

2 m 11. 30 11. 1

Université de Montréal

Schéma implicite pour la résolution d'un système
hyperbolique d'équations aux dérivées partielles

par

Matthieu Michaud

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques appliquées

août 2002



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Schéma implicite pour la résolution d'un système
hyperbolique d'équations aux dérivées partielles**

présenté par

Matthieu Michaud

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Anne Bourlioux

(président-rapporteur)

Paul Arminjon

(directeur de recherche)

Robert Brunet

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

le 8 octobre 2002

RÉSUMÉ

Haim Nessyahu et Eitan Tadmor ont présenté une famille d'approximations aux différences centrées non oscillatoires et du second ordre de précision pour des systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation. Pour la résolution de ce type de systèmes, il est de la première importance d'avoir une méthode qui nous permette de trouver une solution approximative avec des pas de temps les plus grands possibles. Nous avons donc choisi de nous attaquer au problème de la stabilité de la méthode. Pour ce faire, nous construisons une forme implicite de la méthode de Nessyahu et Tadmor (NT). Nous présentons d'abord la problématique de base pour les équations (et systèmes) hyperboliques. Ensuite, nous construisons la méthode NT. Nous enchaînons avec les modifications que l'on apporte à la méthode NT pour faire intervenir le caractère implicite recherché, la principale modification étant de changer la règle de quadrature pour les intégrales de flux. Nous établirons le schéma implicite en tant que tel et nous discuterons du choix des dérivées numériques. Enfin, nous présentons les résultats numériques obtenus pour plusieurs cas tests typiques. Bien que cette méthode n'apporte pas d'amélioration au niveau de la précision des approximations obtenues, il est clair qu'il y a une amélioration au niveau de la stabilité de la méthode.

Mots-Clés : Implicite, équations aux dérivées partielles, systèmes, hyperbolique, analyse numérique.

ABSTRACT

Haim Nessayahu and Eitan Tadmor introduced a family of nonoscillatory second-order central difference approximations for nonlinear hyperbolic conservation laws. In order to solve such systems, it is important to establish a method which allows us to find an approximate solution with timesteps as large as possible. We chose to do so by improving the stability of Nessayahu and Tadmor's (NT) method. This is accomplished by establishing an implicit form of NT. We first introduce the field of hyperbolic equations (and systems). We also construct the NT scheme and explain the modifications we propose to achieve implicitness, the main modification being a change in the integration formula of the flux integrals. We construct the implicit form itself and discuss the choice of numerical derivatives. Finally, we provide numerical results for typical test cases. Although there is no improvement on the precision of the approximate solutions, we clearly have one on the stability of the scheme.

Keywords : Implicit, partial differential equations, systems, hyperbolic, numerical analysis.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier M. Paul Arminjon pour le temps qu'il a consacré à guider mes pas à travers le labyrinthe de la recherche. Je n'aurais jamais pu faire ce travail sans ses précieux conseils. Merci à Amik St-Cyr qui souvent a su traduire en mots ce que je j'exprimais en gestes, dessins et dialectes obscurs. Merci à Anne Bourlioux pour m'avoir ouvert les yeux sur l'analyse numérique. Merci à Nicolas Beauchemin, Alexandre Girouard et Sébastien Manka qui ont su m'aider pour le côté technique de ma rédaction. Merci à mes parents, Danielle et Jean-Claude, qui m'ont soutenu financièrement et moralement tout au long de mes études, chacun à sa façon. Merci à mon frère Vincent pour l'assistance technique qu'il a su dispenser. Merci à ma soeur Douce pour les moments euphoriques qui m'ont permis de recharger mes batteries. Merci à mes amis qui ont été là pour moi quand j'en ai eu besoin. Merci à Sylvain Cloutier, un ami qui m'a offert du travail fait sur mesure pour que je puisse continuer mes études. Merci à Isabel pour l'aisance avec laquelle elle m'a permis de joindre ma vie familiale, professionnelle et étudiante. Enfin, merci à mon fils Guillaume qui m'apporte à chaque jour la joie de vivre. Que toutes ces personnes obtiennent le meilleur de ce que la vie a à leur offrir.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Table des figures	viii
Introduction	1
Chapitre 1. Lois de conservation	3
1.1. Lois de conservation	3
1.2. Solutions faibles	5
1.3. Unicité des solutions et description des discontinuités	7
1.4. Problème de Riemann.....	8
1.5. Exemple scalaire : équation de Burgers.....	9
1.6. Systèmes de lois de conservation	11
1.7. Exemple de système de lois de conservation : les équations d'Euler	13
Chapitre 2. Méthodes numériques	16
2.1. Méthode de Nessyahu-Tadmor (NT)	16
2.2. Construction de notre méthode	22
2.3. Choix des dérivées numériques	26
Chapitre 3. Présentation des résultats	27

3.1. Équation de Burgers	27
3.2. Équations d'Euler	33
3.3. Valeur de la méthode	34
Bibliographie	37

Table des figures

1.1.1	Deux caractéristiques se rencontrant au point (x, t)	4
1.2.1	Région coupée par la courbe \mathcal{C}	6
1.7.1	Tube à choc de Sod	15
2.1.1	Cellules ayant des vitesses caractéristiques positives	18
2.1.2	Cellules ayant des vitesses caractéristiques quelconques	18
3.1.1	Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.5$	27
3.1.2	Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.8$	28
3.1.3	Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.9$	29
3.1.4	Équation de Burgers ($u(x, 0) = \sin\pi x$) avec $CFL = 0.5$	29
3.1.5	Équation de Burgers ($u(x, 0) = \sin\pi x$) avec $CFL = 0.8$	30
3.1.6	Équation de Burgers ($u(x, 0) = \sin\pi x$) avec $CFL = 1.0$	31
3.1.7	Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.5$	31
3.1.8	Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.8$	32
3.1.9	Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 1$	32
3.2.1	Tube à choc de Sod avec $CFL = 0.5$	33
3.2.2	Tube à choc de Sod avec $CFL = 0.6$	34
3.2.3	Tube à choc de Sod avec $CFL = 0.8$	35
3.3.1	Cellules pour lesquelles la CFL a été choisie trop grande	36

INTRODUCTION

Haim Nessyahu et Eitan Tadmor ont présenté une famille d'approximations aux différences centrées non oscillatoires et du second ordre de précision pour des systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation. Pour la résolution de ce type de systèmes, il est de la première importance d'avoir une méthode qui nous permette de trouver une solution approximative avec des pas de temps les plus grands possibles. En effet, moins les pas de temps sont grands, plus nombreux seront les calculs et, par conséquent, le temps de calcul augmentera. Bien que nous n'aborderons que le cas unidimensionnel dans ce travail, les considérations de temps de calcul prennent toute leur importance lorsqu'on passe aux cas multidimensionnels, pour lesquels les généralisations du schéma de Nessyahu et Tadmor (NT), à des méthodes de type volumes finis d'une part pour des maillages cartésiens et d'autre part pour des maillages triangulaires ou tétraédriques non-structurés ont été proposées par Arminjon-Viallon [3] [4], Arminjon-Stanescu-Viallon [2], Arminjon-Madrane-Viallon [5] et Arminjon-Madrane-St-Cyr [1].

Nous avons donc choisi de nous attaquer au problème de la stabilité de la méthode. En améliorant la stabilité, la condition de Courant, Friedrichs et Lewy (CFL) pourra être choisie plus grande, ce qui nous permettra de faire de plus grands pas de temps et donc de réduire le temps de calcul. Pour ce faire, nous voulons construire une forme implicite de la méthode NT.

La deuxième partie présente la problématique de base pour les équations (et systèmes) hyperboliques. Nous discuterons des solutions continues et discontinues de telles équations ce qui engendrera l'apparition des solutions faibles. Après avoir

élaboré sur l'unicité des solutions faibles, nous discuterons des différentes ondes engendrées par le problème de Riemann. Enfin nous présenterons les différents tests étudiés, c'est-à-dire l'équation de Burgers dans le cas scalaire et les équations d'Euler pour le cas des systèmes de lois de conservation.

La troisième partie de cet ouvrage portera sur la construction de la méthode NT. Cette méthode prend pour point de départ le schéma de Lax-Friedrichs auquel on rattache une interpolation de type MUSCL (schéma amont-centré pour des lois de conservation). À chaque pas de temps, on reconstruit une approximation linéaire par morceaux, non oscillatoire avec une précision du second ordre à partir des données numériques constantes par morceaux obtenues à l'étape précédente. On laisse évoluer cette solution pendant le pas de temps suivant, pour enfin la ramener à une approximation constante par morceaux. La pierre angulaire de cette méthode est le choix des dérivées numériques locales qui servent à reconstruire l'approximation linéaire par morceaux à partir des données constantes par morceaux. Ensuite nous présenterons les modifications que l'on apporte à la méthode NT pour faire intervenir l'implicité recherchée. Nous établirons le schéma implicite en tant que tel et nous discuterons du choix des dérivées numériques.

Enfin, nous présenterons les résultats numériques obtenus pour plusieurs cas tests typiques dans la dernière partie. Nous discuterons aussi des réussites et des échecs que rencontre la méthode.

Chapitre 1

LOIS DE CONSERVATION

1.1. LOIS DE CONSERVATION

Soit une équation non-linéaire écrite sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}F(v) = 0. \quad (1.1.1)$$

Cette équation est dite écrite sous la forme de conservation. Une équation différentielle qui peut être écrite sous cette forme est une loi de conservation.

Une loi de conservation nous dit que pour une région donnée, la variation de la quantité observée dans le temps est égale au flux net (orienté vers l'intérieur de la région) à travers les bords de ladite région. En développant la dérivée en x dans (1.1.1), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}v + a(v)\frac{\partial}{\partial x}v = 0, \quad (1.1.2)$$

où $a(v) = \frac{\partial F}{\partial v}$. L'équation (1.1.2) est véritablement non-linéaire en autant que $a(v)$ ne soit pas une fonction constante par rapport à v .

On appelle courbe caractéristique associée à une solution $v(x, t)$ de (1.1.1) toute courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_c = a(v(x, t)). \quad (1.1.3)$$

En paramétrant une telle courbe, dans le plan (x, t) par $t \mapsto (x(t), t)$, on voit que le membre de gauche de (1.1.2) peut être interprété comme la dérivée dans la direction de la caractéristique \mathcal{C} . En effet, le vecteur tangent à \mathcal{C} sera $(x'(t), 1)$

d'où $\left. \frac{dv(x,t)}{dt} \right|_C = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \cdot \left. \frac{dx}{dt} \right|_C + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}v + a(v) \frac{\partial}{\partial x}v = 0$, d'après l'équation (1.1.2). Puisque cette dérivée est nulle, nous avons que v est constant le long de la caractéristique et donc que $a(v)$ l'est aussi. Par (1.1.3), nous avons donc que les caractéristiques sont des droites le long desquelles la solution $v(x, t)$ est constante. Par contre, la pente de ces droites étant une fonction de v , il se peut que deux caractéristiques se rencontrent. Dans ce cas, qu'advient-il de la valeur de v au point de rencontre des caractéristiques puisque $v(x, t)$ est censée être constante sur chacune d'elles (fig. 1.1.1)? Les observations expérimentales et en particulier le problème du tube à choc suggèrent qu'une solution discontinue apparaît à cet instant. Dans ces conditions, la formulation différentielle (1.1.1) de l'équation de conservation cesse d'être valable, mais si la solution est présumée n'avoir que des discontinuités de première espèce (simple saut) alors il est justifié d'avoir recours à la formulation intégrale qui elle reste valable. Afin de mieux comprendre cette solution discontinue, nous introduisons donc la forme intégrale de la loi de conservation et la notion de solution faible. La forme intégrale s'écrit

$$\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}F(v) \right) dx = 0. \quad (1.1.4)$$

