènes intimement reliés. Il est donc permis d'espérer que des résultats correspondant aux théorèmes de Liouville et KAM pourront un jour être développés, nous permettant en particulier de mieux comprendre ce qu'il advient de la théorie du chaos lorsqu'on passe en mécanique quantique. Pour ce faire, une investigation plus complète des systèmes intégrables et superintégrables tant quantiques que classiques est nécessaire. C'est, pour l'essentiel, ce que nous avons entrepris de faire dans les travaux que nous présentons dans ce mémoire.

Dans un premier temps, nous nous sommes restreints aux systèmes hamiltoniens bidimensionnels de forme

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x, y) \quad (1.2)$$

possédant des intégrales pouvant s'écrire sous forme de polynômes dans les impulsions. Les systèmes possédant trois intégrales au plus quadratiques ayant déjà été classifiés dans [1, 2], nous avons abordé l'étude des systèmes possédant des intégrales d'ordre plus élevé par les systèmes possédant, en plus du Hamiltonien, au moins une intégrale de premier ordre et une de troisième ordre dans les impulsions. En travaillant de façon systématique, nous avons pu trouver tous les Hamiltoniens entrant dans cette catégorie. Même si ceux-ci étaient déjà connus dans la littérature, notre travail n'a pas été inutile puisque nous avons pu montrer pour la première fois qu'il n'en existait pas d'autres. Nous avons aussi dressé une liste complète des intégrales d'ordre 3 de ces systèmes, ce qui s'est avéré utile à de nombreuses reprises par la suite. Les résultats de ces travaux sont présentés dans la section 3.4, ainsi que dans [3].

Nous avons ensuite tenté de généraliser ces travaux à l'ensemble des potentiels possédant à la fois des intégrales d'ordre deux et trois. Les Hamiltoniens de type (1.2) possédant une intégrale d'ordre deux ayant déjà été répartis en quatre catégories (selon le système de variable dans lequel les équations de Schrödinger et de Hamilton-Jacobi se séparaient, voir [1]), nous nous sommes attaqués d'abord à la catégorie pour laquelle les calculs étaient les plus simples, soit celle où le potentiel est séparable en coordonnées cartésiennes. Nous sommes parvenus à classifier complètement les potentiels de ce type possédant des intégrales d'ordre trois puis, devant l'importance et l'intérêt des résultats obtenus (et présentés dans la section 3.5), nous avons abandonné l'objectif d'étendre la classification aux trois autres types pour nous concentrer sur l'analyse de ces résultats. La section 3.5 contient en outre une liste de tous les potentiels séparables en coordonnées cartésiennes possédant des intégrales d'ordre trois, ainsi que la liste de ces intégrales.

Afin d'analyser ces résultats, nous avons tout d'abord utilisé les outils puissants de la mécanique classique que sont les théorèmes de Liouville et de Poincaré pour déterminer les conséquences de la superintégrabilité pour nos potentiels. Le résultat principal du chapitre 4, consacré à ce sujet, est une correspondance entre les systèmes superintégrables bidimensionnels et les systèmes isochrones en une dimension.

Nous nous sommes ensuite attaqués au problème équivalent en mécanique quantique. Malgré l'absence d'outils aussi sophistiqués qu'en mécanique classique, de nombreuses pistes nous ont mené à des résultats intéressants dont plusieurs sont applicables à des classes de systèmes beaucoup plus générales que celle que nous étudions initialement. Il aurait bien entendu été plus facile de travailler avec une définition claire de l'indépendance d'un ensemble d'opérateurs, mais le fait que nous ayons pu obtenir plusieurs résultats intéressants sans l'aide d'une telle définition est un indicateur de la pertinence des concepts d'intégrabilité et de superintégrabilité en mécanique quantique.

Finalement le chapitre 6, qui contient davantage de pistes de recherche que de réponses définitives, brosse un portrait rapide de notre compréhension des liens entre mécanique quantique et mécanique classique du point de vue de l'intégrabilité et des propriétés qui y sont associées.

Chapitre 2

Indépendance d'un système d'intégrales du mouvement

2.1 Mécanique classique

En mécanique classique, l'indépendance d'un système d'intégrales du mouvement différentiables est un concept bien défini ; il suffit d'exiger que les constantes du mouvement, en tant que fonctions de p et x , soient fonctionnellement indépendantes. Si nous connaissons explicitement les intégrales, nous disposons d'un critère direct permettant de vérifier leur indépendance. Il suffit de s'assurer que le Jacobien

$$\frac{\partial(X_1, \dots, X_m)}{\partial(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n)} \quad (2.1)$$

est de rang maximal. On constate donc qu'il ne peut exister $2n$ intégrales indépendantes, puisque le théorème des fonctions implicites nous assurerait alors que les variables $(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n)$ peuvent être (au moins localement) exprimées en termes des constantes du mouvement. Il en résulte que l'espace des phases serait constitué uniquement de points fixes, puisque chaque variable doit se comporter localement comme une constante partout où le déterminant du Jacobien est non-nul. En vertu des équations de Hamilton, ceci implique que le déterminant du Jacobien ne peut être non-nul que si tous les p_i sont nuls, ce qui entre en contradiction avec la continuité de ce déterminant.

2.2 Mécanique quantique

Lorsqu'on passe à la mécanique quantique en substituant

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x, \\ p &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \\ \{ , \}_{PB} &\rightarrow \frac{i}{\hbar} [,] + o(\hbar), \end{aligned} \tag{2.2}$$

on trouve, comme nous le verrons plus loin, une relation étroite entre les intégrales du mouvement en mécanique classique et en mécanique quantique. Afin de pouvoir parler d'intégrabilité en mécanique quantique, il ne nous reste plus qu'à transposer la définition classique d'indépendance fonctionnelle à la mécanique quantique. Malheureusement, nous ne connaissons présentement aucune façon parfaitement satisfaisante d'y arriver. Le problème vient du fait que la relation quantique $[H, X] = 0$, contrairement à la relation classique $\{H, X\} = 0$, définit une relation polynomiale entre les intégrales et le Hamiltonien.

Pour trouver une définition appropriée à la mécanique quantique, deux voies s'offrent à nous. Nous pouvons tenter de nous inspirer de la définition classique afin de la transposer dans le contexte quantique, ou alors réfléchir en termes purement quantiques.

Dans les deux cas, un certain nombre de critères guident notre recherche. Parmi ceux-ci, on trouve

- i) Le fait que deux opérateurs commutent ne doit pas impliquer qu'ils sont dépendants.
- ii) $\{X_1, X_2, \dots, X_i\}$ et $X_{i+1} = f(X_1, X_2, \dots, X_i)$ devraient être dépendants pour un ensemble de fonctions f à déterminer.
- iii) p_1, p_2 et $L = xp_2 - yp_1$, devraient être des intégrales indépendantes pour une particule libre.
- iv) Les intégrales quantiques qui ont des limites classiques indépendantes devraient être indépendantes.

- v) Le nombre d'intégrales indépendantes devrait être inférieur à $2n - 1$, et à n lorsqu'elles commutent deux à deux.
- vi) La définition devrait pouvoir s'appliquer à tout système quantique.

Tous ces critères ne sont pas absolument indispensables, mais il est difficile d'imaginer une définition utile ne satisfaisant pas aux deux premiers. De plus (iii), (iv) et (v) sont utiles si l'on désire que les concepts d'intégrabilité quantique et classique soient reliés. Finalement, (vi) est une propriété évidemment désirable, mais pas absolument nécessaire. Nous supposons également, à quelques reprises dans le texte, que deux intégrales du mouvement X_1 et X_2 qui ne commutent pas peuvent être considérées comme indépendantes. Même s'il n'est pas évident qu'une définition de l'indépendance doit vérifier ce critère, plusieurs indices nous portent à croire qu'il est raisonnable. Premièrement, si $X_1 = f(X_2, H)$, on a bien que X_1 et X_2 commutent. Si elles ne commutent pas, elles ne peuvent être reliées que de façon non-triviale, ce qui fournit de l'information permettant souvent de résoudre le système, comme l'a montré Hietarinta dans [4], et comme nous le verrons au chapitre 5. Le fait que les intégrales ne commutent pas garantit également qu'elles ne peuvent être diagonalisées simultanément. On peut donc choisir deux bases différentes des états propres du Hamiltonien, selon qu'elles sont constituées d'états propres de X_1 ou de X_2 . L'existence des deux intégrales fournit donc assurément bien plus d'informations que l'existence d'une seule. Finalement ce critère est très facile à utiliser, ce qui est particulièrement utile dans un contexte où on ne souhaite pas avoir à consacrer des efforts démesurés pour faire une démonstration basée sur une définition approximative et sujette à changement.

Afin de parvenir à une définition, il semble logique de procéder par analogie avec la mécanique classique. Après tout, l'intégrabilité quantique est un concept qui découle historiquement de l'intégrabilité classique. Les systèmes intégrables classiques correspondant à des systèmes non chaotiques, la compréhension de ce qu'est l'intégrabilité quantique pourrait nous aider à comprendre le chaos en mécanique quantique. Pour ce faire, il faut que les concepts d'intégrabilité quantiques et classiques soient intimement reliés. La façon la plus simple d'obtenir ce résultat est de définir l'indépendance d'un ensemble d'opérateurs quantiques par celle de leurs équivalents classiques. Cette

définition, étudiées notamment dans [5], ne fonctionne pas mal pour les systèmes quantiques possédant des analogues classiques et tant qu'on traite d'opérateurs différentiels, malgré que même dans ce cas il n'est pas toujours facile de déterminer l'équivalent classique d'un opérateur. Parmi certains problèmes techniques, on mentionnait aussi dans [5] que cette définition pouvait difficilement être généralisée à l'ensemble des systèmes quantiques, et qu'idéalement une définition quantique ne devrait pas avoir à reposer sur sa limite classique. Finalement, remarquons que si X_1 et X_2 sont indépendantes selon cette définition, X_1 et $X_1 + \hbar^2 X_2$ ne le sont pas. Ceci n'est pas nécessairement un problème insurmontable, mais cet exemple indique encore une fois que la définition que nous cherchons ne partage pas nécessairement toutes les propriétés de sa contrepartie classique.

Nous cherchons donc maintenant une définition qui ne repose pas uniquement sur la mécanique classique, mais qui a une bonne limite classique. Nous avons étudié plusieurs définitions de l'«indépendance fonctionnelle» d'un ensemble d'opérateurs, mais il a toujours été possible de dénicher des contre-exemples, et ce même lorsque les opérateurs étaient polynomiaux. Ainsi, si on demande que les relations entre opérateurs soient des polynômes dans l'algèbre de Jordan, c'est-à-dire où le produit est remplacé par l'anticommutateur $\{A, B\} = AB + BA$, on trouve tout de même que toutes les intégrales sont dépendantes puisque le polynôme

$$-\{H, \{X, H\}\} + 2\{H^2, X\} = H[H, X] - [H, X]H.$$

s'annule si $[X, H] = 0$.

Si on cesse d'exiger que l'intégrabilité quantique implique l'intégrabilité classique, on peut trouver des définitions rigoureuses. On a ainsi suggéré [4] que des opérateurs peuvent être considérés indépendants à moins que l'un d'eux puisse être exprimé comme un polynôme dans les autres. On définit ainsi l'intégrabilité algébrique, qui clairement viole les critères (iii), (iv) et (v), et ne sera pas appropriée pour les opérateurs qui ne sont pas des polynômes dans les impulsions. Comme nous l'avons mentionné plus tôt, les systèmes intégrables selon cette définition possèdent toutefois des propriétés utiles

dues à la présence d'intégrales supplémentaires reliées de façon non-triviale.

On voit donc que différentes définitions de l'intégrabilité peuvent avoir leur utilité distincte. L'exemple le plus évident est le cas unidimensionnel, où tous les potentiels sont maximalement superintégrables au sens classique, mais où l'intégrabilité algébrique fournit tout de même une classification intéressante des potentiels. Comme le Hamiltonien est un polynôme d'ordre deux dans les impulsions, tous les systèmes unidimensionnels possédant des intégrales d'ordre trois sont intégrables en ce sens. Il se trouve que ces systèmes sont rares, et il a été montré dans [4] que les potentiels satisfont à l'équation (3.27),

$$\hbar^2 V'(x)^2 = 4(V(x) - A_1)(V(x) - A_2)(V(x) - A_3), \quad (2.3)$$

dérivée plus bas. Ces potentiels sont en fait les mêmes que ceux qui ont été trouvés superintégrables au sens habituel en deux dimensions (voir section 3.4.2). Il existe donc, sans surprise, une relation entre l'intégrabilité algébrique (en une dimension) et l'intégrabilité usuelle (en deux dimensions).

Chapitre 3

Classification des systèmes superintégrables

3.1 Objectifs

De nombreux articles ont abordé la classification des systèmes possédant des intégrales d'ordre inférieur ou égal à deux tant dans les espaces Euclidiens [6, 7, 8, 2, 9, 1] que dans les espaces de courbure constante [10, 11] ou non constante [12]. Dans ce contexte, l'intégrabilité et la superintégrabilité ont été associées à la séparabilité des équations de Schrödinger et de Hamilton-Jacobi, à la solubilité exacte [13] et à la présence de symétries généralisées [14]. La classification des systèmes de type (1.2) possédant une ou plusieurs intégrales d'ordre un et deux a été complétée dans [14]. Dans ce contexte, les conditions d'existence des intégrales sont strictement identiques en mécanique classique et quantique.

Afin de déterminer ce qu'il advient de ces propriétés pour les systèmes possédant des intégrales d'ordre plus élevé, nous avons besoin d'exemples concrets de tels systèmes. La première recherche systématique de potentiels possédant des intégrales d'ordre trois remonte à Drach [15]. Toutefois celui-ci s'est limité aux Hamiltoniens classiques dans un espace pseudo-euclidien complexe. Parmi les dix familles de potentiels qui sont données dans cet article, il a été démontré [16] que sept possédaient en fait des intégrales d'ordre deux, et que l'intégrale d'ordre trois découlait de l'existence de celles-ci. Parmi les efforts concernant la classification et la compréhension des intégrales d'ordre plus élevé, mentionnons aussi [17, 3, 18].

Nous avons entrepris dans [19, 3] de classifier les systèmes superintégrables possé-

dant des intégrales du mouvement d'ordre 3, en nous restreignant aux cas où les potentiels possédaient aussi des intégrales d'ordre un ou deux. Dans le premier cas, traité dans la section 3.4, nous avons pu nous restreindre sans perte de généralité aux potentiels radiaux ou invariant par translations. L'existence d'une intégrale d'ordre deux impose quant à elle que les équations de Hamilton-Jacobi ou de Schrödinger se séparent en coordonnées cartésiennes, polaires, paraboliques ou elliptiques (voir [1]). Notre travail a porté sur les systèmes séparables en coordonnées cartésiennes. Nous sommes parvenus à une liste complète des potentiels possédant des intégrales d'ordre un et trois, et des potentiels séparables en coordonnées cartésiennes possédant des intégrales d'ordre trois.

Il pourrait sembler à première vue que l'étude des systèmes séparables en coordonnées cartésiennes est en quelque sorte triviale, puisqu'alors le mouvement est complètement découplé et le système peut être résolu comme s'il s'agissait de deux systèmes unidimensionnels indépendants. Toutefois, les conditions de régularité imposées par l'existence d'une intégrale supplémentaire en deux dimensions imposent des conditions sur le comportement du système unidimensionnel, et permettent de comprendre des phénomènes qu'une approche strictement unidimensionnelle ne parvenait pas à expliquer. Cette approche sera utilisée dans les chapitres 4 et 5.

3.2 Remarques préalables

Les équations déterminant l'existence d'une intégrale d'ordre trois sont loin d'être simples. Quelques remarques générales nous permettent toutefois de les simplifier considérablement avant de nous y attaquer directement.

3.2.1 Termes dominants

En mécanique quantique comme en mécanique classique, on suppose que l'intégrale du mouvement est de la forme

$$X = \sum_{i+j \leq n} \{f_{ij}, p_x^i p_y^j\}. \quad (3.1)$$

Ici le crochet est l'anticommutateur qui, nous le verrons plus bas, est la manière la plus naturelle de regrouper les termes de l'intégrale dans le cas quantique. Dans le cas classique il n'est pas nécessaire, mais comme il n'a d'autre effet que de multiplier l'intégrale par une constante, nous conserverons cette notation pour le traitement unifié des cas quantique et classique.

Les termes d'ordre dominant en p_i de l'équation classique $\{X, H\}_{CP} = 0$ et de l'équation quantique $[X, H] = 0$ fournissent alors un ensemble d'équations ne dépendant pas de V et reliant les $f_{i,j}$ avec $i + j = n$:

$$\partial_x f_{n0} = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial_y f_{0n} = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_x f_{ij} + \partial_y f_{i+1, j-1} = 0. \quad (3.4)$$

La solution générale de ces équations peut s'écrire

$$f_{i, n-i} = \sum_{j \leq i} (-1)^{i-j} (\partial_x)^{i-j} \left(\sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x^k \right) y^{i-j}, \quad (3.5)$$

où les a_{jk} sont des constantes arbitraires. D'après les contraintes sur j et k , on a $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ solutions indépendantes au maximum. Or nous connaissons déjà les $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ solutions linéairement indépendantes données par

$$A_{ijk} L_3^i p_1^j p_2^k, \quad (3.6)$$

$$L = x p_2 - y p_1,$$

avec $i + j + k = n$. En effet ces termes correspondent aux intégrales du Hamiltonien libre et doivent donc obéir aux équations (3.2) à (3.4). Comme ils fournissent une base de dimension appropriée de l'espace des solutions de degré n , nous savons que nous pouvons en toute généralité nous débarrasser des équations indépendantes du potentiel (3.2 à 3.4) en posant les termes dominants de notre intégrale égaux à

$$\sum_{i+j+k=n} A_{ijk} \{L_3^i, p_1^j p_2^k\}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Séparation des termes pairs et impairs

En mécanique classique, une façon alternative d'écrire la condition qui garantit que X est une constante du mouvement est

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial X}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0, \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -V_{q_i}(q_1, q_2), \\ \dot{q}_i &= p_i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

On utilise ensuite le fait que X est un polynôme en les p_i et que les coefficients des différentes puissances de ces p_i dans l'équation (3.8) doivent s'annuler séparément. Explicitement, si on substitue (3.1) dans (3.8), on trouve

$$\sum_{j+k=1}^n \left(\frac{\partial f_{jk}}{\partial x} p_1^{j+1} p_2^k + \frac{\partial f_{jk}}{\partial y} p_1^j p_2^{k+1} - f_{jk} V_x p_1^{j-1} p_2^k - f_{jk} V_y p_1^j p_2^{k-1} \right) = 0. \quad (3.10)$$

On constate que coefficients des termes d'ordre impairs dans l'équation (3.10) définissent des relations entre les coefficients de termes d'ordre pair de l'intégrale X . Les termes pairs de l'équation (3.10) définissent de même façon des relations entre les termes

d'ordre impair dans X . Il n'y a donc aucune relation entre les termes de parité différente de l'intégrale X . Toute intégrale possédant des termes de parité différente peut donc s'écrire comme la somme de deux intégrales de parité bien définie. On ne perd donc aucune généralité à chercher uniquement des intégrales ayant une parité bien définie. Dans le cas des intégrales classiques d'ordre 3, nous avons donc montré que l'intégrale peut se ramener à

$$X = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk} L^i p_1^j p_2^k + g_1(x, y) p_1 + g_2(x, y) p_2. \quad (3.11)$$

En mécanique quantique, on trouve un résultat semblable si l'on admet que le Hamiltonien est auto-adjoint, c'est-à-dire si le potentiel est réel.

En effet, comme les p_i et L sont auto-adjoints, chacun des termes de l'intégrale peut être séparé simplement en une partie auto-adjointe et une partie anti-auto-adjointe :

$$\begin{aligned} \{f, p_1^j p_2^k\} &= \{f, p_1^j p_2^k\}^+ + i\{f, p_1^j p_2^k\}^- = \{\Re[f], p_1^j p_2^k\} + i\{\Im[f], p_1^j p_2^k\}, \\ A_{ijk}\{L^i, p_1^j p_2^k\} &= \Re[A_{ijk}]\{L^i, p_1^j p_2^k\} + i\Im[A_{ijk}]\{L^i, p_1^j p_2^k\}. \end{aligned}$$

L'opérateur X peut donc s'écrire

$$X = X^+ + iX^-,$$

où X^+ et X^- sont auto-adjoints. Comme le Hamiltonien est aussi auto-adjoint, le fait que $[H, X]^\dagger = 0$ implique que $X^\dagger = X^+ - iX^-$ doit aussi commuter, de même que X^+ et X^- . Il est donc possible de restreindre notre attention aux opérateurs auto-adjoints sans perte de généralité. Ceci nous conduit à la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Pour toute intégrale auto-adjointe d'ordre n , il existe une intégrale auto-adjointe d'ordre n , ayant les mêmes termes dominants et une parité bien définie, i.e.*

$$X_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{n-2j} \{P_{n-2j,k}(x, y), p_1^k p_2^{n-2j-k}\}, \quad (3.12)$$

où P est une fonction réelle.

