

2m11.3095.1

11464044
v.011

Université de Montréal

Étude du diagramme de bifurcation d'un système
prédateur-proie

par

Caroline Coutu

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

avril 2003



QA

3

US/

2003

v.011

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Étude du diagramme de bifurcation d'un système
prédateur-proie**

présenté par

Caroline Coutu

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Jacques Bélair

(président-rapporteur)

Christiane Rousseau

(directeur de recherche)

Sabin Lessard

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

22 août 2003

RÉSUMÉ

Il existe différents types de systèmes prédateur-proie modélisant divers comportements biologiques. Nous considérons le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x))\end{aligned}$$

avec $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}$, appelée dans la littérature la fonction Holling de type III. De plus, a , m , r , k , d et c sont des constantes positives et b , une constante négative. Le diagramme de bifurcation pour cette fonction $p(x)$ particulière n'avait pas encore été étudié. Nous explorons la structure du système afin de déterminer les facteurs biologiques dont elle tient compte. Aussi, nous avons déterminé les principales surfaces de bifurcation des points singuliers. Nous suggérons, au chapitre quatre, un diagramme de bifurcation que nous conjecturons comme étant complet. Nous commentons aussi les différents portraits de phase du système.

Mots clés : Système dynamique, Bifurcation, Système prédateur-proie, cycles limites, Bifurcation de Hopf.

ABSTRACT

There exist different types of predator-prey systems modelling different types of biological behaviour. We consider the following system of differential equations :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x))\end{aligned}$$

with $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$, named Holling's type III function. The constants a , m , r , k , d and c are positive and the constant b is negative. The bifurcation diagram for this particular $p(x)$ has not been studied yet. We explain the structure of this system from a biological point of view. Also, we determine the main bifurcations of the singular points. Finally we propose a bifurcation diagram which we conjecture to be complete. We discuss the different phase portraits for the system.

Key words : Dynamical system, Bifurcation, Predator-prey system, Limit cycle, Hopf bifurcation.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Christiane Rousseau et Zhu Huaiping pour m'avoir proposé ce projet. Je tiens, plus particulièrement, à remercier ma directrice Christiane Rousseau pour sa patience et sa générosité dans son temps et son enseignement. Par ses commentaires et son appui, elle m'a guidée dans ce projet. Je la remercie aussi de même que le département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal pour le soutien financier qu'ils m'ont donné pendant mes études aux cycles supérieurs.

Ensuite, je tiens à remercier mes parents, mes amis et mon copain pour le soutien et les encouragements qu'ils m'ont apportés.

Finalement, je veux remercier les professeurs de mathématiques qui m'ont enseigné au cours de mes études secondaires et collégiales. Ils ont éveillé en moi cet intérêt pour les mathématiques et le désir de le partager avec autrui.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Remerciements.....	v
Liste des figures.....	viii
Liste des tableaux.....	xi
Introduction.....	1
Chapitre 1. Signification du modèle prédateur-proie utilisé.....	4
1.1. Système Lotka-Volterra.....	4
1.2. Système prédateur-proie modifié.....	7
Chapitre 2. Étude du nombre de points singuliers.....	14
2.1. Simplification du système prédateur-proie modifié.....	14
2.2. Détermination du nombre de points singuliers.....	17
2.3. Surfaces de bifurcations pour les points fixes.....	21
2.4. Détermination du nombre de points singuliers faisant partie de notre domaine $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ selon les régions délimitées par les surfaces de bifurcations.....	27
Chapitre 3. Étude du type des points singuliers.....	35

3.1. Étude du point singulier $(1, 0)$ lorsque les paramètres ne sont pas sur la surface S_1 et du point singulier $(0, 0)$	35
3.2. La bifurcation de Hopf.....	37
3.3. Étude du point singulier $(1, 0)$ lorsque les paramètres sont sur la surface S_1	50
3.4. Étude du point singulier, autre que $(1, 0)$, lorsque les paramètres sont sur la surface S_1 et que $\beta < -2$	57
3.5. Étude du point singulier double lorsque les paramètres sont sur S_d et que $\beta < -2$	65
Chapitre 4. Modèle suggéré pour le diagramme de bifurcation et les portraits de phase de notre système.....	78
4.1. Résumé des informations déjà calculées	78
4.2. Bifurcation de boucle homoclinique	83
4.3. Diagramme de bifurcation du système.....	85
4.4. Interprétation biologique de certains portraits de phase.....	98
Conclusion.....	102
Bibliographie	104

LISTE DES FIGURES

1.2.1	Graphique de l'équation logistique pour les paramètres $r=2$ et $k=10$..	8
1.2.2	Portrait de phase de l'équation logistique.....	9
1.2.3	Graphique de la fonction de réponse des prédateurs, $p(x)$, pour $b > 0$.	10
1.2.4	Graphique de la fonction de réponse des prédateurs, $p(x)$, pour $b < 0$.	11
1.2.5	Graphique de la fonction de réponse des prédateurs pour les paramètres suivants : $a = 4$, $b = -3$ et $m = 1$	12
2.2.1	Nombre possible de points singuliers.....	18
2.3.1	Graphique du domaine des paramètres α et β admissibles.....	24
2.3.2	Résumé de la position des surfaces S_1 , S_d et S_∞	26
2.4.1	Graphique de $P(X)$ illustrant la signification de point à gauche et de point à droite.....	27
2.4.2	Résumé du nombre de points singuliers.....	32
3.2.1	Graphique de $Q_\beta(\alpha)$ pour $0 > \beta > -4$	41
3.2.2	Graphique de $Q_\beta(\alpha)$ pour $\beta = -4$	42
3.2.3	Graphique de $Q_\beta(\alpha)$ pour $\beta < -4$	42
3.2.4	Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $0 > \beta > -2$	43
3.2.5	Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $\beta = -2$	44
3.2.6	Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $-2 > \beta > -4$	44
3.2.7	Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $\beta = -4$	45
3.2.8	Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $\beta < -4$	45
3.2.9	Graphique des surfaces de bifurcation pour $0 > \beta > -2$	46

3.2.10	Graphique des surfaces de bifurcation pour $\beta = -2$	47
3.2.11	Graphique des surfaces de bifurcation pour $-2 > \beta \geq -3$	47
3.2.12	Graphique des surfaces de bifurcation pour $-3 > \beta > -4$	48
3.2.13	Graphique des surfaces de bifurcation pour $\beta = -4$	48
3.2.14	Graphique des surfaces de bifurcation pour $\beta < -4$	49
3.3.1	Col-nœud (point double) en $(1, 0)$ lorsque $0 > \beta > -2$	54
3.3.2	Col-nœud (point double) en $(1, 0)$ lorsque $\beta < -2$	55
3.3.3	Nœud attractif (point triple) en $(1, 0)$ lorsque $\beta = -2$	56
3.4.1	Endroits où la trace de $M_{(x^*, y^*)}$ s'annule.	59
3.4.2	Endroits où $\beta^3 + 7\beta^2 + 11\beta + 3 = 0$	63
3.4.3	Résumé du comportement local des cycles limites prédit par la théorie.	65
3.5.1	Bifurcation de Bogdanov-Takens pour $b > 0$	70
3.5.2	Graphique des surfaces de bifurcations.	76
3.5.3	Diagramme de bifurcation avec portraits de phase dans les régions ouvertes pour le cusp d'ordre trois.....	77
4.2.1	Boucle homoclinique.	83
4.2.2	Types de boucles homocliniques.....	83
4.2.3	Diagramme de bifurcation pour la boucle homoclinique attractive. ...	84
4.2.4	Diagramme de bifurcation pour la boucle homoclinique répulsive.	84
4.2.5	Diagramme de bifurcation pour la boucle homoclinique de codimension deux.	85
4.3.1	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $0 > \beta > -2$	86
4.3.2	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta = -2$	87

4.3.3	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $-2 > \beta \geq -3$.	88
4.3.4	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $-3 > \beta > -4$.	89
4.3.5	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta = -4$.	91
4.3.6	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $-4 > \beta > \beta^*$.	92
4.3.7	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta = \beta^*$.	93
4.3.8	Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta < \beta^*$.	94
4.3.9	Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 0.	95
4.3.10	Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 1.	96
4.3.11	Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 2.	97
4.3.12	Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 3.	97
4.4.1	Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 0 dont les régions sont identifiées selon les trois tendances de l'évolution des populations.	99

LISTE DES TABLEAUX

0.0.1	Fonctions de Holling	1
2.4.1	Nombre de points singuliers pour la région $0 > \beta > -2$	33
2.4.2	Nombre de points singuliers pour la région $\beta = -2$	33
2.4.3	Nombre de points singuliers pour la région $\beta < -2$	34
3.1.1	Résumé du type de point singulier pour $(1, 0)$ lorsque les paramètres sont pris en dehors de S_1	37
4.1.1	Résumé de l'information sur les points singuliers lorsque les paramètres sont sur S_1	81
4.1.2	Résumé de l'information sur les points singuliers lorsque les paramètres sont sur S_d	82
4.1.3	Résumé de l'information sur les points singuliers lorsque les paramètres sont pris hors des surfaces S_1 et S_d	83

INTRODUCTION

Parmi les modèles, sous forme de systèmes d'équations différentielles, décrivant l'évolution de deux populations on distingue les modèles prédateur-proie. Le premier modèle de ce type a été donné par A. Lotka et V. Volterra. Depuis, on raffine ces systèmes dynamiques afin qu'ils soient les plus représentatifs possible de la réalité des populations étudiées. Notamment, ils doivent tenir compte des caractéristiques particulières des espèces.

Le modèle que nous avons choisi d'étudier fait partie de la famille des modèles de la forme 0.0.1 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x), \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x)), \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

avec r , k , c et d des constantes positives. Pour ces modèles, nous considérons différentes fonctions de Holling $p(x)$. Dans le tableau qui suit, nous résumons les fonctions déjà étudiées.

Types	Fonctions	Référence
I	$p(x) = ax$	étude présentée dans [Ba]
II	$p(x) = \frac{bx}{1+ax}$	étude présentée dans [Ba]
III	$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$ avec $a > 0$ et $m > 0$	ce mémoire présente le cas où $b < 0$
IV	$p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+1}$ avec $a > 0$ et $m > 0$	étude présentée dans l'article [ZCW]

TAB. 0.0.1. Fonctions de Holling

Nous remercions Zhu Huaiping pour nous avoir suggéré d'étudier le cas de la fonction de Holling de type III, lequel n'avait pas été développé jusqu'à maintenant. Ainsi, dans ce mémoire, nous étudions le système prédateur-proie de la forme 0.0.1 pour lequel nous prenons pour $p(x)$ la fonction de Holling de type III :

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1},$$

avec m et a des constantes positives et b , une constante quelconque. Toutefois, dans ce projet, nous considérons le cas $b < 0$. La première équation du système 0.0.1 décrit l'évolution de la population des proies et la deuxième, l'évolution des prédateurs.

Le modèle que nous avons choisi de regarder est naturel : la fonction de Holling de type III reflète à la fois une faible réponse des prédateurs lorsque le nombre de proies est faible et un avantage de groupe lorsque le nombre de proies devient élevé alors que la linéarité en y reflète l'absence de compétition entre les prédateurs.

Dans un premier temps, il est intéressant de comprendre le système d'un point de vue biologique. En effet, sa structure tient compte de certaines caractéristiques fondamentales des relations entre les membres d'une population et entre ceux de populations différentes. Ainsi, au chapitre un, nous commencerons par décrire la signification biologique des fonctions et des constantes du système 0.0.1.

Par la suite, nous débiterons l'analyse mathématique. Nous calculerons d'abord le nombre de points singuliers en nous assurant qu'ils sont dans le premier quadrant c'est-à-dire $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Ce faisant, nous trouverons certaines des surfaces de bifurcation de l'espace des paramètres. Nous aurons alors un portrait sommaire du diagramme de bifurcation et du nombre de points singuliers présents dans chacune des régions délimitées par les surfaces.

Au chapitre trois, nous déterminerons la bifurcation de Hopf et nous étudierons le type des points singuliers qui ont été trouvés au chapitre précédent. Lors de l'examen de ces points singuliers, nous avons obtenu, pour des valeurs particulières de paramètres, une bifurcation de Bogdanov-Takens et un cusp d'ordre trois. À l'aide de ces considérations, nous avons une meilleure idée du diagramme de bifurcation et des modèles de portraits de phase de notre système.

Finalement, au chapitre quatre, nous dresserons un tableau d'ensemble en résumant toute l'information que nous avons obtenue par l'étude du type des points singuliers et des principales bifurcations du système. À l'aide de cette information, nous suggérons un modèle pour le diagramme de bifurcation et les portraits de phase propres à notre système. Nous présenterons aussi une interprétation biologique de certains plans de phase.

Notre étude est originale. Nous croyons que le diagramme de bifurcations que nous proposons est complet. Dans la conclusion, nous expliquerons en détail ce qu'il resterait à prouver pour montrer que c'est bien le cas.

Chapitre 1

SIGNIFICATION DU MODÈLE PRÉDATEUR-PROIE UTILISÉ

Ce sont A. Lotka et V. Volterra qui, les premiers, ont suggéré un modèle sous la forme d'un système d'équations différentielles pour décrire l'interaction entre deux populations dont l'une est le prédateur et l'autre la proie. Le système de Lotka-Volterra, qui repose sur des hypothèses simples, a pu être étudié complètement du point de vue qualitatif. Par contre, ce comportement, sous l'aspect biologique, n'est pas très représentatif de la réalité. En conséquence, on tente de le raffiner en considérant de nouveaux facteurs. Ces modèles sont classifiés sous le nom de systèmes prédateur-proie.

Ainsi, dans le présent chapitre, nous décrirons d'abord le modèle classique de Lotka-Volterra pour ensuite présenter le système prédateur-proie étudié dans ce travail.

1.1. SYSTÈME LOTKA-VOLTERRA

Le premier modèle de système prédateur-proie suggéré par A. Lotka et V. Volterra pour décrire l'interaction entre deux populations fut le suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy.\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

La première équation est propre à la population des proies et la deuxième à celle des prédateurs. Les variables x et y représentent respectivement la population des proies et celle des prédateurs. Dans ce système, la constante a est le taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs, la constante b représente le taux de consommation de proies par les prédateurs et la constante c donne le taux de mortalité naturel des prédateurs. Comme on pourrait s'en douter ce n'est pas toute la biomasse des proies qui sera transformée en prédateurs ; elle le sera dans une proportion de d/b comme il est dit dans [Ba].

Comme on l'a mentionné plus haut, ce système est fondé sur de simples hypothèses. Elles sont des idéalizations des relations entre les membres d'une même espèce et entre les membres d'espèces différentes. Ainsi, on suppose qu'en l'absence de prédateurs, la population des proies croît exponentiellement alors qu'en l'absence de proies, la population des prédateurs décroît de manière exponentielle jusqu'à disparaître complètement. De plus, il y a une dépendance linéaire entre le nombre total de proies mangées par les prédateurs par unité de temps et la densité de chacune des populations. On admet aussi que la portion de la biomasse des proies qui est convertie en biomasse des prédateurs est constante. Et enfin, on suppose qu'aucun autre facteur n'affecte la dynamique de ce système.

Par ailleurs, on remarque que dans la première équation, si on pose $y = 0$, on obtient l'évolution de la population des proies lorsque les prédateurs n'interviennent pas :

$$\frac{dx}{dt} = ax. \quad (1.1.2)$$

On observe donc un accroissement exponentiel de la population des proies.

En procédant de manière analogue pour la deuxième équation, on obtient en posant $x = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = -cy. \quad (1.1.3)$$

En l'absence de proies, la population des prédateurs décroît exponentiellement jusqu'à l'extinction de l'espèce.

On remarque, dans les deux équations du système, la présence d'un terme mixte c'est-à-dire qu'il dépend à la fois de x et de y . Il représente les rencontres entre les proies et les prédateurs. Bien entendu, son impact diffère selon la population considérée. Dans le cas des proies, $-bxy$ est l'influence qu'a la part des proies qui sont mangées par les prédateurs sur le taux de variation des proies. L'hypothèse de la dépendance linéaire entre le nombre total de proies mangées par les prédateurs par unité de temps et la densité de chacune des populations intervient ici. D'après la forme du terme, il n'y a pas de saturation du nombre de proies consommées par les prédateurs. Si deux fois plus de proies sont disponibles, les prédateurs en mangeront deux fois plus. Comme le signe de ce terme l'indique, les rencontres entre les deux espèces sont synonymes d'une diminution du taux de variation de la population des proies. Dans le cas des prédateurs, dxy est la part des proies qui contribuera à l'augmentation du taux de variation de la population de prédateurs. On constate donc que l'effet de ce terme sur l'évolution des populations est complètement opposé selon la population considérée.

Toutefois, bien que ce système permet d'acquérir une importante compréhension du comportement qualitatif des populations, il n'est pas très adéquat pour décrire une situation réelle sur le plan biologique. Par conséquent, on cherche à le modifier pour tenir compte de plus de facteurs d'interactions entre les populations. On veut aussi le raffiner afin de rendre les diverses parties des équations plus conformes à la réalité d'une population biologique. Dans la section qui suit, on présentera une modification de ce système.

1.2. SYSTÈME PRÉDATEUR-PROIE MODIFIÉ

Le système prédateur-proie qu'on considèrera est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-d + cp(x)).\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

avec r , k , d et c des constantes positives. Tout comme dans le cas du système Lotka-Volterra, la première équation s'applique à la population des proies et la deuxième, à celle des prédateurs. Ainsi, x représente la population des proies et y celle des prédateurs. Ce modèle est appelé par certains le modèle de type Gause et par d'autres, le système de Rosenzweig-MacArthur.

Dans ce modèle, r est le taux de croissance de la population des proies en l'absence de prédateurs et d représente le taux de mortalité naturel des prédateurs. La constante k , quant à elle, est la capacité d'individus que le milieu peut supporter sans qu'il y ait une pénurie de ressources. La fonction $p(x)$, appelée la fonction de réponse des prédateurs, rend compte de la consommation de proies faite par ceux-ci. Ici, on considère la fonction Holling de type III suivante :

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1} \quad \text{avec } m > 0 \text{ et } a > 0\tag{1.2.2}$$

qu'on étudiera plus loin. De plus, la conversion des proies en prédateurs se fait avec une efficacité de c , qui est une constante de proportionnalité. Ainsi, le système prédateur-proie modifié qu'on étudie est :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{m y x^2}{ax^2 + bx + 1}, \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(-d + \frac{cmx^2}{ax^2 + bx + 1}\right).\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

Ce système possède la même structure que celui de Lotka-Volterra cependant les considérations biologiques dont il tient compte diffèrent.

Tout d'abord, comme dans le système Lotka-Volterra, en posant $y = 0$ dans la première équation du système 1.2.1, on obtient l'évolution de la population des proies lorsqu'aucune prédation n'est présente :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ &= rx - \frac{rx^2}{k}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Cette équation porte le nom d'équation logistique en raison de sa forme particulière. Elle modélise le fait que la population des proies ait des ressources extérieures limitées. La restriction de la quantité de nourriture et de la dimension de l'habitat sont des exemples de limitations pour la population comme il est mentionné dans [Ba]. Ces restrictions créent une compétition entre les proies au sein même de l'espèce. Ceci implique que la fécondité et la mortalité chez celles-ci dépendent de la taille de la population. La croissance de la population sera influencée par la grosseur de la population comme le montre le graphique 1.2.1. On remarque que $\frac{dx}{dt}$ augmente jusqu'à ce que la population atteigne une taille critique à partir de laquelle $\frac{dx}{dt}$ diminue. La population converge donc vers k .

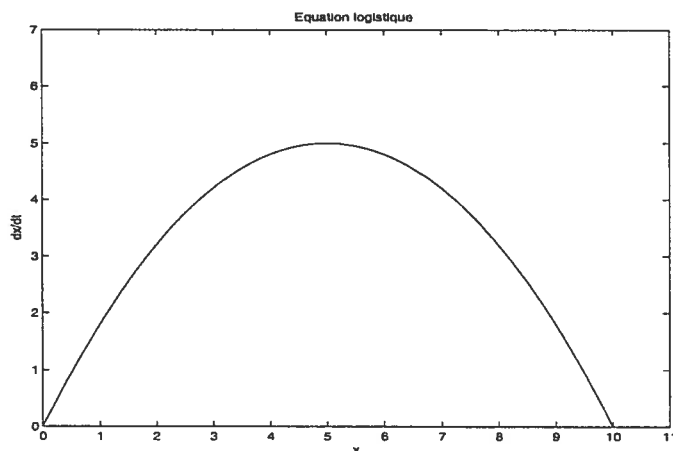


FIG. 1.2.1. Graphique de l'équation logistique pour les paramètres $r=2$ et $k=10$.

Dans l'équation logistique, le premier terme rx représente la croissance de la population lorsqu'il y a aucune restriction sur les ressources. Tandis que le deuxième $\frac{-rx^2}{k}$ exprime l'impact de la compétition entre les proies sur l'évolution de leur population. On constate que la diminution du nombre de proies due à la limitation des ressources est proportionnelle au nombre de rencontres entre ces dernières. Donc, contrairement au modèle de Lotka-Volterra, la population des proies ne peut pas croître indéfiniment. Elle tend vers une position d'équilibre en raison des restrictions sur les ressources extérieures. Dans ce cas-ci, cette position d'équilibre est k et nous avons le portrait de phase 1.2.2.

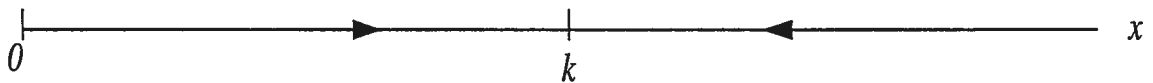


FIG. 1.2.2. Portrait de phase de l'équation logistique.

Ensuite, en considérant la deuxième équation du système 1.2.1 et en posant $x = 0$ dans cette dernière, on obtient l'évolution des prédateurs en l'absence de proies :

$$\frac{dy}{dt} = -dy. \quad (1.2.5)$$

La population des prédateurs décroît de manière exponentielle jusqu'à disparaître entièrement tout comme dans le modèle Lotka-Volterra.

Par ailleurs, dans les deux équations, on remarque la présence d'un terme mixte faisant intervenir la fonction de réponse des prédateurs $p(x)$. Celle qui est considérée ici prend la forme suivante :

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1} \quad \text{avec } m > 0 \text{ et } a > 0. \quad (1.2.6)$$

On exige naturellement que cette fonction soit positive. En effet, un prédateur ne peut pas consommer un nombre négatif de proies. D'où,

$$ax^2 + bx + 1 > 0. \quad (1.2.7)$$

Donc, ce polynôme du second degré ne doit pas avoir de racines réelles. Ce cas survient lorsque le discriminant est négatif. On obtient ainsi une condition sur les paramètres a et b :

$$b^2 < 4a. \quad (1.2.8)$$

La fonction de réponse des prédateurs s'annule en un seul point, soit en $x = 0$. En étudiant la dérivée première, on obtient que cette dernière s'annule en deux points.

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{mx(bx + 2)}{(ax^2 + bx + 1)^2} \quad (1.2.9)$$

D'où,

$$\frac{dp(x)}{dx} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{-2}{b}.$$

Ainsi, on aura deux situations différentes selon que $b > 0$ ou $b < 0$. Premièrement, lorsque $b > 0$, la forme de la fonction $p(x)$ est donnée au graphique 1.2.3.

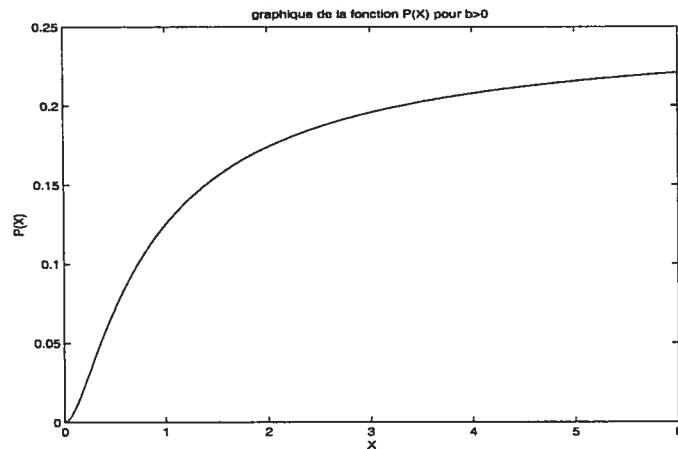


FIG. 1.2.3. Graphique de la fonction de réponse des prédateurs, $p(x)$, pour $b > 0$.

Deuxièmement, quand $b < 0$, nous obtenons la forme illustrée au graphique 1.2.4 pour la fonction $p(x)$.

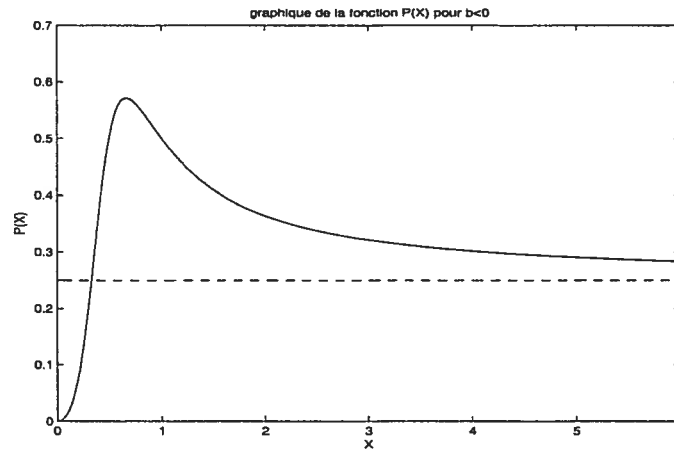


FIG. 1.2.4. Graphique de la fonction de réponse des prédateurs, $p(x)$, pour $b < 0$.

D'ailleurs, en évaluant la dérivée seconde de $p(x)$ en $x = \frac{-2}{b}$, on constate qu'elle est toujours de signe négatif :

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = \frac{-2mb^4}{4a - b^2} < 0. \quad (1.2.10)$$

Par conséquent, on a un maximum en $x = \frac{-2}{b}$. On remarque que $p(x)$ a une asymptote horizontale en $p(x) = \frac{m}{a}$. La situation est illustrée à la figure 1.2.5.

Dans ce travail, nous nous concentrons sur le deuxième cas : $b < 0$. Plus précisément, nous avons que :

$$-2\sqrt{a} < b < 0. \quad (1.2.11)$$

En tenant compte de toutes ces considérations, le graphique de la fonction de réponse des prédateurs a la forme donnée à la figure 1.2.5.

La signification d'une telle fonction dans le contexte d'une relation entre prédateurs et proies est particulière. Ainsi, à l'origine, on observe que la courbe $p(x)$ est tangente à l'axe des abscisses. Lorsque la population des proies est petite, la réponse des prédateurs est faible. On peut interpréter ce comportement de deux

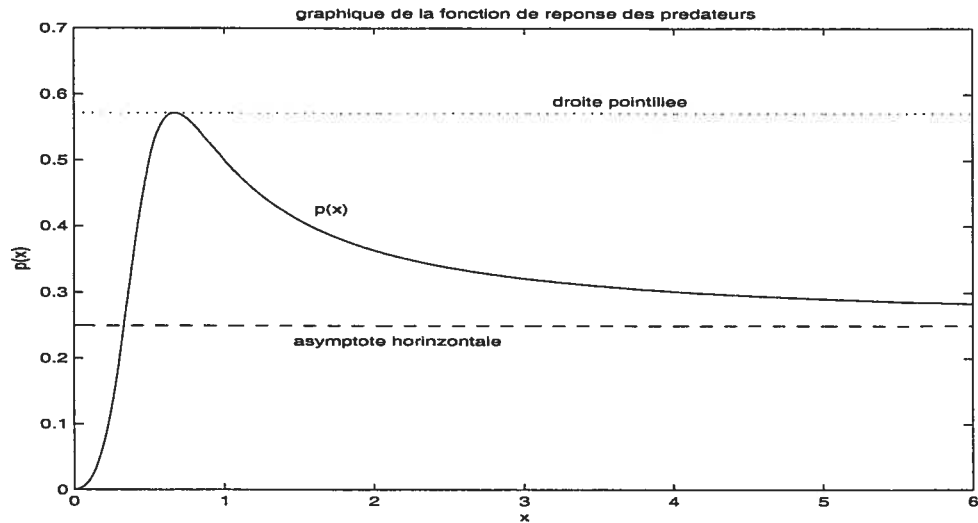


FIG. 1.2.5. Graphique de la fonction de réponse des prédateurs pour les paramètres suivants : $a = 4$, $b = -3$ et $m = 1$.

façon différentes selon [Ba] : les prédateurs ont une autre source de nourriture alternative aux proies ou les proies possèdent des abris inaccessibles aux prédateurs pour se réfugier.

Lorsque la population des proies devient suffisamment grande, la fonction de réponse des prédateurs est décroissante et tend vers l'asymptote horizontale. La décroissance de $p(x)$ s'explique par le fait que les proies sont plus habiles pour se défendre et se camoufler quand elles sont nombreuses. Elles bénéficient de l'avantage du groupe, on pourrait appeler ce phénomène de la défense en groupe comme c'est le cas dans l'article [ZCW]. En effet, si la proie se déplace seule plutôt qu'en groupe, il est beaucoup plus facile pour un prédateur de l'attraper. Dans l'article [FW], on rapporte le cas du boeuf musqué. Lorsqu'un boeuf musqué est attaqué par les loups ceux-ci l'emportent généralement. Par contre, si les loups mènent une offensive contre un groupe de deux à six boeufs musqués, l'issue du combat est rarement en faveur des loups. Ainsi, les boeufs musqués se défendent mieux contre les loups lorsqu'ils sont plusieurs.

Par conséquent, à l'aide de cette fonction particulière de réponse des prédateurs, on tient compte de deux nouvelles considérations par rapport au modèle de

Lotka-Volterra. On admet que la fonction de réponse des prédateurs dépend non-linéairement de la population des proies, en plus du fait que, lorsque la population des proies est très grande, on a une saturation de la population des prédateurs.

Dans la première équation du système 1.2.1, si on regarde la forme du terme mixte, $-yp(x)$, elle suppose que la compétition entre prédateurs pour s'accaparer des proies est inexistante. Ainsi, le taux de consommation des proies est indépendant de la population des prédateurs. Les rencontres entre proies et prédateurs font en sorte que la population des proies diminue au taux de $-yp(x)$, lequel varie selon le nombre d'individus présents dans chacune des populations.

Si on considère maintenant le terme mixte, $cyp(x)$, de la deuxième équation du système 1.2.1, on constate que tout comme dans l'équation se rapportant aux proies $yp(x)$ exprime dans quelle mesure les prédateurs consomment les proies. Mais, son influence sur le taux de variation de la population des prédateurs est bien différente. En effet, dans ce cas-ci, seulement une partie de $yp(x)$ est consacrée à l'augmentation du taux de variation de la population des prédateurs. En effet, la reproduction des prédateurs ne repose pas uniquement sur l'abondance de nourriture mais également sur la possibilité de rencontrer un ou une partenaire. Ce point peut être très difficile à réaliser si la population de prédateurs est peu nombreuse.

Finalement, ceci complète la description biologique du système prédateur-proie modifié dont il sera question tout au long de ce travail.

