

Université de Montréal

Estimation linéaire pour un modèle  
de régression ARCH

par

Eugen Ursu

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

août 2004



QA

3

U54

2004

V.011

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Estimation linéaire pour un modèle  
de régression ARCH

présenté par

Eugen Ursu

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Roch Roy*

---

(président-rapporteur)

*Louis Doray*

---

(directeur de recherche)

*Andrew Luong*

---

(co-directeur)

*Jean-François Angers*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

31 août 2004

## SOMMAIRE

---

Depuis quelques années les chercheurs montrent un intérêt croissant pour les modèles de régression avec des erreurs qui suivent un processus *ARCH*. La méthode classique pour estimer les paramètres est la méthode de pseudo-vraisemblance. Les calculs numériques sont compliqués, avec un choix de valeurs initiales non évident a priori. Les estimateurs de pseudo-vraisemblance pour les paramètres de la moyenne du processus ne sont plus convergents si l'erreur ne suit pas le modèle *ARCH* spécifié.

Le travail effectué dans ce mémoire concerne l'estimation des paramètres de modèles *ARCH* avec des estimateurs obtenables avec un algorithme simple, linéaire et qui donne de bons résultats au niveau du comportement asymptotique.

Dans le chapitre 1, sont introduits et étudiés les modèles *ARCH* univariés. Nous faisons un rappel sur les principales propriétés de ces modèles : expression des moyenne et variance, conditions de stationnarité, expression pour les moments .... Nous abordons aussi l'aspect statistique : estimation des paramètres de modèles *ARCH* par la méthode de pseudo-vraisemblance. Le chapitre 2 de ce mémoire présente des nouveaux estimateurs obtenables avec un algorithme linéaire utilisé pour des modèles de régression avec erreurs *ARCH*. Dans le chapitre 3 nous présentons des résultats numériques à travers quelques modèles spéciaux.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons la méthodologie développée à trois séries réelles représentant le logarithme des rendements mensuels pour l'indice *SP&500* de janvier 1980 à décembre 1999, le logarithme des rendements mensuels pour *IBM* de janvier 1962 à décembre 1999 et le logarithme des rendements hebdomadaires pour l'indice *NASDAQ* de octobre 1974 à mars 2004.

Ce mémoire s'adresse aux statisticiens et aux économètres, dans la perspective de faciliter leur travail et de leur procurer un outil efficace d'estimation pour les processus *ARCH*. D'autres domaines peuvent néanmoins bénéficier des points de vue discutés ici. La lecture de ce mémoire nécessite une connaissance de base des méthodes d'estimation et des propriétés du processus autorégressif-moyenne mobile, *ARMA*.

## SUMMARY

---

Researchers have lately shown a growing interest for regression models with errors following an ARCH process. The classical approach to estimate its parameters is the method of quasi-likelihood. Numerical calculations are complicated, with a difficult choice for the initial value. Quasi-likelihood estimators for the parameters of the average of the process are not consistent any more if the error does not follow the specified ARCH model.

The work carried out in this thesis relates to the estimation of ARCH models with estimators obtainable with a simple, linear algorithm and which gives good results for the asymptotic properties of the estimators.

In chapter 1 we introduce and study univariate ARCH models. We derive the following properties of these series : expression of the mean and variance, stationarity conditions, expressions for the moments . . . . We also deal with the statistical aspect : the estimation of the parameters of ARCH models by a quasi likelihood method. The second chapter of this thesis contains a presentation of the linear algorithm used to estimate the ARCH models. In chapter 3 we have numerical results through some special models.

In the final chapter, we apply the methodology developed with three real series representing the monthly log-returns for the *SP&500* index from January 1980 to December 1999, the monthly log-returns for *IBM* from January 1962 to December 1999 and the weekly log-returns for the *NASDAQ* index from October 1974 to March 2004.

This thesis will be useful to statisticians and econometrists to make their work easier and it provides an efficient estimation tool for the ARCH process. Other areas however, can benefit from the viewpoints discussed herein. Reading this

thesis requires a basic knowledge of the estimation methods and of the properties of the autoregressive moving-average process.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	v
<b>Liste des figures</b> .....	ix
<b>Liste des tableaux</b> .....	x
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Modèles ARCH univariés</b> .....	2
1.1. Modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique (ARCH).....	2
1.2. Estimation du modèle de régression avec erreurs ARCH.....	7
1.2.1. Modèle de régression avec erreurs ARCH.....	7
1.2.2. Méthode du maximum de vraisemblance.....	9
1.2.3. Méthode de vraisemblance avec $v_t$ gaussienne.....	10
1.2.4. Méthode de vraisemblance avec $v_t$ non gaussienne.....	12
1.2.5. Méthode de pseudo-vraisemblance ou quasi-vraisemblance.....	13
<b>Chapitre 2. Estimation linéaire du modèle de régression avec         erreurs ARCH</b> .....	16
2.1. Modèle de régression avec erreurs ARCH et estimateur de pseudo- vraisemblance modifié.....	16
2.1.1. Estimateur de pseudo-vraisemblance modifié.....	20

2.2. Algorithme linéaire pour l'estimateur de pseudo-vraisemblance modifié .....	21
<b>Chapitre 3. Résultats numériques et illustrations .....</b>	<b>30</b>
3.1. Modèles de régression avec erreurs ARCH .....	31
3.1.1. Modèle de régression avec erreurs ARCH(1) .....	32
3.1.2. Modèle de régression avec erreurs ARCH(2) .....	36
3.1.3. Modèle de régression avec erreurs ARCH(3) .....	41
3.2. Modèles de séries chronologiques avec erreurs ARCH .....	45
3.2.1. Modèle de séries chronologiques avec erreurs ARCH(1) .....	46
3.3. Modèles mal spécifiés .....	48
3.3.1. Modèle mal spécifié avec erreurs ARCH(1) .....	49
3.3.2. Modèle mal spécifié avec erreurs ARCH(2) .....	53
<b>Chapitre 4. Applications avec des données réelles .....</b>	<b>66</b>
4.1. Description de la série 1 .....	67
4.2. Description de la série 2 .....	68
4.3. Description de la série 3 .....	70
<b>Conclusion .....</b>	<b>72</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>74</b>
<b>Annexe A. La méthode de score .....</b>	<b>A-i</b>
<b>Annexe B. Les codes utilisés pour les résultats numériques .....</b>	<b>B-i</b>

## LISTE DES FIGURES

---

- 3.1 L'erreur quadratique moyenne pour diverses tailles de l'échantillon ... 35
- 3.2 L'estimation de  $\beta_0$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$  .. 62
- 3.3 L'estimation de  $\beta_1$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$  .. 63
- 3.4 L'estimation de  $\beta_0$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(2)$  .. 64
- 3.5 L'estimation de  $\beta_1$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(2)$  .. 65
  
- 4.1 La série des logarithmes des rendements mensuels pour l'indice *SP&500*  
68
- 4.2 La série des logarithmes des rendements mensuels pour l'action *IBM* 69
- 4.3 La série des logarithmes des rendements mensuels pour l'indice *NASDAQ*  
70

## LISTE DES TABLEAUX

---

3.1	Paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	33
3.2	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	34
3.3	Erreur quadratique moyenne du paramètre $\alpha_1$ pour diverses tailles de l'échantillon .....	34
3.4	Paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ Student .....	36
3.5	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ Student.....	37
3.6	Paramètres estimés pour un modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	37
3.7	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ gaussienne	38
3.8	Paramètres estimés pour un modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ Student .....	38
3.9	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés pour un modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(1)$ et $v_t \sim$ Student	39

3.10	Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	40
3.11	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ gaussienne 41	
3.12	Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ Student .....	42
3.13	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ Student	43
3.14	Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	44
3.15	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ gaussienne 45	
3.16	Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ Student .....	46
3.17	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(2)$ et $v_t \sim$ Student	47
3.18	Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	48
3.19	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ gaussienne 49	
3.20	Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ Student .....	50
3.21	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ Student	51

3.22	Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ gaussienne.....	52
3.23	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ gaussienne	53
3.24	Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ Student .....	54
3.25	Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs $ARCH(3)$ et $v_t \sim$ Student	55
3.26	Paramètres estimés du modèle de série chronologique avec erreurs $ARCH(1)$ , dans le cas d'une distribution gaussienne .....	56
3.27	Erreur quadratique moyenne des paramètres pour un modèle de série chronologique avec erreurs $ARCH(1)$ , $v_t \sim$ gaussienne .....	57
3.28	Paramètres estimés pour un modèle de série chronologique avec erreurs $ARCH(1)$ , dans le cas d'une distribution de Student .....	58
3.29	Erreur quadratique moyenne des paramètres pour un modèle de série chronologique avec erreurs $ARCH(1)$ , $v_t \sim$ Student .....	59
3.30	Paramètres estimés du modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(1)$ ...	60
3.31	Erreurs quadratiques moyennes pour un modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(1)$ .....	61
3.32	Paramètres estimés pour un modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(1)$	61
3.33	Erreurs quadratiques moyennes pour un modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(1)$ .....	62
3.34	Paramètres estimés pour un modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(2)$	63
3.35	Erreurs quadratiques moyennes pour un modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(2)$ .....	64
4.1	Paramètres estimés de la série $SP\&500$ .....	67

4.2	Paramètres estimés de la série <i>IBM</i> .....	69
4.3	Paramètres estimés de la série <i>NASDAQ</i> .....	71
4.4	Tableau comparatif des estimateurs de la série <i>SP&amp;500</i> .....	71

## REMERCIEMENTS

---

Je voudrais avant tout remercier tous ceux qui m'ont aidé à composer ce mémoire de fin d'études. L'aventure de ce mémoire n'aurait pu se dérouler sans les personnes suivantes, que je tiens à remercier vivement :

- Louis Doray et Andrew Luong, mes directeurs de recherche, pour les suggestions faites et pour le support permanent, pour le prêt de tous les livres et les articles qui m'ont bien aidé et pour leurs conseils riches en informations ;
- aux professeurs du département DMS pour leur aide et l'enseignement qui m'a permis de résoudre les difficultés posées par les domaines traités ici ;
- FCAR pour le support financier
- ma famille et, spécialement, mon frère Dan qui m'ont toujours soutenu.

Montréal, Québec

Eugen Ursu

Avril 24, 2004



# Chapitre 1

---

## MODÈLES ARCH UNIVARIÉS

Dans ce chapitre nous présentons un modèle autorégressif d'ordre  $p$  avec erreurs *ARCH*, en utilisant l'approche de Hamilton [4]. Cela nous permet d'étudier les conditions d'existence du processus et de discuter de ses principales propriétés. Nous présenterons ensuite un modèle de régression *ARCH* et décrirons des méthodes proposées dans la littérature pour estimer les paramètres d'un tel modèle.

### 1.1. MODÈLE AUTORÉGRESSIF CONDITIONNELLEMENT HÉTÉROSCÉDASTIQUE (ARCH)

Avant de définir le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique, nous allons décrire un processus autorégressif avec erreurs homoscédastiques.

Un processus autorégressif d'ordre  $p$ , dénoté  $AR(p)$ , pour une variable aléatoire  $y_t$ , est de la forme

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t, \quad (1.1.1)$$

où  $u_t$  est un bruit blanc tel que

$$E(u_t) = 0 \quad (1.1.2)$$

$$E(u_t u_s) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad si \quad t = s \\ 0 & , \quad si \quad t \neq s \end{cases} \quad (1.1.3)$$

et nous supposons que  $u_t$  est non-corrélé avec les valeurs passées.

Le processus est dit stationnaire si les solutions de l'équation

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$$

sont à l'extérieur du cercle unité.

La prévision de  $y_t$  pour un processus  $AR(p)$  est

$$E(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p}. \quad (1.1.4)$$

Pour pouvoir prédire  $y_t$  avec les observations passées  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$ , il faut donc estimer les paramètres  $c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ .

Notons que l'espérance conditionnelle change en fonction du temps selon (1.1.4) et l'espérance non-conditionnelle de  $y_t$  demeure constante

$$E(y_t) = c / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p).$$

Il en est de même pour la variance non conditionnelle de  $u_t$  qui est une constante  $\sigma^2$ . Dans certaines situations la variance conditionnelle de  $u_t$  pourrait changer en fonction du temps.

Par exemple, on pourrait décrire le carré de  $u_t$  par un processus  $AR(m)$

$$u_t^2 = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + w_t, \quad (1.1.5)$$

où  $w_t$  est un bruit blanc fort, c'est-à-dire les variables sont i.i.d de moyenne 0 et de variance  $\lambda^2$ .

L'expression (1.1.5) implique que la projection linéaire de  $u_t^2$  sur  $u_{t-1}^2, u_{t-2}^2, \dots, u_{t-m}^2$  est donnée par

$$E(u_t^2 | u_{t-1}^2, u_{t-2}^2, \dots) = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2. \quad (1.1.6)$$

Un bruit blanc  $u_t$  qui satisfait (1.1.5) est décrit comme un processus autorégressif conditionnellement hétéroscédastique d'ordre  $m$ , noté  $u_t \sim ARCH(m)$ . Les modèles  $ARCH(m)$  ont été introduits par Engle [9] en 1982.

Par ailleurs, il faut s'assurer de la positivité du processus  $u_t^2$ . Des conditions suffisantes pour cette positivité sont  $\xi > 0$  et  $\alpha_j \geq 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, m$ . Pour que  $u_t^2$  soit stationnaire, nous devons imposer la condition que les racines de l'équation

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m = 0$$

se trouvent à l'extérieur du cercle unité. Dénotons

$$g(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_m z^m$$

et supposons que

$$1 < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m,$$

c'est-à-dire  $g(1) < 0$ . En tenant compte que  $g(0) = 1 > 0$ , nous déduisons qu'il existe une racine réelle entre 0 et 1, ce qui est en contradiction avec la condition imposée ci-dessus. Donc la condition que les racines de l'équation se trouvent à l'extérieur du cercle unité est équivalente à :

$$1 > \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m.$$

Quand ces conditions sont satisfaites, la variance non-conditionnelle de  $u_t$  est donnée par

$$\sigma^2 = E(u_t^2) = \xi / (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_m). \quad (1.1.7)$$

Parfois, une représentation alternative pour les processus  $ARCH(m)$  est utilisée [4]. Supposons que

$$u_t = \sqrt{h_t} v_t \quad (1.1.8)$$

où  $v_t$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), avec moyenne zéro et variance unitaire, i.e.

$$E(v_t) = 0$$

$$E(v_t^2) = 1.$$

Si  $h_t$  suit la relation

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2, \quad (1.1.9)$$

alors de (1.1.8), nous obtenons

$$E(u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2. \quad (1.1.10)$$

Ainsi, si  $u_t$  est défini par (1.1.8) et (1.1.9), alors  $u_t$  suit un processus  $ARCH$  d'ordre  $m$ , noté  $u_t \sim ARCH(m)$ , et la projection linéaire (1.1.6) est aussi l'espérance conditionnelle. En outre, quand nous substituons (1.1.8) et (1.1.9) dans (1.1.5),

le résultat est

$$h_t v_t^2 = h_t + w_t.$$

Ainsi, les erreurs  $w_t$  peuvent être représentées par

$$w_t = h_t(v_t^2 - 1). \quad (1.1.11)$$

Nous remarquons de (1.1.11) que même si la variance non-conditionnelle de  $w_t$  est constante

$$E(w_t^2) = \lambda^2, \quad (1.1.12)$$

la variance conditionnelle de  $w_t$  change en fonction de temps. La variance conditionnelle de  $w_t$  reflète le moment d'ordre 4 de  $u_t$ , moment qui n'existe pas pour tous les processus stationnaires *ARCH*. Si  $v_t$  indépendant de  $h_t$ , en mettant l'équation (1.1.11) au carré et en prenant la variance non-conditionnelle des deux cotés, on obtient

$$E(w_t^2) = E(h_t^2)E[(v_t^2 - 1)^2]. \quad (1.1.13)$$

Pour illustrer cette propriété, nous utilisons un modèle *ARCH*(1)

$$\begin{aligned} E(h_t^2) &= E(\xi + \alpha_1 u_{t-1}^2)^2 \\ &= E[(\alpha_1^2 u_{t-1}^4) + (2\alpha_1 \xi u_{t-1}^2) + \xi^2] \\ &= \alpha_1^2 [Var(u_{t-1}^2) + [E(u_{t-1}^2)]^2] + 2\alpha_1 \xi E(u_{t-1}^2) + \xi^2 \\ &= \alpha_1^2 \left[ \frac{\lambda^2}{1 - \alpha_1^2} + \frac{\xi^2}{(1 - \alpha_1)^2} \right] + \frac{2\alpha_1 \xi^2}{1 - \alpha_1} + \xi^2 \\ &= \frac{\alpha_1^2 \lambda^2}{1 - \alpha_1^2} + \frac{\xi^2}{(1 - \alpha_1)^2}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

En substituant (1.1.14) et (1.1.12) dans (1.1.13), Hamilton [4] déduit que la variance non-conditionnelle de  $w_t = \lambda^2$  doit satisfaire

$$\lambda^2 = \left[ \frac{\alpha_1^2 \lambda^2}{1 - \alpha_1^2} + \frac{\xi^2}{(1 - \alpha_1)^2} \right] \times E[(v_t^2 - 1)^2]. \quad (1.1.15)$$

Même si  $|\alpha_1| < 1$ , l'équation (1.1.15) peut rester sans solution réelle pour  $\lambda$ . Par exemple, si  $v_t \sim N(0, 1)$ , alors  $E[(v_t^2 - 1)^2] = 2$  et de (1.1.15), on a

$$\frac{(1 - 3\alpha_1^2)\lambda^2}{1 - \alpha_1^2} = \frac{2\xi^2}{(1 - \alpha_1)^2}.$$

Cette équation n'a pas de solutions réelles pour  $\lambda$  quand  $\alpha_1^2 > \frac{1}{3}$ . Ainsi, si  $u_t \sim ARCH(1)$  avec les innovations gaussiennes  $v_t$  dans (1.1.8), le moment d'ordre 2 de  $w_t$  ou le moment d'ordre 4 de  $u_t$  existe seulement si  $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$ .

Avec le modèle  $ARCH(m)$ , pour pouvoir prévoir la variance conditionnelle sachant  $u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-m}$ , il faut estimer les paramètres  $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  avec les données. Dans la section suivante, nous discutons d'un tel modèle dans un contexte de régression.

## 1.2. ESTIMATION DU MODÈLE DE RÉGRESSION AVEC ERREURS ARCH

Les procédures classiques d'estimation s'appliquent sans difficultés particulières pour les modèles *ARCH*. Nous commençons par un rappel sur le modèle de régression avec erreurs *ARCH* et ensuite quelques propriétés générales de la méthode de pseudo-vraisemblance.

Dans le chapitre suivant, nous proposons des estimateurs de pseudo-vraisemblance modifiés, qui sont simples à obtenir avec un algorithme où il n'y a que des équations linéaires à résoudre.

### 1.2.1. Modèle de régression avec erreurs ARCH

Nous présentons d'abord brièvement le modèle de régression avec erreurs *ARCH* et ensuite des méthodes d'estimation des paramètres de ce modèle, méthodes proposées dans la littérature. Soit l'équation de régression

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t \quad (1.2.1)$$

où  $t = 1, 2, \dots, T$ . Ici  $\mathbf{x}_t$  est le vecteur des variables explicatives fixes, incluant possiblement une variable constante. Les erreurs  $u_t$  suivent un processus *ARCH*( $m$ ) satisfaisant (1.1.8) et (1.1.9), et  $\boldsymbol{\beta}$  est le vecteurs des paramètres à estimer. Plus précisément, si on définit la matrice et les vecteurs suivants

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ & & \dots & \\ 1 & x_{T1} & \dots & x_{Tm} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_T \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_T \end{bmatrix},$$

alors le système d'équations (1.2.1) s'écrit sous la forme matricielle

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad (1.2.2)$$

avec

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}.$$

Pour que le modèle de régression soit complètement spécifié, nous devons imposer des conditions sur le vecteur  $\mathbf{u}$ .

