Université de Montréal

Le rôle de l'histoire des mathématiques dans la compréhension de l'algorithme usuel de la multiplication au 3e cycle du primaire.

par
Julie Corbeil
Enseignement préscolaire et primaire
Faculté de l'Éducation

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
En vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences
En éducation

Février 2004

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Le rôle de l'histoire des mathématiques dans la compréhension de l'algorithme usuel de la multiplication au 3e cycle du primaire.

Présenté par :

Julie Corbeil

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

. Louise Poirier, directrice de Mémoire
. Marcel Thouin, président rapporteur
. Françoise Cerquetti-Aberkane, membre du jury

Mémoire accepté le : janvier 2004

« Comme tous les élèves du monde, Jonathan avait croisé Thalès à plusieurs reprises. Chaque fois, le professeur leur avait parlé du théorème, jamais de l'homme. D'ailleurs, en cours de maths, on ne parlait jamais de personne. De temps en temps, un nom tombait, Thalès, Pythagore, Pascal, Descartes, mais c'était seulement des noms. Comme celui d'un fromage ou d'une station de métro. On ne parle pas non plus de où ni de quand ça s'était fait. Les formules, les démonstrations, les théorèmes atterrissaient sur le tableau. Comme si personne ne les avait créés, comme s'ils avaient été là de tous temps, comme les montagnes ou les fleuves. Encore que les montagnes, elles, n'avaient pas été là de tous les temps. Et l'on arrivait à ceci que les théorèmes avaient l'air plus intemporels que les montagnes ou les fleuves! Les maths, ce n'était ni l'histoire, ni la géographie, ni la géologie. C'était quoi au juste? La question n'intéressait pas grand monde. » (Guedj, D., 1998, p.35)

RÉSUMÉ

L'apprentissage des quatre opérations arithmétiques (au programme de mathématiques au primaire) n'est pas simple pour un grand nombre d'élèves de l'école primaire. À la fin du cours primaire, plusieurs élèves ne réussissent toujours pas à additionner, soustraire, multiplier ou diviser correctement bien que nous ayons commencé à les y initier dès le premier cycle à l'âge de 6 ou 7 ans.

Dans le cadre de cette recherche, nous nous pencherons plus spécifiquement sur l'algorithme de la multiplication. Le nouveau programme promeut des apprentissages actuels et culturellement ancrés. C'est pourquoi, la présente étude a pour but d'observer si l'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement de ces dernières est réellement bénéfique à la compréhension des élèves. Les apprentissages auraient-ils alors plus de sens et de profondeur aux yeux des élèves et les concepts seraient-ils ainsi mieux compris s'ils étaient situés dans une telle perspective historique?

Pour amener les éléments de réponse à ces questions, une situation didactique a été développée et mise à l'essai. Il s'agit ici d'une situation-problème à caractère historique. La situation-problème concerne l'algorithme de la multiplication. Pourquoi un tel choix? La raison est des plus simples, l'algorithme de la multiplication était une matière à réviser en début d'année et plusieurs élèves ressentaient des difficultés. En ce sens, les élèves ont fait l'apprentissage des différents concepts sous-jacents à l'algorithme de la multiplication en remontant chez les Égyptiens, les Chinois et les Babyloniens pour analyser leur système de numération. Ensuite, les élèves ont observé un document ancien, de 1602, illustrant différentes façons d'effectuer une multiplication (Cerquetti, F., 2002) Nous souhaitions que ce travail permette aux élèves de mieux comprendre la technique opératoire habituelle et sa signification.

Afin de répondre à la question de recherche, les élèves ont été soumis à un pré-test permettant de connaître leurs connaissances et leurs compétences en numération et celles permettant d'effectuer correctement l'algorithme de la multiplication. Puis, la séquence d'apprentissage se terminait par la passation d'un post-test. Par la comparaison des résultats des élèves à ces deux tests, nous évaluons ainsi les progrès des élèves. Puis, tout au long de la séquence d'apprentissage, il y a eu tenue quotidienne d'un journal de bord où tout était noté, tant les comportements des élèves observés que les paroles entendues. Finalement, l'analyse des données recueillies fait ressortir que la grande majorité des élèves ont une compréhension accrue des concepts sous-jacents de l'algorithme de la multiplication après avoir vécu une séquence d'apprentissage où l'histoire des mathématiques est intégrée à l'enseignement des mathématiques. D'autre part, l'observation des élèves indique qu'il y a participation, réflexion et coopération, actions présentes chez tous les élèves. Il est important d'ajouter que ces résultats sont interprétés à la lumière des quelques études, majoritairement de France, connues sur le sujet.

ABSTRACT

For pupils in elementary school, learning how too add, subtract, multiply and divide is not an easy task. At the end of elementary school, some pupils still have difficulties with these four mathematical operations, even if we begin teaching them at the first cycle of elementary school (ages 6 or 7).

This research will focus mainly on the multiplication's algorithm. The new elementary curriculum promotes new and culturally rooted learning's. This study is an attempt to prove that a historical based teaching will improve the pupils' mathematical knowledge and competencies. Will this historical perspective have a positive effect on the pupils' mathematical performances.

To answer these questions a didactical situation was developed and tried. This learning sequence is based on a historical approach concerning the multiplication algorithm. This notion was chosen because many pupils still had difficulties with this algorithm. In our sequence, the pupils developed a better understanding of the different concepts involved in multiplication. They revisited the Egyptians, the Chinese and the Babylonians in order to analyse each of their numeral system. Then the pupils analysed an ancient document from 1602 showing different multiplication's algorithms (Cerquetti, F., 2002). We hoped that such a work would help the pupils understand better the standards algorithm.

In order to answer the research's question a pretest aimed to verify the pupils' prior knowledge about numeration and the standard multiplication algorithm was given to a group of 28 grade 5 pupils from 10 to 13 years old. A learning sequence based on a historical teaching approach was then tried followed by an immediate posttest and by an other one a month later. During the learning sequences, the experimentator wrote a diary in which the pupil's significant behavior and argumentation were recorded. Finally, the data analysis shows that after the learning sequence most of the pupils have a better understanding of the multiplication algorithm.

Table des matières

Liste des Tableaux

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier ma directrice de mémoire Louise Poirier pour m'avoir guidée, soutenue et conseillée tout au long de ma maîtrise.

Merci bien sûr à tous les gens de mon entourage, parents et amis, qui ont su m'encourager et m'inciter à toujours aller de l'avant.

Je tiens également à saluer et remercier tous les élèves de ma classe qui ont participé activement au projet et qui m'ont permis d'aller plus loin.

La problématique

CHAPITRE I
PROBLÉMATIQUE

Depuis la nuit des temps, l'Homme fait appel à des concepts relevant de la mathématique pour organiser et expliquer son monde. Maintenant encore, tous les jours, nous sommes appelés à utiliser des concepts mathématiques pour résoudre des problèmes de la vie courante. Il importe alors que la mathématique soit un sujet d'étude à l'école dès la première année et qu'elle ait une place de choix dans l'éducation des futures générations. Le cours primaire constitue les premiers pas de l'enfant sur la route de l'éducation, il s'agit d'un moment propice et crucial pour lui donner le goût et la curiosité d'aller de l'avant. Le cours primaire se compare en quelque sorte à la construction d'un édifice où il faut bâtir des fondations solides pour qu'il ne s'effondre pas au premier coup de vent violent. La mathématique, source importante de développement intellectuel, est un élément déterminant de la réussite scolaire et c'est aussi la base de la sélection pour plusieurs programmes d'études.

1.1 Mon contexte d'enseignement

Nous travaillons dans une école de la CSDM, l'école St-Benoit. La classe est composée de 28 élèves, 12 filles et 16 garçons. Il s'agit d'enfants actifs qui aiment que tout bouge autour d'eux. Il y a une dynamique explosive dans la classe. Cela peut être vu positivement puisque cela signifie en d'autres mots que les élèves sont curieux, qu'ils aiment les choses nouvelles et qu'ils sont motivés à tenter des expériences. Ils veulent que tout tourne, qu'il y ait du mouvement autour d'eux, et que cela tourne vite. En un mot, ils veulent être stimulés. À l'opposé, il s'agit d'un groupe d'enfants qui n'aiment pas attendre, ils doivent être occupés sinon ils apprécient bien déranger. Finalement, ce sont des élèves autonomes et responsables. Il s'agit d'une classe multiethnique, on y retrouve des enfants d'origine arabe, cambodgienne, québécoise, espagnole, portugaise, haïtienne, africaine, américaine, etc. Ajoutons que les enfants proviennent d'un milieu défavorisé impliquant que les gens ont moins de ressources matérielles et plus de difficultés à se procurer des sources d'information comme: la télévision, des journaux, l'ordinateur (l'Internet), des revues, etc. Plusieurs familles sont aussi nouvellement arrivées au pays; pour certaines c'est l'inconnu face aux services de l'environnement immédiat (bibliothèque, centre de loisirs, musés). En résumé, nous pouvons dire que ces enfants veulent apprendre, ils sont curieux mais ils ont besoin d'outils et d'encouragements car parfois les obstacles sont difficiles à surmonter.

Au début de l'année scolaire, il est toujours intéressant de connaître le niveau académique de nos nouveaux élèves pour ainsi mieux répondre à leurs attentes, il faut chercher les forces et les faiblesses. En ce sens, une évaluation formative a été distribuée pour mesurer le rendement scolaire des élèves au sujet de notions mathématiques nécessaires pour pouvoir faire des multiplications correctement. Cette évaluation avait pour but de cibler ce que les élèves avaient appris antérieurement et surtout, ce qu'ils se souvenaient avoir appris ou ce qu'ils avaient intégré. Cette évaluation démontrait clairement que la grande majorité des enfants ne parvenaient pas à effectuer correctement l'algorithme de la multiplication. Ils disaient l'avoir appris l'année précédente mais ne malheureusement plus se souvenir de la technique. Il fallait alors recommencer l'enseignement de l'algorithme de la multiplication.

Dans un premier temps, nous avons revu les tables de multiplication de 1 à 12. Nos avons étudié, mémorisé et joué avec les tables. Ensuite, nous avons, en grand groupe, revu la technique opératoire de l'algorithme de la multiplication. Certains élèves éprouvant des difficultés ont su profiter de deux aides différentes : récupération avec l'enseignante et pairage avec des camarades. Finalement, croyant que ces rappels pouvaient être suffisants pour raviver la mémoire des élèves au sujet de l'algorithme de la multiplication dit oublié, une seconde évaluation formative sur l'algorithme de la multiplication a été administrée afin de revoir le niveau du groupe suite à cette révision. L'examen ne posait pas de difficultés en soi. Il proposait vingt multiplications de tous les genres mais impliquant uniquement des nombres naturels : des nombres de deux chiffres par un second aussi à deux chiffres, des nombres de trois chiffres par un nombre à deux chiffres, des multiplications par 10, 100 ou 1000. Le but était essentiellement d'observer les réussites et les difficultés des élèves et non pas de les piéger. Les résultats étaient variés : plus de 12 élèves ont eu moins de 10 bonnes réponses, une dizaine d'élèves ont eu environ 75% des réponses puis, il y a eu uniquement 5 élèves qui ont pratiquement réussi la totalité des équations et finalement, un seul élève a eu 100%. Pourtant, la multiplication a été vue l'année précédente (propos de la titulaire de la quatrième année) et révisée cette année. Que faut-il envisager maintenant?

La première solution fut de demander aux élèves d'expliciter leur démarche, de justifier leurs gestes, d'exprimer leurs difficultés, etc. Cette rencontre, plus communément appelée la récupération, se faisait en petits groupes afin de stimuler les échanges, les commentaires des uns profitant aux autres. Un autre avantage du petit groupe est qu'il y a moins de distractions possibles.

Plusieurs élèves éprouvaient toujours des problèmes avec l'algorithme de la multiplication. En discutant avec des collègues du même cycle il est ressorti que le problème était aussi présent chez leurs élèves. Ensemble, nous avons décidé de faire une période par semaine de décloisonnement. Le décloisonnement c'est un temps où les professeurs enseignent différentes notions aux élèves regroupés selon leurs difficultés. Les avantages de cette méthode sont nombreux. Dans un premier temps, les élèves en bénéficient puisque nous répondons à leurs besoins spécifiques. Deuxièmement, les élèves ont la chance d'observer différentes façons de faire car ils se retrouvent dans la classe d'un nouvel enseignant. Finalement, cela permet aux élèves plus rapides d'aller plus loin et de ne pas nuire à l'évolution de chacun (gérer les rythme d'apprentissage). Les élèves s'inscrivent à un atelier correspondant à l'enseignement d'une notion leur posant des difficultés. L'un des premiers thèmes abordé lors de ces périodes fut l'algorithme de la multiplication. Une fois de plus, les élèves travaillent l'algorithme et particulièrement la technique opératoire traditionnelle.

Le problème persiste. Les enfants sont démunis face à leurs difficultés, ils ne parviennent pas à exprimer celles-ci. En fait, ils ne parviennent toujours pas à expliquer la démarche de la technique opératoire, et à voir les concepts qui sont sous-jacents. De plus, un problème s'ajoute : ils n'ont plus confiance en eux et ils sont démotivés. Il faut trouver une solution, mais laquelle?

1.2 La source des difficultés en mathématiques

Certaines notions mathématiques faisant appel aux propriétés du nombre ne sont pas sans poser des difficultés aux élèves, et ce même à la fin du cours primaire. Il suffit de questionner les élèves pour remarquer rapidement qu'ils connaissent les techniques pour effectuer les algorithmes sans toutefois connaître le sens de chacune des étapes présentes à l'intérieur d'un algorithme et parfois, ils ne savent pas plus quand utiliser l'algorithme ou lequel utiliser. Ainsi, il est fréquent qu'un élève se trompe et qu'il soit incapable de dire que sa réponse est erronée et d'en découvrir la source. Il n'est pas rare d'entendre un professeur surpris des résultats désastreux de ses élèves à des contrôles considérés comme des épreuves de routine. Bien que nous nous attendions à ce que les algorithmes de l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de nombres entiers soient maîtrisées à la fin du primaire, cela n'est pas le cas chez de nombreux élèves. Il faut chercher à savoir si les enfants reproduisent, ce qui signifie qu'ils imiteraient les techniques enseignées ou s'ils comprennent les concepts mathématiques présents à l'intérieur des différents algorithmes. Il est clair que comprendre signifie restituer un savoir et surtout l'utiliser dans une situation nouvelle permettant ainsi de reconnaître et d'analyser cette situation afin de la résoudre en mobilisant le savoir acquis. Malheureusement, « pour gagner du temps, l'enseignant privilégie trop l'acquisition de techniques au détriment de la construction du sens. Le temps gagné à court terme fait croire à du temps gagné dans les apprentissages. » (Briand et Chevalier, 1995, page 24) Ainsi, plusieurs élèves utilisent une procédure correcte pour résoudre l'opération mais ils ne peuvent expliquer leurs procédés. Pour faire de telles constatations il suffit de proposer aux élèves des équations plus complexes, celles souvent évitées par les enseignants:

Exemple : Effectue la multiplication suivante

$$\begin{array}{r} 435 \\ \underline{\text{X}\ \ 23} \end{array}$$

Effectue la soustraction suivante

$$\begin{array}{r} 3\ 000 \\ \underline{-\ \ \ 548} \end{array}$$

Ces opérations provoquent chez l'enfant des difficultés. Il n'est pas rare de voir des résultats similaires à :

$$\begin{array}{r} 435 \\ \underline{\text{X}\ 23} \\ 1305 \\ \underline{870} \\ 2175 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3000 \\ \underline{-\ 548} \\ 3548 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3000 \\ \underline{-\ 548} \\ 2462 \end{array}$$

Ceci peut sembler des cas isolés mais tel n'est pas le cas. Ces erreurs sont fréquentes et qui plus est, il est possible que l'enfant inscrive uniquement que l'opération soit impossible.

Ces difficultés portent à réfléchir. Pourquoi l'enfant n'utilise plus la technique apprise? Les techniques de calcul ont-elles une limite? Comment expliquer que de telles difficultés traversent les années sans être ciblées et travaillées en classe? Le problème peut-il se trouver ailleurs, plus tôt dans les apprentissages? Que signifie le nombre et le chiffre dans la tête d'un enfant? Plusieurs questions auxquelles il faut préalablement répondre si nous voulons venir en aide à l'enfant.

1.3 Une des conséquences des difficultés

Bien avant son entrée en maternelle l'enfant est mis en contact avec les nombres. Au début, cela se fait par la comptine. Très jeune, l'enfant apprend à réciter la suite des nombres, « un, deux, trois, quatre... ». Toutefois, bien que l'enfant ait mémorisé la chaîne numérique, il ne sait pas nécessairement reconnaître les nombres, compter ou dénombrer des objets qui sont des objectifs visés lors des premières années scolaires. Puis, lors du premier cycle et du début du deuxième cycle, nos élèves devraient recevoir un enseignement clair de la numération pour qu'il y ait une compréhension réelle de notre système de numération avant de les initier aux différents algorithmes mathématiques.

C'est le début des difficultés. Nous confondons souvent les verbes apprendre et mémoriser. Nous croyons que si un élève mémorise une connaissance et qu'il la restitue, c'est qu'il comprend. Ceci est illusoire. C'est ainsi que tout est à reprendre d'une année à une autre. Le nombre est un concept fondamental des mathématiques utilisé pour compter, classer et mesurer. Il faut nécessairement que les élèves conceptualisent les nombres, c'est-à-dire qu'ils découvrent tous les concepts qui se rattachent aux nombres. Cette acquisition ne se fait pas aisément pour tous les élèves. En fait, les élèves ne se présentent pas à l'école la tête vide; ils ont déjà des conceptions personnelles et parfois erronées. Ces premiers schèmes sont difficiles à faire disparaître car il s'agit des premiers que l'enfant a construits.

Nous voilà devant un grand défi auquel il vaut la peine de réfléchir parce qu'évidemment, de telles difficultés au départ, lors de l'appropriation des nombres entiers provoqueront des problèmes, lorsqu'il faudra effectuer des algorithmes ou même lorsque les nombres entiers cèderont leur place aux nombres décimaux ou aux fractions. Nos observations auprès d'enfants de primaire, et ce à différents niveaux scolaires, de la troisième année à la sixième année nous ont amenés à réaliser que le problème de l'algorithme de la multiplication est souvent relié à des difficultés liées aux propriétés du nombre. Il faudra alors retourner au commencement pour que l'enfant intègre réellement les nouveaux apprentissages. De là notre intérêt, la multiplication est un algorithme qui met en jeu plusieurs concepts de la numération qu'il faut retravailler. C'est probablement pourquoi cet algorithme pose toujours des problèmes aux élèves en fin de troisième cycle bien qu'ils travaillent cet algorithme depuis la troisième et parfois même la deuxième année. Sans oublier que ces difficultés seront plus importantes si elles persistent. Alors, étant titulaires de cinquième année, nous avons la chance de pouvoir retravailler avec les élèves l'algorithme de la multiplication et peut-être trouver une meilleure façon de les amener à intégrer les apprentissages.

1.4 Le temps des questions

Le but ici n'est pas de chercher ce qu'il ne faut pas faire mais plutôt d'orienter nos recherches sur ce qu'il faudrait faire pour redorer le blason de la mathématique aux yeux des enfants. La question est de savoir comment faire pour motiver les élèves et les amener à construire le sens de la multiplication. Quelle est l'approche qui pourrait motiver l'enfant et lui permettre de donner un sens à la multiplication et plus spécifiquement à l'algorithme de la multiplication? C'est pourquoi il s'avèrerait important de mettre en valeur l'essence des concepts mathématiques. « Il faut axer l'apprentissage des mathématiques sur le processus plutôt que sur le résultat, sur une construction véritable de sens par l'enfant. » (Bednarz, Poirier et Bacon, 1992, page 34) Il s'agit d'amener l'enfant à réfléchir et développer son sens critique. N'y a-t-il pas ici des propos en lien avec l'une des caractéristiques du nouveau programme du ministère en mathématiques qui spécifie que l'enfant doit construire le sens avant de travailler les techniques : «L'école, comme toute institution qui fait partie d'un vaste système, n'est jamais à l'abri d'un fonctionnement trop marqué par sa réalité propre. Elle doit donc se soucier, dans sa façon d'aborder les apprentissages fondamentaux, de donner un sens et une portée aux savoirs développés en contexte scolaire. » (Programme de formation de l'école québécoise, 2001, page 3)

1.5 Une piste pour une approche nouvelle

> « L'histoire permet de saisir des paradoxes, de faire vivre des controverses, bref de constater que les mathématiques sont une science dynamique et non immuable. » (Jean-Paul Collette, 1971, page 24)

Serait-ce une solution que d'amener l'enfant à se pencher sur l'histoire des mathématiques pour mieux saisir les concepts mathématiques? Cette piste doit être prise sérieusement en considération car elle pourrait permettre à l'enfant d'avoir un regard sur le passé, pour mieux comprendre le présent et peut-être anticiper l'avenir. C'est ainsi que l'enfant peut remarquer une suite d'idées, voir les motifs à l'origine des concepts et des définitions mathématiques, redécouvrir les pourquoi historiques et logiques, comprendre et considérer l'évolution et l'utilité de certains concepts mathématiques dans la société… « Cette longue éducation de l'humanité, dont l'origine se situe loin de nous, recommence en quelque sorte dans chaque enfant. » (Jean-Paul Collette, 1974, page 40).

Cette approche voulant favoriser l'enseignement de l'histoire des mathématiques pour une meilleure compréhension des mathématiques est pertinente et surtout cohérente avec le nouveau programme. En fait, elle répond aux objectifs du nouveau programme doublement : par son aspect culturel et par sa construction de sens.

Aujourd'hui en cette entrée dans un nouveau siècle, la nouvelle réforme arrive à point. Ce programme, riche et diversifié, privilégie un apprentissage adapté à la réalité des jeunes. Par ailleurs, ce nouveau programme amène l'enfant à apprécier l'importance de la mathématique dans l'histoire de l'humanité. L'enfant portera donc un jugement critique au regard des répercussions de la mathématique sur l'individu, la société et l'environnement.

> « L'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement de la mathématique constitue une excellente façon d'en rehausser le niveau culturel. C'est l'occasion pour les élèves de percevoir l'évolution, <u>le sens et l'utilité</u> de cette discipline et de découvrir que cette évolution et la création de

> certains instruments tels que la règle, le bouclier, le rapporteur, la calculatrice sont directement ou indirectement liées à des besoins pratiques apparus dans les sociétés. Un survol historique peut aussi illustrer le fait que les savoirs mathématiques soient le fruit du long travail de mathématiciens passionnés par leur discipline. » (Programme de formation de l'école québécoise, 2001, page 125)

Puis, l'aspect culturel est une nouveauté du nouveau programme. En fait, par cet aspect culturel (l'histoire de la mathématique) les concepteurs du nouveau programme entrevoient que les enseignants permettent aux enfants d'être actifs et de construire leurs apprentissages. Par lui-même, l'enfant est donc amené à construire des notions mathématiques. « Chaque discipline est porteuse de culture tant par son histoire que par les questionnements particuliers qu'elle suscite. Aussi importe-t-il que l'élève comprenne l'origine des disciplines enseignées, les problématiques qu'elles abordent, les types de questions auxquelles elles s'efforcent de répondre et les démarches qu'elles utilisent afin de pouvoir s'y référer à bon escient. » (Programme de formation de l'école québécoise, 2001, page 4). L'enfant est d'un naturel curieux, il doit trouver des réponses satisfaisantes sur tous les plans : chronologique, logique ou pédagogique.

Il est clair que l'un des objectifs du programme en insérant un aspect culturel est d'amener l'enfant à donner un sens à ce qu'il apprend. En cherchant à connaître l'évolution de la pensée mathématique à travers les siècles, l'enfant s'explique les changements par les limites et les besoins mathématiques ou la réalité de chaque époque. La conscience du dynamisme de la mathématique favoriserait la compréhension chez l'enfant. En quelques mots, l'histoire permettrait un enseignement nouveau provoquant le dialogue et amenant l'élève à redécouvrir les mathématiques.

1.6 Les visées de la recherche

Cette recherche vise à faire vivre une situation d'apprentissage en mathématiques à des élèves du primaire faisant appel à l'utilisation d'activités à caractère historique. À cet effet, le prochain chapitre propose une recension des écrits qui nous permettra d'observer les travaux faits en ce sens. Est-ce que certains chercheurs ont déjà tenté, au Québec ou ailleurs, d'intégrer une perspective historique à l'enseignement des mathématiques et quelles ont été leurs conclusions dans un tel cas?

Le contexte théorique

CHAPITRE II
CONTEXTE THÉORIQUE

La multiplication est une notion mathématique qui pose souvent de sérieux problèmes aux élèves, malgré plusieurs années d'enseignement et de pratique. Évidemment, la multiplication n'est pas une notion simple, elle sous-entend plusieurs concepts mathématiques que nous identifierons dans ce chapitre. De plus, nous verrons les différentes conceptions des élèves.

La multiplication est une notion mathématique qui peut être définie ainsi :

> « La multiplication est l'opération qui, à tout couple d'entiers (a, b), associe le produit a x b. C'est une « opération qui a pour but, étant donné deux nombres appelés facteurs, d'en obtenir un troisième appelé produit ». Ainsi, dans l'équation 3 x 4 = 12, 3 et 4 sont des facteurs et 12 est le produit. » (Poirier L., 2001, p.64)

Il s'agit ici d'une définition. Pour comprendre l'algorithme, il faut chercher plus loin. La multiplication peut être observée sous deux aspects. D'abord, il y a l'aspect traitant du calcul relationnel où il est question de familiarisation avec les différents sens des opérations afin de développer l'habileté à trouver l'opération à effectuer. En ce qui a trait à la multiplication, il existe cinq sens: l'addition répétée, le produit cartésien (combinaison), la comparaison multiplicative, la disposition rectangulaire puis, l'aire et le volume (Poirier, 2001, page 78) Quant au second aspect de la multiplication, il s'agit de celui touchant le calcul numérique. Lorsqu'il est question de calcul numérique, nous faisons appel à la connaissance des tables, au calcul mental, aux procédés personnels des enfants ou à l'algorithme. Il est clair que la multiplication est une notion importante et très exigeante, il suffit d'observer tout ce qu'elle implique. Cependant, ce présent travail s'intéresse davantage à l'algorithme de la multiplication, son procédé de calcul visant à connaître le résultat final déterminé. Plus précisément, utilisant les termes mathématiques énoncés plus haut, nous poserons un regard minutieux sur le calcul numérique.

Évidemment, l'algorithme de la multiplication fait aussi intervenir plusieurs concepts qui sont à la base d'une bonne compréhension cette opération arithmétique. Une simple répétition de la technique opératoire n'est pas nécessairement synonyme de compréhension. Il faut chercher plus loin, observer les erreurs des enfants pour découvrir la source même de leurs difficultés. Il faut savoir que certains de ces concepts sont enseignés depuis la première année mais ils se présentent encore comme des obstacles et nuisent à l'assimilation de nouvelles connaissances plus complexes. Nous identifierons ces concepts qui ont des répercussions marquantes sur l'apprentissage de l'enfant pour ensuite les rattacher aux erreurs commises.

2.1 Les concepts sous-jacents à la technique opératoire de la multiplication.

Au début du deuxième cycle, les élèves voient l'opération de la multiplication. L'enseignant débute dans la majorité des cas par la démonstration de la technique. Est-ce la bonne procédure pour aborder cette notion? Nous ne sommes pas ici pour juger mais bien pour trouver comment améliorer la compréhension des élèves de l'algorithme de la multiplication. L'essentiel serait de voir chacune des étapes de cet algorithme pour en découvrir les concepts mathématiques rattachés. Ainsi, les gestes si souvent répétés des élèves seront peut-être mieux compris de ces derniers. Observons de plus près une opération :

```
      2
       1
      472
    X
      204
     1888   /      472 X    4
  +  0000   /      472 X    0
    94400   /      472 X  200
    96288   /      la somme des produits partiels (1888 + 0 + 944000 = )
```

En d'autres mots, la multiplication exige des connaissances quant à la numération (décomposition d'un nombre et la valeur des chiffres en fonction de la position qu'ils occupent), la connaissance des tables de multiplication et la connaissance des propriétés de cet algorithme telles que : l'associativité, la distributivité et la commutativité. À cela, il faut aussi ajouter la connaissance de l'algorithme d'addition au niveau des produits partiels et bien sûr, il faut s'attendre à une connaissance des tables d'addition. Les élèves doivent d'abord s'approprier plusieurs concepts dont certains se rattachent à la numération s'ils souhaitent des résultats concluants, s'ils souhaitent bien appliquer l'algorithme.

2.1.1Les concepts de la numération

Selon l'encyclopédie Hachette, la numération c'est : *Action de compter, d'exprimer par les nombres. MATH. Moyen utilisant un petit nombre de symbole (chiffres) qui permettent de nommer les entiers naturels. Numération décimale (à base dix) : système de numération le plus employé. Les nombres de zéro à dix ont reçu un nom et un symbole particulier : 0 (zéro), 1 (un), 2 (deux), 3 (trois), 4 (quatre), 5 (cinq), 6 (six), 7 (sept), 8 (huit), 9 (neuf).Chaque chiffre placé immédiatement à gauche d'un chiffre représente un ensemble dix fois plus nombreux : 12 = 1 dizaine + 2 unités.* Toutefois, cette définition est très sommaire, plus spécifiquement il serait possible de lire que la numération c'est :

> « Un système de représentation des nombres qui permet de désigner les nombres et d'effectuer des opérations sur ceux-ci. Il y a des numérations figurées ou concrètes, des

> numérations orales (dites ou lues) et des numérations écrites ou symboliques faisant appel à des symboles pour représenter les nombres. » (Poirier L., 2001, p.28)

Gardant toujours le même sens, Bednarz et Dufour (1986, p.18) entendent par numération :

> « Un système cohérent de symboles régi par certaines règles (regroupement par 10, valeur positionnelle...) permettant d'écrire les nombres, de les lire. La numération est la partie de l'arithmétique qui enseigne à exprimer et à représenter les nombres. »

2.1.1.1 Un système en base 10 (regroupement par 10)

L'encyclopédie Hachette définit la notion de groupement en disant qu'il s'agit de *l'action de grouper, procéder au groupement des effectifs.*

Le système en base 10 n'a pas toujours eu l'exclusivité, bien au contraire. En fait, nos ancêtres ont fait usage de bases différentes de celle connue aujourd'hui. Par exemple, les Babyloniens ont utilisé la base 60 (d'où l'origine des 60 secondes dans une minute et des 60 minutes dans une heure). Il y a aussi eu des systèmes de numération en base vingt, en base douze, en base cinq et en base deux. Notre système numérique, dit décimal, a probablement été instauré parce que nous avons 10 doigts. Il sous-entend l'idée de groupements : unité, dizaine, centaine, millier, etc. par 10; ainsi lorsqu'il y a 10 unités, ces dernières sont regroupées en une dizaine.

Finalement, un système faisant appel aux groupements permet de réduire le nombre de symboles et d'effectuer des calculs plus efficacement et plus rapidement.

> « Le principe de groupement a permis de passer d'un système basé sur des unités (les cailloux, par exemple) à un système

> groupé. Le recours à une base permet d'utiliser un nombre restreint de symboles pour exprimer les nombres. » (Poirier L., 2001, p.29)

Il aurait été possible de choisir une base différente mais le choix de la base 10 est profitable puisqu'elle a suffisamment de symboles pour ne pas qu'il y ait des changements fréquents de groupements et pour minimiser le nombre de symboles possible de mémoriser. Par exemple, si notre système était en base quatre; il y aurait peu de symboles, c'est vrai : 0, 1, 2, 3. Toutefois, le changement de positions survient rapidement et le nombre devient imposant très rapidement, il suffit d'observer un système en base 4 : 0,1,2,3,10,11,12,13,20,21,22,23,30,31,32,33,100… Une qualité importante du système en base 10 est de faire intervenir une notation demandant peu de mémorisation. De plus, c'est un système opératoire efficace.