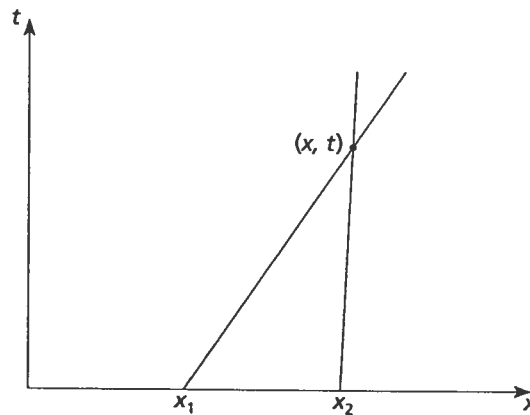


FIG. 1.1.1. Deux caractéristiques se rencontrant au point (x, t)

1.2. SOLUTIONS FAIBLES

Définissons l'opérateur $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$ et le vecteur $\mathbf{w}_v = (v, F(v))$. Nous pouvons ainsi écrire (1.1.1) sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v = 0. \quad (1.2.1)$$

Soit $\phi(x,t)$ une fonction scalaire lisse à support compact, alors $\phi \vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v = 0$ et en intégrant sur $-\infty < x < \infty$ et $t > 0$,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi \vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v dx dt = 0.$$

Par le théorème de divergence,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dx dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x,0)v(x,0)dx = 0. \quad (1.2.2)$$

Si \mathbf{w}_v est lisse, les calculs peuvent être repris dans le sens inverse. L'équation (1.2.2) est appelée la **forme faible** de la loi de conservation. Toute \mathbf{w}_v satisfaisant (1.2.2) pour toute fonction à support compact ϕ est une **solution faible** de la loi de conservation. Si \mathbf{w}_v est en plus une fonction lisse, nous dirons alors que c'est une **solution forte** ou **solution classique** de la loi de conservation. Il est à noter que (1.2.2) demeure valide même si \mathbf{w}_v n'est pas lisse, puisque \mathbf{w}_v est intégrable dans le demi-plan supérieur si elle ne présente qu'une simple discontinuité.

Considérons la solution faible \mathbf{w}_v de (1.2.2). Supposons maintenant que cette solution soit discontinue le long d'une courbe \mathcal{C} d'équation $x = \psi(t)$ dans le plan (x, t) . Supposons que cette courbe coupe une certaine région \mathcal{D} du plan (x, t) en deux parties \mathcal{D}_L et \mathcal{D}_R (fig. 1.2.1). Nous baptiserons \mathcal{C}_L et \mathcal{C}_R l'intersection que fait \mathcal{C} avec la la frontière de \mathcal{D}_L et \mathcal{D}_R respectivement. L'orientation de \mathcal{C}_L (resp. \mathcal{C}_R) sera choisie dans le même sens que la frontière de \mathcal{D}_L (\mathcal{D}_R) parcourue dans le sens positif, c.-à-d. le sens anti-horaire.

Puisque \mathbf{w}_v est une solution faible de (1.2.2),

$$\int \int_{\mathcal{D}} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dx dt = \int \int_{\mathcal{D}_L} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dx dt + \int \int_{\mathcal{D}_R} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dx dt = 0. \quad (1.2.3)$$

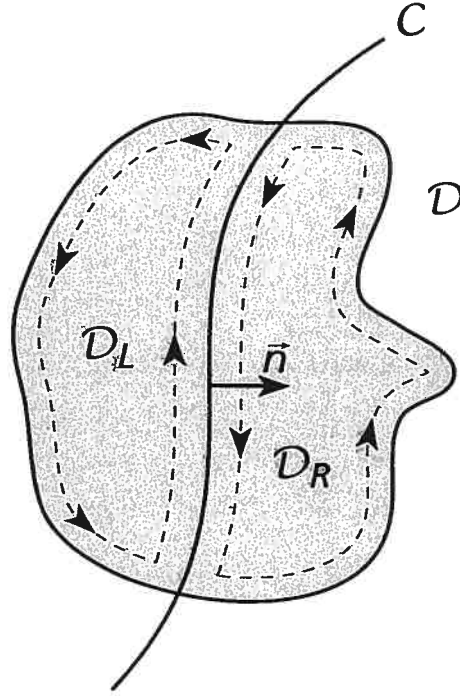


FIG. 1.2.1. Région coupée par la courbe C

Puisque c'est vrai pour toute fonction ϕ , choisissons celle-ci de telle sorte que sa valeur soit nulle sur le pourtour de la région \mathcal{D} . En appliquant le théorème de divergence à l'intégrale sur la région \mathcal{D}_L de (1.2.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{D}_L} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dxdt &= \int \int_{\mathcal{D}_L} \vec{\nabla} \cdot (\phi \mathbf{w}_v) dxdt - \int \int_{\mathcal{D}_L} \phi (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v) dxdt \\ &= \int_{\mathcal{C}_L} \phi \mathbf{w}_v \cdot \vec{n} ds - \int \int_{\mathcal{D}_L} \phi (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v) dxdt, \end{aligned}$$

où \vec{n} est le vecteur normal de \mathcal{C} . Puisque \mathbf{w}_v est lisse dans l'intérieur de \mathcal{D}_L , nous avons que $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v = 0$ dans \mathcal{D}_L et

$$\int \int_{\mathcal{D}_L} \phi (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}_v) dxdt = 0.$$

Alors,

$$\int \int_{\mathcal{D}_L} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dxdt = \int_{\mathcal{C}_L} \phi \mathbf{w}_v \cdot \vec{n} ds. \quad (1.2.4)$$

De façon analogue, nous obtenons pour l'intégrale sur \mathcal{D}_R

$$\int \int_{\mathcal{D}_R} (\vec{\nabla} \phi) \cdot \mathbf{w}_v dxdt = - \int_{\mathcal{C}_R} \phi \mathbf{w}_v \cdot \vec{n} ds. \quad (1.2.5)$$

où le signe moins apparaît par suite du changement de direction de l'intégration par rapport au vecteur normal. En introduisant (1.2.4) et (1.2.5) dans (1.2.3), nous obtenons la condition à travers la discontinuité le long de \mathcal{C}

$$\int_{\mathcal{C}_L} \phi \mathbf{w}_v \cdot \vec{n} ds - \int_{\mathcal{C}_R} \phi \mathbf{w}_v \cdot \vec{n} ds = 0. \quad (1.2.6)$$

Puisque ceci est vrai pour toute fonction ϕ ,

$$(\mathbf{w}_v|_L - \mathbf{w}_v|_R) \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.2.7)$$

à travers \mathcal{C} . Cette dernière condition est la condition de saut de Rankine et Hugoniot (R-H).

Soit V la vitesse de propagation de la discontinuité dans le temps, alors $V = \frac{d\psi}{dt}$. D'après la définition de la courbe \mathcal{C} , nous avons que $x - \psi(t) = 0$, ce qui nous permet de décrire le vecteur normal \vec{n}

$$\vec{n} = \left(-\frac{d\psi}{dt}, 1\right) = (-V, 1).$$

La condition de saut R-H devient alors

$$V(v_R - v_L) = F(v_R) - F(v_L), \quad (1.2.8)$$

et donc

$$V = \frac{F(v_R) - F(v_L)}{v_R - v_L}. \quad (1.2.9)$$

1.3. UNICITÉ DES SOLUTIONS ET DESCRIPTION DES DISCONTINUITÉS

La classe des solutions faibles de la loi de conservation est trop grande pour pouvoir assurer l'unicité des solutions faibles. Il faut satisfaire une autre condition afin de déterminer une solution unique physiquement admissible. Oleinik [11] a donné une condition caractérisant une solution faible admissible, physiquement

acceptable, comportant une discontinuité entre deux états v_L et v_R et se propageant à la vitesse V . Pour tout état v entre les états v_L et v_R , la condition

$$\frac{F(v) - F(v_L)}{v - v_L} \geq V \geq \frac{F(v) - F(v_R)}{v - v_R}. \quad (1.3.1)$$

doit être satisfaite. Une solution faible qui satisfait la condition d'entropie d'Oleinik (1.3.1) est déterminée de manière unique par les données initiales.

En faisant tendre v_L vers v_R , la condition d'entropie devient

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow v_L} \frac{F(v) - F(v_L)}{v - v_L} \geq V \geq \lim_{v \rightarrow v_R} \frac{F(v) - F(v_R)}{v - v_R}; \\ \iff a(v_L) \geq V \geq a(v_R). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Une discontinuité sera appelée un **choc** si les inégalités de (1.3.1) sont strictes pour tout v entre v_L et v_R . Une discontinuité sera appelée **discontinuité de contact** si les inégalités de (1.3.1) font place à des égalités.

Dans le cas d'une discontinuité de contact, (1.3.1) nous donne pour $v_L < v < v_R$,

$$F(v) = V(v - v_L) + F(v_L),$$

qui est une fonction linéaire de v . Ainsi, la loi de conservation (1.1.1) est linéaire pour $v_L < v < v_R$.

Dans le cas où v_L et v_R enfreindraient la condition d'entropie, c.-à-d. si

$$a(v_L) < a(v_R),$$

il ne s'agira pas d'une discontinuité, mais bien d'une onde de raréfaction et la solution sera continue à travers cette onde.

1.4. PROBLÈME DE RIEMANN

Considérons la loi de conservation (1.1.1) avec les conditions initiales suivantes

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < 0, \\ v_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Ce genre de problème est appelé problème de Riemann. Une propriété de la solution d'un problème de Riemann est qu'elle est autosimilaire, c.-à-d. que

$$v(x, t) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

où h est une fonction continue par morceaux d'une seule variable.

Une autre propriété de la solution d'un problème de Riemann est l'additivité. Soit v_m un état intermédiaire tel que $v_L > v_m > v_R$. Définissons deux problèmes de Riemann avec la loi de conservation (1.1.1) et les conditions initiales v_1 et v_2

$$v_1(x, 0) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < 0, \\ v_m & \text{si } x > 0. \end{cases} ;$$

$$v_2(x, 0) = \begin{cases} v_m & \text{si } x < 0, \\ v_R & \text{si } x > 0. \end{cases} .$$

La propriété d'additivité fait en sorte que la combinaison des solutions v_1 et v_2 nous donne la solution du problème original (1.4.1) (voir Sod [15] pour plus de détails).

1.5. EXEMPLE SCALAIRE : ÉQUATION DE BURGERS

Pour l'équation de Burgers, nous avons la fonction de flux $F(v) = \frac{1}{2}v^2$. Par conséquent, $a(v) = v$ et (1.1.1) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}v + v\frac{\partial}{\partial x}v = 0. \quad (1.5.1)$$

Dans le cas où $v_L > v_R$, nous avons $a(v_L) > a(v_R)$ l'onde résultante est un choc avec vitesse de propagation V

$$V = \frac{F(v_L) - F(v_R)}{v_L - v_R} = \frac{\frac{1}{2}v_L^2 - \frac{1}{2}v_R^2}{v_L - v_R} = \frac{v_L + v_R}{2}.$$

Si par contre nous avons $v_L < v_R$, c.-à-d. $a(v_L) < a(v_R)$, la solution entropique sera une onde de raréfaction et la solution complète sera de la forme

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } \frac{x}{t} < v_L \\ h(\frac{x}{t}) & \text{si } v_L < \frac{x}{t} < v_R \\ v_R & \text{si } \frac{x}{t} > v_R \end{cases}$$

Pour déterminer la fonction $h(\frac{x}{t})$, soit $P = (x, t)$ un point faisant partie de l'éventail de raréfaction, c.-à-d. que $a(v_L) < \frac{x}{t} < a(v_R)$. La pente de la caractéristique à ce point $\frac{t}{x} = \frac{1}{a(v)} = \frac{1}{v}$ doit être égale à la pente du segment reliant P à l'origine. Nous avons donc que $\frac{1}{v} = \frac{t}{x}$ et dont que $h(x, t) = \frac{x}{t}$. La solution devient donc

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } \frac{x}{t} < v_L \\ \frac{x}{t} & \text{si } v_L < \frac{x}{t} < v_R \\ v_R & \text{si } \frac{x}{t} > v_R \end{cases}$$

Dans le travail qui suit, nous avons considéré trois problèmes scalaires utilisant l'équation de Burgers. Le premier est un problème de Riemann tel que présenté ci-dessus avec

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_L = 1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ v_R = 0 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Comme nous venons de le décrire, la solution sera une onde de choc qui se propage à la vitesse $V = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$.