Dénotons par

$$Y_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_1, y_0, \dots, y_{-m+1})'$$

le vecteur des observations jusqu'au temps  $t$  et par  $\mathcal{Y}_t$  la  $\sigma$ -algèbre générée par  $y_t, y_{t-1}, \dots, y_{-m+1}$ .

En utilisant (1.1.8) et (1.1.9), nous obtenons facilement

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}|\mathcal{Y}_{t-1}) &= 0 \\ \text{Var}(\mathbf{u}|\mathcal{Y}_{t-1}) &= \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

où la composante  $j$  de  $\mathbf{u}|\mathcal{Y}_{j-1}$  est  $u_j|\mathcal{Y}_{j-1}$  et la matrice de variance-covariance conditionnelle  $V$  est égale à

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_T \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir un estimateur du vecteur  $\beta$ , nous utilisons la méthode des moindres carrés généralisés conditionnelle. Cette méthode implique la minimisation de la forme quadratique.

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

par rapport à  $\beta$ . Ceci mène à

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}. \tag{1.2.4}$$

La méthode de vraisemblance conditionnelle proposée par Engle [9] est présentée dans la section suivante.

### 1.2.2. Méthode du maximum de vraisemblance

Comme Gouriéroux [8] l'a précisé, l'inférence pour un modèle *ARCH* consiste à déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance basé sur l'hypothèse de la loi conditionnelle normale.

Par exemple, soit  $L(y_t, \theta)$  la vraisemblance associée à  $y_t$ , alors la fonction de vraisemblance de  $\theta$  est

$$\mathcal{L}(y, \theta) = \prod_{t=1}^T L(y_t, \theta).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est défini comme la solution du problème d'optimisation de la fonction de log-vraisemblance  $l(\theta)$

$$\max_{\theta} \ln \mathcal{L}(y, \theta) = \max_{\theta} l(\theta) = \max_{\theta} \sum l_t(y_t, \theta).$$

Sous certaines conditions de régularité (voir [7]), cet estimateur est convergent, même si la véritable loi ne correspond pas à la loi normale, pourvu que la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle respectent

$$E(v_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = 0$$

$$E(v_t^2 | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = 1.$$

Dans ce contexte, on l'appelle l'estimateur de pseudo-vraisemblance ou de quasi-vraisemblance. De plus, on a les propriétés suivantes

$$V_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] = J^{-1} I J^{-1}$$

où

$$J = E \left[ -\frac{\partial^2 l_t(y, \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]$$

et

$$I = E \left[ \frac{\partial l_t(y, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial l_t(y, \theta)}{\partial \theta'} \right],$$

où  $V_{as}$  est la matrice de variance-covariance asymptotique et  $\hat{\theta}_T$  est l'estimateur de quasi-vraisemblance. Si la loi est normale, alors  $\hat{\theta}_T$  est l'estimateur de vraisemblance maximale et dans ce cas,  $I = J$  et  $V_{as} = I^{-1}$ .



### 1.2.3. Méthode de vraisemblance avec $v_t$ gaussienne

Supposons que nous sommes intéressés à estimer les paramètres d'un modèle de régression avec erreurs *ARCH*. Considérons de nouveau l'équation de régression (1.2.1)

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t$$

où  $\mathbf{x}_t$  est le vecteur des variables explicatives et les erreurs  $u_t$  satisfont (1.1.8) et (1.1.9). Nous pouvons conditionner sur les  $m$  premières observations ( $t = -m + 1, -m + 2, \dots, 0$ ) et utiliser les observations  $t = 1, 2, \dots, T$  pour l'estimation.

Rappelons que nous avons dénoté par

$$\mathcal{Y}_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_1, y_0, \dots, y_{-m+1})'$$

le vecteur des observations jusqu'au temps  $t$ . Si  $v_t \sim i.i.d.N(0, 1)$  avec  $v_t$  défini par (1.1.8) indépendant par rapport aux  $\mathbf{x}_t$  et  $\mathcal{Y}_{t-1}$ , alors la distribution conditionnelle de  $y_t$  est gaussienne avec moyenne  $\mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}$  et variance  $h_t$  et sa fonction de densité conditionnelle est

$$f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{(y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2}{2h_t}} \quad (1.2.5)$$

où

$$\begin{aligned} h_t = \xi + \alpha_1 (y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}' \boldsymbol{\beta})^2 + \alpha_2 (y_{t-2} - \mathbf{x}_{t-2}' \boldsymbol{\beta})^2 + \dots \\ + \alpha_m (y_{t-m} - \mathbf{x}_{t-m}' \boldsymbol{\beta})^2 \equiv [\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta})]' \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

avec

$$\boldsymbol{\delta} \equiv (\xi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)'$$

et

$$[\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta})]' \equiv [1, (y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}' \boldsymbol{\beta})^2, (y_{t-2} - \mathbf{x}_{t-2}' \boldsymbol{\beta})^2, \dots, (y_{t-m} - \mathbf{x}_{t-m}' \boldsymbol{\beta})^2].$$

Soit  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur des paramètres inconnus,

$$\boldsymbol{\theta} \equiv (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\delta}')'.$$

La fonction de log-vraisemblance conditionnée sur les  $m$  premières observations est égale à

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{t=1}^T \log f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \\ &= (-T/2) \log(2\pi) - (1/2) \sum_{t=1}^T \log(h_t) - (1/2) \sum_{t=1}^T (y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2 / h_t. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

La fonction de log-vraisemblance peut être maximisée numériquement en utilisant des méthodes décrites, par exemple, dans la section 5.7 de Hamilton [4].

La dérivée par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  de la fonction de log-vraisemblance qui correspond à l'observation  $y_t$  est appelée le vecteur score et est dénoté  $\mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})$ . De (1.2.5),

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial \log f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{h_t} \frac{\partial (y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{(y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Nous pouvons utiliser les relations

$$\frac{\partial (y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{x}_t u_t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.9)$$

où

$$u_t = y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial \left( \xi + \sum_{j=1}^m \alpha_j u_{t-j}^2 \right)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \alpha_j}{\partial \boldsymbol{\theta}} u_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\partial u_{t-j}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{t-1}^2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_{t-m}^2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \begin{bmatrix} -2u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\alpha_j u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j} \\ \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

En remplaçant (1.2.9) et (1.2.10) dans (1.2.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= - \left\{ \frac{1}{2h_t} - \frac{u_t^2}{2h_t^2} \right\} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\alpha_j u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j} \\ \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_t u_t)/h_t \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

La relation (1.2.11) donne le score de l'élément  $t$ . On peut maximiser la fonction de log-vraisemblance en utilisant la méthode du score, avec l'algorithme de Newton-Raphson, comme Engle [9]. Un rappel de la méthode et de ses principales propriétés se trouve dans l'annexe A.

#### 1.2.4. Méthode de vraisemblance avec $v_t$ non gaussienne

Dans la section précédente, nous avons supposé que  $v_t$  a une distribution gaussienne. En pratique les séries de données financières semblent avoir une distribution conditionnelle non gaussienne ; nous sommes donc obligés de considérer aussi le cas où  $v_t$  est non gaussienne. Nous utiliserons la loi  $t$  de Student, car la queue de cette loi est plus épaisse que celle de la loi normale. Pour estimer les paramètres, nous utilisons la méthode de pseudo-vraisemblance.

Par exemple, Bollerslev [11] propose d'utiliser la distribution  $t$  de Student avec  $\nu$  degrés de liberté pour les  $v_t$  de (1.1.8), où  $\nu$  est un paramètre à estimer par la méthode du maximum de vraisemblance. Dans ce cas, la fonction de densité de  $u_t$  est

$$f(u_t) = \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{(\pi\nu)^{1/2}\Gamma(\nu/2)} M_t^{-1/2} \left[ 1 + \frac{u_t^2}{M_t\nu} \right]^{-(\nu+1)/2}. \quad (1.2.12)$$

Si  $\nu > 2$ , alors la moyenne des  $v_t$  est zéro et la variance

$$E(u_t^2) = M_t\nu/(\nu - 2).$$

Ainsi, en posant le paramètre  $h_t = M_t\nu/(\nu - 2)$  dans (1.2.12), nous obtenons

$$f(u_t) = \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu/2)} (\nu - 2)^{-1/2} h_t^{-1/2} \left[ 1 + \frac{u_t^2}{h_t(\nu - 2)} \right]^{-(\nu+1)/2}. \quad (1.2.13)$$

En utilisant cette distribution dans (1.2.5), la fonction de log-vraisemblance prend la forme

$$\sum_{t=1}^T \log f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = T \log \left\{ \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu/2)} (\nu-2)^{-1/2} \right\} - \quad (1.2.14)$$

$$-(1/2) \sum_{t=1}^T \log(h_t) - [(\nu+1)/2] \sum_{t=1}^T \log \left[ 1 + \frac{(y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2}{h_t(\nu-2)} \right],$$

où  $h_t$  a la même forme que dans (1.2.6). La fonction de log-vraisemblance est maximisée numériquement par rapport à  $\nu$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\delta}$ . On peut utiliser la même approche avec d'autres distributions pour  $v_t$ .

### 1.2.5. Méthode de pseudo-vraisemblance ou quasi-vraisemblance

Même si l'hypothèse que  $v_t \sim i.i.d N(0, 1)$  n'est pas valide, la maximisation de la fonction de log-vraisemblance erronée (1.2.7) nous offre des estimateurs convergents pour les paramètres  $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , si

$$E(v_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = 0 \quad (1.2.15)$$

et

$$E(v_t^2 | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = 1. \quad (1.2.16)$$

Comme nous l'avons précisé dans la section 1.2.2, si  $v_t$  est non gaussienne, les estimateurs sont des estimateurs de pseudo-vraisemblance et sous les conditions (1.2.15) et (1.2.16), nous avons d'après Hamilton [4],

$$V_{as}[\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}_0)] = J^{-1} I J^{-1}$$

où  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  est la valeur qui maximise (1.2.7) et  $\boldsymbol{\theta}_0$  est la vraie valeur du vecteur des paramètres. Les matrices  $I$  et  $J$  sont égales à

$$I = p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T [\mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})][\mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})]'$$

et

$$J = p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T -E \left\{ \frac{\partial \mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1} \right\}$$

où  $\mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})$  est le vecteur de score calculé en (1.2.11). Nous nous proposons de trouver une forme équivalente pour la matrice  $J$ . La relation (1.2.8) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_t^2}{h_t} - 1 \right\} \frac{\partial \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial u_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left\{ \frac{1}{h_t} \frac{\partial u_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}'} - \frac{u_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_t^2}{h_t} - 1 \right\} \frac{\partial^2 \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 u_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} + \frac{\partial u_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

De (1.2.9), nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{x}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial u_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.2.18)$$

En remplaçant (1.2.18) et (1.2.9) dans (1.2.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left\{ \frac{1}{h_t} \begin{bmatrix} -2u_t \mathbf{x}_t' & \mathbf{0}' \end{bmatrix} - \frac{u_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_t^2}{h_t} - 1 \right\} \frac{\partial^2 \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} - \frac{1}{2h_t} \begin{bmatrix} 2\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\mathbf{x}_t u_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Rappelons-nous des 2 équations

$$E(u_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = 0$$

$$E(u_t^2 | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = h_t.$$

En tenant compte de (1.2.9) et en prenant l'espérance conditionnelle de (1.2.19) (conditionnelle à  $\mathbf{x}_t$  et  $\mathcal{Y}_{t-1}$ ) on obtient

$$\begin{aligned} E \left\{ \frac{\partial \mathbf{s}_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1} \right\} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \log h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} - \frac{1}{2h_t} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2h_t^2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\alpha_j u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j} \\ \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\alpha_j u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j}' \\ \mathbf{z}_t'(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} - \frac{1}{h_t} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Après ce calcul, nous pouvons réécrire  $J$  sous la forme

$$J = p \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T A_t$$

où

$$A_t = \frac{1}{2h_t^2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\alpha_j u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j} \\ \mathbf{z}_t(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\alpha_j u_{t-j} \mathbf{x}_{t-j}' \\ \mathbf{z}_t'(\beta) \end{bmatrix} + \frac{1}{h_t} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $I$  et  $J$  peuvent être estimées par les estimateurs convergents

$$\hat{I} = T^{-1} \sum_{t=1}^T [\mathbf{s}_t(\hat{\theta})][\mathbf{s}_t(\hat{\theta})]'$$

$$\hat{J} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{A}_t$$

où

$$\hat{A}_t = \frac{1}{2\hat{h}_t^2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\hat{\alpha}_j \hat{u}_{t-j} \mathbf{x}_{t-j} \\ \mathbf{z}_t(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m -2\hat{\alpha}_j \hat{u}_{t-j} \mathbf{x}_{t-j}' & \mathbf{z}_t'(\hat{\beta}) \end{bmatrix} + \frac{1}{\hat{h}_t} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{s}_t(\hat{\theta})$  est la valeur du score évalué en  $\hat{\theta}$ .

## Chapitre 2

---

### ESTIMATION LINÉAIRE DU MODÈLE DE RÉGRESSION AVEC ERREURS ARCH

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'estimer les paramètres  $\beta$  et  $\delta$  du modèles de régression *ARCH* avec des estimateurs de quasi-vraisemblance modifiés. Les estimateurs proposés, peuvent être trouvés avec un algorithme simple, en exploitant et en adaptant la méthode d'estimation d'une matrice de covariance qui possède une structure linéaire, proposée pour la première fois par Anderson pour un autre modèle de régression [10]. Il suffit de résoudre des équations linéaires, tandis que pour la méthode de score d'Engle basée sur l'algorithme de Newton-Raphson, il faut résoudre des équations non linéaires. La convergence est rapide, souvent on n'a besoin que d'une ou deux itérations. En plus, nous allons voir au Chapitre 3 à l'aide de quelques simulations, que nos estimateurs performement mieux que les estimateurs de la méthode du score du point de vue de l'efficacité, avec des tailles d'échantillons  $T = 1000, 10000, 100000$ .

#### 2.1. MODÈLE DE RÉGRESSION AVEC ERREURS ARCH ET ESTIMATEUR DE PSEUDO-VRAISEMBLANCE MODIFIÉ

Le modèle de régression considéré par Anderson est basé sur une ou plusieurs observations faites sur un vecteur aléatoire. La matrice de variance-covariance de ce vecteur est une combinaison linéaire de matrices symétriques connues et le vecteur de la moyenne est une combinaison linéaire de vecteurs connus. Sous l'hypothèse de normalité, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance. Dénotons par  $y$  le vecteur d'observations de dimension  $n \times 1$ , avec le vecteur

de moyenne  $E(\mathbf{y}) = \mu$  de dimension  $n \times 1$ , et la matrice de variance-covariance dénotée  $\mathbf{V}$  de dimension  $n \times n$ . Le vecteur de la moyenne est une combinaison linéaire

$$\mu = \sum_{j=1}^r \beta_j \mathbf{x}_j \quad (2.1.1)$$

où  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  sont des vecteurs connus de dimension  $n \times 1$ , supposés linéairement indépendants. La matrice de variance-covariance  $\mathbf{V}$  est aussi une combinaison linéaire

$$\mathbf{V} = \sum_{g=0}^m \sigma_g \mathbf{V}_g \quad (2.1.2)$$

où  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m$  sont des matrices symétriques connues, supposées linéaires indépendantes. Les paramètres  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)^t$  et  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont les paramètres à estimer. Notons que la matrice  $\mathbf{V}$  dépend de  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  d'une manière linéaire et est indépendante de  $\beta$ . Posons  $\mu(\beta)$  et  $\mathbf{V}(\delta)$  pour souligner la dépendance de  $\mu$  par rapport au vecteur  $\beta$  et de  $\mathbf{V}$  par rapport au vecteur  $\delta = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$ .

La fonction de densité d'une loi multinormale est :

$$f(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\mu)}. \quad (2.1.3)$$

Les estimateurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\delta}$  proposés par Anderson peuvent être obtenus en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. De (2.1.3), la fonction de log-vraisemblance peut être écrite comme

$$\log f(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \log |\mathbf{V}| - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mu). \quad (2.1.4)$$

En calculant les dérivées de  $\log f(\mathbf{y})$  par rapport à  $\beta$  et  $\delta$  et en les égalant à zéro, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mathbf{y}-\mu)' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\mu)}{\partial \beta} = 0 \\ -\frac{\partial \log |\mathbf{V}|}{\partial \delta} - (\mathbf{y} - \mu) \frac{\partial \mathbf{V}^{-1}}{\partial \delta} (\mathbf{y} - \mu) = 0. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

où

$$\mu = \mathbf{X}\beta \quad (2.1.6)$$



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ \dots \\ \mathbf{x}_m' \end{bmatrix}$$

de dimension  $n \times p$ , et

$$\mathbf{V} = \sigma_0 \mathbf{V}_0 + \sigma_1 \mathbf{V}_1 + \dots + \sigma_m \mathbf{V}_m \quad (2.1.7)$$

où  $\beta, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont des paramètres.

Pour résoudre le système (2.1.5), certains résultats préliminaires sont utiles, nous citons ces résultats qu'on peut trouver dans Fuller [6] par exemple.

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $\mathbf{T}$  une matrice  $n \times n$ , non-singulière. Alors*

$$\frac{\partial |\mathbf{T}|}{\partial \mathbf{T}} = |\mathbf{T}| \mathbf{T}^{-1}$$

et

$$\frac{\partial \log |\mathbf{T}|}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. L'expansion du déterminant en utilisant des cofacteurs est

$$|\mathbf{T}| = \sum_{j=1}^n t_{ij} \text{Cof}(t_{ij}).$$

Comme les cofacteurs ne dépendent pas de  $t_{ij}$ ,

$$\frac{\partial |\mathbf{T}|}{\partial t_{ij}} = \text{Cof}(t_{ij}) = t^{ij} |\mathbf{T}|,$$

où  $t^{ij}$  est l'élément d'ordre  $ij$  de  $\mathbf{T}^{-1}$ . En utilisant les règles de dérivation, nous obtenons

$$\frac{\partial \log |\mathbf{T}|}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}.$$

□

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$  une matrice  $n \times n$ , dont le déterminant est positif.*

*Alors*

$$\frac{\partial \log |\mathbf{T}|}{\partial a_i} = \text{tr} \left\{ \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a_i} \right\}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le résultat de Proposition 2.1.1 nous obtenons

$$\frac{\partial \log |\mathbf{T}|}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \log |\mathbf{T}|}{\partial t_{jk}} \frac{\partial t_{jk}}{\partial a_i} = \text{tr} \left\{ \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a_i} \right\}.$$

□

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$   $n \times n$ , une matrice non-singulière. Alors*

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{-1}}{\partial a_i} = -\mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a_i} \mathbf{T}^{-1}$$

DÉMONSTRATION. Si  $\mathbf{U}$  est une matrice  $n \times n$ , nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{T}\mathbf{U}}{\partial a_i} = \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a_i} \mathbf{U}.$$

En prenant  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{0} = \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{T}^{-1}}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial a_i} \mathbf{T}^{-1}$$

d'où la conclusion. □

En utilisant les propositions énoncées ci-dessus pour la deuxième équation du système (2.1.5), nous obtenons pour chaque  $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} -\text{tr} \left( \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_i} \right) + (\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_i} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu) &= 0 \Leftrightarrow \\ \text{tr} \left( \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_i} \right) &= (\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_i} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

De (2.1.7), on a que  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_0} = \mathbf{V}_0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_1} = \mathbf{V}_1, \dots, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_m} = \mathbf{V}_m$  et en tenant compte de (2.1.8), nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_0) = (\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_0 \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \\ \text{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1) = (\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \\ \vdots \\ \text{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m) = (\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu). \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Puisque  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  on peut écrire

$$\text{tr}((\mathbf{y} - \mu)' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu)) = \text{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mu) (\mathbf{y} - \mu)')$$

et le système d'équations (2.1.9) devient

$$tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g) = tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mu)(\mathbf{y} - \mu)') \quad (2.1.10)$$

où  $g = 0, 1, \dots, m$ .