Chapitre 2

ÉTUDE DU NOMBRE DE POINTS SINGULIERS

La première chose que nous étudierons à propos de notre système prédateur-proie est le nombre de points singuliers que nous avons à l'intérieur de notre domaine $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Ce faisant, nous déterminerons également certaines des surfaces de l'espace des paramètres où ces points bifurquent. Toutefois, avant de débiter, nous simplifierons notre système en réduisant le nombre de paramètres qu'il contient.

2.1. SIMPLIFICATION DU SYSTÈME PRÉDATEUR-PROIE MODIFIÉ

Dans le système initial :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{m y x^2}{ax^2 + bx + 1}, \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(-d + \frac{cmx^2}{ax^2 + bx + 1}\right).\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

nous avons sept paramètres. Il est possible de simplifier le système pour n'en conserver que quatre.

Soit la transformation linéaire suivante :

$$\begin{aligned}X &= Ax, \\ Y &= By,\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

et le changement d'échelle suivant :

$$T = Ct. \quad (2.1.3)$$

Nous cherchons les constantes A , B et C permettant de réduire le nombre de paramètres. Appliquons cette transformation à notre système initial 2.1.1. Ainsi pour la première équation nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{A}{C} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{A}{C} \left\{ r \frac{X}{A} \left(1 - \frac{X}{Ak} \right) - \frac{mYX^2}{BA^2 \left(a \frac{X^2}{A^2} + b \frac{X}{A} + 1 \right)} \right\} \\ &= \frac{r}{C} X \left(1 - \frac{X}{Ak} \right) - \frac{m}{CBA} \left(\frac{YX^2}{\frac{a}{A^2} X^2 + \frac{b}{A} X + 1} \right). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Et pour la deuxième équation, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dT} &= \frac{B}{C} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{BY}{CB} \left\{ -d + \frac{cmX^2}{A^2 \left(a \frac{X^2}{A^2} + b \frac{X}{A} + 1 \right)} \right\} \\ &= Y \left\{ \frac{-d}{C} + \frac{cm}{CA^2} \left(\frac{X^2}{\frac{a}{A^2} X^2 + \frac{b}{A} X + 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Par conséquent, notre système devient :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{r}{C} X \left(1 - \frac{X}{Ak} \right) - \frac{m}{CBA} \left(\frac{YX^2}{\frac{a}{A^2} X^2 + \frac{b}{A} X + 1} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= Y \left\{ \frac{-d}{C} + \frac{cm}{CA^2} \left(\frac{X^2}{\frac{a}{A^2} X^2 + \frac{b}{A} X + 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Nous poserons :

$$\begin{aligned}
Ak &= 1, \\
\frac{cm}{CA^2} &= 1, \\
\frac{m}{CBA} &= 1.
\end{aligned}
\tag{2.1.7}$$

D'où, nous trouvons, en isolant les constantes A , B et C , la transformation linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x}{k}, \\
Y &= \frac{y}{ck},
\end{aligned}
\tag{2.1.8}$$

et le changement d'échelle :

$$T = cmk^2t. \tag{2.1.9}$$

Nous obtenons alors le système :

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dT} &= \frac{r}{cmk^2}X(1-X) - \frac{YX^2}{ak^2X^2+bkX+1}, \\
\frac{dY}{dT} &= Y \left(\frac{-d}{cmk^2} + \frac{X^2}{ak^2X^2+bkX+1} \right).
\end{aligned}
\tag{2.1.10}$$

Pour simplifier la notation, nous poserons :

$$\begin{aligned}
\alpha &= ak^2, \\
\beta &= bk, \\
\rho &= \frac{r}{cmk^2}, \\
\delta &= \frac{d}{cmk^2}.
\end{aligned}
\tag{2.1.11}$$

Le changement d'échelle sur les paramètres revient à poser $k = m = c = 1$ dans le système initial. Par conséquent, le système que nous considérerons est :

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dT} &= \rho X(1-X) - \frac{YX^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1}, \\
\frac{dY}{dT} &= Y \left(-\delta + \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \right).
\end{aligned}
\tag{2.1.12}$$

2.2. DÉTERMINATION DU NOMBRE DE POINTS SINGULIERS

Nous considérons, à partir de maintenant, le système 2.1.12 dans lequel nous posons :

$$P(X) = \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1}. \quad (2.2.1)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \rho X (1 - X) - Y P(X), \\ \frac{dY}{dT} &= Y (-\delta + P(X)). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Comme X et Y représentent respectivement, à un facteur près, les populations des proies et des prédateurs, nous admettons uniquement des valeurs positives pour ces variables.

Rappelons d'abord la définition de point singulier :

Définition 2.2.1 ([P]). Soit le système

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2.3)$$

On dit que le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre, un point singulier ou un point critique du système 2.2.3 si $f(x_0) = 0$.

À l'aide de cette définition, trouvons les points critiques du système 2.2.2. D'où,

$$\begin{aligned} \rho X (1 - X) - Y P(X) &= 0, \\ Y (-\delta + P(X)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

De la deuxième égalité, nous avons :

$$Y = 0 \quad \text{ou} \quad P(X) = \delta. \quad (2.2.5)$$

En remplaçant ces valeurs dans la première égalité, nous obtenons pour $Y = 0$:

$$\rho X(1 - X) = 0. \quad (2.2.6)$$

D'où,

$$X = 0 \quad \text{et} \quad X = 1. \quad (2.2.7)$$

Donc, nous trouvons deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

Dans le cas de $P(X) = \delta$, nous devons d'abord trouver X^* tel que $P(X^*) = \delta$. Ensuite, en remplaçant, dans la première équation du système 2.2.4, X par la valeur trouvée X^* , nous trouvons Y . D'où, Y^* sera donné par :

$$Y^* = \frac{\rho}{\delta} X^* (1 - X^*). \quad (2.2.8)$$

Nous exigeons que $X \geq 0$ et $Y \geq 0$. Donc, nous aurons 0, 1 ou 2 points singuliers selon la valeur de δ . En effet, $P(X) = \delta$ peut avoir 0, 1 ou 2 solutions et la deuxième équation du système 2.2.4 étant linéaire, elle a une solution unique. Nous remarquons, entre autres au graphique 2.2.1, que la situation est différente selon la position de δ par rapport à l'asymptote horizontale $\delta = \frac{1}{\alpha}$.

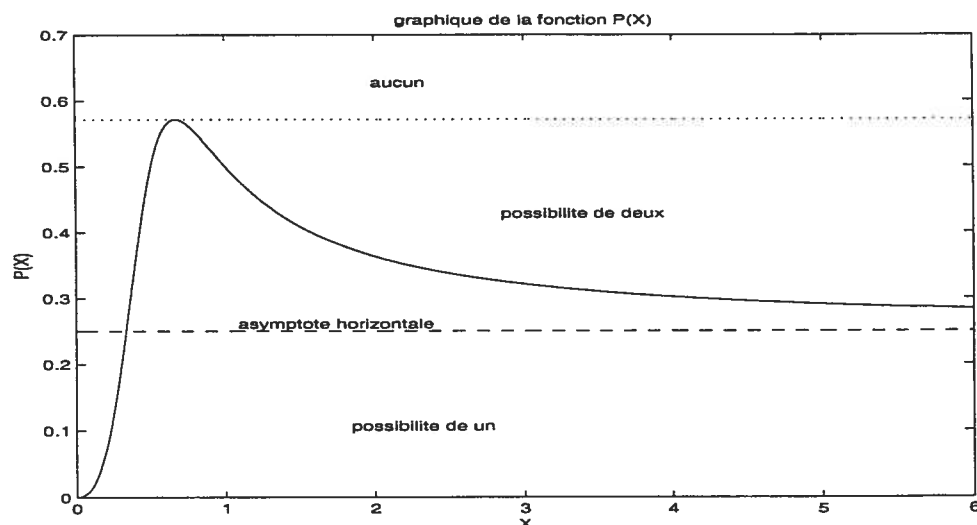


FIG. 2.2.1. Nombre possible de points singuliers.

Ainsi, nous réécrivons $P(X) = \delta$ comme :

$$\begin{aligned}\frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} &= \delta, \\ X^2 &= \alpha \delta X^2 + \beta \delta X + \delta.\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Et en ramenant tous les termes du même côté :

$$(\alpha \delta - 1) X^2 + \beta \delta X + \delta = 0.\tag{2.2.10}$$

Nous supposons en premier lieu que $(\alpha \delta - 1) \neq 0$, par conséquent :

$$X^2 + \frac{\beta \delta X}{(\alpha \delta - 1)} + \frac{\delta}{(\alpha \delta - 1)} = 0.\tag{2.2.11}$$

Ainsi, le problème revient à chercher les racines réelles positives du polynôme précédent.

Traisons d'abord le cas où

$$\alpha \delta - 1 > 0 \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{\alpha}.$$

Si nous revenons au graphique 2.2.1, nous considérons maintenant le cas où nous choisissons δ au-dessus de l'asymptote horizontale. Nous obtenons le maximum de $P(X)$ en $X = \frac{-2}{\beta}$ et sa valeur est de $\frac{4}{4\alpha - \beta^2}$. Cette valeur est bien positive. Encore une fois, nous avons plusieurs situations différentes dont nous devons tenir compte.

Dans la plupart des cas, nous utilisons le discriminant du polynôme 2.2.11 qui est :

$$\Delta = \frac{\delta((\beta^2 - 4\alpha)\delta + 4)}{(\alpha \delta - 1)^2}.\tag{2.2.12}$$

- Cas 1 : $\delta > \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$.

Nous trouvons que le discriminant 2.2.12 est négatif. Par conséquent, le polynôme 2.2.11 n'a aucune racine réelle. Donc, nous n'avons pas de points singuliers

pour ces valeurs de paramètres.

- Cas 2 : $\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$.

En substituant la valeur de δ dans le polynôme 2.2.11 par l'expression précédente, nous obtenons le polynôme suivant :

$$X^2 + \frac{4X}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} = 0. \quad (2.2.13)$$

Lequel peut se ramener à la forme :

$$\left(X + \frac{2}{\beta}\right)^2 = 0. \quad (2.2.14)$$

Ainsi, le polynôme 2.2.11 a une racine double $X^* = \frac{-2}{\beta}$ réelle et positive. Nous avons donc, soit aucun point singulier, soit un point singulier double selon le signe du Y correspondant à cette racine.

- Cas 3 : $\frac{1}{\alpha} < \delta < \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$.

Dans ce cas-ci, nous constatons que le discriminant 2.2.12 est positif, d'où, nous avons deux racines réelles. Nous devons déterminer si elles sont positives. Pour ce faire, nous regardons le signe des coefficients du polynôme 2.2.11. La constante indique si les racines sont de même signe et le coefficient du terme en X donne une idée de leur signe. Comme nous obtenons $\frac{\delta}{\alpha\delta - 1} > 0$ pour la constante et $\frac{-\beta\delta}{\alpha\delta - 1} > 0$ pour le coefficient du terme en X , les deux racines sont de même signe et elles sont positives. Ainsi, nous avons au plus deux points singuliers selon le signe du Y correspondant à ces valeurs. Avec ce cas s'achèvent les considérations pour $\alpha\delta - 1 > 0$.

Passons maintenant au cas où

$$\alpha\delta - 1 < 0 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{\alpha}.$$

En se référant au graphique 2.2.1, nous observons que cette situation correspond au cas où nous choisissons δ sous l'asymptote horizontale. Comme dans

les cas précédents, nous constatons d'abord que le discriminant 2.2.12 est positif ce qui signifie que nous avons deux racines réelles. Nous devons déterminer leurs signes. Pour ce faire, nous utilisons les coefficients du polynôme 2.2.11. La constante, $\frac{\delta}{\alpha\delta-1}$, étant de signe négatif, nous avons deux racines de signes opposés. En conséquence, dans ce cas-ci, nous obtenons une racine réelle positive pour le polynôme 2.2.11. Donc, nous avons au plus un point singulier, tout dépendant du signe de Y correspondant à cette racine.

Finalement, nous considérons un dernier cas, lequel revient à prendre l'asymptote horizontale comme valeur de δ :

$$\alpha\delta - 1 = 0 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{\alpha}.$$

En substituant δ par $\frac{1}{\alpha}$ dans le polynôme 2.2.10, nous obtenons :

$$\beta X + 1 = 0. \tag{2.2.15}$$

En isolant X , nous trouvons seulement une racine réelle positive de valeur :

$$X^* = \frac{-1}{\beta}. \tag{2.2.16}$$

La deuxième racine est passée à l'infini. Donc, nous obtenons au plus un point singulier selon le signe de Y pour $X^* = \frac{-1}{\beta}$.

2.3. SURFACES DE BIFURCATIONS POUR LES POINTS FIXES

À l'intérieur du quadrant défini par $X \geq 0$ et $Y \geq 0$, les points singuliers peuvent se comporter de manières différentes. Toutefois, ils dépendent continûment des paramètres ; donc nous pouvons contrôler précisément la manière dont ils apparaissent ou disparaissent. Ils peuvent sortir du domaine si deux points se confondent pour disparaître, si un point traverse un des axes de coordonnées ou encore si un point passe à l'infini. Chacune des situations précédentes est définie par une surface de paramètres. Ces surfaces délimitent des zones caractérisant

l'évolution des points singuliers. Nous avons pour notre système :

1) La surface (S_d) sur laquelle nous avons un point double :

$$\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}. \quad (2.3.1)$$

2) La surface (S_∞) sur laquelle un point passe à l'infini :

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.3.2)$$

3) La surface (S_1) sur laquelle un point passe par $(1, 0)$:

$$\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}. \quad (2.3.3)$$

Dans ce dernier cas, nous obtenons un point double en $(1, 0)$. Nous nous intéressons à la position relative des surfaces. Pour l'instant, nous ne nous préoccupons pas de notre domaine $X \geq 0$ et $Y \geq 0$.

Tout d'abord, étudions leurs intersections. Comme un seul point peut passer à l'infini, les surfaces S_d et S_∞ ne s'intersectent pas. Pour ce qui est de l'intersection des surfaces S_d et S_1 , son équation est donnée par $\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$ et

$$\begin{aligned} \frac{4}{4\alpha - \beta^2} &= \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \\ 4\alpha + 4\beta + 4 &= 4\alpha - \beta^2, \\ \beta^2 + 4\beta + 4 &= 0, \\ (\beta + 2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

En solutionnant l'équation, nous trouvons :

$$\beta = -2. \quad (2.3.5)$$

Donc, les surfaces S_d et S_1 se croisent lorsque $\beta = -2$ et $\delta = \frac{1}{\alpha - 1}$.

En ce qui concerne l'intersection entre les surfaces S_∞ et S_1 , elle est donnée par $\delta = \frac{1}{\alpha}$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha+\beta+1}, \\
\alpha + \beta + 1 &= \alpha, \\
\beta + 1 &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.3.6}$$

Nous obtenons, en solutionnant l'équation :

$$\beta = -1. \tag{2.3.7}$$

Par conséquent, la surface S_∞ rencontre la surface S_1 le long de la courbe $\delta = \frac{1}{\alpha}$ et $\beta = -1$.

Un autre aspect pertinent est la position des surfaces les unes par rapport aux autres. Pour commencer, déterminons la position de la surface S_d par rapport à la surface S_∞ en soustrayant leurs équations :

$$\frac{4}{4\alpha - \beta^2} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha(4\alpha - \beta^2)}. \tag{2.3.8}$$

Cette expression est positive car $\beta^2 > 0$, $\alpha > 0$ et $4\alpha - \beta^2 > 0$. D'où, la surface S_d est toujours située au-dessus de la surface S_∞ .

Maintenant considérons les surfaces S_d et S_1 . De la même façon, nous soustrayons leurs équations :

$$\frac{4}{4\alpha - \beta^2} - \frac{1}{\alpha + \beta + 1} = \frac{(\beta^2 + 2)^2}{(4\alpha - \beta^2)(\alpha + \beta + 1)}. \tag{2.3.9}$$

Comme $(\beta^2 + 2)^2 > 0$ et $4\alpha - \beta^2 > 0$, le signe de l'expression précédente dépend de celui de $\alpha + \beta + 1$. Ainsi, elle est positive si $\alpha + \beta + 1 > 0$ et négative si $\alpha + \beta + 1 < 0$. Par contre, selon la condition sur les paramètres obtenue avant, $\beta^2 - 4\alpha < 0$, la région délimitée lorsque $\alpha + \beta + 1 < 0$ ne fait pas partie de la région admissible. On peut l'observer sur la figure 2.3.1 sur laquelle la droite pointillée est l'équation $\alpha + \beta + 1 = 0$ et la courbe en trait plein représente l'équation $\beta^2 - 4\alpha = 0$. Ainsi, la région délimitée par $\alpha + \beta + 1 < 0$ se situe sous la droite pointillée alors que la zone admissible se trouve au-dessus de la courbe en trait

plein. Donc, nous rejetons l'option $\alpha + \beta + 1 < 0$ et nous pourrions utiliser dans tous nos calculs que

$$\alpha + \beta + 1 > 0.$$

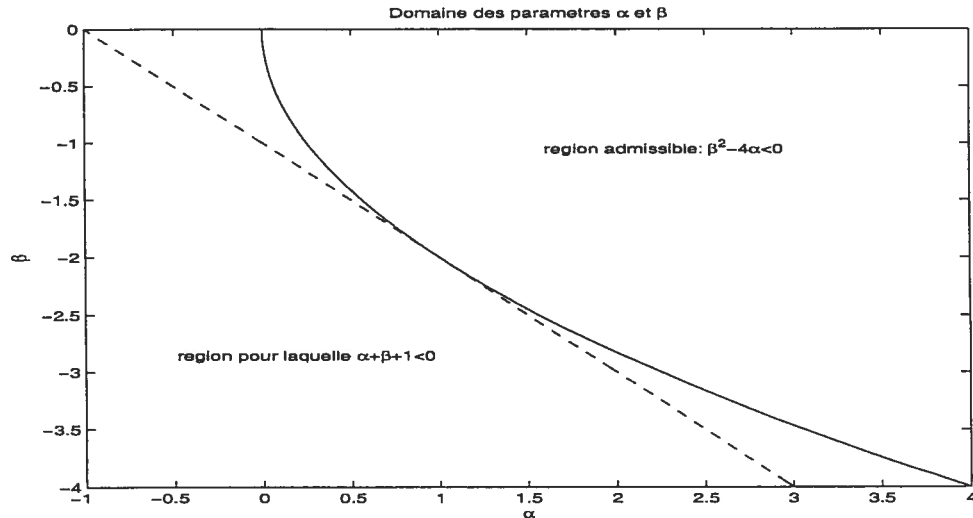


FIG. 2.3.1. Graphique du domaine des paramètres α et β admissibles.

Donc, l'expression 2.3.9 est toujours positive pour nos valeurs de paramètres ce qui implique que la surface S_d est toujours au-dessus de la surface S_1 .

Finalement, par le même procédé, nous situons la surface S_∞ par rapport à la surface S_1 :

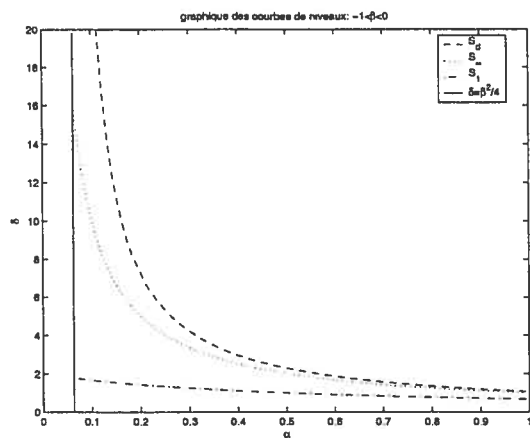
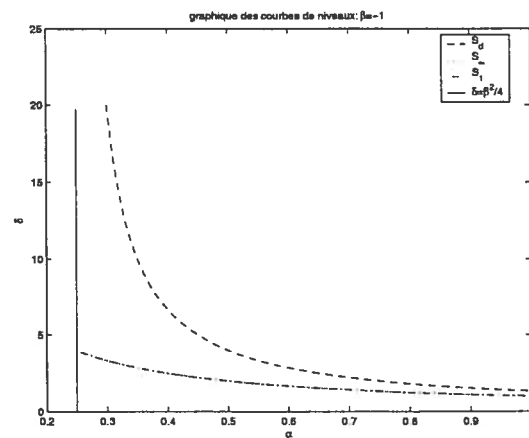
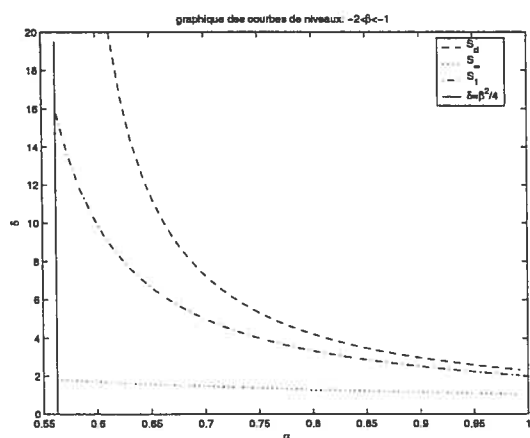
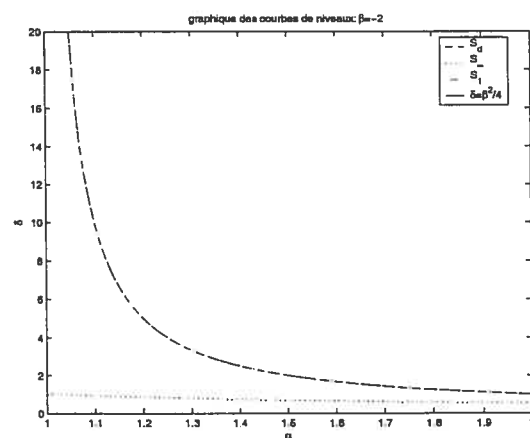
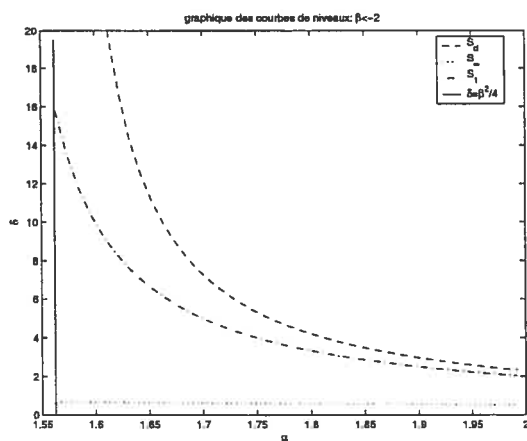
$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha + \beta + 1} = \frac{\beta + 1}{\alpha(\alpha + \beta + 1)}. \quad (2.3.10)$$

Dans ce cas, puisque nous avons $\alpha > 0$ et $\alpha + \beta + 1 > 0$, le signe de l'expression 2.3.10 est déterminé par le signe de $\beta + 1$. Donc, lorsque $\beta < -1$, la surface S_1 est au-dessus de S_∞ . La situation inverse se produit quand $\beta > -1$.

Sur le graphique 2.3.2, nous avons résumé la situation pour chacune des régions de paramètres. Nous avons représenté les courbes de niveaux des différentes surfaces. Le paramètre β a été fixé et c'est le plan $\alpha\delta$ qui est représenté. La courbe

pointillée à longs traits représente la courbe de niveau de S_d , la courbe pointillée ayant un long trait et un point en alternance celle de la surface S_1 et la courbe pointillée à petits traits celle de la surface S_∞ . Bien que sur les graphiques nous ne le distinguions pas très bien, en (b) les courbes de niveau de S_∞ et de S_1 sont confondues. Il en va de même en (d) où ce sont les courbes de niveau de S_d et de S_1 qui sont confondues.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas étudié les points singuliers sur ces surfaces. Il est possible que ceux-ci ne soient pas compris dans notre domaine $X \geq 0$ et $Y \geq 0$. Par conséquent, certaines parties de surfaces pourraient être éliminées de nos diagrammes de bifurcation. Cette étude se fera à la section suivante.

(a) $-1 < \beta < 0$ (b) $\beta = -1$ (c) $-2 < \beta < -1$ (d) $\beta = -2$ (e) $\beta < -2$ FIG. 2.3.2. Résumé de la position des surfaces S_1 , S_d et S_∞ .

2.4. DÉTERMINATION DU NOMBRE DE POINTS SINGULIERS FAISANT PARTIE DE NOTRE DOMAINE $X \geq 0$ ET $Y \geq 0$ SELON LES RÉGIONS DÉLIMITÉES PAR LES SURFACES DE BIFURCATIONS

Nous commencerons par déterminer le nombre de points critiques sur chacune des surfaces : $\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$, $\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ et $\delta = \frac{1}{\alpha}$. Ensuite, nous déterminerons leurs comportements sur ces surfaces afin de déduire le nombre de points singuliers présents dans les régions entre les surfaces.

Remarque 2.4.1. Dans cette section, il sera question de point à gauche et de point à droite. Ces expressions font référence à la position de la coordonnée X^* du point singulier trouvée à la section 2.2, par rapport au point double en $X_0 = \frac{-2}{\beta}$. On peut l'observer sur le graphique 2.4.1.

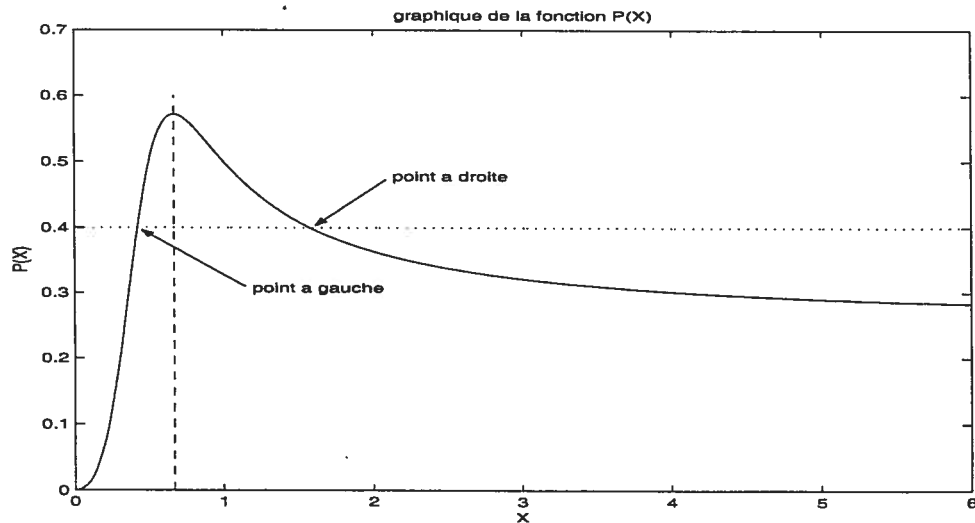


FIG. 2.4.1. Graphique de $P(X)$ illustrant la signification de point à gauche et de point à droite.

Ainsi, nous appelons le point à gauche, le point dont la coordonnée X est entre 0 et $\frac{-2}{\beta}$ et le point à droite celui dont la coordonnée X est supérieure à $\frac{-2}{\beta}$.

Premièrement, nous étudions l'évolution des points singuliers sur la surface S_d :

$$\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}. \quad (2.4.1)$$

Dans la section 2.2, nous avons trouvé que, sur S_d , $P(X^*) = \delta$ lorsque $X^* = \frac{-2}{\beta}$. Nous devons donc vérifier si $Y \geq 0$ pour cette valeur de X . Ainsi, Y^* sera donné par :

$$Y^* = \frac{\rho}{\delta} X^* (1 - X^*). \quad (2.4.2)$$

Quand $X^* = \frac{-2}{\beta}$, nous obtenons :

$$Y^* = \frac{-2\rho}{\delta\beta^2} (\beta + 2). \quad (2.4.3)$$

D'où, nous avons $Y^* \geq 0$ à la condition que $\beta \leq -2$. Par conséquent, la partie de la surface pour laquelle $\beta > -2$ ne nous intéresse pas. Donc, lorsque $\beta \leq -2$, nous obtenons un point singulier double, de coordonnées $\left(\frac{-2}{\beta}, \frac{-2\rho}{\delta\beta^2} (\beta + 2)\right)$, dans le premier quadrant en plus des points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. En $\beta = -2$, le point double se confond avec $(1, 0)$ pour sortir du premier quadrant. Le point $(1, 0)$ devient alors un point triple.

Nous constatons aussi qu'il n'y a pas de point singulier au-dessus de cette surface S_d . En effet, nous avons déjà observé que le discriminant 2.2.12 est négatif pour ces valeurs de paramètres. Ceci complète, pour l'instant, l'étude de l'évolution des points singuliers sur S_d .

Deuxièmement, nous étudions l'évolution des points singuliers sur la surface S_1 :

$$\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}. \quad (2.4.4)$$

Nous avons que :

$$P(X) = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \Leftrightarrow X^2 + \frac{\delta\beta}{\alpha\delta - 1} X + \frac{\delta}{\alpha\delta - 1} = 0. \quad (2.4.5)$$

Comme, sur cette surface, un point passe par $(1, 0)$, nous connaissons déjà une racine soit $X^* = 1$. Nous savons donc que l'autre est $X^* = \frac{\delta}{\alpha\delta - 1}$. Nous devons

vérifier si $Y^* \geq 0$ pour chacune d'elles. Tout d'abord, pour $X^* = 1$, nous obtenons $Y^* = 0$. Ensuite, pour la seconde, nous voulons étudier quand :

$$Y^* = \frac{\rho}{\delta} X^* (1 - X^*) \geq 0, \quad (2.4.6)$$

avec $X^* = \frac{\delta}{\alpha\delta-1}$. Nous avons que l'expression 2.4.6 est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{\delta} \frac{\delta}{\alpha\delta-1} \left(1 - \frac{\delta}{\alpha\delta-1}\right) \geq 0, \\ \Leftrightarrow & \frac{\rho}{(\alpha\delta-1)^2} (\alpha\delta - \delta - 1) \geq 0, \\ \Leftrightarrow & \alpha\delta - \delta - 1 \geq 0, \\ \Leftrightarrow & (\alpha - 1)\delta - 1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Donc, nous remplirons la condition $Y^* \geq 0$ lorsque l'inégalité $(\alpha - 1)\delta - 1 \geq 0$ sera validée.

Comme $\delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)\delta &= \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta+1}, \\ (\alpha - 1)\delta - 1 &= \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta+1} - 1, \\ &= -\frac{\beta+2}{\alpha+\beta+1}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

D'où

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\delta - 1 \geq 0 & \text{si } \beta \leq -2, \\ (\alpha - 1)\delta - 1 < 0 & \text{si } \beta > -2. \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Donc,

$$Y^* \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq -2.$$

Ainsi, pour $0 > \beta > -2$, les seuls points singuliers sont $(1, 0)$, qui est un point double, et $(0, 0)$. Par ailleurs, comme $0 > \beta > -2$, nous savons que :

$$X = \frac{-2}{\beta} > 1. \quad (2.4.10)$$

Par conséquent, c'est le point de gauche qui passe par $(1, 0)$. Pour, $\beta \leq -2$, nous obtenons $(0, 0)$, un point double en $(1, 0)$ et un autre point critique. Dans ce cas-ci, puisque nous avons :

$$X = \frac{-2}{\beta} < 1, \quad (2.4.11)$$

le point de droite est celui qui passe par $(1, 0)$ alors que le point de gauche demeure sur S_1 . Voilà, pour le moment, ce que nous obtenons pour l'évolution des points singuliers sur S_1 .