Lié au principe de groupement, nous retrouvons un second principe: celui de l'échange. Cela signifie concrètement qu'il y a échange lorsqu'il y a groupement de 10 (par exemple, 10 unités peuvent être échangées pour une dizaine et vice versa).

2.1.1.2 La valeur positionnelle

Toujours selon l'Encyclopédie Hachette, les termes se définissent comme suit :
. La position c'est *lieu où une chose, une personne est située. Manière dont une chose est placée.*
Toutefois, la définition du mot valeur semblait plus complète en lisant le Petit Larousse que l'Encyclopédie Hachette. Donc, selon le dictionnaire Petit Larousse (p.1052) :
. La valeur c'est *l'une des déterminations possibles d'une grandeur ou d'une quantité variable ou d'une fonction.*

Lorsque ces deux termes sont regroupés pour une expression mathématique, cela peut être défini comme suit :

> « Le principe de valeur positionnelle permet d'écrire tous les nombres avec seulement 10 chiffres. Ainsi, le chiffre désignera tour à tour des unités, des dizaines ou des centaines selon la position qu'il occupe dans le nombre. » (Poirier L., 2001, p.28)

Nous venons tout juste d'aborder les débuts et les raisons de l'apparition d'un système numérique en base 10. Toutefois, l'efficacité de ce système tient en son concept de la valeur positionnelle. Tous les systèmes de numération n'ont pas fait appel à la valeur positionnelle. Ainsi, les Égyptiens avaient un système de type additif. Un système additif est un système où chaque symbole est répété le nombre de fois requis. Toutefois, le système égyptien est aussi décimal, c'est pourquoi lorsqu'il y a 10 unités, elles sont groupées en une dizaine représentée alors par un nouveau symbole. Ainsi, pour chaque puissance de dix, il a fallu créer un nouveau symbole pour l'illustrer. Donc, peu importe leur position, le nombre est formé par des symboles juxtaposés, les uns aux côtés des autres ou les uns par-dessus les autres, l'important c'est la somme des valeurs des symboles présentés. Évidemment, l'une des limites que ce système était qu'il imposait un grand nombre de symboles. Notre système de numération est différent du fait qu'il est justement positionnel. Il n'y a pas de signes différents pour désigner les dizaines, les centaines, etc. Au contraire, nous utilisons les mêmes signes mais il faut observer la position conventionnelle qu'ils occupent pour connaître leur valeur réelle. C'est à cet instant précis que la position et le symbole deviennent signifiants. Cette façon de voir les chiffres et les nombres nous viennent de l'Inde. L'usage de la numération de position est généralisé depuis la fin du 7^{e} siècle. Depuis eux, dix signes ou chiffres importent (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). En fait, les chiffres sont des symboles qui permettent justement l'écriture des nombres. Par exemple, dans 427, le 4 occupe la position des centaines, le 2, celle des dizaines et le 7, celle des unités.

L'écriture tout comme la lecture se font de gauche à droite, c'est ainsi que l'on retrouve la valeur la plus élevée à l'extrême gauche. Ainsi, les nombres 731 et 173 sont composés des même chiffres mais leur position différente ne leur accorde pas la même valeur dans le nombre. Il importe de considérer la place occupée par chacun des chiffres :

731 = 7 X 100 + 3 X 10 + 1 X 1

tandis que,

173 = 1 X 100 + 7 X 10 + 3 X 1

2.1.1.3 Le zéro

Selon l'Encyclopédie Hachette, le zéro se définie : *MATH. Élément neutre de l'addition, noté 0. (Son invention tardive par les Indiens fut un jalon important dans l'histoire des mathématiques.) Le chiffre zéro est employé dans les systèmes de numération et indique l'absence de la puissance de la base correspondante. Nombre qui indique une quantité nulle. Ce qui est nul, inexistant ou sans valeur.*

Le zéro est un chiffre qui, selon sa position, peut changer grandement la grandeur d'un nombre. Le zéro est apparu car un besoin s'est fait sentir. Ainsi, durant un grand nombre d'années, de siècles, nos ancêtres laissaient simplement un espace libre entre deux chiffres. Puis, les Arabes furent l'un des peuples qui ont ressenti le besoin d'introduire un symbole spécifique afin de marquer les unités manquantes et éviter de la sorte toute confusion dans les représentations et les opérations (les arabes ont inventé le symbole du zéro tel que connu aujourd'hui). Finalement, le zéro a son importance pour représenter l'absence.

> « C'est pour que chaque chiffre restât à son étage, dans le cas où les unités d'un certain ordre viendraient à manquer, les savants mayas inventèrent un zéro, concept auquel ils donnèrent (pour des raisons qui nous échappent) une forme assez semblable à celle d'un coquillage ou d'une coquille d'escargot. » (Georges Ifrah, 1981, p. 725)

2.1.2 Les autres concepts mathématiques

La numération prend une grande place dans la justification de la technique opératoire de l'algorithme de la multiplication. Cependant, quelques autres concepts entrent aussi en relation.

2.1.2.1 Les propriétés de la multiplication

. La distributivité : a X (b + c) = (a X b) + (a X c), quels que soient les naturels a, b et c. En fait, cela explique que la multiplication peut s'effectuer sur le résultat d'une somme de deux naturels ou le résultat sera le même en faisant la somme des résultats obtenus en effectuant la multiplication sur chaque terme de la somme. Aussi, la multiplication est distributive par rapport à la soustraction pour tout entier a, b, c avec b plus grand que c.

> « Cette propriété est très utile en calcul mental. Lorsque par exemple, on multiplie 43 x 15, il est facile de décomposer 15 en 10 + 5 et de faire (43 x 10) + (43 x 5), et même de faire (43 x 10) + (43 x 10) / 2, car 5 = 10 / 2. » (Poirier L., 2001, p.66)

. La commutativité : a X b = b X a, quels que soient les naturels a, b et c. Plus spécifiquement, l'Encyclopédie Hachette dit : *MATH. Qualifie toute loi interne (opération) sur un ensemble E, telle que l'ordre est indifférent.* Cette propriété exprime le fait que l'on puisse inverser deux termes d'un produit sans en changer la valeur, la réponse demeure la même.

. L'associativité : a X (b X c) = (a X b) X c, quels que soient les naturels a, b et c. L'Encyclopédie Hachette définie cette propriété en inscrivant : *MATH. Qualité d'une loi de composition interne, définie sur un ensemble E et telle que le résultat de la combinaison de trois éléments a, b, c de E ne dépende pas de la manière dont ces objets* *ont été groupés, c'est-à-dire : (a + b) + c = a + (b + c). L'addition est associative sur l'ensemble des réels, la soustraction ne l'est pas.*

2.1.2.2 L'arrondissement et approximation

Il importe de définir spécifiquement les termes ici discutés. Selon l'encyclopédie Hachette:

. Arrondir signifie *Rendre rond. Accroître, compléter. Exemple, arrondir une somme : la compléter (par des unités, des décimales) pour obtenir un chiffre rond.*
. Approximation signifie *MATH. Évaluation par excès ou par défaut d'un chiffre exact que l'on recherche sans pouvoir l'atteindre précisément. Méthode d'approximation : approche simplifiée d'un problème dont les données sont soit définies avec une précision plus ou moins grande, soit trop nombreuses pour qu'il soit possible de les faire toutes intervenir.*

Quelle est l'utilité d'arrondir les nombres et d'effectuer dans un premier temps, un calcul mentalement? Plusieurs diront qu'il s'agit d'une perte de temps puisque la réponse ne sera pas exacte, elle ne sera qu'approximative. Il est tout à fait vrai et simple à démontrer :

4327	arrondir	4000
X		X
92		100
8654		400000
+ 389430		
398084		

Toutefois, mentalement, l'enfant peut effectuer l'opération rapidement. Ainsi, l'enfant sait aux alentours de quel nombre sa réponse tournera. En un mot, il connaît l'ordre de grandeur de la réponse. Il pourra donc vérifier sa réponse une fois le calcul effectué sous toute sa longueur. Arrondir c'est émettre une hypothèse, se donner une idée qui permet de cibler des erreurs d'inattention ou de tables. Toutefois, le calcul mental est un ensemble de procédés abréviatifs, de techniques rapides supposant la connaissance et la compréhension des nombres car il faut arrondir les nombres de l'opération en des nombres près, tout en étant assez simplifié pour que le calcul demeure simple et possible mentalement. Alors, l'arrondissement nous permet de faire l'approximation de la réponse d'un algorithme.

> Récemment, Renée Caron définissait ainsi ce qu'elle entend par calcul mental : « … dans le calcul mental, on doit retrouver plus ou moins les éléments de la résolution de problèmes : temps pour réfléchir, organisation d'une séquence d'opérations pour arriver à la réponse et retour sur les étapes pour vérifier si on a bien résolu le problème. » (Poirier L., 1990, p. 10)

2.1.2.3 La connaissance des tables de multiplication

Il est clair que l'algorithme de la multiplication demande dans un premier temps de multiplier et par le fait même de connaître les tables de multiplication. Les tables de multiplication apprises au primaire sont généralement les tables de 1 à 12. Ainsi, l'enfant est en mesure de multiplier tous les nombres puisqu'un nombre est composé des chiffres entre 1 et 12. Par exemple, une multiplication impliquant deux nombres dans les centaines demande néanmoins un total de neuf calculs rapides, idéalement effectué mentalement. Disons que la connaissance des tables de la multiplication allège la concentration et diminue la difficulté du calcul. Nous développerons les conceptions et difficultés des élèves relatives aux différents aspects de la multiplication dans la section suivante.

2.2 Les conceptions des élèves/perspective réelle

Évidemment, comme énoncé dans la problématique, l'intérêt de créer une situation didactique mathématique nouvelle au sujet de l'algorithme de la multiplication vient de l'observation des nombreuses erreurs commises par des élèves du troisième cycle du primaire, de cinquième année, lors d'exercices les mettant devant la pratique de cet algorithme. Cette section a pour but de cerner les causes de telles erreurs. Il sera possible par conséquent de remarquer que les erreurs viennent de conceptions erronées développées par ces mêmes élèves. Plusieurs de ces conceptions concernent à juste titre les concepts de la numération. Par ailleurs, ces fausses conceptions créent des obstacles qui s'avèrent ici être décelés lors de la mise en œuvre d'une multiplication. Les répercussions sont grandes car les élèves se sentent démunis face à une technique opératoire ne donnant pas les résultats escomptés, mais pourtant si souvent répétée. L'apprentissage de la technique opératoire permettant de résoudre une multiplication n'est pas en soi une mauvaise stratégie, mais les enfants doivent être en mesure d'analyser leur démarche pour cibler leurs fautes et non simplement répéter machinalement cette technique.

2.2.1 Analyser les erreurs des élèves.

Dans cette section, nous verrons comment les conceptions des élèves permettent d'expliciter les erreurs que ces derniers commettent, et les répercussions que celles-ci ont sur l'apprentissage d'autres concepts, comme celui de l'algorithme de la multiplication. Tous les exemples cités sont des exemples qui proviennent des travaux des élèves de ma classe. Le raisonnement et les calculs sont réels.

Plusieurs exemples seront explicités, montrant ainsi qu'il ne s'agit pas de cas uniques ou d'une erreur d'inattention. Toutefois, plusieurs autres exemples de chacune des catégories d'erreurs auraient pu figurer mais l'objectif n'est pas d'identifier le nombre total d'erreurs mais plutôt de cibler les différents types d'erreurs.

2.2.1.1 Difficultés dans la gestion des « retenues », groupement

Dans un premier temps, il importe de savoir si l'enfant accorde aux chiffres présents dans un nombre cette notion de groupement ou s'il ne fait que visualiser une suite de chiffres selon l'ordre préalablement étudié. Bednarz et Dufour dans une étude de 1986, ont montré chez des élèves de 3^{e} et de 4^{e} année du primaire que

> « L'écriture est attachée à un découpage, à un ordre en écartant toute signification véritable accordée à la position en termes de groupements. » (p.19)

Il est vrai qu'un enfant peut expliquer que le nombre 627 c'est : 6 centaines, 2 dizaines et 7 unités. Toutefois, il ne considère pas le principe de l'échange lorsqu'il y a regroupement ou emprunt. Plusieurs élèves ne verront pas que 2 dizaines c'est en fait 2 groupements de dix unités soit 20 unités. Aussi, voici plus concrètement quelques calculs effectués par certains élèves.

Exemples :

$$\#1)\quad \begin{array}{r} 57 \\ \underline{\times\ 45} \\ {\scriptstyle 1} \\ 255 \\ \underline{+\ 2080} \\ 2335 \end{array} \qquad \#2)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ 73 \\ \underline{\times\ 81} \\ {\scriptstyle 1} \\ 73 \\ \underline{+\ 5640} \\ 5713 \end{array} \qquad \#3)\quad \begin{array}{r} 55 \\ \underline{\times\ 93} \\ 1515 \\ \underline{+\ 45450} \\ 46965 \end{array} \qquad \#4)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 4} \\ 218 \\ \underline{\times\ 47} \\ 1472 \\ \underline{+\ 8420} \\ 9892 \end{array}$$

Rapidement, ces quatre exemples nous montrent très bien que les élèves oublient de considérer la retenue. Parfois la retenue est située au bon endroit mais sans être incluse à l'intérieur des calculs (exemple #2), il advient aussi qu'elle ne se trouve pas où elle se devrait (exemple #4) ou encore, elle est complètement laissée pour compte lors de la multiplication mais non à l'addition (exemple #1) et il est même possible que la retenue n'aie pas sa place (exemple #3).

En observant ces faits, deux hypothèses nous viennent à l'esprit. Premièrement, il est possible que ce soit un oubli de l'enfant, une erreur d'inattention. Toutefois, il est aussi possible que l'erreur, cette fois plus grave, provienne d'une mauvaise conception du concept mathématique de groupements. Il suffit d'analyser le quatrième exemple pour saisir l'ampleur de la difficulté. L'enfant effectue une première multiplication, 8 X 7 = 56. D'abord, il fait une erreur de table puisqu'il donne comme réponse 42. Puis, il pose 2 au niveau des produits partiels et retient 4, mais pour lui, il s'agit d'unités donc la retenue demeure la même unité de grandeur et c'est pourquoi il place sa retenue au-dessus de la colonne des unités. Il ne conçoit pas le 4 comme étant 40 unités soit 4 dizaines. C'est ainsi que la retenue est laissée pour compte et jamais réutilisée puisque l'enfant calcule ensuite les dizaines, ne considérant donc plus les unités inférieures. La réponse n'étant ainsi plus d'un même ordre de grandeur. Aussi, il faut regarder l'exemple #3 où l'enfant effectue 3 X 5 = 15, il pose ce nombre sans aucune retenue, il ne conçoit pas qu'un groupement est possible, qu'il y a suffisamment d'unités pour former une dizaine. Les élèves ont une difficulté à travailler en même temps deux groupements différents. D'ailleurs, Bednarz et Dufour dans leur recherche, ont conclu qu'au deuxième cycle (3^{e} et 4^{e} année) :

> « Peu d'enfants accordent une signification véritable à l'écriture en termes de groupements. L'écriture des nombres est vue comme un alignement de chiffres. » (1986, p.20)

Maintenant, pour enrayer ces difficultés, des solutions s'imposent. Dans un premier temps, pour éviter les erreurs d'inattention, il s'agirait simplement d'inciter l'enfant à noter les retenues puis à les barrer dès qu'elles ont été utilisées. Puis, concernant les fautes plus graves, celles provenant de conceptions inappropriées chez l'enfant, il serait essentiel d'avoir recours à différentes écritures symboliques, à différentes images, à différents matériels, à différentes représentations, etc. afin d'amener l'élève à visualiser le concept en question. Il faut un travail non pas uniquement de reconnaissance, mais aussi un travail de correspondance impliquant codage et décodage et surtout, veiller à développer une perception de groupements. L'enfant doit être mis face à plusieurs éventualités pour en construire une conception plus réelle. Il faudra aussi travailler le sens de la retenue avec cet enfant.

2.2.1.2 La valeur de position

Exemple :

1 2			5 2
2 4			4 1
#1) 638	#2) 412	#3) 415	#4) 173
X 306	X 214	X 8	X 68
1 1	1 1	1	1 1
3828	1648	40	1384
+ 000	+ 4120	+ 8	+ 1038
1914	4240	32	2422
5742	10008	80	

La valeur positionnelle est un concept de la numération qui cause généralement plusieurs difficultés aux enfants. Nous remarquons ici, par ces quatre exemples, que les enfants ne se sont pas appropriés le concept. Commençons par l'exemple #1, l'enfant effectue correctement les produits de 638 par 6 et 638 par 3, il a su bien gérer les retenues et ses tables sont bien apprises. Cependant, l'enfant n'a pas tenu compte du fait que le produit par 3 représente en réalité un produit par 300. Au numéro 2, l'enfant connaît la règle demandant de décaler d'un rang le deuxième produit partiel. A-t-il saisi le pourquoi? Il est probable que non, puisque lors du troisième produit partiel, l'enfant décale une fois de plus celui-ci d'un seul rang et pourtant l'ordre de grandeur minimale devient les centaines. Une règle apprise mais non comprise. Le troisième exemple cité est une multiplication de trois unités par une même unité; (8X4)+(8X1)+(8X5). Il en est de même au numéro quatre. Pour ces enfants, tous les chiffres ont le même statut, leur position n'étant pas considérée.

Avec ces élèves, il convient de retravailler l'ensemble des calculs à effectuer et leur signification. Il est probable que, comme dans le cas des difficultés de groupements, il faille décomposer le multiplicateur pour donner une signification à chaque produit partiel. L'estimation, tout particulièrement à l'exemple #3, pourrait amener l'élève à questionner sa réponse : « Est-il possible que 415 X 8 donne 80? »

2.2.1.3 Le zéro

Trop rapidement, nous enseignons des règles par rapport au zéro aux enfants qui ne sont pas généralisables. Par exemple, un zéro placé à la fin d'un nombre augmente la valeur de ce nombre mais un zéro placé au début du nombre n'amène aucune différence et le retrait du zéro diminuera la valeur du nombre si le zéro est placé à la fin du nombre. Puis, vient la multiplication par 10, 100 ou 1000 où l'enfant apprend du coup qu'il faut ajouter un zéro, deux zéros, trois... et ainsi de suite. Quelle conception l'enfant développe-t-il? L'enfant voit-il ainsi le nombre comme une séquence de chiffres ou comme un découpage? Il faut croire que le nombre devient une suite de chiffres allant du plus petit, les unités (à la gauche), vers les plus grands, pouvant être les dizaines, les centaines, les milliers, etc. Comme l'ont constaté Bednarz et Dufour :

> « Certains enfants placent le 0 au début du nombre car la grandeur du nombre est reliée au nombre de chiffres et d'autres placent le zéro à la fin parce qu'un 0 au début, ce n'est rien, cela ne change rien. » (1986, p.24)

Voici deux exemples d'élèves de cinquième année qui reflètent bien qu'ils ne donnent pas de sens au zéro.

1er exemple :

$$\begin{array}{r} 3\,804 \\ -\ \underline{1\,438} \\ 2\,336 \end{array}$$

L'enfant remarque qu'il n'a pas assez d'unités chez le plus grand nombre (3 804), pour en enlever 8. L'enfant doit alors emprunter mais n'ayant pas de dizaines, il passe outre et retire une centaine pour un prêt de seulement 10 unités. L'enfant laisse de côté le zéro. De plus, ne donnant aucune valeur au zéro, il retranscrit le nombre 3 des dizaines à la position des dizaines à la réponse.

2e exemple : 150 / 3 = 5

Cette réponse démontre clairement que l'enfant voyant le zéro croit qu'il s'agit qu'il ne reste rien et par conséquent le calcul est terminé. Le zéro aux unités importe puisque le nombre 15 représente des dizaines plutôt que des unités. Il a son importance.

D'ailleurs, il est à prévoir que l'apprentissage des décimaux ne se fera pas sans difficultés. Les enfants ne verront pas pourquoi 5,47 X 10 ne donne pas comme résultat 5,470 ou pourquoi 4,450 n'est pas un nombre supérieur à 4,45. Pourtant, ils mettent en pratique les règles apprises : Il faut ajouter un zéro en multipliant par 10 et l'ajout d'un zéro à l'extrême droite augmente la valeur d'un nombre.

Le zéro a perdu le sens premier que nos ancêtres lui avaient donné, le zéro est apparu, il faut s'en souvenir, pour symboliser l'absence de valeur à une position donnée. Ainsi, l'enfant doit voir le nombre sous différentes facettes pour construire ses propres conceptions. Il faut que l'enfant voit des nombres tels que :

4780 0478 4078 4708

La diversité des exemples amène l'enfant à se poser des questions, émettre des hypothèses et donc, comprendre par le sens et l'utilité.

Il est aussi très pertinent d'observer les diverses multiplications ayant un zéro intégré et ce, afin de mieux cibler les erreurs des enfants et tenter de les expliquer.

Exemples :

```
#1)   640        #2)   806        #3)   830
    X 100            X 100            X 100
       00             8060              000
     6400                              000X
     6400                              830X
                                       8300
```

```
#4)  1275        #5)   830
    X  10            X 100
     1275              000
                     + 000
                       000
                     + 830
                       830
```

En observant ces exemples, il est à même de comprendre que le zéro, n'a pas la place qui lui revient. Pour certains enfants le zéro n'est rien, il signifie l'absence au sens propre. Observons de plus près les exemples #4 et #5. L'enfant dans chacun des cas a retranscrit le nombre figurant de multiplicande à la réponse comme s'il s'agissait d'une multiplication ayant pour multiplicateur le chiffre 1. Par ailleurs, pour pousser plus loin la réflexion nous avons demandé aux enfants d'expliciter leur démarche. Celui proposant l'exemple #4, nous répond qu'il est inutile d'inscrire le résultat de 1275 par 0 car tous savent très bien que la réponse sera toujours zéro. Donc, il a dit avoir multiplié 1 par 5,7,2 pour en arriver à la réponse. L'autre élève (exemple #5) a expliqué que sa démarche est bien illustrée. Dans un premier temps, il a multiplié tous les chiffres du nombre 830 par 0 (celui des unités qu'il précise). Ensuite, il a fallu recommencer car il y a un deuxième zéro (il pointe celui des dizaines); même réponse. Il additionne ces résultats partiels pour une somme de zéro. Puis, il dit avoir multiplié le nombre 1830 par 1. Il faut terminer en additionnant une fois de plus les produits partiels, 1830 et 0 pour obtenir la somme de 830. (Évidemment, cet algorithme, ainsi effectué, sous-entend aussi que l'enfant ne tient pas compte de la valeur de position). Ces enfants ne connaissent pas la valeur du zéro, ils ne savent pas que le zéro est présent pour marquer les unités manquantes et non l'absence de cette unité de grandeur. Nos ancêtres pouvaient faire ce type d'erreur car le zéro n'existait pas, ils laissaient un espace vide et c'est cela qui pouvait porter à confusion.

Dans un deuxième temps, il faut regarder les exemples # 1, 2 et 3. Plusieurs exemples pour illustrer une règle enseignée et apprise par cœur par les enfants : L'ajout d'un zéro. L'enfant connaît la règle, il l'a apprise. Toutefois, la comprend-il? Il faut croire que non puisqu'il ajoute uniquement un zéro bien que le multiplicateur soit 100 ou 1000. Aussi, l'enfant ne considère pas la grandeur du multiplicateur, il n'observe pas sa réponse et ne compare pas celle-ci aux nombres initiaux à multiplier.

Suite à ces diverses observations, il est à penser de revoir le sens et l'utilité du symbole zéro. Puis, il faudrait aussi revoir la règle de l'ajout du zéro, mais en l'explicitant davantage pour amener les élèves à comprendre le pourquoi d'un ajout. Il pourrait s'avérer pertinent de remonter dans le temps et présenter aux enfants l'histoire du zéro et les raisons ayant poussé des gens à le créer.

2.2.1.4 L'approximation

Exemple :

#1)	#2)
415	473
X 8	X 11
1	1
40	473
+ 8	+ 473
32	946
80	

Pourquoi effectuer d'abord un calcul mental approximatif avant de répondre réellement à une opération? Une grande question dont la réponse est si simple. Il suffit de jeter un regard aux deux algorithmes de multiplication suivants pour saisir la nécessité de chercher d'abord l'ordre de grandeur d'une réponse. Par exemple, au numéro 1 la réponse n'est tout simplement pas logique : la réponse est inférieure au multiplicande, ce qui s'avère et s'avèrera toujours impossible. Au second exemple, bien que la réponse soit supérieure au multiplicande et au multiplicateur, cela ne fait pas de celle-ci une réponse près de la réalité car rapidement, il est possible de constater que le nombre 946 est en fait le double du nombre 473.

Il devient important de donner l'habitude aux enfants d'évaluer d'abord leurs calculs, de donner une réponse approximative suite à un calcul mental. Cette étape permettra à l'enfant de vérifier ces résultats, il s'agit pour l'élève d'une stratégie d'organisation.

2.2.1.5 L'ordre de calcul

Exemple :

$$\#1)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,3\ } \\ {\scriptstyle 1\,1\ } \\ 378 \\ \underline{\text{X } 204} \\ 756 \\ + \quad 0 \\ \underline{151200} \\ 151956 \end{array} \qquad\qquad \#2)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ } \\ 47 \\ \underline{\text{X } 12} \\ 47 \\ \underline{+\ 940} \\ 987 \end{array}$$

Ces élèves connaissent les produits de leurs tables de multiplication. Ils savent aussi qu'il faut décaler d'un rang pour le deuxième produit partiel car il est question des dizaines, qu'il faut décaler de deux rangs pour le troisième produit partiel... Ils n'oublient pas non plus d'inscrire et de tenir compte de leurs retenues impliquées dans l'opération. Cependant, ils effectuent le calcul de leurs produits partiels dans l'ordre inverse. Le premier a effectué 378 X 2, puis 378 X 4 pour obtenir le résultat d'une opération inversée, soit 378 X 402. Le second élève fait de même, il effectue 47 X 1, puis 47 X 2. L'enfant ne voit pas que le chiffre 2 du nombre 204 sous-entend 200 parce qu'il s'agit de deux centaines. De commencer le calcul par les centaines n'est pas problématique mais il faut savoir où placer les produits partiels.

Exemple :

```
       1 1
#1)    378
     X 204
      1
     65600
   +     0
      1512
     67112
```

En fait, il faut retravailler la signification des produits partiels. L'enfant pourrait être amené à transcrire au long son algorithme de multiplication, cette démarche lui indique le sens de la multiplication. La multiplication 435 X 267 = ____, c'est;

264 X (400 + 30 + 5) =

(264 X 400) + (264 X 30) + (264 X 5) =

(200X400)+(60X400)+(4X400)+(200X30)+(60X30)+(4X30)+(200X5)+(60X5)+(4X5)

Ainsi, par la propriété de la distributivité, l'enfant voit clairement la provenance de chacun des produits partiels.

2.2.1.6 Les tables de la multiplication

Nous avons déjà accepté d'emblée que l'algorithme de la multiplication demande dans un premier temps de multiplier. Toutefois, pour faciliter les calculs il est pertinent pour l'enfant de connaître par cœur ses tables.

Exemple :

1	5 5	2	5 5
2	5 5	3	5 5
#1) 38	#2) 456	#3) 95	#4) 789
X 24	X 199	X 47	X 166
1	1 1	1	1 1
148	3904	660	4534
+ 760	+ 39040	+ 3800	+ 45340
908	45600	4460	78900
	88544		128774

La difficulté, pour ces élèves, se situe au niveau de l'exécution des calculs. En fait, c'est une mauvaise connaissance des tables chez l'élève. Cette difficulté à mémoriser les jeux des tables accroît évidemment la charge mentale de travail de l'élève et peut par conséquent occasionner différentes erreurs d'inattention.

Que pouvons-nous faire pour contrer ces difficultés dues au fait que tous les résultats de la table ne sont pas parfaitement mémorisés.

> « Il est effectivement important que les élèves connaissent les faits numériques (les tables), car cette connaissance est à la base du calcul mental et du calcul écrit. » (Poirier L., 2001, p.57)

Toutefois, environ 20% des élèves ne sauront pas leurs tables. Est-ce qu'il faut inciter les élèves à étudier davantage bien qu'ils ne sauront jamais par cœur leurs tables? Devons-nous être intransigeants et exiger qu'il y ait mémorisation des tables?

> « Ne pourrait-on pas travailler autrement les tables, afin d'amener ces élèves à reconstruire les faits numériques qu'ils ne connaissent pas à partir de ceux qu'ils maîtrisent? » (Poirier L., 2001, p.57)

Il pourrait s'avérer avantageux d'amener les élèves à se doter de trucs. Premièrement, la propriété de la commutativité implique que, des tables de multiplications de 0X0 à 12X12, l'élève n'a pas en réalité 144 faits numériques à connaître mais plutôt la moitié, soit 72. Il s'agit du même résultat lorsqu'il y a inversion des chiffres multipliés. Ainsi, la tâche est moins décourageante pour l'élève. Deuxièmement, toutes les multiplications intégrant l'élément neutre sont plus simples et ceci touche 23 faits numériques (multiplier 1 à un nombre ne change pas ce nombre). De plus, les multiplications impliquant le chiffre 0 ont pour produit 0, cela simplifie donc la mémorisation de 25 autres faits numériques. Puis, nous pourrions ajouter que le produit d'une multiplication par 5 sera toujours un nombre dont le chiffre à la position des unités est 0 ou 5. Les élèves apprennent aussi très facilement la table du 2 (2 X 1, 2 X 2, 2 X 3, 2 X 4, etc.) et les multiplications où le chiffre est répété (1 X 1, 2 X 2, 3 X 3, 4X 4, 5X 5, 6 X 6, etc.) car il s'agit encore des doubles.

> « L'hypothèse retenue pour expliquer cette aisance réside dans le fait que les élèves n'ont qu'un terme à mémoriser, puisqu'il est répété, en plus de la somme des termes. » (Poirier L., 2001, p.58)

Plusieurs autres stratégies pourraient être ici énoncées. L'important est de faire découvrir ces stratégies aux élèves éprouvant des difficultés. Pourquoi ne pas profiter d'un jeu de calcul mental (exemple : combat de tables), qui intéresse généralement beaucoup les élèves, pour amener ces derniers à discuter de leurs stratégies?

En conclusion, ces nombreux exemples montrent que les enfants accordent peu de signification à ce qu'ils font au niveau des opérations. En fait, pour la majorité, la réponse est plus importante et il faut qu'elle soit bonne peu importe la façon de la trouver. Ainsi, ils répètent une technique opératoire, qui souvent n'est pas comprise, sans poser de questions car tout fonctionne. Toutefois, il est certain qu'un moment viendra où la technique opératoire ne sera pas magique. L'enfant sera démuni car les gestes étaient répétitifs mais point compris.

> « On dicte à l'enfant beaucoup de règles et de procédures qu'il applique sans associer un sens à ce qu'il fait et sans en voir la pertinence. Par conséquent, lorsque l'enfant rencontre des difficultés, il est complètement démuni n'ayant aucun recours possible (dessin, matériel, situation…) autre que l'écriture; il cherche à retrouver la règle oubliée, ayant alors recours aux conceptions qu'il a développées pour assimiler ce qu'on lui dicte. » (Bednarz et Dufour, 1986, p.31)

2.3 L'histoire des mathématiques : une piste intéressante?

De quelle façon peut-on venir en aide à l'enfant? Aujourd'hui, l'enfant est en cinquième année, cela signifie qu'il entend depuis cinq ans les mêmes consignes, qu'il répète les mêmes règles, qu'il travaille toujours au moyen d'une même technique. Comment permettre à l'enfant de dépasser ces conceptions inappropriées afin de construire de nouvelles conceptions mathématiques justes qui lui permettent de comprendre la mathématique puis d'avancer et ce, tout en demeurant motivé face à l'apprentissage et la réussite?

L'histoire de la mathématique serait peut-être une route intéressante. Comment l'histoire de la mathématique peut aider l'enfant à mieux comprendre? Serait-ce en donnant l'utilité et le sens de chacun des concepts. Comment l'histoire de la mathématique pourra-t-elle motiver les élèves au savoir mathématique? Serait-ce simplement parce que la nouveauté et la différence aiguisent la curiosité des gens? Plusieurs questions demeurent en suspend.