Si on dénote  $\mathbf{C} = (\mathbf{y} - \mu)(\mathbf{y} - \mu)'$  et en remplaçant (2.1.7) dans l'équation (2.1.10), nous obtenons

$$tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}(\sigma_0\mathbf{V}_0 + \sigma_1\mathbf{V}_1 + \dots + \sigma_m\mathbf{V}_m)\} = tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C})$$

d'où

$$\sum_{f=0}^m tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_f)\sigma_f = tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}) \quad g = 0, 1, \dots, m. \quad (2.1.11)$$

car

$$\mathbf{V}^{-1}(\sigma_0\mathbf{V}_0 + \sigma_1\mathbf{V}_1 + \dots + \sigma_m\mathbf{V}_m) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

À partir de (2.1.11) le système d'équations peut être vu comme linéaire en terme de  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  si  $\mathbf{V}, \mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_m$  sont des matrices de constantes. Nous pouvons obtenir les estimateurs de quasi-vraisemblance modifiés, estimateurs qui sont faciles à calculer.

### 2.1.1. Estimateur de pseudo-vraisemblance modifié

L'équation (2.1.11) nous suggère une procédure itérative d'après Anderson [10]. Supposons  $\mu$  connu. Pour estimer  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  on prend comme estimateurs initiaux  $\hat{\beta}_1^{(0)}, \hat{\beta}_2^{(0)}, \dots, \hat{\beta}_m^{(0)}$  comme solutions de la première équation de (2.1.5), avec  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{Q}$ , où  $\mathbf{Q}$  est une matrice arbitraire, définie positive.

Ensuite on remplace  $\mu$  par  $\hat{\mu}^{(0)} = \mathbf{X}'\hat{\beta}^{(0)}$  et  $\mathbf{C}$  par  $\mathbf{C}^{(0)} = (\mathbf{y} - \hat{\mu}^{(0)})(\mathbf{y} - \hat{\mu}^{(0)})'$  et on obtient immédiatement de (2.1.11)  $\hat{\sigma}_0^{(0)}, \hat{\sigma}_1^{(0)}, \dots, \hat{\sigma}_m^{(0)}$  pour la solution initiale. En remarquant que  $E(\mathbf{C}) = \mathbf{V}$ , des estimateurs non-biaisés et convergents de  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont obtenus comme solution des équations

$$\sum_{f=0}^m tr(\mathbf{Q}\mathbf{V}_g\mathbf{Q}\mathbf{V}_f)\sigma_f = tr(\mathbf{Q}\mathbf{V}_g\mathbf{Q}\mathbf{C}) \quad g = 0, 1, \dots, m. \quad (2.1.12)$$

où  $\mathbf{Q}$  est une matrice arbitraire, définie positive. Anderson [10] suggère d'utiliser  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  pour obtenir des estimateurs initiaux.

Soit  $\hat{\sigma}_0^{(0)}, \hat{\sigma}_1^{(0)}, \dots, \hat{\sigma}_m^{(0)}$  la solution initiale obtenue ci-dessus. Soient  $\hat{\sigma}_0^{(i)}, \hat{\sigma}_1^{(i)}, \dots, \hat{\sigma}_m^{(i)}$  les solutions des équations

$$\sum_{f=0}^m \text{tr}(\hat{\mathbf{V}}_{i-1}^{-1} \mathbf{V}_g \hat{\mathbf{V}}_{i-1}^{-1} \mathbf{V}_f) \sigma_f = \text{tr}(\hat{\mathbf{V}}_{i-1}^{-1} \mathbf{V}_g \hat{\mathbf{V}}_{i-1}^{-1} \mathbf{C}) \quad g = 0, 1, \dots, m. \quad (2.1.13)$$

où  $\hat{\mathbf{V}}_{i-1} = \sigma_0^{(i-1)} \mathbf{V}_0 + \sigma_1^{(i-1)} \mathbf{V}_1 + \dots + \sigma_m^{(i-1)} \mathbf{V}_m \quad i = 1, 2, \dots$

On arrête la procédure d'itération si  $\sigma_0^{(i)}, \sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_m^{(i)}$  ne diffère pas trop de  $\sigma_0^{(i-1)}, \sigma_1^{(i-1)}, \dots, \sigma_m^{(i-1)}$ .

Pour obtenir des estimateurs asymptotiquement efficaces, seulement une ou deux itérations seront généralement nécessaires, si les estimateurs initiaux sont convergents.

## 2.2. ALGORITHME LINÉAIRE POUR L'ESTIMATEUR DE PSEUDO-VRAISEMBLANCE MODIFIÉ

On montre qu'un modèle de régression avec erreurs *ARCH* satisfait les conditions de linéarité semblable au paragraphe précédent, malgré que c'est un modèle de régression différent de celui considéré par Anderson. Nous utilisons la procédure d'itération de la section 2.1.1 et les résultats établis au Chapitre 1 pour estimer les paramètres du modèle considéré.

Dans cette section, nous allons généraliser et adapter la méthode d'Anderson pour le modèle de régression *ARCH* établi dans la section 1.2.1, modèle qui est plus général pour obtenir ces estimateurs de quasi-vraisemblance modifié

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t \quad (2.2.1)$$

où  $u_t$  sont des erreurs *ARCH* qui satisfont les relations (1.1.8) et (1.1.9). Les paramètres à estimer par la méthode de pseudo-vraisemblance modifiée sont  $\boldsymbol{\delta} = (\xi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  et  $\boldsymbol{\beta}$ . Nous conditionnons sur les  $m$  premières observations ( $t = -m + 1, -m + 2, \dots, 0$ ) et pour l'estimation, on utilise les observations  $t = 1, 2, \dots, T$ . La fonction de vraisemblance est :

$$\prod_{t=1}^T f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-(y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2 / 2h_t}. \quad (2.2.2)$$

Supposons que

$$\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V})$$

suit une loi multinormale où

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_T \end{bmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Nous obtenons les estimateurs de pseudo-vraisemblance modifiés comme solution des équations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)}\mathbf{y} \\ -\frac{\partial \log |\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)}|}{\partial \delta} - (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\frac{\partial (\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)})^{-1}}{\partial \delta}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Le système (2.2.4) est semblable à celui de Anderson (2.1.5), mais avec la différence que ici, la matrice  $\mathbf{V}$  dépend de  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\delta$  et pour cette raison nous avons utilisé la notation  $\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)}$ . La première équation du système (2.2.4) est différente de celle d'Anderson (2.1.5). Ce système d'équations peut être résolu d'une manière linéaire en suivant les étapes ci-dessous.

### Etape 1.

La matrice  $\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)}$  est représentable sous la forme

$$\mathbf{V}^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)} = \xi \mathbf{V}_0^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)} + \alpha_1 \mathbf{V}_1^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)} + \alpha_2 \mathbf{V}_2^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)} + \dots + \alpha_m \mathbf{V}_m^{(\boldsymbol{\beta}, \delta)}.$$

Pour simplifier la notation, notons  $\mathbf{V} = \xi \mathbf{V}_0 + \alpha_1 \mathbf{V}_1 + \alpha_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{V}_m$  tout en se rappelant que  $\mathbf{V}, \mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_m$  dépendent de  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\delta$  et sont des matrices diagonales. En remplaçant  $h_t$  de (1.1.9) dans la relation précédente nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \xi + \alpha_1 u_0^2 + \dots + \alpha_m u_{1-m}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi + \alpha_1 u_1^2 + \dots + \alpha_m u_{2-m}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \xi + \alpha_1 u_{T-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{T-m}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \xi \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} u_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_1^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{T-1}^2 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{bmatrix} u_{1-m}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2-m}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{T-m}^2 \end{bmatrix}$$

d'où  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m$  sont données par la représentation précédente. Donc nous avons écrit la matrice de variance-covariance sous la forme semblable au paragraphe précédent, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire de matrices symétriques qui ne dépendent que de  $\beta$  seulement.

### Etape 2.

Comme

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}, \quad (2.2.5)$$

le système d'équations (2.2.4) peut être résolu d'une manière itérative avec  $\mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{I}$ . Nous obtenons

$$\hat{\beta}^{(0)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.2.6)$$

qui est l'estimateur initial pour  $\beta$ .

### Etape 3.

L'estimateur initial pour  $\delta$

$$\hat{\delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \xi \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

est obtenu à partir du système (2.2.4) avec  $\mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{I}$ ,  $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\hat{\beta}^{(0)}$  et on a

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}^{(0)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(0)})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(0)})' = \begin{bmatrix} u_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_T^2 \end{bmatrix}.$$

Avec  $\mathbf{V}^{(0)} = I$ , le système (2.2.4) devient

$$\sum_{f=0}^m \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{V}_f) \alpha_f = \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{C}^{(0)}), \quad g = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2.2.7)$$

On a vu que

$$\mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} u_{1-g}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2-g}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{T-g}^2 \end{bmatrix} \quad g = 1, 2, \dots, m \quad \text{et } \mathbf{V}_0 = I.$$

Donc

$$\mathbf{V}_g \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} u_{1-g}^2 u_{1-f}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2-g}^2 u_{2-f}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{T-g}^2 u_{T-f}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{V}_f) = u_{1-g}^2 u_{1-f}^2 + u_{2-g}^2 u_{2-f}^2 + \dots + u_{T-g}^2 u_{T-f}^2 \\ \text{tr}(\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_f) = \text{tr}(\mathbf{V}_f) = u_{1-f}^2 + u_{2-f}^2 + \dots + u_{T-f}^2 \\ \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{V}_0) = \text{tr}(\mathbf{V}_g) = u_{1-g}^2 + u_{2-g}^2 + \dots + u_{T-g}^2 \\ \text{tr}(\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0) = \text{tr}(I) = T \end{cases} \quad (2.2.8)$$

et

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{C}^{(0)}) = u_{1-g}^2 u_1^2 + u_{2-g}^2 u_2^2 + \dots + u_{T-g}^2 u_T^2 \\ \text{tr}(\mathbf{V}_0 \mathbf{C}^{(0)}) = \text{tr}(\mathbf{C}^{(0)}) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_T^2. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

pour  $g, f = 1, 2, \dots, m$ . L'équation (2.2.7) devient

$$\xi \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{V}_0) + \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{V}_1) + \dots + \alpha_m \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{V}_m) = \text{tr}(\mathbf{V}_g \mathbf{C}^{(0)}) \quad (2.2.10)$$

pour  $g = 0, 1, 2, \dots, m$ . Cette dernière équation est représentable sous la forme d'un système d'équations linéaires pour  $\delta$  si les  $\mathbf{V}_i$  sont remplacés par des estimés

$$\begin{cases} \xi \text{tr}(\mathbf{V}_0) + \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{V}_1) + \dots + \alpha_m \text{tr}(\mathbf{V}_m) = \text{tr}(\mathbf{C}) \\ \xi \text{tr}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_0) + \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1) + \dots + \alpha_m \text{tr}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_m) = \text{tr}(\mathbf{V}_1 \mathbf{C}) \\ \dots \\ \xi \text{tr}(\mathbf{V}_m \mathbf{V}_0) + \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{V}_m \mathbf{V}_1) + \dots + \alpha_m \text{tr}(\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m) = \text{tr}(\mathbf{V}_m \mathbf{C}) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

et sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(\mathbf{V}_0) & \text{tr}(\mathbf{V}_1) & \dots & \text{tr}(\mathbf{V}_m) \\ \text{tr}(\mathbf{V}_1) & \text{tr}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1) & \dots & \text{tr}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr}(\mathbf{V}_m) & \text{tr}(\mathbf{V}_m\mathbf{V}_1) & \dots & \text{tr}(\mathbf{V}_m\mathbf{V}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{tr}(\mathbf{C}) \\ \text{tr}(\mathbf{V}_1\mathbf{C}) \\ \dots \\ \text{tr}(\mathbf{V}_m\mathbf{C}) \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} T & \sum_{k=1}^T u_{k-1}^2 & \dots & \sum_{k=1}^T u_{k-m}^2 \\ \sum_{k=1}^T u_{k-1}^2 & \sum_{k=1}^T u_{k-1}^2 u_{k-1}^2 & \dots & \sum_{k=1}^T u_{k-1}^2 u_{k-m}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^T u_{k-m}^2 & \sum_{k=1}^T u_{k-m}^2 u_{k-1}^2 & \dots & \sum_{k=1}^T u_{k-m}^2 u_{k-m}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^T u_k^2 \\ \sum_{k=1}^T u_{k-1}^2 u_k^2 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^T u_{k-m}^2 u_k^2 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons une équation de la forme

$$A\delta^{(0)} = B$$

où  $A$  dépend de  $\beta^{(0)}$ . L'estimateur initial pour  $\delta$ ,

$$\hat{\delta}^{(0)} = \hat{A}^{-1}B, \quad (2.2.12)$$

où  $\hat{A} = A(\hat{\beta}^{(0)})$ , c'est-à-dire les  $u_t$  dans  $A$  sont remplacés par  $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}'_t \hat{\beta}^{(0)}$ . L'estimateur initial  $\hat{\delta}^{(0)}$  est convergent car le système d'équations (2.2.4) est sans biais.

#### Etape 4.

Avec

$$\hat{\delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\xi}^{(0)} \\ \hat{\alpha}_1^{(0)} \\ \dots \\ \hat{\alpha}_m^{(0)} \end{bmatrix}$$

trouvé à l'équation (2.2.12), nous obtenons

$$\mathbf{V}^{(1)} = \xi^{(0)}\mathbf{V}_0^{(1)} + \alpha_1^{(0)}\mathbf{V}_1^{(1)} + \dots + \alpha_m^{(0)}\mathbf{V}_m^{(1)} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_T \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

et en utilisant l'équation (2.2.5) on obtient

$$\hat{\beta}^{(1)} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y},$$



où la matrice  $\mathbf{V}$  est posée égale à  $\mathbf{V}^{(1)}$ , qui est l'estimé de  $\mathbf{V}$  à l'étape 1. Par la suite  $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)}$  et on a

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)} = \hat{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{(1)} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)})' = \begin{bmatrix} u_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_T^2 \end{bmatrix}.$$

#### **Etape 5.**

Avec la deuxième équation du système (2.2.4) et  $\mathbf{V}^{(1)}$  et  $\mathbf{C}^{(1)}$  obtenues ci-dessus, nous obtenons

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{\xi}^{(1)} \\ \hat{\alpha}_1^{(1)} \\ \dots \\ \hat{\alpha}_m^{(1)} \end{bmatrix}.$$

L'équation est de la forme connue (2.1.11)

$$\sum_{f=0}^m tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_f)\alpha_f = tr(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C})$$

où  $\mathbf{V}^{(1)}$  remplace  $\mathbf{V}$  et les  $\mathbf{V}_g$  sont remplacés par les estimés, c'est-à-dire

$$\hat{\mathbf{V}}_g^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{1-g}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{u}_{2-g}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{u}_{T-g}^2 \end{bmatrix},$$

où  $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}^{(1)}$  et  $g = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Notons que

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h_T} \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

d'où

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_g \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u_{1-g}^2}{h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{u_{2-g}^2}{h_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{u_{T-g}^2}{h_T} \end{bmatrix}, g = 1, 2, \dots, m.$$

Il en résulte que

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_g \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} \frac{u_{1-g}^2 u_{1-f}^2}{h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{u_{2-g}^2 u_{2-f}^2}{h_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{u_{T-g}^2 u_{T-f}^2}{h_T} \end{bmatrix}, g, f = 1, 2, \dots, m$$

et

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_g \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{u_{1-g}^2 u_1^2}{h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{u_{2-g}^2 u_2^2}{h_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{u_{T-g}^2 u_T^2}{h_T} \end{bmatrix}, g = 1, 2, \dots, m.$$

Notons que pour  $g = 0$  et  $f = 0$ ,  $\mathbf{V}_g = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{V}_f = \mathbf{I}$ .

De (2.2.4), pour  $g = 0, 1, 2, \dots, m$  on a le système suivant

$$\begin{cases} \xi \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{I}) + \alpha_1 \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1) + \dots + \alpha_m \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m) = \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}) \\ \xi \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{I}) + \dots + \alpha_m \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m) = \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}) \\ \dots \\ \xi \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{V}^{-1} \mathbf{I}) + \dots + \dots + \alpha_m \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m) = \operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}) \end{cases}$$

Sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}^{-1}) & \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1) & \dots & \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m) \\ \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{V}^{-1}) & \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1) & \dots & \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m\mathbf{V}^{-1}) & \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1) & \dots & \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}) \\ \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}) \\ \dots \\ \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_m\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^T \frac{1}{h_k^2} & \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-1}^2}{h_k^2} & \dots & \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-m}^2}{h_k^2} \\ \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-1}^2}{h_k^2} & \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-1}^2 u_{k-1}^2}{h_k^2} & \dots & \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-1}^2 u_{k-m}^2}{h_k^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-m}^2}{h_k^2} & \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-m}^2 u_{k-1}^2}{h_k^2} & \dots & \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-m}^2 u_{k-m}^2}{h_k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^T \frac{u_k^2}{h_k^2} \\ \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-1}^2 u_k^2}{h_k^2} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^T \frac{u_{k-m}^2 u_k^2}{h_k^2} \end{bmatrix},$$

d'où on obtient facilement  $\hat{\delta}^{(1)}$ . On continue la procédure d'estimation de la même manière.

L'algorithme peut être résumé à partir des étapes suivantes :

– nous trouvons  $\hat{\beta}^{(0)}$  à partir de l'équation

$$\hat{\beta}^{(0)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

– nous trouvons  $\hat{\mathbf{C}}^{(0)}$  en utilisant

$$\hat{\mathbf{C}}^{(0)} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(0)})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(0)})'$$

– nous obtenons  $\hat{\delta}^{(0)}$  comme solution de l'équation (2.2.12)

– avec  $\hat{\delta}^{(0)}$  trouvé, nous calculons

$$\mathbf{V}^{(1)} = (\hat{\delta}^{(0)})' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \dots \\ \mathbf{V}_m \end{bmatrix}$$

- nous trouvons  $\hat{\beta}^{(1)}$  comme solution de l'équation

$$\hat{\beta}^{(1)} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

où  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)}$

- nous obtenons

$$\hat{\mathbf{C}}^{(1)} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(1)})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^{(1)})'$$

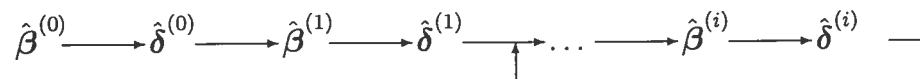
- pour trouver  $\hat{\delta}^{(1)}$ , nous utilisons une équation de la forme

$$\sum_{f=0}^m \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_f)\alpha_f = \text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}_g\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C})$$

avec  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)}$  et  $\beta^{(1)}$

- nous continuons la procédure jusqu'à la convergence, c'est-à-dire lorsque l'itération  $i$  et l'itération  $i + 1$  nous donnent des solutions qui ne diffèrent que peu.