Troisièmement, nous considérons la surface S_∞ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.4.12)$$

Dans la section 2.2, nous avons obtenu que $P(X^*) = \delta$ lorsque $X^* = \frac{-1}{\beta}$. Dans ce cas, nous obtenons pour Y^* :

$$Y^* = \frac{\rho}{\delta} X^* (1 - X^*), \quad (2.4.13)$$

avec $X^* = \frac{-1}{\beta}$,

$$Y^* = \frac{-\rho}{\delta\beta^2} (\beta + 1). \quad (2.4.14)$$

Ainsi, pour que $Y^* \geq 0$, nous devons avoir $\beta \leq -1$. Par conséquent, la surface S_∞ ne présente pas d'intérêt pour nous quand $\beta > -1$. En effet, pour ces valeurs de β , le point qui passe à l'infini va du troisième au quatrième quadrant ou vice-versa. En comparant X_0 avec $X = \frac{-1}{\beta}$, lorsque $\beta \leq -1$ nous obtenons :

$$\frac{-1}{\beta} < \frac{-2}{\beta}. \quad (2.4.15)$$

Donc, dans ce cas-ci, $X^* = \frac{-1}{\beta}$ est à la gauche de X_0 . Ainsi, X^* ne passera pas à l'infini puisque seul le point à la droite de X_0 en a la possibilité comme le montre le graphique 2.2.1. En fait, sur S_∞ , nous avons trois points singuliers : $(0, 0)$, $(1, 0)$ et le point à gauche de X_0 lorsque $\beta \leq -1$.

Nous remarquons que lorsque la surface (S_∞) $\delta = \frac{1}{\alpha}$ est présente, elle se situe sous la surface (S_1) $\delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$. De plus, le point passant à l'infini est celui de droite. Or, le point de droite est déjà sorti de notre domaine en passant par $(1, 0)$ pour $\beta = -2$. Pour $\beta < -2$, nous avons que le point de droite est passé par $(1, 0)$ lorsque les paramètres étaient sur S_1 , d'où quand les paramètres sont sur S_∞ , le point de droite ne fait plus partie de notre domaine puisque $X^* > 0$ mais $Y^* < 0$. De plus, le point de droite ne fait pas partie de notre domaine lorsque $0 > \beta > -2$ car $X^* > 0$ et $Y^* < 0$ pour ces valeurs de β . Ainsi, le point passe à l'infini alors qu'il est en dehors du domaine $X \geq 0$ et $Y \geq 0$: il passe du quatrième au troisième quadrant. Par conséquent, la surface S_∞ n'est pas influente pour notre système. Nous ne la considérerons plus.

À l'aide du graphique 2.4.2, nous résumons l'évolution du nombre de points singuliers selon les différentes valeurs de paramètres et les régions définies par les surfaces S_1 et S_d . Tout comme précédemment, nous avons représenté les courbes de niveau des surfaces. Nous fixons la valeur de β et nous observons le comportement des surfaces dans le plan $\alpha\delta$. La courbe pointillée à longs traits est la courbe de niveau de la surface S_d et la courbe pointillée ayant un long trait et un point en alternance est la courbe de niveau de la surface S_1 . En $\beta = -2$, les deux courbes de niveaux se croisent, bien qu'on ne puisse pas le distinguer clairement sur le graphique 2.4.2(b). Les chiffres sur les graphiques représentent le nombre de points singuliers satisfaisant $X \geq 0$ et $Y \geq 0$. Pour chacune des régions représentées, nous résumons le nombre de points singuliers aux tableaux 2.4.1 à 2.4.3.

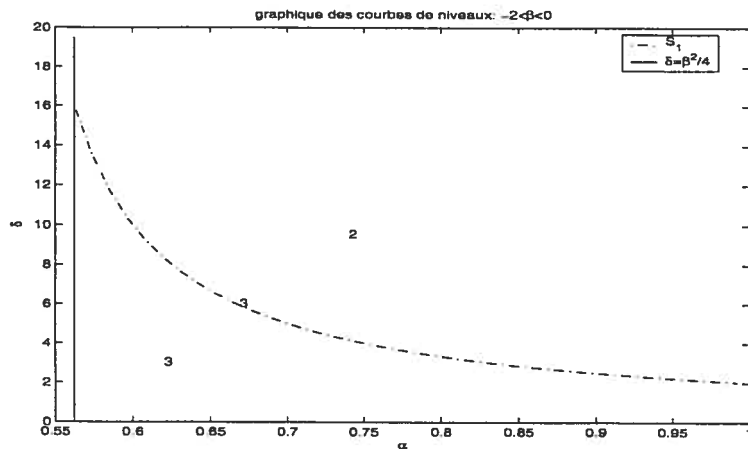
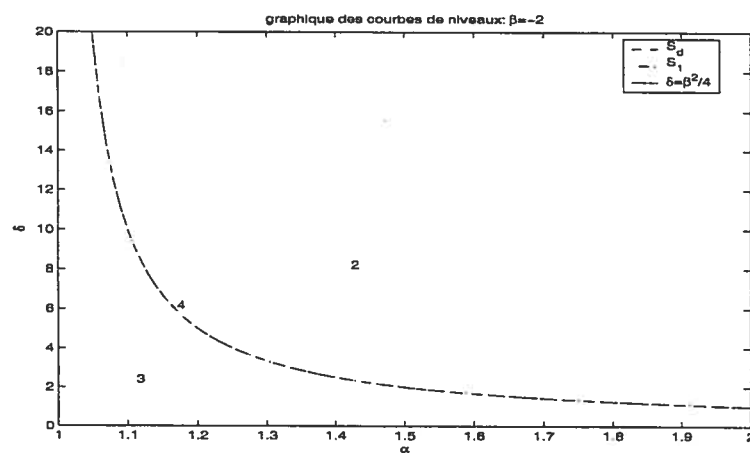
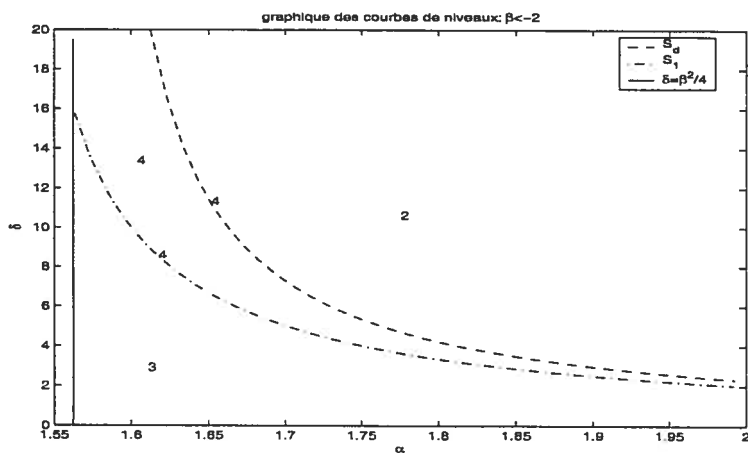
(a) $0 > \beta > -2$ (b) $\beta = -2$ (c) $\beta < -2$

FIG. 2.4.2. Résumé du nombre de points singuliers.

Régions	Points singuliers
au-dessus de $S_1 : \delta > \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	(0, 0) et (1, 0)
sur $S_1 : \delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	(0, 0) et (1, 0) qui est un point double car le point gauche passe par (1, 0)
en-dessous de $S_1 : \delta < \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	(0, 0), (1, 0) et un autre point singulier : celui de gauche

TAB. 2.4.1. Nombre de points singuliers pour la région $0 > \beta > -2$.

S_d correspond à un point non-admissible lorsque $0 > \beta > -2$.

Régions	Points singuliers
au-dessus de l'intersection de S_d et $S_1 : \delta > \frac{4}{4\alpha-\beta^2} = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	(0, 0) et (1, 0)
sur l'intersection de S_d et de $S_1 : \delta = \frac{4}{4\alpha-\beta^2} = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	(0, 0) et (1, 0) qui est un point triple
en-dessous de l'intersection de S_d et de $S_1 : \delta < \frac{4}{4\alpha-\beta^2} = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	(0, 0), (1, 0) et un autre point singulier : celui de gauche

TAB. 2.4.2. Nombre de points singuliers pour la région $\beta = -2$.

Régions	Points singuliers
au-dessus de $S_d : \delta > \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$	(0, 0) et (1, 0)
sur $S_d : \delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$	(0, 0), (1, 0) et un point double : $(\frac{-2}{\beta}, \frac{-2\rho}{\delta\beta^2}(\beta + 2))$
entre S_d et $S_1 : \frac{1}{\alpha + \beta + 1} < \delta < \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$	(0, 0), (1, 0) et deux autres points singuliers : un point à gauche et un point à droite
sur $S_1 : \delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$	(0, 0), le point de gauche : $(\frac{\delta}{\alpha\delta - 1}, \frac{\rho}{(\alpha\delta - 1)^2}(\alpha\delta - \delta - 1))$ et (1, 0) qui est un point double car le point de droite passe par (1, 0)
en-dessous de $S_1 : \delta < \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$	(0, 0), (1, 0) et un autre point singulier : celui de gauche

TAB. 2.4.3. Nombre de points singuliers pour la région $\beta < -2$.

Chapitre 3

ÉTUDE DU TYPE DES POINTS SINGULIERS

Après avoir déterminé, au chapitre 2, le nombre de points singuliers que nous avons dans le premier quadrant et avoir trouvé explicitement certains d'entre eux, nous souhaitons déterminer le type de ces points singuliers. C'est ce que nous ferons dans ce chapitre. Nous effectuerons les calculs pour les paramètres correspondants aux surfaces de bifurcation S_1 et S_d trouvés au chapitre 2. En effet, pour ces valeurs de paramètres, nous disposons d'informations sur les points singuliers. Elles sont d'ailleurs résumées aux tableaux 2.4.1 à 2.4.3. Nous déterminerons aussi la surface de bifurcation de Hopf.

3.1. ÉTUDE DU POINT SINGULIER $(1, 0)$ LORSQUE LES PARAMÈTRES NE SONT PAS SUR LA SURFACE S_1 ET DU POINT SINGULIER $(0, 0)$

Nous considérons le système que nous avons simplifié à la section 2.1 :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \rho X(1-X) - \frac{YX^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} = f(X, Y), \\ \frac{dY}{dT} &= Y \left(-\delta + \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \right) = g(X, Y).\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Nous trouvons la matrice jacobienne M de ce système :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho X - \frac{XY(\beta X+2)}{(\alpha X^2+\beta X+1)^2} & \frac{-X^2}{\alpha X^2+\beta X+1} \\ \frac{XY(\beta X+2)}{(\alpha X^2+\beta X+1)^2} & -\delta + \frac{X^2}{\alpha X^2+\beta X+1} \end{pmatrix}.$$

- Étude du point singulier $(0, 0)$.

Nous commençons par l'étude du point singulier $(0, 0)$. Pour ce faire, nous évaluons la matrice jacobienne en $(0, 0)$:

$$M_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\lambda_1 = \rho$ et $\lambda_2 = -\delta$, les valeurs propres de la matrice $M_{(0,0)}$. Comme elles ont une partie réelle non-nulle, nous considérons uniquement la partie linéaire du système 3.1.1 pour déterminer le comportement qualitatif de ce dernier autour de l'origine. Ainsi, puisque λ_1 est positive et λ_2 est négative, nous avons une répulsion selon l'axe des X et une attraction selon l'axe des Y . Par conséquent, le point singulier $(0, 0)$ est toujours un point de selle.

- Étude du point singulier $(1, 0)$ pour des paramètres qui ne sont pas sur S_1 .

Nous continuons avec l'étude du point singulier $(1, 0)$ lorsque les paramètres ne sont pas sur la surface S_1 . Nous évaluons la matrice jacobienne en $(1, 0)$:

$$M_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -\rho & \frac{-1}{\alpha+\beta+1} \\ 0 & -\delta + \frac{1}{\alpha+\beta+1} \end{pmatrix}.$$

Nous trouvons comme valeurs propres de cette matrice : $\lambda_1 = -\rho$ et $\lambda_2 = -\delta + \frac{1}{\alpha+\beta+1}$. Comme les paramètres ne sont pas sur S_1 , $\delta \neq \frac{1}{\alpha+\beta+1}$; la partie réelle des valeurs propres est non-nulle ; ce qui nous permet d'étudier le comportement qualitatif du système 3.1.1 autour du point singulier $(1, 0)$ à l'aide de la partie linéaire de ce système. Le signe de λ_1 est toujours négatif. D'où, nous trouvons

que selon l'axe des X , il y a toujours une attraction vers 1. Par contre, le signe de λ_2 varie. Nous avons alors deux situations possibles. Lorsque $\delta < \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, λ_2 est positive. Le point singulier $(1, 0)$ est donc un point de selle. Quand $\delta > \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, λ_2 est négative. Ainsi, le point critique $(1, 0)$ est un nœud attractif. Nous résumons à l'aide du tableau suivant :

Points singuliers	Conditions	Type
$(0, 0)$	aucune	point de selle
$(1, 0)$	$\delta < \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	point de selle
en dehors de S_1	$\delta > \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	nœud attractif

TAB. 3.1.1. Résumé du type de point singulier pour $(1, 0)$ lorsque les paramètres sont pris en dehors de S_1 .

3.2. LA BIFURCATION DE HOPF

Nous devons maintenant trouver la bifurcation de Hopf dans l'espace des paramètres. Cette bifurcation survient lorsque nous avons à la fois la trace de la matrice jacobienne nulle et le déterminant de cette dernière positif.

Pour commencer, nous cherchons la surface dans l'espace des paramètres où nous avons à la fois des points singuliers et la trace de la matrice jacobienne du système 3.1.1 qui est nulle. Ensuite, il faudra déterminer la portion de cette surface où le signe du déterminant de la matrice jacobienne évaluée aux points singuliers est positif. En effet, la bifurcation de Hopf se produira pour ces valeurs.

À partir du système 3.1.1, nous avons que les points singuliers sont donnés par les équations :

$$(1 - \delta\alpha)X^2 - \delta\beta X - \delta = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} = \delta \quad (3.2.1)$$

et

$$Y = \frac{\rho}{\delta} X (1 - X). \quad (3.2.2)$$

Nous avons que la trace de la matrice jacobienne, que nous voulons nulle, est donnée par :

$$\rho - 2\rho X - \frac{XY(\beta X + 2)}{(\alpha X^2 + \beta X + 1)^2} - \delta + \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} = 0, \quad (3.2.3)$$

et sachant que $\delta = \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1}$, nous avons :

$$\rho - 2\rho X - \frac{XY(\beta X + 2)}{(\alpha X^2 + \beta X + 1)^2} = 0. \quad (3.2.4)$$

Aussi $\frac{\delta^2}{X^3} = \frac{X}{\alpha X^2 + \beta X + 1}$, d'où

$$\rho - 2\rho X - \frac{\delta^2 Y (\beta X + 2)}{X^3} = 0. \quad (3.2.5)$$

Nous pouvons éliminer la dépendance en Y en le remplaçant par l'équation 3.2.2 :

$$\rho - 2\rho X - \frac{\delta^2}{X^3} \left(\frac{\rho X (1 - X)}{\delta} \right) (\beta X + 2) = 0. \quad (3.2.6)$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$X^2 - 2X^3 - \delta\beta X - 2\delta + \beta\delta X^2 + 2\delta X = 0. \quad (3.2.7)$$

Ainsi, les équations 3.2.1 et 3.2.7 tiennent compte à la fois de l'information sur les points singuliers et de celle sur la trace. Nous souhaitons obtenir la relation entre les paramètres qui fera en sorte que les deux équations aient une racine commune. À l'aide de la notion du résultant, il est possible de trouver cette relation. En effet, comme on le montre dans [K], deux polynômes $f(X)$ et $g(X)$ ont un zéro commun si et seulement si leur résultant est nul. Posons

$$\begin{aligned} f(X) &= (1 - \delta\alpha)X^2 - \delta\beta X - \delta, \\ g(X) &= X^2 - 2X^3 - \delta\beta X - 2\delta + \beta\delta X^2 + 2\delta X. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

À l'aide de Mathematica, nous avons trouvé le résultant de $f(X)$ et $g(X)$:

$$\begin{aligned} \text{Résultant}(f,g) = & -\delta^2(-1 + 5\alpha\delta - 2\beta\delta - 8\alpha^2\delta^2 - \beta^2\delta^2 + \alpha\beta^2\delta^2 - \beta^3\delta^2 \\ & + 4\alpha^2\delta^3 + 4\alpha^3\delta^3 + 4\alpha^2\beta\delta^3 - \alpha\beta^2\delta^3 - \alpha^2\beta^2\delta^3 - \alpha\beta^3\delta^3). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Ainsi,

$$\text{Résultant}(f,g) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} -1 + (5\alpha - 2\beta)\delta + (-8\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta^2 - \beta^3)\delta^2 + \\ (4\alpha^2 + 4\alpha^3 + 4\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3)\delta^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Notons

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta, \delta) = & -1 + (5\alpha - 2\beta)\delta + (-8\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta^2 - \beta^3)\delta^2 + \\ & (4\alpha^2 + 4\alpha^3 + 4\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3)\delta^3. \end{aligned}$$

Ainsi, la surface donnée par l'équation 3.2.10 dans l'espace des paramètres détermine les endroits où nous avons au moins un point singulier en lequel la trace est nulle. Nous remarquons que $P(\alpha, \beta, \delta)$ est un polynôme de degré trois en δ . Ce polynôme aura, pour toutes valeurs de α et de β , une ou trois valeurs réelles de δ comme racine sauf en des points isolés où il pourra y avoir des racines multiples. Nous déterminerons le nombre de racines en étudiant le signe du discriminant de $P(\alpha, \beta, \delta)$. Comme nous n'avons pas trouvé la fonction *discriminant* dans Mathematica, nous avons trouvé avec Maple :

$$\begin{aligned} \text{discriminant}(P(\alpha, \beta, \delta)) = & 4(-2\alpha + \alpha\beta - \beta^2 - \beta^3)^2(-27\alpha^2 + \alpha^3 - 3\alpha^2\beta \\ & + 3\alpha\beta^2 - \beta^3). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Nous remarquons que le signe de $4(-2\alpha + \alpha\beta - \beta^2 - \beta^3)^2$ est toujours positif ou nul. Le signe du discriminant de $P(\alpha, \beta, \delta)$ sera donc influencé par le signe de $(-27\alpha^2 + \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3)$. Pour β fixé, cette expression est un polynôme de degré trois en α . Notons

$$Q_\beta(\alpha) = -27\alpha^2 + \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3.$$

Nous étudions le signe du discriminant de $Q_\beta(\alpha)$ afin de déterminer pour quelles valeurs de β nous avons une ou trois racines. Nous obtenons :

$$\text{discriminant}(Q_\beta(\alpha)) = -19683\beta^3(\beta + 4).$$

Donc,

$$\text{discriminant}(Q_\beta(\alpha)) \begin{cases} < 0 & \text{si } \beta < -4, \\ = 0 & \text{si } \beta = -4, \\ > 0 & \text{si } \beta > -4. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Ainsi, $Q_\beta(\alpha) = 0$ a une racine réelle si $\beta < -4$, une racine simple et une racine double si $\beta = -4$ et trois racines réelles si $\beta > -4$. Rappelons-nous que nous avons une contrainte sur α : $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$ qui décrit le domaine des α admissibles. Sachant cela, nous constatons qu'une racine α^* est toujours non-admissible. En effet,

$$Q_\beta(\alpha) \longrightarrow -\infty \text{ lorsque } \alpha \longrightarrow -\infty$$

et en $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$, nous avons

$$Q_\beta\left(\frac{\beta^2}{4}\right) = \frac{\beta^3(\beta - 16)(\beta + 2)^2}{64} > 0.$$

Par conséquent, par le théorème des valeurs intermédiaires, $Q_\beta(\alpha)$ possède toujours une racine non-admissible $\alpha^* < \frac{\beta^2}{4}$.

Donc, pour $0 > \beta > -4$, nous savons que $\text{discriminant}(P(\alpha, \beta, \delta)) > 0$. Par conséquent, pour ces valeurs de β , nous avons trois racines réelles α dont une est non-admissible. La figure 3.2.1 représente cette situation. Lorsque $Q_\beta(\alpha) > 0$, nous avons trois valeurs réelles de δ qui satisfont $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ pour β fixé et quand $Q_\beta(\alpha) < 0$, nous en avons une seule.

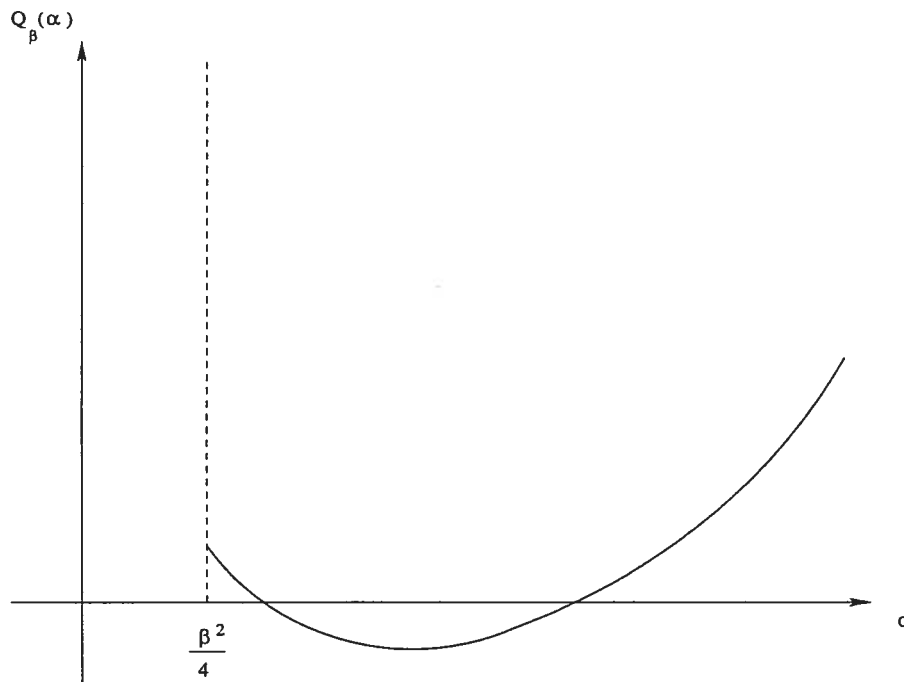


FIG. 3.2.1. Graphique de $Q_\beta(\alpha)$ pour $0 > \beta > -4$.

Pour $\beta = -4$, nous obtenons le graphique 3.2.2. Dans ce cas, nous avons $Q_\beta(\alpha) \geq 0$ pour toutes valeurs de α . Ainsi, nous avons toujours, en comptant les multiplicités, trois valeurs réelles de δ satisfaisant $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$ pour β fixé.

Et puis, pour $\beta < -4$, nous avons que $\text{discriminant}(P(\alpha, \beta, \delta)) < 0$ ce qui implique que $Q_\beta(\alpha)$ n'a qu'une seule racine réelle α laquelle n'est pas dans le domaine admissible. D'où, nous obtenons la figure 3.2.3 comme représentation de $Q_\beta(\alpha)$. Étant donné que, pour toutes valeurs de α , $Q_\beta(\alpha) > 0$, nous avons toujours trois valeurs de δ satisfaisant $P(\alpha, \beta, \delta) = 0$.

L'analyse du terme $(-2\alpha + \alpha\beta - \beta^2 - \beta^3)$ du discriminant de $P(\alpha, \beta, \delta)$ nous indique que $\text{discriminant}(P(\alpha, \beta, \delta)) = 0$ pour :

$$\alpha^* = \frac{\beta^3 + \beta^2}{4(\beta - 2)}.$$

De plus, ce point fait partie des α admissibles puisque

$$\frac{\beta^3 + \beta^2}{4(\beta - 2)} - \frac{\beta^2}{4} = \frac{3\beta^2(\beta + 2)}{4(\beta - 2)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < -2.$$

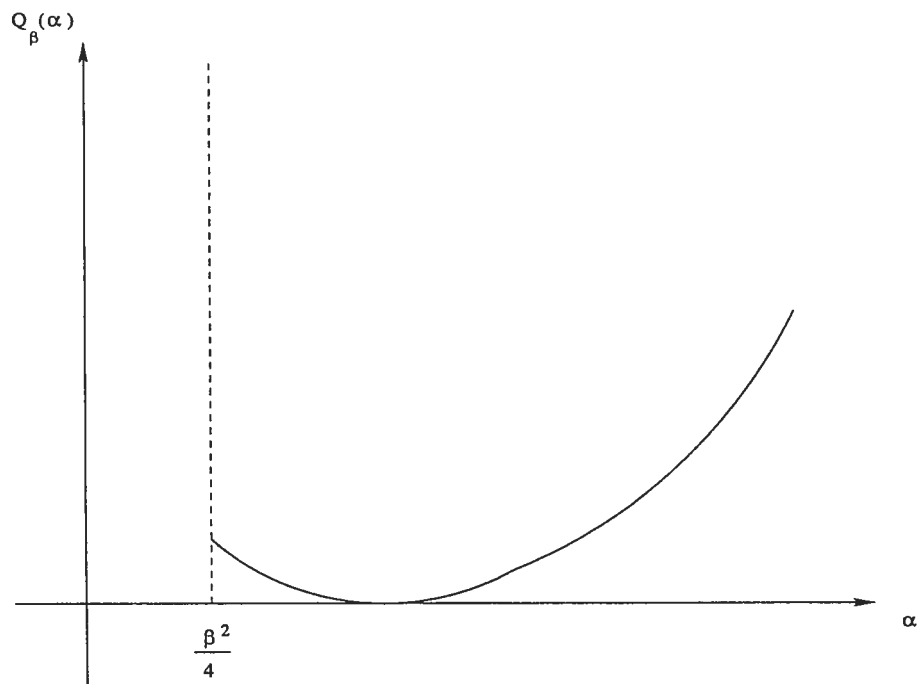


FIG. 3.2.2. Graphique de $Q_{\beta}(\alpha)$ pour $\beta = -4$.

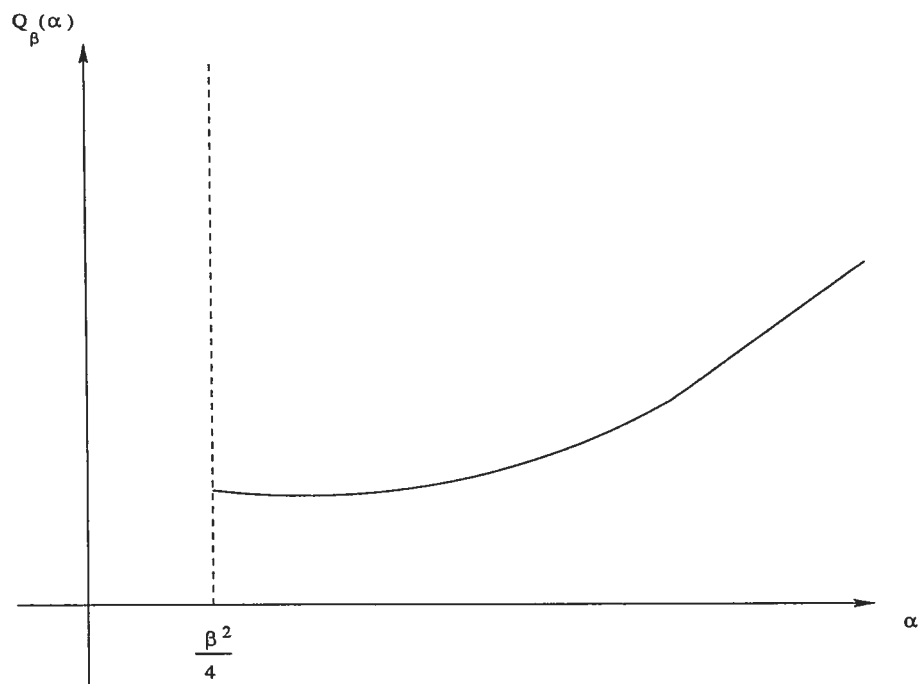


FIG. 3.2.3. Graphique de $Q_{\beta}(\alpha)$ pour $\beta < -4$.

Pour $\beta \leq -4$, nous constatons que ce point, qui est une racine double, est présent sur les figures 3.2.7 et 3.2.8. Il correspond au point d'intersection des courbes.

Mais, pour $-2 > \beta > -4$, cela suggère qu'il y aurait la présence d'un point en plus des courbes déjà trouvées. Toutefois, étant donné que le discriminant ne change pas de signe, nous supposons dans un premier temps qu'il ne se passe rien d'important en ce point.

Avec les informations que nous avons ci-haut et avec l'aide de Mathematica, il est possible d'avoir une idée de la représentation de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour différentes valeurs de β fixées. Les graphiques 3.2.4 à 3.2.8 nous montrent les résultats. Nous remarquons qu'à la figure 3.2.5, le point d'intersection entre la courbe et la droite $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ passe à l'infini ; par conséquent, pour $\beta = -2$, la portion gauche de la courbe n'est pas dans notre domaine des valeurs de α admissibles.

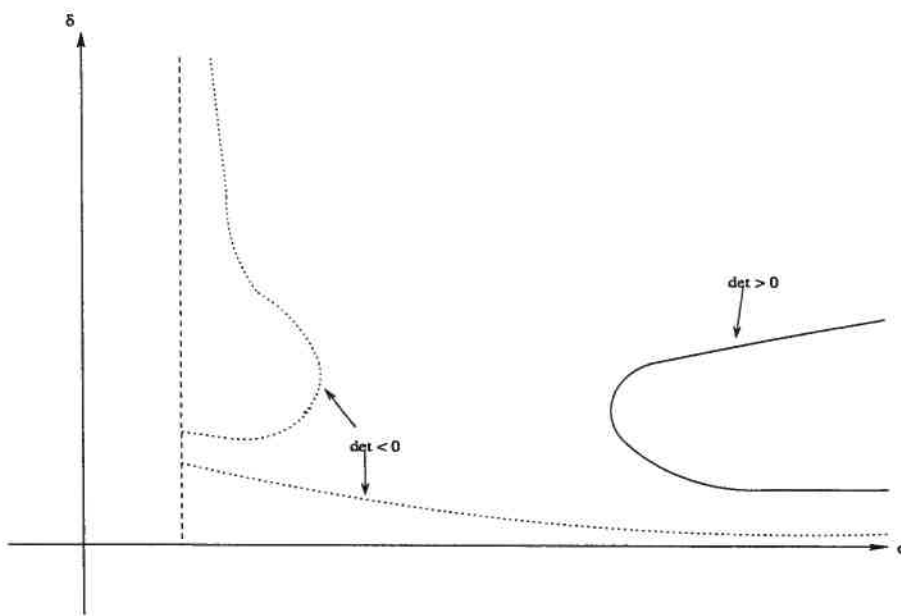


FIG. 3.2.4. Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $0 > \beta > -2$.