Maintenant, il serait pertinent de savoir si par le passé une telle expérience a été faite, est-ce que l'histoire de la mathématique a déjà fait partie de l'enseignement de cette discipline?

2.4 Une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques

Aujourd'hui, la question que l'on se pose est de savoir pourquoi les mathématiques ont de la difficulté à passer à l'école et pourquoi les résultats sont si désastreux?

> « Le rejet des mathématiques tient surtout au rôle qu'on leur fait jouer dans l'enseignement, elles sont l'instrument de la sélection. Et quand il y a dictature, il y a haine. Et c'est salutaire. » (Denis Guedj, 2000)

Plusieurs études cherchent à améliorer l'enseignement des mathématiques. Plus concrètement, il s'agit maintenant de parler de moins en moins d'enseignement, où le sujet est passif en attendant que le maître lui transmette les connaissances, pour laisser place à l'apprentissage, où il y a acquisition de connaissances par un sujet actif, au cœur de sa réussite. Ce n'est pas seulement une tendance nouvelle, c'est aussi une tendance internationale (De Guzman, 2002) que d'apprendre en faisant, une façon de faire répondant au proverbe chinois : « J'entends et j'oublie. Je vois et je me souviens. Je fais et je comprends. » (Organisation des Nations Unies, 1972, p.98) Il semble profitable que l'enfant participe activement aux apprentissages. (De Guzman (2002), Antibi (1999), Kuntz (1998))

L'I.R.E.M. (institut de recherche en enseignement des mathématiques) travaille intensivement pour améliorer le sort de la mathématique à l'école. Depuis 1978, l'inter-I.R.E.M. travaille en collaboration avec plusieurs groupes de recherches afin de répondre à un objectif bien précis voulant que nous introduisions une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. Cette idée semble fort intéressante mais est-ce uniquement son caractère nouveau qui lui donne de l'intérêt? Quels sont les avantages de cette approche? D'un autre côté, y a-t-il des désavantages à celle-ci pouvant créer de grandes difficultés ou de nouvelles ? Pour l'instant, ce que nous savons est que l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, approche certes nouvelle mais qu'il faut prendre au sérieux car des essais en France (Cerquetti-Aberkane, 1997) ont été concluants.

> « La dictature des programmes a des effets désastreux. L'histoire des mathématiques est tragiquement absente. Les théorèmes ont l'air de tomber du ciel. On apprend à l'école que les Alpes n'ont pas toujours été là, qu'elles sont nées d'un plissement géologique. Alors que les mathématiques, elles ont l'air d'avoir toujours été là : activité inhumaine, intemporelle. » (Denis Guedj, 2000, page)

La nouvelle Réforme au Québec vient mettre un accent nouveau aux dires précédents. En fait, la nouvelle Réforme, en place depuis l'an 2000, tend à vouloir donner du sens aux apprentissages et ce, par des repères culturels. Le programme répond ainsi doublement à la critique du célèbre mathématicien, chroniqueur et romancier Denis Guedj. La France comme le Québec semblent avoir confiance à l'introduction d'une perspective historique pour améliorer l'enseignement des mathématiques d'aujourd'hui. Allons voir plus loin, cherchons à en connaître davantage avant de nous prononcer.

L'I.R.E.M. affirme que l'introduction d'une perspective historique est une solution. Les penseurs de la Réforme québécoise sont, de leur côté, si certains des bénéfices de cette approche qu'ils l'ont déjà inscrite à l'intérieur du programme comme l'un des objectifs premiers : des apprentissages actuels et culturellement ancrés (Ministère de l'éducation, 2001, page 4). Maintenant, à nous de faire ressortir les avantages de cette approche nouvelle.

Pourquoi tant d'enthousiasme, quels sont les avantages de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques? Plusieurs auteurs se prononcent sur la question et donnent leur opinion. D'ailleurs, l'idée n'est pas neuve.

> « Le célèbre professeur et mathématicien Auguste De Morgan recommande, dès 1831, l'abolition pure et simple de la mémorisation des règles et des démonstrations, au profit d'une saine compréhension et de la découverte des

> mathématiques »« C'est aux USA que l'on trouve pour la première fois l'idée d'utiliser l'histoire des mathématiques dans l'enseignement en 1890. » (Colette, 1994)

La lecture des paragraphes suivants vous permettra de cibler certains avantages d'une approche historique à l'enseignement des mathématiques. Différents auteurs se sont prononcés sur le sujet par contre, nous n'avons recensé aucune étude empirique qui montre, chiffres à l'appui, les divers avantages d'une telle approche. Voici un résumé de l'ensemble des propos d'auteurs sur l'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques.

Parmi les avantages d'une telle approche, nous nous attendons à ce que l'introduction d'une perspective historique redonne du sens aux différents concepts mathématiques. Ainsi, l'enfant peut voir que les mathématiques ne sont pas uniquement une science sans vie. Enfin, cette approche montre que derrière les symboles, les chiffres, les formules... il y a une histoire qui démontre que les mathématiques ne sont pas une science dogmatique. L'enfant développe alors une nouvelle vision de cette discipline, il prend conscience de l'utilité des mathématiques, du pourquoi de son invention, du comment et bien sûr du qui (l'auteur). L'élève trouve une réponse, une réponse acceptable tant du côté chronologique, logique et assurément pédagogique. En un mot, l'enfant voit le contexte des créations, les buts visés et les motifs à l'origine des concepts (ou définition) Il constate par l'évolution et le changement, le dynamisme sous cette discipline (Colette, 1971)

> « Voyage dans le temps où elles quittent le statut de savoir figé, tombé du ciel, pour celui d'un savoir construit par l'humanité : les savoirs mathématiques n'ont pas toujours été là; ils ont été inventés et modifiés au cours de l'histoire pour résoudre des problèmes et être un instrument de réponse à des questions. Affirmer que les mathématiques ont une histoire c'est donner une image constructiviste des mathématiques, qui va à l'encontre d'une vision dogmatique de cette discipline. » (Cerquetti-Aberkane F., Rodriguez A. et Johan P., 1997, page7)

En fait, nous savons que les enfants sont curieux, avides d'en savoir toujours plus. Se retrouvant devant une situation-problème, comme certaines vécues par leurs ancêtres (les Égyptiens ou les Babyloniens ou les Grecs) et qu'ils ont dû résoudre, l'enfant voit sa curiosité naturelle s'éveiller. L'enfant prend conscience que c'est l'homme qui a créé les mathématiques alors pourquoi pas lui? Donnons la chance à l'enfant de vivre des périodes de découvertes afin qu'il puisse cerner le rôle réel des mathématiques, celui d'être un outil pour mieux comprendre la réalité. La mathématique ainsi vue comme une science en expansion, le progrès n'est jamais fini. L'enfant est actif, il est enthousiasme d'explorer les structures mathématiques qui lui permettent de mieux comprendre où ils en sont aujourd'hui.

Pourquoi est-ce si important aujourd'hui que les élèves voient et comprennent le sens de chacun des concepts mathématiques à l'étude? Pendant longtemps, l'enseignement était routinier. La méthode était simple, il s'agissait de répéter jusqu'à l'acquisition de la technique. Cet enseignement traditionnel est un conditionnement où il faut tout apprendre par cœur. La différence est que maintenant, au 21e siècle, les élèves ne voient plus la nécessité de travailler plusieurs concepts mathématiques. Prenons l'exemple de tous les algorithmes, l'élève muni d'une calculatrice peut se dispenser de cet apprentissage. En fait, pour ce dernier, les algorithmes sont sans intérêt et surtout une perte de temps en comparaison à la technologie si développée. Toutefois, les mathématiques demeurent une matière importante et à l'étude. Le but ici n'étant pas de justifier la raison d'être de la discipline à l'école mais de trouver une bonne façon d'enseigner, une didactique de la réussite. Les retours en arrière amènent les élèves à prendre conscience de la dynamique de la mathématique, cette discipline était et est toujours en action et l'enfant peut participer activement à son développement. En résumé, c'est un enseignement qui demande une plus grande activité de la part de l'élève qui lui donne des moyens, qui développe ses attitudes de raisonnement, qui lui permet d'acquérir des idées nouvelles, etc.

> « Actuellement, il y a trop de mécanismes incompréhensibles, trop de connaissances imposées aux jeunes alors que sont laissées en jachère, les facultés d'invention, d'abstraction, de construction qui sont aisément développables à ces âges. » (Hug C., 1968, page 57)

En résumé, l'introduction d'une perspective historique pourrait donner du sens aux apprentissages que fait l'enfant et du coup l'enfant verra la puissance de cette science, les progrès réalisés grâce aux découvertes mathématiques. L'histoire donne une image constructiviste des savoirs toutefois, il ne faut pas oublier que l'histoire aussi est une construction faite par l'analyse subjective des historiens. Ainsi, découvrir cette construction des savoirs permet non pas seulement de mieux apprécier la discipline mais aussi de développer les habiletés propres à la recherche : observation, hypothèse, manipulation, démonstration, communication, etc. Toutes ces habiletés ne sont-elles pas un premier pas vers l'autonomie du savoir?

Un deuxième avantage à l'introduction d'une perspective historique est que l'histoire enrichit la réflexion. Les retours en arrière permettent d'observer différents chemins empruntés par différents chercheurs et ainsi, faire l'analyse des forces et faiblesses de chacune des routes empruntées au cours de l'histoire. L'enfant acquiert alors le besoin de communiquer ses propres conclusions et d'argumenter d'une façon plus riche et pertinente. L'enfant apprend ainsi d'une façon autonome puisqu'il apprend à chercher et découvrir, avant de raisonner et peut-être créer ses propres solutions.

> « Leur intelligence éclaire les raisons qui ont permis de dégager les notions et les propriétés propres à chaque science; elle confère à ces dernières le sceau de l'Évidence. Alors ainsi convaincu du bien-fondé des éléments de la science qu'on lui présente, éprouvant peut-être à l'Instar de Pascal, le plaisir fin, excitant et joyeux de retrouver par lui-même concepts et résultats, découvrant soudain le frisson joyeux et excitant de la découverte, l'étudiant pourra-t-il adhérer à l'étude de sa science avec intérêt, si ce n'est avec ferveur ou même passion. » (Bruter, C.P., 2000, page 5)

De voir le travail et les découvertes de nombreuses personnes avant eux, est un stimulant vers la recherche pour un grand nombre d'enfants. Marcher dans les pas des anciens pour aller plus loin. Les enfants deviendront curieux, ils chercheront toujours les pourquoi et ainsi, ils apprendront. Nous l'avons dit précédemment, nous modifions ainsi l'image qu'à l'enfant des mathématiques. Cette discipline n'est plus uniquement matière pour les plus doués ou pour donner volontairement des maux de tête. Bien au contraire, c'est une discipline inventée, façonnée pour résoudre des problèmes réels.

Troisièmement, l'introduction d'une perspective historique peut grandement aider les élèves en difficulté. En fait, ce point est une suite logique aux dires ci-haut. L'histoire c'est stimulant pour les élèves en difficultés car l'histoire change le lien qu'entretient l'élève avec les savoirs à caractère mathématiques. En fait, l'élève constate que l'homme n'a pas toujours su, et que l'on a longtemps connu différemment. Nos ancêtres sont nombreux et chacun a trouvé des chemins différents. Donc, on permet enfin à l'enfant en difficulté de voir que l'erreur est humaine et qu'elle a joué un rôle majeur dans l'évolution des mathématiques. En un mot, il s'agit d'humaniser les mathématiques. Les mathématiciens, même les plus grands, ont souvent vécu des problèmes et c'est en les résolvant que le progrès apparaît. Il est probable que l'élève en conclut qu'il est tout simplement normal de rencontrer des difficultés et que c'est le travail et l'acharnement qui permet de réussir. L'histoire donne une chance à l'élève de se trouver des modèles. De plus, chaque enfant est particulier et différent de son voisin. Alors, il devient important d'individualiser et personnaliser l'apprentissage de la mathématique. Toutefois, ne pouvant se subdiviser en 28 ou 30, l'enseignant doit veiller à faire participer les élèves, faire appel à l'activité personnelle. C'est par la recherche et la compréhension du passé que l'enfant évoluera aujourd'hui.

> « Mieux vaudrait moins apprendre mais bien retenir; mieux vaudrait moins de souvenirs, mais des souvenirs complets et ordonnés. » (Hug C., 1968, page 35)

Il faut respecter le rythme de l'enfant et veiller à ce qu'il y ait compréhension sinon tout est à recommencer chaque année. Il faut prendre le temps pour gagner du temps.

Aussi, il importe de considérer l'aspect culturel visé par l'introduction d'une perspective historique. L'histoire, il s'agit là de l'ancrage de la mathématique dans la réalité. Les savoirs c'est comme la réalité, il faut lutter contre une vision ethnocentrique (tendance à valoriser un au détriment de l'ensemble) et c'est l'histoire qui nous le permet. En fait, l'histoire nous permet de constater que c'est tous ensembles, en ressortant les points positifs que chacun a découvert, que nous pouvons faire évoluer la société, le monde. Donc, par cet aspect, on peut évidemment valoriser l'intégration des matières. Quel en est l'avantage? C'est simple, l'enfant parfois peu stimulé par la mathématique s'implique au départ uniquement par son intérêt pour le second ou le troisième volet (histoire, français, géographie, etc.) Puis, progressivement il découvre la mathématique, cette science comme on le sait dynamique.

Il y aurait un autre point positif qui entrerait en ligne de compte lorsque l'on pense à l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, un point qui a de l'importance au primaire. Au moment où l'enfant donne du sens aux savoirs en prenant conscience que les savoirs sont en fait les résultats d'une activité humaine, où l'enfant entrevoit la diversité des approches et qu'il peut faire des choix, où l'enfant à la liberté dans la façon d'aborder et de diriger son travail mathématique, où il découvre la culture sous la mathématique… chez l'enfant naît le plaisir de faire des mathématiques, de découvrir les mathématiques. Plusieurs auteurs font un lien entre l'introduction d'une perspective historique et une motivation accrue chez l'élève. (Colette, 1994, Diemes, 1965, Gaulin, 1972, Hug, 1968, ONU, 1972, Cerquetti-Aberkane, 2001, etc.)

> « Faire des efforts pour initier à l'apprentissage à partir de problèmes et situations variées. Afin que les élèves deviennent plus motivés et plus concernés par l'apprentissage de la mathématique, et par la suite pour développer une meilleure compréhension des concepts mathématiques et des relations, les faire mieux retenir et transférer, les enseignants

> utilisent davantage des situations de problèmes pour initier à l'apprentissage de nouveaux sujets. » (Organisation des Nations Unies, 1972, page 105)

Il faut intéresser les élèves, aller chercher leur participation et pour ce, il faut stimuler leur intérêt par du nouveau. Est-ce que l'école doit conserver cette image de cours intensif, de sérieux, d'obligation,... cette image qui fait peur à l'élève. Si nous questionnons l'élève, nous apprenons que dans un premier temps il veut comprendre mais il veut aussi s'amuser, être surpris. L'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques permet de répondre aux attentes de l'élève car l'histoire c'est l'illustration du changement, alors toujours du nouveau. Puis, nous sommes motivés lorsque nous avons une estime de soi positif, lorsque nous réussissons et nous l'avons vu, l'histoire pourrait aider les élèves en difficulté. Aussi, cet intérêt pour l'histoire ne serait-il pas un point de départ pour l'intégration des matières? Les élèves captivés chercheront sûrement à tout connaître des différents peuples qui ont façonné notre histoire. L'intégration des matières permet à chaque élève d'y trouver son intérêt : musique, mathématique, français, danse, langue, géographie, etc. Les élèves deviennent curieux et désireux d'en savoir plus.

> « Faire sentir que l'époque où se situe une activité à ses caractéristiques propres, différentes de l'époque d'une autre activité. Puisque les différentes époques de l'histoire se démarque les unes des autres par leur architecture, leur musique, etc., il faut utiliser ces différences pour accentuer le sentiment d'évolution que peuvent transmettre nos activités mathématiques à saveur historique. » (Charbonneau, L., 2002)

En résumé, « *l'individu a besoin, avant tout de mieux se comprendre : une connaissance compréhensible, c'est essentiellement une connaissance utilisable.* » (Pallascio, 1995, page 816) L'introduction d'une perspective historique, si l'on se fie à plusieurs auteurs, pourrait être une solution intéressante.

D'un autre côté, il y a aussi les professeurs. Est-ce aussi un plus pour ces derniers que d'introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques? Avantage ou désavantage? Il faut lire ce qui suit.

Au premier coup d'œil, il est possible de croire que les professeurs peuvent profiter de l'histoire des mathématiques. L'histoire donne des indices importants sur le choix des meilleures méthodes pour présenter les différents concepts mathématiques. Aussi, le professeur peut remarquer les difficultés rencontrées par les chercheurs et ainsi donner une aide plus pertinente aux élèves, sachant ce qu'ils auront à surmonter. L'histoire devient pour le maître un outil de démonstration et d'aide. Puis, l'histoire est de même une aventure pour l'enseignant. Ce dernier ne sait pas tout et il apprend avec ses élèves. Georges Ifrah est demeuré surpris par une question mathématique, posée par un élève, dont il ne connaissait pas la réponse. L'histoire l'a intéressée, il fut si curieux qu'il a écrit deux tomes sur l'histoire des chiffres. (Georges Ifrah, 1994)

Toutefois, il ne faut par craindre de nommer aussi les difficultés pouvant se présenter. Premièrement, il est important de s'assurer de la véracité des informations que l'on transmet aux élèves. Pour ce, l'enseignant se verra souvent devant l'obligation de faire quelques recherches avant ses cours. De plus, l'enseignant devra s'assurer que les informations qu'il transmet seront comprises par les élèves. Plus concrètement, il importe de savoir qu'il existe des étapes de la construction du temps historique chez les élèves du primaire. : « Il est illusoire de trouver un temps historique bien établi avant d'avoir atteint 20 ans. Au primaire, les aspects pouvant être touchés : Évocation du passé et Étude du changement. » (Charbonneau, L., 2002) Évidemment, cette planification des situations didactiques demande du temps. Les enseignants manquent déjà souvent de temps et seront probablement découragés face à cette éventualité. Rien n'est parfait!

2.5 Question de recherche

Les études citées portent surtout sur des expériences réalisées en France. Au Québec, le nouveau programme instaure cette idée d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. Par extension des observations rapportées à cet égard, la présente recherche répondra à la question suivante :

Est-ce que l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, et concrètement pour l'algorithme usuel de la multiplication, favorise la compréhension de cet algorithme (et les concepts mathématiques sous-jacents) chez l'élève?

Méthodologie

CHAPITRE III
MÉTHODOLOGIE

Le présent travail a pour objectif l'intégration d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. Plus concrètement, nous voulons faire participer une classe de cinquième à une expérimentation impliquant l'histoire des mathématiques et l'algorithme usuel de la multiplication. Par l'histoire, nous croyons qu'il est probable que l'élève s'investira davantage et améliorera sa compréhension face à l'algorithme.

3.1 Description des sujets

La présente étude porte sur une classe du primaire. Il s'agit d'une classe de cinquième année, première année du troisième cycle. Le groupe-classe est l'échantillon de cette présente étude. C'est une classe où nous retrouvons 28 élèves. Il s'agit de 16 garçons et 12 filles âgés entre 10 et 12 ans.

L'école se situe à Montréal, dans le quartier Ahunstic. Il s'agit d'un milieu multiethnique et dans cette classe se retrouvent des enfants de différentes cultures: espagnole, arabe, québécoise, américaine, portugaise, etc. Le milieu est aussi caractérisé par la grande diversité du revenu des familles. Bien que le revenu économique de certaines familles soit nettement supérieur à la moyenne, il y a aussi plusieurs familles défavorisées.

Ce groupe est non seulement hétérogène du point de vue économique et culturel mais il l'est aussi au niveau académique. En fait, il y coexiste différents rythmes d'apprentissage. Certains élèves ont une facilité pour acquérir les nouveaux apprentissages scolaires alors que d'autres sont en très grandes difficultés. Les difficultés s'expliquent par les diverses raisons suivantes. Premièrement, un certain nombre de ces élèves ont malheureusement connu une fin d'année antérieure difficile. L'année dernière, leur enseignante, tombée malade, s'est absentée plusieurs mois puis, ils ont eu plusieurs remplaçants et ainsi, peu de stabilité. Ceci a eu des conséquences directes sur leurs apprentissages mathématiques. Certains disent ne pas avoir fait de mathématiques durant plus de deux mois. Deuxièmement, il faut connaître le milieu familial de chacun; pour plusieurs familles la langue française n'est pas leur langue maternelle et parfois, ce n'est pas la langue couramment parlée à la maison. Évidemment, cette difficulté se ressent lors des apprentissages, ces élèves éprouvant des difficultés à comprendre les consignes. Puis, il faut ajouter à cela que les parents ne peuvent pas toujours donner l'aide nécessaire à leurs enfants. Troisièmement, quelques élèves sont nouvellement arrivés au Québec et ceci fait en sorte qu'ils doivent s'adapter au milieu et simultanément, ils doivent s'adapter au système scolaire québécois. C'est beaucoup de nouveauté et ce, en même temps que de devoir répondre à son rôle d'élève. Quatrièmement, ce groupe-classe a une dynamique explosive, en fait la grande majorité des enfants de la classe aiment quand ça bouge autour d'eux, ils apprécient les surprises et la nouveauté et ils adorent lorsqu'ils sont impliqués. En fait, lorsque les élèves sont passifs, à l'écoute ou en attente d'une réponse prochaine, ils perdent patience et dérangent, soit en parlant ou se levant sans raison. Toutefois, ces élèves aiment travailler s'ils sentent que leur travail est valorisé et s'ils sentent que leurs investissements peuvent faire avancer les choses. Dynamiques, impliqués certes, ces élèves le sont si leur participation est sollicitée.

Il faut prendre un temps pour observer son groupe et chercher à le connaître. Il est important de trouver les forces et les faiblesses de chacun pour mieux travailler avec eux et mieux les accompagner dans leurs apprentissages. Un élève ce n'est pas le miroir de l'ensemble des élèves, chaque élève est différent par son passé, ses buts, sa culture, son histoire, etc. Ainsi, faut-il croire qu'il y a une seule façon d'apprendre?

La situation didactique ici en question s'intéresse à l'opération de multiplication et les concepts qui y sont sous-entendus. Au sujet de cette matière, les élèves s'expriment : « *De mon côté, je ne comprends pas, j'ai jamais la bonne réponse et je ne sais pas pourquoi.* » « *Je sais que j'ai la bonne technique mais je ne peux pas expliquer celle-ci. Toutefois, j'ai généralement la bonne réponse.* » « *Moi, je n'ai pas de problème avec l'opération de la multiplication.* » « *C'est une technique, il faut faire comme on l'a appris.* » « *La multiplication c'est plusieurs petits détails à considérer pour obtenir la bonne réponse, il faut les connaître et les mettre en application.* » « *C'est toujours la même chose.* » « *Je ne sais même pas pourquoi on apprend cela, je ne vois pas l'utilité.* » Il s'agit ici de quelques commentaires recueillis des enfants avant l'expérimentation. Nous remarquons la diversité des dires, certains s'attardent sur la technique à reproduire, d'autres discutent de l'utilité, quelques-uns accordent de l'importance uniquement aux résultats, etc. Toutefois, ils ont affirmé n'avoir observé qu'une seule technique, chaque année c'est la même technique qui est répétée : « *Serait-il possible de multiplier différemment?* » Puis, si nous observons les résultats des élèves, nous remarquons que la multiplication n'est pas une notion mathématique acquise par la majorité des élèves de la classe.

Après avoir cerné la réalité de la classe, il est important d'observer les difficultés de chaque élève afin d'élaborer une situation didactique voulant répondre aux besoins de tous et voulant les aider dans la construction de leurs connaissances mathématiques. Dans la section qui suit, les outils d'expérimentation sont présentés.

3.2 Les outils de l'expérimentation

Pour répondre à notre question de départ, nous ferons appel à quelques outils tels un pré-test, un post-test et des ateliers.

3.2.1 Le pré-test

Un pré-test c'est l'occasion de vérifier le niveau des élèves et particulièrement, d'observer leurs forces et leurs difficultés. Le pré-test a pour but de nous donner des indices sur ce qui est acquis et ce qui doit être retravaillé et cela pour nous permettre de construire une expérimentation qui pourrait mieux répondre aux besoins des élèves. Le lecteur trouvera le pré-test à l'annexe A.

Le pré-test a pour objectif de cerner les conceptions des élèves au sujet des concepts mathématiques relatifs à la numération et à la multiplication. Pourquoi les concepts de la numération, n'était-il pas question de multiplication? En fait, les concepts de la numération sont à la base de l'algorithme de la multiplication. Pour amener l'enfant à comprendre l'algorithme, il importe de cibler où il y a incompréhension. Ainsi, il faut faire quelques retours en arrière pour découvrir les erreurs des enfants. Le pré-test est construit pour répondre à chacun des concepts de la numération : la valeur positionnelle, le zéro, le groupement, la base 10. Il y a aussi quelques items au sujet de l'algorithme de la multiplication. Voici en quelques mots les raisons expliquant la présence de chacune des questions de cette évaluation formative.

#1) Il faut dénombrer les collections dessinées. Puis, il faut trouver une façon de comparer rapidement ces collections.

Cette première question demandant à l'enfant de dénombrer et de comparer de grandes collections dessinées a pour but de remarquer si l'enfant utilise ou pas la stratégie du regroupement.

> « Beaucoup d'enfants ne voient pas l'intérêt de regrouper, ils se fient à l'apparence ou ont recours au comptage un à un. Même si certains enfants regroupent, ils n'utilisent pas ce regroupement pour trouver directement le nombre associé à cette collection. Ils vont compter la collection. Ces enfants voient la pertinence de regrouper pour compter plus vite, mais ils ne voient pas que l'écriture du nombre est un code qui découle directement des groupements. » (Bednarz et Dufour, 1986, p. 25)

Les diverses réponses possibles ou attendues des élèves

Plusieurs conduites sont ici possibles. Dans un premier temps, attardons-nous aux manifestations qui indiqueraient qu'un élève fait appel au regroupement, que les groupements soient de 5, 10 ou 20, peu importe, la stratégie visée par l'élève répond au mêmes objectifs, celui de compter plus rapidement et d'éviter des erreurs étant donné la grandeur de la collection. La stratégie du regroupement est mise de l'avant puisqu'elle est en corrélation avec notre système de numération. Nous nous attendons à ce que les élèves qui utilisent une telle stratégie obtiennent la bonne réponse, toutefois des erreurs d'inattention sont toujours possibles. Voici diverses conduites possibles des élèves faisant intervenir des groupements.

- Un élève dénombre 5, 10 ou 20 éléments (dépendant du choix de ses groupements) et il entoure ceux-ci. Il répète cette action jusqu'à ce qu'il ait dénombré tous les éléments de la collection présentée. Finalement, il compte le nombre d'ensembles et y ajoute les éléments en surplus, n'étant pas assez nombreux pour faire un groupement supplémentaire (unités).

- Un élève dénombre 5, 10 ou 20 éléments. Une fois ce nombre atteint, l'élève trace un trait sur un papier. Il recommence de zéro le décompte jusqu'à 5, 10 ou 20. Une fois de plus, il trace un trait et il recommence. Finalement, il n'aura plus qu'à additionner tous les traits pour connaître le cardinal de la collection.
- Un élève dénombre 5, 10 ou 20 éléments. Ensuite, il inscrit au-dessus du dernier élément la valeur du groupement. Il continue mais recommençant toujours le dénombrement à zéro. Cependant, lorsqu'il a terminé un second sous-ensemble, il fait mentalement l'addition des deux groupements et inscrit ce nouveau total partiel au-dessus du dernier élément la valeur de groupements jusqu'à maintenant dénombré. (Par exemple, imaginons que l'élève opte pour des groupements de 10. Au premier ensemble, il inscrira 10, au deuxième ensemble il inscrira 20 bien qu'il ait compté uniquement 10 éléments, il fait l'addition des deux sous ensembles. Ensuite, il inscrira 30, 40, 50, etc.).

Tous les élèves n'opteront pas pour la stratégie du regroupement. Quelles seraient alors les conduites possibles des élèves?

- Certains élèves pourraient effectuer uniquement un balayage visuel. Cela signifie qu'ils arrondissent la valeur de la collection. Souvent, ils dénombreront la première rangée et cette réponse partielle deviendra celle de chacune des rangées suivantes. Il est possible que le balayage visuel soit encore plus approximatif, l'élève pourrait uniquement observer les deux collections côte à côte et par l'apparence les comparer. Cependant, cette stratégie ne considère pas la grosseur des éléments ou la distance entre ceux-ci.
- Quelques élèves pourraient avoir recours à des regroupements mais n'opteront pas pour une base significative. Par exemple, des élèves pourraient utiliser des groupements par deux, une base trop petite ou dénombrer demeurera une question de mémorisation et de concentration. Ou, dans le cas contraire, des élèves pourraient valoriser des groupements de 50 ou même 100. Dans ce cas, les collections étant trop grandes, l'élève doit dénombrer un par un les éléments.
- Plusieurs élèves pourraient décider de dénombrer les éléments un à un.

- D'autres élèves pourraient dénombrer un à un les éléments d'une rangée et inscrire le total à l'extrémité de celle-ci. Ensuite, il dénombre les éléments de la seconde rangée en recommençant le décompte de zéro. Il inscrit une fois de plus le résultat à l'extrémité de la rangée. Une fois toutes les rangées dénombrées, l'élève doit additionner tous les résultats partiels pour connaître la valeur de la collection. Certains élèves pourraient utiliser le principe de cette stratégie mais en changeant légèrement la technique afin d'éviter une addition à plusieurs termes. En fait, l'élève dénombre les éléments d'une rangée, il inscrit le total à l'extrémité de la rangée. Cependant, lors du dénombrement de la deuxième rangée et les suivantes, l'élève poursuit le comptage des éléments du nombre auquel il s'est arrêté à la rangée précédente. Pourquoi inscrit-il le résultat de chacune des rangées? Il s'agit pour l'élève de points de repère.
- Certains élèves pourraient peut-être faire différents groupements, en rapport avec leur perception personnelle de la disposition des objets à l'intérieur de la collection.

#2) Il faut trouver le nombre de dizaines et de centaines qu'il y a en tout dans les nombres qui suivent.

Cette deuxième question est importante car elle permet de constater si l'enfant comprend réellement le sens de chacune des positions. Est-ce que l'enfant considère les regroupements lorsqu'il analyse un nombre ?

> « L'enfant voit une séquence de chiffres, il interprète l'écriture en termes de découpage, d'ordre, et écarte toute signification véritable accordée à la position en termes de groupements. » (Bednarz et Dufour, 1986, p. 22)

Les diverses réponses possibles ou attendues des élèves

La présence de ce numéro s'explique aisément, il est question de savoir si l'élève accorde ou pas une valeur aux différentes positions des chiffres à l'intérieur d'un nombre.

Ce concept n'est pas toujours compris des élèves et provoque de grandes difficultés. Comment réagiront les élèves face aux problèmes suivants.

- Évidemment, certains élèves n'ont pas de difficultés et ont très bien assimilé le principe de groupement, véritable signification accordée à chacune des positions. Ainsi, l'élève cible le chiffre de la position exigée et y ajoute la valeur des chiffres de positions supérieures.

Toutefois, quelles sont les diverses réponses attendues, mais cette fois les réponses erronées? Est-il possible de les expliciter?