Pour mieux illustrer l'algorithme, nous utilisons la figure ci-dessous



Nous avons observé numériquement qu'avec  $\hat{\beta}^{(0)}$  et  $\hat{\delta}^{(0)}$  des estimateurs initiaux qui sont convergents, l'algorithme converge rapidement, même après une ou deux itérations. Nous avons des illustrations numériques de cette propriété dans les chapitres 3 et 4. Cox et Hinkley [3] définissent ce type d'estimateurs comme des "one step estimators".

## Chapitre 3

---

### RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ILLUSTRATIONS

Dans les deux premiers chapitres, nous avons étudié le modèle *ARCH* d'ordre  $m$  et ensuite nous avons traité le problème d'estimation des paramètres de ce modèle. Pour estimer les paramètres nous avons développé les estimateurs de quasi-vraisemblance modifiés, obtenables avec un algorithme simple linéaire, et nous avons aussi rappelé la méthode de score utilisée par Engle, méthode basée sur l'algorithme de Newton-Raphson.

Dans ce chapitre nous allons simuler des modèles *ARCH* et, ensuite, nous allons calculer les estimateurs basés sur les deux méthodes mentionnées ci-dessus. La première et la deuxième sections sont consacrées à la simulation, respectivement d'un modèle de régression avec erreurs *ARCH* et un modèle de séries chronologiques avec erreurs *ARCH*, pour divers ensembles de valeurs des paramètres. Ensuite, nous présentons les résultats des estimations, sous forme de tableaux. Avec 100 réplifications de tailles 1000, 10000 et 100000 nous comparons les erreurs quadratiques moyennes des estimateurs des paramètres.

La dernière section est consacrée à l'étude des modèles *ARCH* mal spécifiés, dans le sens que les vrais erreurs ne suivent pas un processus *ARCH*. Un modèle mal spécifié nous aide à comprendre l'avantage de notre méthode. Notre algorithme nous permet d'estimer les paramètres de l'expression de la moyenne d'une manière convergente et avec efficacité même si l'erreur est mal spécifiée, tandis que les estimateurs obtenus par la méthode d'Engle sont biaisés. Nous allons comparer les paramètres et les erreurs quadratiques moyennes des paramètres par les

deux méthodes d'estimation en utilisant des séries simulées. Tous les codes utilisés sont écrits en MATLAB et sont présentés en Annexe B.

### 3.1. MODÈLES DE RÉGRESSION AVEC ERREURS ARCH

Pour avoir un aperçu du comportement de nos estimateurs, nous avons simulé des séries à partir des modèles de régression avec erreurs *ARCH* de la forme suivante

#### MODÈLE 1

$$\begin{aligned}y_t &= \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \\u_t &= v_t \sqrt{h_t} \\h_t &= \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2.\end{aligned}$$

#### MODÈLE 2

$$\begin{aligned}y_t &= \beta_0 + u_t \\u_t &= v_t \sqrt{h_t} \\h_t &= \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2.\end{aligned}$$

Nous allons faire des simulations pour chaque modèle précisé ci-dessus. Nous commencerons avec des simulations pour des modèles avec erreurs *ARCH*(1) et continuerons à simuler des modèles avec erreurs *ARCH*(2) et des modèles avec erreurs *ARCH*(3). Pour chaque simulation, nous allons utiliser des  $v_t$  qui suivent une loi gaussienne et nous allons le faire pour une réplication et ensuite, pour 100 réplifications. Dans le cas où nous faisons 100 réplifications, nous comparerons les erreurs quadratiques moyennes des estimateurs de la méthode de score et de notre méthode. Nous continuerons avec le cas où les  $v_t$  suivent une loi  $t$  de Student en respectant le cheminement décrit pour le cas précédent.

Les notations utilisées sont

T - la taille de l'échantillon

NRA(k) - algorithme de Newton-Raphson avec k itérations

NA(1) - notre algorithme avec 1 itération

NA(2) - notre algorithme avec 2 itérations

NA(3) - notre algorithme avec 3 itérations

EQM - erreur quadratique moyenne

### 3.1.1. Modèle de régression avec erreurs ARCH(1)

#### MODÈLE 1

Nous allons simuler le modèle suivant

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

avec  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0.39, \xi = 0.24, \alpha_1 = 0.23$ , et la variable explicative

$$X_t = \begin{cases} 0 & , \quad si \quad t = 3k + 1 \\ 0.5 & , \quad si \quad t = 3k + 2 \\ 1 & , \quad si \quad t = 3k + 3. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Nous allons considérer deux distributions pour  $v_t$ .

1.  $v_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$

Les résultats pour une réplcation se trouvent dans le tableau 3.1 Nous avons inclu la troisième itération de notre méthode dans le tableau 3.1 pour nous permettre de constater que la différence entre la deuxième et la troisième itération est très petite ou inexistante. Cette observation confirme le fait que si nous avons des estimateurs initiaux convergents, l'algorithme converge rapidement, après une ou deux itérations. Pour cette raison, nous présentons les résultats pour toutes les simulations à venir avec seulement les deux premières itérations.

Pour 100 réplcations, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.2.

À partir des tableaux 3.1 et 3.2, nous constatons que pour estimer les paramètres  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ , notre méthode performe aussi efficacement que la méthode de score d'Engle, méthode basée sur l'algorithme de Newton-Raphson.

Remarquons aussi que la taille de l'échantillon influence la précision de l'estimateur, c'est-à-dire que la précision augmente avec la taille de l'échantillon. Pour mieux illustrer cette propriété, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)	NA(3)
$\beta_0$	1000	-0.0157	-0.0216	-0.0231	-0.0231
	10000	0.0024	-0.0001	-0.0001	-0.0001
	100000	0.0008	0.0018	0.0018	0.0018
$\beta_1$	1000	0.3907	0.3868	0.3877	0.3878
	10000	0.3840	0.3877	0.3877	0.3877
	100000	0.3880	0.3864	0.3864	0.3864
$\xi$	1000	0.2387	0.2391	0.2388	0.2389
	10000	0.2410	0.2411	0.2410	0.2410
	100000	0.2370	0.2370	0.2370	0.2370
$\alpha_1$	1000	0.2406	0.2385	0.2401	0.2403
	10000	0.2283	0.2281	0.2283	0.2283
	100000	0.2307	0.2306	0.2307	0.2307

TABLEAU. 3.1. Paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

pour les estimateurs de  $\alpha_1$  pour diverses tailles de simulations. Les valeurs trouvées sont dans le tableau 3.3. De ce dernier nous constatons que l'erreur quadratique moyenne de la première itération est plus petite que l'erreur quadratique moyenne de la deuxième itération pour des "petites" tailles. Mais, à partir d'une taille  $T \geq 30,000$ , nous constatons que la deuxième itération performe mieux.

Les valeurs du tableau 3.3 sont représentées graphiquement dans la figure 3.1. Nous constatons la différence entre notre méthode et la méthode de score, quand la taille  $T \rightarrow \infty$ .

Notons aussi que pour notre méthode, nous utilisons seulement une ou deux itérations, tandis que l'autre méthode nécessite 20 itérations.

$2.v_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .

où  $t_\nu$  représente une loi de Student avec  $\nu = 5$  degrés de liberté (en fait on a généré  $n$  observations d'une loi de Student de la forme suivante  $v_t = \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} t_\nu$  pour que la loi suive les propriétés précisées dans la section 1.2.4.)

Les résultats sont contenus dans le tableau 3.4. Pour 100 répliquations, nous



paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0004	0.0004	0.0004
	10000	0.0001	0	0
	100000	0	0	0
$EQM(\beta_1)$	1000	0.0017	0.0018	0.0018
	10000	0.0002	0.0002	0.0002
	100000	0	0	0
$EQM(\xi)$	1000	0.0001	0.0001	0.0001
	10000	0	0	0
	100000	0	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0006	0.0007	0.0006
	10000	0.0002	0.0002	0.0002
	100000	0	0	0

TABLEAU. 3.2. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

T	NRA	NA(1)	NA(2)
100	0.038545	0.041486	0.043205
500	0.005401	0.006850	0.007159
1000	0.002280	0.000751	0.000998
5000	0.002089	0.000375	0.000405
10000	0.002983	0.000156	0.000181
20000	0.002724	0.000080	0.000081
30000	0.002761	0.000054	0.000053
40000	0.002493	0.000046	0.000045
50000	0.002837	0.000056	0.000055
100000	0.002601	0.000026	0.000025

TABLEAU. 3.3. Erreur quadratique moyenne du paramètre  $\alpha_1$  pour diverses tailles de l'échantillon

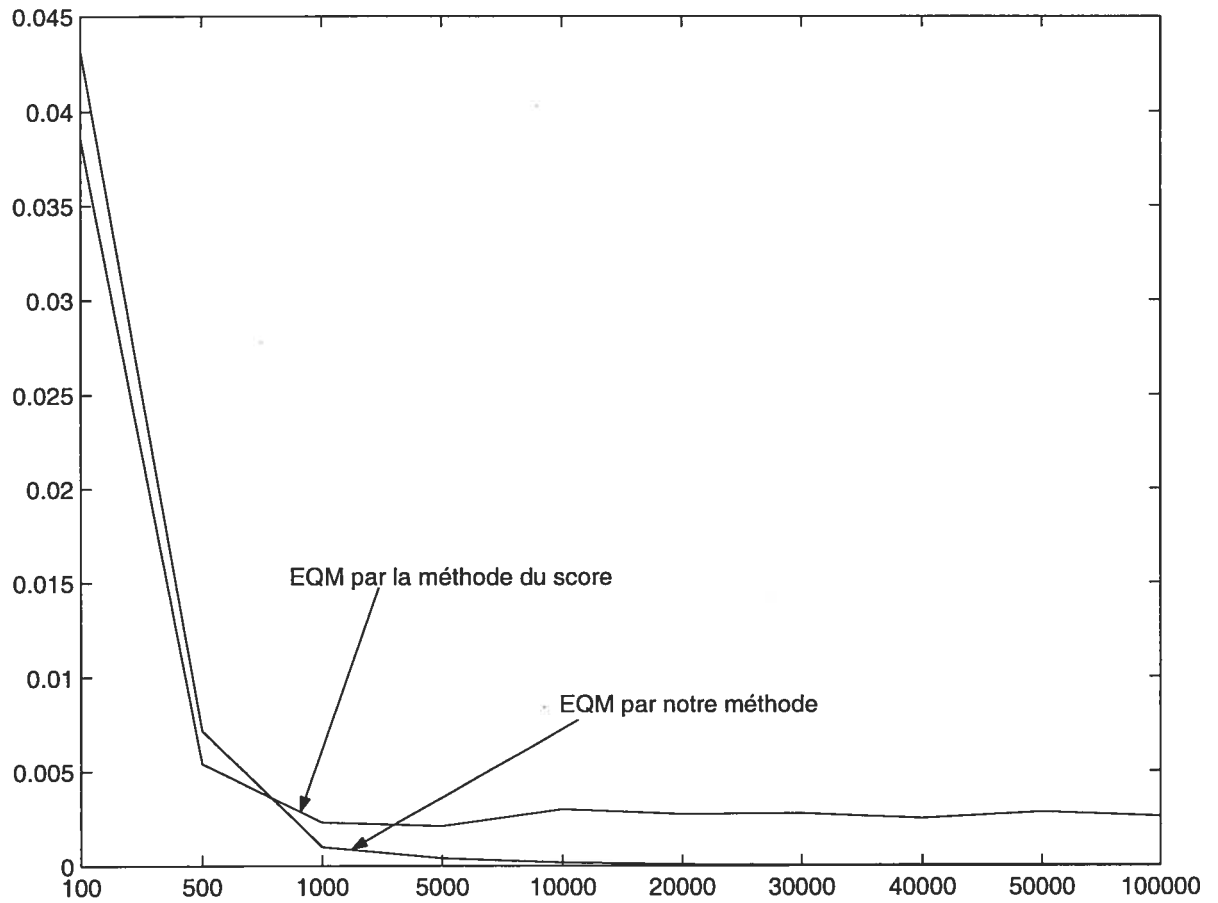


FIG. 3.1. L'erreur quadratique moyenne pour diverses tailles de l'échantillon  
avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ .  
Les résultats se trouvent dans le tableau 3.5.

Nous constatons que dans le cas de la loi  $t$  de Student, les conclusions sont semblables au cas de la loi normale.

### MODÈLE 2

Pour nos simulations, nous avons utilisé le modèle suivant

$$y_t = \beta_0 + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2.$$

avec  $\beta_0 = 0.62, \xi = 0.21, \alpha_1 = 0.13$ .

1.  $v_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	-0.0197	-0.0106	-0.0132
	10000	0.0041	0.0074	0.0060
	100000	0.0004	0.0016	0.0016
$\beta_1$	1000	0.3957	0.3946	0.3992
	10000	0.3827	0.3779	0.3799
	100000	0.3917	0.3910	0.3910
$\xi$	1000	0.2302	0.2300	0.2303
	10000	0.2357	0.2321	0.2360
	100000	0.2384	0.2385	0.2384
$\alpha_1$	1000	0.2093	0.2169	0.2068
	10000	0.2446	0.2627	0.2430
	100000	0.2326	0.2323	0.2326

TABLEAU. 3.4. Paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

Les résultats pour une réplification sont dans le tableau 3.6. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.7.

**2.  $v_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .**

Les résultats pour une réplification sont dans le tableau 3.8. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.9. En regardant les tableaux 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9, nous constatons autant pour le cas où les  $v_t$  suivent une loi gaussienne qu'une loi de Student, les estimateurs obtenus par les deux méthodes performant de la même manière du point de vue de l'efficacité.

### 3.1.2. Modèle de régression avec erreurs $ARCH(2)$

#### MODÈLE 1

Nous avons choisi le modèle suivant pour nos simulations

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.000748	0.000780	0.000724
	10000	0.000084	0.000077	0.000074
	100000	0.000007	0.000005	0.000005
$EQM(\beta_1)$	1000	0.00234	0.002496	0.002364
	10000	0.000108	0.000081	0.000077
	100000	0.000017	0.000014	0.000014
$EQM(\xi)$	1000	0.001265	0.001336	0.001217
	10000	0.000120	0.000120	0.000119
	100000	0.000008	0.000008	0.000008
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.008269	0.009128	0.007565
	10000	0.000365	0.000304	0.000357
	100000	0.000093	0.000085	0.000093

TABLEAU. 3.5. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec une variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.6278	0.6284	0.6285
	10000	0.6186	0.6186	0.6187
	100000	0.6204	0.6206	0.6206
$\xi$	1000	0.2208	0.2170	0.2169
	10000	0.2128	0.2090	0.2090
	100000	0.2113	0.2075	0.2075
$\alpha_1$	1000	0.0973	0.1127	0.1132
	10000	0.1075	0.1236	0.1238
	100000	0.1163	0.1320	0.1320

TABLEAU. 3.6. Paramètres estimés pour un modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim \text{gaussienne}$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0003	0.0003	0.0003
	10000	0.00001	0.00002	0.00002
	100000	0	0	0
$EQM(\xi)$	1000	0.0002	0.0001	0.0001
	10000	0.00003	0.00002	0.00002
	100000	0.00001	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0011	0.0013	0.0013
	10000	0.0003	0.0002	0.0002
	100000	0.00002	0	0

TABLEAU. 3.7. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.6068	0.6087	0.6086
	10000	0.6118	0.6109	0.6111
	100000	0.6213	0.6214	0.6214
$\xi$	1000	0.2216	0.2188	0.2187
	10000	0.2106	0.2080	0.2076
	100000	0.2127	0.2087	0.2087
$\alpha_1$	1000	0.0800	0.0918	0.0919
	10000	0.1116	0.1217	0.1235
	100000	0.1168	0.1333	0.1333

TABLEAU. 3.8. Paramètres estimés pour un modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim$  Student

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0003	0.0002	0.0002
	10000	0.00002	0.00002	0.00002
	100000	0	0	0
$EQM(\xi)$	1000	0.0001	0.0001	0.0001
	10000	0.00001	0.00001	0.00001
	100000	0.00002	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0026	0.0027	0.0026
	10000	0.0005	0.0003	0.0003
	100000	0.00003	0	0

TABLEAU. 3.9. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés pour un modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(1)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

avec  $\beta_0 = 0.11, \beta_1 = 0.39, \xi = 0.14, \alpha_1 = 0.23, \alpha_2 = 0.05$ .

1.  $\mathbf{v}_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$

Les résultats pour une réplication sont dans le tableau 3.10. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi, \alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.11.

2.  $\mathbf{v}_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .

Les résultats pour une réplication sont dans le tableau 3.12. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi, \alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.13.

Nous constatons que les deux modèles performant de la même manière au niveau d'efficacité, en remarquant que la taille de simulation influence de façon positive l'efficacité.

## MODÈLE 2

Pour nos simulations nous avons utilisé le modèle suivant *MODÈLE 2*

$$y_t = \beta_0 + u_t$$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.1195	0.1173	0.1184
	10000	0.1168	0.1157	0.1155
	100000	0.1123	0.1122	0.1122
$\beta_1$	1000	0.3389	0.3524	0.3506
	10000	0.3895	0.3912	0.3916
	100000	0.3893	0.3891	0.3891
$\xi$	1000	0.1328	0.1336	0.1333
	10000	0.1392	0.1392	0.1393
	100000	0.1407	0.1407	0.1407
$\alpha_1$	1000	0.2095	0.2062	0.2064
	10000	0.2221	0.2214	0.2220
	100000	0.2182	0.2182	0.2183
$\alpha_2$	1000	0.0300	0.0285	0.0299
	10000	0.0098	0.0106	0.0097
	100000	0.0034	0.0033	0.0034

TABLEAU. 3.10. Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$$

avec  $\beta_0 = 0.33$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.34$ ,  $\alpha_2 = 0.21$ .

**1.**  $\mathbf{v}_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$

Les résultats pour une réplication sont dans le tableau 3.14. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \xi, \alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.15.

**2.**  $\mathbf{v}_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .

Les résultats se trouvent dans le tableau 3.16. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi, \alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Les résultats sont dans le tableau 3.17.