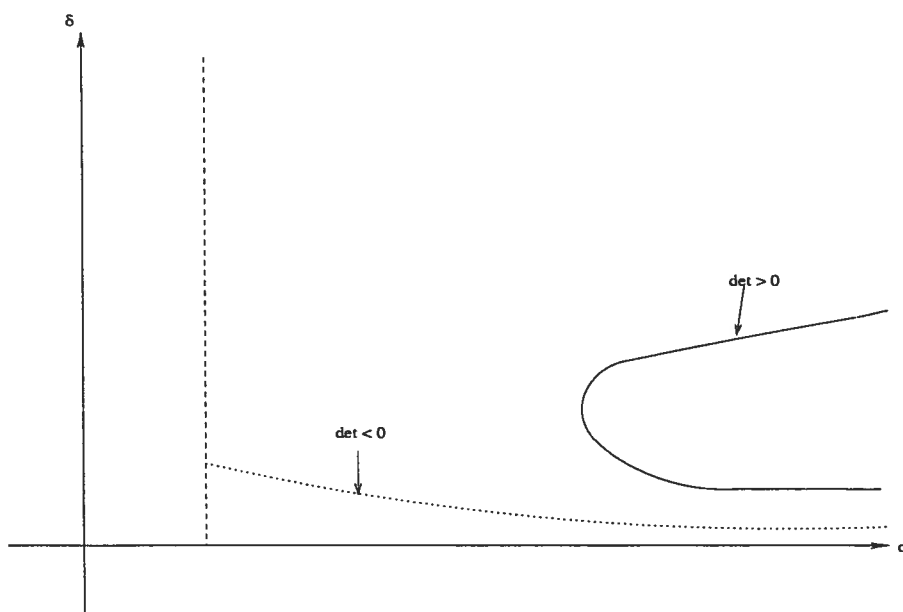


FIG. 3.2.5. Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $\beta = -2$.

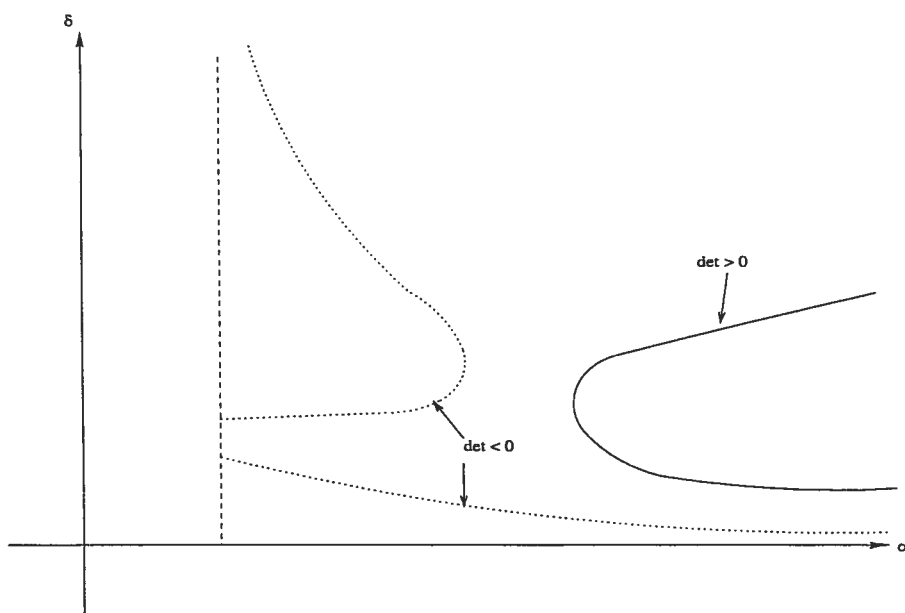


FIG. 3.2.6. Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $-2 > \beta > -4$.

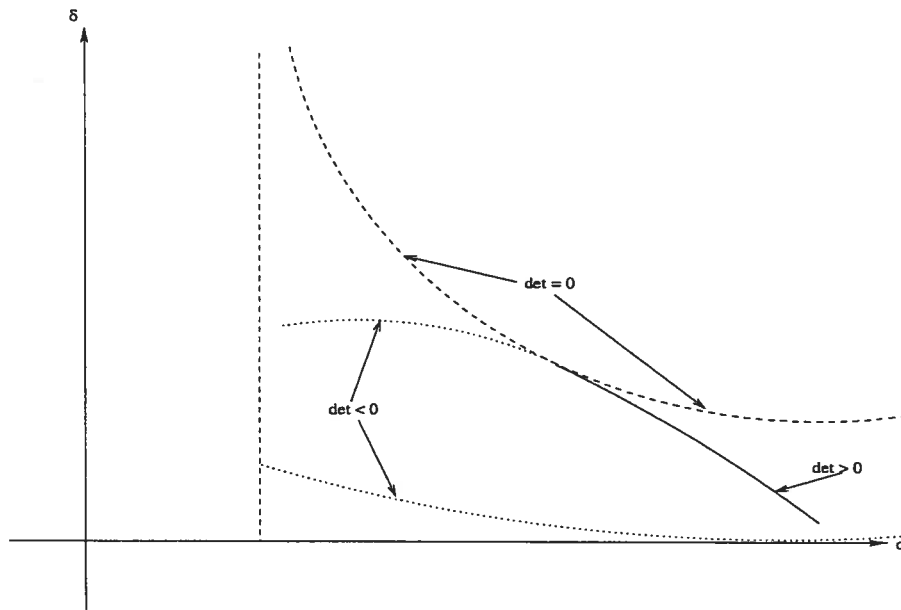


FIG. 3.2.7. Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $\beta = -4$.

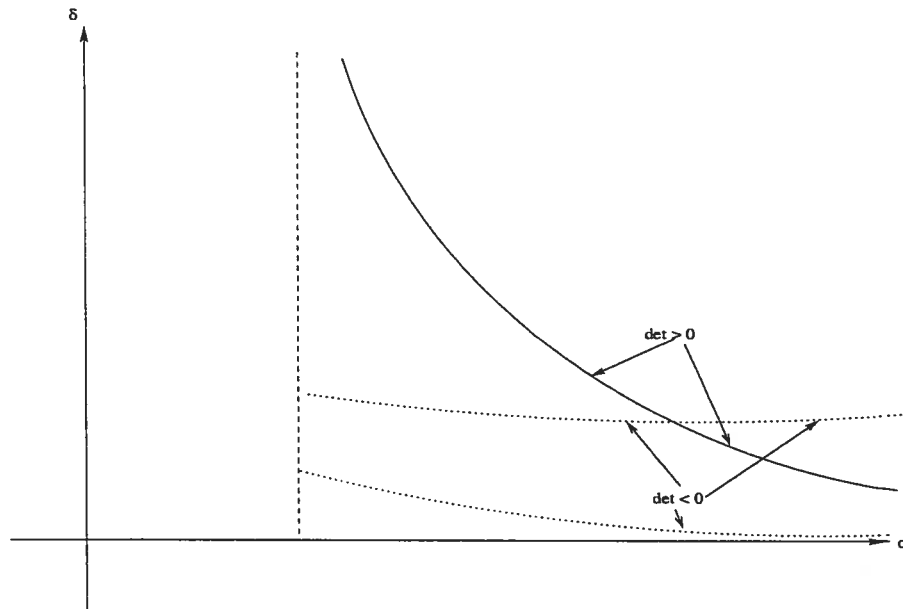


FIG. 3.2.8. Graphique de $P(\alpha, \beta, \delta)$ pour $\beta < -4$.

Pour une bifurcation de Hopf, nous devons nous assurer que la trace s'annule lorsque le déterminant est positif. Aussi, sur chaque courbe dans l'espace des paramètres nous prenons un point. Ainsi α, β et δ sont définis. Comme il n'y a aucune dépendance en ρ , nous le fixons à 1. En remplaçant ces valeurs dans le système 3.1.1, nous pouvons trouver explicitement les points singuliers. S'ils sont

dans le domaine $X^* > 0$ $Y^* > 0$, nous calculons la trace, laquelle doit être nulle, et le déterminant de la matrice jacobienne en ce point. Si le déterminant est négatif lorsque la trace est nulle, nous avons un point de selle. Nous pouvons donc éliminer cette courbe. Par contre, si le déterminant est positif quand la trace est nulle, un cycle limite aura la possibilité de naître. Nous gardons alors ces courbes. Les calculs ont été faits avec Mathematica et les résultats sur le signe du déterminant sont également donnés aux graphiques 3.2.4 à 3.2.8.

Nous pouvons représenter toutes les surfaces de bifurcation que nous avons obtenues jusqu'à maintenant sur un seul graphique pour chacune des valeurs de β choisies. Les représentations sont aux figures 3.2.9 à 3.2.14.

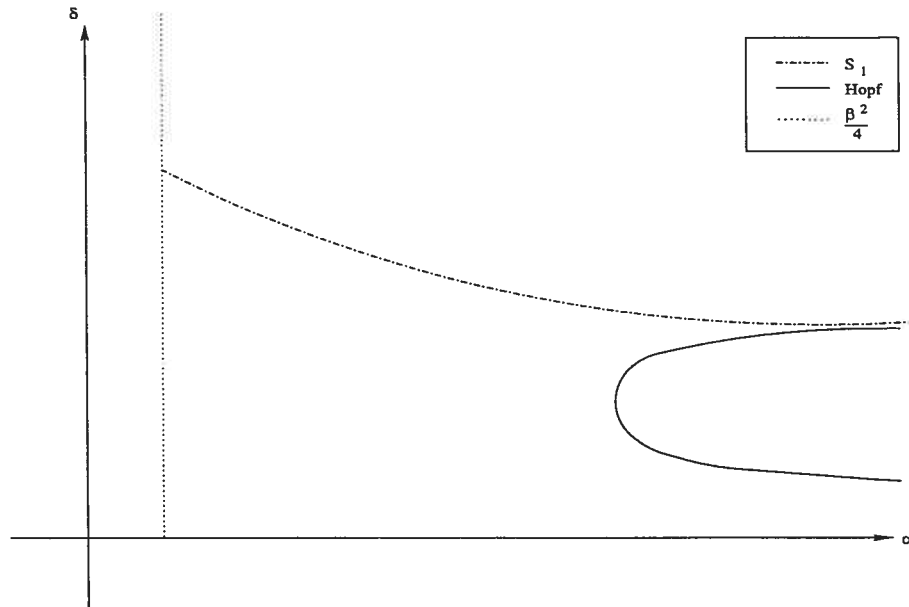


FIG. 3.2.9. Graphique des surfaces de bifurcation pour $0 > \beta > -2$.

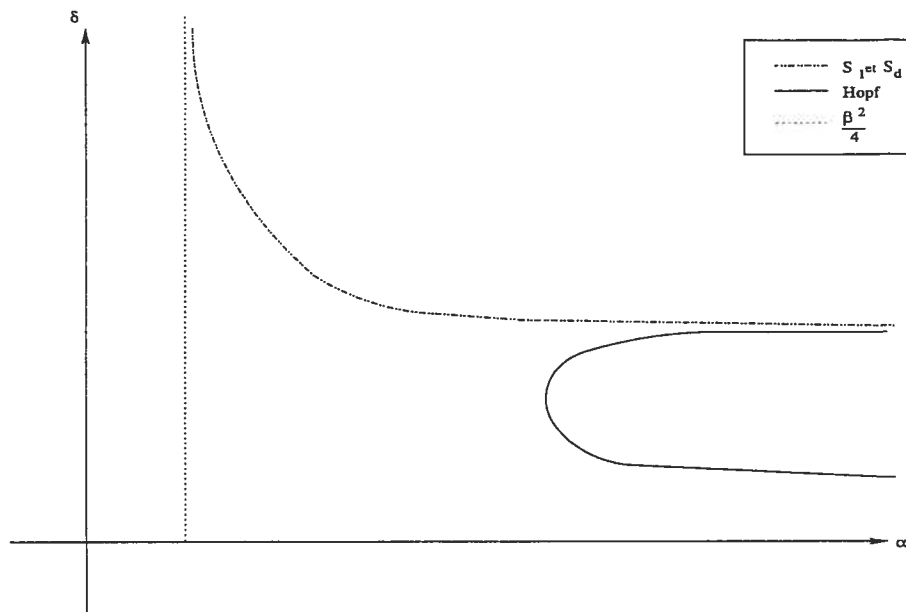


FIG. 3.2.10. Graphique des surfaces de bifurcation pour $\beta = -2$.

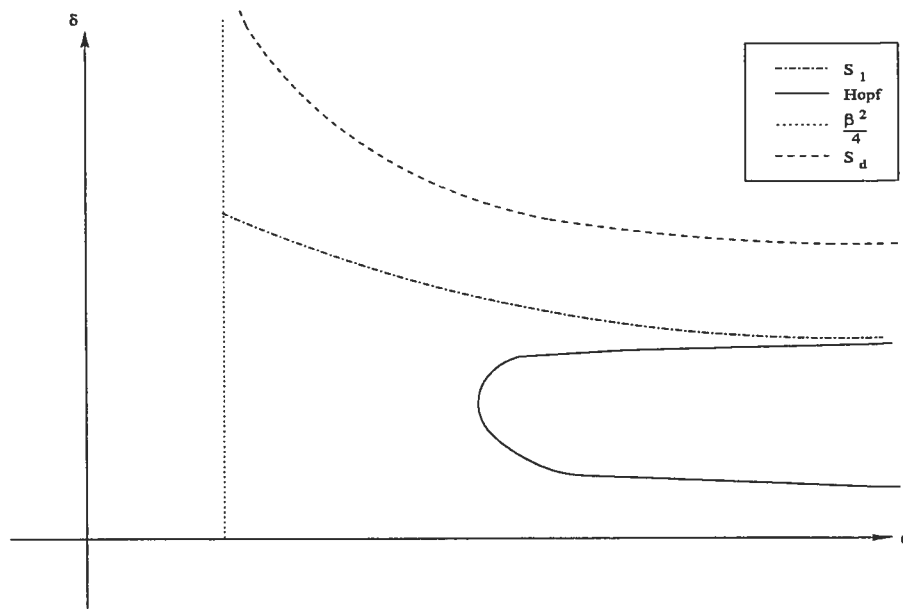


FIG. 3.2.11. Graphique des surfaces de bifurcation pour $-2 > \beta \geq -3$.

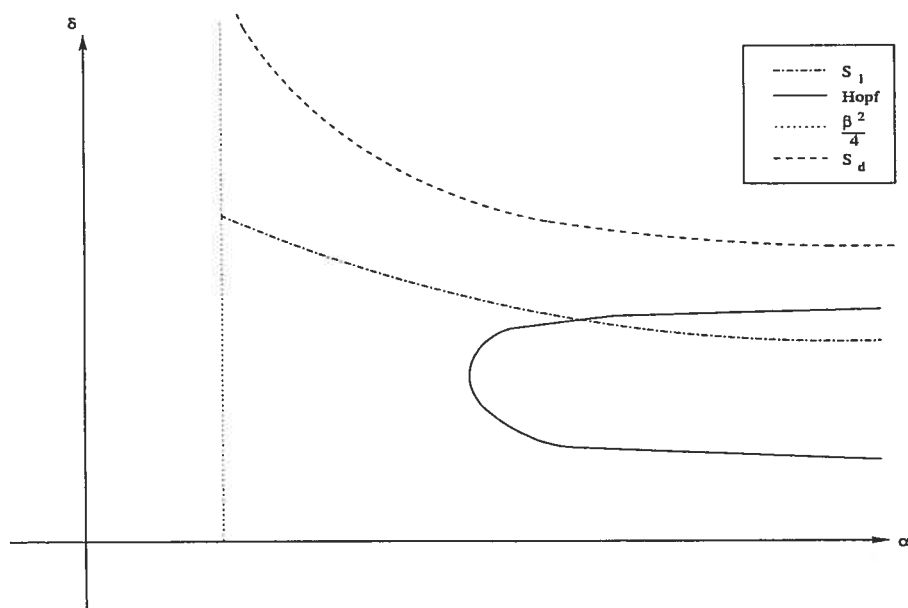


FIG. 3.2.12. Graphique des surfaces de bifurcation pour $-3 > \beta > -4$.

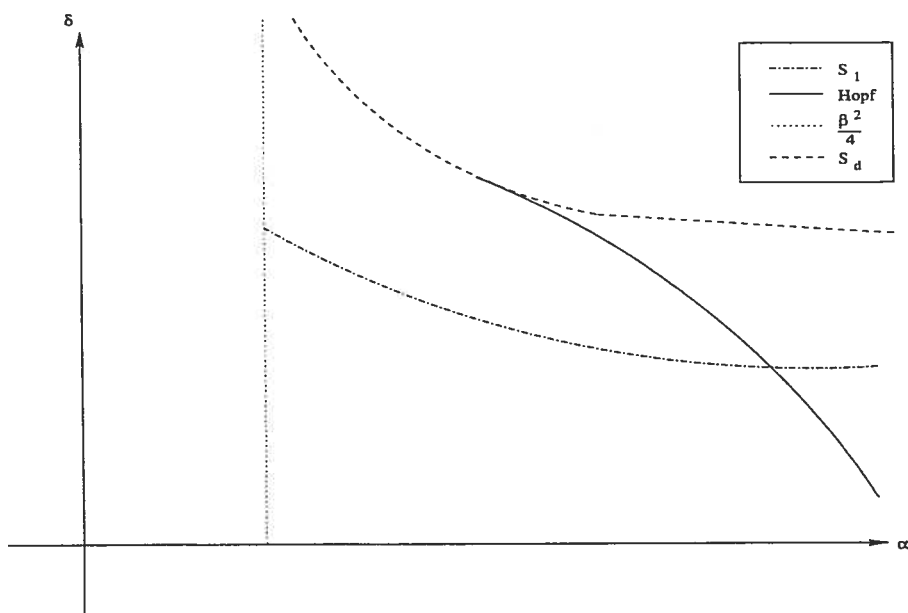


FIG. 3.2.13. Graphique des surfaces de bifurcation pour $\beta = -4$.

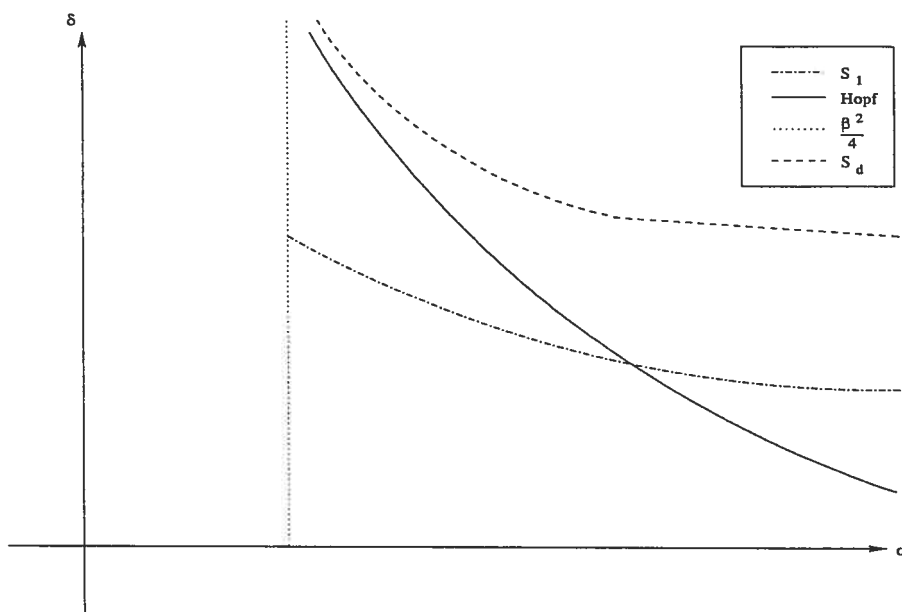


FIG. 3.2.14. Graphique des surfaces de bifurcation pour $\beta < -4$.

3.3. ÉTUDE DU POINT SINGULIER $(1, 0)$ LORSQUE LES PARAMÈTRES SONT SUR LA SURFACE S_1

Nous avons obtenu à la section précédente que le point $(1, 0)$ est de type différent selon que δ soit plus grand ou plus petit que $\frac{1}{\alpha+\beta+1}$. En d'autres termes, nous avons deux situations distinctes selon que nous sommes au-dessus ou au-dessous de la surface S_1 . Un changement survient lorsque nous traversons cette surface. Le signe de la valeur propre λ_2 change mais celui de λ_1 reste le même. Ainsi, sur la surface $\delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, λ_2 s'annule. Le point $(1, 0)$ devient alors un point double si $\beta \neq -2$ et un point triple si $\beta = -2$. Nous examinerons ces deux cas séparément afin de déterminer le type de point singulier que nous avons en $(1, 0)$.

- Le point singulier $(1, 0)$ est un point double : $\beta \neq -2$.

Commençons par le cas du point double lorsque $\beta \neq -2$. Nous nous rappelons qu'au chapitre précédent, nous avons trouvé que pour $\beta < -2$, le point de droite passe par $(1, 0)$ alors que pour $\beta > -2$, c'est celui de gauche.

Nous considérons le système 3.1.1. Pour faire les transformations, nous avons utilisé le logiciel Mathematica.

Nous ramenons la singularité $(1, 0)$ à l'origine à l'aide de la transformation suivante :

$$\begin{aligned} X_1 &= X - 1, \\ Y_1 &= Y, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + 1, \\ Y &= Y_1. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

D'où, notre système devient :

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dT} &= -\rho X_1^2 - \rho X_1 - \frac{Y_1 X_1^2 + 2X_1 Y_1 + Y_1}{\alpha X_1^2 + (2\alpha + \beta)X_1 + (\alpha + \beta + 1)}, \\ \frac{dY_1}{dT} &= -\delta Y_1 + \frac{Y_1 X_1^2 + 2X_1 Y_1 + Y_1}{\alpha X_1^2 + (2\alpha + \beta)X_1 + (\alpha + \beta + 1)}.\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

Nous souhaitons maintenant diagonaliser la partie linéaire du système. Pour ce faire, nous devons trouver la matrice nous le permettant. La matrice jacobienne du système 3.3.3 évaluée à l'origine est :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\rho & \frac{-1}{\alpha + \beta + 1} \\ 0 & -\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \end{pmatrix}.$$

Comme nous sommes sur la surface S_1 , nous avons $\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$. Ainsi $A_{(0,0)}$ devient :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\rho & \frac{-1}{\alpha + \beta + 1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A_{(0,0)}$ sont $\lambda_1 = -\rho$ et $\lambda_2 = 0$. Elles ont respectivement comme vecteurs propres $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (\frac{-1}{\rho(\alpha + \beta + 1)}, 1)$. Par ailleurs, nous obtenons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\rho(\alpha + \beta + 1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme matrice de changement de base. La matrice inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\rho(\alpha + \beta + 1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, en calculant $D = P^{-1}A_{(0,0)}P$, nous obtenons bien une matrice diagonale. Nous transformons notre système à l'aide de P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}.$$

En dérivant, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le système en X_2 et Y_2 est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= \dot{X}_1 + \frac{\dot{Y}_1}{\rho(\alpha+\beta+1)}, \\ \dot{Y}_2 &= \dot{Y}_1. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Dans lequel \dot{X}_1 et \dot{Y}_1 sont définis au système 3.3.3. Ainsi, en les substituant nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -\rho X_1^2 - \rho X_1 + \left(\frac{1}{\rho(\alpha+\beta+1)} - 1 \right) \left(\frac{Y_1 X_1^2 + 2X_1 Y_1 + Y_1}{\alpha X_1^2 + (2\alpha+\beta)X_1 + (\alpha+\beta+1)} \right) - \frac{\delta Y_1}{\rho(\alpha+\beta+1)}, \\ \dot{Y}_2 &= -\delta Y_1 + \frac{Y_1 X_1^2 + 2X_1 Y_1 + Y_1}{\alpha X_1^2 + (2\alpha+\beta)X_1 + (\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Pour exprimer les équations précédentes uniquement en X_2 et en Y_2 , nous utilisons la transformation :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui est équivalent à remplacer X_1 et Y_1 par :

$$\begin{aligned} X_1 &= X_2 - \frac{Y_2}{\rho(\alpha+\beta+1)}, \\ Y_1 &= Y_2, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

dans le système 3.3.5. Ainsi, le système en X_2 et Y_2 qui en résulte est un système diagonal. Nous nous intéressons plus particulièrement au coefficient de Y_2^2 dans l'équation \dot{Y}_2 .

Dans le but de simplifier les calculs, nous utiliserons le système 3.3.5 auquel nous n'avons pas appliqué la transformation 3.3.6. Nous travaillons avec la deuxième équation de ce système. Dans cette dernière, le facteur

$$\frac{1}{\alpha X_1^2 + (2\alpha + \beta)X_1 + (\alpha + \beta + 1)} \quad (3.3.7)$$

peut se réécrire comme

$$\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \left(\frac{1}{1 + n} \right) \quad \text{où} \quad n = \frac{\alpha X_1^2}{\alpha + \beta + 1} + \frac{(2\alpha + \beta)X_1}{\alpha + \beta + 1}. \quad (3.3.8)$$

De plus, nous savons que

$$\frac{1}{1 + n} = 1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \dots \quad (3.3.9)$$

Ainsi nous obtenons :

$$\frac{1}{\alpha X_1^2 + (2\alpha + \beta)X_1 + (\alpha + \beta + 1)} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} (1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \dots) \quad (3.3.10)$$

où n est défini de la même manière qu'à l'expression 3.3.8. L'équation \dot{Y}_2 devient donc, sachant que $\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$:

$$\dot{Y}_2 = \frac{-Y_1}{\alpha + \beta + 1} + \frac{Y_1 X_1^2 + 2X_1 Y_1 + Y_1}{\alpha + \beta + 1} (1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \dots). \quad (3.3.11)$$

En utilisant la transformation 3.3.6 et en réarrangeant les termes, nous obtenons l'équation \dot{Y}_2 en coordonnées X_2 et Y_2 . De cette équation, en utilisant le logiciel Mathematica, il est possible d'extraire le coefficient de Y_2^2 . Nous remarquons que

le terme en Y_2^2 provient de la somme de deux termes de l'équation 3.3.11 : l'un vient de $\frac{2X_1Y_1}{\alpha+\beta+1}$ et l'autre de $\frac{-nY_1}{\alpha+\beta+1}$. Ainsi, nous avons :

$$\text{coef}(Y_2^2) = -\frac{2 + \beta}{\rho(\alpha + \beta + 1)^3}. \quad (3.3.12)$$

Comme nous étudions le point double, nous nous limitons au cas où $\beta \neq -2$. Par conséquent :

$$\text{coef}(Y_2^2) \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 > \beta > -2, \\ > 0 & \text{si } \beta < -2. \end{cases} \quad (3.3.13)$$

Nous avons un col-nœud. Si $0 > \beta > -2$, le col-nœud est attractif et il est représentée sur le graphique 3.3.1.

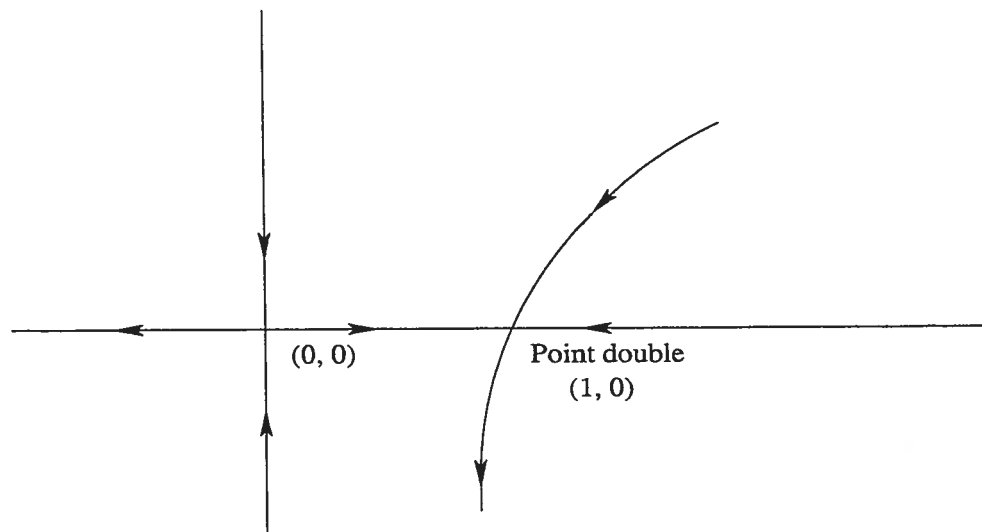


FIG. 3.3.1. Col-nœud (point double) en $(1, 0)$ lorsque $0 > \beta > -2$.

Tandis que si $\beta < -2$, nous avons un col-nœud répulsif lequel est représenté au graphique 3.3.2.

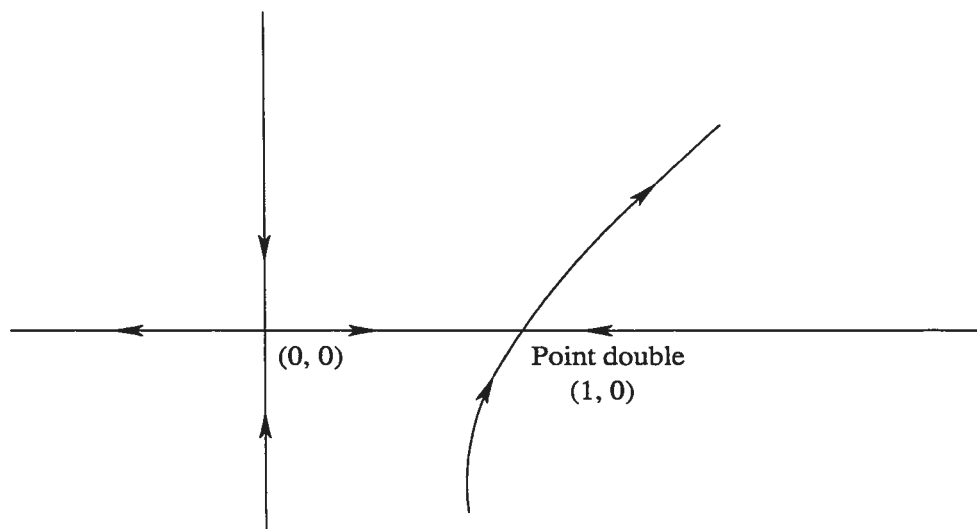


FIG. 3.3.2. Col-nœud (point double) en $(1, 0)$ lorsque $\beta < -2$.

- Le point singulier $(1, 0)$ est un point triple : $\beta = -2$.

Précédemment nous avons traité le cas du point double en étudiant le coefficient de Y_2^2 . Nous remarquons que ce dernier s'annule pour $\beta = -2$ et nous avons un point triple en $(1, 0)$. En effet, le point double passe par $(1, 0)$ car, rappelons-nous qu'en $\beta = -2$, les surfaces S_1 et S_d se croisent. Pour étudier ce point triple, nous devons trouver le coefficient de Y_2^3 dans la forme normale.