Pour le deuxième problème, la condition initiale est donnée par

$$v(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 2. \quad (1.5.3)$$

Nous savons que les caractéristiques ont une pente $\frac{t}{x} = \frac{1}{v}$. Si nous traçons les caractéristiques sur la courbe du sinus, on se rend compte que les bosses vont avoir tendance à se rapprocher vers $x = 1$. C'est ce que nous observerons expérimentalement. Une fois que les bosses se seront complètement tassées sur l'axe $x = 1$ un choc apparaîtra. La vitesse de propagation de celui-ci sera donc $V = \frac{1+(-1)}{2} = 0$, c'est donc dire que celui-ci sera stationnaire. Le troisième a pour données initiales

une courbe croissante définie comme suit

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_L = -1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ v_M = -\sin(\pi x) & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \\ v_R = 1 & \text{si } \frac{3}{2} < x < 2. \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Puisque la courbe est croissante, les caractéristiques nous indiqueront que les bosses du sinus auront tendance à s'éloigner l'une de l'autre. Nous aurons créé une onde de raréfaction. La solution sera donc continue et nous arrêterons les calculs à 0.2 s afin que la solution ne déborde pas de l'intervalle choisi.

1.6. SYSTÈMES DE LOIS DE CONSERVATION

Considérons un système de lois de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = 0. \quad (1.6.1)$$

où $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_p)^T$ et \mathbf{F} est une fonction de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $\mathbf{A}(\mathbf{v})$ la matrice jacobienne de $\mathbf{F}(\mathbf{v})$. Le système (1.6.1) est hyperbolique si $\mathbf{A}(\mathbf{v})$ possède des valeurs propres $\mu_1(\mathbf{v}), \mu_2(\mathbf{v}), \dots, \mu_p(\mathbf{v})$ réelles et distinctes pour toutes valeurs de \mathbf{v} . Donc l'hyperbolicité ne dépend pas seulement des équations, mais aussi de la solution.

Sans perte de généralité, supposons que les valeurs propres sont ordonnées en ordre croissant. Soient $\mathbf{r}_j(\mathbf{v})$ les vecteurs propres à droite de $\mathbf{A}(\mathbf{v})$ correspondant aux valeurs propres $\mu_j(\mathbf{v})$ telles que

$$\mathbf{A}(\mathbf{v})\mathbf{r}_j(\mathbf{v}) = \mu_j(\mathbf{v})\mathbf{r}_j(\mathbf{v}),$$

pour $j = 1, 2, \dots, p$. Tout comme dans le cas scalaire, afin de s'assurer que (1.6.1) est véritablement non-linéaire, les valeurs propres $\mu_j(\mathbf{v})$ ne doivent pas être des fonctions constantes de \mathbf{v} , c.-à-d. que $\vec{\nabla}_{\mathbf{v}}\mu_j(\mathbf{v}) \neq 0$, où $\vec{\nabla}_{\mathbf{v}} = (\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_p})$. De plus, $\vec{\nabla}_{\mathbf{v}}\mu_j(\mathbf{v})$ ne doit pas être orthogonal à $\mathbf{r}_j(\mathbf{v})$. Donc, le système sera **véritablement non-linéaire** si pour $1 \leq j \leq p$ et pour tout \mathbf{v} nous avons

$$\mathbf{r}_j(\mathbf{v}) \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{v}}\mu_j(\mathbf{v}) \neq 0 \quad (1.6.2)$$

Dans ce cas, afin de résoudre le problème de condition initiale correspondant à (1.6.1) et à la condition initiale

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{f}(x)$$

pour $t > 0$, nous devons établir ce qu'est une solution faible du système. Soit $\phi(x, t)$ une fonction scalaire à support compact. $\mathbf{v}(x, t)$ est une solution faible si elle satisfait

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\mathbf{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{F}(\mathbf{v}) \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0) \mathbf{f}(x) dx = 0.$$

Ceci est équivalent à dire qu'il est nécessaire que pour tout les rectangles $[a, b] \times [t_1, t_2]$, l'équation obtenue en intégrant (1.6.1) sur ces rectangles à l'aide de la formule de Green-Riemann

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{v}) \right) dx dt \\ &= \int_a^b \mathbf{v}(x, t_2) dx - \int_a^b \mathbf{v}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(b, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(a, t) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Pour une solution faible lisse par morceaux, chacune des p lois de conservation doit satisfaire la condition de saut de Rankine-Hugoniot

$$V(v_{jR} - v_{jL}) = F_{jR} - F_{jL} \quad (1.6.4)$$

à travers chacune des discontinuités. Ici V est encore une fois la vitesse de propagation de la discontinuité.

Tout comme dans le cas scalaire, le seul fait d'avoir établi des conditions initiales ne garantit pas l'unicité de la solution faible. Il nous faut donc introduire une condition d'entropie afin d'obtenir l'unicité.

Dans le cas des systèmes de lois de conservation (1.6.1), nous avons p familles de caractéristiques données par la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \mu_j(\mathbf{v}), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Soit \mathbf{v}_L et \mathbf{v}_R les états de gauche et de droite respectivement d'une discontinuité donnée par $x = \psi(t)$. Lax [9] a proposé la condition suivante pour déterminer un

choc. Pour tout j , $1 \leq j \leq p$ nous définissons un j -choc par la condition suivante

$$\mu_j(\mathbf{v}_L(\psi(t), t)) > V > \mu_j(\mathbf{v}_R(\psi(t), t)) \quad (1.6.5)$$

$$\mu_{j-1}(\mathbf{v}_L(\psi(t), t)) < V < \mu_{j+1}(\mathbf{v}_R(\psi(t), t)) \quad (1.6.6)$$

Nous pouvons combiner les inégalités (1.6.5) et (1.6.6) pour obtenir les deux conditions suivantes

$$\mu_1(\mathbf{v}_L) \leq \mu_2(\mathbf{v}_L) \leq \dots \leq \mu_{j-1}(\mathbf{v}_L) < V < \mu_j(\mathbf{v}_L)$$

$$\mu_j(\mathbf{v}_R) < V < \mu_{j+1}(\mathbf{v}_R) \leq \mu_{j+2}(\mathbf{v}_R) \leq \dots \leq \mu_p(\mathbf{v}_R)$$

puisque les valeurs propres sont ordonnées en ordre croissant. Si une discontinuité satisfait à la fois les conditions (1.6.4), (1.6.5) et (1.6.6) pour un certain j tel que $1 \leq j \leq p$, nous dirons que la discontinuité est un j -choc.

L'idée fondamentale de Lax se résume à ceci : pour qu'un choc soit admissible, il faut qu'il satisfasse ces inégalités (dites **inégalités de Lax**) pour un certain indice j $1 \leq j \leq p$ et un seul.

1.7. EXEMPLE DE SYSTÈME DE LOIS DE CONSERVATION : LES ÉQUATIONS D'EULER

Les équations d'Euler sont données comme suit

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} = 0, \quad p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2). \quad (1.7.1)$$

Ici, ρ , u , p et E sont respectivement la densité, la vitesse, la pression et l'énergie totale par unité de volume. Nous utiliserons la matrice de Roe [13] pour approximer la matrice jacobienne. Les valeurs propres de la matrice de Roe sont $a_1 = u - c$, $a_2 = u$ et $a_3 = u + c$, où c est la vitesse du son. Que nous disent ces valeurs propres ? Il faut d'abord se définir un problème pour pouvoir élaborer. Le test que nous avons mis en oeuvre dans ce travail est le tube à choc de Sod [16]. Il consiste en un tube avec une membrane placée en son milieu, qui sépare deux états $\mathbf{v}_L = (\rho_L, \rho_L u_L, E_L)^T$ et $\mathbf{v}_R = (\rho_R, \rho_R u_R, E_R)^T$. Il s'agit donc d'un problème

de Riemann. À gauche de la membrane, l'air dans le tube est comprimé de sorte que la pression et la densité y sont beaucoup plus grandes qu'à droite.

À l'instant $t = 0$, la membrane est brisée et nous observons l'air comprimé se répartir dans le tube. Pour les fins de notre test, nous avons choisi comme conditions initiales les conditions de Sod sous la forme

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_L = (1, 0, 2.5)^T, & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{v}_R = (0.125, 0, 0.25)^T, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.7.2)$$

Comme l'on peut s'en douter, cette répartition se fait quasiment instantanément. Afin de pouvoir observer la propagation des différentes ondes, nous arrêtons l'observation après un très court laps de temps (dans notre cas, à $t = 0.1644s$).

Au cours de la répartition (fig. 1.7.1), nous observons l'apparition (de gauche à droite) d'une onde de raréfaction associée à la première valeur propre $\lambda_1 = u - c$, d'une discontinuité de contact associée à la deuxième valeur propre $\lambda_2 = u$ et d'une onde de choc associée à la troisième valeur propre $\lambda_3 = u + c$.

Pour l'onde de raréfaction, la première valeur propre nous dit donc que l'extrémité gauche de l'onde de raréfaction se propage à une vitesse $\lambda_1(U_0 = U_L) = u_L - c$. L'extrémité droite de la raréfaction voyagera, elle, à une vitesse de $\lambda_1(U_1) = u_1 - c$, vitesse qui nous est donc inconnue avant d'avoir solutionné le problème de Riemann en entier.

Pour la discontinuité de contact, l'onde de contact située entre les états U_1 et U_2 se propage à une vitesse de $\lambda_2(U_1) = \lambda_2(U_2)$. Encore une fois, cette vitesse nous est inconnue avant d'avoir solutionné le problème de Riemann en entier.

Quant au choc, tout semble indiquer que sa vitesse de propagation est de $\lambda_3(U_3 = U_R) = u_R + c$. Erreur! Nous avons plutôt une vitesse qui satisfait la condition de Rankine-Hugoniot $V = \frac{F_{iR} - F_{iL}}{u_{iR} - u_{iL}}$ pour n'importe quel indice $i = 1, 2, 3$.