Démonstration. Comme le Hamiltonien est réel, et que les fonctions indéterminées d'une intégrale auto-adjointe (écrite grâce à l'anticommutateur) le sont aussi, il est aisé de séparer les composantes réelles et complexes de $[H, X] = [H, \Re[X]] + i[H, \Im[X]]$, qui doivent commuter séparément. Comme $\Re[X]$ correspond aux termes d'ordre pair de X et $\Im[X]$ aux termes d'ordre impair, on constate comme dans le cas classique que les termes d'ordre pair et impair forment des intégrales distinctes. \square

Dans le cas où l'intégrale est d'ordre 3, on peut donc se ramener à

$$X = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk} \{L^i, p_1^j p_2^k\} + \{g_1(x, y), p_1\} + \{g_2(x, y), p_2\}. \quad (3.13)$$

Ceci simplifie considérablement le problème qui nous intéresse. Toutefois il serait intéressant d'avoir un résultat n'exigeant pas que le Hamiltonien soit auto-adjoint. En effet, dans nos calculs subséquents, nous n'avons plus à utiliser le fait que le potentiel est réel. Nos résultats s'appliqueraient donc à une plus vaste classe de Hamiltoniens.

3.2.3 Transformations n'affectant pas l'intégrabilité

D'autres observations nous permettront de simplifier davantage le problème en cours de route, et aussi de vérifier la cohérence de nos résultats. Ainsi, comme l'addition d'une constante à un potentiel intégrable ne peut affecter l'intégrabilité de celui-ci, on

s'attend à ce que les équations différentielles définissant le potentiel ne dépendent que des dérivées de V . Dans certains cas, il sera pratique de négliger la constante d'intégration correspondant à cette constante additive dans la résolution des équations.

De façon plus importante, les isométries du plan n'affectent pas l'intégrabilité puisqu'il suffit d'effectuer la même transformation sur les intégrales du mouvement pour préserver les relations de commutation. Nous pourrions donc utiliser les transformations

- $x \rightarrow x + a$;
- $y \rightarrow y + b$;
- $(x, y) \rightarrow (x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta)$;

afin de simplifier les intégrales du mouvement.

3.3 Conditions pour l'existence d'une intégrale d'ordre 3

Maintenant que nous avons simplifié autant que possible l'intégrale du mouvement, nous pouvons calculer les conditions pour lesquelles cette intégrale commute (ou Poisson-commute) avec le Hamiltonien. En mécanique quantique, on obtient

$$0 = g_1 V_x + g_2 V_y - \frac{\hbar^2}{4} \left(f_1 V_{xxx} + f_2 V_{xxy} + f_3 V_{xyy} + f_4 V_{yyy} + 8A_{300}(xV_y - yV_x) + 2(A_{210}V_x + A_{201}V_y) \right), \quad (3.14)$$

$$(g_1)_x = 3f_1(y)V_x + f_2(x, y)V_y, \quad (3.15)$$

$$(g_2)_y = f_3(x, y)V_x + 3f_4(x)V_y, \quad (3.16)$$

$$(g_1)_y + (g_2)_x = 2(f_2(x, y)V_x + f_3(x, y)V_y), \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{aligned}
f_1(y) &= -A_{300}y^3 + A_{210}y^2 - A_{120}y + A_{030}, \\
f_2(x, y) &= 3A_{300}xy^2 - 2A_{210}xy + A_{201}y^2 + A_{120}x - A_{111}y + A_{021}, \\
f_3(x, y) &= -3A_{300}x^2y + A_{210}x^2 - 2A_{201}xy + A_{111}x - A_{102}y + A_{012}, \\
f_4(x) &= A_{300}x^3 + A_{201}x^2 + A_{102}x + A_{003}.
\end{aligned}$$

Les équations en mécanique classique s'obtiennent des équations (3.14) à (3.17) en posant $\hbar = 0$. On constate donc que les équations (3.15) à (3.17) sont strictement identiques en mécanique classique et en mécanique quantique. En dérivant et en combinant ces trois équations il est possible de se débarrasser des g_i afin d'obtenir une EDP linéaire n'impliquant que $V(x, y)$.

$$\begin{aligned}
0 &= -f_3V_{xxx} + (2f_2 - 3f_4)V_{xxy} + (-3f_1 + 2f_3)V_{xyy} - f_2V_{yyy} \\
&\quad + 2(f_{2y} - f_{3x})V_{xx} + 2(-3f_{1y} + f_{2x} + f_{3y} - 3f_{4x})V_{xy} + 2(-f_{2y} + f_{3x})V_{yy} \quad (3.18) \\
&\quad + (-3f_{1yy} + 2f_{2xy} - f_{3xx})V_x + (-f_{2yy} + 2f_{3xy} - 3f_{4xx})V_y.
\end{aligned}$$

Cette équation sera de la plus grande importance lorsque viendra le temps de résoudre explicitement le système. D'autres conditions de compatibilité pour $V(x, y)$ peuvent être obtenues et sont contenues dans [3]. Elles seront toutefois non-linéaires et d'ordre plus élevé, ce qui réduit considérablement leur utilité pratique .

3.4 Potentiels possédant des intégrales d'ordre 1

Un potentiel ne peut admettre d'intégrale d'ordre 1 que s'il vérifie l'équation

$$aL_3V + bp_1V + cp_2V = 0.$$

En d'autres mots, le potentiel doit être invariant sous rotations ou translations. On peut se restreindre sans perte de généralité, puisqu'il nous est permis d'utiliser les transformations de la section 3.2.3, à l'un des deux cas suivants,

- $a \neq 0$: $V = V(r), \quad X = L_3,$
- $a = 0, b^2 + c^2 \neq 0$: $V = V(x), \quad X = p_2.$

Nous allons traiter ces deux possibilités séparément.

3.4.1 Potentiels centraux

D'après le théorème de Bertrand [20] et le théorème 1 du chapitre 4, les seuls potentiels classiques qui peuvent être maximale-ment superintégrables en deux dimensions sont les potentiels de Coulomb et l'oscillateur harmonique,

$$V = \frac{\alpha}{r},$$

$$V = \omega^2 r^2.$$

On trouve en effet que ce sont les seuls potentiels centraux ayant des intégrales d'ordre 3 non-triviales, non seulement en mécanique classique mais aussi en mécanique quantique. Ces intégrales découlent toutefois des intégrales d'ordre 2 que ces potentiels admettent, soit

$$X_1^C = \{L_3, p_1\} - \frac{2\alpha y}{r};$$

$$X_2^C = \{L_3, p_2\} + \frac{2\alpha x}{r}.$$

pour le potentiel de Coulomb et

$$X_1^h = -\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \omega^2x^2 - \omega^2y^2;$$

$$X_2^h = -p_1p_2 + 2\omega^2xy.$$

pour l'oscillateur harmonique.

3.4.2 Potentiels invariants sous translation

Posons maintenant $V = V(x)$. Les équations déterminantes (3.14) à (3.17) deviennent

$$0 = g_1V_x - \frac{\hbar^2}{4}(f_1V_{xxx} - 8yA_{300}V_x + 2A_{210}V_x), \quad (3.19)$$

$$(g_1)_x = 3f_1(y)V_x, \quad (3.20)$$

$$(g_2)_y = f_3(x, y)V_x, \quad (3.21)$$

$$(g_1)_y + (g_2)_x = 2(f_2(x, y)V_x), \quad (3.22)$$

et la condition de compatibilité linéaire (3.18)

$$0 = (A_{210}x^2 + A_{111}x + A_{012})V_{xxx} + 4(2A_{210}x + A_{111})V_{xx} + 12A_{210}V_x, \quad (3.23)$$

$$0 = (3A_{300}x^2 + 2A_{201}x + A_{102})V_{xxx} + 4(6A_{300}x + 2A_{201})V_{xx} + 36A_{300}V_x.$$

En mécanique classique, les seuls potentiels qui sont solution de (3.23) et de (3.19) à (3.22) sont

$$V = ax, \quad (3.24)$$

$$V = \frac{a}{x^2}, \quad (3.25)$$

et leurs intégrales de troisième ordre sont conséquence directe des intégrales d'ordre inférieur.

En mécanique quantique, toutefois, la situation est différente. On trouve bien entendu que les deux potentiels précédents admettent des intégrales d'ordre 3. Ainsi, $V = a/x^2$ admet les trois intégrales

$$\begin{aligned} X_1 &= \{L_3^2, p_2\} + 2a\left\{\frac{y^2}{x^2}, p_2\right\}, \\ X_2 &= \{L_3, p_1 p_2\} - 2a\left\{\frac{y}{x^2}, p_2\right\}, \\ X_3 &= 2p_1^2 p_2 + 2a\left\{\frac{1}{x^2}, p_2\right\}. \end{aligned}$$

Toutefois, lorsque $a = \hbar^2$, quatre intégrales supplémentaires commutent avec le Hamiltonien,

$$\begin{aligned} X_4 &= 2L_3^3 + \hbar^2\left\{\frac{3y^2}{x} + 2x, p_2\right\} + \hbar^2\left\{\frac{-3y^3}{x^2} - 2y, p_1\right\}, \\ X_5 &= \{L_3^2, p_1\} - \hbar^2\left\{\frac{2y}{x}, p_2\right\} + \frac{\hbar^2}{2}\left\{\frac{6y^2}{x^2} + 1, p_1\right\}, \\ X_6 &= \{L_3, p_1^2\} + \hbar^2\left\{\frac{1}{x}, p_2\right\} - 3\hbar^2\left\{\frac{y}{x^2}, p_1\right\}, \\ X_7 &= 2p_1^3 + \hbar^2\left\{\frac{3}{x^2}, p_1\right\}. \end{aligned}$$

On trouve donc ici neuf intégrales, dont deux sont triviales (p_y^3 et $H p_y$) et quatre sont purement quantiques. Bien entendu, toutes ces intégrales ne sont pas indépendantes. Toutefois l'existence d'intégrales supplémentaires fournit des informations sur le potentiel lorsqu'elles sont reliées de façon non-triviale (voir par exemple [21, 4] et le

chapitre 5). L'existence même de ces intégrales n'est pas le fruit du hasard et indique que le potentiel en question possède des propriétés intéressantes.

Lorsque tous les coefficients de l'équation (3.23) s'annulent, on peut résoudre les équations (3.19) à (3.22), et on trouve que le potentiel doit obéir à l'équation

$$\hbar^2 V'(x)^2 = 4V(x)^3 + \alpha V(x)^2 + \beta V(x) + \gamma, \quad (3.26)$$

où α, β, γ sont des constantes arbitraires réelles. L'équation (3.26), qui possède comme solution les fonctions elliptiques, peut être réécrite comme

$$\hbar^2 V'(x)^2 = 4(V(x) - A_1)(V(x) - A_2)(V(x) - A_3), \quad (3.27)$$

ou encore

$$\frac{\hbar^2 V_{xxx}}{4 V_x} - 3V = -\sigma, \quad \sigma = A_1 + A_2 + A_3.$$

À une translation de V près, les solutions de cette équation sont données par

$$V(x) = \hbar^2 \wp(x),$$

où $\wp(x)$ est la fonction elliptique de Weierstraß.

Pour avoir une meilleure idée du comportement de ces solutions, on peut les réécrire en termes des fonctions elliptiques de Jacobi.

Si les trois A_i sont réels, on trouve des potentiels qui sont soit bornés, soit singuliers ;

$$\begin{aligned} V_1 &= (\hbar\omega)^2 k^2 \operatorname{sn}^2(\omega x, k), \\ V_2 &= \frac{(\hbar\omega)^2}{\operatorname{sn}^2(\omega x, k)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

respectivement.

Si nous avons plutôt $A_3 = A_2^*$ et $\operatorname{Im}A_2 \neq 0$, nous trouvons le potentiel singulier

$$V_3 = \frac{(\hbar\omega)^2}{2(\operatorname{cn}(\omega x, k) + 1)}.$$

Pour ces trois potentiels, nous avons $0 \leq k \leq 1$, $\omega \in \mathbf{R}$.

Les cas particuliers avec $k = 0$ et $k = 1$, qui surviennent lorsque deux des A_i coïncident, s'écrivent en termes de fonctions élémentaires.

On obtient donc soit un potentiel « soliton »,

$$V_{1a} = -\frac{(\hbar\omega)^2}{\cosh^2(\omega x)},$$

soit des potentiels singuliers périodiques ou non périodiques :

$$\begin{aligned} V_{2a} &= \frac{(\hbar\omega)^2}{\sin^2(\omega x)}, \\ V_{2b} &= \frac{(\hbar\omega)^2}{\sinh^2(\omega x)}. \end{aligned}$$

Finalement, si les trois A_i sont égaux, on retrouve

$$V_4 = \frac{\hbar^2}{x^2},$$

ce qui explique en partie le nombre élevé d'intégrales que nous avons trouvé pour ce potentiel.

Dans tous les cas, on peut écrire les intégrales du mouvement comme

$$\begin{aligned} X_1 &= \{L_3, p_1^2\} + \{(\sigma - 3V(x))y, p_1\} + \{-\sigma x + 2xV(x) + \int V(x)dx, p_2\}, \\ X_2 &= p_1^3 + \frac{1}{2}\{3V(x) - \sigma, p_1\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.5 Potentiels séparables en coordonnées cartésiennes

Nous supposons dans cette section que $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$. Les équations (3.14) à (3.17) se simplifient pour donner

$$0 = g_1 V_{1x} + g_2 V_{2y} - \frac{\hbar^2}{4} \left(f_1 V_{1xxx} + f_4 V_{2yyy} + 8A_{300}(xV_{2y} - yV_{1x}) + 2(A_{210}V_{1x} + A_{201}V_{2y}) \right), \quad (3.30)$$

$$(g_1)_x = 3f_1(y)V_{1x} + f_2(x, y)V_{2y}, \quad (3.31)$$

$$(g_2)_y = f_3(x, y)V_{1x} + 3f_4(x)V_{2y}, \quad (3.32)$$

$$(g_1)_y + (g_2)_x = 2(f_2(x, y)V_{1x} + f_3(x, y)V_{2y}). \quad (3.33)$$

Les équations (3.31) et (3.32) s'intègrent directement, de sorte que nous n'avons plus à résoudre que deux équations.

La condition de compatibilité linéaire nous permet encore une fois de trouver des EDO pour V_1 et V_2 . Il suffit de poser alternativement x et y égaux à une constante, 0

étant le choix le plus simple. On trouve alors

$$(A_{210}x^2 + A_{111}x + A_{012})V_1^{(3)}(x) + 4(2A_{210}x + A_{111})V_1''(x) + 12A_{210}V_1'(x) = ax + b, \quad (3.34)$$

$$(A_{201}y^2 - A_{111}y + A_{021})V_2^{(3)}(y) + 4(2A_{201}y - A_{111})V_2''(y) + 12A_{201}V_2'(y) = cy + d. \quad (3.35)$$

Les différentes solutions homogènes à ces équations avaient déjà été calculées lorsque nous étudions $V = V(x)$. Selon les valeurs des paramètres, on peut se ramener, lorsque $A_{210} \neq 0$, à

$$V_{1hom} = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{(x - \alpha)^2}, \quad (3.36)$$

$$V_{1hom} = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3}.$$

Sinon, lorsque $A_{111} \neq 0$ on a

$$V_{1hom} = \frac{c_1}{x^2} + c_2x. \quad (3.37)$$

Et, finalement, si seul $A_{012} \neq 0$, on peut se ramener à

$$V_{1hom} = c_2x^2 + c_1x. \quad (3.38)$$

La solution particulière se sépare heureusement selon les mêmes conditions ; lorsque $A_{210} \neq 0$, $V_{1part} = ax^2 + bx$. Sinon, lorsque $A_{111} \neq 0$, $V_{1part} = ax^3 + bx^2$, et finalement, si seulement $A_{012} \neq 0$, $V = ax^4 + bx^3$. On peut donc choisir V_1 et V_2 parmi les formes suivantes.

$$(A.1) \quad u_1 = \frac{c_1}{(x+\alpha)^2} + \frac{c_2}{(x-\alpha)^2} + c_3x^2 + c_4x;$$

$$(A.2) \quad u_2 = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + c_3x^2 + c_4x;$$

$$(A.3) \quad u_3 = \frac{c_1}{x^2} + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x;$$

$$(A.4) \quad u_4 = c_1x^4 + c_2x^2 + c_3x;$$

$$(A.5) \quad u_5 = c_1x^3 + c_2x;$$

$$(A.6) \quad u_6 = c_1x^2;$$

$$(A.7) \quad u_7 = c_1x.$$

On peut maintenant résoudre tous les cas où les coefficients des deux équations (3.34) et (3.35) ne s'annulent pas trivialement. On trouve dans ce cas les 15 potentiels du tableau 1.

Nous avons considéré séparément les cas particuliers lorsque ceux-ci admettaient des intégrales supplémentaires. Seules les intégrales de troisième ordre sont mentionnées et, à l'exception de l'oscillateur harmonique, les potentiels invariants sous translation n'ont pas été inclus dans la liste puisqu'on les retrouve dans la section 3.4.2. Les intégrales du mouvement complètes se retrouvent dans la section 3.5.4.

Plusieurs de ces potentiels sont nouveaux. Les potentiels classiques sont indiqués par une \star . Ces potentiels sont bien connus (voir par exemple [2]) et, à l'exception de V_i , sont quadratiquement superintégrables, c'est-à-dire qu'ils possèdent suffisamment d'intégrales indépendantes de second ordre pour les rendre superintégrables.

Ces potentiels sont tous quantiquement superintégrables. Un même potentiel classique peut donc avoir de nombreux équivalents quantiques. L'oscillateur harmonique classique, V_a , est un cas limite de V_a , V_c et V_d , mais aussi, si on pose $\alpha = \sqrt{\hbar}/\omega$, de V_e , V_f et V_g , en plus des potentiels équivalents qu'on peut obtenir en permutant x et y , et en plus des potentiels qui ne satisfont pas à la condition de compatibilité linéaire pour des coefficients non-triviaux. L'oscillateur harmonique anisotrope de rapport 1 : 3 admet aussi plusieurs déformations quantiques possédant des intégrales d'ordre 3, alors que l'oscillateur anisotrope de rapport 1 : 2 n'en admet pas. Remarquons aussi que si nous voulons que les potentiels soient réels, α doit être réel ou purement imaginaire dans les potentiels V_e , V_f , V_g and V_k . Ils ont donc comme limite classique l'oscillateur

Potentiels superintegrable	Termes dominants des intégrales
$\star V_a = a(x^2 + y^2)$	$L^3; \{L, p_x p_y\}; \{L, p_y^2\}; \{L, p_x^2\}$
$\star V_b = a(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$	$\{L, p_x p_y\}$
$V_c = a(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{x^2} + \frac{\hbar^2}{y^2}$	$L^3; \{L, p_x p_y\}$
$V_d = a(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$	$L^3; \{L, p_x p_y\}; \{L, p_y^2\}$
$V_e = \frac{\hbar^2}{8\alpha^4}(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{(x-\alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x+\alpha)^2}$	$2L^3 - 3\alpha^2\{L, p_y^2\}; \{L, p_x^2\}$
$V_f = \frac{\hbar^2}{8\alpha^4}(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2} + \frac{\hbar^2}{(x+\alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x-\alpha)^2}$	$2L^3 - 3\alpha^2\{L, p_y^2\}$
$V_g = \frac{\hbar^2}{8\alpha^4}(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{(y-\alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x-\alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(y+\alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x+\alpha)^2}$	$2L^3 - 3\alpha^2(\{L, p_x^2\} + \{L, p_y^2\})$
$\star V_h = a(4x^2 + y^2) + \frac{b}{y^2} + cx$	$p_x p_y^2$
$\star V_i = a(9x^2 + y^2)$	$\{L, p_y^2\}$
$V_j = a(9x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$	$\{L, p_y^2\}$
$V_k = \frac{\hbar^2}{8\alpha^4}(9x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{(y+\alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(y-\alpha)^2}$	$\{L, p_y^2\}$
$V_l = \frac{\hbar^2}{x^2} + \frac{a}{y^2}$	$\{L^2, p_x\}; \{L, p_x p_y\}; p_x^3$
$V_m = \frac{\hbar^2}{x^2} + \frac{\hbar^2}{y^2}$	$L^3; \{L^2, p_x\}; \{L^2, p_y\}$ $\{L, p_x p_y\}; p_x^3; p_y^3$
$V_n = ax + \frac{\hbar^2}{y^2}$	$\{L, p_y^2\}; p_y^3; p_x p_y^2$
$V_o = \frac{\hbar^2}{y^2} + V(x)$	p_y^3

TAB. 3-1 - Potentiels satisfaisant la condition de compatibilité linéaire pour des coefficients non nuls

harmonique, mais seulement pour $a > 0$.