Nous remarquons qu'en posant $\beta = -2$ dans l'équation 3.3.11, tous les termes de degré deux disparaissent et que l'équation de \dot{Y}_2 devient :

$$\dot{Y}_2 = -\frac{Y_2^3}{(\alpha - 1)^4 \rho^2} + X_2 O(|X_2, Y_2|^2) + o(|X_2, Y_2|^3), \quad (3.3.14)$$

et celle de

$$\dot{X}_2 = \rho X_2 + o(|X_2, Y_2|). \quad (3.3.15)$$

Normalement, pour trouver les termes en Y_2^3 dans \dot{Y}_2 , il faudrait éliminer dans l'équation de \dot{X}_2 les termes de degré deux à l'aide d'un changement de coordonnées :

$$X_2 = X_3 + A_{20}X_3^2 + A_{11}X_3Y_2 + A_{02}Y_2^2. \quad (3.3.16)$$

Toutefois, nous remarquons qu'un tel changement de coordonnées n'affectera pas le terme en Y_2^3 dans l'équation \dot{Y}_2 . Le système sous forme normale s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= \rho X_3 + o(|X_3, Y_2|^2), \\ \dot{Y}_2 &= -\frac{Y_2^3}{(\alpha-1)^4 \rho^2} + X_3 O(|X_3, Y_2|^2) + o(|X_3, Y_2|^3). \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Ce qui nous donne que le coefficient de Y_2^3 est toujours négatif, d'où le point $(1, 0)$ lorsque $\beta = -2$ est un nœud topologique attractif lequel est représenté au graphique 3.3.3.

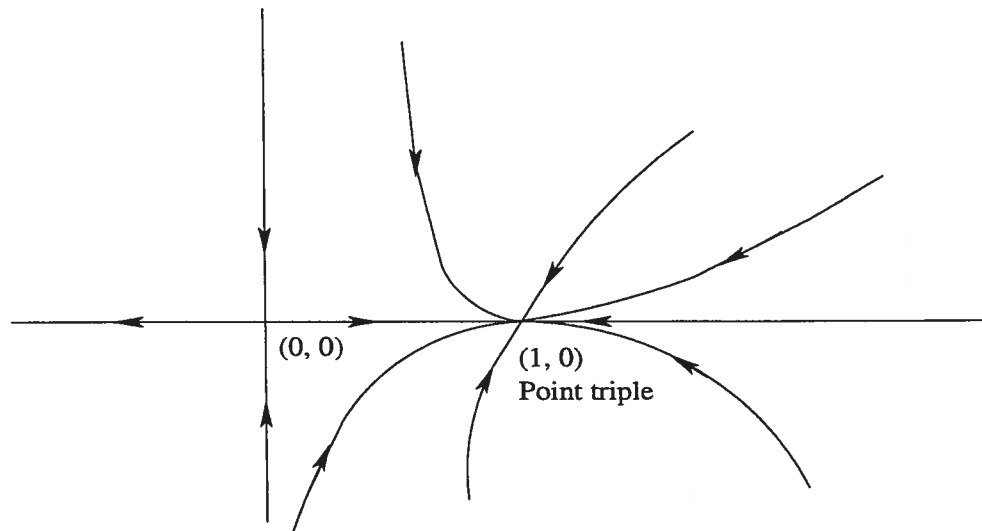


FIG. 3.3.3. Nœud attractif (point triple) en $(1, 0)$ lorsque $\beta = -2$.

3.4. ÉTUDE DU POINT SINGULIER, AUTRE QUE $(1, 0)$, LORSQUE LES PARAMÈTRES SONT SUR LA SURFACE S_1 ET QUE $\beta < -2$

Dans la section précédente, nous avons traité le cas du point singulier $(1, 0)$ lorsque nos paramètres étaient sur la surface S_1 de l'espace des paramètres. Ici, nous aborderons le cas du type du point singulier :

$$(X^*, Y^*) = \left(\frac{\delta}{\alpha\delta - 1}, \frac{\rho}{(\alpha\delta - 1)^2} (\delta(\alpha - 1) - 1) \right), \quad (3.4.1)$$

qui existe lorsque $\beta < -2$ et que les paramètres sont sur S_1 . De plus, il est possible d'éliminer le paramètre δ . En effet, l'équation de S_1 est $\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$.

Nous considérons le système 3.1.1 et sa matrice jacobienne donnée au début de la section 3.1. Ainsi, la matrice jacobienne évaluée en (X^*, Y^*) est la suivante :

$$M_{(X^*, Y^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho(1+4\beta+4\beta^2+\beta^3-\alpha(\beta+3))}{(\beta+1)(\alpha+\beta+1)} & -\frac{1}{\alpha+\beta+1} \\ \frac{\rho(\beta+2)^2}{\alpha+\beta+1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.2)$$

Nous constatons que son déterminant est positif :

$$\text{Det}(M_{(X^*, Y^*)}) = \frac{\rho(\beta+2)^2}{(\alpha+\beta+1)^2} > 0. \quad (3.4.3)$$

Par conséquent, nous devons déterminer le signe de la trace de $M_{(X^*, Y^*)}$. Nous avons que la trace est donnée par :

$$\text{Tr}(M_{(X^*, Y^*)}) = -\frac{\rho(1+4\beta+4\beta^2+\beta^3-\alpha(\beta+3))}{(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}. \quad (3.4.4)$$

D'où, son signe dépend de celui de :

$$1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3),$$

étant donné que :

$$-\frac{\rho}{(\beta+1)(\alpha+\beta+1)} > 0. \quad (3.4.5)$$

Ainsi, nous avons que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M_{(X^*, Y^*)}) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) = 0, \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1+4\beta+4\beta^2+\beta^3}{\beta+3}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Nous devons déterminer si cette condition survient dans notre domaine de paramètres admissibles $\beta^2 < 4\alpha$ et, ici, $\beta < -2$. Or, comme nous le voyons sur le graphique 3.4.1, la courbe où la trace est nulle, définie par $\alpha = \frac{1+4\beta+4\beta^2+\beta^3}{\beta+3}$ et S_1 , a une branche à l'intérieur de la région des paramètres admissibles.

Donc, nous obtenons que

$$\text{Tr}(M_{(X^*, Y^*)}) \begin{cases} < 0 & \text{si } 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) < 0, \\ = 0 & \text{si } 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) = 0, \\ > 0 & \text{si } 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) > 0. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Nous avons indiqué chacune des possibilités au graphique 3.4.1. En particulier, nous voyons qu'à la limite, quand $\beta \rightarrow -2$, le point singulier est un nœud attractif. C'est bien ce qu'on voulait obtenir pour avoir un bon recollement avec le dessin de la figure 3.3.3.

Pour les paramètres qui font en sorte que $\text{Tr}(M_{(X^*, Y^*)}) < 0$, le point singulier est un nœud ou un foyer attractif. Dans le cas où $\text{Tr}(M_{(X^*, Y^*)}) > 0$, le point singulier est un nœud ou un foyer répulsif. Maintenant, nous nous attarderons à étudier la singularité (X^*, Y^*) à l'endroit où la trace de $M_{(X^*, Y^*)}$ est nulle. C'est là une condition pour avoir une bifurcation de Hopf. Nous sommes alors sur la courbe définie par $S_1 : \delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$ et $\alpha = \frac{1+4\beta+4\beta^2+\beta^3}{\beta+3}$. Pour décrire le comportement autour de la singularité, nous examinerons le signe des coefficients des termes de la forme normale.

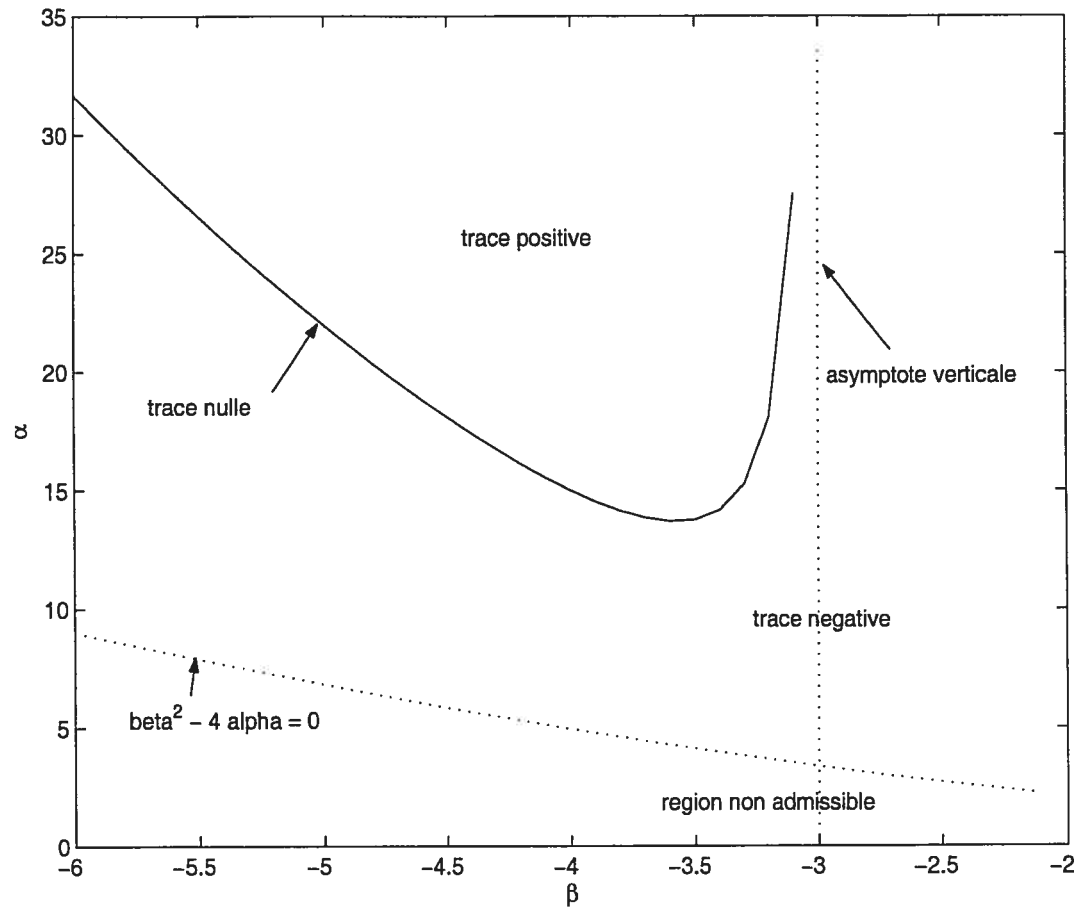


FIG. 3.4.1. Endroits où la trace de $M_{(X^*, Y^*)}$ s'annule.

Nous considérons le système 3.1.1 auquel nous appliquons la transformation suivante pour ramener la singularité à l'origine :

$$\begin{aligned} X_1 &= X - X^*, \\ Y_1 &= Y - Y^*. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Notre système devient donc :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \dot{X}, \\ \dot{Y}_1 &= \dot{Y}, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

dans lequel nous devons remplacer X et Y par leur expression en X_1 et Y_1 :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X^*, \\ Y &= Y_1 + Y^*. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Ainsi, la singularité est à l'origine lorsqu'on considère le système 3.4.9 dont la matrice jacobienne évaluée à l'origine est :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} \\ \frac{(3+\beta)\rho}{1+\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.11)$$

Elle ne dépend que de β et de ρ car, comme nous l'avons mentionné précédemment δ et α peuvent être exprimés par rapport à β et ρ . Maintenant nous voulons avoir notre système sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -wY_2 + O(|X_2, Y_2|^2), \\ \dot{Y}_2 &= wX_2 + O(|X_2, Y_2|^2). \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Pour ce faire, nous utilisons la transformation :

$$\begin{aligned} X_2 &= -\frac{\beta+3}{(\beta+1)(\beta+2)^2} Y_1, \\ Y_2 &= wX_1, \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

où $w = \sqrt{\rho} \left| \frac{\beta+3}{(\beta+1)(\beta+2)} \right|$. Elle est obtenue de la façon suivante. Nous calculons les valeurs propres et les vecteurs propres associées à celles-ci pour la matrice $J_{(0,0)}$.

La matrice des vecteurs propres est :

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} & -\frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} \\ i\sqrt{\frac{(3+\beta)^2\rho}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2}} & -i\sqrt{\frac{(3+\beta)^2\rho}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2}} \end{pmatrix}. \quad (3.4.14)$$

Et son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{(3+\beta)^2\rho}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2}} & -\frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} \\ i\sqrt{\frac{(3+\beta)^2\rho}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2}} & \frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.4.15)$$

Ainsi, nous pouvons transformer le système réel en un système complexe afin de trouver la transformation :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Z \\ \bar{Z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (3.4.16)$$

D'où,

$$Z = \frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} Y + i \sqrt{\frac{(3+\beta)^2 \rho}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2}} X. \quad (3.4.17)$$

Nous prenons comme changement de variables :

$$X_1 = \operatorname{Re}(Z) = -\frac{3+\beta}{(1+\beta)(2+\beta)^2} Y, \quad (3.4.18)$$

$$Y_1 = \operatorname{Im}(Z) = -\sqrt{\frac{(3+\beta)^2 \rho}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2}} X.$$

Et nous posons $w = \sqrt{\rho} \left| \frac{\beta+3}{(\beta+1)(\beta+2)} \right|$. Après avoir appliqué cette transformation, nous avons donc le système :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -\frac{\beta+3}{(\beta+1)(\beta+2)^2} \dot{Y}_1, \\ \dot{Y}_2 &= w \dot{X}_1, \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

où

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{Y_2}{w}, \\ Y_1 &= -\frac{(\beta+1)(\beta+2)^2}{\beta+3} X_2. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Après avoir effectué toutes ces opérations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= \frac{(\beta+3)^2 ((\beta+2)\rho + (\beta+1)^2 X_2) Y_2 (-\beta+2)w + (\beta+1)Y_2}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2 ((\beta+2)^2 w^2 - (\beta+1)^2(\beta+2)wY_2 + (\beta+1)^2(\beta^2+3\beta+1)Y_2^2)}, \\ \dot{Y}_2 &= \frac{(-w+Y_2+\beta Y_2) (-\beta+2)^2 w^3 X_2 + (\beta+1)(\beta+2)^2 w^2 X_2 Y_2 + (4+10\beta+6\beta^2+\beta^3)\rho w Y_2^2 - (1+4\beta+4\beta^2+\beta^3)\rho Y_2^3}{w((\beta+2)^2 w^2 - (\beta+1)^2(\beta+2)wY_2 + (\beta+1)^2(1+3\beta+\beta^2)Y_2^2)}. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Pour écrire ces deux équations sous forme de séries, que nous pourrons ensuite tronquer, nous utilisons la même technique qu'à la section 3.3 qui consiste à modifier chacune des équations de la façon suivante :

$$\frac{1}{\text{dénominateur}} = \text{constante} X \left(\frac{1}{1+n} \right), \quad (3.4.22)$$

où n sera un polynôme du second degré. Ensuite, nous utilisons le développement :

$$\frac{1}{1+n} = 1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \dots \quad (3.4.23)$$

pour obtenir les séries. Cette étape a été réalisée à l'aide du logiciel Mathematica.

Ainsi, notre nouveau système est de la forme souhaitée :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -wY_2 + O(|X_2, Y_2|^2), \\ \dot{Y}_2 &= wX_2 + O(|X_2, Y_2|^2). \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

En posant :

$$Z_2 = X_2 + iY_2,$$

ce système peut être mis sous la forme suivante :

$$\dot{Z}_2 = iwZ_2 + o(|Z_2|). \quad (3.4.25)$$

En éliminant les termes non-résonnants, nous pouvons ramener cette équation sous forme normale. Nous obtenons alors :

$$\dot{Z}_3 = iwZ_3 + c_1 Z_3^2 \overline{Z}_3 + c_2 Z_3^3 \overline{Z}_3^2 + \dots \quad (3.4.26)$$

Nous nous intéressons aux signes des parties réelles des coefficients de la forme normale. Une fois le système 3.4.24 sous la forme précédente 3.4.26, la partie réelle du premier coefficient est :

$$Re(c_1) = \frac{(\beta + 1)^3(\beta^3 + 7\beta^2 + 11\beta + 3)}{8(\beta + 3)^2}. \quad (3.4.27)$$

Ce résultat a été obtenu à l'aide de Mathematica et vérifié ensuite avec la formule de la partie réelle de c_1 , laquelle est connue et se trouve dans [GH]. Nous nous rappelons que la trace est nulle pour des valeurs de $\beta < -3$. Nous l'observons à la figure 3.4.1. Par conséquent, nous aurons :

$$Re(c_1) = 0 \Leftrightarrow \beta^3 + 7\beta^2 + 11\beta + 3 = 0. \quad (3.4.28)$$

Nous observons, à la figure 3.4.2, que ce polynôme possède une racine $\beta^* < -3$.

Nous obtenons donc :

$$Re(c_1) = 0 \Leftrightarrow \beta^* \approx -4,866.$$

D'où, le signe de $Re(c_1)$ est :

$$Re(c_1) \begin{cases} < 0 & \text{si } -3 > \beta > \beta^*, \\ = 0 & \text{si } \beta = \beta^*, \\ > 0 & \text{si } \beta < \beta^*. \end{cases}$$

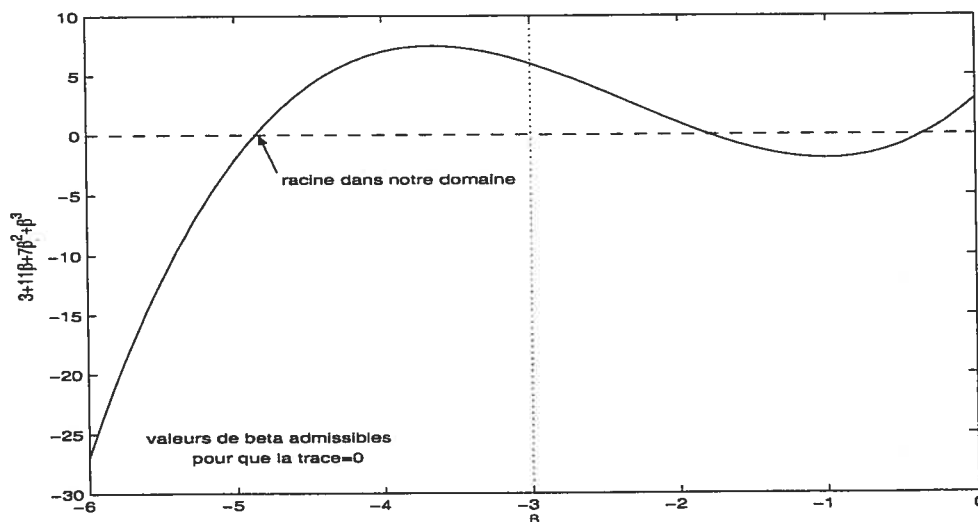


FIG. 3.4.2. Endroits où $\beta^3 + 7\beta^2 + 11\beta + 3 = 0$.

Comme $Re(c_1) = 0$ dans notre domaine, nous aurons une bifurcation de Hopf d'ordre deux. Nous devons donc trouver le signe de la partie réelle du coefficient c_2 de la forme normale, notée $Re(c_2)$, à cet endroit.

La formule permettant de déterminer $Re(c_2)$ a été trouvée à l'aide d'un programme réalisé avec Mathematica. Ce programme a été validé avec six systèmes dont le résultat pour $Re(c_2)$ est connu. Les systèmes utilisés sont :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - 10x^2 + 5xy + y^2, \\ \dot{y} &= x + x^2 - 25xy.\end{aligned}\tag{3.4.29}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2, \\ \dot{y} &= x + x^2 - (25 + 9\delta)xy.\end{aligned}\tag{3.4.30}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - (\omega + \delta - \alpha)x^3 - (\eta - 3\mu)x^2y - (3\omega - 3\delta + 2\alpha)xy^2 - (\mu - \nu)y^3, \\ \dot{y} &= x + (\mu + \nu)x^3 + (3\omega + 3\delta + 2\alpha)x^2y + (\eta - 3\mu)xy^2 + (\omega - \delta - \alpha)y^3.\end{aligned}\tag{3.4.31}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x^3 + b_5x^2y + b_6xy^2.\end{aligned}\tag{3.4.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ax^2 + (b + 2d)xy + cy^2 - y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + dx^2 + (e - 2a)xy - dy^2 + x(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{3.4.33}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ax^2 + bxy + ey^2 - y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + cx^2 + dxy + x(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{3.4.34}$$

Ainsi, en utilisant le programme pour le système 3.4.24, nous avons trouvé que :

$$Re(c_2) \approx - \left(\frac{7,52 \times 10^{-12} + 21102\rho}{\rho^2} \right) < 0 \quad \text{lorsque} \quad Re(c_1) = 0. \tag{3.4.35}$$

Dans ces conditions, la théorie nous prédit le comportement décrit à la figure 3.4.3. Ainsi, comme nous pouvons le remarquer à la figure 3.4.3, au-dessus de la courbe où la trace est nulle, le point singulier est répulsif alors qu'en dessous, il est attractif. En (c), nous obtenons un cycle limite attractif de l'extérieur et répulsif de l'intérieur. Une fois que nous sommes passés par la position (c), c'est-à-dire la courbe des cycles limites doubles, nous avons la situation (d). Nous obtenons dans ce cas deux cycles limites dont l'un est répulsif et l'autre attractif. Ensuite en traversant la courbe où la trace est nulle, nous sommes dans le cas (e) et nous

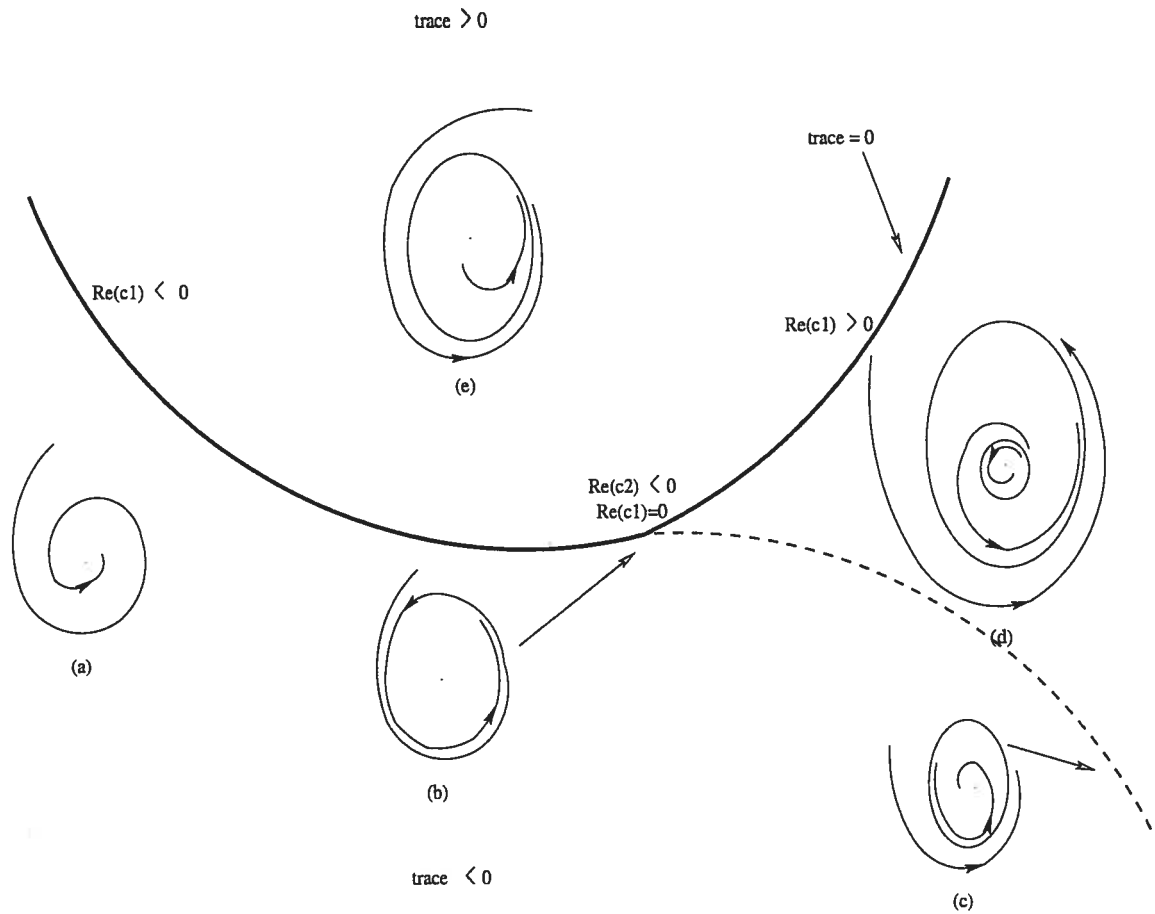


FIG. 3.4.3. Résumé du comportement local des cycles limites prédit par la théorie.

n'avons plus qu'un seul cycle limite lequel est attractif.

3.5. ÉTUDE DU POINT SINGULIER DOUBLE LORSQUE LES PARAMÈTRES SONT SUR S_d ET QUE $\beta < -2$

Dans cette section, nous étudions le point singulier double :

$$(X^*, Y^*) = \left(-\frac{2}{\beta}, -\frac{2\rho(\beta + 2)}{\delta\beta^2} \right), \quad (3.5.1)$$

afin de déterminer son type suivant les différentes valeurs de paramètres. Ce point existe lorsque $\beta < -2$ et que les paramètres sont sur S_d : $\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$.

Nous considérons le système 3.1.1. Comme nous sommes sur S_d , il est possible d'éliminer le paramètre δ puisque $\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}$. La matrice jacobienne de ce système évaluée en (X^*, Y^*) est la suivante :

$$M_{(X^*, Y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\rho(4+\beta)}{\beta} & \frac{4}{-4\alpha + \beta^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.2)$$

Nous avons donc une valeur propre nulle et une autre non-nulle dont la valeur est $\frac{\rho(\beta+4)}{\beta}$. Ainsi, lorsque $\beta \neq -4$, le point singulier (X^*, Y^*) est un col-nœud. Ce dernier est répulsif si $\beta < -4$ car, dans ce cas, la valeur propre non-nulle est positive. Alors que pour $-2 > \beta > -4$, la valeur propre étant négative, le col-nœud est attractif.

Examinons maintenant le cas $\beta = -4$ pour lequel nous avons deux valeurs propres nulles. Nous ramenons la singularité à l'origine en posant :

$$\begin{aligned} X_1 &= X - X^* & \Leftrightarrow & X = X_1 + X^*, \\ Y_1 &= Y - Y^* & & Y = Y_1 + Y^*. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Nous obtenons alors un nouveau système en X_1 et Y_1 :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \frac{\rho}{4} - \rho X_1^2 - \frac{(\frac{1}{2} + X_1)^2 (\frac{1}{16}(-16 + 4\alpha)\rho + Y_1)}{1 - 4(\frac{1}{2} + X_1) + \alpha(\frac{1}{2} + X_1)^2}, \\ \dot{Y}_1 &= -\frac{\rho}{4} - \frac{Y_1}{\alpha - 4} + \frac{(\frac{1}{2} + X_1)^2 (\frac{1}{16}(-16 + 4\alpha)\rho + Y_1)}{1 - 4(\frac{1}{2} + X_1) + \alpha(\frac{1}{2} + X_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

En utilisant les séries de Taylor comme nous l'avons fait à la section précédente, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \frac{Y_1}{4 - \alpha} - \frac{(-8 + \alpha)\rho}{-4 + \alpha} X_1^2 - \frac{16\rho}{-4 + \alpha} X_1^3 + \frac{16}{(-4 + \alpha)^2} X_1^2 Y_1 + \frac{16(-16 + 3\alpha)\rho}{(-4 + \alpha)^2} X_1^4 \\ &\quad - \frac{64}{(-4 + \alpha)^2} X_1^3 Y_1 + \dots \\ \dot{Y}_1 &= -\frac{4\rho}{-4 + \alpha} X_1^2 + \frac{16}{-4 + \alpha} X_1^3 - \frac{16}{(-4 + \alpha)^2} X_1^2 Y_1 + \frac{16(16 - 3\alpha)\rho}{(-4 + \alpha)^2} X_1^4 \\ &\quad + \frac{64}{(-4 + \alpha)^2} X_1^3 Y_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

La matrice jacobienne, évaluée en $(0, 0)$, de ce système :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4 - \alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.6)$$

n'est pas diagonalisable car $\frac{1}{4-\alpha} \neq 0$. Cette dernière est donc une matrice de Jordan et nous avons une bifurcation de Bogdanov-Takens si $\beta = -4$.

Pour la suite des calculs, nous conserverons que les termes d'ordre inférieur ou égal à quatre. Les termes d'ordres supérieurs n'influencent pas nos résultats.

Nous voulons mettre le système 3.5.5 sous la forme suivante afin d'étudier la bifurcation de Bogdanov-Takens :

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= Y_2, \\ \dot{Y}_2 &= AX_1^2 + BX_1Y_2 + \dots\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

Posons :

$$\begin{aligned}Y_2 &= \frac{Y_1}{4-\alpha} - \frac{(-8+\alpha)\rho}{-4+\alpha}X_1^2 - \frac{16\rho}{-4+\alpha}X_1^3 + \frac{16}{(-4+\alpha)^2}X_1^2Y_1 + \frac{16(-16+3\alpha)\rho}{(-4+\alpha)^2}X_1^4 - \frac{64}{(-4+\alpha)^2}X_1^3Y_1, \\ &= F(X_1, Y_1).\end{aligned}\tag{3.5.8}$$

D'où, le système 3.5.5 devient :

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= Y_2, \\ \dot{Y}_2 &= \frac{\partial F}{\partial X_1}\dot{X}_1 + \frac{\partial F}{\partial Y_1}\dot{Y}_1.\end{aligned}\tag{3.5.9}$$

Or, nous devons exprimer Y_1 en fonction de X_1 et de Y_2 . Par le théorème des fonctions implicites, nous savons qu'un tel développement existe. En isolant Y_1 dans $Y_2 = F(X_1, Y_1)$, nous trouvons :

$$Y_1 = \frac{Y_2 + \frac{(-8+\alpha)\rho}{-4+\alpha}X_1^2 + \frac{16\rho}{-4+\alpha}X_1^3 - \frac{16(-16+3\alpha)\rho}{(-4+\alpha)^2}X_1^4}{\frac{1}{4-\alpha} + \frac{16}{(-4+\alpha)^2}X_1^2 - \frac{64}{(-4+\alpha)^2}X_1^3}.\tag{3.5.10}$$

En utilisant les séries de Taylor tronquées, dont la méthode a été décrite aux sections précédentes, nous avons trouvé à l'aide de Mathematica :

$$Y_1 = (8 - \alpha)\rho X_1^2 - 16\rho X_1^3 + 32\rho X_1^4 + (4 - \alpha)Y_2 - 16X_1^2Y_2 + 64X_1^3Y_2.\tag{3.5.11}$$

En remplaçant Y_1 dans le système 3.5.9, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= Y_2, \\
\dot{Y}_2 &= \frac{4\rho}{(\alpha-4)^2} X_1^2 - \frac{2\rho(\alpha-8)}{\alpha-4} X_1 Y_2 - \frac{16\rho}{(\alpha-4)^2} X_1^3 - \frac{16(1+3(-4+\alpha)\rho)}{(\alpha-4)^2} X_1^2 Y_2 - \frac{32}{-4+\alpha} X_1 Y_2^2 \\
&\quad + \frac{64(-7+\alpha)\rho}{(-4+\alpha)^3} X_1^4 + \frac{32(2+(-40+7\alpha)\rho)}{(-4+\alpha)^2} X_1^3 Y_2 + \frac{192}{-4+\alpha} X_1^2 Y_2^2.
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Comme $\frac{4\rho}{(-4+\alpha)^2}$, le coefficient de X_1^2 , est toujours positif, nous avons un point double. Le coefficient de $X_1 Y_2$ dont la valeur est $-\frac{2\rho(\alpha-8)}{\alpha-4}$ est non nul pour $\alpha \neq 8$. Ainsi, dans ce cas, nous avons une bifurcation de Bogdanov-Takens. Le signe du coefficient de $X_1 Y_2$ dépend de α . Comme nous avons fixé précédemment $\beta = -4$, nous avons $\alpha > 4$. Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{-2\rho(\alpha-8)}{\alpha-4} \begin{cases} < 0 & \text{si } \alpha > 8, \\ = 0 & \text{si } \alpha = 8, \\ > 0 & \text{si } 4 < \alpha < 8. \end{cases} \tag{3.5.13}$$

Donc, pour $\alpha > 8$, la bifurcation de Bogdanov-Takens donne naissance à un cycle attractif ; tandis que pour $4 < \alpha < 8$, elle fait naître un cycle répulsif. En effet, le théorème de Bogdanov-Takens prédit le comportement de cette bifurcation. Nous retrouvons ce résultat dans [Bo], [CLW] et [GH].