- Certains élèves pourraient uniquement donner le chiffre retrouvé à la position demandée par la question. Ces élèves interprètent alors l'écriture en termes de découpage et d'ordre.
- D'autres élèves pourraient faire erreur sur la position demandée. Ainsi, il est important de chercher à savoir si l'erreur en est une d'inattention ou est-ce une erreur d'incompréhension des différentes positions et du concept de groupements sous-entendu?
- Quelques élèves pourraient se remémorer le truc souvent enseigné où il s'agit de trouver à l'intérieur du nombre la position demandée, puis de réécrire tous les chiffres se trouvant…. à la gauche ou à la droite de cette position? Les élèves ont en mémoire le truc, mais n'ayant pas une compréhension réelle de la valeur des positions, ils opteront pour l'inscription des positions plus petites à celle demandée; un essai non fructueux.
- Plusieurs élèves pourraient arrondir les nombres plutôt que de donner le nombre de dizaines ou de centaines présentes. Plus concrètement, cela signifie que l'élève cible la position demandée, inscrit les chiffres aux positions plus grandes mais les positions plus petites sont aussi considérées puisque l'élève y inscrit le zéro. Deux raisons peuvent expliquer ce comportement. Premièrement, ces élèves ne démêlent pas les termes du vocabulaire mathématique enseignés, ils répètent des actions déjà vues sans en connaître la signification et c'est ce qui expliquerait qu'ils arrondissent. Deuxièmement, il est possible que certains élèves placent un zéro aux positions inférieures puisque pour ces derniers, le zéro est un symbole sans valeur.

Deux nombres (questions c) et d)) sous-entendent une difficulté supplémentaire, c'est pourquoi il serait possible de rencontrer de nouveaux comportements chez les élèves non énoncés précédemment. C'est donc la présence d'un zéro (d) 9067) ou l'absence d'un symbole, un chiffre (c) 89), à la position interrogée qui occasionnent des interrogations nouvelles chez l'élève.

- Plusieurs manuels dans lesquels les élèves font un grand nombre d'exercices présentent constamment un même type de problèmes. Il s'agit alors d'un entraînement pour l'enfant jusqu'au développement de certains automatismes. Il est plutôt rare que l'élève doive répondre « aucune » à une question, un « nombre » est toujours attendu et ainsi, recherché. Ceci explique pourquoi plusieurs élèves préfèreraient écrire « 8 », lorsque nous leur demandons le nombre de centaines en tout dans le nombre « 89 ».
- Puis, concernant le numéro d) 9067, le zéro à la position des centaines gêne les élèves. Lorsque nous demandons combien il y a de centaines en tout, il est probable que quelques élèves répondent 0 ou 9. Ceux qui répondront 0 s'expliqueront en disant qu'il n'y a pas de centaines. L'absence d'un chiffre à cette position leur faisant oublier que 9 unités de mille équivalent à 90 centaines, ils oublient de voir une position en termes de groupements. Puis, ceux qui inscriront 9 diront sûrement que le zéro signifie l'absence, l'absence de centaines. Toutefois, par habitude sûrement, ils inscrivent les 9 milliers car le truc si souvent répété demande de considérer toutes les positions supérieures.

  Il serait aussi possible, suivant la logique donnée ci-haut, qu'à la question : Combien il y a de dizaines en tout pour ce même nombre (9067)?, les élèves fassent erreur en répondant 6 ou 96.

#3) Il faut effectuer les soustractions et les additions suivantes.

Cette troisième question est utile pour observer les conceptions rattachées à la retenue et l'emprunt. Il faut savoir si l'enfant comprend ce qu'il fait ou s'il ne répète pas uniquement la technique opératoire.

> *« Une procédure efficace pour traiter les opérations dans le cas de grands nombres est alors une procédure (collection regroupée), où chacun des chiffres intervenant dans l'écriture doit être interprété en termes de groupements. »* (Bednarz et Dufour, 1986, p. 31)

Les diverses réponses possibles ou attendues des élèves

L'algorithme de la soustraction qui implique quelques concepts de la numération. De plus, la soustraction est un algorithme que les élèves travaillent depuis la première année. À quoi devons-nous nous attendre en ce qui à trait aux réponses des élèves?

- Certains élèves résoudront cette soustraction par la technique habituelle, soit en commençant par les unités et empruntant si nécessaire à l'unité plus grande.

Maintenant, attardons-nous à chacune des soustractions individuellement pour faire ressortir des erreurs possibles des élèves.

La première soustraction demande de soustraire 4756 au nombre 6003.

- Quelques élèves seront embarassés par la présence des zéros consécutifs. Ne pouvant emprunter aux dizaines pour combler le manque d'unités, ils emprunteront aux milliers mais cet emprunt est donné directement aux unités, sans considérer les dizaines et les centaines. Donc, un millier est pour ces élèves un total de 10 unités. Puis, chaque emprunt suivant est toujours fait aux milliers. Ou, certains pourraient inscrire le chiffre 9 aux centaines et aux dizaines par habitude, voyant cette étape souvent lors de soustractions antérieures.

Exemple :

345 1 1 1	5 9 9 1
6 003	6 003
- 4 756	- 4 756
0 357	1 247

D'un autre côté, des élèves soustrairont les plus petits chiffres des plus grands sans considérer leur emplacement.

Exemple :

$$
\begin{array}{r}
6\,003 \\
-\ \underline{4\,756} \\
2\,753
\end{array}
$$

La deuxième soustraction demandée est celle voulant que l'on soustrait 128 au nombre 3152. Toutefois, une consigne supplémentaire s'ajoute, celle d'illustrer l'abaque pour résoudre cette soustraction.

- Des élèves ne l'utilisent pas. En fait, ils calculent sur une feuille brouillon avant d'inscrire la réponse à l'aide des boules. D'un autre côté, certains élèves pourraient emprunter des boules à l'unité plus grande, mais empruntant la différence pour faire dix plutôt que dix nouvelles boules. Aussi, il est possible de croire que l'absence de boules (un peu comme un zéro au niveau du nombre) invite l'élève à laisser de côté la valeur de cette branche de l'abaque.

La troisième soustraction demande d'enlever 5 534 au nombre 7 437. Cette soustraction semble présenter moins de difficultés que les précédentes. À quoi faut-il s'attendre? Il faut croire que des problèmes semblables sont à prévoir : mauvais emprunt, saut d'une position, soustraction du plus petit par le plus grand, peu importe leur emplacement, erreur d'inattention, problèmes dus aux retenues, les tables posent problème, etc.

#4) Il faut arrondir les nombres suivants à la centaine et à l'unité de mille près.

L'arrondissement est souvent essentiel, mais ignoré par plusieurs enfants. Arrondir c'est permettre de prévoir l'ordre de grandeur des résultats et ainsi, éviter des erreurs d'inattention.

> *« Le calcul mental devenant un support au calcul écrit. »*
> (Louise Poirier)

Les diverses réponses possibles ou attendues des élèves

Une grande majorité des élèves n'utilisent pas l'arrondissement afin de valider leurs réponses lors de calculs importants, est-ce parce qu'ils n'en voient pas l'utilité ou est-ce parce qu'ils ne savent pas arrondir? À l'intérieur du pré-test fut inséré une question sur l'arrondissement pour faire ressortir les comportements des élèves. À quoi pouvons-nous nous attendre?

- Il est clair que certains élèves n'ont aucune difficulté à arrondir différents nombres à des positions différentes. D'ailleurs, ces élèves utilisent souvent cette stratégie pour vérifier leur réponse lors d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division.

Toutefois, dans le cas contraire, voici quelques réponses erronées auxquelles nous nous attendons pour ce numéro.

- Plusieurs élèves pourraient arrondir uniquement vers le bas (Nombre plus petit, par exemple; 527 655 = 527 000, arrondis la l'unité de mille près) ou ils pourraient arrondir uniquement vers le haut (Nombre plus grand, par exemple; 527 434 = 528 000, arrondis à l'unité de mille près). C'est la mémoire visuelle de l'enfant qui entre en jeu ici pour expliquer ce comportement. L'élève tente de se remémorer la nature des réponses vues antérieurement pour un même problème et se souvient que lorsqu'il est question d'arrondir, la réponse contient toujours une série de zéros aux positions inférieures à celle demandée.
- Quelques élèves pourraient simplement faire une erreur sur la position.
- Certains élèves pourraient arrondir uniquement la position voisine à la position demandée. Par exemple, si la question demande : Arrondir 1467 à la centaine près? L'élève inscrirait pour réponse : 1507. Il est certain que ces derniers ne voient pas l'utilité de l'arrondissement; arrondir pour calculer rapidement, mentalement afin de connaître l'ordre de grandeur de la réponse de l'algorithme demandé. Ils se souviennent de la technique sans pour autant la comprendre.

Cette quatrième question, au sujet de l'arrondissement, propose trois nombres différents à arrondir à des positions différentes. Le troisième nombre (9999) posera probablement plus de difficulté étant donné la présence de 9 consécutifs. Comment réagiront les élèves?

- Quelques élèves arrondiront vers le bas afin d'éviter les difficultés.
- Certains élèves ne répondront pas à la question. Ces derniers savent qu'il faut arrondir vers le haut mais n'y parvenant pas, ils préfèrent laisser un espace blanc que de donner une réponse qu'ils savent inexacte.
- D'autres élèves pourraient arrondir vers le haut, le 9 devient 10 et c'est ce qu'ils inscrivent. Par exemple, s'il faut arrondir 9999 à la centaine près, l'élève inscrirait : 91000. Ces derniers ne voient pas le groupement obligatoire vu notre système décimal. Aussi, il faudrait ajouter que ces élèves ne considèrent pas le rôle de l'arrondissement puis leur réponse n'est pas d'un même ordre de grandeur.

#5) Il faut effectuer les multiplications suivantes.

Cette cinquième et dernière question permet de cibler les difficultés de l'enfant relatives à l'algorithme de multiplication. Il est clair, qu'en analysant les calculs des enfants, il est possible de sous-entendre leurs difficultés. Ainsi, la multiplication permet de rendre compte de différents concepts énoncés ci-dessus et simultanément, d'observer les conceptions réelles des enfants.

<u>Les diverses réponses possibles ou attendues des élèves</u>

L'algorithme de la multiplication sous-entend plusieurs connaissances mathématiques différentes : la technique de calcul, les propriétés de la multiplication, la connaissance des tables de multiplication, les concepts de la numération, l'algorithme de l'addition et ses tables, etc. Parmi cet ensemble des connaissances, y en a-t-il certaines qui sont davantage problématiques? Tentons de raisonner comme les élèves...

Au sujet des multiplications impliquant au multiplicateur un nombre tel que 10, 100, 1000 ou ...

- Certains élèves connaissent depuis longtemps le truc d'ajouter un, deux ou trois zéros, tout ceci dépendant de la nature du multiplicateur. Ils connaissent le truc mais puisque le développement complet du raisonnement n'est pas illustré, le comprennent-ils? Il faudra interroger ces élèves.

- Certains élèves font la technique habituelle. Cela signifie qu'ils multiplient tous les chiffres au multiplicande par chaque zéro du multiplicateur. Plus long diront quelques-uns mais l'important est d'arriver au même point.
- Quelques élèves ont en mémoire le truc souvent répété. Toutefois, ils n'ont qu'un aperçu. Ainsi, ces élèves ajoutent un zéro à la réponse mais sans considérer si le multiplicateur est 10, 100 ou 1000.
- Des élèves pourraient utiliser la technique habituelle mais le zéro n'ayant pour eux aucune valeur.

  Exemple :
  ```
     7036
   X  100
     0000
     0000
     7036
     7036
  ```

Est-ce la valeur du zéro qui pose problème ou est-ce la valeur du un qui est incomprise? Des questions à poser aux élèves pour mieux comprendre où ils en sont.

Les quatre autres multiplications prévues au moment du pré-test font intervenir des nombres de grandeurs situées dans les centaines ou les milliers. Comment les élèves réagiront-ils à cela? Il est simple de prévoir que peu d'élèves, pour ne pas dire aucun, n'utiliseront des techniques personnelles. Ne voulant pas initier ici un débat de la pédagogie présente, il est cependant possible d'observer qu'une grande majorité des professeurs enseignent la multiplication en illustrant la technique et répétant celle-ci.

- Plusieurs élèves résoudront la multiplication présentée en utilisant la technique habituelle apprise. Évidemment, il faut s'attendre à de bonnes et de mauvaises réponses bien que la technique soit correctement inscrite. Quelles sont les erreurs possibles? Premièrement, il se peut que des erreurs de tables (d'addition ou de multiplication) ressortent. Deuxièmement, l'oubli, probablement une faute d'inattention, d'un produit partiel.

  Exemple :
  ```
    873
   X 45
   4365
   3320
   7685
  ```

Cet élève aurait omis de multiplier les quatre dizaines au multiplicateur par le sept dizaines au multiplicande. Finalement, il est fréquent qu'un élève oublie la retenue qu'il a inscrit un peu plus tôt.

- Au sujet de la retenue, un oubli est possible, mais il faut savoir que certains élèves ne comprennent pas son rôle. En fait, deux situations sont imaginables concernant le rôle de la retenue, présente lors de la multiplication et lors de l'addition des produits partiels.

Exemple :

93	93
X 64	X 64
372	3612
5480	54180
5852	57792

Au premier exemple, l'élève n'a pas inscrit les retenues, il a donc omis de les considérer. Toutefois, le deuxième exemple est différent, l'élève inscrit au niveau des produits partiels, la retenue. Ainsi, cet élève ne considère pas la valeur de position des produits partiels suivants.

- Plusieurs élèves ont des difficultés concernant la valeur de position des réponses des produits partiels d'une multiplication. Ces derniers ne considèrent pas la position des chiffres multipliés.

Exemple :

4787	4787
X 224	X 224
9148	9148
9574	95740
9574	95740
19296	200628

Il faut remarquer que lors du premier exemple, l'élève semble garder en mémoire certaines traces de la technique habituelle, il se souvient entre autre qu'il faut inscrire un zéro lors du deuxième produit partiel. Cependant, peut-on affirmer qu'il y a compréhension de la technique? L'élève ne semble pas comprendre puisqu'il ne réapplique pas le principe au niveau des milliers. Pour ce qui est du deuxième exemple, l'élève ne prend pas en considération la valeur de position des chiffres au multiplicateur, ils sont tous à ses yeux des unités multipliées par des chiffres de valeur toujours plus grande. Aussi, il faudrait ajouter que tout élève dont la réponse n'est pas d'un ordre de grandeur justifiable, ne considère pas la valeur de position puisqu'il ne remarque pas que sa réponse est d'un autre ordre.

- Bien sûr quelques élèves ne voient pas la pertinence d'être propre, minutieux et organisé. Ceci occasionne des difficultés réelles. Premièrement, l'élève ne parvient pas à reconnaître la valeur des chiffres au niveau des produits partiels et il en vient à additionner des unités avec des dizaines ou des dizaines avec les centaines... Aussi, il est possible de voir certains élèves se perdre au niveau des retenues, ne prenant pas la peine de les barrer lorsqu'elles ont été utilisées.
- Finalement, il est fort possible que quelques élèves ne parviennent pas à terminer le pré-test. Ce manque de temps s'explique par une difficulté énoncée plus haut; la connaissance des tables. Un élève qui compte sur ses doigts exige plus de temps ou commet des erreurs d'inattention relative à la perte de concentration.

Ce pré-test est essentiel. Ce pré-test permettra certes d'évaluer le niveau des élèves en observant leurs forces et leurs difficultés mais il jouera aussi un rôle comparatif. Plus concrètement, cette évaluation formative est un départ et le Post-test sera l'aboutissement. En comparant les deux, nous pourrons voir l'évolution des élèves.

3.2.2 Le post-test

Le post-test est un outil qui permet, par la comparaison, de voir l'évolution des élèves. Étant très similaire au pré-test, avec un indice de difficulté légèrement supérieur, il devient plus simple d'observer si l'expérimentation a porté fruit ou non. Chacune des questions vise toujours la compréhension des concepts mathématiques de base à la multiplication, ces concepts étant liés à la numération. Nous pourrons alors constater si l'élève a compris, suite à son travail lors de l'expérimentation, les concepts mathématiques et si cette compréhension est transférable d'un exercice à un autre. De plus, si le niveau de difficulté est augmenté, c'est pour connaître aussi les progrès, savoir si l'enfant est allé plus loin.

La passation du post-test se fait deux fois plutôt qu'une. En fait, les enfants répondront au post-test une première fois aux termes de l'expérimentation, sans délai temporel. Ensuite, les élèves seront soumis à une seconde évaluation, trois mois plus tard, un post-test qui cette fois ne comprend que des multiplications. Pourquoi ce changement? Simplement pour éviter des répétitions amenant alors des erreurs d'inattention, le but de la situation étant d'amener l'élève à comprendre la multiplication, nous souhaitons savoir si cela est fait ou non. Toutefois, ce deuxième post-test est prévu trois mois après l'expérimentation et sans qu'il y ait eu retour sur la matière entre temps. L'intérêt de cette mesure est de savoir si les enfants ont assimilé les concepts mathématiques sous-entendus de la multiplication. Le temps est souvent un obstacle à la mémorisation mais non à la compréhension. Ce deuxième post-test vérifiera si l'expérimentation a permis aux élèves de faire un apprentissage réel et durable. Les deux post-tests se retrouvent à l'annexe A.

3.2.3 Les ateliers

La situation didactique a pour idée première l'intégration de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi, pour répondre à ce principe il faut faire un retour en arrière nous permettant de cibler l'activité mathématique des différentes civilisations ancestrales, nous ayant laissé un héritage précieux.

La situation didactique ici présentée met en valeur, lors de la mise en situation, trois peuples anciens : les Égyptiens, les Mayas et les Chinois. Dans un premier temps, les élèves observeront les écritures anciennes et ils chercheront à comprendre leur système de numération (Ces anciens systèmes de numération sont placés en annexe B.) avant d'utiliser concrètement, en situation de calcul, ces systèmes.

Puis, une image, provenant d'un cahier de 1602 qui s'intitule *Opérations et problèmes d'arithmétiques* écrit par J. Nicolay (Cerquetti-Aberkane, F., 2002), sera l'outil principal du travail valorisant la compréhension des concepts sous-entendus de l'opération de la multiplication. Ce cahier contient essentiellement des opérations telles que des additions, soustractions, multiplications et divisions, règles de trois et divers calculs sur les monnaies et des situations d'échange de monnaie. Deux pages montrant différentes façons d'effectuer la multiplication ont été choisies (Annexe C). Elles comprennent treize multiplications effectuées de sept manières différentes.

3.2.4 Le journal de bord

Le journal de bord est un outil voulant que l'on relate à l'écrit les faits, les paroles, les gestes des acteurs entrant en jeu lors de l'expérimentation (Annexe D). Ces traces écrites permettent de ne rien omettre malgré le temps qui passe :

> « Toute recherche en éducation porte sur des événements, sur des comportements, sur des paroles et des actions, sur des pensées, des intentions qui sont éphémères, fugaces comme le vent ou immatérielles comme l'âme. Et ces événements ou ces pensées disparaissent une fois qu'ils se sont produits, si une trace, directe ou indirecte, n'en est pas construite. » (Van der Maren, 1999, p.43)

Il y a inscriptions régulières par le chercheur au journal, ces traces écrites sont importantes car elles sont le témoin du travail de chacun, des réflexions de tous. Sans instrumentation, il y a pas de trace sauf le souvenir et pouvons-nous assurer que nos souvenirs sont fidèles?

Le journal de bord devient un outil essentiel lors de l'analyse car bien que le pré-test et le post-test évalue l'évolution des élèves, il faut aussi considérer le cheminement des élèves entre ces périodes. Le journal de bord nous permet de suivre les élèves et de comprendre leur travail à chaque nouvelle étape de l'expérimentation.

> « La première validation passe par l'analyse de la documentation décrivant le déroulement de la recherche. Elle

> implique qu'une chronique, quasi quotidienne, soit tenue (un journal de bord ou journal de recherche), couvrant la succession des étapes. » (Van der Maren, 1999, p.172)

3.3 Le canevas/ les interventions prévues

La mise en situation a pour but d'amener les élèves à réaliser que les chiffres et les nombres ont une histoire. Notre système numérique a évolué pour répondre aux besoins des sociétés et pour réduire les problématiques.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est de bon augure de présenter aux enfants la thématique de l'ensemble du projet.

1) Présentation de la thématique aux élèves (15 minutes)

Durant cette première étape, du temps sera pris pour expliquer aux enfants les raisons d'un si lointain détour, de l'intégration d'une perspective historique. Cette préparation permet à ces derniers de mieux cerner le rôle qu'ils auront à jouer. L'histoire nous permet de faire des observations, des hypothèses, des généralités, des réflexions, etc. L'enfant se prépare ainsi à participer activement.

Puis, chacune des périodes prévues pour la mise en situation est d'une heure. Ce temps se subdivise en trois parties; présentation du peuple et des livres de référence s'y rapportant (Quelques titres sont déposés en annexe E, à titre d'exemples) puis, explications du travail à réaliser/ travail en équipe sur les écritures (observation et analyse)/ retour en grand groupe afin de partager nos découvertes. Il est prévu qu'il n'y ait qu'une seule période par jour afin que la concentration des élèves soit centrée sur un seul peuple et éviter la dispersion de leurs observations. Évidemment, la première journée jumellera la présentation de la thématique au travail sur l'écriture égyptienne.

2) Travail sur l'écriture égyptienne (1heure)

Quelles sont les caractéristiques de ce système de numération? Dès son apparition, la numération écrite égyptienne permet la représentation des nombres pouvant atteindre et dépasser le million : elle possède un hiéroglyphes particulier pour indiquer l'unité (un trait vertical) et chacune des six puissances de dix suivantes : 10 (symbole ressemblant à une forme d'anse semblable à un fer à cheval disposé comme une sorte de « U » majuscule à l'envers), 100 (symbole ressemblant à une spirale plus ou moins enroulée), 1000 (symbole ressemblant à une fleur de lotus munie de sa tige), 10 000 (symbole ressemblant à un doigt relevé), 100 000 (symbole ressemblant à une grenouille ou un têtard à queue bien pendante), 1 000 000 (symbole ressemblant à un homme agenouillé, levant les bras vers le ciel). Pour représenter un nombre voulu, les Égyptiens se bornaient donc à répéter le chiffre de chaque classe décimale autant de fois qu'il le fallait. Et pour cela, ils procédaient dans l'ordre des valeurs décroissantes, à partir du chiffre de la plus forte puissance de dix contenue dans ce nombre. Cette numération fut donc strictement décimale et additive.

Certes il y a beaucoup moins de conventions sous ce système (aucun zéro, pas de groupements et ni de valeur de position) mais cela ne fait-il pas en sorte qu'il soit plus lourd à travailler? Il est probable qu'en travaillant ce système de numération, les élèves rencontrent certaines difficultés. Dans un premier temps, ils verront qu'il est fastidieux d'écrire les nombres de grande valeur étant donné les répétitions exigées. Aussi, le grand nombre de symboles nécessaires pour inscrire parfois un seul nombre (exemple : 8 796) fait en sorte qu'il est impossible de connaître la nature du nombre au premier coup d'œil. L'élève se doit de dénombrer chaque ordre d'unité avant d'obtenir la valeur réelle du nombre. Évidemment, l'élève consentira à remarquer que l'écriture des hiéroglyphes exigent beaucoup d'espace.

L'observation du système égyptien permet aux enfants de voir l'utilité de nos symboles pour réduire le nombre de dessins devant être mémorisés. Puis, l'élève, pour répondre aux difficultés liées à l'espace occupé par les nombres égyptiens et la lecture de ces nombres, développera peut-être des stratégies organisationnelles. Par exemple, pour éviter l'encombrement sur une même ligne de plusieurs chiffres d'une même classe d'unités et afin de faciliter à l'œil du lecteur l'addition des valeurs correspondantes, il formera sûrement sur deux ou trois lignes superposées des petits groupes de deux, de trois ou de quatre signes identiques. La notion de groupement est mise à l'avant en étudiant ce système. D'ailleurs, les égyptiens faisaient de groupements de dix.

3) *Travail sur l'écriture chinoise* (1 heure)

Quelles sont les caractéristiques de ce système de numération? Pour exprimer les nombres, les Chinois se servent habituellement d'un système décimal comprenant treize signes fondamentaux, respectivement associés aux neuf unités et aux quatre premières puissances de dix (10, 100, 1000, 10 000). Ce système de numération est fondé sur le principe « hybride » puisque les dizaines, les centaines, les milliers et les dizaines de mille s'expriment suivant le principe multiplicatif. Aussi, pour tous les nombres intermédiaires, les Chinois procèdent-ils par addition et multiplication à la fois, en décomposant le nombre 89 654 par exemple :

8 X 10 000 + 9 X 1000 + 6 X 100 + 5 X 10 + 4

Aussi, il est important de remarquer que le système chinois a une particularité importante, il se lit comme il s'écrit, ce qui signifie que la position des symboles est signifiante pour en donner sa valeur. Puis finalement, un autre point s'ajoute, il s'agit de l'absence du zéro à l'intérieur de ce système de numération.

Ce système de numération chinois amène les élèves à réfléchir par les obstacles qu'ils auront à surmonter en travaillant celui-ci. Premièrement, les élèves auront sûrement quelques difficultés à écrire les nombres chinois, les symboles étant nouveaux et complexes. Ainsi, la lecture des nombres chinois ne sera pas plus simple, les élèves devront avoir fréquemment recours à leur légende pour se remémorer la valeur de chaque symbole illustré. Toutes les difficultés sont encore loin d'être surmontées. Les mathématiciens chinois ayant ignoré le zéro complique la situation. L'absence d'un signe spécialement conçu pour indiquer les unités manquantes pourrait donc prêter à confusion.

L'observation de ce système de numération, toujours en vigueur aujourd'hui, permet aux enfants de reconnaître quelques propriétés de la multiplication telles que l'associativité, la distributivité et la commutativité. Ce système propose aussi aux enfants une attention particulière sur le concept de regroupement puisque chaque puissance présente à l'intérieur d'un nombre est écrite et conséquemment nommée. Évidemment, la difficulté reliée à la mémorisation des symboles chinois permet à l'enfant de voir la nécessité d'un système commun à tous et ce, pour une meilleure communication. Les élèves remarquent qu'il n'est pas simple et que cela demande du temps pour s'adapter à un nouveau système, devant observer les règles qui le régissent et les symboles qui l'illustrent.

4) Travail sur l'écriture maya

Quelles sont les caractéristiques de ce système de numération? Un système de notation de base 20, muni d'un véritable zéro et dont les chiffres ont une valeur déterminée par leur position dans l'écriture des nombres. Au nombre dix-neuf, les unités du premier ordre de cette numération vigésimale étaient représentées par des symboles fort simples (des points et des traits) : de un à quatre points pour les quatre premières unités; un trait horizontal ou vertical pour 5; un, deux, trois ou quatre points placés à côté ou au-dessus du trait pour les nombres de 6 à 9; deux traits pour 19; et ainsi de suite. Chaque nombre supérieur à 20 s'écrivait ensuite sur une colonne verticale comprenant autant d'étages qu'il y avait d'ordres d'unités. Pour les nombres composés de deux ordres, on plaçait le chiffre des unités simples dans l'étage inférieur et le chiffre des vingtaines au deuxième étage. Normalement, l'étage immédiatement supérieur (la troisième position de ce système de base 20) aurait dû correspondre à des valeurs vingt fois plus grandes que celles du deuxième. Nous trouvons là, cependant, une curieuse irrégularité, le troisième étage indiquait en réalité les multiples de 360. Puis, pour les positions suivantes, on revint toutefois à une utilisation stricte de la base 20, chaque étage à partir du quatrième valant vingt fois plus que l'étage immédiatement inférieur. Aussi, en raison de l'irrégularité du troisième ordre, la quatrième position correspondait-elle aux multiples de 7 200 (20 X 360), la cinquième aux multiples de 144 000 (20 X 7200) et ainsi de suite. La base 20 est irrégulière car le système de numération des Mayas était surtout utilisé pour travailler sur les durées. Il y avait trois calendriers et l'un, comme nous, comportait 360 jours, divisé en 18 mois de 20 jours. Ainsi donc, le premier ordre indiquait les jours, le deuxième ordre les mois et le troisième ordre indiquait les années. Puis, pour que chaque chiffre restât à son étage, dans le cas où les unités d'un certain ordre viendraient à manquer, les savants mayas inventèrent un zéro (symbole semblable à un coquillage ou un coquille d'escargot).

// Cela étant compris, il importe d'observer que le document maya, en annexe C, est faux. Nous avons longtemps cru que la base vingt des mayas était régulière mais nous savons maintenant que ce n'est pas le cas. Malheureusement, le document utilisé pour l'expérimentation comportait une erreur au niveau du troisième ordre, il aurait fallu retrouver le nombre 360 plutôt que 400. Il faut en prendre note pour ne pas reproduire ce document tel quel, il est essentiel de s'assurer de la véracité des informations que nous transmettons d'où cette précision. //

Les élèves ne se plaindront probablement pas de la difficulté à représenter ou mémoriser les symboles mayas? Toutefois, ce système de numération n'est pas absout de difficultés pour les élèves. L'écriture des nombres se faisant de bas en haut est nouveau pour l'élève. Qu'y a-t-il de nouveau aussi? Évidemment, la base 20, bien qu'irrégulière, est problématique pour l'enfant. Pour connaître la nature d'un nombre donné, ce dernier doit faire correspondre chaque étage à un produit et faire l'addition de tous. Le peu de symboles nous porte à croire que ce sera plus simple, mais les élèves découvriront que c'est tout l'inverse puisque ces deux seuls symboles (le point et la trait horizontal) ont une valeur différente à chaque étage proposé.

L'observation de ce système de numération maya permet aux enfants de prendre conscience qu'il suffit de peu de nombre pour écrire un infini de nombres. La valeur de position prend tout son sens. Aussi, les enfants découvrent que le zéro des Mayas n'a pas le même rôle que celui des Babyloniens ou que le nôtre puisque la base n'est pas régulière et le fait d'écrire un zéro en bas d'un nombre donné ne le multiplie pas par la base, comme c'est le cas dans un système positionnel, de base régulière. Le sens du zéro prend ainsi son importance à leurs yeux. Finalement, les élèves, suite aux difficultés rencontrées avec la base 20 irrégulière et la sous-base 5, verront certainement les avantages d'un système de numération en base 10, une base régulière.

Évidemment, certains pourraient se poser la question à savoir quel est le lien direct à établir entre l'histoire des mathématiques et son impact possible sur une compréhension de l'algorithme usuel de la multiplication? Qu'y a-t-il exactement dans l'histoire des mathématiques, et dans l'histoire de divers systèmes de numération, qui permette de croire qu'elle puisse favoriser cette compréhension?

En réponse à cette question, il serait important de savoir que cette mise en situation en trois périodes historiques, permet aux élèves d'observer et comprendre les concepts sous-jacents à notre système de numération. Ils remarquent que certains concepts ont fait face à des obstacles pour laisser place à du nouveau. Cette évolution donne une image plus réelle et logique de notre système numérique décimal. Notre système numérique a évolué pour répondre aux besoins des sociétés et pour réduire les problématiques. En fait, nous avons maintenant un même système international pour une meilleure communication. Cependant, il faut en saisir toutes les particularités. Ainsi, il faut amener l'élève à considérer les découvertes de l'époque afin de mieux comprendre le sens et la pertinence des opérations d'aujourd'hui. Les activités suivantes inciteront l'élève à voir au-delà de ce qui est écrit, à voir la nécessité de bien saisir les concepts rattachés aux chiffres et aux nombres. Plusieurs concepts mathématiques sont sous-entendus et il faut bien les cerner pour mieux les comprendre.

Il est probable que la majorité des erreurs commises par l'élève vienne d'une mauvaise compréhension de la numération. Un bon nombre d'élèves considèrent le nombre comme étant une séquence de chiffres avec un ordre prédéterminé. Une conception aussi linéaire a bien sûr des répercussions lors de l'application d'un algorithme de calcul tel que la multiplication. Ainsi, l'enfant est démuni lorsque la technique si souvent répétée donne un résultat négatif. Il ne parvient point à cerner ses erreurs. Pour résoudre de tels problèmes, nous avons cru bon faire un retour en arrière. Ainsi, l'enfant comprendra l'origine des concepts de la numération et leur présence lors de l'application de l'algorithme de la multiplication. Il faut maintenant viser une bonne compréhension. Ce retour en arrière chez les Égyptiens, les Chinois et les Mayas permettra à l'enfant de voir l'évolution et le sens des différents concepts. Nous observons les nombres égyptiens, chinois et mayas pour faire ressortir les concepts de la base 10, du zéro et de la valeur de position.