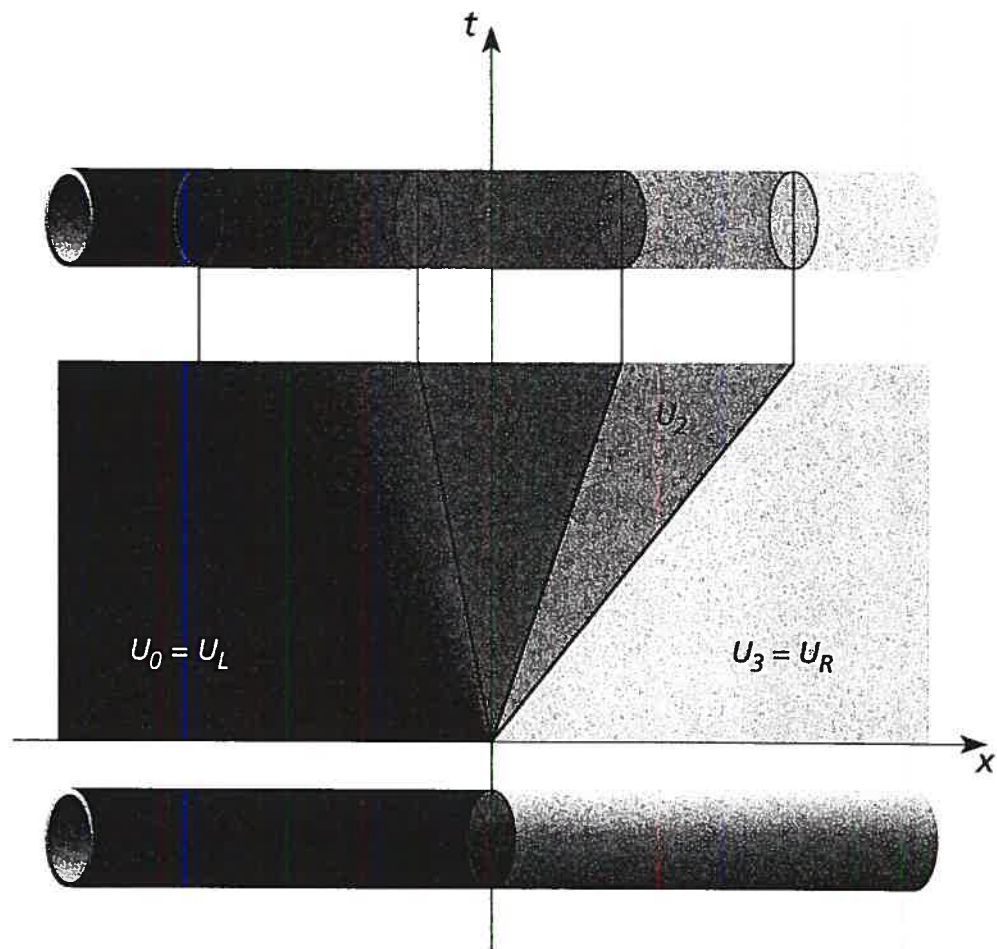


FIG. 1.7.1. Tube à choc de Sod

Chapitre 2

MÉTHODES NUMÉRIQUES

2.1. MÉTHODE DE NESSYAHU-TADMOR (NT)

Plusieurs schémas de haute précision proposés récemment pour approximer le système unidimensionnel de lois de conservation (1.1.1) reposent sur le principe de la dérivation amont. Le prototype de ces approximations en amont est le schéma de Godunov [7]. Cette méthode calcule une approximation constante par morceaux de la solution sur des cellules définies par $C_j = \{x | x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}\}$. Cette approximation est de la forme

$$\bar{v}(x, t) = v_j(t), \quad x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.1.1)$$

Pour la progression dans le temps, le schéma de Godunov laisse d'abord la solution constante par morceaux $\bar{v}(x, t)$ évoluer pendant un pas de temps Δt suffisamment petit. Avec $\bar{v}(x, t)$ comme condition initiale, l'équation (1.1.1) conduit à une succession de problèmes de Riemann qui ne se chevauchent pas. On peut exprimer la solution au temps $t + \Delta t$ en fonction du solveur de Riemann $R(\frac{x}{\Delta t}; v_L, v_R)$

$$v(x, t + \Delta t) = R\left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; v_j(t), v_{j+1}(t)\right), \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}. \quad (2.1.2)$$

Cette solution est alors projetée dans l'espace des fonctions de grille constantes par morceaux

$$v_j(t + \Delta t) \equiv \bar{v}(x, t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(y, t + \Delta t) dy, \quad x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.1.3)$$

En intégrant (1.1.1) sur une cellule $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t, t + \Delta t]$ et en appliquant la formule de Green-Riemann, nous obtenons

$$v_j(t + \Delta t) = v_j(t) - \lambda [f(R(0^+; v_j(t), v_{j+1}(t))) - f(R(0^+; v_{j-1}(t), v_j(t)))] ,$$

$$\lambda \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (2.1.4)$$

Ceci nous montre la propriété «amont» du schéma de Godunov. C'est à dire que si les vitesses caractéristiques au travers des cellules significatives voisines $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ sont du même signe, alors (2.1.4) est simplifiée en $v_j(t + \Delta t) = v_j(t) - \lambda [f(v_j(t)) - f(v_{j-1}(t))]$ dans le cas où ces vitesses sont positives (fig. 2.1.1). Si elles sont négatives, on aura $v_j(t + \Delta t) = v_j(t) - \lambda [f(v_{j+1}(t)) - f(v_j(t))]$. Par contre, si on a un mélange d'ondes provenant des deux côtés de la cellule (fig. 2.1.2), la situation se corse. Dans ce cas, on doit identifier la direction des ondes qui composent l'éventail de Riemann. La résolution du problème de Riemann peut s'avérer ardue. La décomposition champ par champ de Roe est un exemple de méthode visant à simplifier cette tâche. Dans la plupart des cas, la résolution du problème de Riemann requiert beaucoup de calculs, ce qui rend coûteuse son utilisation pour résoudre les problèmes hyperboliques.

Afin de contourner la résolution du problème de Riemann, Nessyahu et Tadmor ont présenté une méthode fondée sur le schéma décalé de Lax-Friedrichs (LxF)

$$v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t) = \frac{1}{2} [v_j + v_{j+1}] - \lambda [f(v_{j+1}(t)) - f(v_j(t))]. \quad (2.1.5)$$

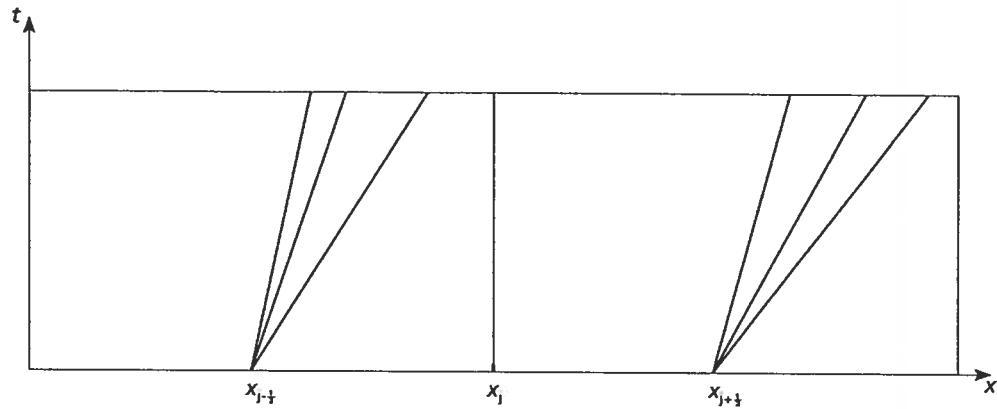


FIG. 2.1.1. Cellules ayant des vitesses caractéristiques positives

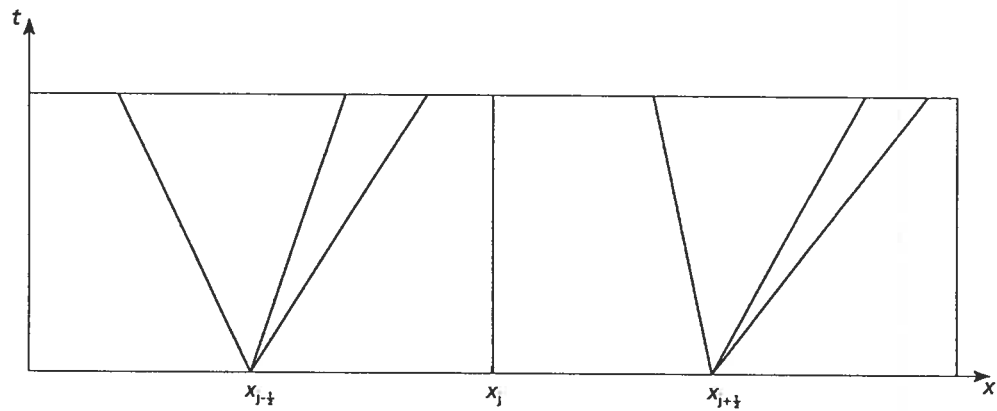


FIG. 2.1.2. Cellules ayant des vitesses caractéristiques quelconques

Ce schéma est le prototype d'une approximation à différences centrées, ce qui est un avantage du point de vue de la simplicité lorsque comparé au schéma de type amont de Godunov (2.1.4). Observons que (2.1.5) peut être interprétée comme une projection constante par morceaux d'une succession de problèmes de Riemann qui ne se chevauchent pas, ceux-ci étant intégrés sur un maillage décalé,

$$\begin{aligned}
 v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t) &\equiv \bar{v}(x, t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(y, t + \Delta t) dy, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} R\left(\frac{y - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; v_j, v_{j+1}\right) dy, & x_j \leq x \leq x_{j+1}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.6}$$

En procédant pour les équations d'Euler en une dimension spatiale, on trouve la solution du problème de Riemann dans [14] comme plus haut pour obtenir (2.1.4). À l'aide de la formule de Green-Riemann, on obtient exactement (2.1.5), ce qui veut dire que le schéma LxF peut s'interpréter comme un schéma du type de Godunov, mais pour des cellules décalées d'une demi-cellule.

La robustesse du schéma LxF (2.1.5) provient du fait que, contrairement au schéma amont de Godunov, l'intégration se fait sur l'éventail des ondes engendrées par le problème de Riemann en entier. Ceci nous permet d'éviter de résoudre le problème de Riemann. Par contre, le schéma décalé LxF est empreint de beaucoup de viscosité numérique. On s'en convainc en observant la forme visqueuse [17]

$$v_j(t + \Delta t) = v_j(t) - \frac{1}{2}\lambda[f(v_{j+1}(t)) - f(v_{j-1}(t))] + \frac{1}{2}[Q_{j+\frac{1}{2}}\Delta v_{j+\frac{1}{2}}(t) - Q_{j-\frac{1}{2}}\Delta v_{j-\frac{1}{2}}(t)], \quad \Delta v_{j+\frac{1}{2}} \equiv v_{j+1}(t) - v_j(t). \quad (2.1.7)$$

En effet, la classe des schémas de type amont est caractérisée par un coefficient matriciel de viscosité numérique $Q_{j+\frac{1}{2}}^{amont} \sim \lambda|\bar{A}_{j+\frac{1}{2}}|$, $\bar{A}_{j+\frac{1}{2}}$ faisant ici référence à une moyenne approximative de la matrice Jacobienne de $f(v(x, t))$ sur la cellule $[x_j, x_{j+1}] \times [t, t + \Delta t]$, voir par exemple [18]. La condition CFL

$$\lambda \cdot \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \rho(A(v(x, t))) < 1, \quad (2.1.8)$$

nous restreignant, cette quantité de viscosité numérique est toujours moindre que celle du schéma LxF qui, pour sa version non décalée, a un coefficient matriciel de viscosité numérique $Q^{LxF} \equiv I$. Conséquemment, les approximations de type amont telles que la méthode de Godunov ont une précision supérieure à celle de l'approximation LxF, bien que les deux méthodes appartiennent à la classe des schémas précis du premier ordre. C'est là une des principales raisons de l'utilisation des schémas de type amont pour les méthodes modernes de capture de chocs

à précision supérieure au premier ordre, voir par exemple [8], [12], [19].

La méthode NT utilise le solveur centré LxF comme point de départ pour sa famille de schémas à haute précision. De cette façon, le principal avantage de LxF, le fait d'éviter de résoudre les problèmes de Riemann et ainsi éviter les décompositions champ par champ, est conservé. La grande viscosité numérique est contrebalancée en utilisant les interpolations MUSCL, [19], plutôt que les interpolations constantes par morceaux du premier ordre utilisées en (2.1.1).