On considère le système de la forme suivante :

$$(v_0) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ax^2 + bxy + \dots \end{cases} \tag{3.5.14}$$

avec $a > 0$. Pour connaître ce qui se passe dans la bifurcation de Bogdanov-Takens, on plonge le système v_0 dans la famille à deux paramètres w_μ . On perturbe le point singulier double.

$$(w_\mu) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + ax^2 + bxy + \dots \end{cases} \quad (3.5.15)$$

On appelle w_μ un déploiement de v_0 . On a une famille v_ε telle que $v_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = v_0$. Le théorème de Bogdanov-Takens nous dit qu'il existe un petit voisinage U^* de l'origine dans l'espace des paramètres, il existe un petit voisinage V de $(0, 0)$ dans R^2 et il existe

$$\begin{aligned} h : U^* &\longrightarrow R^2 \\ \varepsilon &\longmapsto h(\varepsilon) = (\mu_1(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon)) \end{aligned}$$

tel que sur V , v_ε est topologiquement équivalent à $w_{h(\varepsilon)}$. Le théorème de Bogdanov-Takens prédit le comportement décrit à la figure 3.5.1 pour w_μ lorsque $b > 0$.

Pour le cas $b < 0$, on a un diagramme similaire. On peut l'obtenir de celui pour le cas $b > 0$ en effectuant la transformation suivante :

$$(x, y, t, \mu_1, \mu_2) \longrightarrow (x, -y, -t, \mu_1, -\mu_2).$$

La figure 3.5.1 présente les comportements prédits par la théorie. Nous discutons plus en détails au chapitre suivant de la signification pour notre système.

Pour le cas $\alpha = 8$, nous avons un cusp d'ordre trois et il faut poursuivre les calculs pour connaître les termes d'ordre supérieur de la forme normale. Le système 3.5.12 devient donc avec $\alpha = 8$:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= Y_2, \\ \dot{Y}_2 &= \frac{\rho}{4} X_1^2 - \rho X_1^3 - (1 + 12\rho) X_1^2 Y_2 - 8 X_1 Y_2^2 + \rho X_1^4 + 2(2 + 16\rho) X_1^3 Y_2 + 48 X_1^2 Y_2^2. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Nous modifions le système afin de mettre un comme coefficient au terme en X_1^2 dans \dot{Y}_2 . Nous utilisons pour ce faire la transformation suivante :

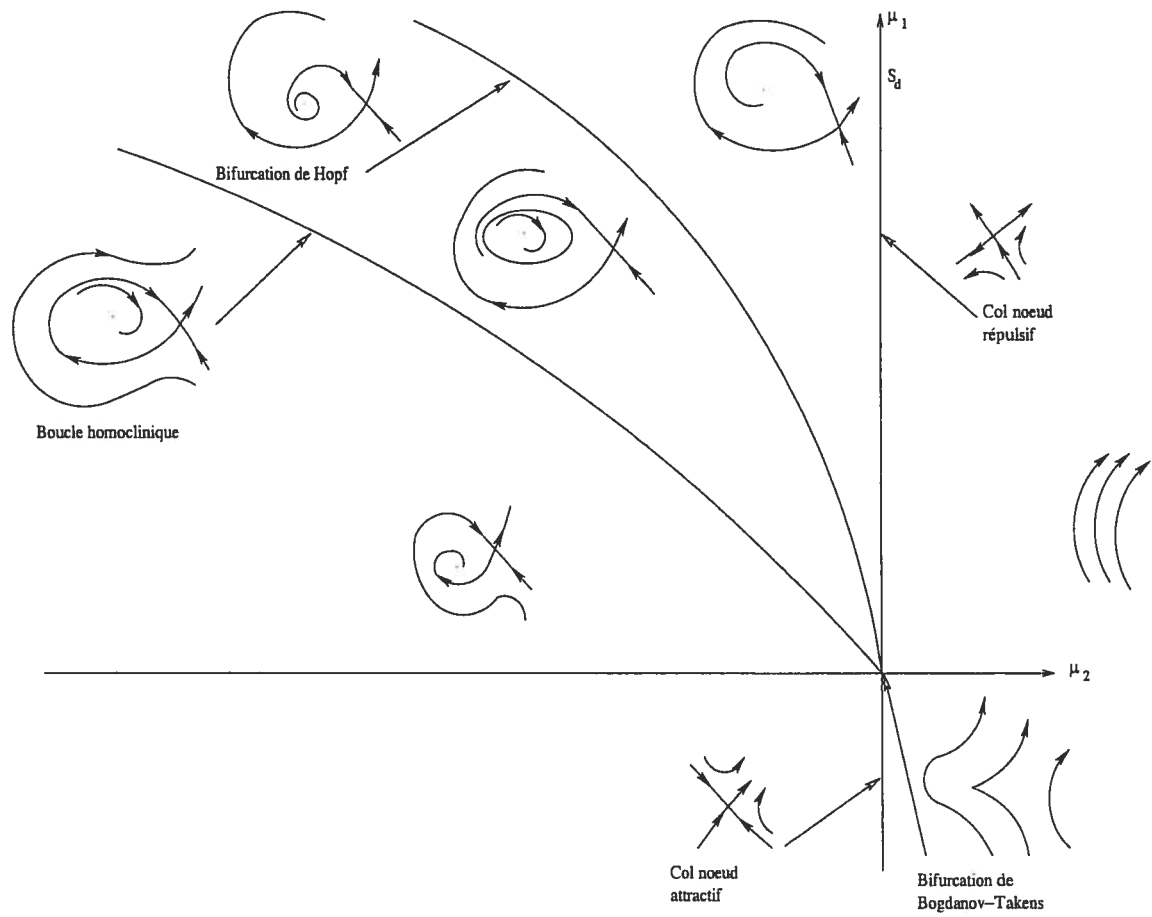


FIG. 3.5.1. Bifurcation de Bogdanov-Takens pour $b > 0$.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4}{\rho} X_3, \\ Y_2 &= \frac{4}{\rho} Y_3. \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= Y_3, \\ \dot{Y}_3 &= X_3^2 - \frac{16}{\rho} X_3^3 - \left(\frac{16}{\rho^2} + \frac{192}{\rho} \right) X_3^2 Y_3 - \frac{128}{\rho^2} X_3 Y_3^2 \\ &\quad + \frac{64}{\rho^2} X_1^4 + \left(\frac{256}{\rho^3} + \frac{2048}{\rho^2} \right) X_3^3 Y_3 + \frac{3072}{\rho^3} X_3^2 Y_3^2. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Nous voulons mettre le système sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 &= Y_4, \\ \dot{Y}_4 &= X_4^2 + c_{30} X_4^3 + c_{40} X_4^4 + c_{31} X_4^3 Y_4 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

afin de déterminer le coefficient de $X_4^3 Y_4$. Du système 3.5.18, nous devons éliminer d'abord les termes de la forme $X_3 Y_3^2$ et $X_3^2 Y_3$. Les changements de coordonnées normalisants nous permettent d'éliminer certains termes [GH]. Nous avons un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

Nous introduisons un changement de coordonnées :

$$(x, y) = (X, Y) + h(X, Y)$$

dans ce système avec h homogène de degré r . La modification induite $L(h(X, Y))$ dans le système 3.5.20 au niveau des termes de degré r est donnée par :

$$L(h(X, Y)) = \text{Jac}(h(X, Y)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h(X, Y). \quad (3.5.21)$$

Comme L est linéaire, il suffit de calculer les images des éléments d'une base. Nous avons les possibilités suivantes. Si nous avons un changement avec $h = h_1$, où

$$h_1(X, Y) = \begin{pmatrix} X^i Y^j \\ 0 \end{pmatrix},$$

les termes induits dans le système par ce changement sont donnés par :

$$L(h_1(X, Y)) = \begin{pmatrix} iX^{i-1}Y^{j+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous modifions les termes de la première équation seulement. Tandis que si nous avons un changement avec $h = h_2$, où

$$h_2(X, Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i Y^j \end{pmatrix},$$

nous modifions les termes du système de la façon suivante :

$$L(h_2(X, Y)) = \begin{pmatrix} -X^i Y^j \\ iX^{i-1} Y^{j+1} \end{pmatrix}.$$

Par ce changement, nous modifions les termes des deux équations. Donc, nous observons qu'en utilisant des changements de la forme $h_1(X, Y)$ et $h_2(X, Y)$, nous ne pouvons pas nous débarrasser du terme en $X_3^2 Y_3$ dans le système 3.5.18. Nous allons utiliser un changement de variables de degré deux lequel n'aura aucune influence sur les termes de degré deux mais aura une influence sur les termes de degré trois :

$$\begin{aligned} X_3 &= X_4 + AX_4 Y_4, \\ Y_3 &= Y_4 + AY_4^2. \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

Toutefois avec un tel changement de variables, nous introduisons un terme en X_4^3 non désirable dans \dot{X}_4 . Nous devons l'éliminer. Ainsi, nous prenons la transformation :

$$\begin{aligned} X_3 &= X_4 + AX_4 Y_4, \\ Y_3 &= Y_4 + AY_4^2 + CX_4^3. \end{aligned} \tag{3.5.23}$$

De cette manière, nous n'avons plus de termes $X_4^2 Y_4$ dans \dot{Y}_4 . Pour enlever le terme en $X_3 Y_3^2$ de \dot{Y}_3 , nous utilisons les opérateurs décrits précédemment. En ajoutant un terme $D X_4^2 Y_4$ à Y_3 dans la transformation 3.5.23 nous éliminons le terme en $X_3 Y_3^2$ de \dot{Y}_3 si D est bien choisi. Cependant, nous introduisons un terme de la forme $X_4^2 Y_4$ dans \dot{X}_4 que nous enlevons en ajoutant un terme $B X_4^3$ à X_3 dans la transformation 3.5.23 avec B choisi correctement. Un terme en X_4^4 est alors présent dans l'équation \dot{X}_4 . Nous ajoutons un terme $E X_4^4$ à Y_3 afin de le faire disparaître lorsque E est choisi adéquatement. Ainsi, après toutes ses considérations la transformation globale est de la forme :

$$\begin{aligned} X_3 &= X_4 + AX_4 Y_4 + BX_4^3, \\ Y_3 &= Y_4 + AY_4^2 + CX_4^3 + DX_4^2 Y_4 + EX_4^4. \end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Il nous reste à déterminer les coefficients appropriés : A, B, C, D et E afin de trouver le coefficient en $X_4^3 Y_4$ de la transformée du système 3.5.18. Nous pouvons

exprimer le système de deux manières différentes. Nous les soustrayons l'une de l'autre et nous posons les coefficients à annuler égaux à zéro. De cette façon, nous trouverons les constantes de la transformation précédente. Ainsi, pour la première équation, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{expression1} &= \dot{X}_3 - \left(\frac{\partial X_3}{\partial X_4} \dot{X}_4 + \frac{\partial X_3}{\partial Y_4} \dot{Y}_4 \right), \\ &= (-A + C)X_4^3 + (-Ac_{30} + E)X_4^4 + (-3B + D)X_4^2Y_4 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

Comme, nous voulons éliminer les termes en X_4^3 , X_4^4 et $X_4^2Y_4$, nous obtenons :

$$A = C, \quad B = \frac{D}{3} \quad \text{et} \quad E = Ac_{30}.$$

Nous effectuons la même chose avec la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \text{expression2} &= \dot{Y}_3 - \left(\frac{\partial Y_3}{\partial X_4} \dot{X}_4 + \frac{\partial Y_3}{\partial Y_4} \dot{Y}_4 \right), \\ &= \frac{-16\rho^2 - c_{30}\rho^3}{\rho^3} X_4^3 - \frac{16 + 192\rho + 3C\rho^2}{\rho^2} X_4^2Y_4 - \left(2D + \frac{128}{\rho^2} \right) X_4Y_4^2 - \\ &\quad - \frac{5184\rho^8 - 81(2B - c_{40} - D)\rho^{10}}{81\rho^{10}} X_4^4 + \frac{256 + 2048\rho - 48A\rho^2 - (2Ac_{30} + c_{31} + 4E)\rho^3}{\rho^3} X_4^3Y_4 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

En éliminant les termes de la forme $X_4^2Y_4$ et $X_4Y_4^2$, nous avons :

$$C = -\frac{16(1 + 12\rho)}{3\rho^2} \quad \text{et} \quad D = -\frac{64}{\rho^2}.$$

D'où, nous trouvons :

$$A = -\frac{16(1 + 12\rho)}{3\rho^2}, \quad B = -\frac{64}{3\rho^2} \quad \text{et} \quad E = -\frac{16c_{30}(1 + 12\rho)}{3\rho^2}.$$

À l'aide des termes en X_4^3 , X_4^4 et $X_4^3Y_4$ de l'expression2, nous trouvons respectivement les coefficients c_{30} , c_{40} et c_{31} :

$$c_{30} = -\frac{16}{\rho}, \quad c_{40} = \frac{256}{3\rho^2} \quad \text{et} \quad c_{31} = -\frac{1024}{\rho^2}.$$

Par conséquent, le nouveau système est :

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 &= Y_4, \\ \dot{Y}_4 &= X_4^2 - \frac{16}{\rho} X_4^3 + \frac{256}{3\rho^2} X_4^4 - \frac{1024}{\rho^2} X_4^3Y_4 + \dots \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

Maintenant, nous voulons enlever tous les termes en X_4 sauf celui de degré deux.

Autrement dit, nous ramenons le système sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{X}_5 &= Y_5, \\ \dot{Y}_5 &= X_5^2 + d_{31}X_5^3Y_5 + \dots\end{aligned}\quad (3.5.28)$$

Posons

$$f(X_4) = X_4^2 - \frac{16}{\rho}X_4^3 + \frac{256}{3\rho^2}X_4^4 + \dots$$

Ainsi, nous avons le système :

$$\begin{aligned}\dot{X}_4 &= Y_4, \\ \dot{Y}_4 &= f(X_4) - \frac{1024}{\rho^2}X_4^3Y_4 + \dots\end{aligned}\quad (3.5.29)$$

Prenons

$$\begin{aligned}F(X_4) &= \int_0^{X_4} f(z)dz, \\ &= \frac{X_4^3}{3} - \frac{4}{\rho}X_4^4 + \frac{256}{15\rho^2}X_4^5 + \dots, \\ &= \frac{X_4^3}{3} \left(1 - \frac{12}{\rho}X_4 + \frac{256}{5\rho^2}X_4^2 + \dots\right),\end{aligned}\quad (3.5.30)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{dF}{dX_4} = f(X_4).$$

Posons

$$X_5 = (3F(X_4))^{\frac{1}{3}} = X_4 + o(|X_4|) = g(X_4).$$

D'où, le système devient :

$$\begin{aligned}\frac{dX_5}{dt} &= \frac{dg}{dX_4} \dot{X}_4, \\ &= (3F(X_4))^{-\frac{2}{3}} f(X_4) Y_4, \\ \frac{dY_4}{dt} &= f(X_4) - \frac{1024}{\rho^2} X_5^3 Y_4 + o(|X_5, Y_4|).\end{aligned}\quad (3.5.31)$$

Nous devons faire une modification sur le temps dans le système. Ainsi, nous divisons le système par :

$$(3F(X_4))^{-\frac{2}{3}} f(X_4) = 1 + O(|X_4|) = 1 + O(|X_5|).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{dX_5}{dT} &= Y_4, \\ \frac{dY_4}{dT} &= \frac{(3F(X_4))^{\frac{2}{3}}}{f(X_4)} \left(f(X_4) - \frac{1024}{\rho^2} X_5^3 Y_4 + \dots\right), \\ &= (3F(X_4))^{\frac{2}{3}} - \frac{(3F(X_4))^{\frac{2}{3}}}{f(X_4)} \frac{1024}{\rho^2} X_5^3 Y_4 + \dots\end{aligned}\quad (3.5.32)$$

Comme

$$\frac{(3F(X_4))^{2/3}}{f(X_4)} = 1 + O(|X_5|),$$

le coefficient de $X_5^3 Y_4$ ne change pas en faisant cette transformation. De plus, nous avons $X_5 = (3F(X_4))^{1/3}$. Nous obtenons alors le système sous la forme désirée :

$$\begin{aligned} \frac{dX_5}{dT} &= Y_4, \\ \frac{dY_4}{dT} &= X_5^2 - \frac{1024}{\rho^2} X_5^3 Y_4 + o(|X_5, Y_4|^4). \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

Nous constatons que le coefficient de $X_5^3 Y_4$, celui qui nous intéresse, est de signe négatif. Le théorème de Dumortier, Roussarie et Sotomayor, [DRS] et [CLW], nous prédit le comportement du système. En effet, nous avons un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + a_{31} x^3 y + o(|x, y|^4). \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

De manière analogue au cas de la bifurcation de Bogdanov-Takens, pour connaître le comportement du système autour du cusp d'ordre trois, on plonge le système 3.5.34 dans la famille à trois paramètres suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 x y + x^2 \pm x^3 y. \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

Ainsi, on perturbe le point double pour étudier son comportement. Le théorème de Dumortier, Roussarie et Sotomayor, nous indique de quelle façon le système se comporte au voisinage de l'origine pour de petites valeurs de paramètres. Le diagramme de bifurcation de la famille 3.5.35 est un cône lequel est formé par l'intersection de trois surfaces entre elles : la bifurcation de Hopf, la boucle homoclinique et la surface de double cycle. Le graphique 3.5.2 montre ces trois surfaces de bifurcation.

On coupe le cône avec une sphère. En enlevant un point de la sphère, on obtient la figure 3.5.3 sur laquelle

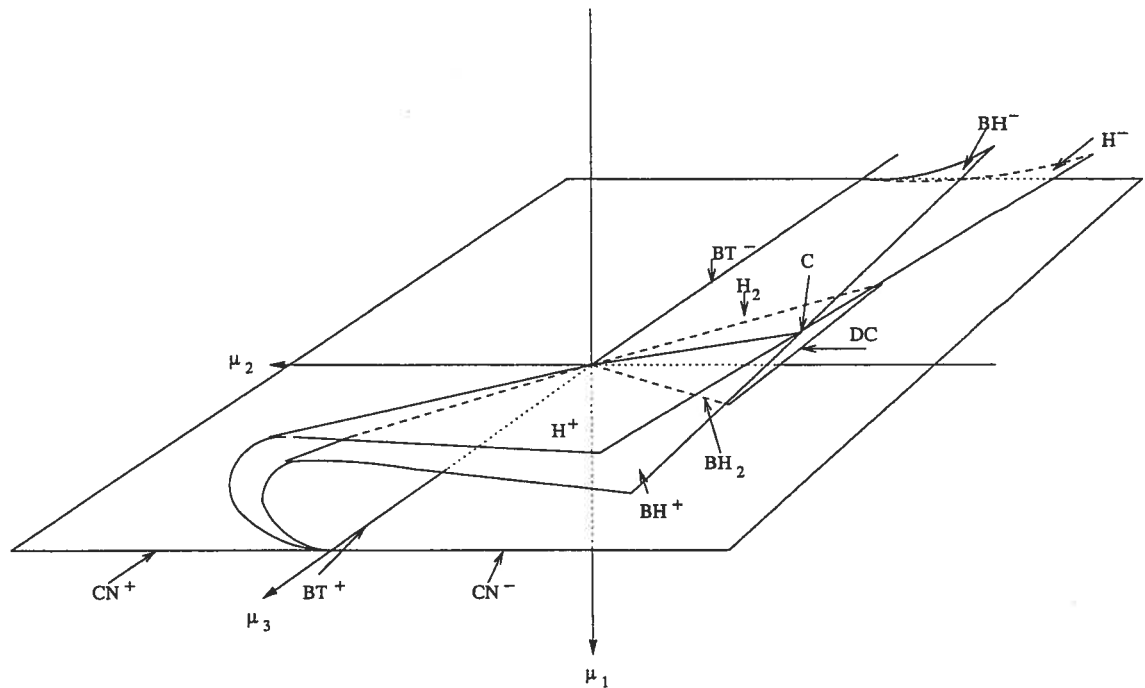


FIG. 3.5.2. Graphique des surfaces de bifurcations.

- (H^+) : bifurcation de Hopf répulsive avec $Re(c_1) > 0$
- (H^-) : bifurcation de Hopf attractive avec $Re(c_1) < 0$
- (BH^+) : boucle homoclinique répulsive avec $Trace > 0$ au point de selle
- (BH^-) : boucle homoclinique attractive avec $Trace < 0$ au point de selle
- (H_2) : bifurcation de Hopf d'ordre deux avec $Re(c_1) = 0$ et $Re(c_2) < 0$
- (BH_2) : boucle homoclinique d'ordre deux avec $Trace = 0$ au point de selle
- (DC) : courbe de double cycle
- (C) : point d'intersection entre la bifurcation de Hopf d'ordre un et la boucle homoclinique d'ordre un
- (BT^+) : bifurcation de Bogdanov-Takens avec le coefficient de xy positif
- (BT^-) : bifurcation de Bogdanov-Takens avec le coefficient de xy négatif
- (CN^+) : col-nœud répulsif
- (CN^-) : col-nœud attractif

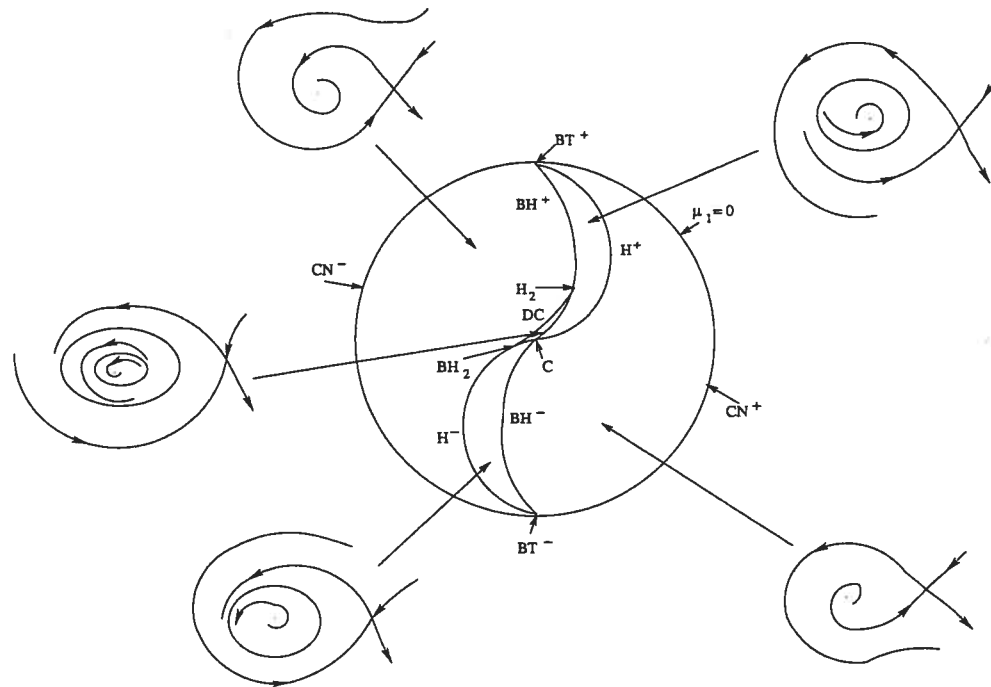


FIG. 3.5.3. Diagramme de bifurcation avec portraits de phase dans les régions ouvertes pour le cusp d'ordre trois.

Plus loin, nous discuterons plus en détails de la signification pour notre système.

Chapitre 4

MODÈLE SUGGÉRÉ POUR LE DIAGRAMME DE BIFURCATION ET LES PORTRAITS DE PHASE DE NOTRE SYSTÈME

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse de tout ce que nous avons trouvé sur notre système et ses points singuliers. L'ensemble des calculs a été fait aux endroits où nous possédions de l'information, c'est-à-dire principalement sur les surfaces de bifurcation S_1 et S_d . Les résultats sont résumés aux tableaux 4.1.1 à 4.1.3. Dans un premier temps, nous présentons un diagramme de bifurcation et les portraits de phase pouvant s'appliquer à notre système et découlant des informations obtenues sur les points singuliers. Dans un deuxième temps, nous discuterons de l'interprétation biologique de certains portraits de phase.

4.1. RÉSUMÉ DES INFORMATIONS DÉJÀ CALCULÉES

Résumons toutes les informations que nous avons jusqu'à maintenant sur le système de départ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{myx^2}{ax^2+bx+1}, \\ \frac{dy}{dt} &= y\left(-d + \frac{cmx^2}{ax^2+bx+1}\right),\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

avec r, k, d, c, m et a des constantes positives. Nous avons choisi de considérer le cas où $b < 0$. Nous avons effectué un changement d'échelle sur les paramètres

ce qui nous a permis de poser $m = k = c = 1$ dans le système 4.1.1. Nous avons donc considéré le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \rho X (1 - X) - \frac{YX^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1}, \\ \frac{dY}{dT} &= Y \left(-\delta + \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \right),\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

dont la matrice jacobienne évaluée au point (X, Y) est :

$$M_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho X - \frac{XY(\beta X + 2)}{(\alpha X^2 + \beta X + 1)^2} & \frac{-X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \\ \frac{XY(\beta X + 2)}{(\alpha X^2 + \beta X + 1)^2} & -\delta + \frac{X^2}{\alpha X^2 + \beta X + 1} \end{pmatrix}.$$

Nous avons obtenu deux conditions sur les paramètres :

$$\beta^2 - 4\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + 1 > 0.$$

Ensuite, nous avons trouvé trois surfaces de bifurcation dans l'espace des paramètres.

- (S_1) la surface des paramètres pour lesquels un point singulier passe par $(1, 0)$:

$$\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}.$$

- (S_d) la surface des paramètres pour lesquels nous avons un point double :

$$\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2}.$$

- (H) la surface de bifurcation de Hopf dont le dessin se trouve aux figures 3.2.9 à 3.2.14.

Nous avons étudié les points singuliers du système pour les valeurs de paramètres choisis sur les surfaces ci-haut. De plus, la théorie, notamment les théorèmes de Bogdanov-Takens [Bo] et de Dumortier, Roussarie et Sotomayor [DRS], nous a permis de prédire la présence de d'autres surfaces de bifurcation telles que la surface de boucle homoclinique et celle de double cycle. Cependant, il reste à vérifier que la courbe de boucle homoclinique a bien la forme qui apparaît aux figures 4.3.1 à 4.3.8 et, plus particulièrement, si elle est présente seulement pour

$\beta < \beta_0$ avec $\beta_0 \leq -3$. Un autre point reste à terminer concernant le calcul de la bifurcation de Hopf : il faut montrer qu'elle est toujours au plus d'ordre deux avec $Re(c_2) < 0$. Nous savons que c'est le cas en deux endroits, soit lorsque la bifurcation de Hopf d'ordre deux se produit sur S_1 et aussi au voisinage du cusp d'ordre trois. Le diagramme de bifurcation que nous proposons est le plus simple possible recollant ces deux contraintes : on suppose que l'ensemble des paramètres où se produit une bifurcation de Hopf avec $Re(c_1) = 0$ est connexe et que l'inégalité $Re(c_2) < 0$ y est toujours vérifiée.

Par ailleurs, il serait utile de faire une synthèse des informations obtenues jusqu'à présent afin de tracer une esquisse des portraits de phase pour les différentes régions définies par les surfaces de bifurcation dans l'espace des paramètres. Ainsi, nous résumons nos résultats aux tableaux 4.1.1 à 4.1.3.

<u>Points singuliers</u>	<u>Information pour S_1</u>
(0, 0)	Toujours un point de selle.
(1, 0)	Pour $\beta \neq -2$ (point double) si $0 > \beta > -2$, col-nœud attractif. si $\beta < -2$, col-nœud répulsif. Pour $\beta = -2$ (point triple) nœud attractif.
$\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-1}, \frac{\rho(\delta(\alpha-1)-1)}{(\alpha\delta-1)^2}\right)$	Ce point existe pour $\beta < -2$. <ul style="list-style-type: none"> Étude du signe de $Trace(M_{\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-1}, \frac{\rho(\delta(\alpha-1)-1)}{(\alpha\delta-1)^2}\right)})$ $Trace \begin{cases} < 0 & \text{si } 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) < 0 \\ = 0 & \text{si } 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) = 0 \\ > 0 & \text{si } 1 + 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3 - \alpha(\beta + 3) > 0 \end{cases}$ Pour $trace < 0$, nœud ou foyer attractif. Pour $trace > 0$, nœud ou foyer répulsif. Nous avons $trace = 0$ et $4\alpha - \beta^2 < 0$ seulement pour $\beta < -3$. <ul style="list-style-type: none"> Bifurcation de Hopf d'ordre 1 sur S_1 $\alpha = \frac{1+4\beta+4\beta^2+\beta^3}{\alpha(\beta+3)} \cap \delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$ Étude du signe de $Re(c_1)$ pour $\beta < -3$ $Re(c_1) = \frac{(1+\beta)^3(\beta^3+7\beta^2+11\beta+3)}{8(\beta+3)^2}$ $Re(c_1) = 0 \Leftrightarrow \beta^* \approx -4,866$ $Re(c_1) \begin{cases} < 0 & \text{si } -3 > \beta > \beta^*, \\ = 0 & \text{si } \beta = \beta^*, \\ > 0 & \text{si } \beta < \beta^*. \end{cases}$ Bifurcation de Hopf d'ordre 2 sur S_1 $\alpha = \frac{1+4\beta+4\beta^2+\beta^3}{\alpha(\beta+3)} \cap \delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1} \cap \beta = \beta^*$ $Re(c_2) \approx -\left(\frac{7,52X10^{-2}+21102\rho}{\rho^2}\right) < 0$ Double cycle avec le cycle intérieur répulsif et le cycle extérieur attractif.

TAB. 4.1.1. Résumé de l'information sur les points singuliers lorsque les paramètres sont sur S_1 .