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.000595	0.000565	0.000556
	10000	0.000014	0.000016	0.000016
	100000	0.000002	0.000002	0.000002
$EQM(\beta_1)$	1000	0.001063	0.000961	0.000942
	10000	0.000052	0.000046	0.000049
	100000	0.000012	0.000014	0.000014
$EQM(\xi)$	1000	0.000074	0.000074	0.000074
	10000	0.000027	0.000022	0.000026
	100000	0.000001	0.000001	0.000001
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.003478	0.003294	0.003462
	10000	0.000595	0.000577	0.000596
	100000	0.000041	0.000041	0.000040
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.002974	0.003031	0.003007
	10000	0.002682	0.002648	0.002686
	100000	0.002506	0.002500	0.002505

TABLEAU. 3.11. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

Quelques conclusions s'imposent en regardant les tableaux 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17. Nos estimateurs semblent avoir un avantage sur les estimateurs de la méthode du score au niveau du biais et de l'EQM, surtout dans le cas où les  $v_t$  suivent une loi gaussienne. Quand les  $v_t$  suivent une loi de Student cet avantage diminue, et même disparaît pour l'estimateur de  $\beta_0$  dans le cas de la deuxième itération de notre méthode, mais notre méthode reste plus efficace pour les estimateurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

### 3.1.3. Modèle de régression avec erreurs ARCH(3)

#### MODÈLE 1

Le modèle choisi pour nos simulations est



paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.1411	0.1304	0.1112
	10000	0.1148	0.1183	0.1180
	100000	0.1082	0.1084	0.1084
$\beta_1$	1000	0.3589	0.3704	0.3655
	10000	0.3852	0.3836	0.3837
	100000	0.3933	0.3934	0.3932
$\xi$	1000	0.1305	0.1366	0.1365
	10000	0.1469	0.1475	0.1471
	100000	0.1410	0.1410	0.1410
$\alpha_1$	1000	0.2702	0.2438	0.2433
	10000	0.1992	0.1987	0.1990
	100000	0.2326	0.2317	0.2326
$\alpha_2$	1000	0.0185	0.0406	0.0515
	10000	0.0047	0.0022	0.0042
	100000	0.0010	0.0030	0.0010

TABLEAU. 3.12. Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2$$

avec  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0.35, \xi = 0.001, \alpha_1 = 0.11, \alpha_2 = 0.24, \alpha_3 = 0.09$  et la même variable explicative  $X_t$  est utilisée.

1.  $v_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$

Les résultats pour une réplication sont dans le tableau 3.18. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.19.

2.  $v_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.000279	0.000194	0.000169
	10000	0.000075	0.000075	0.000089
	100000	0.000001	0.000002	0.000002
$EQM(\beta_1)$	1000	0.001111	0.001396	0.000838
	10000	0.000267	0.000184	0.000254
	100000	0.000006	0.000006	0.000006
$EQM(\xi)$	1000	0.000133	0.000137	0.000140
	10000	0.000014	0.000021	0.000020
	100000	0.000003	0.000011	0.000004
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.003678	0.003810	0.003420
	10000	0.000515	0.001651	0.000876
	100000	0.000066	0.000394	0.000062
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.002589	0.003329	0.003628
	10000	0.00204	0.002723	0.001899
	100000	0.002542	0.002746	0.002719

TABLEAU. 3.13. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

Les résultats se trouvent dans le tableau 3.20. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.21.

En regardant le tableau 3.21, nous observons que la méthode du score ne semble pas offrir une estimation efficace pour les paramètres  $\beta_0, \beta_1$  et  $\xi$  pour les tailles d'échantillons considérées. D'autre part, la méthode de score étant une méthode itérative, elle a besoin d'un "bon" point de départ pour converger. Ce choix de point de départ n'est pas évident surtout pour estimer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

## MODÈLE 2

Le modèle choisi pour nos simulations est

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.3327	0.3328	0.3369
	10000	0.3312	0.3294	0.3496
	100000	0.3312	0.3311	0.3447
$\xi$	1000	0.1128	0.1012	0.1009
	10000	0.1166	0.1014	0.1012
	100000	0.1145	0.0999	0.1002
$\alpha_1$	1000	0.2520	0.2954	0.2951
	10000	0.2960	0.3394	0.3384
	100000	0.2980	0.3415	0.3408
$\alpha_2$	1000	0.1680	0.1875	0.1891
	10000	0.1787	0.2078	0.2111
	100000	0.1836	0.2063	0.2049

TABLEAU. 3.14. Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

$$y_t = \beta_0 + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2$$

avec  $\beta_0 = 0.33$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.34$ ,  $\alpha_2 = 0.21$ ,  $\alpha_3 = 0.19$ .

1.  $v_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$ .

Les résultats pour une réplication sont dans le tableau 3.22. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \xi, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Les résultats sont dans le tableau 3.23.

2.  $v_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .

Les résultats se trouvent dans le tableau 3.24. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \xi, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Les résultats sont dans le tableau 3.25.

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0002	0.0003	0.0014
	10000	0	0	0.0002
	100000	0	0	0.0001
$EQM(\xi)$	1000	0.0003	0.0001	0.0001
	10000	0.0003	0	0
	100000	0.0002	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0026	0.0030	0.0026
	10000	0.0017	0.0003	0.0003
	100000	0.0019	0	0
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.0026	0.0015	0.0012
	10000	0.0011	0.0002	0.0002
	100000	0.0006	0	0

TABLEAU. 3.15. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

En examinant les tableaux 3.21 et 3.22, nous constatons que les estimateurs par notre méthode semblent avoir un avantage sur les estimateurs de la méthode du score, dans le cas où les  $v_t$  suivent une loi gaussienne. Lorsque les  $v_t$  suivent une loi de Student, les estimateurs de la méthode du score performant mieux que nos estimateurs.

### 3.2. MODÈLES DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES AVEC ERREURS ARCH

Les modèles de séries proprement dites ne sont pas les modèles étudiés dans cette mémoire, mais comme il y a une certaine similarité avec les modèles de régression, nous essayons d'appliquer notre méthode pour le modèle de séries chronologiques avec erreurs  $ARCH(1)$ .

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.3418	0.3480	0.3810
	10000	0.3331	0.3352	0.4157
	100000	0.3318	0.3317	0.3523
$\xi$	1000	0.0995	0.0836	0.0834
	10000	0.1101	0.0937	0.0995
	100000	0.1148	0.0993	0.0999
$\alpha_1$	1000	0.3376	0.4108	0.3955
	10000	0.3353	0.3832	0.3472
	100000	0.3028	0.3480	0.3458
$\alpha_2$	1000	0.2112	0.2165	0.2202
	10000	0.1557	0.1801	0.1681
	100000	0.1922	0.2178	0.2144

TABLEAU. 3.16. Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

### 3.2.1. Modèle de séries chronologiques avec erreurs $ARCH(1)$

Le modèle choisi pour les simulations est

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

Pour nos simulations, nous avons utilisé  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0.35, \xi = 0.001, \alpha_1 = 0.24$  et  $X_t = y_{t-1}$ .

1.  $v_t \sim \text{i.i.d } N(0, 1)$ .

Les résultats pour une réplcation sont dans le tableau 3.26. Pour 100 réplcations, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.27. À partir des tableaux 3.26 et 3.27, nous constatons que notre méthode performe presque aussi efficacement que la méthode de score d'Engle, méthode basée sur l'algorithme de Newton-Raphson,

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0001	0.0001	0.0036
	10000	0	0.0010	0.0010
	100000	0	0	0.0036
$EQM(\xi)$	1000	0.0004	0.0002	0.0003
	10000	0.0003	0.0004	0.0002
	100000	0.0002	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0086	0.0195	0.0106
	10000	0.0030	0.0137	0.0064
	100000	0.0018	0.0003	0.0011
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.0067	0.0056	0.0073
	10000	0.0012	0.0115	0.0008
	100000	0.0008	0.0001	0.0003

TABLEAU. 3.17. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(2)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

pour estimer les paramètres  $\beta_0, \beta_1, \xi$ . Notre méthode performe toujours mieux que celle du score basée sur l'algorithme de Newton-Raphson pour le paramètre  $\alpha_1$ .

Rappelons aussi que dans le cas de notre méthode, nous utilisons une ou deux itérations seulement, tandis qu'avec l'autre méthode, nous avons besoin de 20 itérations.

$2.v_t \sim \text{i.i.d } t_\nu$ .

Les résultats sont contenus dans le tableau 3.28. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans le tableau 3.29.

Nous constatons que dans le cas de la loi  $t$  de Student, les conclusions sont semblables au cas de la loi normale.

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.0010	0.0006	0.0006
	10000	-0.0003	0.0001	0.0001
	100000	0	0	0
$\beta_1$	1000	0.3474	0.3479	0.3480
	10000	0.3495	0.3489	0.3489
	100000	0.3502	0.3501	0.3501
$\xi$	1000	0.0009	0.0010	0.0009
	10000	0.0010	0.0010	0.0010
	100000	0.0010	0.0010	0.0010
$\alpha_1$	1000	0.0781	0.0790	0.0782
	10000	0.1288	0.1237	0.1285
	100000	0.1125	0.1111	0.1123
$\alpha_2$	1000	0.01876	0.1906	0.1867
	10000	0.2372	0.2334	0.2368
	100000	0.2318	0.2309	0.2316
$\alpha_3$	1000	0.0178	0.0001	0.0120
	10000	0.0202	0.0001	0.0201
	100000	0.0062	0	0.0060

TABLEAU. 3.18. Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

### 3.3. MODÈLES MAL SPÉCIFIÉS

Si l'on perturbe le modèle de régression avec erreurs  $ARCH$  en spécifiant incorrectement la variance conditionnelle, nous observons que les estimateurs des paramètres de la variance performant mal pour les deux méthodes. Les estimateurs des paramètres de la moyenne,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  performant bien dans le cas de notre méthode et ils performant mal dans le cas de la méthode du score. Dans ce cas, nous considérons le modèle

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.000002	0.000003	0.000003
	10000	0.000001	0.000001	0.000001
	100000	0	0	0
$EQM(\beta_1)$	1000	0.000009	0.000011	0.000011
	10000	0.000001	0.000001	0.000001
	100000	0	0	0
$EQM(\xi)$	1000	0	0	0
	10000	0	0	0
	100000	0	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.002706	0.002719	0.002732
	10000	0.0002000	0.000208	0.000204
	100000	0.000008	0.000007	0.000007
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.001160	0.001238	0.001163
	10000	0.000238	0.000255	0.000237
	100000	0.000020	0.000021	0.000020
$EQM(\alpha_3)$	1000	0.007891	0.008100	0.007508
	10000	0.008489	0.008102	0.008510
	100000	0.007937	0.008099	0.007937

TABLEAU. 3.19. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2.$$

décrit au début de ce chapitre, le seul changement étant au niveau des  $v_t$ .

### 3.3.1. Modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(1)$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$



paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.0011	0.0004	0.0006
	10000	0.0003	0.0011	0.0011
	100000	-0.0001	-0.0001	-0.0001
$\beta_1$	1000	0.3518	0.3531	0.3528
	10000	0.3497	0.3489	0.3490
	100000	0.3503	0.3504	0.3504
$\xi$	1000	0.0011	0.0013	0.0012
	10000	0.0010	0.0010	0.0010
	100000	0.0010	0.0010	0.0010
$\alpha_1$	1000	0.0480	0.0065	0.0497
	10000	0.1380	0.1376	0.1387
	100000	0.1149	0.1129	0.1145
$\alpha_2$	1000	0.2784	0.1717	0.2101
	10000	0.2680	0.2671	0.2673
	100000	0.2627	0.2606	0.2626
$\alpha_3$	1000	0.0261	0.0004	0.0522
	10000	0.0034	0.0001	0.0016
	100000	0.0060	0	0.0046

TABLEAU. 3.20. Paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

avec  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0.39, \xi = 0.24, \alpha_1 = 0.23$  et  $v_t$  précisés ci-dessous. Nous avons choisi  $v_t$  de la forme suivante

$$v_t = \begin{cases} i.i.d \ N(0, 1) & , \quad \text{pour les 30\% premières observations} \\ i.i.d \ N(0, 0.01) & , \quad \text{pour les 30\% observations suivantes} \\ i.i.d \ N(0, 6.25) & , \quad \text{pour les 40\% dernières observations.} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.13889	0.000003	0.000002
	10000	0	0	0
	100000	0.851596	0.000001	0.000004
$EQM(\beta_1)$	1000	0.162983	0.000008	0.000008
	10000	0.000001	0.000001	0.000001
	100000	1.987626	0.000059	0.000007
$EQM(\xi)$	1000	1.649557	0	0
	10000	0	0	0
	100000	1.837161	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.025181	0.003389	0.001500
	10000	0.000445	0.001702	0.000569
	100000	0.062510	0.007342	0.006349
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.043361	0.005402	0.006132
	10000	0.000515	0.000627	0.000484
	100000	0.094791	0.038097	0.089997
$EQM(\alpha_3)$	1000	0.033521	0.008099	0.014515
	10000	0.008235	0.008100	0.008451
	100000	0.004990	0.008095	0.007508

TABLEAU. 3.21. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression avec variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

Par conséquent, la variance conditionnelle ne peut plus être spécifiée comme variance de type  $ARCH$ . Les estimateurs obtenus en spécifiant incorrectement comme un modèle avec erreurs  $ARCH(1)$ , se trouvent dans le tableau 3.30. Du tableau 3.30 nous observons que les estimateurs de l'expression de la variance performant mal pour les deux méthodes, mais les estimateurs de l'équation de la moyenne performant mal pour la méthode du score et très bien pour notre méthode.

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.3383	0.3433	0.4723
	10000	0.3377	0.3383	0.4242
	100000	0.3312	0.3317	0.4274
$\xi$	1000	0.1385	0.1121	0.1150
	10000	0.1281	0.1016	0.1048
	100000	0.1370	0.1102	0.1104
$\alpha_1$	1000	0.3578	0.4233	0.3446
	10000	0.3093	0.3636	0.3237
	100000	0.2976	0.3646	0.3076
$\alpha_2$	1000	0.1310	0.1701	0.1317
	10000	0.1979	0.2430	0.2065
	100000	0.1811	0.2181	0.1899
$\alpha_3$	1000	0.1807	0.1153	0.1969
	10000	0.1664	0.0811	0.1559
	100000	0.1639	0.0767	0.1838

TABLEAU. 3.22. Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans la tableau 3.31. Pour mieux illustrer le fait que nos estimateurs de l'expression de la moyenne sont convergents même dans le cas d'un modèle mal spécifié, nous avons représenté graphiquement les valeurs de  $\beta_0$  et de  $\beta_1$  obtenus en utilisant les deux méthodes, dans les figures 3.2 et 3.3.

Si par exemple nous considérons le même modèle choisi, mais nous changeons seulement la forme des  $v_t$ , c'est-à-dire nous choisissons

$$v_t = \begin{cases} i.i.d \ N(0, 1) & , \text{ pour les 50\% premières observations} \\ i.i.d \ N(0, 6.25) & , \text{ pour les 50\% dernières observations,} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

nous remarquons que notre méthode performe toujours bien. Par contre la méthode de score performe aussi mal que dans le cas précédent. Les résultats obtenus

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0002	0.0001	0.0164
	10000	0	0	0.0098
	100000	0	0	0.0053
$EQM(\xi)$	1000	0.0021	0.0004	0.0005
	10000	0.0014	0.0001	0.0003
	100000	0.0012	0.0001	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0035	0.0055	0.0078
	10000	0.0020	0.0004	0.0014
	100000	0.0019	0.0003	0.0005
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.0027	0.0018	0.0040
	10000	0.0008	0.0009	0.0007
	100000	0.0006	0.0005	0.0001
$EQM(\alpha_3)$	1000	0.0009	0.0070	0.0123
	10000	0.0009	0.0099	0.0040
	100000	0.0005	0.0108	0.0007

TABLEAU. 3.23. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim$  gaussienne

pour une réplication se trouvent dans le tableau 3.32. Pour 100 réplifications, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne des estimateurs pour  $\beta_0, \beta_1, \xi$  et  $\alpha_1$ . Les résultats se trouvent dans la tableau 3.33.

Pour illustrer les différences entre les deux méthodes, nous avons représenté les graphiques de  $\beta_0$  et de  $\beta_1$  en utilisant une dimension de simulation de  $T = 1000$ . Les représentations se trouvent dans les figures 3.4 et 3.5.

### 3.3.2. Modèle mal spécifié avec erreurs $ARCH(2)$

Le modèle choisi est

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	0.3257	0.3275	0.4282
	10000	0.3276	0.3292	0.4369
	100000	0.3301	0.3298	0.3380
$\xi$	1000	0.1133	0.1016	0.0873
	10000	0.1348	0.1090	0.1180
	100000	0.1344	0.1050	0.0991
$\alpha_1$	1000	0.3572	0.3842	0.3770
	10000	0.2946	0.3524	0.2878
	100000	0.3041	0.3595	0.3413
$\alpha_2$	1000	0.1030	0.1448	0.1653
	10000	0.1832	0.2266	0.1846
	100000	0.1862	0.2361	0.2090
$\alpha_3$	1000	0.1380	0.0739	0.1524
	10000	0.1876	0.0875	0.1719
	100000	0.1587	0.0444	0.1971

TABLEAU. 3.24. Paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$$

avec  $\beta_0 = 0.11, \beta_1 = 0.39, \xi = 0.14, \alpha_1 = 0.23, \alpha_2 = 0.05$  et  $v_t$  de la forme

$$v_t = \begin{cases} i.i.d \ N(0, 1) & , \quad \text{pour les 30\% premières observations} \\ i.i.d \ N(0, 0.01) & , \quad \text{pour les 30\% observations suivantes} \\ i.i.d \ N(0, 6.25) & , \quad \text{pour les 40\% dernières observations.} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Cette fois ci, nous avons spécifié incorrectement comme un modèle  $ARCH(2)$  et comme nous avons vu précédemment que les estimateurs de l'expression de la variance performant mal dans le cas des deux méthodes, dans les tableaux 3.34 et 3.35 nous avons gardé seulement les estimateurs de l'expression de la moyenne.

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.0002	0.0006	0.0251
	10000	0	0	0.0139
	100000	0	0.0006	0.0359
$EQM(\xi)$	1000	0.0053	0.0049	0.0618
	10000	0.0010	0.0019	0.0376
	100000	0.0044	5.5902	0.0017
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.0366	0.0090	0.3485
	10000	0.0058	0.0378	0.0349
	100000	0.0018	5.2908	0.0705
$EQM(\alpha_2)$	1000	0.0110	0.0142	0.0064
	10000	0.0012	0.0290	0.0871
	100000	0.0009	1.6492	0.0051
$EQM(\alpha_3)$	1000	0.0094	0.0187	0.0114
	10000	0.0013	0.0916	0.0078
	100000	0.0010	0.0481	0.0043

TABLEAU. 3.25. Erreur quadratique moyenne des paramètres estimés du modèle de régression sans variable explicative, erreurs  $ARCH(3)$  et  $v_t \sim \text{Student}$

Des tableaux 3.34 et 3.35, nous constatons que notre méthode performe très bien. Par contre, la méthode de score performe très mal au niveau de convergence et d'efficacité pour estimer les paramètres de la moyenne  $\beta_0, \beta_1$ .