Tous les potentiels quantiques se réduisent à des potentiels classiques intégrables lorsqu'on considère la limite classique, et ils le font parfois de plusieurs manières différentes. Ainsi, V_e , V_f et V_g s'annulent plutôt que de donner l'oscillateur harmonique si α demeure constant lorsque $\hbar \rightarrow 0$.

Finalement tous ces potentiels satisfaisant les équations (3.34) et (3.35) peuvent

être exprimés comme somme de potentiels superintegrables simples.

Supposons maintenant que $A_{210} = A_{111} = A_{012} = 0$ de sorte que (3.34) et (3.35) s'annulent trivialement pour V_1 . On peut aussi supposer que V_1 n'a pas une des formes (A.1) à (A.7). Ceci est très utile puisque si on pose maintenant $y = 1$ dans la condition de compatibilité linéaire, on trouve une équation pour V_1 qui a la même forme que (3.34), mais avec des coefficients différents. Ceux-ci doivent donc encore s'annuler trivialement et on trouve $A_{300} = A_{201} = A_{102} = 0$. Ceci en retour simplifie ce qui restait de (3.35), nous indiquant que nous pouvons maintenant nous restreindre aux trois cas suivants :

1. $V_2 = ay^2$;
2. $V_2 = ay$;
3. $A_{120} = A_{021} = 0$.

Avant d'aller plus loin, remarquons que les potentiels de la forme $V = V_1(x)$ trouvés à la section 3.4.2 qui admettent des intégrales indépendantes de y et p_y devraient apparaître comme solutions dans les trois cas. En effet, cette intégrale n'est pas affectée par l'ajout d'un terme $V_2(y)$ au potentiel.

On ne considérera donc pas ici les potentiels solution de (3.26), dont la partie $V_1(x)$ s'écrit

$$V_1 = \hbar^2 \wp(x). \quad (3.39)$$

3.5.1 Cas 1 : $V = V_1(x) + ay^2$

Dans le premier cas, une fois la substitution effectuée, on obtient deux équations,

$$0 = A_{030} \left(\hbar^2 V_1^{(3)} - 6(V_1^2)' \right) + \gamma_1 V_1', \quad (3.40)$$

$$0 = A_{120} \left(-\hbar^2 V_1^{(4)} - 24a(xV_1)' + 6(V_1^2)'' - 4ax^2 V_1'' + 8a^2 x^2 \right) \\ + 8aA_{021} (2ax - (xV_1)' - 2V_1') + 4\eta(2a - V_1''), \quad (3.41)$$

où γ_1 et η sont des constantes arbitraires. Lorsque $A_{030} \neq 0$, l'équation (3.40) pour V_1 est équivalente à (3.26), et donc ses solutions sont de la forme (3.39). Cette solution n'est intéressante que si l'on peut trouver de nouvelles intégrales, impliquant y ou p_y . Pour ce faire, il faudrait que V_1 satisfasse à l'équation (3.41) pour des paramètres non-triviaux. On peut vérifier que c'est impossible en développant (3.26) en séries de Laurent autour de $x = 0$, puis en substituant le résultat dans (3.41). Les solutions données par $A_{030} \neq 0$ ne sont donc pas intéressantes ici. On pose donc $A_{030} = \gamma_1 = 0$.

L'équation (3.41) peut maintenant être simplifiée considérablement. On suppose que $A_{120} \neq 0$ (si ce n'est pas le cas, l'équation peut se résoudre aisément, mais la solution se ramène à un des cas précédemment étudiés). On peut alors par translation en x puis en V faire disparaître les termes en A_{021} et η , puis diviser par A_{120} ;

$$0 = -\hbar^2 V_1^{(4)} - 24a(xV_1)' + 6(V_1^2)'' - 4ax^2 V_1'' + 8a^2 x^2. \quad (3.42)$$

Cette équation admet une intégrale première :

$$k = \hbar^2 (xV_1''' - V_1'') + 4x(ax^2 - 3V_1)V_1' + 6V_1^2 + 12ax^2 V_1 - 2a^2 x^4. \quad (3.43)$$

On peut simplifier (3.42) et (3.43) en substituant $V_1 = W(x) + ax^2/3$. On trouve alors

$$\hbar^2 W^{(4)} = 12WW'' + 12(W')^2 + bW' + 2bW - \frac{1}{6}b^2 x^2, \quad (3.44)$$

avec $b = -8a$ pour (3.42), et

$$k_2 = 3\hbar^2 (xW''' - W'') - 18x(W^2)' + 2(2ax^2 + 3W)^2 \quad (3.45)$$

pour l'intégrale première.

L'équation (3.44) est bien connue. Elle est équivalente à (3.16) dans [22] et à (2.17) dans [23], qui proviennent de réductions non-classiques de l'équation de Boussinesq. Cette équation a aussi été obtenue dans [24] comme réduction non-classique de l'équation de Kadomtsev-Petviashvili. L'équation (3.44) a aussi la propriété de Painlevé et, lorsque $b \neq 0$, sa solution, donnée dans [25] (équation 2.88), s'écrit en termes de la quatrième transcendante de Painlevé :

$$W = \frac{\hbar}{2} b_1 P_4'(x, \frac{b}{\hbar^2}) - \frac{1}{2} b P_4^2(x, \frac{b}{\hbar^2}) - \frac{1}{2} b x P_4(x, \frac{b}{\hbar^2}) - \frac{1}{6} (\frac{b}{2} x^2 + \hbar^2 K_1 - \hbar b_1), \quad (3.46)$$

où $b_1 \equiv \pm \sqrt{-b} = \pm \sqrt{8a}$, et $P_4(x, \frac{b}{\hbar^2}) = P_4(x, \frac{b}{\hbar^2}, K_1, K_2)$ satisfait l'équation

$$P_4''(x, \alpha) = \frac{(P_4'(x, \alpha))^2}{2P_4(x, \alpha)} - \frac{3\alpha}{2} P_4(x, \alpha)^3 - 2\alpha x P_4(x, \alpha)^2 - (\frac{\alpha}{2} x^2 + K_1) P_4(x, \alpha) + \frac{K_2}{P_4(x, \alpha)}. \quad (3.47)$$

K_1 et K_2 sont des constantes d'intégration. Le potentiel s'écrit donc

$$V(x, y) = ay^2 + \frac{\hbar}{2} b_1 P_4'(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + a \left(2P_4(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + x \right)^2 + \frac{1}{6} (-\hbar^2 K_1 + \hbar b_1). \quad (3.48)$$

Parmi les cas particuliers de ce potentiel, on retrouve $V = a(x^2 + y^2)$ lorsque $K_2 = 0$ ($P_4 = 0$), et $V = a(x^2/9 + y^2)$ lorsque $K_1 = 0$ et $K_2 = -1/18$ ($P_4 = -x/3$), et, à une permutation de x et y près, V_d, V_e, V_j et V_k . Si on pose

$$P_4(x, \alpha) = \frac{\sqrt{2}\xi}{2(-\alpha)^{1/4}} w \left(\frac{(-\alpha)^{1/4}}{\sqrt{2}\xi} x \right),$$

où ξ est une racine quatrième de l'unité, on trouve que $\omega(x)$ est la quatrième transcendante de Painlevé, définie par l'équation

$$w''(x) = \frac{(w'(x))^2}{2w(x)} + \frac{3}{2}w(x)^3 + 4xw(x)^2 + 2(x^2 - C_1)w(x) + \frac{C_2}{w(x)}. \quad (3.49)$$

On remarque que, malgré qu'il soit en pratique possible de choisir huit solutions distinctes correspondant à des ξ et un signe de b_1 différents, nous pouvons nous restreindre à $\xi = 1$ en remarquant que les autres cas peuvent être obtenus en substituant $x \rightarrow x/\xi$, et en multipliant éventuellement le Hamiltonien par -1 . Nous avons donc en fait deux Hamiltoniens distincts, selon le signe de b_1 , mais nous pouvons considérer pour ce Hamiltonien que x varie selon l'axe réel positif ou négatif, ou alors selon l'axe imaginaire positif ou négatif. Ceci pourra être exploité avec profit lorsque viendra le temps de résoudre l'équation de Schrödinger, mais comme nous nous situons ici dans un contexte réel, nous conserverons la notation $P_4(x, \alpha)$ par souci d'uniformité avec le reste de cet ouvrage.

En mécanique classique, l'équation (3.43) (avec $\hbar = 0$) admet une intégrale première,

$$c = \frac{(9V_1 - ax^2)(V_1 - ax^2)^3 + \frac{k^2}{4} - k(V_1 - ax^2)(3V_1 + ax^2)}{x^2}.$$

On peut donc écrire implicitement les solutions pour V_1 ,

$$cx^2 - d^2 + 2d(V_1 - ax^2)(3V_1 + ax^2) = (9V_1 - ax^2)(V_1 - ax^2)^3, \quad (3.50)$$

où c et d sont des constantes arbitraires. Dans le cas où $c = d = 0$, on retombe sur les oscillateurs harmoniques habituels, ou encore sur un potentiel composite formé de deux oscillateurs harmoniques de rapports 1 : 1 et 1 : 9 recollés en $x = 0$. Ce potentiel,

$$V_\alpha = ay^2 + \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \geq 0 \\ ax^2/9 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (3.51)$$

n'admet pas de dérivée seconde continue. Il est toutefois important puisque nous l'obtiendrons comme limite d'une famille de potentiels lisses. Ce type de potentiel a été utilisé comme exemple ad hoc de potentiel classiquement isochrone dont on peut vérifier que le spectre quantique n'est pas équidistant ([26, 27]). Nous l'obtenons ici de façon naturelle; non seulement possède-t-il une intégrale différentiable, mais il s'obtient de plus comme limite de la famille de potentiels lisses (3.55). De plus notre approche nous permet, en ajustant les paramètres de (3.48), de trouver un équivalent quantique superintégrable à (3.51). Nous verrons au chapitre 5 que ce potentiel quantique est probablement la contrepartie quantique de (3.51) qu'il faut considérer lorsque l'on s'intéresse à la régularité de l'espacement des niveaux d'énergie.

Il vaut la peine de s'interroger quelques instants sur le fait que le potentiel (3.51) possède une intégrale d'ordre trois, tandis que ce n'est pas le cas si on recolle plutôt des oscillateurs dont le rapport des fréquences est de 1 : 2,

$$V_\beta = ay^2 + \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \geq 0 \\ ax^2/4 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Ceci peut être compris intuitivement si on remarque qu'il existe une corrélation entre l'ordre de l'intégrale du mouvement et le nombre de «tours» que fait le système avant de regagner son état initial. En effet si on fixe les valeurs des intégrales du mouvement et d'une variable (disons x), on peut exprimer localement toutes les autres variables en termes de x et des valeurs des constantes. Toutefois plus l'ordre d'une intégrale est élevé, plus elle peut admettre de racines distinctes, et donc plus le système peut faire de tours avant de retourner à son état initial. Maintenant étudions les fréquences des deux potentiels (3.51) et (3.52) par rapport à la fréquence de $V_2(y) = ay^2$. Notons $T_a = \sqrt{2a}$ la période de l'oscillateur harmonique $V_2(y)$ et $T_{\alpha,\beta}$ les périodes selon x de

$V_{\alpha,\beta}$,

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \frac{1}{2}(T_a + 3T_a) = 2T_a, \\ T_\beta &= \frac{1}{2}(T_a + 2T_a) = 3T_a/2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Nous voyons donc que même si la période de V_β selon x est plus faible, la période totale du système V_β est plus élevée. On s'attend donc à ce que ce potentiel possède bien une intégrale, mais d'un ordre plus élevé.

Pour revenir au cas général, un potentiel solution de (3.50) s'exprime comme la racine d'un polynôme d'ordre 4, avec trois paramètres indépendants (a , c et d). On peut toutefois poser $a = 1$ et l'un des deux autres paramètres à ± 1 en dilatant x et V_1 .

On obtient ainsi une famille de potentiels qui en général ne sont pas analytiques, et qui souvent ne sont pas même définis partout dans les réels. La figure 3-1 donne un aperçu de la forme de ces potentiels en fonction des paramètres. Les potentiels les plus simples surviennent lorsqu'il est possible de factoriser dans (3.50) un terme correspondant à un oscillateur harmonique, éventuellement décalé par rapport à l'origine.

Ainsi, si on pose $c = 128a^4\tilde{d}^3/27^2$ et $d = 4a^2\tilde{d}^2/27$, l'équation (3.50) se factorise pour donner deux oscillateurs harmoniques ainsi que les deux potentiels suivants

$$V = ay^2 + \frac{a}{9} \left(2\tilde{d} + 5x^2 \pm 4x\sqrt{(\tilde{d} + x^2)} \right), \tag{3.54}$$

qui sont équivalents, à une constante additive près, à

$$V = ay^2 + \frac{a}{9} \left(x \pm 2\sqrt{\tilde{d} + x^2} \right)^2. \tag{3.55}$$

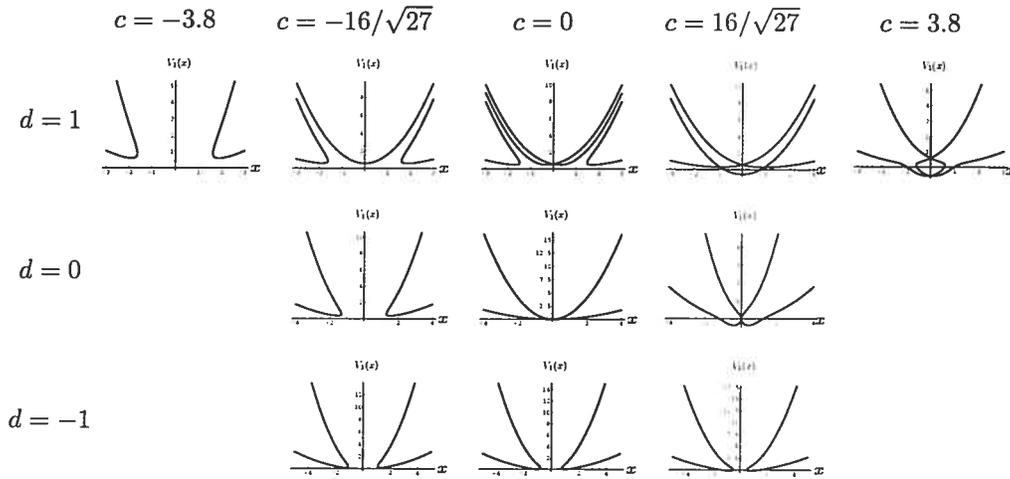


FIG. 3-1 – Le potentiel V_1 défini par (3.50) en fonction des paramètres c et d , avec $a = 1$.

Ces potentiels lisses peuvent être vus comme des interpolations entre des oscillateurs harmoniques anisotropes de rapport 1 : 1 et 1 : 3. Lorsque $\vec{d} = 0$ (et donc $c = d = 0$) ils correspondent à la jonction de deux demi-paraboles mentionnée plus haut.

L'intégrale du mouvement pour tous ces potentiels s'écrit de façon similaire en mécanique classique et en mécanique quantique,

$$X = \{L, p_x^2\} + \{ax^2y - 3yV_1(x), p_x\} - \frac{1}{2a} \left\{ \frac{\hbar^2}{4} V_{1xxx} + (ax^2 - 3V_1)V_{1x}, p_y \right\}. \quad (3.56)$$

Remarquons que V_1 doit être, dans le cas classique, une solution de l'équation (3.50). Si l'on exprime le potentiel sous la forme (3.55), l'intégrale doit donc être légèrement modifiée pour tenir compte du terme constant que nous avons ajouté.

3.5.2 Cas 2 : $V = ay + V_1(x)$

Nous trouvons encore une fois deux équations :

$$\begin{aligned} 0 &= \hbar^2 A_{120} V_1^{(3)} - 6A_{120}(V_1^2)' + 12a^2 A_{003} + \gamma_1 V_1', \\ 0 &= \frac{A_{030}}{4} \left(-6(V_1^2)' + \hbar^2 V_1^{(3)} \right)' - \frac{a}{2} A_{120} (6(xV_1)' + x^2 V_1'') \\ &\quad - aA_{021} ((xV_1)' + 2V_1') - \gamma_2 V_1'' + a\gamma_1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ces équations ne peuvent être traitées séparément mais nous pouvons, lorsque $A_{120} \neq 0$, ajouter une constante arbitraire à V_1 pour nous débarrasser de γ_1 . Nous pouvons ensuite substituer la première équation dans la seconde pour éliminer A_{030} , et finalement translater x pour faire disparaître A_{021} . Le système peut alors être résolu en s'attaquant d'abord à la seconde équation, linéaire, puis en substituant le résultat dans la première. La seule solution qu'on trouve alors est $V_n = ay + \frac{\hbar^2}{x^2}$. Nous pouvons donc maintenant sans perte de généralité poser $A_{120} = 0$, et donc aussi $A_{003} = \gamma_1 = 0$ (puisque $V_1 \neq bx$ et $a \neq 0$). Nous pouvons aussi poser $\gamma_2 = 0$ dans la seconde équation. Si maintenant $A_{030} = 0$, on trouve $V_1 = a/x^2$, qui était déjà connu. Par contre, si $A_{030} \neq 0$ et $A_{021} = 0$, le potentiel $V_1(x)$ est solution de

$$\hbar^2 V_1'' = 6V_1^2 + \lambda x + k. \quad (3.58)$$

Lorsque $\lambda \neq 0$, nous pouvons par translation de x poser $k = 0$ et trouver que V_1 peut s'exprimer en termes de la première transcendante de Painlevé,

$$V = ay + (\hbar\lambda)^{2/5} P_1 \left(\left(\frac{\lambda}{\hbar^4} \right)^{1/5} x \right), \quad (3.59)$$

où

$$P_1''(x) = 6P_1^2(x) + x. \quad (3.60)$$

Comme λ est une constante arbitraire, il est plus pratique d'écrire $\omega^5 = \frac{\lambda}{\hbar^4}$,

$$V = ay + \hbar^2 \omega^2 P_1(\omega x), \quad (3.61)$$

et l'intégrale du mouvement est

$$X = 2p_x^3 + 3\{V_2(x), p_x\} + \left\{ \frac{\hbar^4 \omega^5}{4a}, p_y \right\}.$$

On vérifie bien que les cas limites de a et ω donnent bien des cas connus. Dans la limite classique, en revenant à l'équation (3.58), on trouve

$$V = ay + b\sqrt{x}. \quad (3.62)$$

et l'intégrale est

$$X = 2p_x^3 + 3b\{\sqrt{x}, p_x\} - \left\{ \frac{3b^2}{2a}, p_y \right\}.$$

Si on revient à l'équation (3.58) en supposant cette fois $\lambda = 0$, on trouve que V_1 a aussi la forme (3.39) et une intégrale ne dépendant que de x et p_x .

Finalement, si on suppose $A_{030}A_{021} \neq 0$, on doit résoudre

$$0 = \left(-\frac{3}{2}(V_1^2)' + \frac{\hbar^2}{4}V_1^{(3)} \right)' + b((xV_1')' + 2V_1'), \quad b = \frac{-aA_{021}}{A_{030}} \neq 0. \quad (3.63)$$

On peut intégrer une fois pour trouver

$$C_1 = -\frac{3}{2}(V_1^2)' + \frac{\hbar^2}{4}V_1^{(3)} + b((xV_1') + 2V_1).$$

On peut poser $C_1 = 0$ par des translations de x et V , et intégrer encore une fois,

$$2b\hbar^2 (V_1(x) - bx) V_1''(x) + b\hbar^2 (2b - V_1'(x)) V_1'(x) - 8bV_1(x) (V_1(x) - bx)^2 = k_1. \quad (3.64)$$

Ceci nous permet de résoudre dans le cas classique $\hbar = 0$. On écrit encore une fois la solution sous forme implicite,

$$d = V_1(V_1 - bx)^2, \quad (3.65)$$

où d est une constante arbitraire. Lorsque $d = 0$ on trouve le cas familier $V = bx + ay$ possédant une intégrale de premier ordre. La forme implicite de cette solution est similaire à celle de (3.50).