<u>Points singuliers</u>	<u>Information pour S_d</u>
$(0, 0)$	Toujours un point de selle.
$(1, 0)$	Toujours nœud attractif.
$\left(\frac{-2}{\beta}, -\frac{2\rho(\beta+2)}{\delta\beta^2}\right)$	<p>Point double</p> <ul style="list-style-type: none"> • Étude du signe de la $Trace(M_{\left(\frac{-2}{\beta}, -\frac{2\rho(\beta+2)}{\delta\beta^2}\right)})$ $Trace = \frac{\rho(\beta+4)}{\beta} \begin{cases} < 0 & \text{si } \beta > -4, \\ = 0 & \text{si } \beta = -4, \\ > 0 & \text{si } \beta < -4. \end{cases}$ <p>Pour $\beta > -4$, col-nœud attractif. Pour $\beta < -4$, col-nœud répulsif.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Bifurcation de Bogdanov-Takens sur S_d</u> $\delta = \frac{4}{4\alpha - \beta^2} \cap \beta = -4$ <p>Nous avons un système de la forme :</p> $\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= Ax^2 + Bxy \end{aligned}$ <p>avec $A > 0$ et</p> $B = -\frac{2\rho(\alpha-8)}{\alpha-4} \begin{cases} < 0 & \text{si } \alpha > 8, \\ = 0 & \text{si } \alpha = 8, \\ > 0 & \text{si } 4 < \alpha < 8. \end{cases}$ <p>Pour $4 < \alpha < 8$, cycle limite répulsif. Pour $\alpha > 8$, cycle limite attractif.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Cusp d'ordre 3 sur S_d si $\beta = -4$ et $\alpha = 8$</u> <p>Nous avons un système de la forme :</p> $\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 + Cx^3y \end{aligned}$ <p>avec $C = -\frac{1024}{\rho^2} < 0$</p> <p>Le cycle limite intérieur est répulsif et le cycle limite extérieur est attractif.</p>

TAB. 4.1.2. Résumé de l'information sur les points singuliers lorsque les paramètres sont sur S_d .

<u>Points singuliers</u>	<u>Information en dehors de S_1 et S_d</u>
(0, 0)	Toujours point de selle.
(1, 0)	Pour $\delta > \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, nœud attractif. Pour $\delta < \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, point de selle.

TAB. 4.1.3. Résumé de l'information sur les points singuliers lorsque les paramètres sont pris hors des surfaces S_1 et S_d .

4.2. BIFURCATION DE BOUCLE HOMOCLINIQUE

Pour pouvoir décrire le diagramme de bifurcation, il nous manque un ingrédient : la bifurcation de la boucle homoclinique. Nous la décrirons de manière très succincte. On a une bifurcation de boucle homoclinique quand la variété instable d'un point de selle coïncide avec la variété stable.

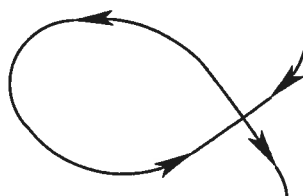


FIG. 4.2.1. Boucle homoclinique.

La boucle elle-même peut être attractive, répulsive ou neutre. Si la trace de la matrice jacobienne au point de selle est négative, la boucle homoclinique est attractive (figure 4.2.2 (a)). Si elle est positive, la boucle homoclinique est répulsive (figure 4.2.2 (b)).

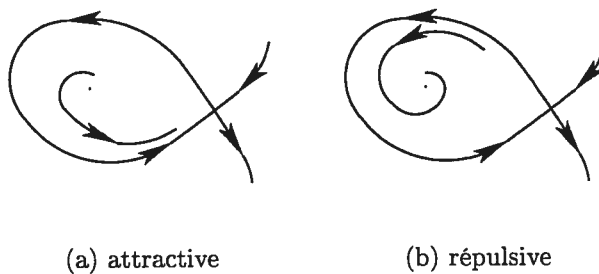


FIG. 4.2.2. Types de boucles homocliniques.

On a, dans ces cas, une bifurcation de codimension un. Si la trace est nulle, on ne peut pas conclure sans information additionnelle et la bifurcation est de codimension supérieure ou égale à deux. Donnons le diagramme de bifurcation d'une boucle homoclinique de codimension un.

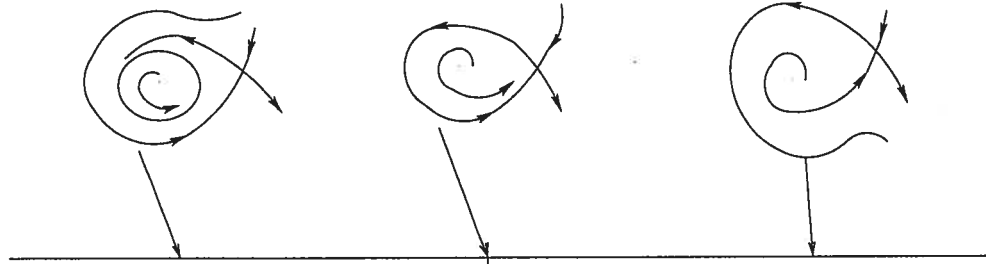


FIG. 4.2.3. Diagramme de bifurcation pour la boucle homoclinique attractive.

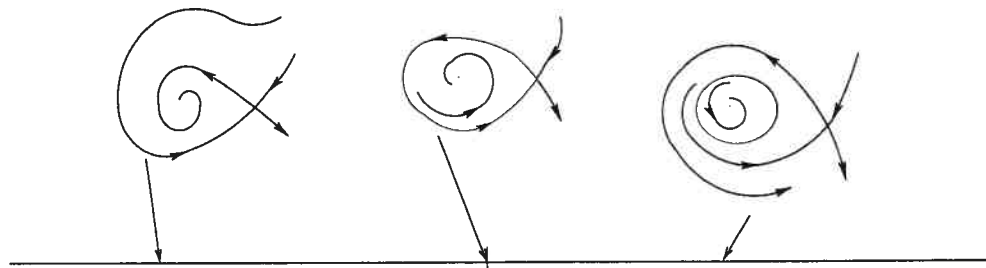


FIG. 4.2.4. Diagramme de bifurcation pour la boucle homoclinique répulsive.

Dans notre diagramme de bifurcation, nous verrons également apparaître une boucle homoclinique de codimension deux (elle apparaît entre autre dans le déploiement du cusp d'ordre trois).

Pour avoir une boucle homoclinique de codimension deux, on doit avoir :

- i) la trace au point de selle est nulle
- ii) dans ce cas, l'application de premier retour $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ au voisinage de la boucle homoclinique est de classe C^1 . On suppose Σ paramétré par z et $z = 0$ correspond à la boucle. Le fait d'avoir une boucle homoclinique correspond à $P(0) = 0$. La condition garantissant que la boucle est de codimension exactement égale à deux est $P'(0) \neq 1$.

Dans notre diagramme de bifurcation, on aura le cas $P'(0) > 1$, c'est-à-dire la boucle est répulsive. Nous donnons sans plus de discussions le diagramme de bifurcation.

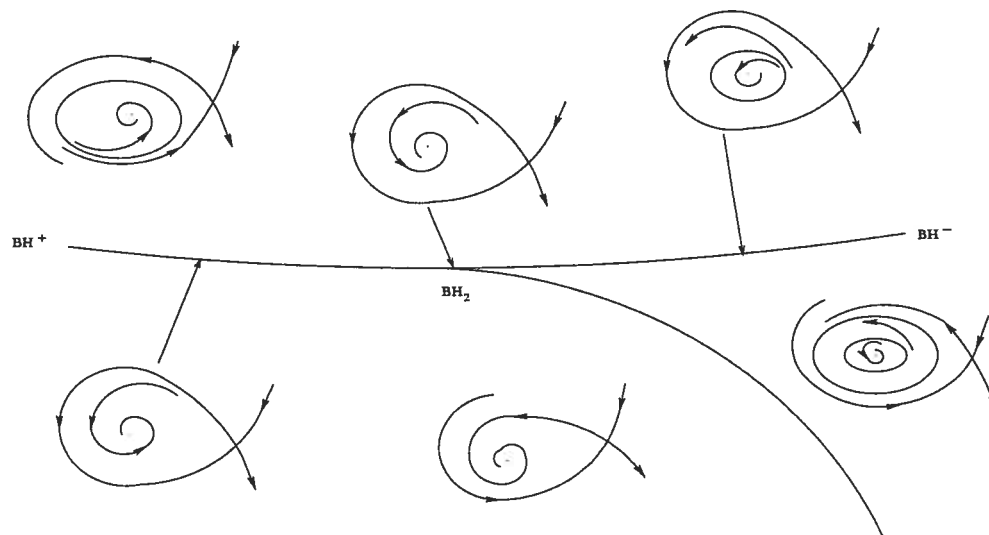


FIG. 4.2.5. Diagramme de bifurcation pour la boucle homoclinique de codimension deux.

4.3. DIAGRAMME DE BIFURCATION DU SYSTÈME

À partir de ces informations et de la théorie [CLW], [DRS] et [Bo], il est possible de situer les différentes surfaces de bifurcation dans l'espace des paramètres. Nous pouvons également y tracer des modèles de portraits de phase pour chacune des régions délimitées par ces surfaces. À chacune de ces régions, nous associons un numéro correspondant au modèle de plan de phase réalisé pour ces paramètres. L'ensemble des portraits de phase, identifiés par leur numéro, se trouvent aux figures 4.3.9 à 4.3.12 où ils sont classés selon la codimension. Comme précédemment, pour représenter les surfaces de bifurcation nous fixons β et nous regardons ce qui se passe dans le plan $\alpha\delta$.

Premièrement, pour $0 > \beta > -2$, nous avons la surface S_1 et celle de la bifurcation de Hopf (H). Le graphique 4.3.1 représente cette situation.

D'abord, il y a toujours un point de selle à l'origine. En plus au plan de phase *no4*, nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$. Lequel devient un col-nœud attractif pour les paramètres qui sont sur S_1 , *no25*, avant de devenir un point de selle pour les paramètres sous S_1 , *no10* et *no11*. Pour ces paramètres, il y a un autre point singulier qui est situé dans le premier quadrant. Au plan de phase *no10* ce point est un nœud ou un foyer attractif. Mais dès que les paramètres passent la bifurcation de Hopf, un cycle limite attractif naît et le point singulier devient un foyer ou un nœud répulsif.

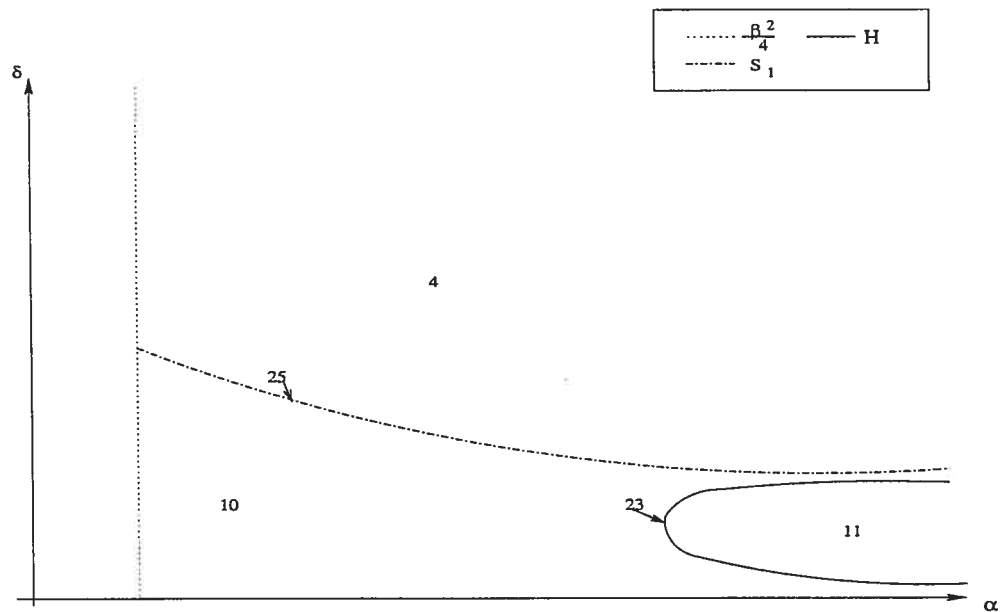


FIG. 4.3.1. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $0 > \beta > -2$.

Deuxièmement, pour $\beta = -2$, comme nous pouvons le voir sur le graphique 4.3.2, nous avons les mêmes surfaces de bifurcation qu'en $0 > \beta > -2$, c'est-à-dire S_1 et la bifurcation de Hopf (H). Les modèles des portraits de phase sont aussi très

semblables : seul celui correspondant à la situation où les paramètres sont sur S_1 diffère. En effet, nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$ (point triple) plutôt qu'un col-nœud attractif.

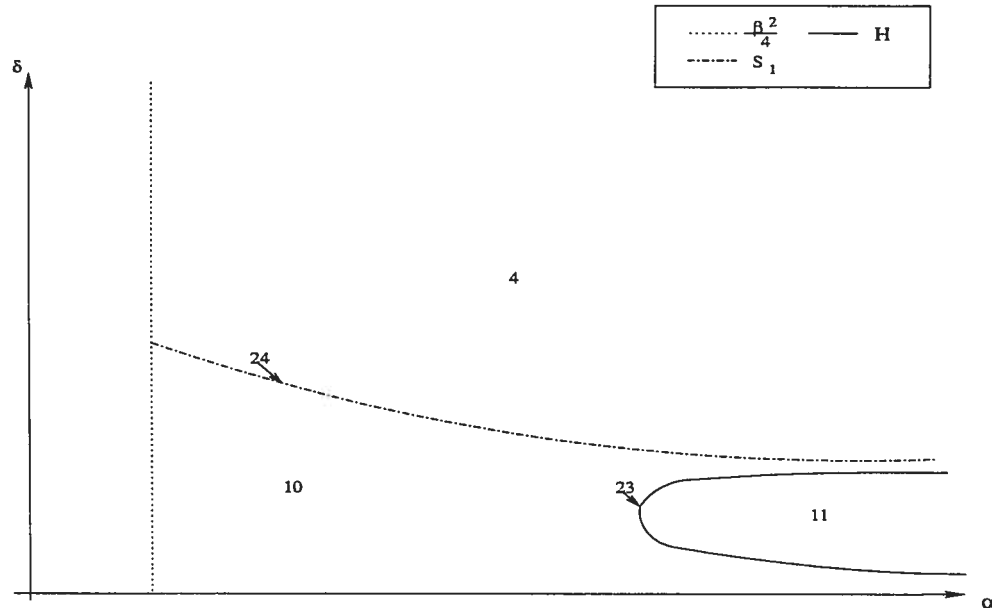


FIG. 4.3.2. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta = -2$.

À partir de maintenant, c'est-à-dire pour $\beta < -2$, nous avons une nouvelle courbe de bifurcation dans le plan $\alpha\delta$: S_d (elle était confondue avec S_1 en $\beta = -2$).

Troisièmement, pour $-2 > \beta \geq -3$, nous avons les trois surfaces de bifurcation suivantes : S_1 , S_d et la bifurcation de Hopf (H). Elles sont représentées au graphique 4.3.3.

L'origine est toujours un point de selle. Dans ce cas-ci, les portraits de phase ne diffèrent pas des situations précédentes pour les paramètres qui sont sous S_1 . Par conséquent, nous ne répèterons pas leur description. Au portrait de phase *no4*, nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$. Ensuite, pour les paramètres qui se trouvent sur S_d , *no21*, nous avons un point double, lequel est un col-nœud attractif, dans le premier quadrant. Une fois cette courbe de bifurcation traversée, il se scinde en un point de selle et un nœud ou un foyer attractif (*no7*). Par la

suite, pour les paramètres qui sont sur S_1 , le point de selle passe par $(1, 0)$. Ainsi, nous avons un col-nœud en $(1, 0)$ et un nœud ou un foyer attractif dans le premier quadrant (*no9*). Puis sous S_1 , la situation est la même que le cas précédent.

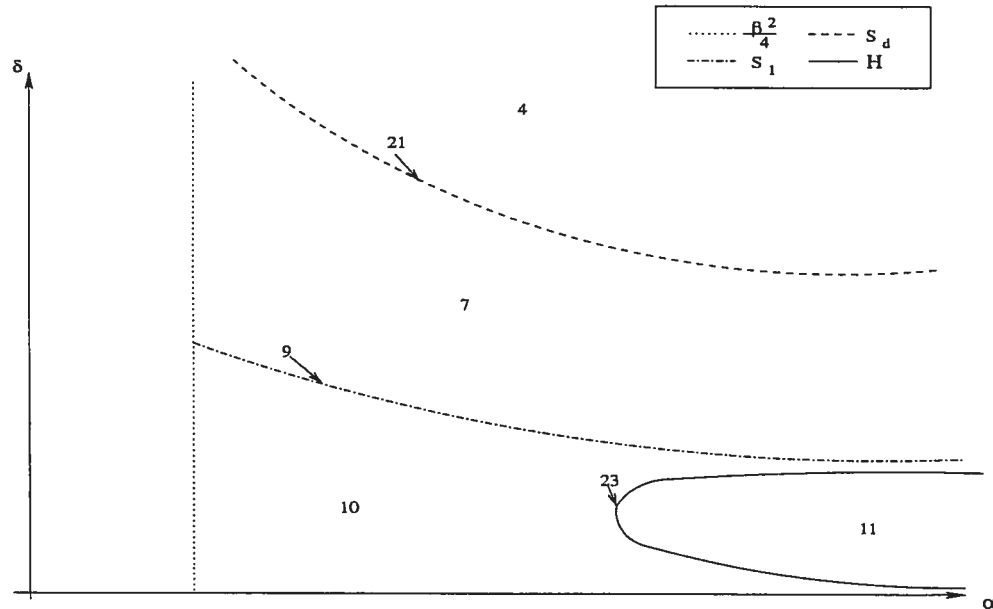


FIG. 4.3.3. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $-2 > \beta \geq -3$.

Dès à présent, pour $\beta < -3$, S_1 et la courbe de la bifurcation de Hopf s'intersectent. Le point d'intersection vient de l'infini. De plus, nous faisons les dessins comme si la courbe de la boucle homoclinique apparaissait, sa présence étant nécessaire autour de la bifurcation de Bogdanov-Takens [Bo] et du cusp d'ordre trois [DRS]. Par contre, il faudrait vérifier à partir de quelle valeur $\beta_0 < -3$ elle apparaît et de quelle forme est cette courbe. La forme qui est dessinée sur les graphiques suivants n'est qu'une hypothèse qui est vérifiée au voisinage de $\beta = -4$ et $\alpha = 8$. Sa présence dès $\beta < -3$ est aussi une supposition.

Quatrièmement, pour $-3 > \beta > -4$, le graphique 4.3.4 donne la situation. La courbe S_d est présente. Il en va de même de S_1 et de la bifurcation de Hopf (H) qui se croisent. Nous supposons que la courbe de la boucle homoclinique (BH) apparaît dès maintenant.

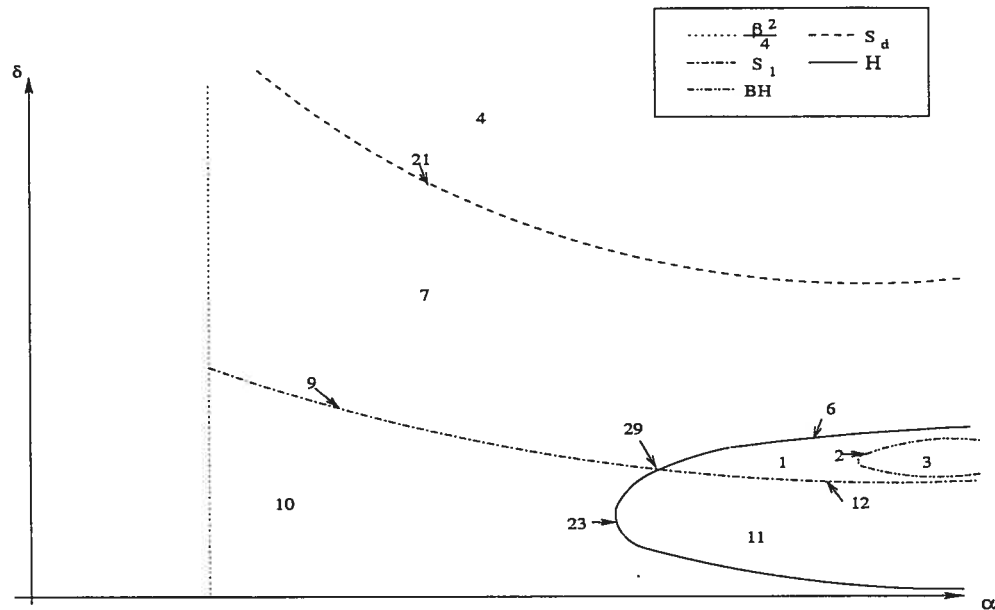


FIG. 4.3.4. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $-3 > \beta > -4$.

Encore une fois, l'origine est toujours un point de selle. Une très grande partie de ce diagramme de bifurcation est semblable au précédent. Ainsi, nous ne décrivons que ce qui est différent. Rappelons-nous qu'au *no7*, nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$ ainsi qu'un point de selle et un nœud ou un foyer attractif dans le premier quadrant. Dans les cas que nous avons vus auparavant, les paramètres devaient nécessairement traverser S_1 . Or, une autre possibilité s'offre : traverser la bifurcation de Hopf (*no6*). De cette façon, un cycle limite attractif naît et à l'intérieur de ce dernier nous avons un foyer ou un nœud répulsif. De plus, le point de selle est toujours présent dans le premier quadrant et nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$ (*no1*). Par la suite, du cycle limite, il y a évolution vers une boucle homoclinique attractive en traversant la bifurcation de boucle homoclinique (*no2*). Une fois que les paramètres ont passé cette courbe, nous avons un point de selle et un nœud ou un foyer répulsif dans le premier quadrant (*no3*). Les autres points singuliers n'ont pas changé. Lorsque nous étions au plan de phase *no1*, nous avons aussi la possibilité que les paramètres passent par S_1 . Dans cette optique, le point de selle passe par $(1, 0)$. Il y a alors un col-nœud en $(1, 0)$ et un cycle limite attractif dans le premier quadrant (*no12*). Pour ce qui est des paramètres sous S_1 , les points critiques évoluent de la même façon que dans les

cas précédents.

Cinquièmement, pour $\beta = -4$, nous avons toujours la présence de S_1 , S_d , la bifurcation de Hopf (H) et la bifurcation de la boucle homoclinique. Toutefois, lorsque $\beta = -4$, $\alpha \neq 8$ et que les paramètres sont sur S_d , nous avons une bifurcation de Bogdanov-Takens (BT). Si $4 < \alpha < 8$, nous avons un BT répulsif et si $\alpha > 8$, il est attractif. Quand $\alpha \neq 8$, nous avons un cusp d'ordre trois. Nous supposons la forme de la courbe de la boucle homoclinique. Ainsi, nous obtenons le graphique 4.3.5.

Nous obtenons toujours un point de selle en $(0, 0)$. Comme nous avons déjà décrit les points singuliers pour les paramètres se trouvant sur et au-dessous de S_1 , nous nous attarderons à ce qui se passe autour du cusp d'ordre trois ($no32$). Commençons par le plan de phase $no4$, où nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$. Nous traversons la bifurcation de Bogdanov-Takens ($no8$). Au plan de phase $no7$, nous avons un nœud attractif en $(1, 0)$ ainsi qu'un point de selle et un nœud ou un foyer attractif dans le premier quadrant. Après avoir franchi la bifurcation de Hopf dans l'espace de paramètres, un cycle limite attractif naît à l'intérieur duquel nous avons un foyer ou un nœud répulsif. Lorsque les paramètres sont sur BH , $no2$, une boucle homoclinique attractive se forme. Par la suite nous avons un point de selle et un nœud ou un foyer répulsif dans le premier quadrant ($no3$). Pendant toutes ces transformations la nature du point $(1, 0)$ ne change pas.

Pour les valeurs de $\beta < -4$, nous avons une autre courbe, la courbe de double cycle (DC), qui s'ajoute à celles déjà présentes : S_1 , S_d , la bifurcation de Hopf (H) et la bifurcation de la boucle homoclinique (BH). En effet, sa présence est prédite par le théorème de Dumortier, Roussarie et Sotomayor [DRS] autour du cusp d'ordre trois. Nous nous rappelons que β^* est la valeur de β pour laquelle nous avons une bifurcation de Hopf d'ordre deux sur S_1 . Les deux extrémités de la courbe DC sont données par une bifurcation de Hopf d'ordre deux et une boucle

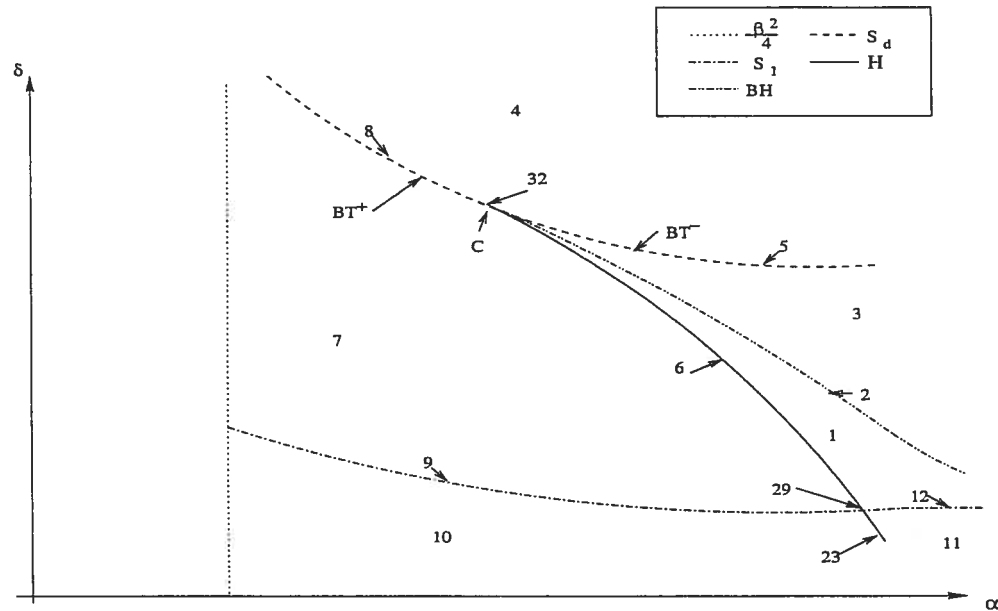


FIG. 4.3.5. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta = -4$.

homoclinique d'ordre deux ($trace = 0$ au point de selle).

Sixièmement, pour $-4 > \beta > \beta^*$, nous avons représenté les courbes de bifurcation au graphique 4.3.6. Dans ce cas-ci, la bifurcation de Hopf d'ordre deux est au-dessus de S_1 .

L'origine est toujours un point de selle. Encore une fois, pour les valeurs de paramètres qui sont sur et au-dessous de S_1 , les portraits de phase ne changent pas comparativement à ce que nous avons précédemment. Nous décrivons donc ceux pour les paramètres qui sont au-dessus de S_1 . Dans ces conditions, le point $(1, 0)$ est toujours un nœud attractif. Pour les paramètres sur S_d (no13), nous avons un col-nœud répulsif situé dans le premier quadrant. Ensuite, au portrait de phase no3, ce point est scindé en un point de selle et un nœud ou un foyer répulsif à partir duquel naît un cycle limite répulsif lorsque la bifurcation de Hopf est franchie. Le nœud ou le foyer à l'intérieur de ce cycle est attractif et nous avons toujours le point de selle dans le premier quadrant (no17). Les paramètres évoluent de façon à ce qu'on traverse BH . Nous pouvons le faire en passant par le no20. Auquel cas la boucle homoclinique est répulsive et elle contient un foyer attractif. Puis,

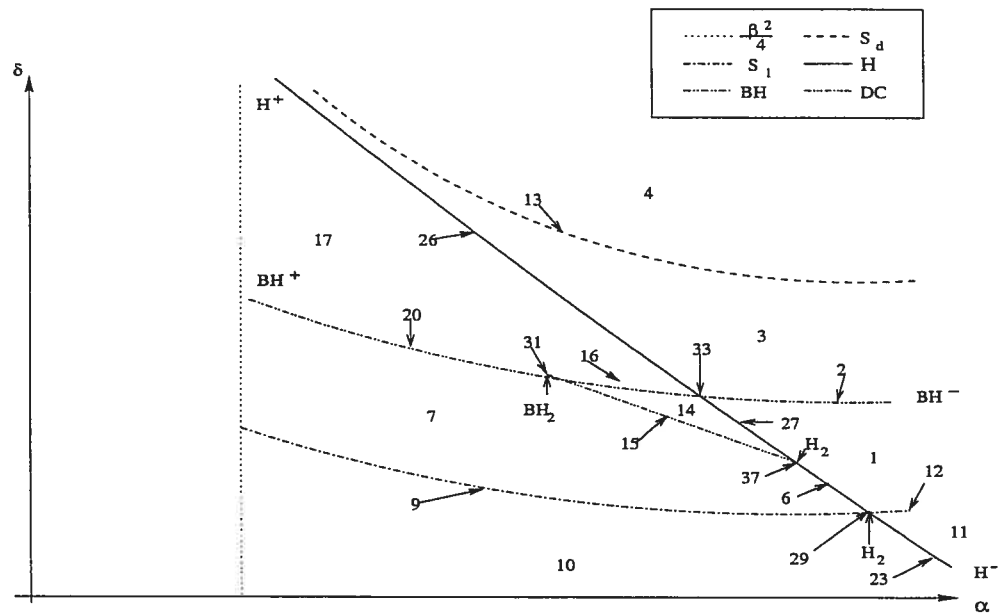


FIG. 4.3.6. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $-4 > \beta > \beta^*$.

par la suite, nous obtenons un point de selle et un nœud ou un foyer attractif comme point singulier (no7). On peut traverser Hopf de nouveau, no6, et alors, au no1, un cycle limite attractif naît du foyer. De plus, ce cycle entoure un foyer ou un nœud répulsif. Le point de selle est toujours présent dans le premier quadrant. En franchissant de nouveau BH , no2, une boucle homoclinique attractive est formée. Elle disparaît aussitôt au plan de phase no3 et nous nous retrouvons dans la situation déjà décrite. À partir du portrait de phase no17, nous aurions pu franchir la BH par le no16. Dans ce cas, la boucle homoclinique est attractive. À l'intérieur de celle-ci se trouve un cycle limite répulsif et un nœud ou un foyer attractif. Ensuite, au plan de phase no14, un autre cycle naît. Par conséquent, nous avons deux cycles. Le cycle extérieur est attractif. Celui qui est à l'intérieur est répulsif et il contient un foyer ou un nœud attractif. Si on traverse la courbe de double cycle DC , no15, les deux cycles se fusionnent ce qui nous donne un cycle double dont l'extérieur est attractif et l'intérieur répulsif. Un foyer ou un nœud attractif se trouve à l'intérieur de ce cycle. Une fois que les paramètres ont passé cette courbe, nous sommes dans le cas du portrait de phase no7 que nous avons déjà décrit. À partir du plan de phase no14, nous aurions aussi pu traverser la bifurcation de Hopf (no27), le cycle répulsif disparaît alors et nous revenons

à la situation décrite au portrait de phase *no1* qui a été commentée précédemment.

Septièmement, pour $\beta = \beta^*$, nous avons le graphique 4.3.7. C'est pour cette valeur de β que la bifurcation de Hopf d'ordre deux croise la surface S_1 .