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)	NA(3)
$\beta_0$	1000	-0.0001	-0.0006	-0.0006	-0.0006
	10000	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
	100000	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
$\beta_1$	1000	0.2760	0.2862	0.2877	0.2879
	10000	0.3677	0.3648	0.3650	0.3650
	100000	0.3522	0.3524	0.3524	0.3524
$\xi$	1000	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
	10000	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
	100000	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
$\alpha_1$	1000	0.2190	0.2114	0.2163	0.2169
	10000	0.2612	0.2614	0.2612	0.2612
	100000	0.2465	0.2462	0.2465	0.2465

TABLEAU. 3.26. Paramètres estimés du modèle de série chronologique avec erreurs  $ARCH(1)$ , dans le cas d'une distribution gaussienne

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.000001	0.000001	0.000001
	10000	0	0	0
	100000	0	0	0
$EQM(\beta_1)$	1000	0.000900	0.000989	0.000985
	10000	0.000088	0.000101	0.000101
	100000	0	0	0
$EQM(\xi)$	1000	0	0	0
	10000	0	0	0
	100000	0.00042	0.00039	0.00040
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.002854	0.002307	0.002247
	10000	0.001123	0.000199	0.000196
	100000	0.0006	0	0

TABLEAU. 3.27. Erreur quadratique moyenne des paramètres pour un modèle de série chronologique avec erreurs  $ARCH(1)$ ,  $v_t \sim$  gaussienne



paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	-0.0029	-0.0030	-0.0030
	10000	0.0001	0.0002	0.0002
	100000	0.0001	0.0001	0.0001
$\beta_1$	1000	0.3414	0.3535	0.3556
	10000	0.3462	0.3408	0.3406
	100000	0.3498	0.3486	0.3487
$\xi$	1000	0.001	0.001	0.001
	10000	0.0011	0.001	0.001
	100000	0.001	0.001	0.001
$\alpha_1$	1000	0.2226	0.2573	0.2550
	10000	0.2052	0.2363	0.2372
	100000	0.2114	0.2339	0.2358

TABLEAU. 3.28. Paramètres estimés pour un modèle de série chronologique avec erreurs  $ARCH(1)$ , dans le cas d'une distribution de Student

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.000001	0.000001	0.000001
	10000	0	0	0
	100000	0	0	0
$EQM(\beta_1)$	1000	0.001079	0.001092	0.001059
	10000	0.000129	0.000123	0.000119
	100000	0	0	0
$EQM(\xi)$	1000	0	0	0
	10000	0	0	0
	100000	0	0	0
$EQM(\alpha_1)$	1000	0.006752	0.006925	0.006197
	10000	0.001545	0.000930	0.000710
	100000	0.0003	0	0

TABLEAU. 3.29. Erreur quadratique moyenne des paramètres pour un modèle de série chronologique avec erreurs  $ARCH(1)$ ,  $v_t \sim \text{Student}$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	-0.2298	0.0207	0.0213
	10000	-0.3187	-0.0645	-0.0101
	100000	0.4145	0.0097	-0.0065
$\beta_1$	1000	0.7157	0.3741	0.3840
	10000	0.7040	0.4583	0.3945
	100000	-0.1781	0.3981	0.3957
$\xi$	1000	0.2306	0.5734	0.2364
	10000	0.2674	0.5307	0.2116
	100000	0.3008	0.9003	0.2215
$\alpha_1$	1000	1.7247	1.3037	1.6344
	10000	1.5894	1.3874	1.7128
	100000	1.4902	1.3463	1.6368

TABLEAU. 3.30. Paramètres estimés du modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	0.7181	0.0061	0.0011
	10000	0.7610	0.0028	0.4048
	100000	0.4733	0.0008	0.0051
$EQM(\beta_1)$	1000	4.4245	0.0164	0.0021
	10000	2.6837	0.0055	0.4048
	100000	2.4551	0.0039	0.1320
$EQM(\xi)$	1000	22.6898	0.3156	0.0037
	10000	1.4981	2.7070	1.1846
	100000	1.7021	3.1758	0.2291
$EQM(\alpha_1)$	1000	1.8303	1.6205	2.5264
	10000	1.17082	1.6746	1.7084
	100000	1.9952	1.5575	2.6628

TABLEAU. 3.31. Erreurs quadratiques moyennes pour un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	-8.9472	0.4208	-0.0123
	10000	-0.0063	0.0401	-0.0098
	100000	0.1494	0.0019	-0.0013
$\beta_1$	1000	7.7993	-0.2965	0.4321
	10000	0.0607	0.2994	0.4069
	100000	0.2996	0.3718	0.3869

TABLEAU. 3.32. Paramètres estimés pour un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$

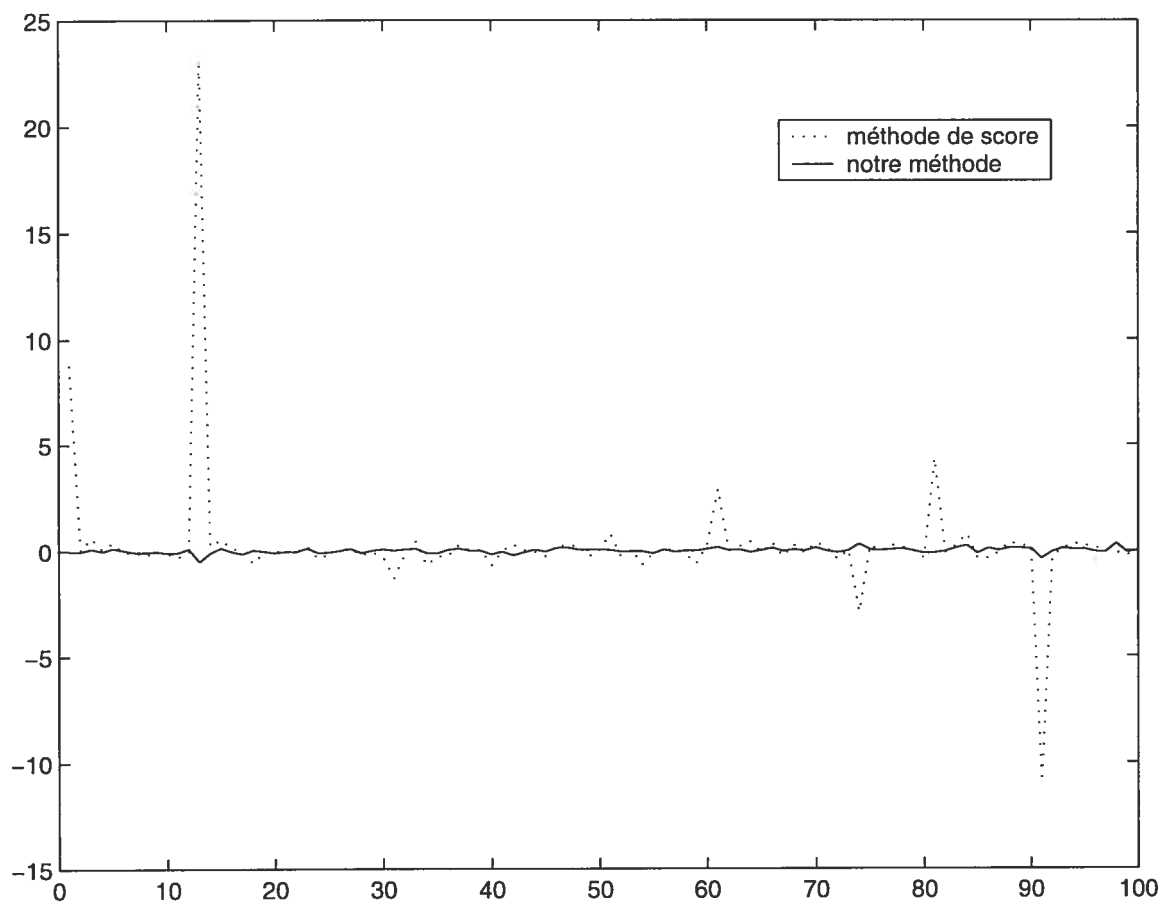


FIG. 3.2. L'estimation de  $\beta_0$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	5.637346	0.048067	0.459740
	10000	14.623635	0.009690	0.006687
	100000	0.475503	0.000542	0.037346
$EQM(\beta_1)$	1000	27.837768	0.096953	0.115306
	10000	33.621738	0.230072	0.128517
	100000	1.331950	0.000543	0.030210

TABLEAU. 3.33. Erreurs quadratiques moyennes pour un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$

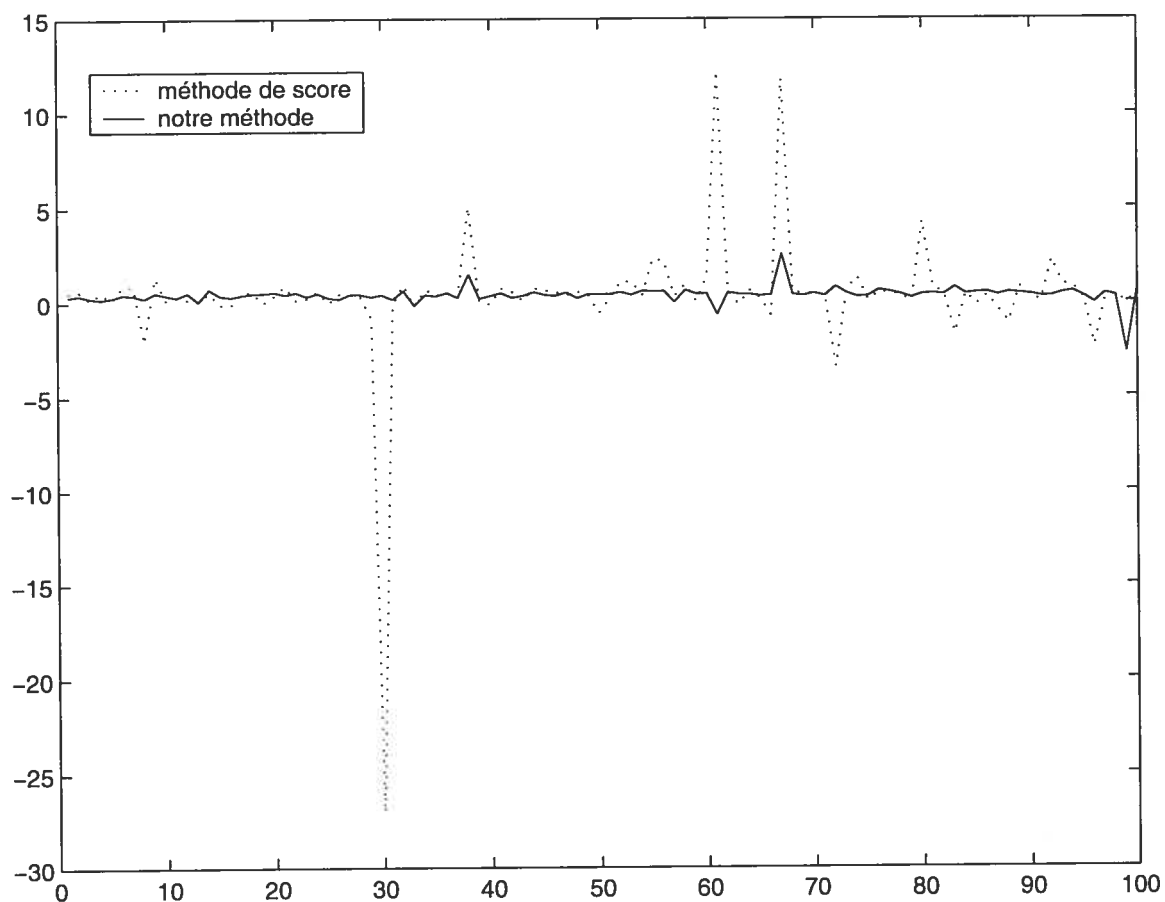


FIG. 3.3. L'estimation de  $\beta_1$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(1)$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	1000	1008.545456	0.073235	0.155578
	10000	-7.137295	0.097779	0.206941
	100000	-0.187468	0.119202	0.092266
$\beta_1$	1000	1408.017390	0.351073	0.302681
	10000	30.858795	0.413294	0.451754
	100000	1.143020	0.498810	0.383125

TABLEAU. 3.34. Paramètres estimés pour un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(2)$

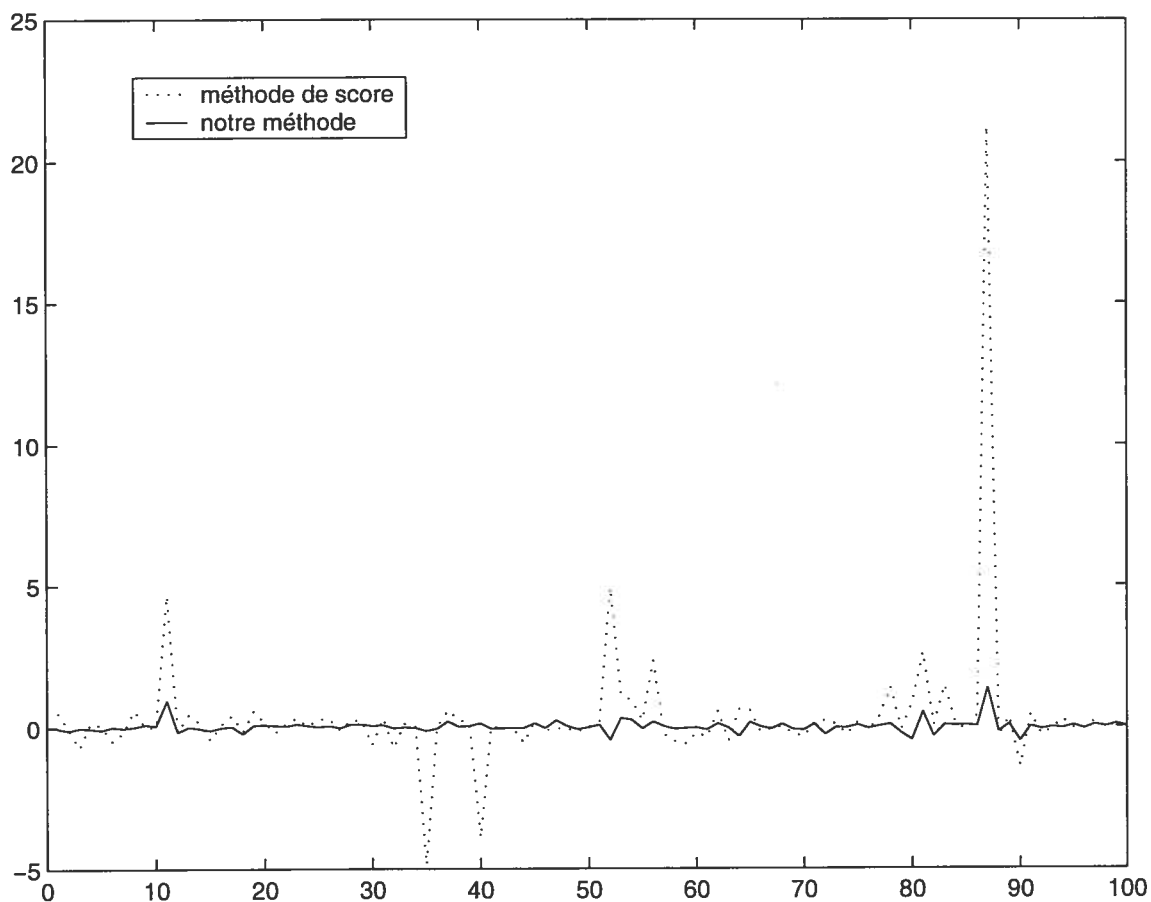


FIG. 3.4. L'estimation de  $\beta_0$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(2)$

paramètres	T	NRA(20)	NA(1)	NA(2)
$EQM(\beta_0)$	1000	1472.197087	0.012912	0.343557
	10000	20.653392	0.009796	0.019300
	100000	0.013633	0.000853	0.001587
$EQM(\beta_1)$	1000	1685.500301	0.012843	0.069925
	10000	453.126311	0.017479	0.000075
	100000	14.002361	0.038097	0.008701

TABLEAU. 3.35. Erreurs quadratiques moyennes pour un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(2)$

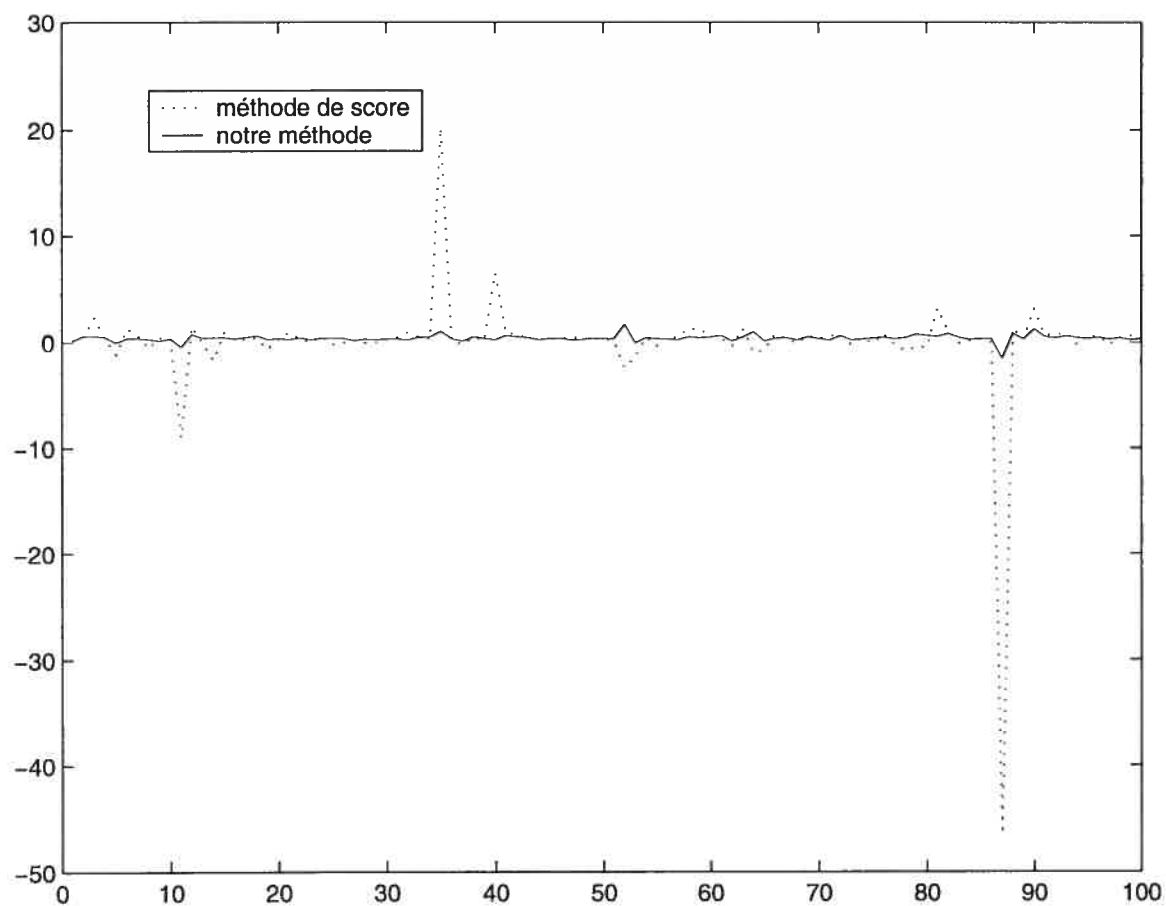


FIG. 3.5. L'estimation de  $\beta_1$  d'un modèle mal spécifié avec erreurs  $ARCH(2)$



## Chapitre 4

---

# APPLICATIONS AVEC DES DONNÉES RÉELLES

Dans ce chapitre, nous appliquons les méthodes d'estimation du modèle *ARCH* à trois séries des données réelles représentant le logarithme des rendements mensuels de l'indice *SP&500*, le logarithme des rendements mensuels pour *IBM* et le logarithme des rendements hebdomadaires de l'indice *NASDAQ*. Nous commençons par la description de chaque série, ensuite, nous allons comparer les estimateurs obtenus avec notre algorithme avec les estimateurs de la méthode de score basée sur l'algorithme de Newton-Raphson, pour chaque série de données.

Nous avons pris des données réelles parce que les modèles *ARCH* sont très importants au niveau de la théorie financière, où la dépendance temporelle de la volatilité joue un rôle fondamental. Les modèles *ARCH* sont très utilisées en finance par exemple pour la sélection de portefeuilles, pour modéliser le taux d'échange de devises étrangères, par exemple U.S.dollar vs Euro (voir [12]).

#### 4.1. DESCRIPTION DE LA SÉRIE 1

Comme application des résultats obtenus dans le chapitre 2, nous nous intéressons dans un premier temps à une série représentant le logarithme des rendements mensuels pour l'indice *SP&500*. Il y a 207 observations, de janvier 1980 à décembre 1999, et les rendements sont en pourcentages et incluent des dividendes.