Dans un premier temps, nous observerons les chiffres égyptiens. Ces chiffres permettront à l'enfant de voir l'utilité de nos symboles pour réduire le nombre de dessins pouvant être mémorisés. Quelles nouveautés surviennent lorsque nous nous attardons aux chiffres chinois? Le système numérique chinois a comme nous dix symboles pour représenter les chiffres, mais eux ils conçoivent les chiffres de 1 à 10 (le zéro n'existant pas et il y a un symbole différent pour le nombre 10). Toutefois, il est possible de voir apparaître de nouveaux symboles pour les centaines, les milliers, etc. Le système chinois a une particularité importante; il se lit comme il s'écrit. Finalement, l'activité sera reprise mais cette fois en valorisant les chiffres mayas. L'enfant constatera alors l'apparition d'un signe pour représenter le zéro. C'est une première. De plus, nous commençons à voir une certaine conception de la valeur de position alignée par le haut plutôt que de gauche à droite. Le concept de groupement se profile ici privilégiant la base 5 jumelée à la base 20. Lorsque nous aurons observé les principaux ancêtres des chiffres, soit le peuple égyptien, chinois et maya, nous serons davantage en mesure de comparer ces différents systèmes. C'est à ce moment précis que nous pourrons faire ressortir les avantages et les limites de chacun des systèmes observés pour comprendre la raison d'être de celui qui aura traversé le temps pour être aujourd'hui connu de tous. Le passé expliquera le pourquoi de notre système numérique.

5) Le commerce à l'époque

Toujours dans un même cadre historique, les élèves font un bond dans le passé et deviennent des gens des peuples anciens. Ils devront ainsi exercer le rôle de ces ancêtres et répondre aux exigences demandées par la vie en société et ce, en utilisant les moyens qu'ils avaient à l'époque. Il s'agit d'un jeu où l'enfant se voit marchand et ensuite, acheteur. Il doit commercer et faire la tenue des livres à l'aide des anciennes écritures. C'est un jeu amenant l'enfant à considérer les forces et les limites des systèmes de numération anciens, prendre conscience que l'évolution des sociétés oblige la transformation des outils. Cette période est conçue comme celles antérieures. Toutefois, elle est légèrement plus longue puisque les élèves font le travail individuellement et ils doivent répondre à deux tâches pratiques; explications du travail à réaliser/ créer une vente / faire un achat/ retour en grand groupe et partager l'expérience. Cette période est d'une durée de une heure trente minutes.

Cette nouvelle activité promet, nous l'espérons, un nouvel apport didactique. Nous avons observé différents systèmes numériques, nous avons comparé ces différents systèmes numériques et nous avons fait ressortir les concepts mathématiques de ces derniers. Maintenant, il s'agit de voir et comprendre les avantages de notre système numérique, ceux qui expliquent qu'il a traversé le temps et qu'il est aujourd'hui le système adopté à travers le monde. Toutefois, l'essence demeure que l'enfant soit porté à réfléchir et à trouver les raisons qui ont poussé les anciens peuples à perfectionner le système numérique jusqu'à l'obtention de celui connu aujourd'hui : le système arabe. Cette activité a ainsi pour but de faire valoir encore une fois les concepts mathématiques de la numération. Cependant, le fait de mettre l'enfant en pratique donne une chance à ce dernier de mieux cerner les inconvénients des anciens systèmes numériques car il aura vécu des difficultés reliées à ceux-ci.

En conclusion de cette section de préparation, voici deux activités qui demandent à l'enfant de construire ses apprentissages. Être actif permettra peut-être à chacun de mieux assimiler chacune des notions et ce retour en arrière permettra sûrement de voir le sens et l'utilité de tous ces concepts mathématiques.

Nous voilà maintenant au point où l'algorithme comme tel devient le centre d'intérêt. L'enfant découvrira que depuis fort longtemps on utilise des algorithmes pour résoudre des multiplications (ou pour effectuer des multiplications); un document de 1602 en est la preuve. Ce document illustre différentes façons de multiplier et nous verrons à observer chacune d'entre elles et d'analyser leur déroulement. Chacune des périodes est d'une durée approximative d'une heure trente minutes, gardant toujours la même forme : explication du travail à réaliser/ travail sur l'algorithme en équipe (vérification des calculs et analyse du raisonnement)/ retour en grand groupe et partage des découvertes.

Maintenant, nous voilà au cœur de la situation-problème, l'objectif est d'observer les différentes façons de multiplier et de comprendre celles-ci. Nous sommes en mesure de nous demander pourquoi doit-on observer de nouvelles techniques, pourquoi cela aidera-t-il les élèves? Peut-être serait-ce un nouvel élément qui provoque la confusion? Pourquoi obliger aux élèves d'avoir recours à une technique commune? Le document de 1602 démontre plus de sept manières différentes de multiplier, serait-il profitable de les présenter aux élèves? Ces derniers auraient ainsi la possibilité de mieux comprendre ou concrétiser la technique traditionnelle ou simplement d'opter pour une nouvelle façon de faire. L'important n'est-il pas que les enfants comprennent et parviennent à effectuer correctement une multiplication? Les élèves découvriront alors les avantages et inconvénients de chacune des techniques avant d'opter pour celle que chacun préfère.

Plus concrètement, il importe de prendre conscience que les enfants sont tous différents en soi, donc il est logique qu'ils apprennent différemment. Ne serait-il pas profitable de démontrer différentes façons de multiplier? Ainsi, les autres techniques peuvent trouver preneur, c'est sûrement une nouvelle solution pour les enfants en difficultés. D'un autre côté, elles sont utiles au sens qu'elles favorisent la compréhension de la technique habituelle et ses propriétés ainsi que la justification de notre algorithme. En fait, en observant et en travaillant plusieurs techniques opératoires, l'enfant se verra placé devant l'obligation d'émettre des hypothèses, valider celles-ci, imaginer et même créer afin de tenter d'expliquer la logique de certaines d'entre elles ou en expliquer les erreurs. Cette observation minutieuse est une manière d'analyser le sens et par conséquent d'aiguiser son sens critique. En résumé, il s'agit ici d'une activité intellectuelle rigoureuse car l'intérêt de ces techniques variées est de permettre un travail spécifique sur notre propre technique opératoire et sur sa signification. Or ici, pour comprendre la façon dont sont faites les opérations, il est nécessaire de s'intéresser à la disposition spatiale des chiffres dans les opérations posées et ainsi de réfléchir sur les propriétés de la multiplication. De plus, l'enfant aura à faire des approximations des résultats et des vérifications de ces mêmes résultats.

6) *Exploration du document/ le classement des méthodes/ la vérification des données du document par la méthode traditionnelle* (2 heures)

Un manuscrit historique réel est assurément un élément de motivation, suscitant l'intérêt des élèves. De plus, il suscite la réflexion puisque aucune légende ou texte n'accompagne les calculs. Alors, nous observons, nous émettons des hypothèses, tentons des calculs, etc. Le but est simplement de se familiariser avec le document.

Ensuite, nous classons les opérations selon leurs similitudes et différences. Ce classement permettra aux enfants de travailler une technique à la fois et pouvoir vérifier les hypothèses émises précédemment.

7) *La méthode inversée; équations # 3, 7, 12, 13* (1 heure 30 minutes)

Cette technique donne la chance aux enfants de vérifier une fois de plus leurs hypothèses, étant une méthode très similaire à ce qu'ils ont toujours effectué, la comparaison est plus simple. Aussi, cette méthode, étant inversée, présente immédiatement l'ordre de grandeur du résultat, il s'agit là d'une forme d'arrondissement. Par cette technique, les enfants peuvent observé au premier résultat partiel l'approximation de la réponse. Serait-ce alors une façon d'éviter les erreurs d'inattention ou de tables?

8) *La méthode du quadrillage (per gelosia); équation # 10* (1 heure 30 minutes)

Cette méthode, parfois reconnue pour être plus longue, est cependant intéressante car l'absence de mémorisation des retenues évite bien des erreurs. Les retenues des calculs intermédiaires ne sont pas présentées puisque toutes les multiplications élémentaires sont écrites. De plus, cette technique de calcul est adaptée à notre numération de position. Un autre point important s'ajoute, cette méthode est intéressante à observer et analyser car bien qu'elle semble magique il y a une logique sous-entendue. Pour comprendre sa justification, il faut revenir avec les élèves à l'algorithme opératoire usuel et s'interroger sur la provenance des différents chiffres du résultat. Les enfants doivent découvrir que l'écriture dans des cases séparées par une diagonale permet de placer les chiffres des dizaines de chaque produit partiel immédiatement dans le calcul de l'ordre supérieur pour ainsi éviter les retenue ou devoir penser au décalage d'une ligne à l'autre. Plus long mais plus sûr.

9) La méthode du losange; équations # 4, 6, 8, 9 (1 heure 30 minutes)

Il est à remarquer que ces multiplications impliquent toujours deux nombres ayant le même nombre de chiffres. Cela est nécessaire. Cette opération privilégie aussi beaucoup le concept de l'ordre de grandeur. En fait, il faut amener l'enfant à voir que cette méthode est similaire à celle du quadrillage mais elle est moins laborieuse puisqu'il n'y a pas à tracer de carré, ou faire le quadriller et ses diagonales. Cette manière de faire est intéressante pour les enfants en difficulté car une fois de plus le problème des retenues n'est pas rencontré.

10) La méthode du soleil; équation # 11 (1 heure 30 minutes)

La question à répondre est de savoir si cette méthode est applicable sur tous les algorithmes de multiplication. Est-ce que l'esthétique de cette disposition est la seule justification de cette présentation? Aux élèves de la découvrir…

11) Le retour sur l'activité dans son ensemble (1 heure)

Ce document permet aux élèves d'observer qu'il y a plusieurs algorithmes de multiplication et que chacun se vaut, l'important demeure de comprendre. Aussi, ce document permet aux élèves de prendre conscience que l'on apprend autant, sinon plus, de nos erreurs. Les treize multiplications présentées ne sont pas toutes justes mais il est tout de même possible d'en soutirer des conclusions et faire avancer nos recherches.
L'observation et le travail sur différentes méthodes risque fort d'amener l'enfant à mieux cerner la technique opératoire habituelle ou tout simplement, à valoriser une nouvelle technique.

> « Ces différentes techniques ont permis de faire réfléchir les élèves sur les moyens de vérifier su une multiplication est juste. De plus, un travail sur l'ordre de grandeur a pu aussi être

> effectué. Étudier d'autres techniques opératoires favorise la compréhension de la technique habituelle et des propriétés de la multiplication ainsi que de la justification de notre algorithme. Tenter de comprendre la démarche d'une autre personne, au travers de ses seuls écrits, permet d'émettre des hypothèses, d'essayer de les valider et oblige à mettre en œuvre imagination et créativité. Tenter d'expliquer les erreurs de quelqu'un d'autre oblige à mieux analyser les siennes et aiguise ainsi le sens critique. Élaborer une démarche correcte en partant d'une proposition erronée nécessite une activité intellectuelle rigoureuse. On est dans une vraie démarche de résolution de problèmes, démarche quoi est celle du chercheur qu'il semble nécessaire de faire entrevoir aux élèves du primaire. De plus, certaines techniques peuvent être des remédiations possibles pour les élèves en difficulté qui ne parviennent pas à effectuer convenablement les multiplications avec la technique opératoire habituelle. » (Cerquetti, F., 2002)

Cette situation didactique prend fin après deux semaines d'exploration, d'analyse et de discussion. Du début à la fin, les élèves seront actifs, ils seront au centre des apprentissages qu'ils feront. Évidemment, étant donné que les élèves sont les principaux acteurs de cette situation didactique, les durées prévues lors de l'élaboration du projet peuvent être modifiées suivant la motivation et le développement des compétences des élèves. (Pour davantage d'informations au sujet de chacune des activités de cette situation-problème, lire l'annexe F.)

3.4 <u>Le déroulement en classe</u>

Il y a planification et il y a réalité. Un certain canevas fut élaboré au départ, mais parfois il est possible de voir apparaître certains changements. Le changement c'est pour le progrès, c'est être à l'écoute des besoins des élèves ou c'est observer la réalité et prendre conscience de celle-ci. Il est à noter que le lecteur trouvera en italique les modifications apportées au canevas de base.

Mercredi le 15 janvier : Pré-test

Lundi le 20 janvier :	Travail sur les écritures égyptiennes *(2 heures)*
Mardi le 21 janvier :	Travail sur les écritures chinoises *(2 heures)*
Mercredi le 22 janvier :	Travail sur les écritures mayas *(2 heures)*
Mercredi le 22 janvier :	*Discussion en grand groupe et élaboration d'un tableau ciblant les grands concepts mathématiques et leur évolution.(2 heures)*
Jeudi le 23 janvier :	Le jeu du commerce ancien *(2 heures)*
Vendredi le 24 janvier :	*Présentation orale de certains élèves au sujet des découvertes qu'ils ont fait quant à la culture des différents peuples étudiés. (1 heure 30 minutes)*
Lundi le 27 janvier :	Exploration du document de Nicolay, *Opérations et problèmes d'arithmétiques*. Classement des différentes façons de multiplier. Travail sur l'algorithme traditionnel à des fins de vérification.
Mardi le 28 janvier :	Travail sur la méthode inversée *(2 heures)*
Mercredi le 29 janvier :	Travail sur la méthode du quadrillage *(2 heures)*
Jeudi le 30 janvier :	Travail sur la méthode du losange *(2 heures)*
Vendredi le 31 janvier :	Travail sur la méthode du soleil *(2 heures)*
Lundi le 03 février :	Retour sur les diverses activités, les avantages et les désavantages. *Questionnement sur la pédagogie?*
Jeudi le 06 février :	Période du post-test
Mardi le 06 mai :	Période du deuxième post-test

Dans un premier temps, nous remarquons que les durées furent pour une grande majorité augmentées. L'intérêt des élèves en est la cause. Les élèves demandaient parfois plus de temps pour réfléchir afin de trouver la réponse ou la logique sous-jacente puis, cela s'explique aussi par des discussions où la participation de tous était très active et le contenu riche.

De plus, suite aux trois périodes consacrées au travail des écritures anciennes, un ajout nécessaire s'est fait sentir, celui de résumer schématiquement l'évolution des nombres. Lorsque nous parlons d'évolution, nous nous attendons à une série de transformations successives. Les élèves ne pouvaient imaginer cette suite puisqu'ils avaient travaillé chaque peuple isolément. La construction de ce tableau comparatif permettait d'observer globalement l'évolution des différents concepts selon les besoins des sociétés et des obstacles rencontrés. L'enfant avait une vue d'ensemble plus réelle.

Vendredi le 24 janvier fut une journée particulièrement enrichissante, voilà un indice marquant de l'investissement des élèves lors de cette situation didactique. À leur demande, nous avons trouvé un temps pour discuter de l'histoire des peuples anciens. En fait, pour gérer les différents rythmes d'apprentissage, les élèves avaient à leur disposition des livres racontant l'histoire des peuples anciens : la culture, les mœurs et coutumes, l'architecture, la géographie, les particularités, etc. Les élèves avaient la chance de nourrir leur curiosité en feuilletant ces ouvrages de référence. Chacun semblait apprécier ces moments. Toutefois, la surprise fut encore plus grande lorsqu'ils ont demandé de partager leurs découvertes personnelles au groupe. Nous avons ainsi réservé près de deux heures pour entendre les élèves nous transmettre leurs nouvelles connaissances sur : l'Égypte, la Chine, l'Amérique centrale. De plus, un élève est venu parler des nombres spéciaux, que cela soit en mathématiques, en magie ou par superstition. Ces exposés étaient construits d'une façon tout à fait individuelle, il n'y avait aucune obligation. Toutefois, tous les élèves ont tenu à dire quelque chose, parfois c'était bref et parfois c'était un grand exposé accompagné de matériel. Peu importe, chacun a maintenant un bagage de connaissances nouveau.

Finalement, lors du retour sur l'activité dans son ensemble, les élèves ont demandé : « *Pourquoi n'a-t-on jamais observé ces différentes façons de calculer antérieurement? Avoir le choix c'est pertinent!* » La discussion a pris une tangente allant sur l'intérêt de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

Dans le chapitre suivant, chapitre IV, Analyse des résultats, nous présenterons dans un premier temps l'analyse des résultats obtenus au pré-test puis au deux post-test afin d'observer l'évolution des élèves, leurs progrès et leurs difficultés suite à une situation d'enseignement intégrant l'histoire des mathématiques.

Analyse des résultats

CHAPITRE IV
ANALYSE DES RÉSULTATS

Rappelons que cette recherche veut, dans un premier temps, intégrer l'histoire à l'enseignement des mathématiques et dans un deuxième temps, décrire dans quelle mesure cette intégration historique permet chez l'enfant une meilleure compréhension de l'algorithme de multiplication.

La présentation des résultats se divise en trois parties. Dans une première, nous décrivons globalement les erreurs des enfants lors de la passation du pré-test, sous une vue d'ensemble. Ensuite, par la description du post-test, il sera possible de voir et discuter de la progression des élèves. En dernier lieu, nous observerons cette même évolution mais cette fois, de façon plus individuelle.

4.1 Présentation des tableaux

Afin de faire ressortir les erreurs des élèves, des tableaux de données ont été conçus. Il s'agit de tableaux à double entrée. La première entrée concerne les élèves de la classe. La seconde entrée reprend divers concepts mathématiques reliés à l'algorithme de la multiplication.

Sujets de la classe	Concepts maths				
	Regrouper les éléments d'un ensemble	Valeur de position	Le rôle de la retenue ou l'emprunt/ groupement (base10)	L'arrondissement	La multiplication
A					
B					

Dans ce tableau, les colonnes correspondent aux divers concepts mathématiques reliés à la numération et à l'algorithme de multiplication et les lignes correspondent aux conduites des élèves de la classe.

L'avantage d'un tel tableau est qu'il permet une classification des réponses. Il permet de cibler rapidement les erreurs communes, les concepts posant problème ou les élèves en grandes difficultés. Une vue d'ensemble est possible ainsi qu'une vue plus détaillée pour venir en aide aux élèves. Une classification des données est faite au niveau de l'individu. (Nous retrouvons ces tableaux à l'annexe G.) et une autre au niveau du groupe (Nous retrouvons ces tableaux à l'annexe H.)

Nous avons aussi élaboré un second type de tableau, impliquant uniquement les réponses des élèves portant sur la résolution de multiplications. Ce tableau a été créé pour visualiser la fréquence (répétition) de chaque type d'erreurs. Nous retrouvons ce tableau à l'annexe I.

Les Erreurs observées au Pré-test	La Fréquence
L'organisation des calculs	5

Aucun calcul	5
Incompréhension du calcul	4
La multiplication par 100 est égale à celle par 10	9
Etc.	Etc.

L'avantage de ce tableau tient à sa simplicité et à la présence de nombres. Il se lit bien. Il est possible de le transposer en graphique pour une visualisation différente. Une fois de plus, ce tableau est réalisé après le pré-test et aussi, suite aux deux post-tests permettant ainsi de mieux visualiser la progression des élèves.

En résumé, c'est à partir de ces tableaux de données que nous pourrons faire ressortir des faits ou des résultats de l'expérimentation. Il y aura une analyse, suite à chaque test et une analyse évolutive pour marquer les changements entre le début et la fin de l'expérimentation voulant intégrer l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques.

4.2 Résultats du pré-test

Par le pré-test, nous voulions connaître les forces et les difficultés des élèves par rapport aux différents concepts sous-jacents à l'algorithme de la multiplication (annexes F et G). Les quatre premières questions de l'évaluation isolaient ces concepts pour cibler plus précisément les incompréhensions.

Aussi, vous remarquerez que les pourcentages présentés ne sont pas toujours calculés en fonction des mêmes éléments. En effet, pour les trois premières questions, tant suite au pré-test qu'au post-test, nous utilisons l'effectif total des élèves de la classe pour observer le pourcentage de réussite. Par la suite, il pourrait s'avérer intéressant de modifier les éléments à la base des pourcentages donnés, mais en temps et lieu seront précisées ces modifications.

4.2.1 Le groupement

Groupe	Concept mathématique
	Regrouper les éléments d'un ensemble
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	13 élèves ont fait fi de la stratégie du regroupement pour des méthodes d'ordre personnel. Seulement 2 de ces élèves ont obtenu les bonnes réponses. . 4 élèves ont compté un à un chaque élément d'une ligne et marquant à l'extrémité de celle-ci le total. Ensuite, ils additionnent tous les totaux partiels pour connaître le nombre total d'éléments dans chaque collection. . 6 élèves ont compté un à un tous les éléments de chaque collection. . 3 élèves tentent différents groupements : par 100 ou par 2. Des groupements peu avantageux où le dénombrement demeure favorisé.
Réussites	15 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement pour dénombrer les collections. De ces 15 élèves, 13 élèves favorisent le regroupement par 10. Puis, 2 élèves favorisent celui par 5.

Rappelons que la première question cherchait à savoir si l'élève a recours spontanément à la stratégie du regroupement pour dénombrer une collection. Les résultats démontrent que plus de la moitié des élèves de la classe regroupent les éléments pour simplifier le dénombrement. En fait, 13 élèves ont privilégié le groupement par 10 et 2 élèves ont choisi le groupement par 5. Le pourcentage de réussite de ceux qui ont valorisé la stratégie du regroupement est de 100%, ces élèves ont tous réussi à dénombrer correctement les deux collections demandées.

D'un autre côté, les élèves ayant privilégié des méthodes d'ordre personnel ont moins bien réussi, leur pourcentage de réussite étant de 23%. Deux stratégies ont été retenues par ces élèves. Une première était de compter les éléments par rangées et d'ensuite additionner ces résultats partiels. Dans ce cas, l'addition devient une difficulté supplémentaire où la place à l'erreur est plus grande. La seconde fut de dénombrer un à un tous les éléments. Ainsi, une erreur d'inattention est davantage probable, la tâche étant longue, exigeante et routinière.

4.2.2 La valeur de position

Groupe	Concept mathématique La valeur de position
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	3 élèves ont eu une erreur. 4 élèves ont eu deux erreurs. 7 élèves n'ont aucune bonne réponse. * erreur d'inattention. * la présence du zéro importune; aucune réponse n'est inscrite. * l'absence d'un chiffre à la position interrogée provoque la confusion. * erreur de position. * donne la position plutôt que le total. * arrondissement * le truc à l'inverse, cible la position et inscrit tous les chiffres plus petits.
Réussites	14 élèves ont réussi la totalité des questions, ils ont eu les 5 réponses.

La seconde question touchait le concept de valeur de position. Cette question cherchait à savoir si l'enfant voit le nombre comme étant une suite de chiffres ou s'il voit plutôt chacune des positions en terme de groupements. Cette question fut partagée dans ses résultats: 14 élèves ayant réussi cet item tandis que 14 ont éprouvé des difficultés.

Observons de plus près leurs erreurs. Les erreurs les plus fréquentes sont : l'élève ne choisit pas la bonne position (exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 1246? Réponse de l'élève : 124), l'élève donne uniquement le nombre indiqué à la position demandée plutôt que le nombre au total (exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 1246? Réponse de l'élève : 2), l'élève arrondit le nombre à la position donnée plutôt que d'en donner la quantité (exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 1246? Réponse de l'élève : 1200), l'élève s'abstient de répondre, l'élève commet une erreur d'inattention ou l'élève tente de reprendre le truc enseigné qui est de pointer la position exigée et retranscrire tous les chiffres à la gauche de celui-ci mais ne le maîtrisant pas, il l'effectue à l'envers ce qui signifie que malheureusement, l'élève a opté pour les chiffres à la droite de la position demandée

(exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 1246? Réponse de l'élève : 246)

Ces résultats semblent indiquer que pour certains élèves, le concept de la valeur de position n'est toujours pas compris puisqu'ils n'ont pas réussi à répondre convenablement à aucune question portant sur le sujet. En fait, 7 élèves correspondent à ce portrait, soit 25% des élèves de la classe. Toutefois, pouvons-nous être certains que les autres élèves ont bien saisi le concept mathématique de la valeur de position? La question est pertinente. Si le concept était bien compris, pourquoi quelques erreurs se glissent-elles par-ci et par-là? D'ailleurs, la grande majorité des erreurs se retrouvent aux questions où une difficulté supplémentaire, si petite soit-elle, s'ajoute : l'absence d'un chiffre à la position interrogée (exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 89? Réponse de l'élève : 8) ou dans un autre cas, la présence d'un zéro à l'intérieur du nombre importune (exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 9067? Réponse de l'élève : 9). Toutefois, si le concept est compris une difficulté supplémentaire ne devrait pas importuner l'élève.

Il est difficile de savoir s'il y a compréhension ou répétition d'un truc appris par cœur et souvent répété. Toutefois, une chose est certaine, il ne sera que bénéfique de revenir sur ce concept, de le découvrir.

4.2.3 L'arrondissement

Groupe	**Concept mathématique**
	L'arrondissement
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	7 élèves ont eu une erreur sur un total de quatre réponses. 5 élèves ont eu deux erreurs. 3 élèves n'ont aucune bonne réponse. 19 élèves ne donnent pas une raison valable pour justifier le recours à l'arrondissement ou ils ne se prononcent pas. Sur un total de 33 erreurs, 20 erreurs se rapportent au nombre 9999.

	* erreur d'inattention * la présence d'une suite de 9 amène l'enfant à arrondir par le bas. * arrondis toujours par le bas * arrondis par le haut mais le 9 devient 10 plutôt que de valoriser le changement de position (9999 = 91000) * erreur de position * arrondis toujours vers le haut. * arrondis la position avoisinante seulement
Réussites	13 élèves ont su arrondir les nombres à la valeur demandée sans erreur. 9 élèves donnent une raison valable pour justifier l'arrondissement.

La troisième question du pré-test portait sur l'arrondissement; comment arrondir et pourquoi? Dans un premier temps, il faut savoir que les élèves, dans un pourcentage de 73%, ne savent pas pourquoi il est utile d'arrondir et disent ne jamais vérifier leurs calculs. Malgré cela, 13 élèves sur 28 ont très bien réussi à cette question, donnant la bonne réponse aux quatre questions demandées.

Évidemment, pour d'autres, ce fut plus complexe. Avant toute chose, il importe de remarquer que sur un total de 33 erreurs, 20 d'entre elles sont attribuables au nombre 9999. Trois différentes réponses ont été observées, soit l'élève laissait l'espace de la réponse libre et s'il tentait sa chance, l'enfant arrondissait par le bas (exemple : Arrondir à la centaine près le nombre 9999. Réponse de l'élève : 9 900) ou encore, l'enfant pouvait arrondir par le haut mais ne valorisait pas le changement de position. (exemple : Arrondir à la centaine près le nombre 9999. Réponse de l'élève : 9 1000) D'autres nombres (1467 et 14207) ont aussi causé des difficultés mais dans une proportion moins grande (13 erreurs). Les erreurs fréquentes furent : erreur de position, arrondit uniquement vers le haut (exemple : arrondis à la centaine le nombre 14207. Réponse de l'élève : 14300), arrondit uniquement vers le bas (exemple : Arrondis à la centaine le nombre 1467. Réponse de l'élève : 1400), erreur d'inattention ou arrondit uniquement la position avoisinante (exemple : arrondis à la centaine le nombre 1467. Réponse de l'élève : 1507)

Maintenant, les questions étant plus complexes, portant sur l'algorithme de la soustraction et celui de la multiplication, cela nécessite un degré plus accru de précision pour bien cerner l'évolution des élèves. En ce sens, les pourcentages suivants tiennent compte d'un nouvel élément. Concrètement, les pourcentages présentés ci-dessous ont désormais pour référence le nombre total d'erreurs commises par les élèves.

Cela ne signifie pas pour autant que nous ne tenions pas à connaître le pourcentage de réussite de l'ensemble des élèves de la classe. Bien au contraire, ces statistiques seront regroupées ultérieurement, au moment de l'analyse de l'évolution de chaque élève (section 4.4 L'évolution du pré-test au post-test).

4.2.4 L'algorithme de la soustraction.

Groupe	Concept mathématique Le rôle de la retenue ou de l'emprunt/ groupement (base 10)
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	6 élèves ont eu une erreur sur un total de trois équations. 7 élèves ont eu deux erreurs. 4 élèves n'ont aucune bonne réponse. Sur un total de 32 erreurs, la soustraction avec le support de l'abaque a occasionné 13 erreurs. Puis, concernant la soustraction qui met en jeu la présence d'un double zéro avec nécessité d'emprunt, nous comptons 12 erreurs. Finalement, pour ce qui est de la troisième soustraction, sans difficulté supplémentaire aux emprunts, 7 élèves se sont trompés. * l'emprunt à faire sur deux zéros de suite importune, il emprunte aux milliers pour donner 10 centaines ainsi que 10 dizaines et 10 unités. * oublie de considérer l'emprunt, celui-ci n'étant pas inscrit (organisation) * emprunt inutile, la soustraction étant possible sans. * erreur de calcul mental. * une absence de boules (sur l'abaque) au niveau des centaines signifie pour l'enfant le retrait de cette position ou un arrêt à cette position (différence entre l'illustration de l'abaque et la réponse donnée.) (la réponse devait être 3024 mais on trouve 324 ou même 24) * un emprunt est fait sans toutefois l'ajouter à la valeur déjà en position * pas d'abaque ou le dessin sans utilisation pour autant * soustraction du plus petit chiffre par le grand chiffre sans considérer sa position, parfois le nombre du bas ou le nombre du haut * oublie la soustraction d'une position
Réussites	11 élèves ont réussi les 3 équations demandées.

Les nombres de chaque soustraction ont été soigneusement choisis. En fait, avec la première soustraction nous avions l'intention d'observer si l'élève considère le zéro et la valeur de chacune des positions, étant obligé d'emprunter à l'unité de mille pour quelques unités (6003 – 4756). La seconde soustraction demandait à l'enfant l'illustration sur l'abaque. Cette fois-ci, nous cherchions à observer si l'enfant comprend réellement le groupement, étant obligé de dessiner chaque
emprunt. Finalement, la troisième soustraction (4578 – 3892) est plus simple, elle tient justement à connaître le niveau des élèves.

Puis, 11 élèves sur un total de 28 (39% de la classe) ont eu les trois bonnes réponses. Maintenant, il serait intéressant de connaître le pourcentage de réussite de chaque soustraction prise individuellement : l'algorithme 6003-4756 a été réussi à 61%, la soustraction sur l'abaque obtient un pourcentage de 61% et la troisième soustraction, 4578 – 3892, a été réussie à 79%. Maintenant, observons chacune des soustractions individuellement pour cibler les erreurs des élèves et voir s'il y a des répétitions.

La première soustraction avait pour difficulté la présence consécutive de deux zéros. Comment ont réagi les élèves? Un élève a bien tenté d'effectuer la soustraction demandée, il a écrit des calculs mais ses calculs étaient incompréhensibles. Un autre élève a évité le problème en soustrayant le plus petit chiffre du plus grand peu importe à quel nombre il appartenait (exemple : 6003-4756= 2753). Un élève ne se s'est remémoré la technique utilisée lors de soustractions antérieures et a tenté de retranscrire ce qu'il avait en mémoire, la démarche est ressemblante sans pour autant être juste.

(exemple : 5 9 9 9

$$\begin{array}{r} 6\,003 \\ \underline{-\ \ 4\,756} \\ 1\,243 \end{array}$$
)

Cinq élèves ont emprunté comme cela se devait aux milliers, n'ayant pas suffisamment d'unités. Toutefois, ils ont passé outre la position des dizaines et des centaines. Puis, au niveau des dizaines, le problème revient et l'élève une fois de plus le résout en empruntant à nouveau à l'unité de mille, mais ne considérant toujours pas les positions entre elles, soit ici les centaines….

(exemple : 345 10 10 13

    6 003
-   4 756
    0 357 ou 1357)

La quatrième solution observée sur les feuilles des enfants fut celle du double emprunt. Une fois de plus, tout porte à croire que ce raisonnement découle d'une habitude, d'un truc appris que l'on tente de répéter. Un élève a raisonné ainsi.