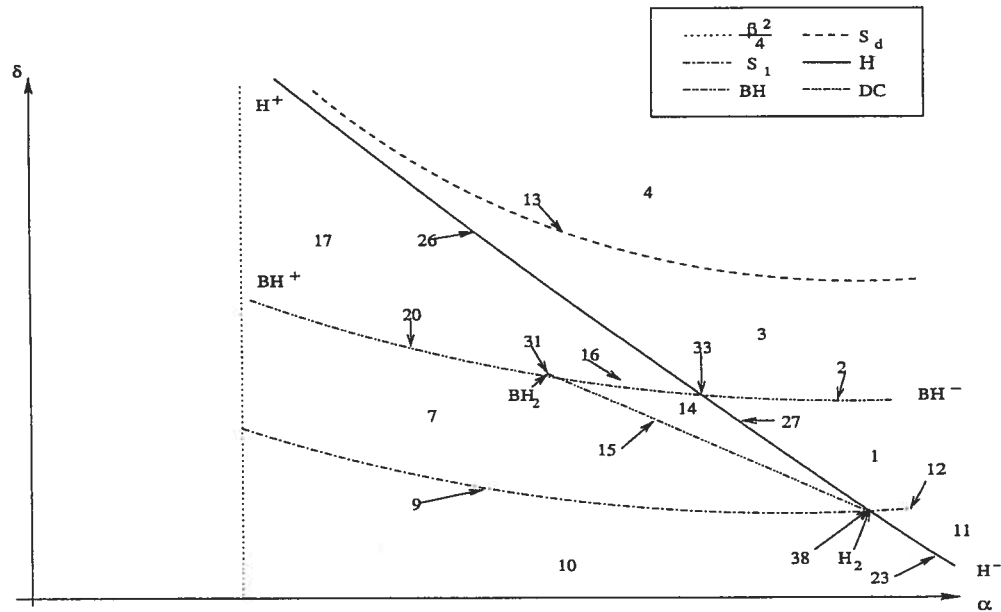


FIG. 4.3.7. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta = \beta^*$.

Le diagramme de bifurcation et les portraits de phase sont très semblables au cas $-4 > \beta > \beta^*$. En effet, seuls les plans de phase *no6*, *no29* et *no37* changent. Les deux premiers disparaissent et le troisième est remplacé par le plan de phase *no38*. Dans ce plan, nous avons un point de selle en $(0, 0)$, un col-nœud en $(1, 0)$ et un foyer ou un nœud attractif dans le premier quadrant. Nous ne commenterons pas les autres portraits de phase puisque nous l'avons déjà fait dans le cas $-4 > \beta > \beta^*$.

Huitièmement, pour $\beta < \beta^*$, la situation est représentée à la figure 4.3.8. Dans ce cas, nous constatons que la bifurcation de Hopf d'ordre deux se situe sous la surface S_1 .

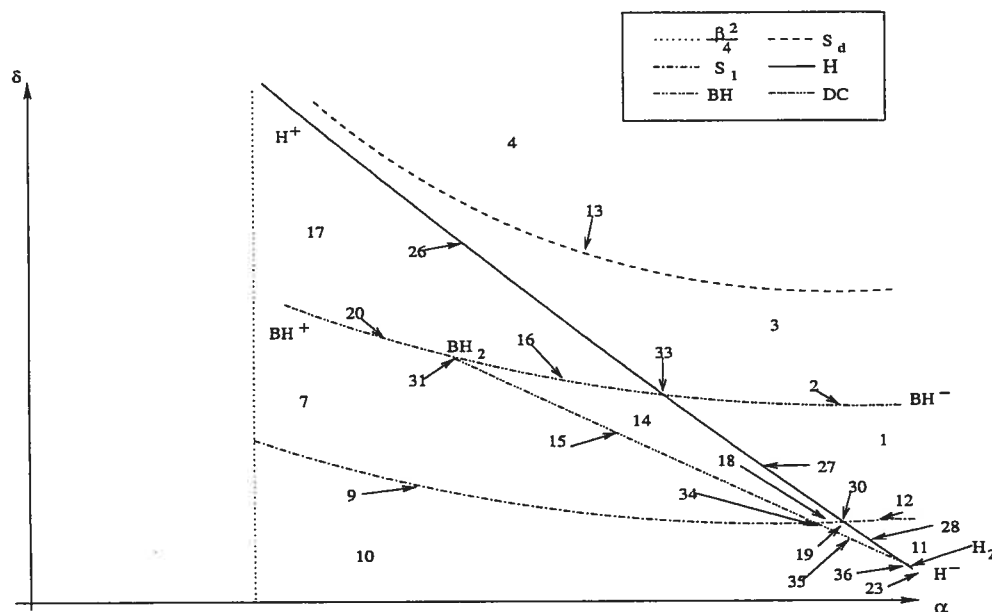


FIG. 4.3.8. Graphique des courbes de bifurcation avec les portraits de phase pour $\beta < \beta^*$.

Comme au cas précédent, la majorité des plans de phase ont déjà été commentés pour $-4 > \beta > \beta^*$ et leur description s'applique ici aussi. Par conséquent, nous nous limiterons à la description de ceux qui sont nouveaux. L'origine est toujours un point de selle. Nous commençons par le portrait de phase *no19* où nous avons deux cycles limites dans le premier quadrant. Le cycle extérieur est attractif et le cycle intérieur, répulsif. Ce dernier contient un foyer ou un nœud attractif. Le point $(1, 0)$ est un point de selle pour ces valeurs de paramètres. Nous avons trois possibilités. Si les paramètres passent par Hopf, *no28*, le cycle limite intérieur disparaît. Une fois la bifurcation traversée, nous avons le plan de phase *no11*, c'est-à-dire un point de selle en $(1, 0)$ et un cycle limite attractif à l'intérieur duquel il y a un foyer ou un nœud répulsif. Par contre, si nous considérons plutôt la surface *DC*, *no35*, les deux cycles se fusionnent et nous avons un cycle limite dont l'extérieur est attractif et l'intérieur est répulsif. Un foyer ou un nœud attractif est toujours présent à l'intérieur de ce cycle et le point singulier $(1, 0)$ est encore un point de selle. Une fois cette bifurcation passée, nous avons la situation *no10*. Plus précisément, le double cycle a disparu et nous avons un foyer ou un nœud attractif dans le premier quadrant. Et là aussi, le point $(1, 0)$ est un point de selle. Finalement, la dernière possibilité consiste à choisir les paramètres sur S_1 .

Dans cette situation, les cycles ne changent pas, c'est au point $(1, 0)$ que tout se produit. Rappelons-nous qu'au plan de phase *no19*, nous avons un point de selle en ce point singulier. Pour les paramètres qui sont sur S_1 , il devient un col-nœud (*no18*). Tandis que lorsque les paramètres sont au-dessus de S_1 , le col-nœud se scinde en deux points. Nous obtenons alors un nœud attractif en $(1, 0)$ et un point de selle dans le premier quadrant. Les deux cycles que nous avons au plan de phase *no19* sont également présents dans celui-ci.

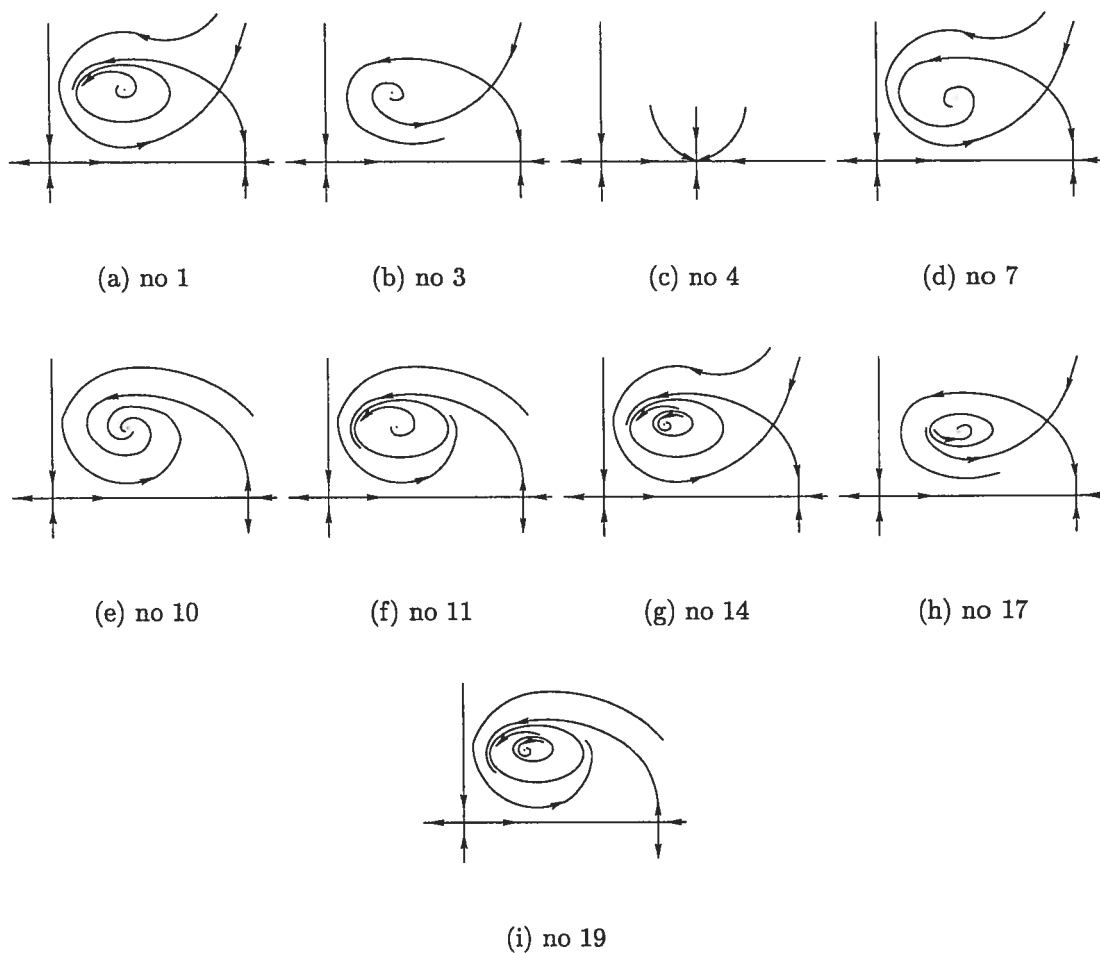


FIG. 4.3.9. Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 0.

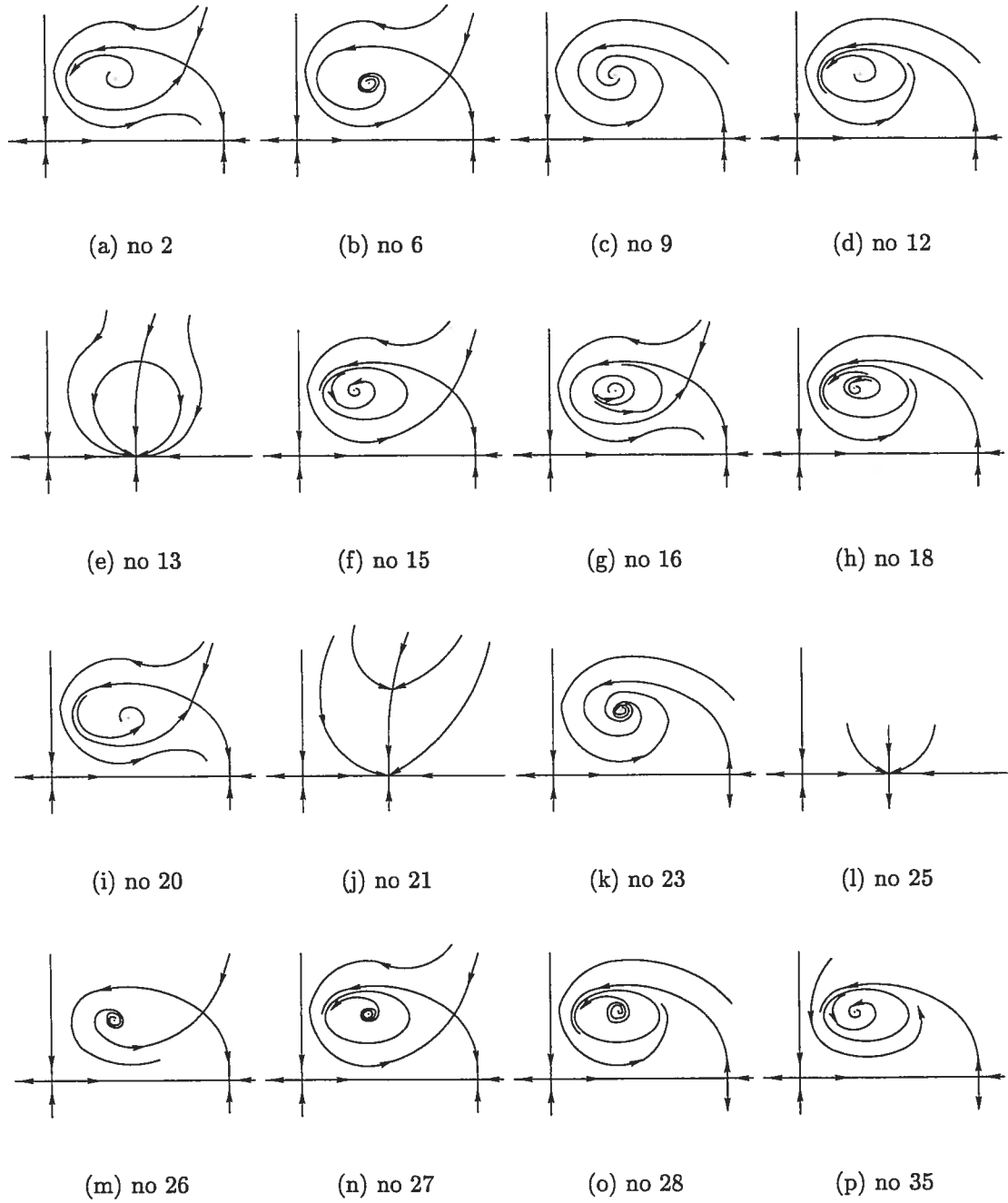


FIG. 4.3.10. Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 1.

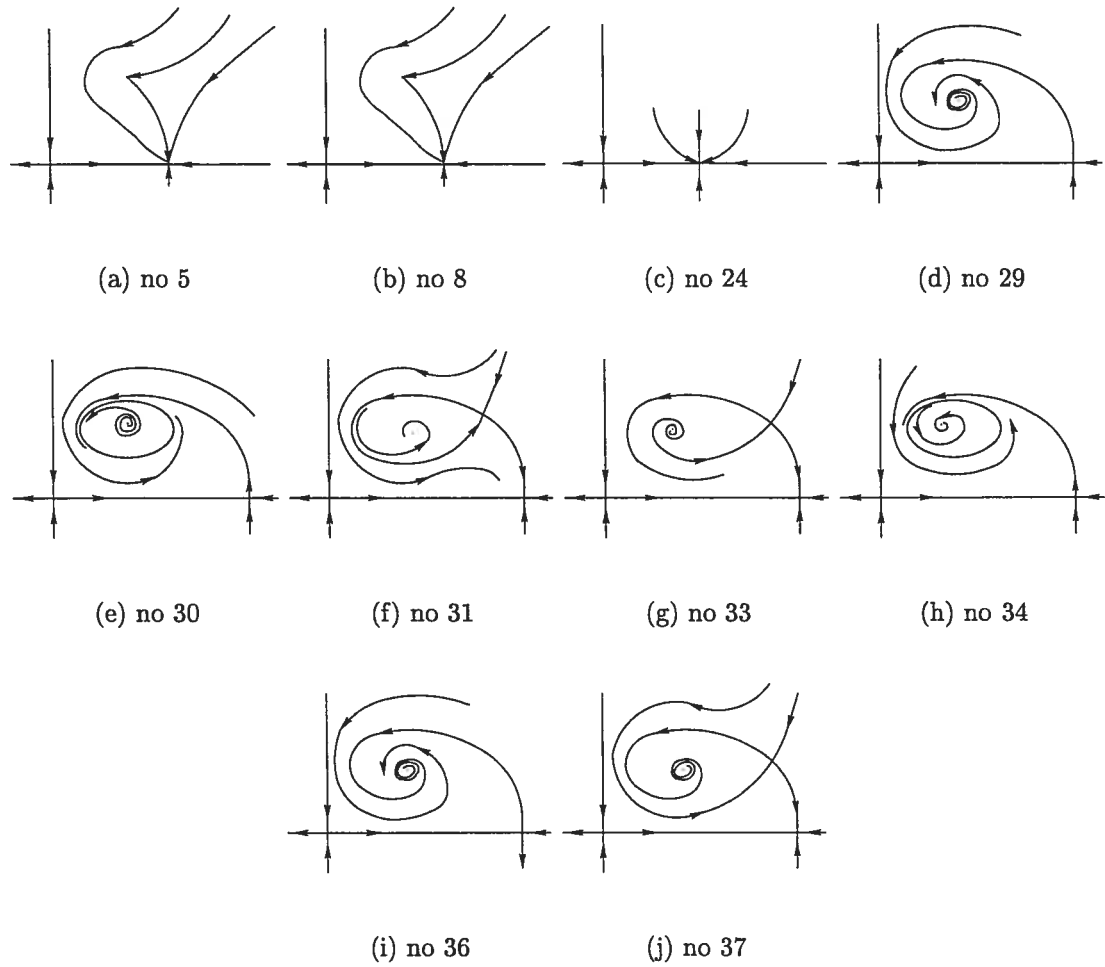


FIG. 4.3.11. Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 2.

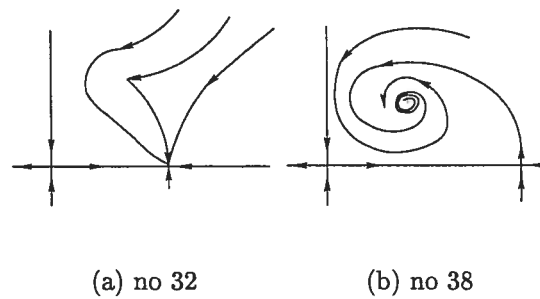


FIG. 4.3.12. Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 3.

4.4. INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE DE CERTAINS PORTRAITS DE PHASE

Nous allons nous limiter à l'interprétation biologique des portraits de phase de la figure 4.4.1. Ce sont ceux qui se produisent pour les paramètres choisis dans les régions ouvertes du diagramme de bifurcation. Il y a trois tendances dans l'évolution des populations.

- La population des prédateurs s'éteint.
- Les prédateurs et les proies coexistent en une position d'équilibre.
- Les prédateurs et les proies coexistent en un régime oscillatoire stable.

Chacune des régions ouvertes a été numérotée selon les conséquences sur l'évolution des populations de prédateurs et de proies qu'entraîne le choix de la condition initiale (x_0, y_0) dans cette zone. Pour des conditions initiales prises dans la région 1, la population des prédateurs s'éteint. Pour celles qui sont choisies dans la région 2, les populations évoluent vers un régime oscillatoire stable c'est-à-dire un cycle limite stable. Enfin, pour celles qui sont sélectionnées dans la région 3, les populations tendent vers la position d'équilibre (le foyer ou le nœud). Lorsque (x_0, y_0) correspond à la position d'équilibre la situation demeure dans cet état. De plus, nous avons un régime oscillatoire stable si (x_0, y_0) est sur un cycle limite. C'est l'ensemble des possibilités que nous avons. Décrivons plus en détail chacun des portraits de phase de la figure 4.4.1.

Pour le portrait de phase *no4*, la seule position d'équilibre est $(1, 0)$. Peu importe les populations initiales, l'évolution des populations mène à l'extinction des prédateurs et à un équilibre pour les proies. La situation au portrait de phase *no3* est sensiblement la même. Sauf, qu'il y a deux autres points singuliers dans le premier quadrant. Ainsi, si les populations initiales correspondent exactement au foyer ou au nœud, elles demeurent dans cet état. Si elles sont sur la variété stable du point de selle, elles tendront vers le point de selle. Par contre, si elles sont en dehors de cette variété et des points d'équilibre, si minime soit l'écart,

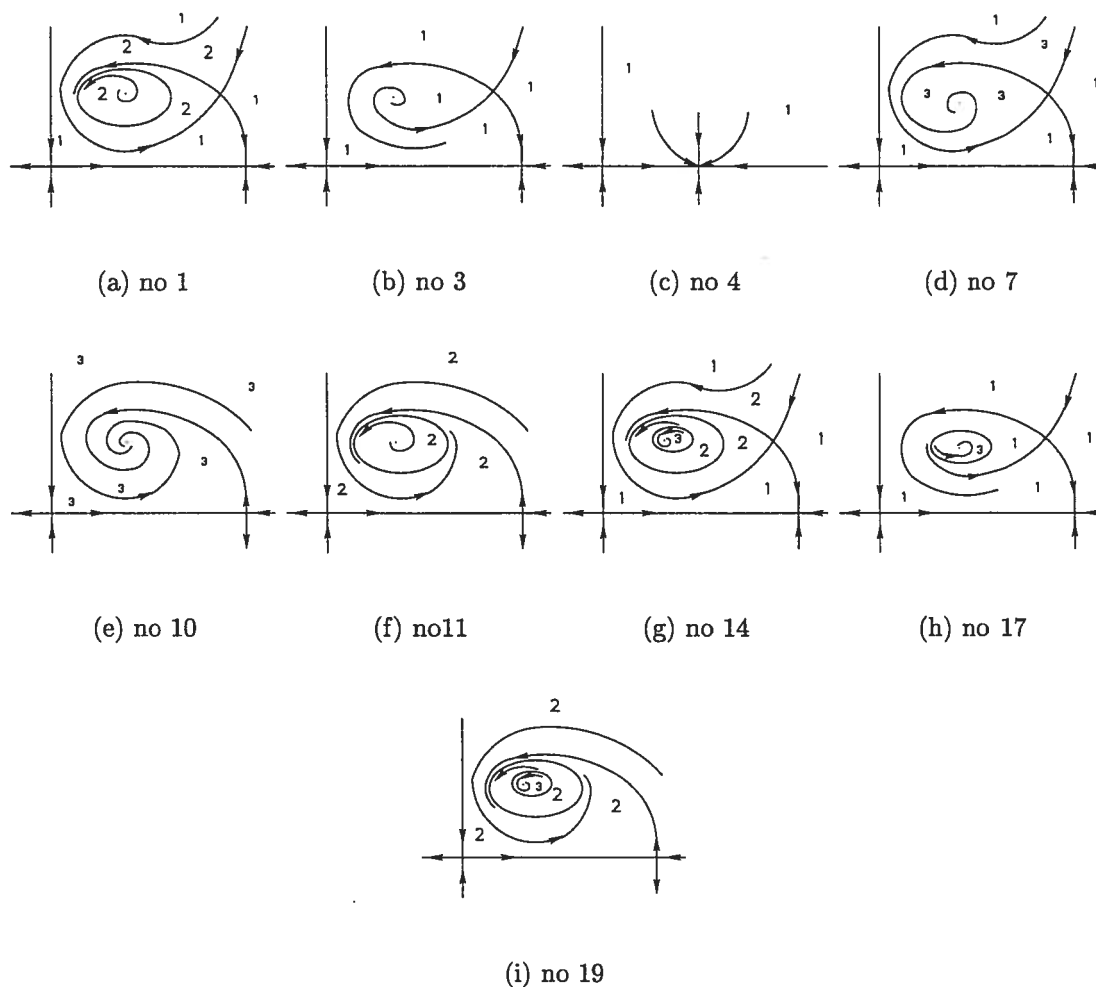


FIG. 4.4.1. Portraits de phase du diagramme de bifurcation pour la codimension 0 dont les régions sont identifiées selon les trois tendances de l'évolution des populations.

l'évolution des populations mène à l'extinction des prédateurs et à un équilibre pour les proies comme au plan de phase *no4*.

Au plan de phase *no17*, nous avons plusieurs possibilités. Lorsque la condition initiale (x_0, y_0) est prise dans la région 1, la population des prédateurs s'éteint. Si nous choisissons (x_0, y_0) sur le cycle limite, nous avons une oscillation dans l'évolution des populations. Toutefois, si (x_0, y_0) est à l'intérieur du cycle, les populations évoluent vers le point d'équilibre. Ce dernier a donc comme bassin

d'attraction tout l'intérieur du cycle.

Si le cycle limite disparaît, nous nous retrouvons dans la situation *no7*. Les populations initiales choisies dans la région 1 évoluent de telle sorte que les prédateurs disparaissent. Tandis que celles prises dans la région 3 évoluent vers la position d'équilibre.

Un autre cycle limite peut naître à l'intérieur du grand cycle limite. Dans ce cas, nous avons le plan de phase *no14*. Pour (x_0, y_0) choisie dans la région 1, la population des prédateurs s'éteint et celle des proies atteint un équilibre. La région 2 représente le bassin d'attraction du grand cycle limite. D'où, pour des populations initiales prises dans ce bassin, les populations évoluent vers un régime oscillatoire stable. Mais, si nous prenons (x_0, y_0) à l'intérieur du petit cycle limite, la région 3, la croissance des populations tend vers la position d'équilibre.

Par la suite, le petit cycle limite peut disparaître et nous sommes dans la situation *no1*. À savoir que pour des conditions initiales dans la région 1, les prédateurs disparaissent. Nous avons, pour (x_0, y_0) choisie dans la région 2, un régime oscillatoire stable. En effet, pour ces valeurs les populations évoluent vers le cycle limite. Un seul point y échappe, celui de la position d'équilibre.

Ensuite, nous avons le portrait de phase *no11*. Pour presque tout (x_0, y_0) , les populations évoluent vers le cycle limite. Nous avons alors un régime oscillatoire stable. En fait, le seul point du premier quadrant qui n'évolue pas en ce sens est le point d'équilibre.

Encore une fois un autre cycle limite peut naître à l'intérieur du grand cycle limite, nous avons alors le portrait de phase *no19*. Pour les conditions initiales à l'intérieur du petit cycle, la région 3, les populations évoluent vers le point d'équilibre. Pour les conditions initiales de la région 2, les populations évoluent vers le

grand cycle limite et nous avons, pour ces valeurs, un régime oscillatoire stable.

Au plan, de phase $n \neq 10$, peu importe les conditions initiales, les populations évoluent vers la position d'équilibre du premier quadrant.

De manière générale, nous constatons que la population des prédateurs n'a pas la possibilité de disparaître lorsque les paramètres sont sous la surface S_1 . De plus, si nous prenons (x_0, y_0) sur l'axe des Y positifs, la population des prédateurs s'éteint. Si nous prenons (x_0, y_0) sur l'axe des X positifs, la population des proies tend vers un équilibre. Ceci complète la description de chacun des portraits de phase d'un point de vue biologique. Il est à noter que pour avoir une idée de la taille réelle des bassins d'attraction, il faudrait faire des simulations numériques. Toutefois, à partir de la figure 4.4.1., nous avons une bonne idée de l'évolution de la population des prédateurs et des proies.

CONCLUSION

En conclusion, nous avons étudié le système prédateur-proie suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x), \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x)),\end{aligned}$$

avec

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

Les paramètres a , c , d , k , m et r sont des constantes positives. La constante b est négative dans le cas que nous avons étudié. Nous souhaitons déterminer le diagramme de bifurcation et les portraits de phase correspondants pour ce système.

D'abord, nous nous sommes attardés à la signification biologique du système. Ainsi, la fonction de réponse des prédateurs, $p(x)$, tient compte de deux aspects : la dépendance non linéaire de $p(x)$ par rapport à la population des proies, x , et le fait que la population des prédateurs soit saturée lorsque celle des proies est grande.

Ensuite, nous avons étudié le système d'un point de vue mathématique. Après avoir simplifié ce système, nous avons déterminé les principales bifurcations et étudié le type des points singuliers. Pour ce faire, nous avons fait les calculs là où nous avons de l'information, c'est-à-dire pour les paramètres qui sont sur les surfaces de bifurcation. Par ailleurs, à l'aide des résultats obtenus, nous avons suggéré,

au chapitre quatre, un modèle pour le diagramme de bifurcation du système. Les portraits de phase correspondants aux différentes régions du diagramme ont aussi été donnés. Pour certains d'entre eux nous avons présenté une interprétation de l'évolution des populations. Nous avons trois principales tendances : l'extinction des prédateurs, la coexistence des prédateurs et des proies en un point d'équilibre et leur coexistence en un régime oscillatoire stable.

Malgré le modèle suggéré pour ce système, certains aspects du diagramme de bifurcation restent à préciser.

i) Premièrement, il faut vérifier que la surface de boucle homoclinique a bien la forme suggérée aux graphiques 4.3.1 à 4.3.8 et déterminer si elle apparaît à partir de $\beta = -3$ ou plutôt de $\beta_0 < -3$.

ii) Deuxièmement, il faut compléter le calcul de la bifurcation de Hopf et montrer qu'elle est toujours d'ordre au plus deux.

iii) Troisièmement, pour $-2 > \beta > -4$, nous avons la possibilité d'avoir un point isolé dans l'espace des paramètres $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ où la trace de la matrice jacobienne, évaluée en un point singulier (x_0, y_0) , s'annule. Il reste à calculer le signe du déterminant de la matrice jacobienne évaluée au point singulier (x_0, y_0) . S'il est négatif, le point (x_0, y_0) est un point de selle de trace nulle, ce qui n'est pas pertinent. S'il est positif, nous avons un foyer faible en (x_0, y_0) . Au voisinage de $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, la trace en (x_0, y_0) est de signe constant. Nous nous attendrions à ce que $Re(c_1)$ en (x_0, y_0) pour $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ soit de même signe que la trace en (x_0, y_0) au voisinage de $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, auquel cas il n'y aurait pas de changement de la topologie du portrait de phase. Sinon le problème serait plus compliqué mais nous nous attendons plutôt à un des deux scénarios simples décrits avant.

iv) Et quatrièmement, il faut vérifier que la boucle homoclinique n'est jamais d'ordre supérieur à deux.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] ALEXANDER D. BAZYKIN, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Serie A, Vol. 11, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998.
- [Bo] R. I. BOGDANOV, *Versal Deformation of Singularity of a Vector Field on the Plane in the Case of Zero Eigenvalues*, *Selecta Mathematica Sovietica*, Vol. 1, 4 (1981), pages 389-421.
- [CLW] SHUI-NEE CHOW, CHENGZHI LI ET DUO WANG, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, 1994.
- [DRS] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE ET J. SOTOMAYOR, *Generic 3-parameter families of vector field on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3.*, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, Vol. 7 (1987), no 3, pages 375-413.
- [FW] H. I. FREEDMAN ET G. S. K. WOLKOWICZ, *Predator-prey Systems with Group Defence : the Paradox of Enrichment Revisited*, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 48, No 5/6, pages 493-508, 1986.
- [GH] JOHN GUCKENHEIMER ET PHILIP HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systemes, and Bifurcation of Vector Fields.*, Springer-Verlag New-York Inc, 1983.

- [K] A. KUROSH, *Cours d'algèbre supérieure*, Editions Mir, 1973.
- [P] LAWRENCE PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, third edition, Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag New-York Inc., 2001.
- [ZCW] v HUAIPING ZHU, SUE ANN CAMPBELL ET GAIL S. K. WOLKOWICZ, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional response*, SIAM J. Appl. Math. 63 (2002), no 2, pages 636-682.