À chaque pas de temps, on doit reconstruire à partir de (2.1.1) une approximation linéaire par morceaux de la forme

$$L(x, t) = v_j(t) + (x - x_j) \frac{1}{\Delta x} v'_j, \quad x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.1.9)$$

Cette forme préserve la conservation, c.-à-d. que la moyenne de $L(x, t)$ sur la cellule $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ est égale à la valeur numérique constante obtenue au pas précédent pour cette cellule

$$\bar{L}(x, t) = \bar{v}(x, t) = v_j(t), \quad x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}} \quad (2.1.10)$$

Ici, la barre symbolise la moyenne sur la cellule concernée (dans ce cas-ci, la j -ème cellule, représentée par l'intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$).

La précision du second ordre en espace est alors assurée si le vecteur de dérivées numériques, $\frac{1}{\Delta x} v'_j$, satisfait la relation

$$\frac{1}{\Delta x} v'_j = \frac{\partial}{\partial x} v(x_j, t) + O(\Delta x). \quad (2.1.11)$$

Ce vecteur doit être choisi de façon appropriée. Nous discuterons du choix effectué à la fin de la section. Ensuite, nous laissons l'approximation linéaire par morceaux, (2.1.9), évoluer dans le temps. Puisque la condition CFL nous garantit que la succession de problèmes de Riemann généralisés (*PRG*) qui gouvernent l'évolution dans le temps de notre approximation ne se chevaucheront pas, on a

$$v(x, t + \Delta t) = PRG(x, t + \Delta t; L_j(x, t), L_{j+1}(x, t)), \quad x_j < x < x_{j+1}. \quad (2.1.12)$$

Enfin, cette solution est projetée dans l'espace des fonctions de grille décalées constantes par morceaux

$$v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t) = \bar{v}(x, t + \Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(y, t + \Delta t) dy. \quad (2.1.13)$$

De la loi de conservation (1.1.1), nous obtenons à l'aide de la formule de Green-Riemann

$$v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} L_j(x, t) dx + \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} L_{j+1}(x, t) dx \right] - \quad (2.1.14)$$

$$- \frac{1}{\Delta x} \left[\int_t^{t+\Delta t} f(v_{j+1}(\tau)) d\tau - \int_t^{t+\Delta t} f(v_j(\tau)) d\tau \right]. \quad (2.1.15)$$

Les deux premières intégrales de (2.1.14) s'obtiennent exactement en vertu de (2.1.9). De plus, si la condition CFL (2.1.8) est satisfaite, les deux dernières intégrales de (2.1.14) peuvent être approximées par une formule de quadrature, puisque les intégrands $f(v_j(\tau))$ et $f(v_{j+1}(\tau))$ sont alors des fonctions lisses de τ . En effet, $v(x, t)$ est la solution de problèmes de Riemann généralisés, lisse en $x = x_j, x_{j+1}$ sous une condition CFL appropriée. On peut lire à cet effet [6].

C'est ici que la méthode NT diffère de la nôtre. En effet, dans le choix de la formule de quadrature à utiliser, la méthode NT opte pour la formule ouverte

du point médian afin d'obtenir une méthode précise à l'ordre 2 par rapport au temps et donc une méthode d'ordre 2 en x et en t . Pour notre part, nous avons choisi la formule fermée du trapèze. Nous élaborerons davantage sur ce point dans la prochaine section. Pour la méthode NT on obtient un schéma de la forme prédicteur-correcteur :

prédicteur

$$v_j(t + \frac{\Delta t}{2}) = v_j(t) - \frac{1}{2}\lambda f'_j. \quad (2.1.16)$$

où f'_j est une «dérivée numérique» telle que $\frac{\partial f(v(x=x_j, t))}{\partial x} = \frac{f'_j}{\Delta x} + O(\Delta x)$

correcteur

$$\begin{aligned} v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t) &= \frac{1}{2}[v_j(t) + v_{j+1}(t)] + \frac{1}{8}[v'_j - v'_{j+1}] \\ &\quad - \lambda[f(v_{j+1}(t + \frac{\Delta t}{2})) - f(v_j(t + \frac{\Delta t}{2}))]. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Pour un problème précis sur la grille $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_M)$, la méthode NT nous donnera donc une solution sur la grille décalée $\mathbf{x}' = (x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{2}}, \dots, x_{M-\frac{1}{2}})$ après une première itération. Une deuxième itération faite à partir des points de la grille \mathbf{x}' nous redonnera des valeurs pour la grille originale \mathbf{x} , exception faite des points x_0 et x_M pour lesquels les conditions au bord fourniront les valeurs appropriées.

2.2. CONSTRUCTION DE NOTRE MÉTHODE

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le principe fondamental de notre nouvelle méthode consiste à modifier la formule de quadrature utilisée pour calculer les deux dernières intégrales de (2.1.14), c.-à-d. les intégrales de flux. Nous désirons faire intervenir la valeur de la solution à l'instant $t + \Delta t$ pour conférer un caractère *implicite* à notre méthode. En optant pour la formule fermée du trapèze, nous devons changer l'étape de prédiction du schéma de Nessyahu-Tadmor.

Celle-ci devient donc (pour un pas de temps complet au lieu d'un demi-pas)

$$v_j(t + \Delta t) = v_j(t) - \lambda f'_j, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t) &= \frac{1}{2}[v_j(t) + v_{j+1}(t)] + \frac{1}{8}[v'_j - v'_{j+1}] \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda[f(v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t)) + f(v_{j+\frac{1}{2}}(t)) \\ &\quad - f(v_j(t + \Delta t)) - f(v_j(t))], \quad j = 0, 1, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Ce schéma nous donne une solution $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ sur la grille décalée. Pour que le schéma soit véritablement implicite, il faudrait que la valeur de $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ exprimée d'au membre de gauche dépende de $\mathbf{v}(t)$ et de $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ dans le membre de droite, *mais sur la même grille*. Pour ce faire, considérons le schéma prédictor-correcteur (2.2.1)-(2.2.2) sur la grille décalée

$$v_{j-\frac{1}{2}}(t + \Delta t) = v_{j-\frac{1}{2}}(t) - \lambda f'_{j-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} v_j(t + \Delta t) &= \frac{1}{2}[v_{j-\frac{1}{2}}(t) + v_{j+\frac{1}{2}}(t)] + \frac{1}{8}[v'_{j-\frac{1}{2}} - v'_{j+\frac{1}{2}}] \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda[f(v_{j+\frac{1}{2}}(t + \Delta t)) + f(v_{j+\frac{1}{2}}(t)) \\ &\quad - f(v_{j-\frac{1}{2}}(t + \Delta t)) - f(v_{j-\frac{1}{2}}(t))], \quad j = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Ce schéma nous donne une solution $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ sur la grille originale. Si nous lançons les deux schémas en même temps, nous aurions une solution sur la grille originale *et* sur la grille décalée. C'est donc dire que le schéma serait véritablement implicite. Voici donc le schéma implicite qui nous donne une solution sur la grille décalée et sur la grille originale à chaque pas de temps

$$v_j(t + \Delta t) = v_j(t) - \lambda f'_j, \quad j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, M - \frac{3}{2}, M - 1, M - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
v_{\frac{j}{2}}(t + \Delta t) &= \frac{1}{2}[v_{\frac{j-1}{2}}(t) + v_{\frac{j+1}{2}}(t)] + \frac{1}{8}[v'_{\frac{j-1}{2}} - v'_{\frac{j+1}{2}}] \\
&\quad - \frac{1}{2}\lambda[f(v_{\frac{j+1}{2}}(t + \Delta t)) + f(v_{\frac{j+1}{2}}(t)) \\
&\quad - f(v_{\frac{j-1}{2}}(t + \Delta t)) - f(v_{\frac{j-1}{2}}(t))], \quad j = 1, 2, \dots, 2M - 1.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que $v_0(t + \Delta t)$ et $v_M(t + \Delta t)$ (les deux bouts de l'intervalle) ne sont pas calculés puisque les conditions de bords nous garantissent qu'ils seront déterminés. En isolant les termes calculés à $t = t + \Delta t$, on obtient donc un système non-linéaire de $2M - 1$ équations pour les $2M - 1$ variables que sont les éléments $v_{\frac{j}{2}}(t + \Delta t)$ pour $j = 1, 2, \dots, 2M - 1$ du vecteur $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ de la forme

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}(t + \Delta t)) = 0. \quad (2.2.5)$$

Il serait suffisant de lancer cette méthode telle quelle. À chaque pas de temps, nous aurions affaire à une méthode de point fixe qui convergerait (ou non), en général à l'ordre 1. Nous pouvons par contre accélérer la convergence en utilisant la méthode de Newton pour les systèmes. Cette méthode est analogue à la méthode de Newton pour les fonctions scalaires.

Dans le cas scalaire, nous voulons trouver un x tel que $f(x) = 0$. Étant donné une «bonne» approximation de départ x_0 , l'itération

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

convergera vers x à l'ordre 2 pourvu que $f'(x) \neq 0$. Nous pouvons réaménager les termes de l'itération comme suit

$$f'(x^n) \cdot (x^{n+1} - x^n) = -f(x^n).$$

L'analogie de la dérivée pour les systèmes étant la matrice jacobienne, voici la méthode de Newton pour les systèmes

$$J_f(\mathbf{x}^n) \cdot (\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^n)$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre le système pour trouver le vecteur de correction $\mathbf{C} = \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n$ pour obtenir $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{C} + \mathbf{x}^n$

Par une «bonne» approximation de départ, nous voulons dire que celle-ci doit être dans l'intervalle de convergence de la méthode. Cet intervalle n'étant en général pas connu pour un problème donné, nous essayons de choisir une approximation la plus près possible de la solution. Dans notre cas, comme les pas de temps sont petits, nous considérons que $v(t)$ est une approximation suffisamment précise pour espérer avoir la convergence pour $v(t + \Delta t)$.

Pour lancer cette méthode, nous avons donc besoin de la matrice jacobienne de la fonction \mathbf{G} . En rebaptisant $F_{\frac{j}{2}}(\mathbf{v}(t + \Delta t)) = \frac{1}{2}\lambda[f(v_{\frac{j-1}{2}}(t + \Delta t)) - f(v_{\frac{j+1}{2}}(t + \Delta t))]$ et $K_{\frac{j}{2}}(\mathbf{v}(t)) = \frac{1}{2}[v_{\frac{j-1}{2}}(t) + v_{\frac{j+1}{2}}(t)] + \frac{1}{8}[v'_{\frac{j-1}{2}} - v'_{\frac{j+1}{2}}] - \frac{1}{2}\lambda[f(v_{\frac{j+1}{2}}(t)) - f(v_{\frac{j-1}{2}}(t))]$, nous pouvons décomposer la fonction \mathbf{G} ,

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}(t + \Delta t)) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t + \Delta t)) - \mathbf{v}(t + \Delta t) + \mathbf{K}(\mathbf{v}(t)), \quad (2.2.6)$$

et ainsi nous faciliter la tâche quant à l'expression de la matrice jacobienne. En effet, nous devons dériver par rapport aux variables $v_{\frac{j}{2}}(t + \Delta t)$ pour $j = 1, 2, \dots, 2M - 1$, ce qui nous permet de facilement trouver que $\frac{\partial}{\partial v_{\frac{j}{2}}(t + \Delta t)} \mathbf{K}(\mathbf{v}(t)) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, 2M - 1$. Le $-\mathbf{v}(t + \Delta t)$ nous met des -1 sur la diagonale centrale de la matrice. Quant à $\mathbf{F}(\mathbf{v}(t + \Delta t))$, la dérivée par rapport à la $(\frac{j}{2})$ ème composante du vecteur $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ nous donne $\frac{1}{2}\lambda f'_{\frac{j-1}{2}}$ dans la première sous-diagonale et $-\frac{1}{2}\lambda f'_{\frac{j+1}{2}}$ dans la première sur-diagonale, c.-à-d. de part et d'autre de la diagonale

centrale. En résumé, la matrice jacobienne est de la forme

$$J_G = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2}\lambda f'_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda f'_{\frac{1}{2}} & -1 & -\frac{1}{2}\lambda f'_{\frac{3}{2}} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda f'_1 & -1 & -\frac{1}{2}\lambda f'_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{2}\lambda f'_{n-2} & -1 & -\frac{1}{2}\lambda f'_{n-1} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{2}\lambda f'_{n-\frac{3}{2}} & -1 & -\frac{1}{2}\lambda f'_{n-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2}\lambda f'_{n-1} & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