(exemple :

  5 99   8 13
  ~~6~~ ~~00~~3   5 9~~93~~
- 4 756   ensuite   - 4 756

Finalement, deux élèves par inattention ou par un manque d'organisation, ont omis d'inscrire les emprunts et ainsi, ils les ont oubliées.

(exemple :   9 9 1
    6 003
-   4 756
    2 247)

Ensuite, nous présentons une seconde soustraction qui demande à l'élève d'illustrer son raisonnement sur un abaque. Ce support, pourtant une aide, a provoqué le désarroi chez plusieurs. Commençons par les erreurs où les explications et exemples ne sont pas nécessaires pour bien comprendre. Ainsi, un élève n'a pas répondu, il a laissé l'espace blanc. Un autre a très bien réussi l'exercice mais malheureusement, étant plus ou moins organisé, il n'a pas retranscrit correctement l'équation à réaliser. Puis, un élève a résolu l'équation sans toutefois utiliser l'abaque, il a passé ainsi à côté du travail exigé. Nous parlons ici de cas isolés. Voici maintenant les erreurs les plus souvent répétées lors de la résolution de la soustraction faisant appel à l'abaque :

- Deux élèves ont fait des emprunts inutiles. Ils empruntaient dix boules à la position voisine bien qu'il y en avait déjà suffisamment pour effectuer la soustraction.

(Exemple : 2 10
0 14 ou 2 10
4 12 4 12
3 **15**2 ou **31**52
- 128 - 128
2 924 2 924)

- Quatre élèves ont emprunté tel que convenu, à l'endroit précis. Cependant, ces derniers n'ont pas inscrit dix boules supplémentaires, ils ont plutôt ajouté un nombre x de boules afin d'en avoir au total dix sur la tige.

(Exemple : 4 10
3 15~~2~~
- 128
3 022)

- Deux élèves ont laissé de côté certaines positions lors de l'écriture de la réponse. Plus concrètement, la réponse attendue était 3 024. Ainsi, il est simple de visualiser que sur la tige des centaines, nous ne retrouvons aucune boule. Cela étant dit, les élèves n'ont pas considéré cette tige. Bien que la réponse illustrée sur l'abaque était juste, la réponse écrite était erronée. (324 et même 24) Ces élèves ont-ils simplement arrondi pour vérifier leur réponse?

Finalement, la troisième soustraction, considérée plus simple, nous permet de chercher des erreurs nouvelles. Comme précédemment, deux élèves ont soustrait le plus petit chiffre du plus grand peu importe dans quel nombre est placé ce chiffre.

(Exemple : 4 **578**
- 3 **892**
1 326)

Un élève a une fois de plus oublié d'inscrire ses emprunts et par conséquent ne les a pas utilisés.

(Exemple : 14 1
4 578
- 3 892
1 686)

Malheureusement, quelquefois il est difficile de comprendre ce qu'a fait l'élève puisqu'il n'a pas laissé de trace nous permettant de suivre son raisonnement. Toutefois, parfois nous comprenons, comme c'est le cas ici, en portant une attention plus minutieuse aux calculs. (L'élève a emprunté sur le 4 puis a ajouté 10 à chaque position nécessitant un emprunt) Cependant, dans le cas contraire, il faut demander à l'élève d'expliciter sa démarche afin de lui venir en aide.

(Exemple : 4 578
\- 3 892
786 (aucun emprunt, ni retenue et encore moins un dessin)

Un élève a bien sûr vu la facilité du calcul mais il a fait quelques erreurs de tables.

(Exemple : **3/ 14/ 17**
4 578
\- 3 892
586)

Finalement, comme lors de l'équation précédente, un élève n'a pas emprunté 10 unités aux dizaines ou dix dizaines aux centaines mais il a plutôt emprunté la différence pour atteindre ce groupement de dix.

(Exemple : **3 10**
4 10
4 ~~57~~8
\- 3 892
216)

Nous remarquons ainsi que la soustraction, une opération que les élèves ont apprise au tout début de leur cours primaire, fait intervenir plusieurs concepts mathématiques : la signification du zéro, la valeur de position et le groupement en base 10. La soustraction demande ainsi à l'élève de réinvestir cet ensemble de concepts préalablement vu (les concepts) isolément. Cette nouvelle exigence nous permet de mieux cerner la compréhension des élèves au niveau pratique.

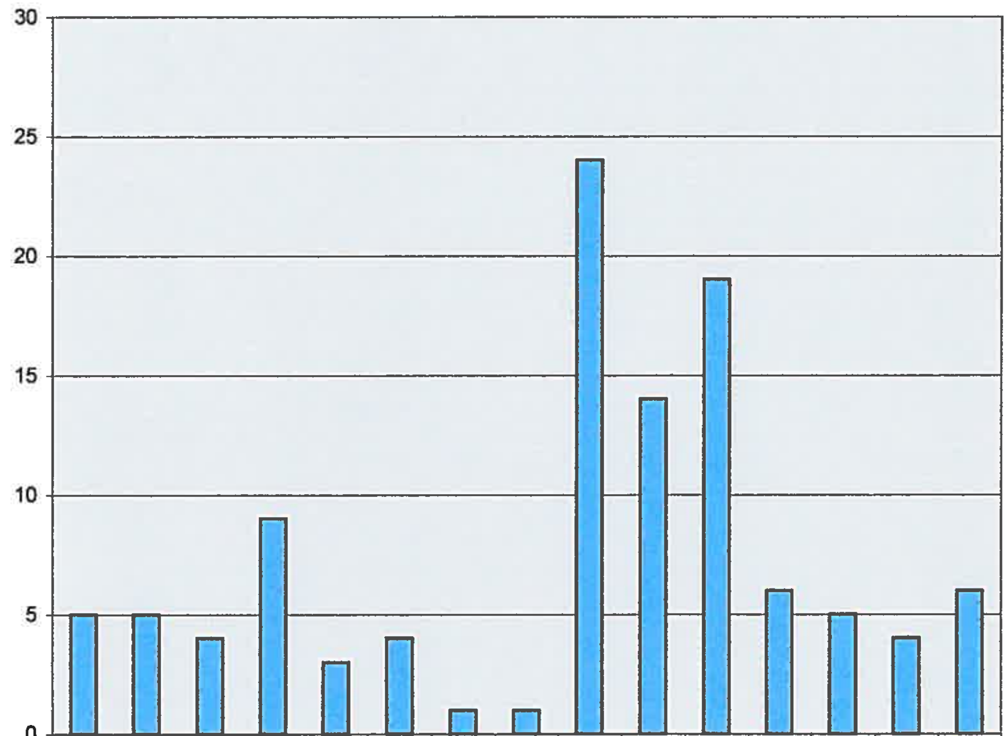
Une fois encore, les pourcentage ici présentés cherchent à comparer entre elles les différentes erreurs commises par les élèves de la classe. Ceci étant dit, les pourcentages sont calculés en fonction d'un même élément, soit en fonction du nombre total d'erreurs commises.

4.2.5 L'algorithme de la multiplication

Pour la section qui suit, nous utilisons des graphiques qui illustrent la fréquence des erreurs des élèves. Aussi, il est parfois possible que nous communiquions des pourcentages, ceux-ci ciblent la place d'une erreur en particulier par rapport à l'ensemble des erreurs.

Les Erreurs observées au Pré-test	
A)	L'organisation des calculs
B)	Aucun calcul
C)	Incompréhension du calcul
D)	La multiplication par 100 est égale à celle par 10
E)	La multiplication par 10 ou par 100 est égale à celle par 1
F)	L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicande
G)	L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicateur
H)	Un chiffre est multiplié à deux reprises
I)	Erreur de tables
J)	Ne respecte pas la valeur des chiffres du multiplicateur
K)	Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de la multiplication
L)	La retenue est placée au niveau de la réponse; pas de groupement
M)	Erreur de tables au niveau de l'addition des produits partiels
N)	Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de l'addition de produits partiels
O)	Apparition d'une virgule lors de multiplication de nombres entiers

L'algorithme de la multiplication: Pré-test



	A)	B)	C)	D)	E)	F)	G)	H)	I)	J)	K)	L)	M)	N)	O)
La Fréquence	5	5	4	9	3	4	1	1	24	14	19	6	5	4	6

En observant attentivement les travaux des élèves, il est possible de faire ressortir plus de quinze erreurs différentes allant de l'organisation de la démarche (5%) jusqu'à l'ajout incompris d'une virgule (5%, mais le pourcentage est peu pertinent, puisqu'il s'agit du même élève ayant reproduit à six reprises ce comportement). Évidemment, ces différents types d'erreurs ne sont pas de même niveau. Des erreurs de tables de multiplications (erreur la plus fréquente avec un pourcentage de 22%) ou de tables d'additions (5%) ne viennent pas à l'encontre de la compréhension de l'algorithme. Toutefois, il faut sensibiliser les élèves à celles-ci puisque lorsque les tables ne sont pas connues des élèves, le travail est plus exigeant pour ces derniers. Il y a aussi les erreurs d'inattention: l'oubli d'un chiffre lors de la multiplication au niveau du multiplicande (4%) ou au niveau du multiplicateur (1%), un chiffre multiplié à deux reprises (1%).

Puis, se présentent les erreurs plus importantes, non pas qu'elles fassent perdre davantage de points car d'un côté comme de l'autre l'élève n'a pas la réponse, sauf que les erreurs suivantes touchent la compréhension des élèves de l'algorithme de la multiplication. Ces erreurs sont généralement plus complexes à corriger. Souvent, il est nécessaire de faire quelques retours en arrière, sur des concepts mathématiques de base. Quelles sont ces erreurs? La multiplication par 100 est égale à celle par 10 (8%) ou la multiplication par 10 et par 100 est égale à celle par 1 (3%). Ces erreurs illustrent clairement que l'enfant ne donne pas une valeur réelle au symbole du zéro et indirectement à la position des chiffres d'un nombre. D'ailleurs, plusieurs élèves ne respectent pas la valeur de position des chiffres du multiplicateur (13%; troisième erreur en importance).

(Exemple : $\begin{array}{r} 873 \\ \underline{\text{X}\ \ 45} \\ 4365 \\ \underline{3492} \end{array}$)

Voici un exemple qui illustre que pour l'élève le chiffre 4 n'a pas sa juste valeur qui serait de 40 et le produit partiel ainsi 120 dont nous retenons une centaine. Il faudra ainsi revenir sur la signification véritable accordée à la position en termes de groupements : unités, dizaines, centaines, etc. Aussi, certains élèves n'inscrivent pas leurs retenues et ne les considèrent pas au niveau de la multiplication (17%, deuxième erreur le plus souvent rencontrée) et au niveau de l'addition des produits partiels (4%). L'une des grandes difficultés avec ce type d'erreur est de savoir si l'élève l'a commise par inattention et dans ce cas, il suffit de prévenir l'élève d'être plus attentif, minutieux et mettre plus de rigueur au travail. D'un autre côté, cette erreur pourrait aussi en être une d'incompréhension du groupement en base dix. Ce qui est en fait aussi le cas pour les élèves qui inscrivent la retenue au niveau des produits partiels (5%).

(Exemple : $\begin{array}{r} 873 \\ \underline{\text{X}\ \ \ \ 45} \\ 403515 \\ \underline{322812} \end{array}$)

Finalement, quelques erreurs ne permettent pas une analyse très approfondie, n'ayant malheureusement pas suffisamment d'éléments pour ce faire. C'est ainsi pour les élèves qui laissent en blanc l'espace réponse (5%). Il est alors difficile de dire s'il n'a pas compris ou s'il n'a pas eu le temps de s'y pencher. Finalement dans quelques cas, des élèves ont inscrit leur démarche, celle-ci a l'aspect général de la technique habituelle mais la démarche est incompréhensible (4%).

(Exemple :
$$\begin{array}{r} 873 \\ \underline{\times \quad 45} \\ 055 \\ \underline{6020} \\ 6075 \end{array}$$

Voici un portrait des erreurs commises par les élèves de la classe lors de la première évaluation (pré-test). (Pour une vue d'ensemble, il suffit de se pencher sur le tableau récapitulatif en annexe F et G)

Les résultats obtenus au pré-test montrent que tous les concepts abordés ne sont pas maîtrisés par la majorité : l'arrondissement, la valeur de position, la présence du zéro, le groupement en base 10. Souvent, nous avons remarqué que des élèves réussissaient lorsque le concept mathématique est isolé, lorsque la question proposée exige la mise en pratique d'un seul contexte. Cependant, il n'en est plus lorsque la difficulté est plus grande (exemple : Effectuer les soustractions et additions suivantes). Aussi, les élèves ne sont pas constants dans leurs réponses, l'une bonne et la suivante non. En espérant maintenant que les résultats soient différents suite à l'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques.

4.3 L'évolution entre le pré-test et le post-test pour l'ensemble du groupe

Nous verrons maintenant l'évolution des élèves en regard à chacune des questions de l'évaluation. Des progrès sont-ils observables?

C'est un retour aux trois premières questions, mais cette fois, suite au post-test. Ainsi donc, les pourcentages présentés représentent, comme au départ, le nombre d'élèves qui ont réussi à ces question spécifiques.

4.3.1 Le regroupement en base 10

Tableau synthèse pour les erreurs au PRÉ-TEST

Groupe	**Concept mathématique** Regrouper les éléments d'un ensemble
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	13 élèves ont fait fi de la stratégie du regroupement pour des méthodes d'ordre personnel. Seulement 2 de ces élèves ont obtenu les bonnes réponses. . 4 élèves ont compté un à un chaque élément d'une ligne et marquant à l'extrémité de celle-ci le total. Ensuite, ils additionnent tous les totaux partiels pour connaître le nombre total d'éléments dans chaque collection. . 6 élèves ont compté un à un tous les éléments de chaque collection. . 3 élèves tentent différents groupements : par 100 ou par 2. Des groupements peu avantageux où le dénombrement demeure favorisé.
Réussites	15 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement pour dénombrer les collections. De ces 15 élèves, 13 élèves favorisent le regroupement par 10. Puis, 2 élèves favorisent celui par 5.

Tableau synthèse pour les erreurs au POST-TEST #1

Groupe	**Concept mathématique** Regrouper les éléments d'un ensemble
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	. 3 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement par 10 pour dénombrer les collections mais ils ont fait de petites erreurs et n'ont pas la réponse finale. . 2 élèves disent avoir utilisé la stratégie du regroupement mais il n'y a aucune de trace de cela au niveau des collections et ils n'ont pas la réponse finale. . 2 élèves ont fait fi de la stratégie du regroupement pour des méthodes d'ordre personnel (bonds de deux) sans toutefois obtenir la bonne réponse finale.
	21 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement pour dénombrer les

Réussites	collections

Une amélioration transparaît dans les résultats. En fait, contrairement aux données du pré-test où seulement 58% avaient réussi à dénombrer correctement les deux collections, maintenant 75% des élèves ont eu la réponse exacte. Des 24 élèves qui ont eu recours au groupement, 21 ont obtenu la bonne réponse. Une distraction, vouloir terminer rapidement, la fatigue sont autant de raisons expliquant les erreurs d'inattention.

Aucun des quatre élèves n'ayant pas privilégié le groupement comme stratégie de dénombrement n'a obtenu la bonne réponse. Quelles stratégies ont-ils valorisées? Deux élèves ont opté pour du jumelage par deux. Certains pourraient dire qu'il s'agit d'un groupement mais d'une base plus petite. C'est vrai! Toutefois, le choix de la base se doit d'être judicieux. La base deux est malheureusement trop petite pour une collection dans les centaines, une telle base oblige un deuxième dénombrement presque aussi imposant et où le regroupement serait toujours privilégié. Il ne faut pas oublier que la stratégie du groupement a pour objectif de simplifier le dénombrement. En ce qui a trait aux deux autres élèves, ils disaient avoir utilisé la stratégie du regroupement mais il n'y a aucune trace de cela au niveau des collections. Ainsi, nous remarquons que le terme est connu mais il demeure à utiliser la stratégie, en voir son utilité.

En résumé, les élèves ont ajouté à leur bagage mathématique une stratégie supplémentaire, remarquant que grâce à celle-ci, le pourcentage de réussite pour répondre à un dénombrement est supérieur, 88% des élèves ayant utilisé cette stratégie ont réussi le problème contre 0% pour ceux qui ne l'ont pas utilisé.

4.3.2 La valeur de position

Tableau synthèse pour les erreurs au PRÉ-TEST

Groupe	Concept mathématique La valeur de position
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	3 élèves ont eu une erreur. 4 élèves ont eu deux erreurs. 7 élèves n'ont aucune bonne réponse. * erreur d'inattention. * la présence du zéro importune; aucune réponse n'est inscrite. * l'absence d'un chiffre à la position interrogée provoque la confusion. * erreur de position. * donne la position plutôt que le total. * arrondissement * le truc à l'inverse, cible la position et inscrit tous les chiffres plus petits.
Réussites	14 élèves ont réussi la totalité des questions, ils ont eu les 5 réponses.

Tableau synthèse pour les erreurs au POST-TEST #1

Groupe	Concept mathématique La valeur de position
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	3 élèves ont eu une erreur. 4 élèves ont eu plus d'une erreur. Les 3 élèves ayant eu une seule erreur, il s'agit pour chacun de la même erreur: 274 441, où il faut ajouter des centaines et enlever des dizaines. (il s'agissait d'une nouvelle question ne faisant pas l'objet d'une interrogation lors du pré-test) *considère seulement une partie du nombre, celles des dizaines et des centaines. * ajoute et enlève des unités plutôt que la valeur exigée. * erreur de position. Pour ce qui est des autres erreurs observées: * arrondis les nombres * donne uniquement la position * erreur de position * donne le nombre total de la valeur demandée sans cependant considérer le chiffre à cette position, considérant seulement toute supériorité.
Réussites	21 élèves ont réussi la totalité des questions, ils ont eu les 11 réponses.

Le progrès continu, une fois de plus une amélioration est observée. Plus concrètement, le pourcentage de réussite est passé de 60% à 75%. Nous ciblons ici les élèves ayant obtenu toutes les bonnes réponses.

Un second élément est à considérer, un élément qui vient nuancer les résultats; les exigences. Trois élèves ont eu une seule erreur. Cependant, leur erreur a été commise à de nouvelles questions, ne faisant pas l'objet d'une interrogation lors du pré-test (Questions : Ajoute chiffre centaines, quel nombre obtiens-tu? et enlève chiffre dizaines, quel nombre obtiens-tu?) Ainsi, en observant les erreurs de ces trois élèves nous sommes portés à dire qu'elles ne signifient pas une incompréhension chez les élèves. Bien au contraire, pour l'un, il y a erreur de position. Cela semble au premier abord important. Toutefois, il faut d'abord remarquer que l'erreur ne se répète pas. Nous croyons qu'il est ainsi possible d'affirmer que l'élève connaît le nom des différentes positions. Cependant, l'élève a, cette fois, ajouté des milliers au lieu des centaines (exemple : 247 441 + 34 centaines = 281 441). Pour l'autre élève, la question a été probablement lue trop rapidement puisqu'il a ajouté des dizaines et soustrait des centaines alors que le dernier élève a simplement considéré la position questionnée.

(Exemple : 247 441 + 34 centaines = 2508 centaines
et 247 441 – 67 dizaines = 24677 dizaines).

Puis, pour ce qui est des autres erreurs observées, nous remarquons que pour certains élèves, la compréhension demeure fragile. Bien qu'au post-test aucun élève n'a échoué complètement cette question, ils n'ont certes pas tous eu toutes les bonnes réponses. Quelles ont été ces erreurs? Certains se sont trompés au niveau de la position. D'autres ont opté pour la bonne position mais n'indiquant que le chiffre de celle-ci. (Exemple : Combien il y a de centaines en tout dans le nombre 56 034? Réponse de l'élève : 0.) Quelques-uns ont gardé en mémoire un truc sûrement entendu plus d'une fois et vu aussi à quelques reprises puisqu'ils donnent le nombre total de la valeur demandée sans cependant considérer le chiffre à cette position, considérant seulement ce qui lui est supérieur. (Exemple : Combien il y a de centaines dans le nombre 56 034? Réponse de l'élève : 56)

Ainsi, nous remarquons un moins grand nombre d'erreurs et aussi, celles-ci sont moins importantes, ne semblant pas remettre en question la compréhension des élèves.

4.3.3 L'arrondissement

Tableau synthèse pour les erreurs au PRÉ-TEST

Groupe	Concept mathématique
	L'arrondissement
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	7 élèves ont eu une erreur sur un total de quatre réponses. 5 élèves ont eu deux erreurs. 3 élèves n'ont aucune bonne réponse. 19 élèves ne donnent pas une raison valable pour justifier le recours à l'arrondissement ou ils ne se prononcent pas. Sur un total de 33 erreurs, 20 erreurs se rapportent au nombre 9999. * erreur d'inattention * la présence d'une suite de 9 amène l'enfant à arrondir par le bas. * arrondis toujours par le bas * arrondis par le haut mais le 9 devient 10 plutôt que de valoriser le changement de position (9999 = 91000) * erreur de position * arrondis toujours vers le haut. * arrondis la position avoisinante seulement
Réussites	13 élèves ont su arrondir les nombres à la valeur demandée sans erreur. 9 élèves donnent une raison valable pour justifier l'arrondissement.

Tableau synthèse pour les erreurs au POST-TEST #1

Groupe	Concept mathématique
	L'arrondissement
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	4 élèves ont eu une erreur. 3 élèves ont deux erreurs. 1 élève a eu trois erreurs. Sur un grand total de 13 erreurs, 6 erreurs sont attribuables au nombre comptant plus d'un 9: 299 959. Puis, 3 erreurs sont observées en partant du nombre 45 509. Finalement, il est possible de retrouver 4 erreurs en lien avec le nombre 18 987. * arrondis à une valeur de position différente. * arrondis vers le bas lorsqu'il est question du nombre avec plus d'un 9. * n'arrondis pas.

	* arrondis vers le bas.
Réussites	20 élèves ont su arrondir les nombres à la valeur demandée sans erreur. 18 élèves donnent une raison valable pour justifier l'arrondissement.

Au pré-test, le pourcentage de réussite était de 47% à la question portant sur le concept mathématique de l'arrondissement. Suite au post-test, le pourcentage est maintenant de 72%. De plus, à ce jour, plus de 70% des élèves de la classe voient l'utilité et l'importance d'arrondir voilà un autre changement marquant puisque seulement 39% en voyaient au départ un intérêt.

Encore une fois, il est possible de remarquer qu'un nombre mettant en jeu le chiffre 9 cause des erreurs chez plusieurs. En fait, sur un total de treize erreurs, dix sont attribuables au chiffre 9, celui-ci obligeant le regroupement et le changement de position. Il exige une fine compréhension des différents concepts mathématiques qui sont alors en interaction. Qu'observons-nous? Les élèves, qui pourtant connaissent les règles de l'arrondissement (donnant la réponse exacte aux numéros précédants), décident d'arrondir vers le bas, évitant ainsi groupement et changement de position (exemple : Arrondir 18 987 à la centaine. Réponse de l'élève : 18 900. Arrondir 299 959 à la centaine. Réponse de l'élève : 299 900) Puis, quelques élèves ont préféré s'abstenir, laissant ainsi un espace en blanc.

Puis, concernant les trois erreurs restantes, elles ne permettent pas une analyse très approfondie. Il s'agit dans chacun des cas d'une erreur se rapportant à un arrondissement à une valeur de position différente (Exemple : Arrondis à la centaine près le nombre 18987. Réponse : 18990.)

En bref, l'enfant a vu l'utilité d'arrondir et il est maintenant probable qu'il utilise plus fréquemment cette stratégie.

La soustraction et la multiplication font appel à plusieurs concepts mathématiques. Ceci est la raison qui explique pourquoi la référence des pourcentages diffère. Encore une fois, nous cherchons à cibler quelles sont les erreurs les plus fréquentes chez les élèves lorsqu'ils sont placés devant un algorithme de soustraction ou de multiplication. Les pourcentages sont ainsi calculés par rapport au total des erreurs commises par les élèves. Calculer uniquement la réussite globale des élèves de la classe serait faire fi des différents niveaux de difficultés intégrés.

4.3.4 La soustraction

Tableau synthèse pour les erreurs au PRÉ-TEST

Groupe	Concept mathématique Le rôle de la retenue ou de l'emprunt/ groupement (base 10)
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	6 élèves ont eu une erreur sur un total de trois équations. 7 élèves ont eu deux erreurs. 4 élèves n'ont aucune bonne réponse. Sur un total de 32 erreurs, la soustraction avec le support de l'abaque a occasionné 13 erreurs. Puis, concernant la soustraction qui met en jeu la présence d'un double zéro avec nécessité d'emprunt, nous comptons 12 erreurs. Finalement, pour ce qui est de la troisième soustraction, sans difficulté supplémentaire aux emprunts, 7 élèves se sont trompés. * l'emprunt à faire sur deux zéros de suite importune, il emprunte aux milliers pour donner 10 centaines ainsi que 10 dizaines et 10 unités. * oublie de considérer l'emprunt, celui-ci n'étant pas inscrit (organisation) * emprunt inutile, la soustraction étant possible sans. * erreur de calcul mental. * une absence de boules (sur l'abaque) au niveau des centaines signifie pour l'enfant le retrait de cette position ou un arrêt à cette position (différence entre l'illustration de l'abaque et la réponse donnée.) (la réponse devait être 3024 mais on trouve 324 ou même 24) * un emprunt est fait sans toutefois l'ajouter à la valeur déjà en position * pas d'abaque ou le dessin sans utilisation pour autant * soustraction du plus petit chiffre par le grand chiffre sans considérer sa position, parfois le nombre du bas ou le nombre du haut * oublie la soustraction d'une position
Réussites	11 élèves ont réussi les 3 équations demandées.

Tableau synthèse pour les erreurs au POST-TEST #1

Groupe	Concept mathématique
	Le rôle de la retenue ou de l'emprunt/ groupement (base 10)
Échecs… et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	5 élèves ont eu une seule erreur sur un total de cinq équations. 2 élèves ont eu deux erreurs. 1 élève a eu trois erreurs. 1 élève a eu quatre erreurs. Cinq équations sont proposées, il faut savoir qu'il y a un total de 16 erreurs. De cela, il y a 11 erreurs attribuables à des équations mettant en jeu des nombres à virgules. Puis, 3 erreurs se rapportent à la soustraction de 10010-7927. Finalement, l'équation 54 671-38 989 a occasionné 2 erreurs. * lors d'équation faisant appel aux nombres à virgule, l'élève fait erreur dans l'organisation de son équation, les chiffres ne sont pas placés selon leur valeur. *aucun calcul, aucune réponse. * soustraction du plus grand chiffre sur le plus petit, sans différencier sa position (parfois du plus grand nombre ou du plus petit) Évite ainsi l'emprunt.
Réussites	19 élèves ont réussi les 5 équations demandées.

Avant toute comparaison entre le post-test et le pré-test, il faut savoir que les exigences à la deuxième évaluation étaient plus grandes. En ce sens, lors du post-test l'élève avait à résoudre des soustractions impliquant des nombres à virgule. Malgré cela, une amélioration importante est à noter. Le pourcentage de réussite étant passé de 39% au moment du pré-test à 68% suite au post-test.

Nous avons proposé cinq soustractions : il y a eu au total seize erreurs dont onze commises lors d'une soustraction mettant en jeu des nombres à virgules. Il s'agissait d'une nouveauté pour plusieurs des élèves de la classe. À chaque fois, la difficulté est la même, l'élève fait une erreur dans l'organisation de son calcul.

(exemple :

$$\begin{array}{r} 0,\ 345 \\ \underline{+\ 17,\ \ \ 56} \\ 17,\ 401 \end{array}$$

)

Les entiers sont placés convenablement mais au niveau des décimaux les choses sont différentes, les chiffres ne sont pas placés selon leur valeur respective (l'alignement est fait comme pour des nombres naturels.)

Au sujet des autres fautes commises, trois explications en ressortaient. Un élève n'a, nous croyons, tout simplement pas eu le temps de compléter puisqu'il s'agissait là de la seule équation sans réponse ou démarche. Pourtant, toutes les autres équations sont réussies parfaitement, avec une démarche bien illustrée. Un second élève a réussi les deux additions mais il a fait erreur à la résolution des trois soustractions. Celui-ci a inversé les nombres, tentant de soustraire le plus grand nombre du plus petit. La démarche est toutefois bonne, emprunt et groupement sont inscrits. Cependant, arrivé à l'extrémité gauche, la valeur supérieure du nombre, l'élève soustrait le chiffre du haut au chiffre du bas, n'ayant pas autre choix.

(exemple :

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ 78,\ \cancel{2}35 \\ \underline{-\ 345,\ 170} \\ 333,\ 065 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 38\ 989 \\ \underline{-\ \ 54\ 671} \\ 24,\ 318 \end{array}$$

)

Finalement, un dernier élève semble présenter un plus grand nombre de difficultés. D'abord, il ne considère pas toujours la valeur des chiffres lorsqu'il organise ses calculs

(exemple :

$$\begin{array}{r} 0,\ 345 \\ \underline{+\ 17,\ \ \ 56} \end{array}$$

)

De plus, il soustrait souvent le plus petit chiffre du plus grand sans tenir compte du nombre auquel il fait partie

(exemple :

$$\begin{array}{r} 10\ 010 \\ \underline{-\ \ \ 7\ 927} \\ 17\ 917 \end{array}$$

)

Il fait aussi des erreurs de tables (calcul mental.)

(exemple :

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ \ \ \ \ \\ 54\ \mathbf{6}71 \\ \underline{-\ \ 38\ \mathbf{9}89} \\ \mathbf{8}\ \ \ \ \ \ \end{array}$$

)

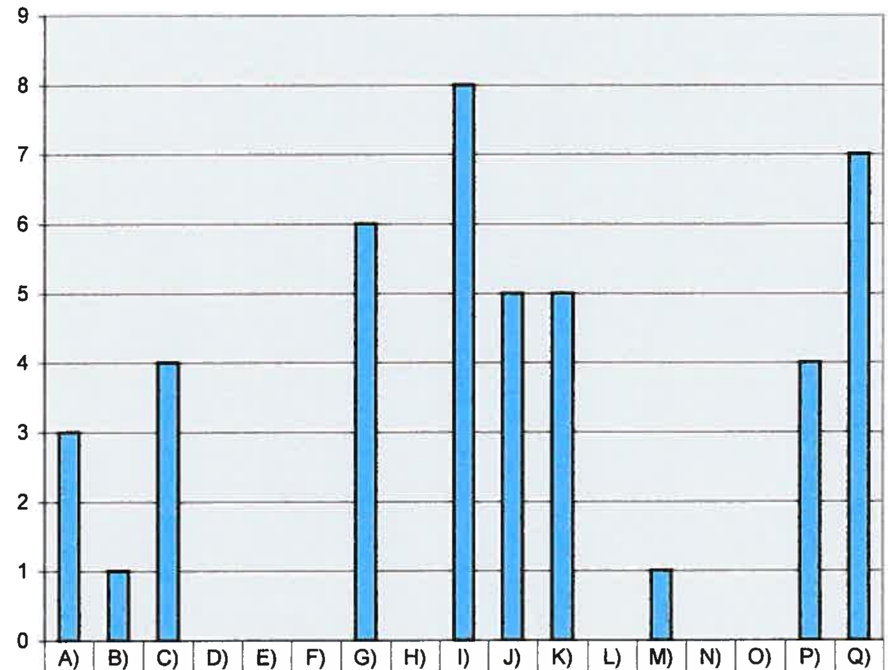
Finalement, nous pouvons dire que les élèves ont fait des progrès marqués au niveau de l'algorithme de l'addition et de la soustraction.

4.3.5 L'algorithme de la multiplication

Il suffit de jeter un œil rapide sur les graphiques comparatifs (annexe : 4 graphiques) pour s'apercevoir qu'une amélioration quasi générale s'est réalisée. Nous observons encore une fois l'évolution des erreurs de deux façons différentes mais complémentaires. D'abord, il y a toujours la fréquence qui illustre le nombre de fois qu'une erreur est répétée par les élèves. Deuxièmement, le pourcentage tend à démontrer la place de cette erreur parmi l'ensemble des erreurs dénombrées.