Le modèle *a priori* pour estimer la série des données est un *ARCH*(1) de la forme

$$\begin{aligned}y_t &= \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \\u_t &= v_t \sqrt{h_t} \\h_t &= \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2\end{aligned}$$

avec la variable explicative  $X_t = t$  pour la série. La figure (4.1) représente cette série.

En regardant le graphique de cette série, nous observons qu'il n'existe aucune tendance, mais la variance change avec le temps, donc on peut omettre  $X_t$ , la variable explicative. Donc nous sommes rendus à un modèle plus simple de la forme suivante

$$\begin{aligned}y_t &= \beta_0 + u_t \\u_t &= v_t \sqrt{h_t} \\h_t &= \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2\end{aligned}$$

Les estimateurs obtenus pour les paramètres du modèle *ARCH*(1) en utilisant la série *SP&500* sont

paramètres	NRA(20)	NRA(30)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	-0.0120	-0.0119	-0.0118	-0.0127
$\xi$	0.0012	0.0011	0.0012	0.0011
$\alpha_1$	0.3729	0.4266	0.3320	0.4612

TABLEAU. 4.1. Paramètres estimés de la série *SP&500*

En regardant le tableau 4.1, nous constatons que les résultats de deux méthodes sont presque identiques pour estimer  $\beta_0$  et  $\xi$ . Les estimateurs trouvés avec

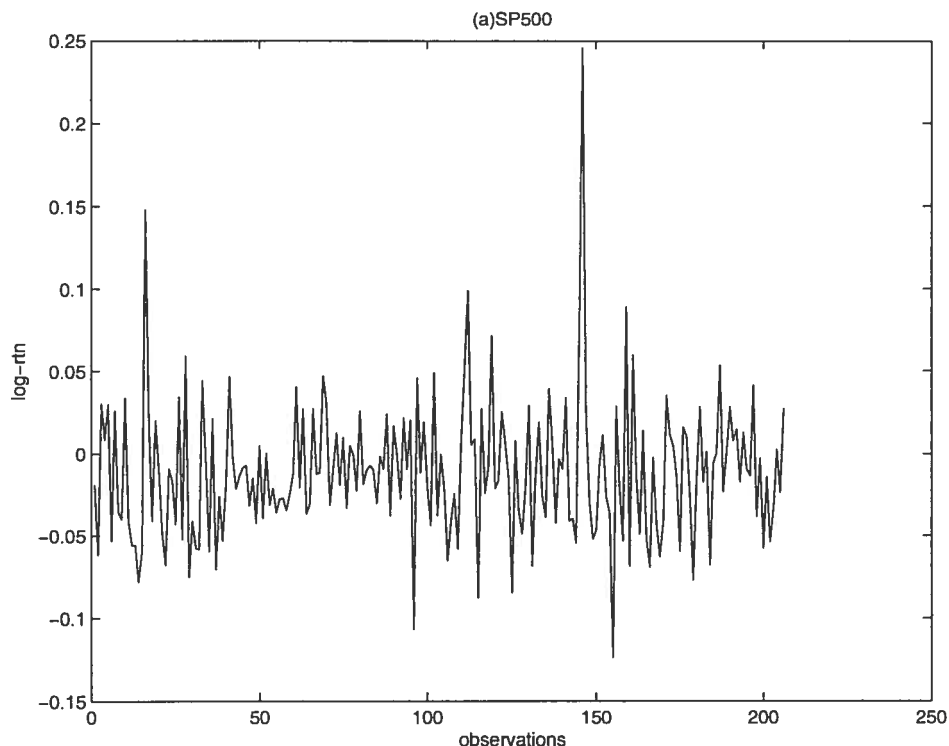


FIG. 4.1. La série des logarithmes des rendements mensuels pour l'indice *SP&500*

notre méthode pour le modèle  $ARCH(1)$  proposé, sont  $\hat{\beta}_0 = -0.0127$ ,  $\hat{\xi} = 0.0011$  et  $\hat{\alpha}_1 = 0.46$ .

## 4.2. DESCRIPTION DE LA SÉRIE 2

Dans cette partie, nous étudions une autre série des données réelles. Les données représentent le logarithme des rendements mensuels pour *IBM*. La série comporte 446 observations, de janvier 1962 à décembre 1999, et les rendements sont en pourcentages et incluent des dividendes.

Le modèle choisi pour estimer la série des données est aussi un  $ARCH(1)$  de la même forme que dans le cas antérieur, et nous avons mis ci-dessous la représentation de cette série. Nous observons que dans ce cas il n'existe aucune tendance, donc la variable  $X_t$  peut être omise.

Les estimateurs obtenus pour les paramètres du modèle  $ARCH(1)$  en utilisant la série *IBM* se trouvent dans le tableau 4.2.

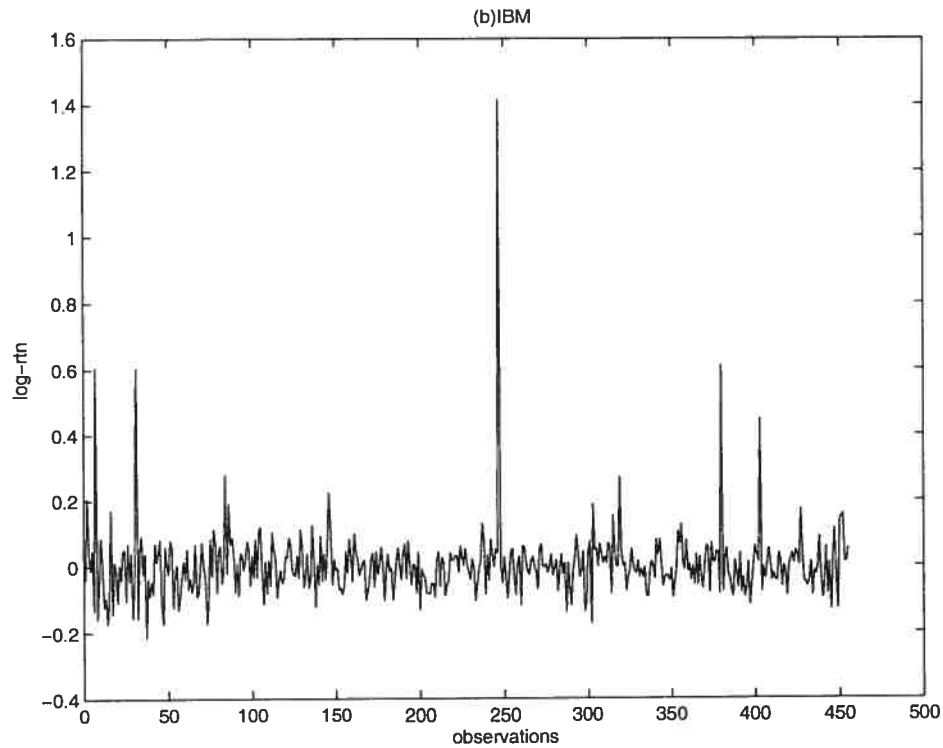


FIG. 4.2. La série des logarithmes des rendements mensuels pour l'action *IBM*

paramètres	NRA(20)	NRA(30)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	0.0036	0.0035	0.0037	0.0036
$\xi$	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120
$\alpha_1$	0.0049	0.0056	0.0058	0.0060

TABLEAU. 4.2. Paramètres estimés de la série *IBM*

Du tableau 4.2, nous constatons que les estimateurs obtenus par la méthode de score avec 30 itérations et notre algorithme avec 1 itérations sont semblables. En conclusion, nous pouvons établir le modèle *ARCH*(1)

$$y_t = 0.0036 + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = 0.012 + 0.006u_{t-1}^2$$

où  $v_t \sim i.i.dN(0, 1)$ .

### 4.3. DESCRIPTION DE LA SÉRIE 3

Dans cette dernière partie, nous étudions une série de données qui représentent le logarithme des rendements hebdomadaires pour le *NASDAQ*. La série comporte 1013 observations, de octobre 1974 à mars 2004, et les rendements sont en pourcentages et incluent des dividendes.

Le modèle choisi pour estimer la série des données est aussi un *ARCH*(1) de la même forme que dans les deux cas antérieurs, c'est à dire la matrice  $X_t$  est nulle. Nous avons mis ci-dessous la représentation graphique de cette série.

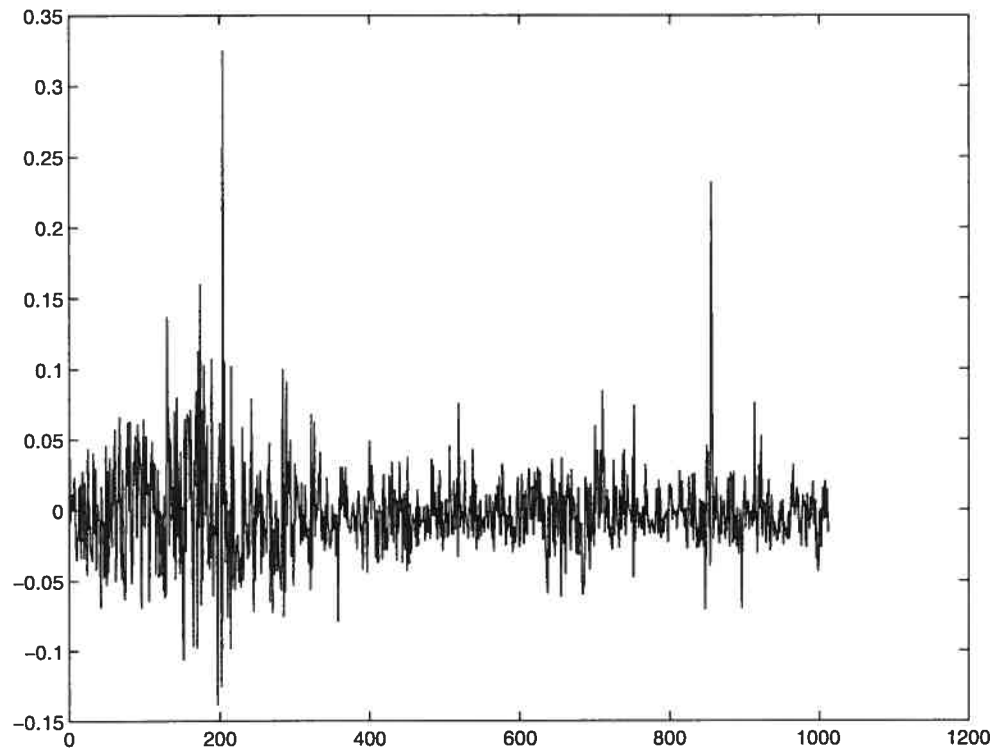


FIG. 4.3. La série des logarithmes des rendements mensuels pour l'indice *NASDAQ*

Les estimateurs obtenus pour les paramètres du modèle *ARCH*(1) en utilisant la série *IBM* sont dans le tableau 4.3.

Du tableau 4.3, nous constatons que les estimateurs obtenus par la méthode de score avec 30 itérations et notre algorithme avec 2 itérations sont semblables. Les estimateurs trouvés sont  $\hat{\beta}_0 = -0.002$ ,  $\hat{\xi} = 0.0006$  et  $\hat{\alpha}_1 = 0.57$ .

paramètres	NRA(20)	NRA(30)	NA(1)	NA(2)
$\beta_0$	-0.0018	-0.0019	-0.0023	-0.0026
$\xi$	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
$\alpha_1$	0.4681	0.5338	0.4482	0.5701

TABLEAU. 4.3. Paramètres estimés de la série *NASDAQ*

Donc, en conclusion, nous pouvons remarquer que notre méthode et la méthode de score donnent des résultats semblables. En plus, d'après ce que nous avons observé au chapitre 3, en faisant plusieurs simulations pour les modèles *ARCH*(1) avec  $v_t \sim i.i.dN(0, 1)$ , nous pourrions conclure que nos estimateurs sont plus efficaces avec les tailles de données considérées. Notons aussi que dans la littérature, voir par exemple [12], on étudie la série *SP&500* et aussi la série *IBM*, pour calculer la volatilité du logarithme des rendements mensuels. Le modèle utilisé pour cela est un modèle *GARCH*(1, 1).

À la fin de ce chapitre, nous avons fait une étude comparative de nos estimateurs avec les estimateurs déterminés en utilisant d'autres logiciels. Nous avons utilisé la série *SP&500* comme série de données, et nous avons utilisé la procédure *AUTOREG* de SAS/ETS et le code *GARCHFIT* de Matlab. Les estimateurs du modèle *ARCH*(1) se trouvent dans le tableau 4.4. En conclusion nous remarquons

paramètres	SAS	MATLAB	NA
$\beta_0$	-0.0112	-0.0116	-0.0127
$\xi$	0.0012	0.0011	0.0011
$\alpha_1$	0.4352	0.4404	0.4612

TABLEAU. 4.4. Tableau comparatif des estimateurs de la série *SP&500*

que les estimateurs trouvés avec notre méthode sont semblables aux estimateurs trouvés en utilisant les logiciels mentionnés ci-dessus.

## CONCLUSION

---

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés aux modèles *ARCH* introduits par Engle [9]. Les modèles *ARCH* sont très utiles pour décrire la dynamique de volatilité, spécifiquement dans le monde de la finance (taux d'intérêt, devises étrangères, volatilité de prix des actions). Cependant, une caractéristique est le fait que nous devons utiliser des processus *ARCH* avec un ordre assez élevé.

Nous avons développé un estimateur basé sur un algorithme linéaire, beaucoup plus simple que celui de la méthode de score d'Engle basée sur l'algorithme de Newton-Raphson. La méthode de score ne se comporte pas d'une manière efficiente tout le temps, parce que la convergence ne peut être réalisée indépendamment de la valeur de départ. Par contre, notre méthode génère des estimateurs initiaux convergents comme points de départ et l'algorithme qui est linéaire, converge rapidement, après une ou deux itérations.

Ensuite nous avons simulé des modèles *ARCH* et nous avons estimé les paramètres en utilisant les deux méthodes. Les modèles *ARCH* simulés sont

- modèles de régression avec erreurs *ARCH*

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2.$$

où  $X_t$  est une variable explicative connue.

- modèles de séries chronologiques avec erreurs *ARCH*

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2$$

où  $X_t = y_{t-1}$ .

Nous avons constaté que notre méthode performe très bien au niveau d'efficacité, après une ou deux itérations. Ce n'est pas le cas pour la méthode de score qui semble perdre l'efficacité pour des modèles *ARCH* de grand ordre, dans le cas où les  $v_t$  suivent une distribution de Student.

Ensuite, pour des modèles où la variance conditionnelle est mal spécifiée avec erreurs *ARCH* nous avons constaté que notre estimateur est convergent et l'algorithme reste stable quand on estime les paramètres de l'expression de la moyenne. Par contre l'estimateur du score n'est plus convergent et l'algorithme de Newton-Raphson ne reste plus stable dans les conditions mal spécifiées.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] KOPKA H. AND DALY P.W., *A guide to L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2 $\epsilon$* , Addison-Wesley, USA, 1995.
- [2] SEARLE S.R., *Linear Models*, 2-ème édition, New York, 1997.
- [3] COX D.R. AND HINKLEY D.V., *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, USA, 1974.
- [4] HAMILTON J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [5] DEVROYE L., *Non-Uniform Random Distribution*, Springer-Verlag, USA, 1986.
- [6] FULLER W.A., *Measurement Error Models*, Wiley, New York, 1987.
- [7] GOURIEROUX C. AND MONFORT A., *Statistique et modèles économétriques Vol.1*, Economica, Paris, 1989.
- [8] GOURIEROUX C., *Modèles ARCH et applications financières*, Economica, Paris, 1992.
- [9] ENGLE R.F., *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, *Econometrica* **50** (1982), 987-1007.
- [10] ANDERSON T.W., *Asymptotically efficient estimation of covariance matrices with linear structure*, *The Annals of Statistics* **1** (1973), 135-141.
- [11] BOLLERSLEV T., *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, *Journal of Econometrics* **31** (1986), 307-327.
- [12] TSAY R.S., *Analysis of financial time series*, New York, 2002.

## Annexe A

---

### LA MÉTHODE DE SCORE

Nous nous proposons ici de faire un court rappel de la méthode de score, utilisée par Engle [9] pour estimer un modèle *ARCH* univarié, en se basant sur les notions déjà introduites dans le chapitre 1. D'abord, rappelons-nous la forme d'un processus *ARCH*.  $u_t$  suit un processus *ARCH* d'ordre  $m$  si

$$u_t = \sqrt{h_t} v_t \quad (\text{A.0.1})$$

où  $v_t$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), avec moyenne zéro et variance unitaire, i.e.

$$E(v_t) = 0$$

$$E(v_t^2) = 1$$

et  $h_t$  suit la relation

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2. \quad (\text{A.0.2})$$

Nous avons vu aussi, que la variance non-conditionnelle d'un processus *ARCH* est donnée par

$$V(u_t) = \xi / (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_m) \quad (\text{A.0.3})$$

où

$$1 > \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \geq 0$$

et  $\xi > 0$ .

Comme nous l'avons déjà défini dans la section 1.2.1, un modèle de régression *ARCH* est de la forme

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t \quad (\text{A.0.4})$$

où  $\mathbf{x}_t$  est un vecteur des constantes et  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Nous rappelons ci-dessous un algorithme itératif pour estimer les paramètres  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\delta} = (\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_m)'$ . Pour le modèle de régression *ARCH* nous avons trouvé dans la section 1.2.3 la fonction de log-vraisemblance conditionnée sur les  $m$  premières observations

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathcal{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \\ &= (-T/2) \log(2\pi) - (1/2) \sum_{t=1}^T \log(h_t) - (1/2) \sum_{t=1}^T (y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2 / h_t \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

où

$$\boldsymbol{\theta} \equiv (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\delta}')'$$

La fonction de log-vraisemblance peut-être maximisée par rapport aux paramètres  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\delta}$ . L'algorithme pour estimer les paramètres  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\delta}$  est un algorithme itératif, appelé "l'algorithme de score". Chaque itération pour  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\delta}$  produit une estimation basée sur l'itération précédente à partir de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^{(i+1)} &= \boldsymbol{\delta}^{(i)} + [\hat{\mathbf{I}}_{\delta\delta}^{(i)}]^{-1} \frac{\partial l^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\delta}} \\ \boldsymbol{\beta}^{(i+1)} &= \boldsymbol{\beta}^{(i)} + [\hat{\mathbf{I}}_{\beta\beta}^{(i)}]^{-1} \frac{\partial l^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{I}}_{\delta\delta}^{(i)}, \hat{\mathbf{I}}_{\beta\beta}^{(i)}$  sont les matrices d'information et  $\frac{\partial l^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\delta}}, \frac{\partial l^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$  sont les premières dérivées de la fonction de log-vraisemblance calculées avec  $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$  et  $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ , les valeurs estimées pour  $\boldsymbol{\delta}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  à l'itération  $i$ . Nous utilisons aussi les notations suivantes

$$\begin{aligned} h_t &= \mathbf{z}_t' \boldsymbol{\delta} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\delta}} &= \frac{1}{2h_t} \mathbf{z}_t' \left( \frac{y_t^2}{h_t} - 1 \right) \\ \left( \frac{\partial^2 l_t}{\partial \boldsymbol{\delta} \partial \boldsymbol{\delta}'} \right) &= \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{z}_t' \mathbf{z}_t / h_t^2) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{z}_t' = (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \dots, y_{t-m}^2)$ .