Dans le cas quantique, la transformation $W(x) = V_1(x) - bx$, qui conserve la propriété de Painlevé, simplifie l'équation (3.64) qui devient

$$\hbar^2 (2WW'' - W'^2) - 8(W + bx)W^2 = k_2, \quad (3.66)$$

ou encore

$$W'' = \frac{W'^2}{2W} + \frac{4W^2}{\hbar^2} + \frac{4bxW}{\hbar^2} + \frac{k_2}{2\hbar^2 W}. \quad (3.67)$$

On peut aussi substituer $Y(x) = \pm\sqrt{W(x)}$. On trouve alors

$$\hbar^2 Y'' = 2(Y^2 + bx)Y + \frac{k_2}{4Y^3}.$$

Si $k_2 = 0$, on peut poser $\hbar = 1$ et $b = 1/2$ par le changement de variables

$$Y = (2\hbar b)^{\frac{1}{3}} Z, \quad x = \left(\frac{\hbar^2}{2b}\right)^{\frac{1}{3}} \xi.$$

La solution pour $Z(\xi)$ est alors un cas particulier de la deuxième transcendante de Painlevé, qui est définie par

$$P_2''(x, \alpha) = 2P_2(x, \alpha)^3 + xP_2(x, \alpha) + \alpha.$$

Le potentiel est alors

$$V(x, y) = bx + ay + (2\hbar b)^{\frac{2}{3}} P_2^2 \left(\left(\frac{2b}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} x, 0 \right), \quad (3.68)$$

avec, comme cas particulier, $V = bx + ay$.

Si au contraire $k_2 \neq 0$, on utilise (3.67), qui peut être normalisée par le changement de variables

$$x = - \left(\frac{\hbar^2}{4b} \right)^{\frac{1}{3}} \xi, \quad W = - \frac{\sqrt{-k_2}}{(4\hbar b)^{\frac{1}{3}}} Y.$$

On trouve alors

$$Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + 4\beta Y^2 - \xi Y - \frac{1}{2Y}, \quad (3.69)$$

où $\beta = -\sqrt{-k_2}/(4\hbar b) \neq 0$ est une constante arbitraire. L'équation (3.69) correspond au cas XXXIV, p. 340, dans [28]. La solution pour $Y(\xi)$ est

$$2\beta Y = P_2'(\xi, -2\beta - \frac{1}{2}) + P_2(\xi, -2\beta - \frac{1}{2})^2 + \frac{\xi}{2}, \quad (3.70)$$

où P_2 est encore une fois la seconde transcendante de Painlevé. Puisque β est arbitraire, nous pouvons poser $\kappa = -2\beta - \frac{1}{2}$.

Le potentiel est donc

$$V(x, y) = ay + (2\hbar^2 b^2)^{\frac{1}{3}} \left(P_2'(- (4b/\hbar^2)^{\frac{1}{3}} x, \kappa) + P_2^2(- (4b/\hbar^2)^{\frac{1}{3}} x, \kappa) \right), \quad (3.71)$$

Parmi les cas particuliers de ce potentiel on trouve $V = ay$ et $V = ay + \hbar^2/x^2$.

Dans tous les cas où $V = ay + V_1(x)$ et $A_{012}A_{030} \neq 0$ l'intégrale du mouvement est

$$2ap_x^3 - 2bp_x^2p_y + a\{3V_1(x) - bx, p_x\} - 2b\{V_1(x), p_y\}. \quad (3.72)$$

Les valeurs limites pour a , b et \hbar donnent soit des potentiels connus, soit des intégrales du mouvement triviales.

3.5.3 Cas 3 : $A_{120} = A_{021} = 0$

Comme $A_{120} = A_{021} = 0$, nous devons supposer $A_{030}A_{003} \neq 0$, (sans quoi nous trouverions des potentiels de la forme (3.39)). Les conditions pour l'existence d'une intégrale de troisième ordre sont alors

$$\begin{aligned} \hbar^2 V_1''(x) &= 6V_1^2(x) + A_{003}\sigma x, \\ \hbar^2 V_2''(y) &= 6V_2^2(y) - A_{030}\sigma y. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Si $\sigma = 0$, on trouve

$$V = \hbar^2(\wp(x) + \wp(y)),$$

avec deux intégrales dépendant chacune d'une seule variable, comme nous pouvions le déduire des solutions de forme (3.39). Si $\sigma \neq 0$, posons $\lambda_1 = A_{003}\sigma$ et $\lambda_2 = -A_{030}\sigma$.

Lorsque $\hbar = 0$, nous trouvons que

$$V = \pm\sqrt{\beta_1 x} \pm \sqrt{\beta_2 y}$$

est superintégrable, avec $\beta_i = \lambda_i/6$ des constantes arbitraires.

Ceci définit des potentiels réels semblables sur chaque quadrant. Nous pouvons recoller ces morceaux pour trouver des potentiels partout réels, par exemple $V = c_1\sqrt{|x|} + c_2\sqrt{|y|}$. Dans ce cas, toutefois, ni le Hamiltonien ni l'intégrale ne sont différentiables au point d'équilibre. L'existence d'un tel potentiel superintégrable, au comportement essentiellement complexe, soulève d'importantes questions concernant les liens entre les potentiels réels et complexes, et ce malgré que nous ayons supposé que le Hamiltonien était auto-adjoint.

Finalement, si $\hbar \neq 0$, V_1 et V_2 s'écrivent tous deux en termes de la première transcendante de Painlevé,

$$V = \hbar^2 \omega_1^2 P_1(\omega_1 x) + \hbar^2 \omega_2^2 P_1(\omega_2 x) \quad (3.74)$$

où les $\omega_i = (b_i/\hbar^4)^{1/5}$ sont des constantes arbitraires.

L'intégrale du mouvement est

$$X = 2b_2 p_x^3 - 2b_1 p_y^3 + 3b_2 \{V_1(x, b_1), p_x\} - 3b_1 \{V_2(y, b_2), p_y\}, \quad (3.75)$$

aussi bien en mécanique quantique qu'en mécanique classique.

3.5.4 Synthèse des résultats

Voici la liste des potentiels séparables en coordonnées cartésiennes possédant au moins une intégrale de troisième ordre, ainsi que les intégrales correspondantes. Les potentiels unidimensionnels de la section 3.4.2 ont été omis ici. Les potentiels encadrés sont ceux qui n'admettaient pas suffisamment d'intégrales d'ordre un et deux pour les rendre superintégrables. La plupart de ceux-ci sont nouveaux.

Plusieurs potentiels, comme V_p et V_q , ne sont pas superintégrables d'après la défi-

nition habituelle, puisque leurs intégrales sont reliées (de façon non-triviale) au Hamiltonien. Plusieurs paramètres ne sont pas arbitraires mais sont définis plus haut dans le texte. Nous utilisons la notation $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y) = V_1 + V_2$.

a. Potentiels quantiques

$$(Q.1) \quad V = a(x^2 + y^2)$$

$$X_1 = L^3$$

$$X_2 = \{L, p_x p_y\} + a\{2x^2 y, p_y\} - a\{2xy^2, p_x\}$$

$$X_3 = \{L, p_y^2\} + 2a(\{xy^2, p_y\} - \{y^3, p_x\})$$

$$X_4 = \{L, p_x^2\} - 2a(\{x^2 y, p_x\} - \{x^3, p_y\})$$

$$(Q.2) \quad V = a(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$$

$$X_1 = \{L, p_x p_y\} + \{xy(-\frac{2b}{x^3} + 2ax), p_y\} - \{xy(-\frac{2c}{y^3} + 2ay), p_x\}$$

$$(Q.3) \quad V = a(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{x^2} + \frac{\hbar^2}{y^2}$$

$$X_1 = 2L^3 - \hbar^2\{\frac{3x^2}{y} + 2y + \frac{3y^3}{x^2}, p_x\} + \hbar^2\{\frac{3y^2}{x} + 2x + \frac{3x^3}{y^2}, p_y\}$$

$$X_2 = \{L, p_x p_y\} + \{xy(-\frac{2\hbar^2}{x^3} + 2ax), p_y\} - \{xy(-\frac{2\hbar^2}{y^3} + 2ay), p_x\}$$

$$(Q.4) \quad V = a(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$$

$$X_1 = 2L^3 - \hbar^2\{2y + \frac{3x^2}{y}, p_x\} + \hbar^2\{\frac{3x^3}{y^2} + 2x, p_y\}$$

$$X_2 = \{L, p_x p_y\} - 2\{axy^2 - \frac{\hbar^2 x}{y^2}, p_x\} + 2a\{x^2 y, p_y\}$$

$$X_3 = \{L, p_y^2\} - \{2ay^3 + \hbar^2 \frac{1}{y}, p_x\} + \{\hbar^2 \frac{3x}{y^2} + 2axy^2, p_y\}$$

$$(Q.5) \quad \boxed{V = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4}(x^2 + y^2) + \frac{1}{(x - \alpha)^2} + \frac{1}{(x + \alpha)^2} \right)}$$

$$X_1 = 2L^3 - 3\alpha^2\{L, p_y^2\} + \frac{\hbar^2}{4}\{y(-8 + \frac{3y^2}{\alpha^2} - \frac{24y^2(x^2 + \alpha^2)}{(x - \alpha)^2(x + \alpha)^2}), p_x\}$$

$$+ \frac{\hbar^2}{4}\{x(8 - \frac{3y^2(x^4 - 10\alpha^2 x^2 - 24\alpha^4)}{\alpha^2(x - \alpha)^2(x + \alpha)^2}), p_y\}$$

$$X_2 = \{L, p_x^2\} + \hbar^2\{y(\frac{4\alpha^2 - x^2}{4\alpha^4} - \frac{6(x^2 + \alpha^2)}{(x^2 - \alpha^2)^2}), p_x\}$$

$$+ \hbar^2\{\frac{x(x^2 - 4\alpha^2)}{4\alpha^4} - \frac{2x}{x^2 - \alpha^2} + \frac{4x(x^2 + \alpha^2)}{(x - \alpha)^2(x + \alpha)^2}, p_y\}$$

$$(Q.6) \quad \boxed{V = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4}(x^2 + y^2) + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x + \alpha)^2} + \frac{1}{(x - \alpha)^2} \right)}$$

$$X_1 = 2L^3 - 3\alpha^2\{L, p_y^2\} + \hbar^2\{\frac{3y^3}{4\alpha^2} + \frac{6y^3(x^2 + \alpha^2)}{(x - \alpha)^2(x + \alpha)^2} - \frac{3(x^2 - \alpha^2)}{y} - 2y, p_x\} + 3\hbar^2\{x(\frac{x^2 - 3\alpha^2}{y^2} - \frac{3y^2 - 8\alpha^2}{12\alpha^2} - \frac{2y^2}{x^2 - \alpha^2} + \frac{4y^2(x^2 + \alpha^2)}{(x - \alpha)^2(x + \alpha)^2}), p_y\}$$

$$(Q.7) \quad V = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4}(x^2 + y^2) + \frac{1}{(y-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(y+\alpha)^2} + \frac{1}{(x+\alpha)^2} \right)$$

$$X_1 = 2L^3 - 3\alpha^2(\{L, p_x^2\} + \{L, p_y^2\}) + \frac{\hbar^2}{4} \left\{ y \left(124 + \frac{3(x^2+y^2)}{\alpha^2} + \frac{24(x^2-5y^2)}{y^2-\alpha^2} - \frac{144x^2}{x^2-\alpha^2} + \frac{24(3x^2-y^2)(x^2+\alpha^2)}{(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2} + \frac{48(y^2-x^2)(y^2+\alpha^2)}{(y-\alpha)^2(y+\alpha)^2} \right), p_x \right\} - \frac{\hbar^2}{4} \left\{ x \left(124 + \frac{3(x^2+y^2)}{\alpha^2} - \frac{24(5x^2-y^2)}{x^2-\alpha^2} - \frac{144x^2}{y^2-\alpha^2} - \frac{24(x^2-3y^2)(y^2+\alpha^2)}{(y-\alpha)^2(y+\alpha)^2} + \frac{48(x^2-y^2)(x^2+\alpha^2)}{(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2} \right), p_y \right\}$$

$$(Q.8) \quad V = a(4x^2 + y^2) + \frac{b}{y^2} + cx$$

$$X_1 = 2p_x p_y^2 + \{-2ay^2 + \frac{2b}{y^2}, p_x\} + \{8axy + cy, p_y\}$$

$$(Q.9) \quad V = a(9x^2 + y^2)$$

$$X_1 = \{L, p_y^2\} + \frac{2}{3}a\{y^3, p_x\} - 6a\{xy^2, p_y\}$$

$$(Q.10) \quad V = a(9x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$$

$$X_1 = \{L, p_y^2\} + \left\{ \frac{2ay^3}{3} - \frac{\hbar^2}{y}, p_x \right\} + \left\{ 3x \left(-2ay^2 + \frac{\hbar^2}{y^2} \right), p_y \right\}$$

$$(Q.11) \quad V = \hbar^2 \left(\frac{1}{8\alpha^4}(9x^2 + y^2) + \frac{1}{(y+\alpha)^2} + \frac{1}{(y-\alpha)^2} \right)$$

$$X_1 = \{L, p_y^2\} + \hbar^2 \left\{ y \left(\frac{y^2}{12\alpha^4} - \frac{8\alpha^2}{y(y^2-\alpha^2)^2} - \frac{2y}{y^2-\alpha^2} \right), p_x \right\} + \frac{3\hbar^2}{4} \left\{ x \left(\frac{8(y^2+\alpha^2)}{(y^2-\alpha^2)^2} - \frac{y^2}{\alpha^4} \right), p_y \right\}$$

$$(Q.12) \quad V = \frac{\hbar^2}{x^2} + \frac{a}{y^2}$$

$$X_1 = \{L^2, p_x\} - 2\hbar^2 \left\{ \frac{y^2}{x^2}, p_y \right\} + \left\{ 3\hbar^2 \frac{y^2}{x^2} + 2a \frac{x^2}{y^2} + \frac{\hbar^2}{2}, p_x \right\}$$

$$X_2 = \{L, p_x p_y\} - 2\hbar^2 \left\{ \frac{y}{x^2}, p_y \right\} + 2a \left\{ \frac{x}{y^2}, p_x \right\}$$

$$X_3 = 2p_x^3 + \left\{ \frac{3\hbar^2}{x^2}, p_x \right\}$$

$$(Q.13) \quad V = \frac{\hbar^2}{x^2} + \frac{\hbar^2}{y^2}$$

$$X_1 = 2L^3 - \hbar^2 \left\{ 2y + \frac{3x^2}{y} + \frac{3y^3}{x^2}, p_x \right\} + \hbar^2 \left\{ 2x + \frac{3y^2}{x} + \frac{3x^3}{y^2}, p_y \right\}$$

$$X_2 = \{L^2, p_x\} - 2\hbar^2 \left\{ \frac{y}{x}, p_y \right\} + \left\{ 3\hbar^2 \frac{y^2}{x^2} + 2\hbar^2 \frac{x^2}{y^2} + \frac{\hbar^2}{2}, p_x \right\}$$

$$X_3 = \{L^2, p_y\} - 2\hbar^2 \left\{ \frac{x}{y}, p_x \right\} + \left\{ 3\hbar^2 \frac{x^2}{y^2} + 2\hbar^2 \frac{y^2}{x^2} + \frac{\hbar^2}{2}, p_x \right\}$$

$$X_4 = \{L, p_x p_y\} - 2\hbar^2 \left\{ \frac{y}{x^2}, p_y \right\} + 2\hbar^2 \left\{ \frac{x}{y^2}, p_x \right\}$$

$$X_5 = 2p_x^3 + \left\{ \frac{3\hbar^2}{x^2}, p_x \right\}$$

$$X_6 = 2p_y^3 + \left\{ \frac{3\hbar^2}{y^2}, p_y \right\}$$

$$(Q.14) \quad V = ax + \frac{\hbar^2}{y^2}$$

$$X_1 = \{L, p_y^2\} - \left\{ \frac{\hbar^2}{y}, p_x \right\} + \left\{ 3 \frac{\hbar^2 x}{y^2} - a \frac{y^2}{2}, p_y \right\}$$

$$X_2 = 2p_y^3 + \left\{ 3 \frac{\hbar^2}{y^2}, p_y \right\}$$

$$X_3 = 2p_x p_y^2 + 2\hbar^2 \left\{ \frac{1}{y^2}, p_x \right\} + a\{y, p_y\}$$

$$(Q.15) \quad V = \hbar^2 \wp(y) + V(x)$$

$$X_1 = 2p_y^3 + \{3\hbar^2 \wp(y), p_y\}$$

$$(Q.16) \quad V = \hbar^2(\wp(x) + \wp(y))$$

$$X_1 = 2p_x^3 + \{3\hbar^2 \wp(x), p_x\}$$

$$X_2 = 2p_y^3 + \{3\hbar^2 \wp(y), p_y\}$$

$$(Q.17) \quad V = \hbar^2 \omega_1^2 P_1(\omega_1 x) + \hbar^2 \omega_2^2 P_1(\omega_2 x)$$

$$X_1 = 2\omega_2^5 p_x^3 - 2\omega_1^5 p_y^3 + 3\omega_2^5 \{V_1(x, \omega_1), p_x\} - 3\omega_1^5 \{V_2(y, \omega_2), p_y\}$$

$$(Q.18) \quad V(x, y) = ay^2 + \frac{\hbar}{2} b_1 P_4'(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + a \left(2P_4(x, \frac{-8a}{\hbar^2}) + x \right)^2 + \frac{1}{6}(-\hbar^2 K_1 + \hbar b_1)$$

$$X_1 = \{L, p_x^2\} + \{ax^2 y - 3yV_1, p_x\} - \frac{1}{2a} \left\{ \frac{\hbar^2}{4} V_{1xxx} + (ax^2 - 3V_1)V_{1x}, p_y \right\}$$

$$(Q.19) \quad V = ay + \hbar^2 \omega^2 P_1(\omega x)$$

$$X_1 = 2p_x^3 + 3\hbar^2 \omega^2 \{P_1(\omega x), p_x\} + \left\{ \frac{\omega^5 \hbar^4}{4a}, p_y \right\}$$

$$(Q.20) \quad V = bx + ay + (2\hbar b)^{\frac{2}{3}} P_2^2 \left(\left(\frac{2b}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} x, 0 \right)$$

$$X_1 = 2ap_x^3 - 2bp_x^2 p_y + a\{3V_1(x) - bx, p_x\} - 2b\{V_1(x), p_y\}$$

$$(Q.21) \quad V = ay + (2\hbar^2 b^2)^{\frac{1}{3}} \left(P_2'(- (4b/\hbar^2)^{\frac{1}{3}} x, \kappa) + P_2^2(- (4b/\hbar^2)^{\frac{1}{3}} x, \kappa) \right)$$

$$X_1 = 2ap_x^3 - 2bp_x^2 p_y + a\{3V_1(x) - bx, p_x\} - 2b\{V_1(x), p_y\}$$

b. Potentiels Classiques

$$(C.1) \quad V = a(x^2 + y^2)$$

$$X_1 = L^3$$

$$X_2 = \{L, p_x p_y\} + a\{2x^2 y, p_y\} - a\{2xy^2, p_x\}$$

$$X_3 = \{L, p_y^2\} + 2a(\{xy^2, p_y\} - \{y^3, p_x\})$$

$$X_4 = \{L, p_x^2\} - 2a(\{x^2 y, p_x\} - \{x^3, p_y\})$$

$$(C.2) \quad V = a(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$$

$$X_1 = \{L, p_x p_y\} + \{xy(-\frac{2b}{x^3} + 2ax), p_y\} - \{xy(-\frac{2c}{y^3} + 2ay), p_x\}$$

$$(C.3) \quad V = a(4x^2 + y^2) + \frac{b}{y^2} + cx$$

$$X_1 = 2p_x p_y^2 + \{-2ay^2 + \frac{2b}{y^2}, p_x\} + \{8axy + cy, p_y\}$$

$$(C.4) \quad \boxed{V = a(9x^2 + y^2)}$$

$$X_1 = \{L, p_y^2\} + \frac{2}{3}a\{y^3, p_x\} - 6a\{xy^2, p_y\}$$

$$(C.5) \quad \boxed{V = \pm\sqrt{\beta_1 x} \pm \sqrt{\beta_2 y}}$$

$$X_1 = 2\beta_2 p_x^3 - 2\beta_1 p_y^3 + 3\beta_2\{V_1(x, 6\beta_1), p_x\} - 3\beta_1\{V_2(y, 6\beta_2), p_y\}$$

$$(C.6) \quad \boxed{V = ay^2 + V_1} \quad \text{où } V_1 \text{ vérifie l'équation (3.50)}$$

$$X_1 = \{L, p_x^2\} + \{ax^2y - 3yV_1, p_x\} - \frac{1}{2a}\{(ax^2 - 3V_1)V_{1x}, p_y\}$$

$$(C.7) \quad \boxed{V = ay + b\sqrt{x}}$$

$$X_1 = 2p_x^3 + 3b\{\sqrt{x}, p_x\} - \left\{\frac{3b^2}{2a}, p_y\right\}$$

$$(C.8) \quad \boxed{V = ay + V_1(x)}, \quad \text{où } (V_1 - bx)^2 V_1 = d$$

$$X_1 = 2ap_x^3 - 2bp_x^2 p_y + a\{3V_1(x) - bx, p_x\} - 2b\{V_1(x), p_y\}$$

Chapitre 4

Le théorème de Liouville et la superintégrabilité

4.1 Le théorème de Liouville

La notion d'intégrabilité, en mécanique classique, fournit un outil précieux pour comprendre les trajectoires des particules dans l'espace des phases. Supposons donc un système possédant n intégrales du mouvement fonctionnellement indépendantes $\{X_1, \dots, X_n\}$ et suffisamment lisses (nous les supposons continues et différentiables dans la région de l'espace des phases étudiée). Considérons les courbes de niveau de ces intégrales,

$$M_f = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mid X_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f_i, i = 1, \dots, n\} \quad (4.1)$$

La valeur des constantes du mouvement ne change pas (par définition) le long d'une trajectoire, ce qui implique qu'une trajectoire ne peut quitter la courbe de niveau d'où elle est partie. On dit que la variété M_f est préservée par le flux. Comme les intégrales du mouvement sont indépendantes, on en déduit que chaque M_f est une variété de dimension inférieure ou égale à n , plongée dans un espace $2n$ -dimensionnel.