Les Erreurs observées au Post-test #1 et #2	
A)	L'organisation des calculs
B)	Aucun calcul
C)	Incompréhension du calcul
D)	La multiplication par 100 est égale à celle par 10
E)	La multiplication par 10 ou par 100 est égale à celle par 1
F)	L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicande
G)	L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicateur
H)	Un chiffre est multiplié à deux reprises
I)	Erreur de tables
J)	Ne respecte pas la valeur des chiffres du multiplicateur
K)	Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de la multiplication
L)	La retenue est placée au niveau de la réponse; pas de groupement
M)	Erreur de tables au niveau de l'addition des produits partiels
N)	Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de l'addition de produits partiels
O)	Apparition d'une virgule lors de multiplication de nombres entiers
P)	Calcul incomplet
Q)	La multiplication des nombres à virgule pose un problème d'organisation

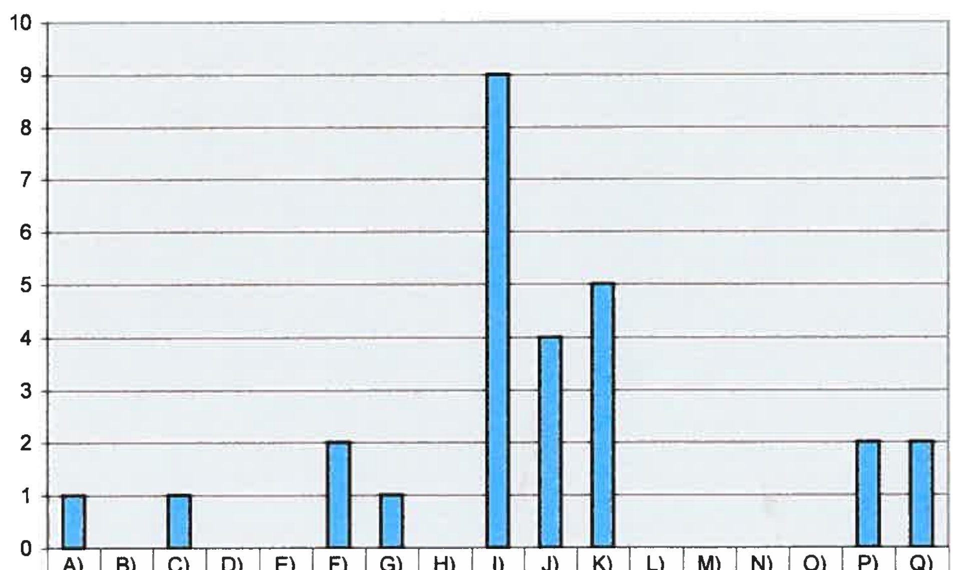
L'algorithme de la multiplication: Post-test #1



	A)	B)	C)	D)	E)	F)	G)	H)	I)	J)	K)	L)	M)	N)	O)	P)	Q)
La Fréquence des erreurs	3	1	4	0	0	0	6	0	8	5	5	0	1	0	0	4	7

Les types d'erreurs

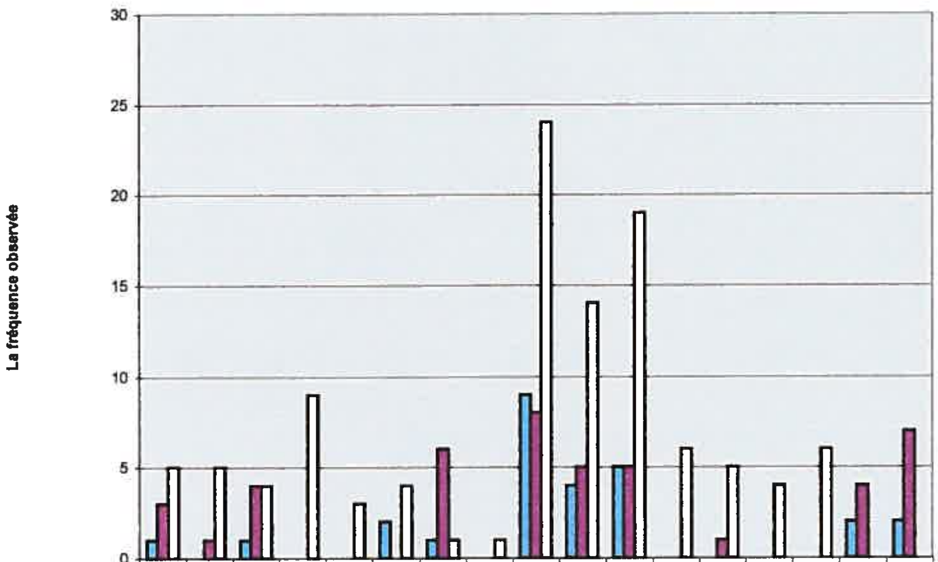
L'algorithme de la multiplication: Post-test #2



	A)	B)	C)	D)	E)	F)	G)	H)	I)	J)	K)	L)	M)	N)	O)	P)	Q)
La Fréquence	1	0	1	0	0	2	1	0	9	4	5	0	0	0	0	2	2

Les types d'erreurs

L'algorithme de la multiplication



	A)	B)	C)	D)	E)	F)	G)	H)	I)	J)	K)	L)	M)	N)	O)	P)	Q)
Post-test #2	1	0	1	0	0	2	1	0	9	4	5	0	0	0	0	2	2
Post-test #1	3	1	4	0	0	0	6	0	8	5	5	0	1	0	0	4	7
Pré-test	5	5	4	9	3	4	1	1	24	14	19	6	5	4	6		

les types d'erreurs

En fait, la fréquence de chacune des erreurs énoncées lors du pré-test est moindre sauf pour une. L'oubli d'un chiffre lors de la multiplication au niveau du multiplicateur (14%) est la seule erreur dont la fréquence est plus élevée au post-test que lors du pré-test, une erreur qui fut reproduite six fois contrairement à une seule à la première évaluation.

Aussi, les incompréhensions (9%), reflétant une démarche nébuleuse où les calculs n'ont aucune logique entre eux, sont au même niveau. Nous avions dénombré trois erreurs de ce type au pré-test puis cette fois, suite au post-test, la fréquence est identique.

Il est important de rappeler ici que le post-test est plus exigeant, le niveau de difficulté est élevé d'un cran afin de voir si les élèves sont allés au-delà des compétences attendues. En effet, le post-test proposait des multiplications mettant en jeu des nombres d'une plus grande valeur et à cela, il faut ajouter quelques multiplications impliquant des nombres à virgule. Cet ajout a fait en sorte que nous avons observé des erreurs nouvelles : des calculs incomplets (9%) (une limite de temps était cette fois en place) puis l'organisation et la place de la virgule (16%).

Pour ce qui est de toutes les autres erreurs discutées, la fréquence est moindre. Comme par exemple, il est possible d'observer que: les erreurs de tables de multiplications (18%) avaient une fréquence de 24 et maintenant celle-ci est descendue à une fréquence de 8 et pour les tables d'additions (2%) même chose de 5 à 1. Encore plus impressionnant, pour un certain nombre d'erreurs, la fréquence est nulle : « la multiplication par 100 est égale à celle par 10 » (0%) ou « la multiplication par 10 et par 100 est égale à celle par 1 » (0%), aussi l'oubli d'un chiffre lors de la multiplication au niveau un multiplicande (0%), un chiffre multiplié à deux reprises (0%), la retenue placée au niveau de la réponse (0%), l'oubli d'inscrire ou de considérer la retenue lors de l'addition de produits partiels (0%) et finalement, l'apparition incompréhensible de la virgule lors d'une multiplication de deux nombres entiers (0%).

Un autre fait intéressant à remarquer est que les erreurs touchant davantage la compréhension des différents concepts mathématiques sous-entendus par l'algorithme de la multiplication ont une fréquence moins importante au post-test et leur pourcentage est aussi à la baisse. Ces pourcentages qui nous indiquent la place de cette erreur parmi l'ensemble des erreurs commises, permet ainsi de cerner l'impact d'un concept incompris. C'est à ces endroits précisément que les élèves ont fourni plus d'efforts : les multiplications par 10 et 100 (de 11% au pré-test à 0% suite au post-test), le respect de la valeur de position des chiffres d'un nombre (de 13% au pré-test à 11% suite au post-test), la retenue au niveau de la multiplication (de 22% au pré-test à 11% suite au post-test), la retenue au niveau de l'addition (de 4% au pré-test à 0% suite au post-test). Voici des changements éloquents qui illustrent la nouvelle compréhension des élèves.

Maintenant, qu'en est-il suite au second post-test, le temps a-t-il été un obstacle? Bien au contraire, le temps a simplement permis aux élèves de consolider leurs apprentissages. Qu'est-ce qui nous permet d'affirmer ceci? Toujours le graphique des fréquences qui montre une courbe améliorée une fois de plus. La fréquence de chacune des erreurs a diminué suite au second post-test. Évidemment, comme à toutes les règles écrites l'exception existe. Les erreurs de tables sont un peu plus nombreuses, non pas que du pré-test mais bien du premier post-test, la fréquence de 8 au post-test #1 est au post-test #2 de 9.

En conclusion, les résultats montrent les progrès des élèves suite à l'expérimentation visant l'insertion de l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques.

4.4 L'évolution entre le pré-test et le post-test vu individuellement

Antérieurement, les commentaires concernaient l'ensemble du groupe, soit l'évolution de la moyenne. Maintenant, nous croyons qu'il pourrait s'avérer pertinent d'observer plus spécifiquement l'individu. Est-ce que tous les élèves ont amélioré leurs résultats? Est-ce que certains élèves forts ont malencontreusement diminué leurs notes? Est-ce que les élèves les plus faibles ont progressé? Est-ce la même évolution pour chacun? Etc. Plusieurs questions auxquelles il serait intéressant de s'arrêter et d'y réfléchir.

Pour mieux observer le cheminement des élèves, nous avons cru intéressant de les classer sous différentes catégories : élèves forts, élèves moyens et élèves en difficultés. Pour ce faire, nous avons noté leurs résultats au pré-test. Voulant être plus minutieux, nous avons aussi observé leurs résultats académiques reçus selon leurs habiletés et compétences en mathématiques en quatrième année et pour la première étape de la cinquième année (soit de septembre à novembre). Rapidement, nous avons remarqué qu'il y avait une corrélation entre ces deux classements, un élève fort est un élève qui a obtenu A dans son bulletin, un élève dit moyen est celui qui aura un B ou un C dans son bulletin puis les élèves en difficultés sont ceux qui obtiennent la note D.

4.4.1 *Élèves forts*

Il est clair qu'il faut d'abord établir les limites de la catégorie « *fort* ». Qu'entendons-nous par un élève fort? Est-ce simplement un élève qui a réussi? Évidemment, pour un tel statut, nous nous attendons à ce que ces derniers obtiennent une grande majorité de bonnes réponses. L'erreur est permise car ces élèves sont toujours en apprentissage mais disons qu'une erreur par question serait la limite proposée pour la catégorie « *fort* ». Plus concrètement, les élèves que nous avons classés dans la catégorie « élèves forts » sont des élèves ayant un A en mathématiques dans leur bulletin, lettre décrivant que l'élève ne répond pas seulement aux compétences, ils les dépassent.

Cette catégorie regroupe au total six élèves (Sujets : G, L, W, Y, AA, AB.), soit 21% des élèves de la classe. Au pré-test, quatre de ces élèves ont eu toutes les bonnes réponses. Les deux autres ont fait erreur à seulement l'une des multiplications et ce, au niveau de l'addition des produits partiels, où dans les deux cas il s'agit d'une erreur de tables. Aussi, un élève a dénombré incorrectement l'une des deux collections, dénombrant les éléments un à un il est clair que la précision est plus complexe à atteindre

Ces six élèves ont-ils connu autant de succès au post-test? Rien n'a changé. Encore une fois, quatre élèves ont répondu correctement à toutes les questions. Une fois de plus, deux élèves ont commis une seule erreur et il ne s'agit pas des deux mêmes élèves. L'un d'eux a fait erreur à l'une des multiplications, une erreur d'inattention puisqu'il s'agit de l'oubli d'un produit partiel puisque l'un des chiffres au multiplicateur n'ayant pas été considéré.

(exemple :

```
   1 2  1 34
    62 415
 X  24 686
    374490
   4993200
  37449000
 249660000   (il manque le produit partiel de 20000 X 62415 = 1248300000)
 304294690  )
```

Le second élève a fauté à la question portant sur l'arrondissement, probablement aussi une inattention car cet élève a arrondis correctement mais à une position différente. Et pourtant, il connaît bien les positions des chiffres dans un nombre puisqu'il a réussi parfaitement le numéro précédent, celui proposant différents nombres jumelés à des questions sur la valeur des chiffres aux différentes positions.

Finalement, au second post-test, le bon travail de ces élèves s'est poursuivi. Devant répondre à six multiplications, ils ont tous réussi avec succès, ne commettant aucune erreur.

4.4.2 Élèves moyens

D'abord, il faut décrire les balises que nous avions établies à cette catégorie. Deux conditions entrent en jeu. Premièrement, l'élève doit avoir au maximum deux erreurs à la dernière question, soit la résolution de multiplications. Puis, nous tenons aussi à respecter cette limite de deux erreurs pour les autres questions mais si un élève a plus de deux erreurs à une question mais que la raison qui explique celles-ci soit la même, il est possible que ce dernier soit classé au niveau « *moyen* ». Plus concrètement, les élèves que nous avons classés dans la catégorie « élèves moyens » sont des élèves ayant un B ou un C (entre 70 et 80 %) en mathématiques dans leur bulletin. La lettre B signifie que l'élève répond correctement aux compétences demandées puis la lettre C signifie que l'élève répond aux compétences voulues mais en nécessitant de l'aide.

Ainsi, nous retrouvons six élèves à l'intérieur de cette catégorie, (Sujets : C-E-F-I-O-U.) soit encore 21% des élèves de la classe. Suite au pré-test, quelles conclusions tirons-nous? Trois de ces élèves ont répondu correctement à toutes les questions exceptée la dernière (multiplications) où ils ont eu deux fautes. Pour l'un, la démarche était tout simplement incompréhensible. L'organisation des calculs sous-entend plusieurs ressemblances à la technique habituelle mais les nombres situés au niveau des produits partiels ne correspondent à aucune multiplication possible entre les chiffres des nombres proposés par l'algorithme.

(exemple :

$$\begin{array}{r} 873 \\ \underline{\text{X}\ \ 45} \\ 055 \\ \underline{6020} \\ 6075 \end{array} \quad)$$

Le second élève a pour sa part fait erreur au niveau de l'addition des produits partiels, ses retenues n'étant pas inscrites convenablement. Puis, cet oubli est aussi observé au niveau de la multiplication.

(exemple :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ 93 \\ \underline{\text{X}\ 64} \\ 372 \\ \underline{5580} \\ 5852 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ {\scriptstyle 3\ 3\ 2\ \ } \\ 4787 \\ \underline{\text{X}\ \ \ 224} \\ 19148 \\ 85740 \\ \underline{857400} \\ 952288 \end{array} \quad)$$

Nous respecterons les limites posées, mais le troisième élève aurait très bien pu faire partie de la catégorie « *fort* » puisque ces deux erreurs sont des erreurs de calcul mental.

Aussi, nous découvrons que deux élèves ont dénombré un à un les éléments des collections et bien sûr, les réponses s'avèrent fausses. Ceux-ci ont de plus commis deux fautes au niveau des multiplications, des erreurs souvent associées à un travail fait rapidement : erreur de tables (addition et multiplication) ou chiffre du multiplicande multiplié à deux reprises. Le petit dernier de cette catégorie a très bien réussi les multiplications, une seule erreur de tables fut décelée (9 X 6 = 55). Toutefois, il a eu huit fautes à la question portant sur le concept de la valeur de position, donnant la position seulement plutôt que la valeur réelle. (exemple: Combien il y a de centaine en tout dans l3 nombre 1246? Réponse de l'élève: 2) Questionné par la suite, il fut simple de prendre conscience qu'il avait lu rapidement mais qu'il avait les acquis pour répondre correctement.

Trois semaine plus tard, comment ont réagi ces élèves? Suite au post-test, nous observons les données et nous pouvons dire qu'il y a eu amélioration pour chaque élève.

En fait, pour quatre élèves, peu d'éléments à rapporter puisqu'ils ont eu toutes les bonnes réponses. En ce qui à trait aux deux autres, c'est aussi très bien. Le premier s'est trompé à la multiplication impliquant des nombres à virgule, ne la plaçant pas au bon endroit mais la démarche était par contre bonne. Le deuxième a une fois de plus dénombré un à un les éléments des collections et n'a pas donné le total exact. Il dit cependant faire des groupements mais les traces écrites n'y sont pas cohérentes.

Ensuite, cherchant à voir si les nouveaux acquis sont durables, les élèves ont répondu au second post-test. Les six élèves ont résolu correctement les six multiplications demandées.

4.4.3 Élèves en difficultés

À l'intérieur de cette catégorie se retrouvent tous les élèves montrant des difficultés (plus de deux erreurs) à l'une ou l'autre des questions puisqu'il s'agit ici de questions se rapportant aux différents concepts sous-entendus par l'algorithme de la multiplication. C'est pourquoi chaque question est importante et peut être la source des problèmes de l'élève. Un total de seize élèves fait partie de cette catégorie, (donnant ainsi une bonne raison à l'expérimentation suivante) soit 57% des élèves de la classe. Plus concrètement, les élèves que nous avons classés dans la catégorie « élèves en difficultés » sont des élèves ayant un C ou un D en mathématiques dans leur bulletin. La lettre C signifie, comme nous l'avons dit précédemment, que l'élève répond aux compétences voulues mais en nécessitant de l'aide. Toutefois, cette notation par des lettres est parfois large et une même notation peut impliquer des élèves ne connaissant pas la même progression. Cette fois-ci, la lettre C (entre 60 et 70%) cerne les élèves qui progressent mais pour qui l'enseignement individualisé est essentiel. Puis, la lettre D représente l'ensemble des élèves ne répondant pas aux compétences mathématiques voulues.

Il serait exhaustif et répétitif de dresser une liste des erreurs de chacun, ceci ayant été réalisé au niveau de l'analyse des données à l'ensemble du groupe puisque la majorité des erreurs nommées étaient celles de ces élèves. Plutôt, nous observerons l'ensemble des élèves qui ont progressé et dans quelle mesure. Puis, nous ferons la même chose pour ceux dont aucun progrès est à noter ou même, qu'un pas en arrière est observé.

4.4.3.1 Les élèves faisant preuve de grands progrès

Qui sont les élèves présentant au départ des difficultés mais ayant progressé en cours de route ? Nous pouvons en dénombrer douze qui répondent à ce portrait soit 75% des répondants à cette sous catégorie.

Dans quelle mesure ont-ils progressé? Ces élèves présentaient des difficultés de compréhension telles : la multiplication par 10 ou par 100 donne de résultats identiques, la valeur des chiffres n'étant pas respectée, aucun calcul, des démarches incompréhensibles, des retenues non inscrites ou inscrites au mauvais endroit, etc. Il s'agit d'erreurs que les élèves répétaient.

Où sont-ils rendu aujourd'hui? Ces élèves, suite au post-test, ont obtenu des résultats excellents. En fait, certains ont eu toutes les bonnes réponses et pour ce qui est des autres, nous comptabilisons uniquement une ou deux erreurs, parfois trois mais pour l'ensemble des questions. Toutefois, ces erreurs n'ont plus la même signification, la même importance parce qu'elles ne touchent plus la compréhension mais plutôt l'organisation et la minutie au travail : erreur de tables, l'oubli d'une multiplication ou dans le cas contraire, une multiplication effectuée en double. Aussi, la multiplication mettant en jeu des nombres à virgule fut plus difficile pour certains élèves.

Puis, si nous observons les résultats du second post-test, une belle continuité s'illustre. A propos des douze élèves dont nous avons discuté, dix d'entre eux ont répondu correctement aux six multiplications. Concernant les deux autres, quelques erreurs ont été notées : erreurs de tables puis non-respect de la valeur de position d'un chiffre au multiplicateur. Toutefois, ce non-respect du concept de la valeur de position a été observé en une seule occasion pour chaque élève.

(exemple :	62 415	et	34 621
	X 24 686		X 43 001
	374490		34621
	4993200		00000
	3744900 (erreur 37449000)		00000
	24966000		**10386300** (erreur 103863000)
	124830000		138484000)

4.4.3.2 Les élèves qui ont fait un premier pas vers l'avant

Dans un deuxième temps, il y a deux élèves qui ont aussi progressé mais plus discrètement que les seize présentés ci-haut. Concrètement, ces deux élèves (sujets : N et V) vivaient des difficultés sur l'ensemble des questions au début de l'expérimentation telles : soustrait les chiffres plus petits des plus grands sans tenir compte du nombre auquel ils font partie

(exemple : 4 578
- 3 892
1 326),

donne pour réponse 24 au lieu de 3024 car à la tige des centaines sur l'abaque il n'y a plus de boule ce qui signifie que la lecture de celui-ci s'arrête, ne respecte pas notre système en base 10 puisqu'il n'y a pas de groupement au moment opportun, (exemple : Arrondir le nombre 9999 à la centaine près. Réponse de l'élève : 91000), non-respect de la valeur de position des chiffres d'un nombre

(exemple : 873
X 45
4365
3492
7857),

incompréhension de la démarche lors de la résolution d'une multiplication, etc. Ces élèves ne comprenaient pas l'ensemble des concepts sous-entendus par l'algorithme de la multiplication et encore moins cet algorithme.. Suite au premier post-test, nous remarquons un grand progrès au niveau des quatre premières questions, particulièrement à la résolution des soustractions. Se penchant ensuite sur l'algorithme de la multiplication, il est préférable de parler distinctement des deux sujets. Le sujet N démontre encore certaines lacunes, tant au premier qu'au deuxième post-test, mais pour une première fois de l'année, cette élève a résolu correctement quelques-unes des multiplications. Souvent sa démarche a bien débuté mais elle n'est pas complétée, des erreurs de tables sont aussi fréquentes puis la valeur de position n'est pas encore respectée à chaque occasion. Pour ce qui est du sujet V, la progression se fit lentement. Suite au premier post-test, elle montre un progrès certain à tous les niveaux exceptés pour ce qui est de l'algorithme de la multiplication. Toutefois, nous remarquons que la démarche est plus précise mais ne connaissant pas ses tables, le taux d'erreurs est plus grand et le manque de temps lui coûte cher. Cependant, au second post-test, l'élève a obtenu cinq bonnes réponses sur une possibilité de six. Une seule erreur et il s'agit d'une erreur de tables. Voilà des beaux progrès, plus petits certes mais présents.

4.4.3.3 Les élèves sans amélioration marquée

En dernier lieu, il y a les élèves qui malheureusement n'ont pas démontré d'amélioration entre la première journée et la dernière. Leurs difficultés n'ont pas changé ni évolué. Nous parlons ici de deux élèves (sujets : H et J) ce qui signifie 7% de la classe. Ces deux élèves participaient bien aux leçons toutefois, depuis le début de leur cour primaire, ces élèves sont en difficultés. Ceux-ci sont suivis par l'orthopédagogue de l'école (déficit de l'attention, difficultés avec la langue française) ainsi que la psychologue du regroupement de la CSDM (différents problèmes familiaux) depuis leur première année à l'école. Il n'est pas possible d'affirmer avec assurance que leur piètre performance soit attribuable à leurs problèmes connexes mais ces facteurs pourraient potentiellement expliquer leurs difficultés…

L'analyse des résultats obtenus tant au pré-test qu'aux deux tests fait ressortir des progrès importants chez la grande majorité des élèves de la classe. Ces progrès relèvent-ils justement de l'intégration de l'histoire des mathématiques? Comment l'histoire vient changer la façon de voir les mathématiques pour l'élève? Y a-t-il d'autres changements à considérer? Voilà autant de questions qui seront discutées dans le chapitre suivant « Discussion ».

Discussion

CHAPITRE V
DISCUSSION

Dans un premier temps, les résultats des analyses du pré-test ainsi que les résultats principaux de nos analyses seront discutés en regard des études citées dans le contexte théorique. La méthodologie préconisée pour cette recherche sera aussi abordée. Puis, des perspectives futures sur la recherche en regard des théories abordées dans cette étude seront exposées.

Les résultats présentés dans la partie précédente nous permettent de répondre à la question de recherche à savoir qu'une perspective historique intégrée à l'enseignement des mathématiques est avantageuse et que ceci s'observe concrètement dans la réussite des élèves.

5.1 L'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement : Qu'en est-il de la compréhension ?

5.1.1 L'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques accroît la compréhension des élèves.

Ce qui ressort principalement des résultats des tests effectués par les élèves va dans le sens de ce que l'on rapporte dans la littérature portant sur l'impact de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques, à savoir que l'histoire favorise la compréhension (Cerquetti-Aberkane, Rodriguez, Johan, 1997; Colette, 1994).

Les erreurs relevées lors du pré-test et des deux post-tests, que l'analyse a permis de regrouper sous différents concepts illustrent justement une compréhension plus accrue chez la majorité des élèves. Les erreurs au pré-test touchaient davantage la compréhension des concepts sous-entendus par l'algorithme de la multiplication puisque deux des trois erreurs les plus fréquentes se retrouvaient être rattachées à la retenue (17%) et à la valeur de position des chiffres au multiplicateur (13%). Ce fut différent au post-test, les erreurs des élèves s'avéraient d'un autre ordre : la technique, l'organisation, l'inattention, la minutie, etc. Cette fois, les deux erreurs les plus fréquentes se trouvaient être : l'oubli d'un chiffre lors de la multiplication (au niveau du multiplicateur) (14%) et des erreurs de tables (18%). Aussi, il faut ajouter à ces données l'idée de fréquence parce que les erreurs ne sont pas seulement moins importantes, elles sont moins nombreuses. Concrètement, au pré-test il y a eu au total 110 erreurs tandis qu'au premier post-test, nous avons relevé 44 erreurs et ce malgré des exigences plus grandes à la seconde évaluation. Ces données nous permettent de dire que c'est réellement l'intégration de l'histoire qui a permis le progrès. Plus spécifiquement, il faudrait dire qu'il s'agit plutôt de l'intégration d'activités inspirées de l'histoire qui a permis le progrès.

Plus concrètement, l'histoire de divers systèmes de numération a favorisé la compréhension des élèves en ciblant l'évolution des concepts mathématiques. L'élève a compris par exemple l'avantage des groupements par l'observation du système Égyptien qui compte un nombre infini de symboles. Ainsi, n'est-il pas sujet à observer désormais davantage les retenues? Elles ont maintenant une signification à ses yeux. Aussi, quelques élèves ont pris connaissance de l'importance du symbole zéro lors de son apparition chez les Mayas, le zéro devient dès lors le symbole de l'absence. Ceci expliquerait pourquoi le nombre d'erreurs a diminué lors de résolution de multiplication impliquant des nombre ayant un ou plusieurs zéro puisque l'enfant ne fait plus seulement qu'observer le zéro, il le considère pour ce qu'il est. La valeur de position est un autre concept que les élèves ont vu et maintenant compris, la valeur de position ce n'est plus uniquement un terme mathématique qu'il faut connaître par cœur, l'élève sait que c'est là un point tournant de l'histoire de la numération.

Voilà quelques points qui permettent de prendre conscience de l'avantage d'intégrer l'histoire des systèmes de numération. Maintenant, que pouvons-nous dire concernant l'apport des algorithmes rencontrés? Les élèves de la classe n'ont pas seulement augmenté leurs notes aux examens, ils n'ont pas seulement apprécié les activités, ils utilisent aussi aujourd'hui, pour un certain nombre d'entre eux, un nouvel algorithme qu'ils comprennent et qui leur permet d'obtenir la réponse juste. Certains, ont préféré l'algorithme inversé car c'est pour eux une sécurité, ils voient dès le départ, au premier résultat partiel, l'approximation de leur réponse finale. Comme ils l'expriment si bien : « *Cette technique est plus cohérente, c'est logique dès le début!* » D'autres optent préalablement pour l'algorithme datant déjà de plusieurs année, le quadrillage, ainsi : « *C'est long, très long! Mais je suis certain d'obtenir la bonne réponse!* » Voilà de nouvelles méthodes adoptées par plusieurs, mais qu'en est-il des autres? Ont-ils su retirer des avantages de l'histoire de notre algorithme usuel? Il est vrai qu'ils n'ont pas opté pour le changement mais cela ne signifie pas qu'ils n'ont pas retenu l'essentiel des apprentissages car l'histoire des algorithmes a permis de prendre conscience des avantages de chaque algorithme car bien qu'ils aient disparu de la pratique pour un grand nombre, ils avaient leur raison d'être. Les élèves ont donc intégré les différents avantages à leur méthode usuelle. Ainsi, pour plusieurs, arrondir devient un réflexe, les erreurs d'inattention sont alors évitées. Aussi, quelques-uns ont vu la nécessité de réviser leurs tables de multiplication pour s'assurer une bonne réponse et augmenter leur vitesse de calcul. D'autres ont vu que les retenues avaient un rôle prépondérant puisque certaines méthodes les mettent de l'avant pour ne pas les oublier (exemple : méthode par quadrillage et le losange). Évidemment, les élèves ont compris et les considèrent aujourd'hui ces retenues. Des petits détails certes, mais ils font la différence au niveau de la compréhension de chaque élève.

Rien n'est ici magique! Le progrès des élèves s'explique probablement par l'apport de l'histoire de cette discipline puisque l'histoire oblige l'enfant à se placer devant les difficultés vécues et s'évertuer conséquemment à trouver des solutions.

Une approche historique vient donner du sens aux concepts mathématiques, au-delà des mots l'histoire a pour fonction de donner une signification concrète par une reconnaissance de l'évolution et des changements. C'est cette approche historique qui a permis aux élèves de découvrir les « pourquoi ».

> « Au moyen de l'histoire, l'élève redécouvre les pourquoi historique et logique ainsi que les motifs qui sont à l'origine des concepts et des définitions mathématiques. » (Colette, J-P., 1994, introduction)

Enfin, l'élève voit que les mathématiques sont une science dynamique. C'est en observant l'évolution des mathématiques à travers les siècles qu'est favorisée la compréhension puisque l'élève voit les tendances de chacune des époques et que les hommes créent la mathématique pour répondre à des besoins C'est aussi ainsi que les élèves prennent conscience du rôle des mathématiques.

> « Il revient en effet à l'Étudiant non seulement de parvenir à manipuler des objets mathématiques, mais également d'en posséder la compréhension approfondie. Or Darwin l'avait déjà noté, « toute compréhension vraie est généalogique». Celle-ci passe par la connaissance des raisons et des motivations à l'origine des découvertes, et, plus particulièrement, par la connaissance de l'ensemble des processus intellectuels qui les ont accompagnées. » (Bruter, C.P., 2000, p.5)

C'est ce que témoigne l'élève en disant :
« *J'ai maintenant compris pourquoi il fallait déplacer d'un espace vers la gauche les produits partiels à chaque ligne. On me l'avait souvent dit et répété mais cette fois j'ai vu. Le fait de voir la position des différents produits partiels de la méthode du losange et surtout, d'avoir personnellement cherché la logique de la méthode.* » En résumé, cet enfant vient tout juste de comprendre ce qu'il a si longtemps fait.

Les résultats nous ont permis d'affirmer que la compréhension était favorisée lorsque nous décidions d'intégrer l'histoire à l'enseignement. Toutefois, plusieurs autres comportements ont aussi été observés pendant l'ensemble des activités de la situation d'apprentissage à laquelle les élèves ont participé : « *Pour travailler, on a travaillé! On a cherché, on a fait des hypothèses, on a fait des essais, on a calculé, on a discuté, on a critiqué... mais j'ai beaucoup appris.* » Puis, vous constaterez que l'histoire n'entrave pas l'apparition de ces comportements mais bien au contraire, elle encourage leur apparition.