2.3. CHOIX DES DÉRIVÉES NUMÉRIQUES

En développant en séries de Taylor la loi de conservation (1.1.1), nous obtenons

$$v(x_j, t + \frac{\Delta t}{2}) = v_j(t) - \frac{1}{2}\lambda f'_j + O(\Delta t)^2, \quad (2.3.1)$$

ce qui nous permet de tronquer au premier terme de la série pour préserver la précision du second ordre. Spécifions que la valeur $\frac{1}{\Delta x} f'_j$ est une dérivée numérique approximative du flux $f(v_j(t))$,

$$\frac{1}{\Delta x} f'_j = \frac{\partial}{\partial x} f(v_j(t)) + O(\Delta x),$$

qui doit donc être choisie de façon appropriée. Parmi les choix possibles, nous nous sommes arrêté sur un choix simple, puisque nous ne désirons que comparer les méthodes entre elles et non la performance d'un schéma en particulier. Ce choix est

$$f'_j = MM\{\Delta f_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}\}, \quad (2.3.2)$$

où $\Delta f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j$ et où $MM\{\cdot, \cdot\}$ est le limiteur MinMod de van Leer [19],

$$MinMod\{x, y\} = \frac{1}{2}[\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)] \cdot \min(|x|, |y|). \quad (2.3.3)$$

On fait le même choix pour ce qui est du vecteur v'_j , c'est-à-dire,

$$v'_j = MM\{\Delta v_{j+\frac{1}{2}}, \Delta v_{j-\frac{1}{2}}\}. \quad (2.3.4)$$

Chapitre 3

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

3.1. ÉQUATION DE BURGERS

Le premier test que nous avons effectué en est un pour l'équation de Burgers (1.5.1) avec les données initiales (1.5.2). Nous avons arrêté le problème à $T = 0.4$. Comme le choc se propage à une vitesse $V = \frac{1}{2}$, le choc sera positionné à $x = 0.2$. La figure 3.1.1 présente les résultats pour les méthodes NT et NTI (notre méthode) pour une CFL de 0.5.

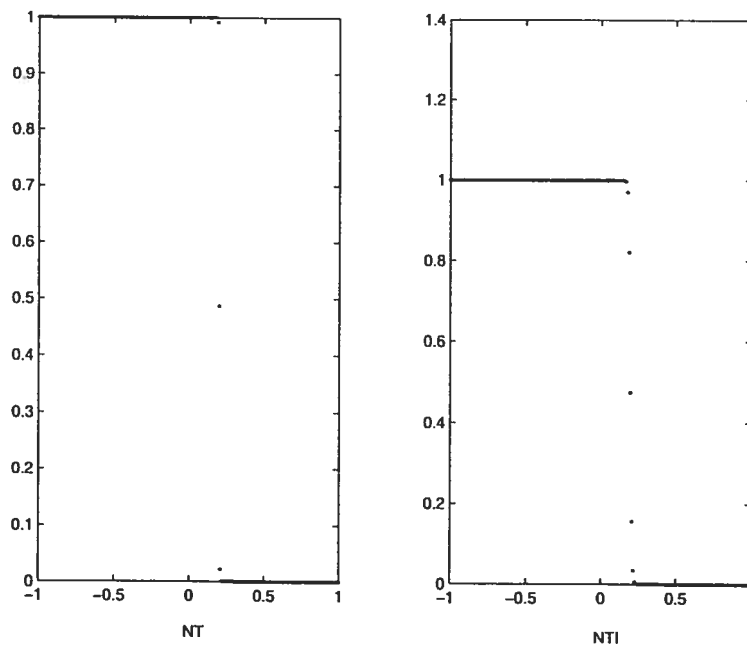


FIG. 3.1.1. Équation de Burgers (Riemann) avec CFL = 0.5

Nous notons que le choc est plus estompé pour notre NTI que pour NT. De plus, nous sommes de beaucoup perdants en ce qui concerne le temps de calcul (0.0544 secondes pour NT contre 5.1986 secondes pour notre méthode). Mais en prenant une CFL de 0.8 (Fig. 3.1.2), on voit que NT ne tient plus la route. Notre méthode pour sa part, continue de nous donner une solution admissible, bien qu'une légère oscillation commence à se faire sentir au voisinage du choc. Le temps de calcul est semblable pour NT (.0481 s.) tandis que notre méthode améliore sa performance (3.3698 s.) bien que ce soit encore énorme.

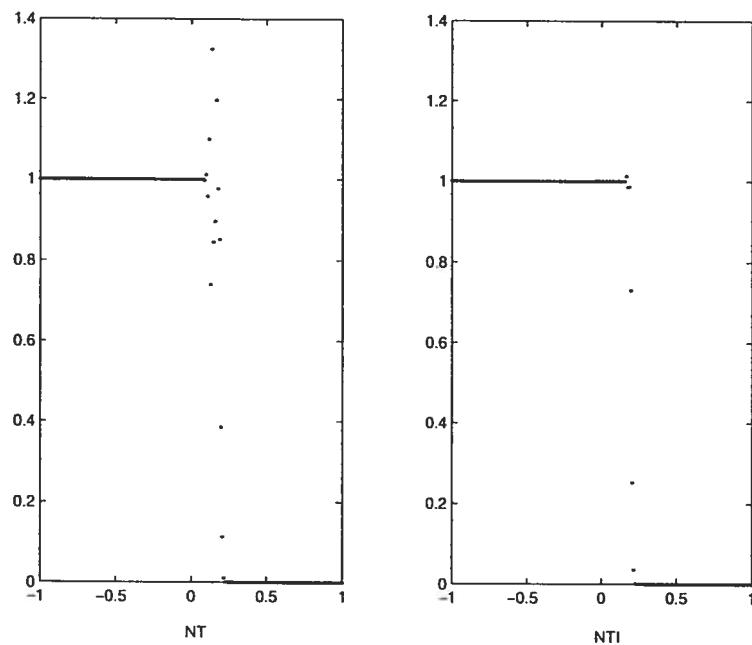


FIG. 3.1.2. Équation de Burgers (Riemann) avec CFL = 0.8

Pour une CFL de 0.9 (Fig. 3.1.3), le schéma NT nous donne une solution tout à fait erratique (en 0.046 s.), tandis que NTI ne fait pas vraiment mieux (en 2.9963 s.), bien que l'on puisse encore situer le choc.

Pour le deuxième test, nous choisissons cette fois-ci les données initiales (1.5.3) pour l'équation de Burgers (1.5.1). La fonction initiale étant décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, les caractéristiques se rencontreront, ce qui se traduira par la génération d'une discontinuité (choc). Le choc apparaissant à $t_{choc} \approx 0.31$, nous avons

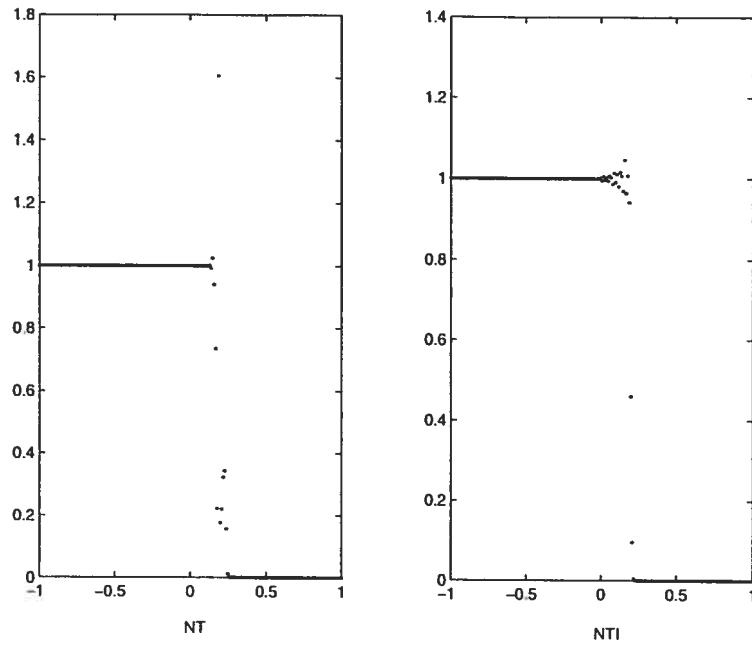


FIG. 3.1.3. Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.9$

choisi d'arrêter le problème à $T = .5$. La figure 3.1.4 présente les résultats pour les méthodes NT et NTI pour une CFL de 0.5.

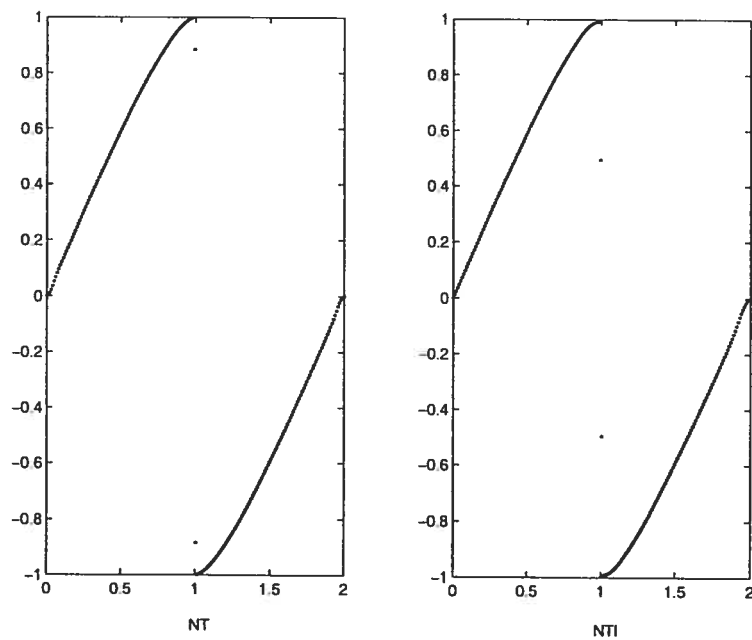


FIG. 3.1.4. Équation de Burgers ($u(x,0) = \sin\pi x$) avec $CFL = 0.5$

Encore une fois, NTI semble plus visqueuse que NT. Le choc est très légèrement mieux défini pour NT que pour NTI. Le temps de calcul favorise encore l'utilisation de la méthode NT (0.0646 s. pour NT contre 5.6115 pour notre méthode). En prenant une CFL de 0.8 (Fig. 3.1.5), encore une fois, NT ne tient plus la route, tandis que NTI représente encore adéquatement le choc (en 4.0775 s.). Nous notons par contre le début d'une oscillation de part et d'autre du choc. Cette oscillation est accentuée lorsque nous choisissons la CFL de 1 (Fig. 3.1.6). Nous voyons que la solution donnée par NT dans le dernier cas n'a plus aucun sens. L'oscillation s'installe par contre pour NTI, mais encore une fois, on peut situer le choc. 3.4489 s. ont été nécessaires pour effectuer les calculs pour NTI.