La matrice d'information nous permet d'estimer  $\alpha$  et  $\beta$  séparément, sans aucune perte au niveau de l'efficacité asymptotique. De plus, chaque paramètre peut être estimé avec efficacité, basé seulement sur une estimation convergente de l'autre ([3], page 308).

La procédure d'estimation est basée sur les étapes suivantes

Étape 1. Nous estimons  $\beta$  par la méthode des moindres carrés ordinaires et nous obtenons des résidus.

Étape 2. Calculons

$$\delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} + (\bar{z}'\bar{z})^{-1}\bar{z}'f^{(i)}$$

où

$$\bar{z}_t = (1, e_{t-1}^2, e_{t-2}^2, \dots, e_{t-m}^2)/h_t^{(i)} \quad \bar{z}' = (\bar{z}'_1, \bar{z}'_2, \dots, \bar{z}'_T)$$

$$f_t^{(i)} = (e_t^2 - h_t^{(i)})/h_t^{(i)} \quad f^{(i)} = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_T^{(i)})'$$

$e_t$  -le résidu de l'itération  $i$ ,  $h_t^{(i)}$  -la variance conditionnelle estimée à l'itération  $i$ ,  $\delta^{(i)}$ -estimé de  $\delta$  à l'itération  $i$ ,  $f_t^{(i)}$ -estimé à l'itération  $i$ .

Étape 3. En utilisant  $\delta^{(i+1)}$ , nous calculons

$$\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} + \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \beta'} \right)_{\beta=\beta^{(i)}}.$$

Étape 4. Nous obtenons les résidus, en utilisant  $\beta^{(i+1)}$ . Retour à l'Étape 1.

Nous répétons la procédure itérative jusqu'à la convergence, pour obtenir l'estimateur  $\hat{\delta}$ . La dernière itération de  $\delta$  est utilisée pour obtenir la dernière itération de  $\beta$  à partir de l'Étape 3.

Sous certaines conditions, nous établissons que  $\hat{\delta}$  et  $\hat{\beta}$  ont une distribution asymptotiquement normale

$$\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta) \sim N(0, I_{\delta\delta}^{-1})$$

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \sim N(0, I_{\beta\beta}^{-1})$$

où  $I_{ww}$  est la matrice où les éléments sont donnés par  $\left( \frac{\partial^2 l}{\partial w \partial w'} \right)$ .

## Annexe B

---

### LES CODES UTILISÉS POUR LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le code qui suit nous permet d'estimer les paramètres d'un processus *ARCH*(1).

```
function [a1, b1, a2, b2] = Algo(n, y, X)
%Algo Univariate ARCH process parameter estimation.
%   Given an observed univariate series, estimate the parameters of a
%   conditional mean form and conditional variance
%   specification of ARCH form.
%Inputs:
%   n - observed series dimension
%   y - observed series
%   X - Time series regression matrix of explanatory variable
% Outputs:
%   a1, b1 - the estimated coefficients of the first iteration
%   a2, b2 - the estimated coefficients of the second iteration
h = ones(n, 1);%
X = [h X];
% The initial parameter vector 'b0'
b0 = inv(X'*X)*X'*y;%
u = y - X*b0;%
```

```

u1 = ones(n, 1);%
u1 = u(1:n-1, 1);%
u1 = [mean(u); u1];%
u2 = u1.^2;%
u4 = u2.^2;%
A = [n sum(u2);sum(u2) sum(u4)];%
d = (y-X*b0).^2;%
c = u2'*d;%
B = [sum(d) sum(c)]';
% The initial parameter vector 'a0'
a0 = inv(A)*B;
v = a0(1)*ones(n,1) + a0(2)*e2;%
v1 = 1./v;%
XKX = [(X(1:n,1).*v1)';(X(1:n,2).*v1)']*X;%
Ky = v1.*y;
% The parameter vector 'b1' - first iteration
b1 = inv(XKX)*X'*Ky;
u = y - X*b1;%
u1 = ones(n, 1);%
u1 = u(1:n-1, 1);%
u1 = [mean(u); u1];%
u2 = u1.^2;%
u4 = u2.^2;%
d1 = (y-X*b1).^2;%
v2 = v1.^2;%
ev = u2.*v2;%
ev1 = ev.*u2;%
A1 = [sum(v2) sum(ev);sum(ev) sum(ev1)];%

```

```

B1 = [sum(v2'*d1) sum(ev'*d1)]';
% The parameter vector 'a1' - first iteration
a1 = inv(A1)*B1;
% the secon iteration
z = a1(1)*ones(n,1) + a1(2)*u2;%
z1 = 1./z;%
KKX = [(X(1:n,1).*z1)';(X(1:n,2).*z1)']*X;%
Ky = z1.*y;
% The parameter vector 'b2' - second iteration
b2 = inv(KKX)*X'*Ky;
u = y - X*b2;%
u1 = ones(n, 1);%
u1 = u(1:n-1, 1);%
u1 = [mean(u); u1];%
u2 = u1.^2;%
u4 = u2.^2;%
d2 = (y-X*b2).^2;%
z2 = z1.^2;%
ez = u2.*z2;%
ez1 = ez.*u2;%
A2 = [sum(z2) sum(ez);sum(ez) sum(ez1)];%
B2 = [sum(z2'*d2) sum(ez'*d2)]';
% The parameter vector 'a2' - second iteration
a2 = inv(A2)*B2;

```

Le code qui suit nous permet d'estimer les paramètres d'un processus  $ARCH(2)$ .

```
function [a1, b1, a2, b2] = Algo2(n, y, e, X)
```

```
%Algo Univariate ARCH process parameter estimation.
```

```
% Given an observed univariate series, estimate the parameters of a
```

```

% conditional mean form and conditional variance
% specification of ARCH form.
%Inputs:
% n - observed series dimension
% y - observed series
% X - Time series regression matrix of explanatory variable(s)
% Outputs:
% a1, b1 - the estimated coefficients of the first iteration
% a2, b2 - the estimated coefficients of the second iteration

h = ones(n, 1);%
X = [h X];
% The initial parameter vector 'b0'
b0 = inv(X'*X)*X'*y;%
u = y - X*b0;%
u1 = ones(n, 1);%
u11 = ones(n, 1);%
u1 = u(1:n-1, 1);%
u11 = u(1:n-2, 1);%
u1 = [mean(u); u1];%
u11 = [mean(u); mean(u); u11];%
u2 = u1.^2;%
u22 = u11.^2;%
u4 = u2.^2;%
u44 = u22.^2;%
A = [n sum(u2) sum(u22); sum(u2) sum(u4) sum(u2'*u22);
sum(u22) sum(u22'*u22) sum(u4)];%
d = (y-X*b0).^2;%

```



```

c = u2'*d;%
c1 = u22'*d;%
B = [sum(d) sum(c) sum(c1)]';%
% The initial parameter vector 'a0'
a0 = inv(A)*B;
v = a0(1)*ones(n,1) + a0(2)*u2 +a0(3)*u22;%
v1 = 1./v;%
KKX = [(X(1:n,1).*v1)';(X(1:n,2).*v1)']*X;%
Ky = v1.*y;
% The parameter vector 'b1' - first iteration
b1 = inv(KKX)*X'*Ky;
u = y -X*b1;%
u1 = ones(n, 1);%
u11 = ones(n, 1);%
u1 = u(1:n-1, 1);%
u11 = u(1:n-2, 1);%
u1 = [mean(u); u1];%
u11 = [mean(u); mean(u); u11];%
u2 = u1.^2;%
u22 = u11.^2;%
u4 = u2.^2;%
u44 = u22.^2;%
d1 = (y-X*b1).^2;%
v2 = v1.^2;%
ev = u2.*v2;%
evv = u22.*v2;%
ev1 = ev.*u2;%
evv1 = evv.*u22;%

```

```

evr = ev.*u22;%
A1 = [sum(v2) sum(ev) sum(evv);sum(ev) sum(ev1) sum(evr);
      sum(evv) sum(evr) sum(evv1)];%
B1 = [sum(v2'*d1) sum(ev'*d1) sum(evv'*d1)]';%
% The parameter vector 'a1' - first iteration
a1 = inv(A1)*B1;
% the secon iteration
z = a1(1)*ones(n,1) + a1(2)*u2 +a1(3)*u22;%
z1 = 1./z;%
XKX = [(X(1:n,1).*z1)';(X(1:n,2).*z1)']*X;%
Ky = z1.*y;
% The parameter vector 'b2' - second iteration
b2 = inv(XKX)*X'*Ky;
u = y - X*b2;%
u1 = ones(n, 1);%
u11 = ones(n, 1);%
u1 = u(1:n-1, 1);%
u11 = u(1:n-2, 1);%
u1 = [mean(u); u1];%
u11 = [mean(u); mean(u);
u11];%
u2 = u1.^2;%
u22 = u11.^2;%
u4 = u2.^2;%
u44 = u22.^2;%
d2 = (y-X*b2).^2;%
z2 = z1.^2;%
ez = u2.*z2;%

```

```

ezz = u22.*z2;%
ez1 = ez.*u2;%
ezz1 = ezz.*u22;%
ezr = ez.*u22;%
A2 = [sum(z2) sum(ez) sum(ezz);sum(ez) sum(ez1) sum(ezr);
      sum(ezz) sum(ezr) sum(ezz1)];%
B2 = [sum(z2'*d2) sum(ez'*d2) sum(ezz'*d2)]';
% The parameter vector 'a2' - second iteration
a2 = inv(A2)*B2;

```

Le code qui suit nous permet d'estimer les paramètres d'un processus *ARCH*(3).

```

function [a1, b1, a2, b2] = algoritm3(n, y, X)
%Algo Univariate ARCH process parameter estimation.
% Given an observed univariate series, estimate the parameters of a
% conditional mean form and conditional variance
% specification of ARCH form.
%Inputs:
% n - observed series dimension
% y - observed series
% X - Time series regression matrix of explanatory variable(s)
% Outputs:
% a1, b1 - the estimated coefficients of the first iteration
% a2, b2 - the estimated coefficients of the second iteration

h = ones(n, 1);
X = [h X];
% The initial parameter vector 'b0'
b0 = inv(X'*X)*X'*y;
u = y - X*b0;

```

```

u1 = ones(n, 1); u11 = ones(n, 1); u111 = ones(n, 1);
u1 = u(1:n-1, 1); u11 = u(1:n-2, 1); u111 = u(1:n-3, 1);
u1 = [mean(u); u1]; u11 = [mean(u); mean(u); u11];
u111 = [mean(u); mean(u); mean(u); u111];
u2 = u1.^2; u22 = u11.^2; u222 = u111.^2;
u4 = u2.^2; u44 = u22.^2; u444 = u222.^2;
A = [n sum(u2) sum(u22) sum(u222);
      sum(u2) sum(u4) sum(u2'*u22) sum(u2'*u222);
      sum(u22) sum(u22'*u2) sum(u44) sum(u22'*u222);
      sum(u222) sum(u222'*u2) sum(u222'*u22) sum(u444)];
d = (y-X*b0).^2;
c = u2'*d; c1 = u22'*d; c2 = u222'*d;
B = [sum(d) sum(c) sum(c1) sum(c2)]';
% The initial parameter vector 'a0'
a0 = inv(A)*B;%
v = a0(1)*ones(n,1) + a0(2)*u2 + a0(3)*u22
+a0(4)*u222;%
v1 = 1./v;%
XKX = [(X(1:n,1).*v1)'; (X(1:n,2).*v1)']*X;
Ky = v1.*y;
% The parameter vector 'b1' - first iteration
b1 = inv(XKX)*X'*Ky;%
u = y -X*b1;
u1 = ones(n, 1); u11 = ones(n, 1); u111 = ones(n, 1);
u1 = u(1:n-1, 1); u11 = u(1:n-2, 1); u111 = u(1:n-3, 1);
u1 = [mean(u); u1]; u11 = [mean(u); mean(u); u11];
u111 = [mean(u); mean(u); mean(u); u111];
u2 = u1.^2; u22 = u11.^2; u222 = u111.^2;

```

```

u4 = u2.^2;u44 = u22.^2; u444 = u222.^2;
d1 = (y-X*b1).^2;
v2 = v1.^2;
ev = u2.*v2;evv = u22.*v2;evvv = u222.*v2;
ev1 = ev.*u2;evv1 = evv.*u22;evvv1 = evvv.*u222;
evr = ev.*u22;evrp = ev.*u222;evvrp = evv.*u222;
A1 = [sum(v2) sum(ev) sum(evv) sum(evvv);
      sum(ev) sum(ev1) sum(evr) sum(evrp);
      sum(evv) sum(evr) sum(evv1) sum(evvvp);
      sum(evvv) sum(evrp) sum(evvvp) sum(evvvv)];
B1 = [sum(v2'*d1) sum(ev'*d1) sum(evv'*d1) sum(evvv'*d1)]';
% The parameter vector 'a1' - first iteration
a1 = inv(A1)*B1;
% the secon iteration
z = a1(1)*ones(n,1) + a1(2)*u2 +a1(3)*u22;
z1 = 1./z;
XKX = [(X(1:n,1).*z1)';(X(1:n,2).*z1)']*X;
Ky = z1.*y;
% The parameter vector 'b2' - second iteration
b2 = inv(XKX)*X'*Ky;%
u = y - X*b2;%
u1 = ones(n, 1);u11 = ones(n, 1); u111 = ones(n, 1);
u1 = u(1:n-1, 1); u11 = u(1:n-2, 1); u111 = u(1:n-3, 1);
u1 = [mean(u); u1]; u11 = [mean(u); mean(u); u11];
u111 = [mean(u); mean(u); mean(u); u111];
u2 = u1.^2;u22 = u11.^2;u222 = u111.^2;
u4 = u2.^2;u44 = u22.^2; u444 = u222.^2;
d2 = (y-X*b2).^2;

```

```

z2 = z1.^2;
ez = u2.*z2;ezz = u22.*z2;ezzz = u222.*z2;
ez1 = ez.*u2;ezz1 = ezz.*u22;ezzz1 = ezzz.*u222;
ezr = ez.*u22;ezrp = ez.*u222;ezzrp = ezz.*u222;
A2 = [sum(z2) sum(ez) sum(ezz) sum(ezzz);
      sum(ez) sum(ez1) sum(ezr) sum(ezrp);
      sum(ezz) sum(ezr) sum(ezz1) sum(ezzrp);
      sum(ezzz) sum(ezrp) sum(ezzrp) sum(ezzz1)];
B2 = [sum(z2'*d2) sum(ez'*d2) sum(ezz'*d2) sum(ezzz'*d2)]';
% The parameter vector 'a2' - second iteration
a2 = inv(A2)*B2;

```

Le code qui suit nous permet de simuler un processus *ARCH*(1)

```

function [ y , e ] = genARCH(n, alpha0, alpha1, beta0,
beta1,distribution)
%genARCH Univariate ARCH process simulation.
% The above equations are examples of the following general
% AR(1)/ARCH(1) form:
%
%   y(t) =  beta0 + beta1*y(t-1) + e(t)
%   e(t) =  v(t)*h(t);
%   h(t) =  alpha0 + alpha1*e(t-1)^2
%The conditional mean is of AR(1) form and conditional variance
%of ARCH(1) form.
% Input:
%   n - generated series dimension
%   beta0 - conditional mean constant
%   beta1 - conditional mean AR coefficient
%   alpha0 - conditional variance constant

```

```

% alpha1 - Conditional variance coefficients for lagged squared residual.
% distribution - Distribution of innovations must be GAUSSIAN or STUDENT
% Outputs:
% y - an AR(1) series with ARCH(1) innovations
% e - ARCH innovations
global y e switch upper(distribution)
    case 'GAUSSIAN'
        % v(t) are i.i.d. Gaussian deviates ~ N(0,1) distributed.
        v = randn(n, 1);
    case 'STUDENT'
        %v(t) are Student with 5 degrees of freedom
        v = sqrt(3/5)*trnd(5, n, 1);
    otherwise
        error(' Distribution of innovations must be
            ''Gaussian'' or ''Student''.')
end
e = ones(n, 1);%
y = ones(n, 1);%
h = ones(n, 1);%
e(1) = alpha0/(1-alpha1);%
y(1) = beta0/(1-beta1);%
for i = 2:n
    h(i) = alpha0 + alpha1*(e(i-1))^2;
    e(i) = sqrt(h(i))*v(i);
    y(i) = beta0 + beta1*y(i-1) + e(i);
end

```

Le code utilisé pour la méthode de score d'Engle basé sur l'algorithme de Newton-Raphson.

```

## Copyright (C) 1995, 1996, 1997 Kurt Hornik
##
## This file is part of Octave.
##
## Octave is free software; you can redistribute it and/or modify it
## under the terms of the GNU General Public License as published by
## the Free Software Foundation; either version 2, or (at your option)
## any later version.

## Fit an ARCH regression model to the time series @var{y} using the
## scoring algorithm in Engle's original ARCH paper. The model is
##
## @example
##  $y(t) = b(1) * x(t,1) + \dots + b(k) * x(t,k) + e(t),$ 
##  $h(t) = a(1) + a(2) * e(t-1)^2 + \dots + a(p+1) * e(t-p)^2$ 
## @end example

## Optionally, one can specify the number of iterations @var{iter}, the
## updating factor @var{gamma}, and initial values @math{a_0} and
## @math{b_0} for the scoring algorithm.

## Author: KH <Kurt.Hornik@ci.tuwien.ac.at> ## Description: Fit
anARCH regression model

function [a, b] = archfit1(y, X, p, ITER, gamma, a0, b0)
    N = length(X);
    h = ones(N, 1);
    X = [h X];

```



```

if ((nargin < 3) || (nargin == 6) || (nargin > 7))
    error('archfit1(y, X, p, ITER, gamma, a0, b0)');
end

if ( ~(isvector(y)))
    error ('arch_test: y must be a vector');
end

T = length (y);
y = reshape (y, T, 1);
[rx, cx] = size (X);
if ((rx == 1) && (cx == 1))
    X = autoreg_matrix (y, X);
elseif ((rx ~= T))
    error ('archtest1: either rows (X) == length (y), or X is a scalar');
end

[T, k] = size (X);
if (nargin==7)
    a = a0;
    b = b0;
    e = y - X*b;
else
    [b, v_b, e] = ols(y, X);
    a = [v_b, (zeros(1, p))]' ;
    if( nargin < 5 )
        gamma = 0.1;
        if ( nargin < 4)

```

```

            ITER = 50;
        end
    end
end
esq = e.^2;
Z = autoreg_matrix (esq, p);
for i = 1 : ITER;
    h = Z * a;
    tmp = esq ./ h.^2 - 1 ./ h;
    s = 1 ./ h(1:T-p);
    for j = 1 : p;
        s = s - a(j+1) * tmp(j+1:T-p+j);
    end
    r = 1 ./ h(1:T-p);
    for j=1:p;
        r = r + 2 * h(j+1:T-p+j).^2 .* esq(1:T-p);
    end
    r = sqrt (r);
    X_tilde = X(1:T-p, :) .* (r * ones (1,k));
    e_tilde = e(1:T-p) .* s ./ r;
    delta_b = inv (X_tilde' * X_tilde) * X_tilde' * e_tilde;
    b = b + gamma * delta_b;
    e = y - X * b;
    esq = e.^2;
    Z = autoreg_matrix (esq, p);
    h = Z * a;
    f = esq ./ h - ones(T,1);
    Z_tilde = Z ./ (h * ones (1, p+1));

```

```
delta_a = inv (Z_tilde' * Z_tilde) * Z_tilde' * f;  
a      = a + gamma * delta_a;  
end
```