Le théorème de Liouville affirme en fait beaucoup plus : la variété M_f , lorsqu'elle est compacte et connexe (bref lorsque le mouvement est borné), est difféomorphe à un tore de dimension n , paramétré par les variables (ϕ_1, \dots, ϕ_n) , dites variables d'angle. De plus le mouvement sur ce tore est particulièrement simple puisque les $\phi_i(t)$ décrivent

les trajectoires obéissent à la relation

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i(\mathbf{f}). \quad (4.2)$$

Le théorème de Liouville affirme finalement qu'il est alors possible d'intégrer les équations de Hamilton-Jacobi par quadratures, c'est-à-dire en n'effectuant que des opérations algébriques et des intégrales.

Les systèmes intégrables se comportent donc de façon très régulière. On s'attend à ce que les systèmes (maximalement) superintégrables manifestent, en toute logique, des propriétés de régularité encore plus remarquables.

4.2 Quelques applications du théorème de Liouville pour les systèmes superintégrables

Les systèmes superintégrables satisfont évidemment aux conditions du théorème de Liouville. Les intégrales supplémentaires permettent alors de restreindre les trajectoires à un sous-espace de la variété M_f . Remarquons aussi qu'un système superintégrable peut posséder plusieurs ensembles distincts de n intégrales du mouvement en involution. On peut donc définir plusieurs variétés difféomorphes à un tore qui sont invariante sous le flux, et les trajectoires doivent dans ce cas reposer sur l'intersection de toutes ces variétés. Lorsque le système est maximalement superintégrable, on s'attend à ce que les trajectoires soient astreintes à des variétés unidimensionnelles et à ce que les trajectoires soient périodiques.

Ceci a été démontré dans [29], sous des hypothèses légèrement différentes. Plutôt que de démontrer l'équivalence de nos hypothèses et de celle de [29], nous allons fournir une preuve alternative, à notre avis plus intuitive et permettant d'illustrer joliment l'utilisation des théorèmes de Liouville et Poincaré. Mentionnons toutefois que la preuve

fournie dans [29] permet de généraliser plus facilement les résultats.

Établissons d'abord quelques résultats à propos des trajectoires sur le tore.

Définition 4.2.1. *Un enroulement sur le tore T^n est une trajectoire sur ce tore satisfaisant les équations (4.2).*

Proposition 4.2.1. *Un enroulement sur un tore en dimension n est dense si et seulement si aucune paire de ω_i n'est commensurable.*

Démonstration. Remarquons d'abord que le mouvement sur le tore est complètement découplé : la projection de l'enroulement sur un ensemble de d variables $\phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_d}$ est donc équivalente à un enroulement sur le tore de dimension d formé par les variables considérées.

Nous savons que si une paire de ω_i est commensurable, la projection de l'enroulement sur le tore bidimensionnel formé par les ϕ_i correspondants sera périodique. Cette trajectoire ne sera donc dense ni sur le tore bidimensionnel, ni à plus forte raison sur le tore n -dimensionnel.

Supposons maintenant qu'il n'existe aucune paire de ω_i commensurables, et montrons que l'enroulement sera dense par induction : nous savons que l'enroulement d'un cercle, c'est-à-dire l'enroulement d'un tore unidimensionnel, est dense. Supposons maintenant que l'enroulement d'un tore n -dimensionnel est dense, et montrons que l'enroulement d'un tore $n + 1$ -dimensionnel l'est aussi.

Considérons l'application

$$g^t : \vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi} + \vec{\omega}t. \quad (4.3)$$

On peut alors définir l'enroulement comme l'union pour tous les t de

$$\vec{\phi}(t) = g^t \vec{\phi}_0. \quad (4.4)$$

Considérons la section de Poincaré obtenue en fixant la valeur de ϕ_{n+1} . Cette section de Painlevé est contenue dans le tore T^n . La trajectoire croise ce tore chaque fois que le temps est un multiple de $2\pi/\omega_{n+1}$. On peut donc définir une application de T^n dans T^n par

$$g^{2k\pi/\omega_{n+1}} : \phi_{i0} \rightarrow \phi_{i0} + 2\omega_i k\pi/\omega_{n+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Cette application satisfait aux conditions du théorème de Poincaré (voir [30]) . Celui-ci nous indique alors qu'on peut trouver, parmi les images de $\vec{\phi}$, des points arbitrairement proches de $\vec{\phi}$. En d'autres mots, pour tout ϵ il existe un m tel que

$$|g^{2m\pi/\omega_{n+1}} \vec{\phi} - \vec{\phi}| < \epsilon, \quad \forall \vec{\phi}. \quad (4.6)$$

Les points définis par les applications successives de $g^{2m\pi/\omega_{n+1}}$ forment une ϵ -chaîne qui parcourt une trajectoire sur le tore T^n . Comme cette trajectoire est dense sur T^n (par l'hypothèse d'induction), la ϵ -chaîne doit s'approcher à moins de 2ϵ de chaque point de T^n . Comme ϵ est arbitraire, on en déduit que la section de Poincaré est dense dans T^n , et donc, puisque la valeur de ϕ_{n+1} était arbitraire, que la trajectoire est dense dans T^{n+1} . \square

En n dimension, l'enroulement peut donc n'être ni dense (aucun ω_i commensurable), ni périodique (tous les ω_i commensurable). Pour comprendre ce qui se produit dans la situation intermédiaire, remarquons d'abord que nous pouvons définir des classes d'équivalence pour les ω_i en disant de deux ω_i qu'ils sont équivalents si et seulement si ils sont commensurables.

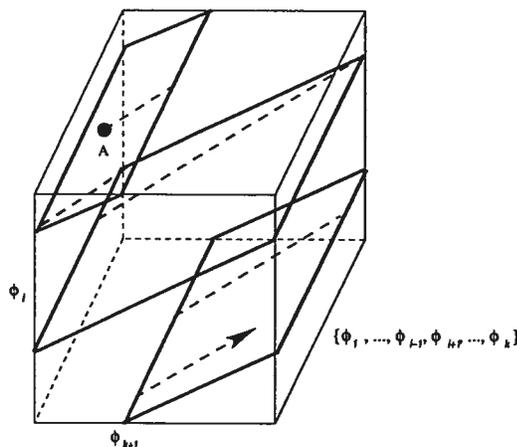


FIG. 4-1 – Segment d’une trajectoire sur T^{k+1} lorsque ω_i et ω_k sont commensurables

Lemme 4.2.1. *Tout enroulement du tore T^n est dense sur une variété de dimension d , où d est le nombre de classes d’équivalence des ω_i*

Démonstration. Nous pouvons supposer que les $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,d}$ ne sont pas commensurables. La projection de la trajectoire sur le tore T^d est donc dense. Maintenant procédons par induction : supposons que la projection de la trajectoire sur T^k , $d \leq k < n$ est dense sur une variété de dimension d , et montrons que c’est vrai aussi pour la projection sur le tore $T^{k+1} = T^k \times \{\phi_{k+1}\}$.

Nous savons que ω_{k+1} est commensurable avec ω_i , pour un $i \leq d$. C’est-à-dire que la projection de la trajectoire sur le tore formé par les variables ϕ_i et ϕ_{k+1} est périodique. La trajectoire sur T^{k+1} est donc astreinte à un nombre fini d’hyperplans (voir figure 4-1). Autrement dit, la projection de T^{k+1} dans T^k est l’union des projections d’un nombre fini de d’hyperplans (de dimension k) dans l’espace T^{k+1} . Si l’union des projections d’un ensemble fini d’hyperplans est dense dans une variété d -dimensionnelle, un des hyperplans, M , doit avoir une projection dense dans un sous-espace de dimension d de T^k . La projection de M sur T^n étant bijective et continue, on en déduit que M doit posséder un sous-espace de dimension d sur lequel la projection de la trajectoire est dense.

□

Théorème 1. *Toutes les trajectoires bornées d'un système maximalement superintégrables sont périodiques.*

Démonstration. Comme les intégrales sont continues, le lemme 4.2.1 implique que toutes les intégrales sont constantes sur une surface de dimension d , ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance des intégrales si $d > 1$. En effet, si les intégrales sont indépendantes, le théorème des fonctions implicites nous assure qu'on peut localement inverser les intégrales et exprimer les coordonnées (\mathbf{p}, \mathbf{q}) en termes des constantes du mouvement et d'une seule coordonnée (par exemple q_1), ce qui est manifestement impossible sur une surface bidimensionnelle. On en déduit qu'il ne peut exister qu'une seule classe d'équivalence, et donc que le mouvement doit être périodique. □

On peut généraliser quelque peu ce résultat.

Théorème 2. *Soit un système intégrable possédant $n+k$ intégrales du mouvement indépendantes. Le nombre de classes d'équivalence des ω_i est d'au plus $n-k$. Le mouvement est donc astreint à une surface difféomorphe à un tore de dimension $n-k$.*

Démonstration. La démonstration est semblable à celle du théorème précédent. Par le théorème des fonctions implicites, le nombre d'intégrales indépendantes sur le tore (k) plus la dimension d'une variété sur laquelle ces intégrales sont constantes ne peut excéder n . □

Le théorème de Bertrand [20] indique que, parmi les potentiels centraux lisses, les seuls pour lesquels toutes les trajectoires bornées sont périodiques sont l'oscillateur harmonique et le potentiel de Képler. Nous pouvons donc en déduire le résultat suivant

Corollaire 1. *L'oscillateur harmonique et le potentiel de Képler sont les seuls potentiels radiaux qui sont maximalement superintégrables.*

Lorsque le problème est séparable en coordonnées cartésiennes, le théorème 1 nous donne le résultat suivant :

Lemme 4.2.2. *Soit un Hamiltonien différentiable et séparable dans un système de coordonnées quelconque, et possédant des trajectoires bornées. Pour que toutes les trajectoires bornées soient périodiques, il faut et il suffit que les périodes associées aux différentes variables soient commensurables et ne dépendent pas des conditions initiales.*

Démonstration. Les périodes doivent être commensurables pour que le mouvement soit périodique. Comme les conditions initiales peuvent être choisies indépendamment pour chacune des variables séparées et que les périodes varient continûment avec ces conditions initiales, l'existence de deux périodes distinctes impliquerait par le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'une trajectoire non fermée, d'où contradiction \square

Définition 4.2.2. *On dit qu'un Hamiltonien est isochrone si toutes ses trajectoires bornées sont périodiques et ont la même période.*

Corollaire 2. *Soit un potentiel différentiable et maximalelement superintégrable de la forme $V(\vec{x}, \vec{y}) = V_1(\vec{x}) + V_2(\vec{y})$, où \vec{x} et \vec{y} sont des ensembles de variables cartésiennes indépendantes. Si chaque potentiel admet un minimum local, $V_1(\vec{x})$ et $V_2(\vec{y})$ doivent tous deux être isochrones et avoir une période commensurable.*

Remarquons qu'une littérature considérable existe au sujet des potentiels isochrones. Une discussion intéressante de ce problème et de nombreuses références peuvent être trouvées dans [31, 32].

Il est facile de construire des potentiels isochrones, par exemple à l'aide de la formule d'Urabe [33]. Parmi ceux-ci, notons le potentiel $ax^2 + b/x^2$ contenu dans le potentiel de Smorodinsky-Winternitz, dont l'isochronicité découle de celle de l'oscillateur harmonique en deux dimensions. Comme la période de ce potentiel ne dépend que de la constante a , on peut en déduire que tous les potentiels de la forme $a(p^2x^2 + q^2y^2) + b/x^2 + c/y^2$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, n'admettent que des trajectoires périodiques ou non-bornées, et que les trajectoires périodiques ont toutes la même période. La question se pose de savoir s'ils sont tous superintégrables et, en général, si tous les systèmes isochrones sont superintégrables.

Pour tenter de répondre à cette question, nous devons nous inspirer d'une ap-

proche différente, reliée à l'intégrabilité de Darboux.

4.3 Forme normale et isochronicité

Traisons d'abord le cas strictement unidimensionnel. Les équations de Hamilton s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -V_x(x) \end{aligned} \tag{4.7}$$

S'il existe un point d'équilibre à l'origine, et si le potentiel y est analytique, on peut développer celui-ci en séries

$$V_x(x) = 2ax - f(x) = 2ax + o(x)^2.$$

Nous allons maintenant tenter de construire un changement de variables qui linéarise le système, ce qui revient à le transformer en oscillateur harmonique.

Il est pratique de passer tout d'abord à des coordonnées complexes,

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{2a}x + ip, \\ \bar{\omega} &= \sqrt{2a}x - ip. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dans les variables $(\omega, \bar{\omega})$, les équations du mouvement s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \sqrt{2a}i\omega + if\left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{-2\sqrt{2a}}\right), \\ \dot{\bar{\omega}} &= -\sqrt{2a}i\bar{\omega} - if\left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{-2\sqrt{2a}}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Les équations du mouvement ont maintenant la forme d'un point de selle dans le plan complexe. Les valeurs propres de ce point de selle ont un rapport 1 :1. On peut tenter, par un changement de variables

$$\begin{aligned} z &= \omega + \sum_{i+j=2}^{2N-1} a_{ij} \omega^i \bar{\omega}^j, \\ \bar{z} &= \bar{\omega} + \sum_{i+j=2}^{2N-1} a_{ij} \omega^i \bar{\omega}^j, \end{aligned} \quad (4.10)$$

d'éliminer les termes nonlinéaires d'ordre inférieur à $2N$. En général, il est impossible d'y parvenir, puisqu'un certain nombre de termes non linéaires dits résonants ne pourront être éliminés. Il est toutefois possible d'éliminer les autres termes, et le système peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sqrt{2a} iz \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} b_i (z\bar{z})^i \right) + o(z, \bar{z})^{2N}, \\ \dot{\bar{z}} &= -\sqrt{2a} i\bar{z} \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \bar{b}_i (z\bar{z})^i \right) + o(z, \bar{z})^{2N}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Écrivons maintenant $z = re^{i\theta}$ et $\bar{z} = re^{-i\theta}$. On considère d'abord $r^2 = z\bar{z}$, et on trouve

$$\dot{r} = -2\sqrt{2a} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \Im m(b_i) r^{2i} \right) + o(|r|)^{2N}. \quad (4.12)$$

Le système étant hamiltonien, toutes les trajectoires du système initial sont périodiques dans l'espace des phases, et par conséquent celles de (4.12) le sont aussi. On peut donc conclure par le comportement autour de $r = 0$ que tous les b_i doivent être

réels (sans quoi le signe du plus petit $\Im m(b_i)$ non nul indiquerait que, près de l'origine, r est strictement croissant ou décroissant, ce qui est incompatible avec la périodicité des trajectoires).

Considérons maintenant $\theta = \frac{i}{2} \ln \frac{z}{\bar{z}}$. On a

$$\dot{\theta} = \frac{i}{2z\bar{z}} (z\dot{\bar{z}} - \dot{z}\bar{z}) = -\sqrt{2a} \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \Re e(b_i) r^i \right) + o(|r|)^{2N-1}. \quad (4.13)$$

Cette équation nous indique notamment que, près de l'origine, la fonction $\theta(t)$ est monotone. Comme le système est hamiltonien et unidimensionnel, ceci implique qu'autour de l'origine les trajectoires doivent se refermer lorsque θ augmente de 2π . Un autre élément remarquable est que $\dot{\theta}$ ne dépend de θ qu'à travers des termes d'ordre élevé en r . La correction à la période due à ces termes peut être rendue aussi petite que voulue en augmentant N et en réduisant r , ce qui revient à dire que le mouvement sur une trajectoire se fait à vitesse angulaire presque constante si N est assez grand et r assez petit. La période peut toutefois aussi varier selon r , d'une façon que l'on ne peut contrôler grâce à l'augmentation de N .

Si la fonction $1 + \sum_{i=1}^{N-1} \Re e(b_i) r^i$ n'est pas constante, c'est-à-dire si les $\Re e(b_i)$ ne sont pas tous nuls, la vitesse angulaire variera en fonction de la distance à l'origine, et les trajectoires ne pourront toutes avoir la même période. Pour qu'un système soit isochrone, il faut donc que tous les b_i soient nuls. L'équation (4.11) devient donc

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sqrt{2a} iz + o(z, \bar{z})^{2N}, \\ \dot{\bar{z}} &= -\sqrt{2a} i \bar{z} + o(z, \bar{z})^{2N}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il ne nous reste plus qu'à faire tendre N vers l'infini pour avoir transformé notre système initial en oscillateur harmonique. Il demeure toutefois encore une difficulté : pour faire tendre N vers l'infini, la transformation (4.10) doit impliquer une somme infinie, et nous devons nous assurer que cette somme converge. Remarquons aussi que

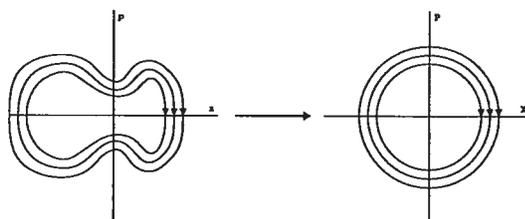


FIG. 4-2 – Rectification des trajectoires par le changement de variables $(x, p) \rightarrow (X, P)$

pour pouvoir utiliser sans encombre l'algorithme de mise sous forme normale nous avons supposé que le potentiel était analytique (puisque nous l'avons développé en séries), ce qui n'est pas nécessairement le cas pour tous les potentiels isochrones que nous avons considérés.

Nous avons toutefois une approche plus directe à notre disposition, qui consiste à construire directement un changement de variables qui transforme le système en oscillateur harmonique, et ce à partir des trajectoires du système (voir la figure 4-2). Nous savons déjà que toutes les trajectoires d'un potentiel unidimensionnel isochrone dans l'espace des phases sont fermées et bornées, qu'elles ne se recoupent pas et qu'elles ont la même période. À chaque trajectoire on peut associer une énergie, et à chaque énergie un point tournant qui, si on suppose que le potentiel a un minimum en $x = 0$, peut être choisi tel que $x > 0$. Nous identifierons donc chaque trajectoire par la valeur de ce point tournant que nous appellerons r . À chaque point sur cette trajectoire dans l'espace des phases on peut associer un temps $t \in [0, T)$, où T est la période du système, correspondant au temps nécessaire pour que le système arrive à cet état à partir du point tournant avec $x > 0$. À tout point (x, p) on peut donc associer des coordonnées (r, t) . Ce changement de variables est bijectif, et on peut aussi montrer qu'il est bicontin et différentiable.