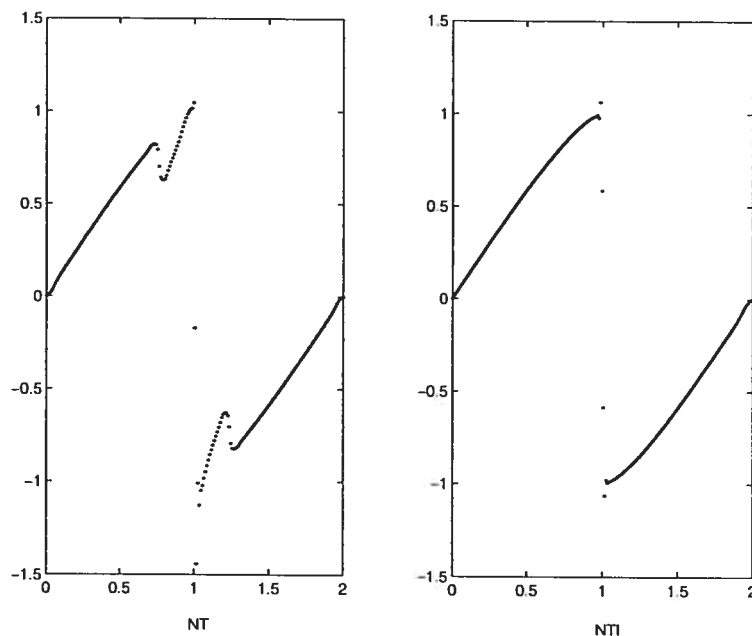


FIG. 3.1.5. Équation de Burgers ($u(x, 0) = \sin \pi x$) avec $CFL = 0.8$

Le troisième test que nous avons effectué en est encore un pour l'équation de Burgers (1.5.1) avec les données initiales (1.5.2). Nous avons arrêté le problème à $T = 0.2$. La figure 3.1.7 nous montre que les deux méthodes sont équivalentes au niveau de la précision. La différence concerne le temps de calcul avec 0.0371 s. pour NT contre 1.8211 s. pour NTI.

En prenant une CFL de 0.8 (Fig. 3.1.8), NT admet des oscillations pendant que NTI ne bronche pas. Le temps de calcul est semblable pour NT (.0263 s.)

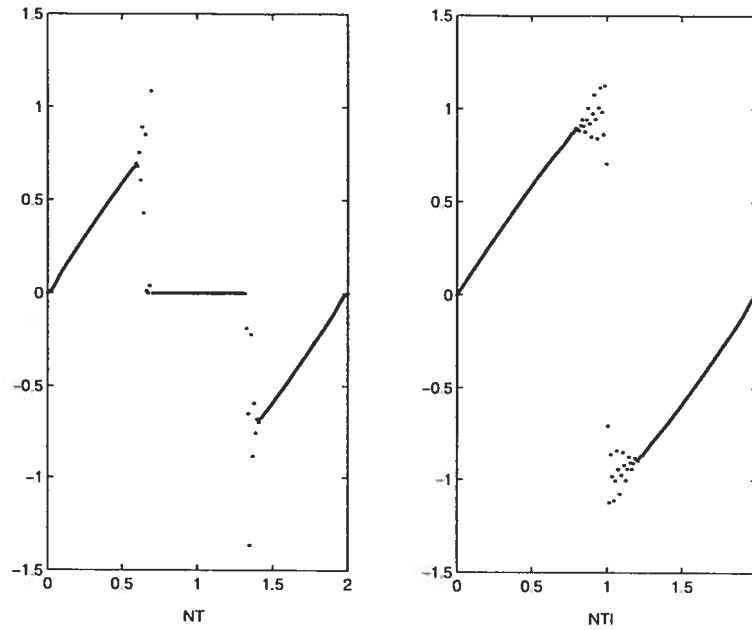


FIG. 3.1.6. Équation de Burgers ($u(x, 0) = \sin \pi x$) avec $CFL = 1.0$

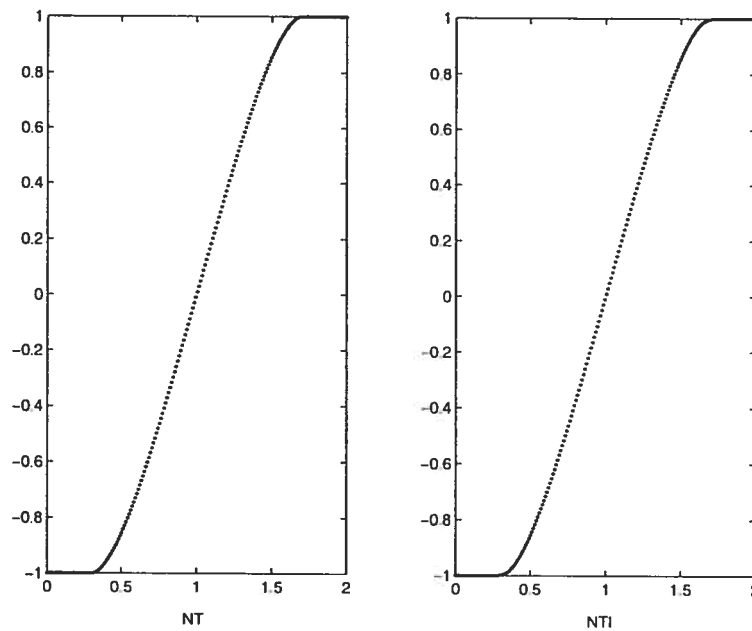


FIG. 3.1.7. Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.5$

pendant que notre méthode prend plus de temps que pour la CFL de .5 (1.9130 s.).

Pour une CFL de 1 (Fig. 3.1.9), le schéma NT nous donne une solution dénuée de sens (en 0.0279 s.), tandis que NTI tient toujours la route (en 1.5742 s.),

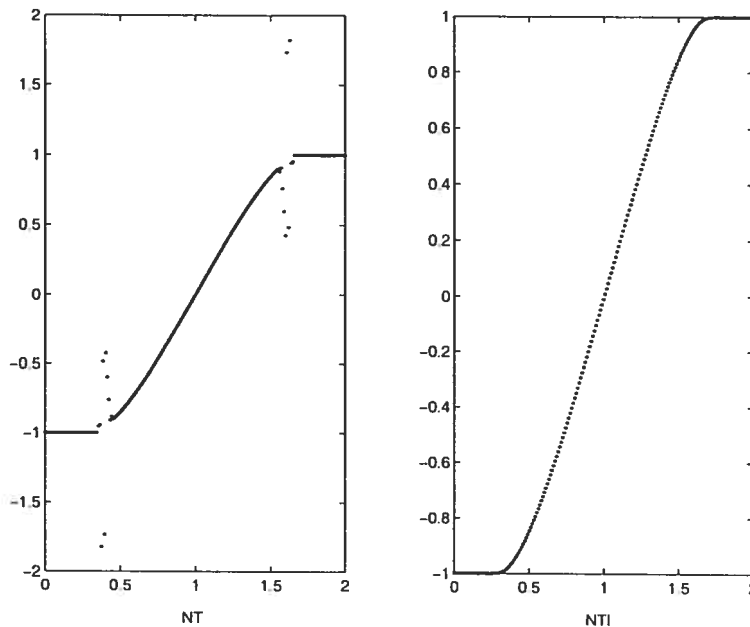


FIG. 3.1.8. Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 0.8$

bien que l'on puisse commencer à apercevoir une légère oscillation s'installer aux limites de la portion «sinus» de la solution.

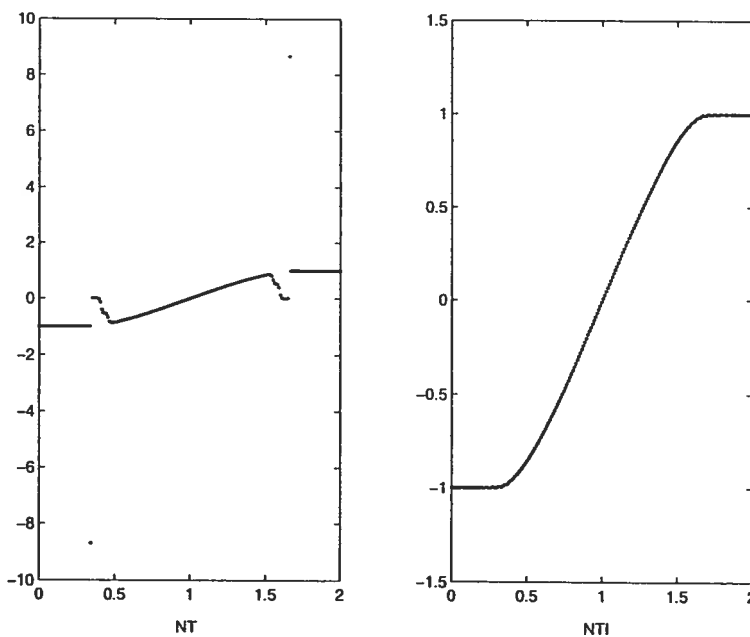


FIG. 3.1.9. Équation de Burgers (Riemann) avec $CFL = 1$

3.2. ÉQUATIONS D'EULER

Le quatrième test que nous avons mis en oeuvre nous donne une solution pour les équations d'Euler (1.7.1) avec les données initiales (1.7.2). La figure 3.2.1 présente les résultats pour les méthodes NT et NTI pour une CFL de 0.5.

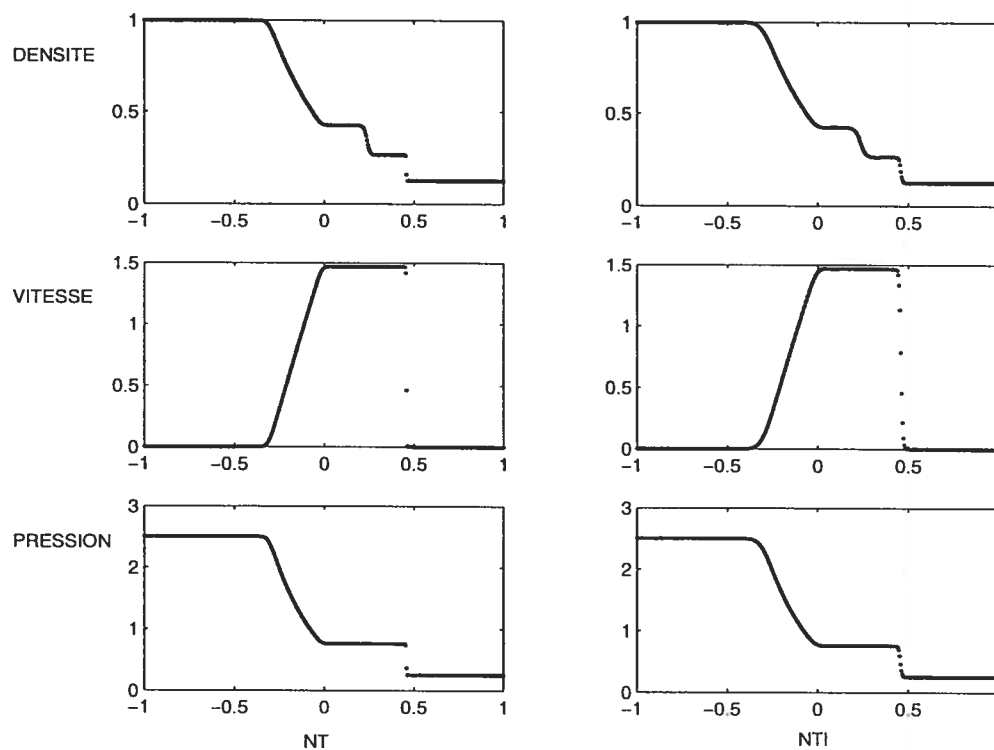


FIG. 3.2.1. Tube à choc de Sod avec $CFL = 0.5$

À vue d'oeil, NTI présente encore une fois plus de viscosité que NT. La discontinuité de contact y est particulièrement atténuée par rapport à NT qui déjà ne présente pas une discontinuité très serrée. En ce qui concerne le temps de calcul, la comparaison nous démontre que NTI est trop coûteuse (0.3641 s. pour NT contre 183.8080 s. pour NTI, soit au delà de 500 fois plus long!). Si nous passons à une CFL de 0.6 (Fig. 3.2.2), nous voyons que NTI conserve ses propriétés observées pour la CFL de 0.5, tandis que NT est déjà oscillante. Le temps de calcul de NTI est par contre encore une fois prohibitif (152.7053 s. contre 0.3561 s. pour NT).