En effet, pour la première composante, on sait que l'énergie, donnée par le Hamiltonien, est une fonction continue et différentiable des variables de l'espace des phases, x et p , puisque le potentiel est lui-même continu et différentiable. Cette même condition nous assure que la valeur du point tournant varie aussi de façon continue et différentiable avec l'énergie. On a donc immédiatement que r est une fonction différentiable

de x et p . Il est toutefois plus difficile de montrer directement la différentiabilité de la fonction t . On peut par contre montrer la différentiabilité de $x(r, t)$ et $p(r, t)$. En effet on peut calculer explicitement les dérivées partielles à r constant, qui ne sont autres que les équations de Hamilton ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -V^{(1)}(x(r, t), p(r, t)), \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= p(r, t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Pour évaluer les dérivées partielles par rapport à r , nous devons utiliser la continuité et la différentiabilité du flux hamiltonien. En particulier, pour un t fixé, nous savons que l'application

$$g^t : (x(t_0), p(t_0)) \rightarrow (x(t_0 + t), p(t_0 + t)) \tag{4.16}$$

est continue et différentiable pour un potentiel différentiable ([34, théorème 8*.1.12])(i.e. la position du système dans l'espace des phases à un temps donnée est une fonction continue et différentiable des conditions initiales). On peut en fait trouver une formule explicite pour ces dérivées. Posons maintenant $(x, p) = \mathbf{x}$, de sorte que les équations de Hamilton s'écrivent

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Les deux autres dérivées sont données par la solution d'une équation différentielle linéaire ([34, théorème 8*.1.12]). Supposons (nous l'avons déjà fait plus haut) que nous connaissons une solution telle que $x(t = 0) = r$. Écrivons $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t, r)$ pour cette

solution, et considérons l'équation

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{u}(t)} \mathbf{w}, \quad (4.17)$$

qui, dans notre cas, s'écrit

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V_{xx}(u(t)) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w}. \quad (4.18)$$

Le théorème 8*.1.12 dans [34] stipule que

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial r} v = \boldsymbol{\sigma}(t, v), \quad (4.19)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(v, t)$ est solution de l'équation (4.18) avec les conditions initiales $\mathbf{w}(0) = (v, 0)$. Comme (4.18) est linéaire, $\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial r}$ ne dépend pas vraiment de v , comme il se doit.

Afin de montrer que $(x, p) \rightarrow (r, t)$ est aussi différentiable, il suffit de montrer que le déterminant du Jacobien,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_2(t) & \boldsymbol{\sigma}_1(t, v)/v \\ -V'(\mathbf{u}_1(t, r)) & \boldsymbol{\sigma}_2(t, v)/v \end{vmatrix}$$

est non-nul.

Écrivons, pour simplifier l'algèbre,

$$\mathbf{u}_1(t, r + v) = x_v, \quad \mathbf{u}_p(t, r + v) = p_v, \quad \boldsymbol{\sigma}_i(t, v) = \boldsymbol{\sigma}_i,$$

et ne gardons que les termes linéaires en v dans J . Le théorème 8*.1.12 dans [34] garantit que l'on peut trouver des constantes C et δ telles que $|v| < \delta$ implique

$$\|\mathbf{u}(t, r) - \mathbf{u}(t, r + v) - \boldsymbol{\sigma}(t, v)\| \leq Cv^2.$$

On trouve

$$\begin{aligned} vJ &= p\sigma_2 + V'(x)\sigma_1 \simeq p_0(p_v - p_0) + V'(x)(x_v - x_0) \\ &= p_v^2/2 - p_0^2/2 + V'(x)(x_v - x_0) - (p_v^2/2 - p_0p_v + p_0^2/2) \end{aligned}$$

Comme $V'(x)(x_v - x) \simeq V(x_v) - V(x)$ et $p_v^2/2 - pp_v + p^2/2 \simeq \sigma_2^2/2 \simeq 0$, nous avons montré que

$$J \simeq p_v^2/2 + V(x_v) - (p^2/2 + V(x)) = V(r) - V(r+v) \simeq V'(r)v.$$

Comme J est linéaire en v , nous avons en fait l'égalité exacte $J = V'(r)$, ce qui est non-nul partout sauf en $r = 0$. Nous avons donc démontré que $(x, p) \rightarrow (r, T)$.

Nous pouvons maintenant envoyer chaque point de la trajectoire $x + ip$ sur $X + iP = re^{it/T}$. Ce nouveau changement n'est qu'un passage d'un système de coordonnées polaires à des coordonnées cartésiennes et est donc un difféomorphisme bijectif, sauf éventuellement en $(0, 0)$. Il en va donc de même pour changement de variables composé

$$(X, P) = (X(x, p), P(x, p)). \quad (4.20)$$

Les trajectoires dans les nouvelles variables X et P sont des cercles parcourus à vitesse constante, telles qu'illustrées à la figure 4-2.

Ces variables obéissent donc aux équations

$$\begin{aligned} \dot{X} &= P, \\ \dot{P} &= -aX. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Supposons maintenant que nous avons un système bidimensionnel pour lequel les mouvements en x et y sont découplés, $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$. Les équations du mouvement pour x et y ont alors la forme (4.7). Si les deux potentiels V_1 et V_2 sont isochrones, on peut trouver un changement de variables de forme (4.20) pour ramener les équations du mouvement selon chaque direction à celle d'un oscillateur harmonique. Le système se ramène donc à un oscillateur harmonique bidimensionnel, dont le rapport des fréquences selon x et selon y est le même que celui des deux potentiels V_1 et V_2 . Si ce rapport est rationnel, l'oscillateur harmonique est (maximalement) superintégrable. Il possède donc trois intégrales du mouvement indépendantes, par exemple $H_1(X, P_X)$, $H_2(Y, P_Y)$ et $I(X, P_X, Y, P_Y)$. En utilisant le changement de variables (4.20) pour exprimer ces intégrales en fonction de (x, p_x, y, p_y) , on trouve trois intégrales du mouvement indépendantes bien définies, continues et différentiables pour le système initial. On en déduit donc que tout potentiel différentiable, séparable en coordonnées cartésiennes et isochrone est maximalement superintégrable. (la généralisation à un système en n dimensions est directe).

Chapitre 5

Superintégrabilité et mécanique quantique

Bien que l'intégrabilité quantique semble intimement liée à l'intégrabilité classique, comme nous l'avons vu au chapitre 3, et bien que cette propriété soit étudiée de façon explicite depuis maintenant une quarantaine d'années [2, 1], nous sommes toujours loin d'avoir à notre disposition un résultat quantique comparable au théorème de Liouville. Il est pourtant vraisemblable qu'un résultat classique de cette importance ait un équivalent en mécanique quantique. De plus, comme le théorème de Liouville a eu, à travers la théorie KAM, une influence considérable sur le développement de la théorie du chaos, il n'est pas impossible que l'étude de l'analogie quantique d'un tel résultat nous permette de mieux comprendre le chaos en mécanique quantique.

5.1 Potentiels séparables superintégrables et spectres équidistants

Nous étudierons ici le cas où le potentiel est séparable en coordonnées cartésiennes, et nous étudierons tout d'abord l'espacement des niveaux d'énergie, ce qui nous semble prometteur pour deux raisons.

La première est l'analogie avec la mécanique classique. Nous savons que les potentiels séparables et classiquement superintégrables sont isochrones. Si on exige qu'en mécanique quantique on ait, pour une fonction d'onde arbitraire unidimensionnelle

$$\psi(x, t) = \sum_i a_i \phi_{E_i}(x) e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}},$$

une période T pour la valeur moyenne de la position,

$$\langle x \rangle_{t+T} = \langle x \rangle_t, \quad (5.1)$$

on trouve que

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{t+T} - \langle x \rangle_t = 0 &= \int \sum_{i,j} a_i^* a_j \phi_{E_i}^* x \phi_{E_j} \left(e^{\frac{i(E_i - E_j)T}{\hbar}} - 1 \right), \\ &= \sum_{i,j} a_i^* a_j \left(e^{\frac{i(E_i - E_j)T}{\hbar}} - 1 \right) \int \phi_{E_i}^* x \phi_{E_j}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sans que ce soit une condition nécessaire, il suffit donc d'exiger que l'écart entre deux niveaux d'énergie soit un multiple entier de $2\pi\hbar/T$ pour que la valeur moyenne de l'opérateur x soit de période T peu importe l'état du système. Il importe toutefois de réaliser que la périodicité de la valeur moyenne de x n'implique celle du mouvement classique que dans la limite où

$$\langle V_x(x) \rangle \simeq V(x)|_{x=\langle x \rangle},$$

condition qui n'est pas toujours vérifiée.

La seconde raison qui nous pousse à étudier l'espacement des niveaux d'énergie est que la présence d'intégrales du mouvement supplémentaires en deux dimensions est souvent reliée à la présence d'opérateurs de création-annihilation pour les Hamiltoniens unidimensionnels.

Définition 5.1.1. *Un opérateur de création (d'annihilation) pour le Hamiltonien H vérifie la relation de commutation $[H, A] = \lambda A$ pour λ strictement positif (strictement négatif), et par conséquent transforme un état propre du Hamiltonien d'énergie E en un nouvel état propre d'énergie $E + \lambda$.*

Lorsque le Hamiltonien bidimensionnel H possède les intégrales du mouvement $H_1(x, p_x)$, $H_2(y, p_y)$ et $I_1(x, y, p_x, p_y)$, et lorsque ces intégrales sont indépendantes, on s'attend à ce que l'intégrale du mouvement I_2 , créée en commutant H_1 et I_1 , soit non nulle, sans quoi nous aurions plus de n intégrales du mouvement en involution. En particulier, si le terme dominant de I_1 contient un terme de moment angulaire, le degré de I_2 est supérieur de un à celui de I_1 , mais la puissance de L dans le terme dominant de I_2 est inférieure de un à ce qu'elle était dans I_1 . Si on définit $I_{i+1} = [I_i, H_1]$, il existe forcément un I_N dont le terme dominant ne contient plus de moment angulaire. L'ordre de I_{N+1} est alors inférieur à celui de I_N . Si on a en plus

$$I_{N+1} = \sum_{i=1}^N a_i I_i, \quad (5.3)$$

pour des a_i non nuls (on peut alors en particulier choisir $a_1 \neq 0$), on peut choisir une combinaison linéaire

$$A = \sum_{i=1}^{N+1} b_i I_i \quad (5.4)$$

vérifiant $[H_1, A] = \lambda A$.

De façon plus formelle, on remarque que l'application M , agissant sur l'espace des intégrales du mouvement et consistant à commuter avec H_1 , agit de façon linéaire sur l'espace des intégrales du mouvement. La question de savoir s'il existe un opérateur de création ou d'annihilation revient à demander que M ait un vecteur propre avec une valeur propre non nulle, ou plus simplement à exiger que M ait au moins une valeur propre non nulle. Ceci ne semble pas particulièrement exigeant, et nous verrons en effet des exemples où on construit effectivement des opérateurs de création-annihilation de cette façon, mais il en existe aussi pour lesquels nous n'y sommes pas parvenus.

Considérons d'abord le cas mentionné plus haut où $I_{N+1} = \sum_{i=1}^N a_i I_i$. Il suffit alors

de représenter l'intégrale $\sum_{i=1}^N c_i I_i$, par le vecteur

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

L'application M agit alors comme une matrice sur cet espace de dimension finie,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & a_4 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & a_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont on se convainc aisément que le déterminant est non-nul puisque $a_1 \neq 0$. Trouver un opérateur de création-annihilation est donc dans ce cas une simple question d'algèbre linéaire.

S'il n'est pas clair pour l'instant que l'existence d'une intégrale polynomiale garantit en général l'existence d'opérateurs de création et d'annihilation polynomiaux, on sait par contre que la réciproque est vraie ; de l'existence d'opérateurs de création-annihilation polynomiaux pour H_1 et H_2 on peut toujours déduire l'existence d'une intégrale du mouvement polynomiale, si du moins le rapport des «pas» (c'est-à-dire l'écart d'énergie entre deux niveaux successifs) des opérateurs en x et y est commensurable. En effet, si a

$$\begin{aligned}
 [H_1, A_x^\dagger(x, p_x)] &= \lambda_x A_x^\dagger(x, p_x) \\
 [H_2, A_y(y, p_y)] &= -\lambda_y A_y(y, p_y)
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

avec $m\lambda_x - n\lambda_y = 0$ pour $m, n \in \mathbb{N}$, on trouve que $A_x^{\dagger m} A_y^n$ et $A_x^m A_y^{\dagger n}$ commutent avec $H = H_1 + H_2$. On peut se convaincre de différentes façons que chacune de ces deux intégrales est indépendante de H_1 et H_2 . On peut par exemple utiliser le fait qu'en une dimension, on peut toujours choisir le terme dominant d'un opérateur de création-annihilation polynomial comme une puissance de p_i , sinon l'ordre de l'opérateur ne serait pas conservé lors de la commutation avec le Hamiltonien. Les deux intégrales mentionnées plus haut ont donc le même terme dominant, soit $p_x^m p_y^n$. L'intégrale $I = A_x^{\dagger m} A_y^n - A_x^m A_y^{\dagger n}$ est donc d'ordre $m + n - 1$. Lorsqu'on commute I avec H_1 , on trouve $m\lambda_x(A_x^{\dagger m} A_y^n + A_x^m A_y^{\dagger n})$, soit une intégrale d'ordre $m + n$. On en déduit que le terme dominant de I contient un terme de moment angulaire, et donc que cette intégrale est indépendante de H_1 et H_2 .

On peut aussi se contenter de remarquer que comme ni $A_x^{\dagger m} A_y^n$ ni $A_x^m A_y^{\dagger n}$ ne commutent avec H_1 , on peut présumer que les intégrales sont indépendantes (voir section 2). Ce critère a l'avantage de s'appliquer aussi bien aux opérateurs non polynomiaux et aux systèmes n'ayant pas d'équivalent classique.

Nous avons à notre disposition plusieurs potentiels simples auxquels nous pouvons appliquer ces méthodes et qui nous fournissent des renseignements intéressants. Prenons tout d'abord le potentiel (Q.10), $V = a(9x^2 + y^2) + \hbar^2/y^2$. La partie y du potentiel, $V_2(y) = ay^2 + \hbar^2/y^2$, correspond à la partie radiale d'un oscillateur harmonique en trois dimensions, avec le nombre quantique $l = 1$. Le spectre d'énergie est bien connu (voir par exemple [35]), et est donné par $E = \hbar(k + 5/4)2\sqrt{2a}$, où k est un entier positif. On en retient surtout pour l'instant que les niveaux d'énergie sont équidistants, et qu'ils sont séparés de $2\hbar\sqrt{2a}$. Voyons maintenant ce que peut nous apprendre l'intégrale X_1 que possède ce potentiel.

Sans entrer dans les détails des calculs, remarquons qu'en commutant X_1 avec $H_2 = p_y^2/2 + V_2(y)$, on trouve une nouvelle intégrale du système, X_2 , qui est cette fois de quatrième ordre, et dont le terme dominant est proportionnel à $p_x p_y^3$. En commutant X_2 avec H_2 , on trouve donc une intégrale d'ordre inférieur à 4 qui est en fait proportionnelle à X_1 . Il est donc possible de construire un opérateur d'annihilation A pour le Hamiltonien unidimensionnel H_2 par une combinaison linéaire de X_1 et X_2 . Cet opérateur dépend toutefois de x et p_x . Ces quantités commutent avec H_2 , et en ce sens se comportent comme des constantes. Comme A doit être un opérateur d'annihilation pour toutes les valeurs de x et p_x , on se doute que A doit se factoriser en une partie dépendant de (x, p_x) et une autre de (y, p_y) . Par ailleurs, A est par construction une intégrale du système total. S'il agit comme un opérateur d'annihilation en y , il doit agir comme un opérateur de création en x . On s'attend donc à trouver $A = A_y(y, p_y)A_x^\dagger(x, p_x)$. Afin de vérifier ceci, nous pouvons appliquer A sur une fonction $\phi(y)$, ce qui fera disparaître tous les termes contenant des dérivées par rapport à x . Nous pouvons ensuite poser $x = 1$, et nous trouvons finalement un opérateur d'annihilation

$$A_y = p_y^3 - 3i\sqrt{2a}yp_y^2 - 3\frac{(2ay^4 + \sqrt{2a}\hbar y^2 - \hbar^2)}{y^2}p_y + i\frac{2\sqrt{2a^3}y^6 + 6ay^4\hbar - 3\sqrt{2a}y^2\hbar^2 + 3\hbar^3}{y^3}.$$

Appliquons maintenant A à une fonction $\phi(x)$, avec $y=1$. On trouve, à un facteur constant près, l'opérateur de création habituel pour l'oscillateur harmonique à une dimension :

$$A_x^\dagger = i\sqrt{2a}x + p_x, \quad (5.6)$$

et on vérifie bien que la constante du mouvement A est proportionnelle à $A_x^\dagger A_y$.

Que pouvons-nous tirer de tout ceci ? En premier lieu, nous savons que les niveaux

de l'oscillateur harmonique $V_1(x) = 9ax^2$ sont séparés par $3\hbar\sqrt{2a}$, ce qui nous fournit directement la valeur de $\lambda = 3\hbar\sqrt{2a}$. Ceci semble poser un problème, puisque les niveaux d'énergie sur lesquels A_y agit comme opérateur d'échelle sont séparés par $2\hbar\sqrt{2a}$. Nous voyons donc que A_y^\dagger non seulement saute des niveaux, mais en plus qu'il crée des niveaux qui « n'existent pas » ! L'application de A_y^2 , quant à elle, saute des niveaux mais ne crée que des niveaux existants. Comment pouvons-nous interpréter un tel phénomène ?

Le calcul explicite des fonctions d'onde nous fournit la réponse. L'état fondamental de $V_2(y) = ay^2 + \hbar^2/y^2$ s'écrit

$$\phi_0(y) \propto e^{-\frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{2\hbar}} y^2}. \quad (5.7)$$

Si nous appliquons une fois l'opérateur A_y sur cet état, on ne trouve pas 0, comme on aurait pu s'y attendre, mais plutôt

$$\phi_{-1}(y) \propto e^{-\frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{2\hbar}} y^2} / y. \quad (5.8)$$

Il s'agit bien d'un état propre du Hamiltonien d'énergie $-\sqrt{a/2\hbar}$, mais celui-ci n'est pas de carré sommable à cause de la divergence en $y = 0$. Une seconde application de A_y donne toutefois 0. Nous avons donc un exemple d'opérateurs de création-annihilation qui, à partir d'états de carré sommable produisent des états qui ne le sont pas. La situation est illustrée à la figure 5-1.

Ceci est troublant ; en effet, on peut créer à partir de ces opérateurs des intégrales du mouvement bidimensionnelles qui sont autoadjointes et polynomiales en les p_i , mais qui toutefois envoient des états quantiques bien définis sur des états dont on dit habituellement qu'ils n'ont pas de sens physique.

En fait nous pouvons en dire plus encore puisque les fonctions d'onde divergentes

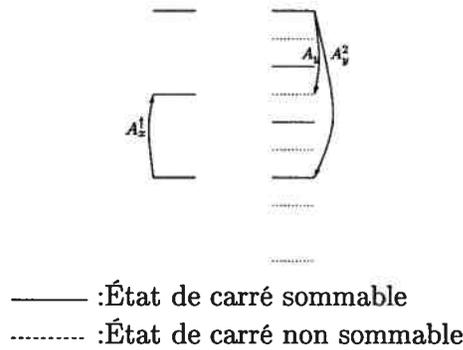


FIG. 5-1 – Premiers niveaux d'énergie correspondant à x et y pour le potentiel (Q.19)

et leurs niveaux d'énergie ont en déjà été calculés ! Dans [1], en effet, les fonctions d'onde pour le potentiel plus général $V = ay^2 + b/y^2$ ont été calculées, et les niveaux d'énergie donnés par

$$E = \sqrt{2a}(2k + 1 \pm \nu)\hbar,$$

où $\nu = \sqrt{1 + 8b/\hbar^2}/2$. Le comportement de la fonction d'onde autour de $y = 0$ étant donné par un terme en $y^{1/2 \pm \nu}$. Il y a donc pour chaque k deux niveaux d'énergie possibles, mais lorsque $\nu \geq 1$, i.e. lorsque $b \geq 3/8\hbar^2$, comme c'est le cas pour nous, un seul de ces niveaux est de carré sommable tandis que l'autre diverge en $y = 0$. L'évolution de ce spectre en fonction de b est illustré à la figure 5-2

L'opérateur A_y^\dagger peut passer d'un niveau de carré sommable à un qui ne l'est pas. La raison pour laquelle ce phénomène peut paraître inhabituel, à notre avis, est que très souvent la question de la sommabilité d'une fonction d'onde dépend de son comportement à l'infini. Pour un état lié, ce comportement est décrit par un terme de forme

$$e^{-\alpha x^2}.$$

L'application d'un opérateur différentiel sur une telle fonction d'onde ne modifiera pas la convergence à l'infini. Toutefois, en $x = 0$, rien ne vient garantir que les opérateurs différentiels préservent la convergence.