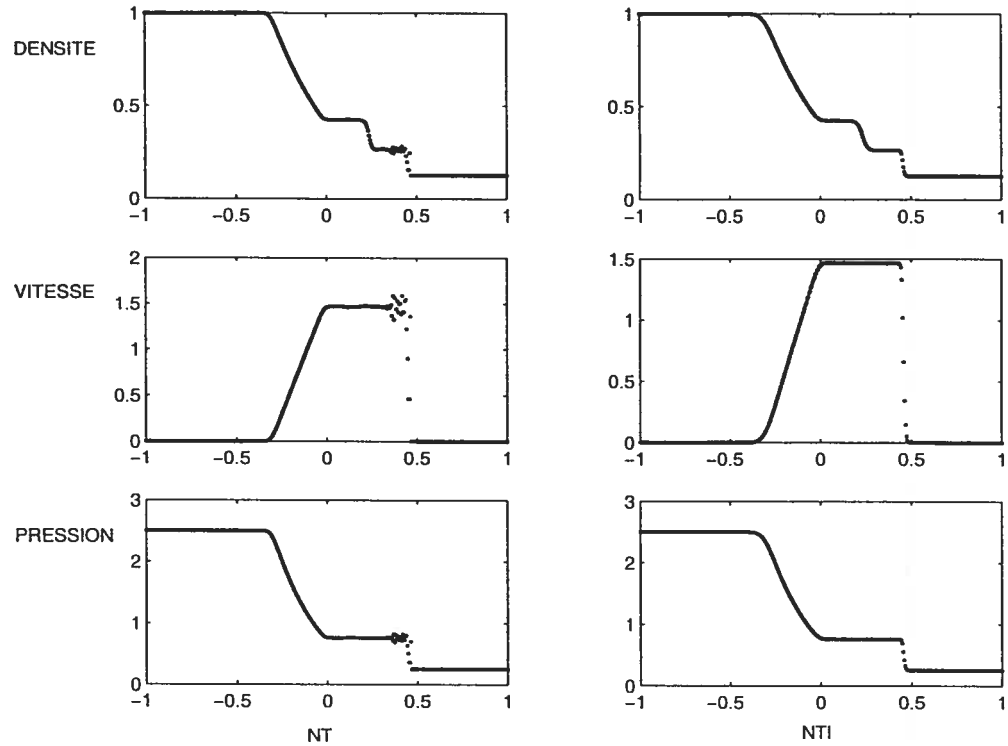


FIG. 3.2.2. Tube à choc de Sod avec $CFL = 0.6$

Pour la CFL de 0.8 (Fig. 3.2.3), NT n'est plus en mesure de nous donner une solution puisqu'elle diverge maintenant rapidement. NTI nous donne encore une solution, bien que les oscillations commencent à s'en emparer. Dans ces conditions, NTI nous livre ses résultats en 117.1040 s..

3.3. VALEUR DE LA MÉTHODE

Il est clair que notre méthode n'apporte pas d'amélioration par rapport à NT au niveau de la précision de la solution. Ceci est dû à la plus grande viscosité numérique de notre schéma qui s'explique en deux parties. Premièrement, le fait d'utiliser la règle du trapèze plutôt que la règle du point médian pour calculer les intégrales de flux dans (2.1.14). La règle du point médian étant généralement plus précise que celle du trapèze, il est clair qu'une partie de l'augmentation de la viscosité provient du choix de la règle de quadrature. Deuxièmement, le fait d'avoir une méthode implicite accentue la présence de la viscosité. Le fait d'avoir

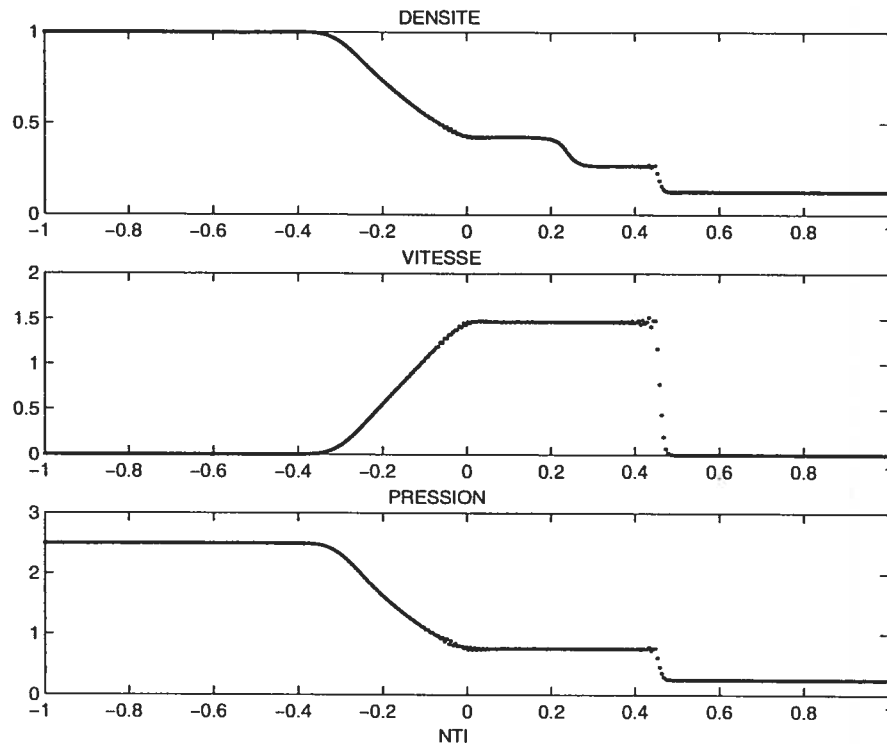


FIG. 3.2.3. Tube à choc de Sod avec $CFL = 0.8$

une approximation moins précise pour le calcul des intégrales de flux dans (2.1.14) se répercute à chaque itération de Newton.

Pour la stabilité, nous avons par contre fait un pas dans la bonne direction. Il est clair que notre méthode permet des pas de temps plus grands que pour NT. Par contre, le caractère implicite n'est pas celui que nous espérons. Normalement, pour une méthode implicite, nous nous attendons à ce que cette méthode soit stable et ce pour toute valeur de la constante CFL. Mais qu'est-ce que la condition CFL ? Ce que nous garantit cette condition, c'est que les éventails de Riemann de cellules adjacentes ne s'entrecroiseront pas. En laissant grandir cette constante, il est clair que les éventails vont finir par s'entrecroiser. Ceci veut dire que l'éventail de Riemann jusqu'à maintenant entièrement contenu sur la paroi du haut de la cellule s'étendra jusque sur les parois de gauche et de droite de la cellule (Fig. 3.3.1). Dans ces conditions, il est clair que les intégrales de flux dans (2.1.14) seront la cause d'une erreur grandissante au fur et à mesure que la CFL sera choisie de

plus en plus grande. En ajoutant à cela un schéma implicite qui accentuera cette erreur, nous obtenons un cocktail explosif tout à fait instable.

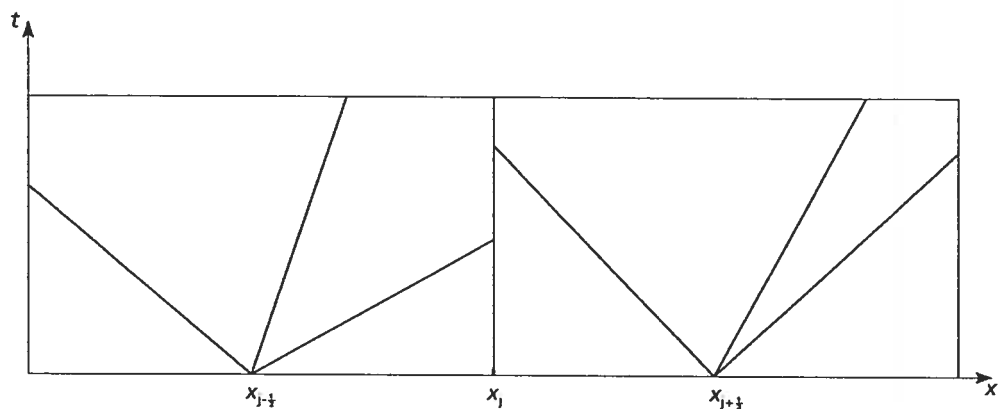


FIG. 3.3.1. Cellules pour lesquelles la CFL a été choisie trop grande

En ce qui a trait au temps de calcul, notre méthode n'est clairement pas dans la course. Ce seul fait aurait dû être suffisant pour nous décourager de poursuivre dans cette voie. Pourtant la perspective d'améliorer substantiellement la stabilité de la solution, non seulement pour le cas unidimensionnel mais aussi pour les cas multidimensionnels en espaces, nous a poussé à aller au bout de cette avenue. La conclusion étant que le jeu n'en vaut pas la chandelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARMINJON, P., MADRANE, A. AND ST-CYR, A., *Numerical simulation of 3-D flows with a non oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids*, 8th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Magdeburg, Allemagne, 2000.
- [2] ARMINJON, P., STANESCU, D. AND VIALON, M. C., *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc. of the 6th Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, Lake Tahoe, Nevada, 1995.
- [3] ARMINJON, P., AND VIALON, M. C., *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 36, No. 3, pp. 738-771, 1999.
- [4] ARMINJON, P., ET VIALON, M. C., *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C. R. Acad. Sci., t. 320, série I , Paris, 1995.
- [5] ARMINJON, P., MADRANE, A. AND VIALON, M. C., *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, 1997.
- [6] GODLEWSKI, E. AND RAVIART, P. A., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Mathématiques et Application, Ellipses, Paris, 1991.
- [7] GODUNOV, S. K., *A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, Mat. Sb., Vol. 47, 1959, pp. 271-290.

- [8] HARTEN, A., *High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comp. Phys., Vol. 49, 1983, pp. 357-393.
- [9] LAX, P. D., *Weak Solutions of Non-Linear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations*, Commun. Pure Applied Math., Vol. 7, 1954, pp. 159-193.
- [10] NESSYAHU H. AND TADMOR, E., *Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comp. Phys., Vol. 87, No 2, 1990, pp. 408-463.
- [11] OLEINIK, O. A., *Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations*, Uspekhi Mat. Nauk., Vol. 12, 1957.
- [12] OSHER, S., *Riemann Solvers, The Entropy Condition and Difference Approximating*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 21, 1984, pp. 217-235.
- [13] ROE, P. L., *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes*, J. Comp. Phys., Vol. 43, 1981, pp. 357-372.
- [14] SMOLLER, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, N. Y., 1983.
- [15] SOD, G. A., *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, N. Y., 1985.
- [16] SOD, G. A., *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comp. Phys., Vol. 27, 1978, pp. 1-31.
- [17] TADMOR, E., *Numerical Viscosity and the Entropy Condition for Conservative Difference Schemes*, Math. Comp., Vol. 43, 1984, pp. 369-382.
- [18] TADMOR, E., *The Large Time Behaviour of the Scalar, Genuinely Nonlinear Lax-Friedrichs Schemes*, Math. Comp., Vol. 43, 1984, pp. 353-368.
- [19] VAN LEER, B., *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A. Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J. Comp. Phys., Vol. 32, 1979, pp. 101-136.