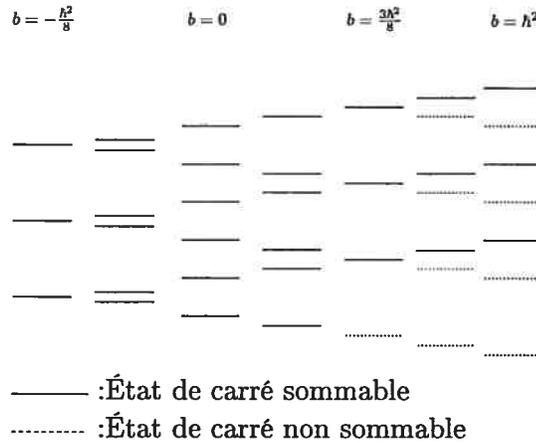


FIG. 5-2 – Évolution des premiers niveaux d'énergie de carré sommable et de carré non sommable pour le potentiel $V = ay^2 + b/y^2$ en fonction de b

Il est très intéressant de remarquer que, pour $b \geq 3/8\hbar^2$ ($\nu \geq 1$), les niveaux de carré sommable sont équidistants, alors que ce n'est pas nécessairement le cas si on inclut les niveaux divergents puisque ν peut varier de façon arbitraire. Toutefois, dans notre cas ($b = \hbar^2$), tous les niveaux au-dessus du fondamental étaient équidistants. Ceci se produit lorsque ν est entier ou demi-entier. Si on écrit b en fonction de ν ,

$$b = (\nu - 1/2)(\nu + 1/2)\hbar^2/2,$$

on constate que notre potentiel correspond exactement à l'équation radiale pour un oscillateur harmonique isotrope en n dimensions avec $\nu = l + (n - 2)/2$,

$$\left(\frac{p_r^2}{2} + ar^2 + \hbar^2 \frac{(\nu + 1/2)(\nu + 1/2)}{2r^2} \right) u_{k,l}(r) = \epsilon_{k,\nu} u(r). \quad (5.9)$$

Le cas $-1/8\hbar^2 < b < 3/8\hbar^2$ est aussi instructif, puisqu'il fournit un exemple de spectre organisé en paires; les niveaux "+" sont équidistants, les niveaux "-" le sont aussi, mais la distance entre deux niveaux consécutifs "+" et "-" est arbitraire, alors que maintenant tous ces états sont de carré sommable. Toutefois on sait que le potentiel

de Smorodinsky-Winternitz,

$$V(x, y) = a(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}, \quad (5.10)$$

est superintégrable. Nous venons donc de trouver un système superintégrable possédant un spectre discret infini dont les niveaux d'énergie ne sont pas équidistants, mais organisés de façon plus complexe. Si on désire relier le concept de superintégrabilité à l'espacement des niveaux d'énergie, il faudra soit renforcer nos hypothèses, soit abandonner l'équidistance exacte des niveaux d'énergie.

Mais qu'advient-il à ces potentiels dans la limite classique ? Si les niveaux d'énergie sont séparés par des quantités arbitraires, comment se fait-il que tous les équivalents classiques soient isochrones ? En fait, lorsque b est macroscopique, le problème ne se pose pas ; dès que $b > 3/8\hbar^2$, les niveaux d'énergie sont équidistants et séparés de $2\sqrt{2a}$. Lorsque b est plus petit, on a une situation plus compliquée. Comme ν dépend de b/\hbar^2 , les écarts de niveaux d'énergie demeurent constants lorsque $\hbar \rightarrow 0$, ce qui semble indiquer un problème lors du passage à la limite classique. Ceci s'explique par le fait que le théorème d'Ehrenfest ne s'applique pas ici puisque le potentiel diverge. Un point d'étude intéressant est la transition qui survient lorsque $b = 3/8$. L'espacement moyen entre les niveaux d'énergie double soudainement lorsque b dépasse ce seuil. L'espace entre les niveaux d'énergie étant typiquement proportionnel à une fréquence, tout se passe comme si, à partir de ce point, les particules classiques «voient» le mur en $x = 0$, et «rebondissent» dessus, doublant ainsi la fréquence d'oscillation. Lorsque b est plus petit, le mur n'est pas assez épais et les particules peuvent le traverser.

On remarque aussi que malgré que les niveaux d'énergie sommables soient équidistants, il n'existe pas nécessairement d'opérateur d'échelle différentiel permettant de construire tout le spectre. On a bien l'opérateur A_y^2 , d'ordre 6, mais celui-ci ne permet de créer à partir d'un état donné qu'un tiers des états. On pourrait croire qu'il existe un opérateur \tilde{A}_y qui ne saute pas de niveau, avec $\tilde{A}_y^3 = A_y^2$. Toutefois un tel opérateur,

s'il était différentiel, serait d'ordre 2, ce qui impliquerait que le potentiel (Q.10) possède une intégrale supplémentaire d'ordre 2, ce qui n'est pas le cas.

5.2 Méthodes algébriques

Les relations algébriques entre les intégrales du mouvement quantiques étant plus complexes et plus riches que celles reliant leurs équivalents classiques, il est normal que les méthodes algébriques jouent un rôle plus important dans l'interprétation de l'intégrabilité quantique.

De telles relations algébriques font que, comme l'a fait remarquer Hietarinta ([21]), les intégrales du mouvement n'ont pas à être indépendantes pour être utiles.

Prenons par exemple le cas du potentiel $V(x) = -(\hbar\omega)^2 \operatorname{sech}^2 \omega x$, qui, s'il est plongé dans un espace bidimensionnel, est une déformation superintégrable du Hamiltonien de la particule libre (voir section 3.4.2). Comme $V_x(x)$ est un puits de potentiel, nous allons nous intéresser à la présence d'états liés. Le potentiel non déformé $V(x) = 0$ n'admettant pas d'états liés, le nombre de tels états pour le système déformé nous fournit une indication de l'importance physique de la déformation.

Nous avons vu que le Hamiltonien unidimensionnel

$$H = \frac{p_x^2}{2} - \frac{(\hbar\omega)^2}{\cosh^2 \omega x}$$

possède une intégrale du mouvement d'ordre trois,

$$X = p_x^3 + \frac{1}{2}\{3V(x) + \hbar^2\omega^2, p_x\},$$

En une dimension, une intégrale ne peut être indépendante du Hamiltonien. On trouve en effet la relation

$$X^2 = 8H^3 + 8(\hbar\omega)^2 H^2 + 2(\hbar\omega)^4 H. \quad (5.11)$$

Comme H et X commutent et que les niveaux d'énergie en une dimension ne sont pas dégénérés, on en déduit qu'un état propre du Hamiltonien d'énergie E est aussi un état propre de X avec valeur propre λ . En appliquant (5.11) sur cet état, on trouve

$$\lambda^2 = 8E^3 + 8(\hbar\omega)^2 E^2 + 2(\hbar\omega)^4 E. \quad (5.12)$$

Les deux opérateurs étant auto-adjoints, les valeurs propres doivent être réelles, ce qui nous indique que le membre de droite doit être positif alors que pour avoir un état lié il faut que l'énergie soit inférieure ou égale à 0. Les seules valeurs de E vérifiant ce critère sont $E_1 = -1/2(\hbar\omega)^2$. et $E_2 = 0$, avec dans les deux cas $\lambda = 0$.

Nous pouvons maintenant utiliser les équations différentielles

$$\begin{aligned} H\phi_{1,2}(x) &= E_{1,2}\phi(x), \\ X\phi_{1,2}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

pour obtenir des équations différentielles linéaires d'ordre un pour $\phi_{1,2}(x)$. On trouve

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \tanh x, \\ \phi_2(x) &= \operatorname{sech} x. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nous avons donc un état lié pair (ce qui est toujours le cas pour un puits de potentiel unidimensionnel), et un état impair lié qui est exactement à la limite d'être un état libre. Ceci n'est pas étranger au fait que ce potentiel est sans réflexion.

Remarquons toutefois qu'il existe une autre méthode, dite des chaînes enveloppantes (dressing chains), qui permet de traiter algébriquement et de façon unifiée une grande classe de potentiels dont, en particulier, les potentiels de forme $\ell(\ell+1)\hbar^2 \cosh^2 x$. Cette méthode, présentée dans [36], permet de calculer explicitement les spectre d'énergie et les fonctions d'onde de ces potentiels. Ceci nous porte à croire que ces potentiels sont en fait superintégrables, ce qui est effectivement le cas.

Nous allons ici nous inspirer des méthodes utilisées dans [36], afin de trouver directement des intégrales pour les potentiels $\ell(\ell+1)\hbar^2 \cosh^2 x$ et, par le fait même, pour une famille plus beaucoup plus vaste de potentiels qui inclut notamment tous les cas particuliers, avec racine dégénérée, de la fonction elliptique de Weierstrass $\wp(x)$. Nous reportons à un ouvrage ultérieur l'application plus poussée de la méthode des chaînes enveloppantes.

Supposons que nous ayons un Hamiltonien dépendant d'un paramètre ℓ ,

$$H_\ell(x, p_x)$$

et deux opérateurs a et a^\dagger tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\ell &= a_\ell^\dagger a_\ell = H_\ell + c_1, \\ \mathcal{B}_\ell &= a_\ell a_\ell^\dagger = H_{\ell-1} + c_2, \end{aligned} \tag{5.15}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes qui dépendent éventuellement de ℓ . Nous avons alors que pour tout état propre de \mathcal{B}_ℓ ,

$$\mathcal{B}_\ell |\psi\rangle_\ell = \alpha |\psi\rangle_\ell,$$

il est possible de construire un état propre de \mathcal{A}_ℓ ayant la même valeur propre.

$$\mathcal{A}_\ell \left(a_\ell^\dagger |\psi\rangle_\ell \right) = a_\ell^\dagger a_\ell a_\ell^\dagger |\psi\rangle_\ell = a_\ell^\dagger \mathcal{B}_\ell |\psi\rangle_\ell = \alpha \left(a_\ell^\dagger |\psi\rangle_\ell \right) \quad (5.16)$$

On a un résultat équivalent pour les états propres $|\phi\rangle_\ell$ de \mathcal{A}_ℓ de valeur propre α , qui vérifient

$$\mathcal{B}_\ell a_\ell |\phi\rangle_\ell = \alpha a_\ell |\phi\rangle_\ell. \quad (5.17)$$

Dans les deux cas on doit toutefois garder à l'esprit que l'état propre ainsi créé peut être nul, si $a_\ell |\phi\rangle_\ell = 0$ ou $a_\ell^\dagger |\psi\rangle_\ell = 0$.

En termes des Hamiltoniens, ceci revient à dire qu'à tout état propre $|\psi\rangle_\ell$ de H_ℓ et d'énergie E on peut trouver un état propre $a |\psi\rangle_\ell$ de $H_{\ell-1}$ et d'énergie $E + c_1 - c_2$. À l'inverse, à tout état propre $|\phi\rangle_{\ell-1}$ de $H_{\ell-1}$ d'énergie E on peut trouver un état propre $a^\dagger |\phi\rangle_{\ell-1}$ de H_ℓ et d'énergie $E + c_2 - c_1$.

On remarque alors que si X_ℓ commute avec H_ℓ , et donc avec $\mathcal{B}_{\ell+1}$ on a que $X_{\ell+1} = a_{\ell+1}^\dagger X_\ell a_{\ell+1}$ est une intégrale de $H_{\ell+1}$. En effet

$$\begin{aligned} [H_{\ell+1}, X_{\ell+1}] &= [\mathcal{A}_{\ell+1}, X_{\ell+1}] = a_{\ell+1}^\dagger a_{\ell+1} a_{\ell+1}^\dagger X_\ell a_{\ell+1} - a_{\ell+1}^\dagger X_\ell a_{\ell+1} a_{\ell+1}^\dagger a_{\ell+1} \\ &= a_{\ell+1}^\dagger [B_{\ell+1}, X_\ell] a_{\ell+1} = a_{\ell+1}^\dagger [H_\ell, X_\ell] a_{\ell+1} = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Comme H_0 possède l'intégrale $X_0 = p$, on peut construire par induction une intégrale pour ℓ quelconque. Cette intégrale étant d'ordre impair, elle est reliée de façon non-triviale au Hamiltonien, et nous pourrons l'utiliser comme nous l'avons fait plus haut dans le cas $\ell = 1$.

Remarque 1. On peut posséder aussi en sens inverse ; une intégrale $X_{\ell+1}$ de $H_{\ell+1}$ est connue, $X_\ell = a_{\ell+1} X_{\ell+1} a_{\ell+1}^\dagger$ est une intégrale de H_ℓ .

La même méthode permet aussi de générer des intégrales du mouvement indépendantes dans des espaces de dimensions supérieures. Supposons que nous avons un Hamiltonien en n dimensions de la forme $H_{n,\ell} = H_\ell(x, p_x) + H_2(\vec{y}, \vec{p}_y)$, où \vec{y} et \vec{p} sont des vecteurs à $(n - 1)$ composantes. Supposons que X_0 est une intégrale de $H_{n,0} = p_x^2/2 + H_2(\vec{y}, \vec{p})$ et montrons par induction que nous pouvons construire une intégrale de $H_{n,\ell}$.

Nous supposons donc encore une fois que $H_{n,\ell}$ possède une intégrale X_ℓ . Alors l'opérateur $X_{\ell+1} = a_{\ell+1}^\dagger X_\ell a_{\ell+1}$ commute avec $H_{n,\ell+1}$. En effet, comme les opérateurs a_ℓ et a_ℓ^\dagger commutent avec la partie indépendante de x , nous avons

$$\begin{aligned}
 [H_{n,\ell+1}, X_{\ell+1}] &= [A_{\ell+1} + H_2(\vec{y}, \vec{p}_y), X_{\ell+1}] \\
 &= a_{\ell+1}^\dagger a_{\ell+1} a_{\ell+1}^\dagger X_\ell a_{\ell+1} - a_{\ell+1}^\dagger X_\ell a_{\ell+1} a_{\ell+1}^\dagger a_{\ell+1} + a_{\ell+1}^\dagger [H_2(\vec{y}, \vec{p}_y), X_\ell] a_{\ell+1} \quad (5.19) \\
 &= a_{\ell+1}^\dagger [B_{\ell+1} + H_2(\vec{y}, \vec{p}_y), X_\ell] a_{\ell+1} = a_{\ell+1}^\dagger [H_{n,\ell}, X_\ell] a_{\ell+1} = 0.
 \end{aligned}$$

Par induction, on a donc montré le résultat suivant

Théorème 3. *À toute intégrale X_0 de $H_{n,0}$ d'ordre n on peut faire correspondre une intégrale X_ℓ de $H_{n,\ell}$ d'ordre $n + 2\ell$.*

Si un ensemble d'intégrales $\{X_{k,0}\}$ de $H_{n,0}$ sont indépendantes, les intégrales

$$\{a_\ell a_{\ell-1} \dots a_1 X_{k,0} a_1^\dagger \dots a_{\ell-1}^\dagger a_\ell^\dagger\}$$

de $H_{n,\ell}$ ainsi formé seront vraisemblablement indépendantes puisqu'elles sont formées en prenant le produit des intégrales indépendantes initiales par les deux opérateurs universels $a_\ell a_{\ell-1} \dots a_1$ et $a_1^\dagger \dots a_{\ell-1}^\dagger a_\ell^\dagger$ de $H_{n,\ell}$.

5.2.1 Quelques applications

La façon la plus simple de construire des opérateurs a et a^\dagger qui vérifient (5.15) est de les supposer de forme

$$\begin{aligned} a_\ell &= (p - i\ell\hbar f(x))/\sqrt{2}, \\ a_\ell^\dagger &= (p + i\ell\hbar f(x))/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Si alors nous avons une fonction $f(x)$ telle que

$$f'(x) + f^2(x) = d, \tag{5.21}$$

où d est une constante, nous pouvons écrire $H_\ell = p^2/2 - \ell(\ell + 1)\hbar^2 f'(x)/2$.

L'équation (5.21) admet les solutions $f(x) = 1/x$, $f(x) = \omega \tanh(\omega x)$ et $f(x) = -\omega \tan(\omega x)$.

On utilise maintenant le théorème 3.

Corollaire 3. Soit $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ un ensemble de fonctions vérifiant l'équation (5.21) et $\{\ell_i\}_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{N}^n$. Alors le potentiel $V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\ell_i + 1)\hbar^2 f_i^2(x_i)$ est superintégrable.

Démonstration. En effet, on peut écrire le Hamiltonien correspondant comme

$$H_{n,\ell_x,\vec{\ell}}(x, \vec{y}, p_x, \vec{p}) = H_{\ell_x}(x, p_x) + \sum_{i=1}^{n-1} H_{\ell_i}(y_i, p_i),$$

avec

$$\begin{aligned} H_{\ell_i} &= p_i^2/2 - \ell_i(\ell_i + 1)\hbar^2 f_{i+1}'(y_i)/2, \\ H_{\ell_x} &= p_x^2/2 - \ell_x(\ell_x + 1)\hbar^2 f_1'(x)/2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

On trouve alors que $H_{n,0,\vec{\ell}}$ possède $2n + 1$ intégrales du mouvement : en plus du Hamiltonien, $n - 1$ intégrales correspondent à la séparation des variables en coordonnées

cartésiennes et sont d'ordre deux. Les $n - 1$ autres correspondent aux intégrales des Hamiltoniens bidimensionnels $H_{2,0,\ell_i}(x, y_i, p_x, p_i) = H_0(x, p_x) + H_{\ell_i}(y_i, p_i)$, formées en utilisant le théorème 3 avec

$$\begin{aligned} H_{n,0} &= H_{2,0,0}, \\ H_{n,\ell} &= H_{2,0,\ell_i}, \\ X_0 &= L_{0,i} \equiv xp_i - y_i p_x. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Les intégrales ainsi formées contiennent dans leur terme dominant une puissance de $L_{0,i}$ et, puisque que les $L_{0,i}$ sont indépendants, les intégrales formées à partir de y_i différents sont indépendantes. À partir des $2n - 1$ intégrales indépendantes pour $H_{n,0,\vec{\ell}}$, on peut donc former $2n - 1$ intégrales indépendantes du Hamiltonien $H_{n,\ell_x,\vec{\ell}}(x, \vec{y}, p_x, \vec{p})$. \square

Nous avons choisi à l'équation (5.20) une forme particulière des opérateurs a_ℓ et a_ℓ^\dagger . Ceci nous a permis d'étudier les déformations du potentiel constant, puisque l'induction débutait, avec $\ell = 0$, à $V = 0$. Si nous généralisons maintenant en supposant

$$\begin{aligned} a_\ell &= (p - i\hbar\sqrt{2ax} - i\ell\hbar f(x))/\sqrt{2}, \\ a_\ell^\dagger &= (p + i\hbar\sqrt{2ax} + i\ell\hbar f(x))/\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{5.24}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\ell &= \frac{p^2}{2} + \hbar^2 ax^2 + \frac{\ell^2 \hbar^2 f^2(x)}{2} - \frac{\ell \hbar^2 f'(x)}{2} - \frac{\sqrt{2a}\hbar^2}{2} + \hbar^2 \sqrt{2a} \ell x f(x), \\ \mathcal{B}_\ell &= \frac{p^2}{2} + \hbar^2 ax^2 + \frac{\ell^2 \hbar^2 f^2(x)}{2} + \frac{\ell \hbar^2 f'(x)}{2} + \frac{\sqrt{2a}\hbar^2}{2} + \hbar^2 \sqrt{2a} \ell x f(x). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Le cas $\ell = 0$ correspond maintenant à l'oscillateur harmonique. Si nous voulons encore une fois avoir une relation de la forme (5.15) pour tout ℓ , nous devons avoir que $\mathcal{B}_{\ell+1} - \mathcal{A}_\ell = \delta(\ell)$, où $\delta(\ell)$ est fonction de ℓ seulement. Ceci implique que

$$(2\ell + 1)(f^2 + f') + \sqrt{2ax}f = \delta(\ell). \quad (5.26)$$

Comme cette condition doit tenir pour tout ℓ , on constate que $xf(x)$ et $f^2(x) + f'(x)$ doivent tous deux être constants. La seule solution possible est donc $f(x) = 1/x$. Les équations (5.25) prennent alors bien la forme (5.15), et nous avons donc montré qu'à toute intégrale de $H_0 = p_x^2/2 + ax^2 + H_2(\vec{y}, \vec{p})$, on peut associer une intégrale de

$$H_\ell = p_x^2/2 + ax^2 + \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2x^2} + H_2(\vec{y}, \vec{p}).$$

Corollaire 4. *Nous pouvons déduire en particulier de ceci que pour $\vec{k}, \vec{\ell} \in \mathbb{N}^n$, le Hamiltonien*

$$H = \sum_{i=1}^n p_i^2 + ak_i^2 \left(x_i^2 + \frac{\ell_i(\ell_i + 1)\hbar^2}{2x_i^2} \right), \quad (5.27)$$

est maximalelement superintégrable, ce qui explique l'intégrabilité d'une bonne partie des potentiels que nous avons trouvés au chapitre 3.

Si nous laissons tomber l'exigence que les équations (5.25) prennent la forme (5.15) pour tout ℓ , nous pouvons tout de même obtenir des résultats intéressants. En fait il suffit de choisir $f(x)$ de sorte que \mathcal{A}_ℓ ou \mathcal{B}_ℓ correspondent à l'oscillateur harmonique pour une valeur donnée de ℓ , qui n'a ici plus besoin d'être entier. Nous pourrions alors construire de la façon habituelle une intégrale pour le Hamiltonien correspondant respectivement à \mathcal{B}_ℓ ou \mathcal{A}_ℓ .

Il nous suffit pour ce faire de trouver une fonction $f(x)$ telle que l'un des deux

termes

$$\begin{aligned} & \frac{\ell^2 \hbar^2 f^2(x)}{2} - \frac{\ell \hbar^2 f'(x)}{2} + \hbar^2 \sqrt{2a} \ell x f(x), \\ & \frac{\ell^2 \hbar^2 f^2(x)}{2} + \frac{\ell \hbar^2 f'(x)}{2} + \hbar^2 \sqrt{2a} \ell x f(x), \end{aligned} \quad (5.28)$$

soit constant. Le terme non constant correspondra alors au potentiel $V = \pm \ell \hbar^2 f'(x)$, selon le cas.

Si nous posons par exemple $f(x) = -1/(x - \alpha) - 1/(x + \alpha)$ et $a = 1/(8\alpha^4)$ nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{p^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8\alpha^4} x^2 - \frac{5\hbar^2}{4\alpha^2}, \\ \mathcal{B}_1 &= \frac{p^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8\alpha^4} x^2 + \frac{\hbar^2}{(x - \alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x + \alpha)^2} - \frac{3\hbar^2}{4\alpha^2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Nous avons donc démontré algébriquement qu'à partir de toute intégrale X du potentiel

$$V(x, \vec{y}) = \frac{\hbar^2}{8\alpha^4} x^2 + V_2(\vec{y})$$

nous pouvons construire une intégrale $a_1 X a_1^\dagger$ de

$$\tilde{V}(x, \vec{y}) = \frac{\hbar^2}{8\alpha^4} x^2 + \frac{\hbar^2}{(x - \alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x + \alpha)^2} + V_2(\vec{y}).$$

Maintenant deux remarques s'imposent. La première est que cette méthode permet de générer un grand nombre de potentiels superintégrables séparables en coordonnées cartésiennes. En effet nous n'avons choisi qu'une fonction $f(x)$ particulière qui donnait à (5.28) la forme voulue, et nous laissons pour un ouvrage ultérieur l'exploitation plus détaillée de cette méthode. Une autre façon de généraliser simplement cette méthode serait d'admettre des Hamiltoniens avec champ magnétique. Dans ce cas beaucoup moins contraignant il serait notamment possible de définir des opérateurs a et a^\dagger bidimensionnels.

La seconde remarque est que cette méthode nous permet en outre d'obtenir de l'information sur les spectres des potentiels unidimensionnels ainsi formés. Toutefois la situation n'est encore une fois pas aussi simple qu'il n'y paraît.

Ainsi, pour tout état propre $|\psi_n\rangle$ de

$$H = p^2/2 + \frac{\hbar^2}{8\alpha^4}x^2 \quad (5.30)$$

et d'énergie $E_n = (n + 1/2)\hbar^2/2\alpha^2$, nous connaissons un état propre de

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8\alpha^4}x^2 + \frac{\hbar^2}{(x - \alpha)^2} + \frac{\hbar^2}{(x + \alpha)^2},$$

donné par $a_1 |\psi_n\rangle$, où

$$a_1 = \left(p - i\hbar\sqrt{2a}x + i\hbar \left(\frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x + \alpha} \right) \right) / \sqrt{2}.$$

Nous remarquons toutefois qu'à moins que la fonction d'onde $\psi_n(x)$ s'annule en $x = \pm\alpha$, l'état $a_1 |\psi\rangle$ n'est pas de carré sommable. Pour qu'un état propre $|\psi_n\rangle$ de (5.30) s'annule en $x = \pm\alpha = \pm 1/(8a)^{1/4}$, il faut que $H_n(\pm 1/\sqrt{2}) = 0$, où $H_n(x)$ est cette fois le polynôme d'Hermite de degré n . Cette condition est remplie uniquement pour $|\psi_2\rangle$. Toutefois nous pouvons calculer que $a_1 |\psi_2\rangle = 0$. C'est-à-dire que nous ne pouvons former aucun état propre de carré sommable de \tilde{H} à partir des états propres de H . Comme il est de plus impossible d'avoir des états propres $|\phi\rangle$ de \tilde{H} vérifiant $a_1^\dagger |\phi\rangle = 0$ tout en étant de carré sommable à l'infini, notre méthode ne nous fournit aucun état propre de carré sommable de \tilde{H} . La présence d'états divergents vient donc encore une fois brouiller les cartes, et nous reportons la discussion de ces problèmes fort intéressants à un ouvrage ultérieur.

Chapitre 6

Liens entre intégrabilité quantique et intégrabilité classique.

Nous avons vu au chapitre 3 que les conditions d'existence pour les intégrales d'ordre inférieur ou égal à trois étaient très similaires. Nous avons aussi observé dans les chapitres suivants que l'isochronicité et la régularité de l'espacement du spectre, propriétés reliées respectivement, à l'intégrabilité classique et quantique, étaient aussi reliées entre elles. Il est toutefois difficile pour l'instant d'avancer des énoncés généraux à ce sujet. Nous nous contenterons donc pour l'instant d'indiquer les pistes qui nous semblent prometteuses.

Nous pouvons tout d'abord généraliser le résultat concernant la similarité des conditions d'existence d'intégrales classiques et quantiques. En effet, pour deux fonctions F et G de \vec{p} et \vec{x} , on a

$$\{F, G\}_{PB} = \frac{[F, G]}{\hbar} + o(\hbar).$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas de \hbar , ceci implique que le commutateur $[F, G]$ est proportionnel à \hbar , et que les conditions d'existence d'une intégrale quantique et classique doivent coïncider lorsque \hbar tend vers 0, et donc qu'une intégrale quantique demeure une intégrale du mouvement dans la limite classique. On ne sait toutefois pas a priori si l'indépendance de l'intégrale quantique implique celle de son équivalent classique et, faute d'une définition appropriée de l'indépendance en mécanique quantique, il nous est difficile de nous attaquer à ce problème. Remarquons tout de même que si nous avons deux intégrales indépendantes X_1 et X_2 avec une bonne limite classique, et

si on suppose, pour reprendre un exemple du chapitre 2, que X_1 et $X_1 + \hbar^2 X_2$ sont indépendantes, alors on constate que deux intégrales quantiquement indépendantes peuvent être classiquement dépendantes.

Pour ce qui est du problème inverse, nous savons aujourd'hui qu'il faut être attentif. Nous ne connaissons pas d'exemple de potentiel classique intégrable ne possédant pas de contrepartie quantique intégrable, mais dans plusieurs cas il est nécessaire de «déformer» le potentiel et l'intégrale du mouvement par des termes proportionnels à \hbar^2 . Dans plusieurs cas il existe plusieurs telles déformations qui rendent le potentiel quantique intégrable, ce qui nous indique que la correspondance entre les potentiels classiques et quantiques intégrables est loin d'être bijective. Il serait tout de même intéressant de parvenir à démontrer à tout le moins qu'à tout potentiel classiquement intégrable il existe un potentiel quantique intégrable correspondant, ou, si ce n'est pas le cas, de trouver un contre-exemple.

Maintenant qu'en est-il des propriétés associées à l'intégrabilité? Plusieurs articles [37, 26, 27] ont été consacrés à l'étude des liens entre l'équidistance des niveaux d'énergie en mécanique quantique et l'isochronicité des potentiels classiques unidimensionnels. Toutefois à partir du moment où on a trouvé un potentiel isochrone dont l'équivalent quantique n'est pas équidistant [26], puis un potentiel quantique équidistant dont l'équivalent classique n'était pas isochrone [37], l'intérêt pour cette question a, à en juger par le nombre de publications consacrées à ce sujet, diminué. Toutefois il est important de remarquer que dans [26, 27] on n'avait pas permis à l'équivalent quantique de différer du potentiel classique par un terme correctif proportionnel à \hbar^2 , tandis que dans [37] on a transposé le Hamiltonien avec $\hbar = 1$ de la mécanique quantique à la mécanique classique. Nous savons donc à ce jour est que le fait qu'un Hamiltonien classique soit isochrone ne garantit pas que le même Hamiltonien est équidistant en mécanique quantique, ce qui est similaire à ce que nous avons observé dans le cas de l'intégrabilité, où il est parfois nécessaire de déformer le Hamiltonien pour préserver l'intégrabilité ou la superintégrabilité. Comme cette dernière propriété est aussi étroitement reliée à l'espacement des niveaux d'énergie (par la présence d'opérateurs de création-annihilation) et à l'isochronicité, il est raisonnable de penser que la déformation nécessaire pour préserver

l'intégrabilité permettra aussi de préserver certaines propriétés liées à l'espacement du spectre. Le lien entre l'isochronicité, l'équidistance des niveaux d'énergie et la superintégrabilité en deux dimensions apporte donc un éclairage nouveau à un problème unidimensionnel de correspondance entre des phénomènes classiques et quantiques, et ouvre plusieurs avenues intéressantes pour comprendre et éventuellement résoudre ce problème.

Finalement, nous avons observé que la propriété de Painlevé semble jouer un rôle important en intégrabilité quantique. Il serait intéressant de comprendre physiquement la signification de ce phénomène, et en particulier de découvrir ce qu'il advient de cette propriété lorsque l'on passe à la mécanique classique.

Chapitre 7

Conclusion

Nos efforts de classification nous ont donc menés plus loin que prévu. Nous avons entrepris cette recherche dans l'espoir de mieux comprendre la distribution des systèmes intégrables et superintégrables en mécanique classique et quantique, ainsi que les relations entre ces deux concepts. Cet objectif a été atteint, puisque nous avons découvert de nombreux exemples aux propriétés intéressantes qui nous ont fait mieux comprendre ce qu'implique et ce que n'implique pas la superintégrabilité. De façon plus importante encore, nous avons découvert que l'étude des systèmes séparables en coordonnées cartésiennes était fort instructive, puisqu'elle nous a permis de développer des outils puissants pour comprendre des propriétés physiques de systèmes unidimensionnels. Il est ainsi probable que ces méthodes nous permettent de comprendre définitivement le lien entre isochronicité (classique) et équidistance (quantique), de même qu'entre solubilité classique et quantique, alors qu'il n'est pas évident qu'une approche strictement unidimensionnelle puisse y parvenir. En particulier, notre approche nous a permis de constater à de nombreuses reprises que des états quantiques habituellement considérés comme n'ayant pas de sens physique, puisque n'étant pas de carré sommable, jouent un rôle important dans les phénomènes liés à l'intégrabilité quantique, et devront être pris en compte dans l'étude des phénomènes liés à l'intégrabilité.

De plus le nombre élevé de questions intéressantes et de pistes disponibles nous a obligés à faire des choix et à en laisser plusieurs en plan afin de pouvoir terminer la rédaction de ce mémoire, ne serait-ce que pour y revenir par la suite. En plus des questions en suspens du chapitre 6, nous avons négligé plusieurs généralisations évidentes des méthodes du chapitre 5, et nous espérons nous y attaquer dans un article à venir.

Nous avons aussi manqué de temps pour étendre notre classification aux potentiels séparables en coordonnées polaires, paraboliques ou elliptiques, qui requièrent des calculs plus poussés. Nous avons déjà vu qu'il existait des liens entre les équations de Schrödinger superintégrables séparables en coordonnées polaires et cartésiennes, puisque plusieurs des potentiels que nous avons trouvés peuvent être vus comme les potentiels effectifs de l'équation radiale pour l'oscillateur harmonique. Les liens exacts qui les unissent restent à déterminer mais il est plausible qu'ils soient forts puisque, comme nous l'avons vu, le lien entre superintégrabilité classique et isochronicité ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel le système se sépare.

Il est aussi possible de généraliser en considérant des intégrales d'ordre plus élevé et, pourquoi pas, des intégrales non polynomiales. De même, on peut tenter d'étendre le concept d'intégrabilité quantique aux systèmes n'ayant pas d'équivalent classique. Nous avons remarqué que les équations déterminantes pour le potentiel que nous avons obtenu en mécanique quantique possédaient toutes la propriété de Painlevé. Cette propriété n'est pas le fruit du hasard, et il est probable qu'elle sera observée aussi pour les intégrales d'ordre plus élevé.

Finalement, et au risque de me répéter, le problème de la définition (ou des définitions) de l'indépendance d'un système d'intégrales devient quant à lui de plus en plus pressant à mesure que l'on constate que l'intégrabilité quantique est une propriété importante. Une fois ce problème réglé, il est permis d'espérer que la réponse à plusieurs questions importantes évoquées dans ce mémoire sera à portée de main.

Bibliographie

- [1] P. WINTERNITZ, Y. A. SMORODINSKIĪ, M. UHLÍŘ et I. FRIŠ, « Symmetry groups in classical and quantum mechanics », *Soviet J. Nuclear Phys.*, vol. 4, 1967, p. 444–450.
- [2] J. FRIŠ, V. MANDROSOV, Y. A. SMORODINSKY *et al.*, « On higher symmetries in quantum mechanics », *Phys. Lett.*, vol. 16, 1965, p. 354–356.
- [3] S. GRAVEL et P. WINTERNITZ, « Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics », *J. Math. Phys.*, vol. 43, n° 12, 2002, p. 5902–5912.
- [4] J. HIETARINTA, « Solvability in quantum mechanics and classically superfluous invariant », *J. Phys. A : Math. Gen.*, 1989.
- [5] S. WEIGERT, « The problem of quantum integrability », *Phys. D*, vol. 56, n° 1, 1992, p. 107–119.
- [6] N. W. EVANS, « Superintegrability in classical mechanics », *Phys. Rev. A (3)*, vol. 41, n° 10, 1990, p. 5666–5676.
- [7] N. W. EVANS, « Group theory of the Smorodinsky-Winternitz system », *J. Math. Phys.*, vol. 32, n° 12, 1991, p. 3369–3375.
- [8] N. W. EVANS, « Super-integrability of the Winternitz system », *Phys. Lett. A*, vol. 147, n° 8-9, 1990, p. 483–486.
- [9] A. MAKAROV, J. SMORODINSKY, K. VALIEV et P. WINTERNITZ, « A systematic search for non-relativistic systems with dynamical symmetries », *Nuovo Cim.*, vol. A52, 1967, p. 1061–1084.
- [10] E. G. KALNINS, J. M. KRESS, G. S. POGOSYAN et W. Jr. MILLER, « Completeness of superintegrability in two-dimensional constant-curvature spaces », *J. Phys. A*, vol. 34, n° 22, 2001, p. 4705–4720.

- [11] M. F. RAÑADA et M. SANTANDER, « Superintegrable systems on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2 », *J. Math. Phys.*, vol. 40, n° 10, 1999, p. 5026–5057.
- [12] E. G. KALNINS, J. M. KRESS et P. WINTERNITZ, « Superintegrability in a two-dimensional space of nonconstant curvature », *J. Math. Phys.*, vol. 43, n° 2, 2002, p. 970–983.
- [13] P. TEMPESTA, A. V. TURBINER et P. WINTERNITZ, « Exact solvability of superintegrable systems », *J. Math. Phys.*, vol. 42, n° 9, 2001, p. 4248–4257.
- [14] M. B. SHEFTEL, P. TEMPESTA et P. WINTERNITZ, « Superintegrable systems in quantum mechanics and classical Lie theory », *J. Math. Phys.*, vol. 42, n° 2, 2001, p. 659–673.
- [15] J. DRACH, « Sur l'intégration logique des équations de la dynamique à deux variables : forces conservatrices. intégrales cubiques. mouvements dans le plan », *C.R. Acad. Sci.*, vol. 200, n° 22, 1935, p. 1–65.
- [16] M. F. RAÑADA, « Superintegrable $n = 2$ systems, quadratic constants of motion, and potentials of Drach », *J. Math. Phys.*, vol. 38, n° 8, 1997, p. 4165–4178.
- [17] A. V. TSIGANOV, « The Drach superintegrable systems », *J. Phys. A*, vol. 33, n° 41, 2000, p. 7407–7422.
- [18] C. R. HOLT, « Construction of new integrable Hamiltonians in two degrees of freedom », *J. Math. Phys.*, vol. 23, n° 6, 1982, p. 1037–1046.
- [19] S. GRAVEL, « Hamiltonians separable in cartesian coordinates and third-order integrals of motion », *math-ph/0302028*.
- [20] J. BERTRAND, « Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe », *C.R. Acad. Sci.*, vol. 77, 1873, p. 849–853.
- [21] J. HIETARINTA, « Pure quantum integrability », *Phys. Lett. A*, vol. 246, n° 1-2, 1998, p. 97–104.
- [22] P. A. CLARKSON et M. D. KRUSKAL, « New similarity reductions of the Boussinesq equation », *J. Math. Phys.*, vol. 30, n° 10, 1989, p. 2201–2213.
- [23] D. LEVI et P. WINTERNITZ, « Nonclassical symmetry reduction : example of the Boussinesq equation », *J. Phys. A*, vol. 22, n° 15, 1989, p. 2915–2924.

- [24] P. A. CLARKSON et P. WINTERNITZ, « Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation », *Phys. D*, vol. 49, n° 3, 1991, p. 257–272.
- [25] C. M. COSGROVE, « Higher-order Painlevé equations in the polynomial class. I. Bureau symbol P2 », *Stud. Appl. Math.*, vol. 104, n° 1, 2000, p. 1–65.
- [26] G. GHOSH et R. W. HASSE, « Inequivalence of the classes of quantum and classical harmonic potentials : proof by example », *Phys. Rev. D*, vol. 24, 1981, p. 1027–1029.
- [27] P. MOHAZZABI, « On classical and quantum harmonic potentials », *Can. J. Phys.*, vol. 78, 2000, p. 937–946.
- [28] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1944.
- [29] N. N. NEHOROSĚV, « Action-angle variables, and their generalizations », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, vol. 26, 1972, p. 181–198. *Traduction anglaise dans Trans. Moscow Math. Soc. 26 (1972), 180-198.*
- [30] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*. Springer, New York, 1980.
- [31] J. CHAVARRIGA et M. SABATINI, « A survey of isochronous centers », *Qual. Theory Dyn. Syst.*, vol. 1, n° 1, 1999, p. 1–70.
- [32] A. CIMA, F. MAÑOSAS et J. VILADELPRAT, « Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems », *J. Differential Equations*, vol. 157, n° 2, 1999, p. 373–413.
- [33] M. URABE, « Potential forces which yield periodic motions of a fixed period », *J. Math. Mech.*, vol. 10, 1961, p. 569–578.
- [34] J. H. HUBBARD et B. H. WEST, *Differential Equations : A Dynamical Systems Approach*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [35] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU et F. LALOË, *Mécanique quantique*. Hermann, 1977.
- [36] A. P. VESELOV et A. B. SHABAT, « A dressing chain and the spectral theory of the Schrödinger operator », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 27, n° 2, 1993, p. 1–21, 96.
- [37] M. M. NIETO et V. P. GUTSCHICK, « Inequivalence of the classes of classical and quantum harmonic potentials : proof by example », *Phys. Rev. D (3)*, vol. 23, n° 4, 1981, p. 922–926.