5.1.1.1 La réflexion

Nous avons pu noter que l'intégration de l'histoire incite fortement les élèves à la réflexion. À différents moments comme lors de la construction de tableaux comparatifs par les élèves, visant à cibler les avantages et inconvénients des systèmes de numération de l'époque (égyptien, babylonien et chinois) ou lors de la comparaison des nombreuses façons de multiplier, les élèves se sont arrêtés pour observer et réfléchir. Ces réflexions permettent-elles des changements chez l'élève qui justement auraient favorisé par la suite la compréhension?

Dans un premier temps, il est vrai que l'histoire anime la réflexion parce qu'elle permet à l'élève de découvrir différents chemins empruntés par différentes sociétés. Plus important encore, c'est par ces analyses que l'élève développe son jugement critique. Cherchant les forces, les faiblesses, les raisons, etc., l'élève se forge son opinion.

Comme nous l'avons dit, un temps d'arrêt devant des éléments nouveaux (par exemple les différentes multiplications : *per gelosia*, du losange, du soleil, inversée, etc.) donne la chance à l'élève d'en cibler les avantages et les inconvénients. Par conséquent, ce dernier pourra faire un choix éclairé. De façon autonome, l'élève prend ce qu'il l'intéresse. Par exemple, certains élèves ont ajouté une ou des techniques de multiplication à leur répertoire, parfois plus longues certes mais à leurs yeux, elle a plus de sens : « *Moi, je préfère la méthode du quadrillage, c'est plus long mais je comprends mieux.* »

Les élèves n'ont pas seulement appris à s'arrêter pour réfléchir, ils ont aussi enrichi leurs réflexions, ils les peaufinent par des termes ou concepts qu'ils ont découverts. Prenons un exemple pour illustrer cette affirmation. Au départ, lorsque nous interrogions les élèves au sujet du concept de la valeur de position plusieurs pouvaient donner une réponse si la question était d'ordre numérique mais si nous demandions d'expliquer par des mots ce concept, cela générait des silences.

Toutefois, nous avons remarqué que l'histoire pouvait aider l'enfant à enrichir son bagage mathématique. Lors de la mise en situation, l'histoire a permis à l'élève de comprendre son système de numération et ses concepts, ceci en observant les autres systèmes. Par l'observation de l'évolution des systèmes de numération, les élèves ont découvert que pour certains systèmes « *L'écriture des nombres est parfois très longue, vu la répétition de chacun des symboles.* » Puis, suivant toujours le cours de l'histoire, ils remarquent que les peuples ont cherché l'amélioration, de nouveaux systèmes apparaissent : « *Le système chinois est un système en base dix mais ce n'est pas la position qui indique la valeur du nombre, c'est le symbole inscrit.* » Mais encore, ils découvrent l'histoire des concepts, ces concepts dont ils ne pouvaient pas exprimer leur nature. C'est maintenant bien différent : « *Le système Maya fait appel à la valeur de position et les bases utilisées sont celles de cinq et vingt.* » ou « *Enfin, le zéro fait son apparition, les Mayas ont vu la nécessité d'inscrire un symbole pour illustrer l'absence.* » Par l'histoire, « où », « quand », « comment », l'enfant voit que les mathématiques c'est beaucoup plus que la répétition de techniques.

5.1.1.2 La participation

> « Les étudiants acceptent de moins en moins facilement ce genre de dogmatisme car ils ont l'impression d'être les seuls à ne pas comprendre. L'étudiant assiste impuissant... » (Colette, J-P., 1971, p.58)

Le nouveau programme de mathématiques basé sur le contructivisme recommande de faire appel à l'activité personnelle et à la participation des élèves dans l'apprentissage de la mathématique. Nous l'avons dit précédemment, l'élève par l'histoire a remarqué que la mathématique est une science dynamique ce qui suscite chez lui le même désir, celui d'être en action et non en contemplation, celui de participer à l'évolution de la mathématique : « *Nous redécouvrons, mais encore... nous allons plus loin, on va découvrir de nouvelles choses et nos noms seront inscrits dans un livre historique. On est brillant!* » Les enfants étaient stimulés, ils voulaient être les chercheurs qui font progresser la mathématique.

Un exemple concret de la situation vécue en classe est très démonstratif de la grande participation des élèves et surtout, que c'est par cette participation active que les élèves ont mieux compris les concepts mathématiques à l'étude. Pour nous remettre dans le contexte, à la quatrième journée, les élèves devaient reproduire une situation vendeur/acheteur mais le commerce se faisait alors avec les systèmes de numération de l'époque. Impliqués, les élèves ont manipulé, dessiné, calculé,... Suite à cette situation, les élèves avaient plusieurs conclusions à exprimer : « *Zut, les Égyptiens aimaient écrire et écrire et écrire... C'est long additionner et soustraire de la façon égyptienne.* », « *Les Chinois emploient des termes plutôt complexes, ce n'est pas simple de reproduire leurs dessins.* » et « *Pour résoudre les équations mayas, il faut toujours reprendre du début pour se remémorer la valeur du point et du trait lorsque ce dernier change d'étage, il faut reprendre l'évolution du trait et du point en partant du bas. Plus d'un calcul à faire chaque fois.* » Ces élèves, en faisant, ont appris tous les avantages de notre système de numération. Il n'y a pas eu cette fois une transmission de connaissances bien au contraire, il y a eu une acquisition de connaissances.

D'ailleurs n'est-ce pas ces concepts qui ont aussi été évalués lors du pré-test et du post-test? L'arrondissement, la valeur de position, le zéro sont des concepts à l'étude dès le début du deuxième cycle, si ce n'est pas quelques fois lors du premier cycle et pourtant, en cette première année du troisième cycle, les élèves n'ont pas réussi le pré-test, plus de 64% des élèves avaient plus de deux erreurs à plus de deux numéros (18 élèves) Toutefois, au post-test les résultats sont différents, seulement 18% des élèves n'ont pas atteint les objectifs.

5.1.1.3 La coopération

De plus, il fut observé que l'histoire favorise une coopération plus élargie. Nous croyons que la participation et la réflexion suscitent cette coopération naturelle. Parfois, les élèves voulaient partager leurs découvertes, souhaitant que d'autres aient aussi des choses nouvelles à leur apprendre. Puis, plusieurs élèves ne craignaient plus de demander de l'aide à leurs camarades, ayant vu que plusieurs grands mathématiciens avant eux ont fait pareil.

> « L'interaction avec d'autres joue un rôle capital dans la construction des connaissances en mathématiques. » (Kuntz, G., 1998, p.200)

En fait, c'est surtout lors des retours collectifs que nous avons pu remarquer que par les échanges, la discussion s'enrichissait :

- « *Cette simplicité est superficielle. Plus concrètement, le peu de symboles n'équivaut pas à dire que la mémorisation est moins en demande. Les deux symboles utilisés à l'intérieur du système maya ont plus d'une valeur, cela signifie donc qu'il y a de nouveaux éléments à mémoriser. Il faut ainsi connaître les symboles et leur valeur selon la position qu'ils occupent. Voilà le vrai travail exigé lorsque l'on favorise le système Maya. De son côté, le système Indo-Arabe a dix symboles à connaître et la valeur sous-*

entendue de chaque position, cette valeur demeurant la même peu importe le symbole en place : unité, dizaine, centaine, unité de mille, etc.»

Un pair appui ces dires en ajoutant simplement :

- « *Notre système est simplifié car il fait appel à uniquement une base, la base dix. Le système Maya est plus complexe car il fait appel à deux bases, la base cinq et la base vingt.* »

Nous remarquons ainsi qu'ensemble, les élèves s'entraident et apprennent beaucoup. Ayant des intérêts communs, ils mettent à profit leurs compétences et connaissances : « *C'est intéressant d'observer plus d'une technique et d'en discuter. Bien que nous n'ayons pas la même opinion, le partage nous amène à considérer chaque élément sous un autre regard.* »

5.1.2 L'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques accroît la compréhension des élèves.

Nous avons observé également que les élèves en difficultés répondent très bien à l'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques. Au début de l'expérimentation, suite au pré-test, nous avons classé 16 élèves sous la catégorie « *en difficulté* », il est vrai que leurs difficultés n'étaient pas toutes du même niveau mais elles étaient présentes. Parmi ces 16 élèves, 14 ont montré une amélioration (88%) suite à la situation d'apprentissage mettant de l'avant l'intégration de l'histoire des mathématiques. Les deux seuls élèves qui n'entrent pas dans ce pourcentage sont des élèves en grandes difficultés dans chacune des disciplines scolaires, il s'agit d'élèves suivis en orthopédagogie (Aide supplémentaire; Individuellement).

« *Pour la première fois, j'ai trouvé la réponse en premier!* » Voici les paroles d'un enfant qui était depuis le début de l'année en échec et n'osant même plus donner une

réponse, craignant que les autres puissent rire de lui si elle était une fois de plus inexacte. Cet élève, comme d'autres, a remarqué que dans l'histoire des hommes ont parfois fait, eux aussi, des erreurs et que ces erreurs ont pu permettre à d'autres d'apprendre et d'évoluer. L'élève conclut ainsi que l'erreur est normale, elle a même un rôle dans l'évolution des mathématiques et qu'il est aussi normal de discuter d'un problème et d'avoir des difficultés à le résoudre. Comme on le rapporte dans la littérature, l'histoire redonne confiance aux élèves en difficulté, modifiant leur rapport au savoir scientifique, montrant que l'on n'a pas toujours tout su et qu'encore aujourd'hui on ne sait pas tout. De plus, on n'a pas toujours connu de la même façon, plusieurs chemins ont été créés et empruntés par différents hommes pour ce qui est enseigné aujourd'hui. (Barbin, E., 2000)
Un second auteur ajoute :

> « Notre enseignement idéal devrait essayer de refléter ce caractère profondément humain des mathématiques gagnant ainsi en accessibilité, dynamisme, intérêt et séduction »(De Guzman, M., 2002, p.571)

Lors de l'expérimentation, tous les élèves ont participé car tous les élèves ont remarqué que la plus petite intervention pensable peut s'avérer un grand pas. Les élèves percevaient davantage les mathématiques comme une science qui germe et se développe grâce à l'intuition et à l'imagination de chacun : « *En observant l'évolution, je vois que tout n'est pas parfait et qu'il est important de continuer à chercher le meilleur.* »
Puis, du côté des élèves plus forts, nous pourrions dire qu'ils ont participé activement car l'histoire est un élément nouveau. Souvent, si l'élève n'est pas stimulé par la perspective de surmonter des difficultés d'ordre intellectuel, leur intérêt pour l'étude risque malheureusement de s'émousser et laisser place à l'ennui. L'histoire ce n'est pas seulement une nouveauté, c'est un défi de continuer l'œuvre de tant d'hommes.

5.2 L'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement : conditions de réussite.

> « Il n'est, bien entendu, pas question d'imposer aux élèves un « cours d'Histoire des Mathématiques » qui s'ajouterait aux autres disciplines, ni de prétendre leur faire parcourir, sur chaque notion, la démarche historique dont elle est le fruit, mais il est possible de s'inspirer de l'émergence historique de ces notions pour proposer des situations-problèmes qui seront pour les enfants des défis mesurés dont la résolution leur permettra de s'approprier la connaissance visée en lui donnant un sens. » (Cerquetti-Aberkane, Rodriguez, Johan, 1997, p. 10)

Plusieurs pourraient être tenté de croire qu'ils intègrent l'histoire à leurs cours de mathématiques puisqu'en inscrivant au tableau une formule, ils indiquent aux élèves le nom du mathématicien l'ayant créée et parfois même, ils renseignent les élèves de l'année de sa création. S'il en est ainsi, il ne faut pas s'attendre nécessairement à une participation plus grande des élèves, à voir un esprit de coopération s'installer, à entendre des réflexions enrichies d'un vocabulaire à caractère mathématique et assurément constater que la compréhension des élèves est plus grande. Il s'agirait alors d'un cours d'histoire et non pas de l'utilisation de l'histoire au profit de l'enseignement des mathématiques. Intégrer l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques c'est proposer des situations-problèmes amenant les élèves à découvrir la mathématique, empruntant les différents chemins et imaginant une façon de continuer cette route.

En fait, il existe différentes méthodes d'utilisation de l'histoire dans l'enseignement : des notes historiques, des courtes esquisses bibliographiques, la présentation d'un moment propice des éléments historiques appropriés au sujet traité, la chronologie d'un concept depuis ses débuts, des analyses critiques, etc. L'important est toutefois de varier les approches, de contrer le dogmatisme en mettant les élèves en situation et en laissant à ces derniers la liberté d'aborder et de diriger le travail, puis de favoriser le travail mathématique à plus d'un niveau (symbole et expression, texte, idée, méthodes).

> « La meilleure solution est de prendre directement aux élèves, le matériel d'origine pour éliminer les notes historiques erronées. » (Colette, 1994, p.40)

Voici ici un autre fait important à respecter si nous souhaitons que l'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques soit bénéfique. Les notes, les textes ou les documents historiques sont utiles à l'enseignement, dans la mesure où elles rapportent fidèlement les faits historiques. Évidemment, cela s'explique en raison de ne pas induire dans l'erreur les élèves.

5.3 L'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement : Une piste de recherches futures.

Dans un premier temps, nous croyons que pour pouvoir conclure aux bienfaits de l'utilisation de l'histoire des mathématiques au primaire, il serait opportun, lors d'une recherche ultérieure, de prendre une classe témoin qui travaillerait l'algorithme de la multiplication, sans toutefois utiliser notre séquence faisant appel à l'histoire des mathématiques. Puis, comparer les résultats obtenus en leur faisant passer le même pré-test et les deux mêmes post-tests. Il est vrai que cela aurait été intéressant, mais ce fut pour nous impossible de procéder à une telle initiative puisque nous n'avions pas deux classes de même niveau.

Aussi, les limites de notre recherche résident dans le fait qu'elle est restreinte à un seul niveau scolaire, l'expérimentation fut uniquement réalisée à l'intérieur d'une classe de cinquième année ne permettant pas ainsi de généraliser. Une autre limite de cette recherche est sa durée, il aurait pu être pertinent de connaître les résultats de ces mêmes élèves dans un ou deux ans. Finalement, nous avons remarqué que les élèves n'avaient pas uniquement amélioré leurs résultats, ils ont dit être aussi plus motivés. Toutefois, cette recherche n'a pas créé d'outil venant mesurer la motivation des élèves.

Notre étude a fait ressortir que l'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques fut bénéfique pour un groupe de 28 élèves de cinquième année. Maintenant, il serait bien d'agrandir l'échantillon celle-ci. Plus concrètement, il serait intéressant de créer des situations-problèmes, où l'histoire des mathématiques s'y intègre, mais cette fois pour des niveaux scolaires inférieurs. Ceci nous permettrait de dépasser les limites et peut-être faire ressortir de nouveaux avantages à cette intégration. Nos situations-problèmes seraient-elles alors aussi bien réussies? L'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques permet-elle à des élèves du premier et du deuxième cycle de participer activement à un apprentissage exigeant une activité toujours plus grande de leur part?

Bien que notre étude ait démontré que l'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques fut bénéfique, est-ce qu'il est possible d'aller plus loin, d'élargir les cadres de la recherche? Par cette présente recherche, nous avons considéré l'aspect temporel, mais à une plus petite échelle (le second post-test apparaissait seulement un mois plus tard) Toutefois, il pourrait s'avérer pertinent de reprendre cette expérimentation auprès d'un groupe d'enfants du primaire mais sur une plus longue période de temps. Les comportements observés se poursuivent-ils? Les connaissances acquises sont-elles durables?

Finalement, nous pouvons dire que les élèves de la classe ont grandement participé à l'expérimentation (une participation des élèves pour lesquels seule l'observation de ce qu'ils produisent sur une longue durée permet de voir qu'ils sont plus présents et actifs qu'il n'y paraît.) et surtout, ils ont grandement apprécié. Certes, nous n'avons pour affirmer cela que les paroles des enfants et l'observation de leurs comportements. Certains diront que ce n'est pas des données fiables et nous acceptons fort bien la critique. Toutefois, la littérature aborde aussi le sujet :

> « Tout au long de leurs études mathématiques, les jeunes n'y voient qu'un laborieux processus de conditionnement, dont la seule raison d'être est la préparation aux examens qui ouvrent les diverses carrières. … C'est ainsi qu'à

> l'acquisition traditionnelle des règles apprises par cœur, on a cherché à substituer l'exploration des structures mathématiques fondamentales; et on est en train de découvrir que cette exploration, malgré ses risques et ses difficultés, enthousiasme les enfants au lieu de les rebuter. Tout enfant, s'il n'a pas été gâté par un long conditionnement dans le système des punitions et des récompenses imposées de l'extérieur, aime faire face à une situation qui éveille sa curiosité naturelle. » (Diemes, 1965, p.7)

Ainsi, nous croyons qu'il pourrait s'avérer en effet enrichissant de reprendre une expérimentation où il y aurait intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques mais visant cette fois à mesurer le degré de motivation des élèves. Si nous accordons plus de soin au développement chez l'élève de motivations et d'attitudes positives envers la mathématique, ces derniers s'investiront nécessairement et la suite est envisageable, leur chance de comprendre et réussir est grande.

L'histoire permet de voir les mathématiques comme une activité intellectuelle et est-ce peut-être le début du plaisir de faire des mathématiques.

Conclusion

CONCLUSION

En terminant une recherche, il s'avère toujours pertinent de prendre un temps d'arrêt pour réfléchir sur les finalités de celle-ci. Nous y voici, nous concluons en posant la question : Quelles sont les retombées de ce travail?

Dans un premier temps, la multiplication est un algorithme mathématique qui pose plusieurs difficultés chez un grand nombre d'élèves. Ainsi donc, cette recherche qui est avant tout une séquence d'apprentissages, permet de pallier à ce problème. Cette séquence est une nouvelle façon d'enseigner l'algorithme de la multiplication où l'élève en cherche sa signification. Le pré-test et les deux post-tests ont démontré une amélioration chez les élèves à propos de l'algorithme de la multiplication.

De plus, il faut remarquer que cette recherche répond concrètement à l'une des demandes du ministère de l'éducation, inscrite au programme de formation du primaire, voulant que les apprentissages soient culturellement ancrés. Plusieurs enseignants croient aux avantages d'intégrer une perspective historique et comprennent que ce soit l'une des orientations du nouveau programme. Toutefois, peu d'outils sont à la disposition des enseignants pour bien orchestrer une situation-problème intégrant l'histoire des mathématiques. La démarche mise de l'avant dans cette recherche devient ainsi une activité-problème utile pour plusieurs enseignants.

Le nouveau programme de formation favorise le décloisonnement disciplinaire ce que promeut aussi une situation-problème en mathématique où il y a intégration de l'histoire à l'enseignement. Nous l'avons remarqué lors de l'expérimentation, les élèves ont touché à plus d'une discipline. En fait, le français fut grandement valorisé puisque l'élève a beaucoup lu sur les différentes civilisations anciennes et ce, avant de venir communiquer aux autres le fruit de ses découvertes. Ce fut d'ailleurs l'intérêt des élèves qui a justifié cette activité. Captivés par leurs lectures, les élèves ont demandé personnellement d'en faire un travail de recherche où suivrait une communication orale pour partager l'information. Une autre matière académique fut mise de l'avant : la géographie. Les élèves ont situé les différents pays en question et ils ont observé les éléments de l'environnement : les fleuves, les lacs, les mers, les déserts, etc. Ils ont non seulement situé et observé les territoires, ils ont établi des liens entre des caractéristiques de la société et l'aménagement de son territoire puis ils ont relevé les principaux changements survenus sur le territoire. De plus, les arts furent privilégiés étant donné que les élèves ont réalisé des créations plastiques médiatiques pour illustrer les conclusions de leurs différentes recherches sur les civilisations anciennes. Également, il est clair que l'histoire s'est avérée une discipline travaillée par les élèves. Toutefois, il importe d'ajouter que ce ne fut pas seulement l'histoire des mathématiques qui s'est retrouvée au premier plan, mais aussi l'histoire des civilisations : leurs coutumes, leur territoire, leur nourriture, leur architecture, etc. Ainsi, une situation-problème intégrant l'histoire des mathématiques fait appel à des connaissances provenant de sources variées et qui ne répondent pas nécessairement à une logique disciplinaire. Une telle situation dépasse le cloisonnement entre les disciplines afin d'amener l'élève à mieux saisir et intégrer les liens entre ses divers apprentissages.

Le nouveau programme de formation comporte aussi des compétences transversales. Il reconnaît la nécessité de développer chez tous les élèves des compétences intellectuelles, méthodologiques, personnelles et sociales ainsi que la capacité à communiquer. Ces compétences sont dites transversales en raison de leur caractère générique et du fait qu'elles se déploient à travers les divers domaines d'apprentissage. Une fois de plus, la situation-problème présentée répond à cette nouvelle orientation du programme de formation. Voici un inventaire des compétences transversales touchées : Au niveau des compétences d'ordre intellectuel, l'élève a exploité les diverses sources d'information lors de sa recherche sur les civilisations anciennes. L'élève a également exercé son jugement critique en analysant les différents chemins empruntés par différentes sociétés, cherchant les forces, les faiblesses, les raisons, etc. De plus, pour comprendre les divers documents historiques qui lui furent présentés, l'élève a mis en œuvre sa pensée créatrice. Concernant les compétences d'ordre personnel et social, il faut admettre que la coopération fut mise de l'avant. Les élèves ont interagi avec une ouverture d'esprit et ce, dans différents contextes. Ils étaient attentifs à l'autre et ils échangeaient des points de vue. Les élèves contribuaient au travail collectif et tiraient profit de ce travail en coopération. Finalement, en ce qui a trait à la compétence transversale de l'ordre de la communication, l'élève fut appelé à communiquer de façon appropriée, que ce soit lors des retours collectifs ou lors d'une communication orale préalablement préparée. L'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques permet le développement global de l'enfant puisque les compétences disciplinaires et les compétences transversales sont prises en compte d'une manière synergique et interactive.

D'un autre angle, cette recherche a fait avancer d'un pas notre connaissance de l'intégration de l'histoire à l'enseignement des mathématiques. Depuis quelques années, plusieurs chercheurs s'intéressent à l'intégration de l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques. Cependant, leurs travaux ciblent davantage les élèves du secondaire ou du collégial. La présente recherche diffère puisqu'elle concerne les plus jeunes, les élèves du primaire. Les résultats des deux post-test démontrent bien que les enfants ont une meilleure compréhension des concepts mathématiques sous-jacents à l'algorithme usuel de la multiplication : valeur de position, groupement en base 10, arrondissement, etc. Puis c'est allé au-delà, les enfants ont repris confiance en eux et en leurs compétences mathématiques.

Finalement, ce mémoire n'est pas une fin en soi, bien au contraire. C'est le début visant à faire des mathématiques une science que les élèves ont le plaisir à découvrir et à comprendre.

Références

RÉFÉRENCES

AHMED, A., WILLIAMS, H., KRAEMER, J-M., (2000), Cultural diversity in mathematics (education): cieaem 51. Edition Horwood Publishing limited, 446 pages.

ANTIBI, A., (1999), « La motivation en Mathématiques : celle du professeur? celle de l'élève? » dans : *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP)*, no 428, pp. 279-284.

BEDNARZ, N., DUFOUR-JANVIER, B., (1986), « Une Étude des Conceptions Inappropriées Développées par les Enfants dans l'Apprentissage de la Numération au Primaire. », dans : vol. 1, no 2, pp. 17 à 33.

BEDNARZ, N., POIRIER, L. et BACON, L., (1992), « Apprendre à penser en mathématiques : Un exemple d'intervention pédagogique auprès de jeunes enfants », dans : *Vie pédagogique*, no 79, pp.33 à 36.

BRIAND, J. et CHEVALIER, M.-C., (1995), Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques. Coll. Hatier Pédagogie, Hatier, Paris, 240 pages.

BRUTER, C.P., (2000), La construction des nombres. Collection Histoire et épistémologie, Paris : Éllipses Édition Marketing, 230 pages.

CARON, R., « La résolution de problèmes et le calcul mental » dans : *Instantanés Mathématiques*, Numéro spécial D, 1984-1985.

CERQUETTI-ABERKANE, F., RODRIGUEZ, A., JOHAN, P., (1997), Les maths ont une histoire (activités pour le cycle 3). Collection Pédagogie pratique à l'école, Paris : Hachette Éducation, 188 pages.

CERQUETTI-ABERKANE, F., (2001), Enseigner les mathématiques à l'école. Paris : Hachette Éducation, 256 pages.

CERQUETTI-ABERKANE, F., RODRIGUEZ, A., (2002), Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques. Coll. « IUFM Premier degré », Éditions CRDP de l'académie Créteil, 255 pages

CHARBONNEAU, L., (2002), Conférence d'ouverture, journée sur l'enseignem.ent des mathématiques, CSDM (3), 15 octobre 2002.
(http://132.208.138.87/_charbonneau/personnel/histoire.html)

COLOMB, J. Responsable de l'équipe ERMEL, (1981), Apprentissages mathématiques à l'École élémentaire. Paris : Sermap Hatier, 223 pages.

COLETTE, J.-P., (1971), Considérations historiques et analytiques du rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Thèse inédite, Montréal, Université de Montréal.

COLETTE, J.-P., (1994), L'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Historique et attitude des professeurs des collèges québécois francophones. Mémoire inédit, Montréal, Université de Montréal.

DE GUZMAN, M., (2002), « Problèmes actuels dans l'enseignement des mathématiques » dans : *Mathématique et pédagogie*, no 136, pp. 43-71.

DIEMES, Z.P., (1965), Comprendre la mathématique, Éditions de l'Office Central de Librairie (O.C.D.L.), Paris, 62 pages.

GANERI, A., (1997), Les nombres. Éditions Magnard, Londres, 30 pages.

GAULIN, C., (1972), Quelques tendances internationales dans l'enseignement de la mathématique. Coll. Unesco, Paris, volume 3, 65 pages.

GUEDJ, D., (1998), Le théorème du perroquet. Éditions du Seuil, Paris, 649 pages.

GUEDJ, D., (2000), « Rendons les mathématiques aimables » dans : *L'express*, pp.10-13.

HUG, C., (1968), L'enfant et la mathématique. Coll. Études supérieures, Paris, Bordas-Mouton, 287 pages.

IFRAH, G., (1994), Histoire universelle des chiffres. Coll. Bouquins, Éditions Robert Laffont, S.A., Paris, 1042 pages.

KUNTZ, G., (1998), « Point de vue sur l'enseignement des mathématiques » dans : *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP)*, avril-mai, no 415, pp.193-200.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, (2001), Programme de formation de l'école québécoise. Bibliothèque nationale du Québec, 350 pages.

ORGANISATION DES NATIONS UNIES, (1972), Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique. Coll. Unesco, Paris, Ed. F92-3-201016x, 151 pages.

PALLASCIO, R., (1995), « Les mathématiques, une invention! » dans : *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP)*, septembre, no 400, pp. 809-817.

POIRIER, L., (1990), « Évolution du rôle et de l'importance du calcul mental dans les programmes d'études québécois. », dans : *Bulletin AMQ*, mai, pp. 5-10.

POIRIER, L., (2001), Enseigner les maths au primaire. Éditions du Renouveau pédagogique inc., Québec, 189 pages.

VAN DER MAREN, J-M., (1996), Méthode de recherche pour l'éducation. Collection Éducation et Formation, Les Presses de l'Université de Montréal : Éditions De Boeck Université, 502 pages.

VAN DER MAREN, J-M., (1999), La recherche appliquée en pédagogie des modèles pour l'enseignement. Coll. Méthodes en sciences humaines, Éditions De Boeck Université, Paris, Bruxelles, 255 pages.

Annexe A

Un exemplaire du pré-test ainsi que des deux post-tests auxquels les élèves ont été soumis

Pré-Test

#1) Il te faut dénombrer ces collections dessinées. Puis, il te faut trouver une façon de comparer rapidement ces collections.

a)

/   / ///   //   //   /   / //   / ///   / /   / / /   /

/ ///   / //   //   /   //   /   /////// /   /   / //

/// /   //   // / /   / / / / / / //   /   /   / /

/   / /   // /   / //   /   / ///   / / ///

///   /   //   ///////// ////   /   /

///   /   /   ////// / / / /   /   /   /   /

/   //////   //////////////   /   ///   / /   /

/ /   / ////   ////   ///   / /   /   /   /   / ////

/ / / ///////   / / / / / /   ////   //////   / / / /

Total : ____________________

b)

xxxxxxx x x x x x x x x xxxx x

X xx x x x x x xxxxxx

Xx x x x xxxxxx xxxxx xx

xxxxxxxxx x x x x x x x x x x

x xxxxx xxxxxx xxxxxx xx x xxxxx

xxxx xxxxxx x x x x x x x x x x x

x x x x xxxxxxxxxxxxxxxxxx

xxxxxxx xxx x xxxxxxxxxx

xxxx xxxxx xxxxxxxxx xx xxx xx

xx xxxx xxx xx

Total :__________________

Le comparatif (ta méthode) :

____

____

____

____

#2) Il te faut trouver le nombre de dizaines et de centaines qu'il y a en tout dans les nombres qui suivent :

a) 1246 :

le nombre de dizaines __________ le nombre de centaines __________

b) 45 682 :

le nombre de dizaines __________ le nombre de centaines __________

c) 695 :

le nombre de dizaines __________ le nombre de centaines __________

d) 89 :

le nombre de dizaines __________ le nombre de centaines __________

e) 9067 :

le nombre de dizaines __________ le nombre de centaines __________

#3) Il te faut arrondir les nombres suivants à la centaine et à l'unité de mille près.

a) 1 467 :

à la centaine près _______________ à l'unité de mille près _______________

b) 14207 :

à la centaine près _______________ à l'unité de mille près _______________

c) 9 999 :

à la centaine près _______________ à l'unité de mille près _______________

Pourquoi est-il important de savoir arrondir, quelle en est l'utilité?

____

____

____

____

#4) Il te faut effectuer les soustractions suivantes.

a) 6 003

- 4 756

b) Représente le nombre 3152.

Enlève 128 sur l'abaque. (dessin d'un abaque)

c) 4 578

- 3 892

Quel est l'algorithme de soustraction que tu as trouvé le plus simple à résoudre et tu expliques pourquoi?

____

____

Quel est l'algorithme de soustraction que tu as trouvé le plus simple à résoudre et tu expliques pourquoi?

____

____

#5) Il te faut effectuer les multiplications suivantes :

a) 7036
X 100

b) 432
X 10

c) 320
X 100

d) 21
X 13

e) 93
X 64

f) 873
X 45

g) 4787
X 224

As-tu rencontré des difficultés lors de la résolution de ces multiplications?

____

____

____

____

Post-Test #1

#1) Dénombre ces collections dessinées. Puis, trouve une façon de comparer rapidement ces collections.

a)

//////////// ////////////////// /// /////// / / / /

/ / / / / / /////// // // / / / / / / / / //////////

///////////// / / / / / / / ///////////////////////// / / / / / /

/ / / / / / //////////////////////// // / / / / / / / / / / /

/////////////// / / / / //////////////////////////// / / / / / / /

/ ///// /////////////////

/ / / / / / / / / /////////////// / / / //// //////

////////////////////////////// /// /// /////// / / / / / /

/ / / / /////// // // / / / / / / / / /////////////////////// /

/ / / / / / ///////////////////////// / / / / / / / / / / / /

//////////////////////// // / / / / / / / /

Total des / : ____________________

b) xxxxxxxxxxxxx xxxxxx xxxxxxxxxxxxxx xx
x x x x x x xx x xxxxxxxxxxxxxxxx xxxxxx
xxxxx xxxxxxxxxxxxxx xxxx xxxxxx x x xxx
x xxxxxxxxxx x x xxx x x x x x
xxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxx xxxxx xx x x x x x xxxxxxxxx x xx x x
x xxxxxxxxxxxxxxxxxxx xx x x x x x x x x x x x x
x x xxxxxxx xxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxx x x x x x x x x x x x x x
xxxxxxxxxxxxxxxx xx x x x x x x x x x x x
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx x x xx xx
xxxxxxxxxxx
Xxxxxxxxxxxxxx xxxxxx x xxxxxxxxxxxxxx xx
x x x x x x xx x xxxxxxxxxxxxxxxxx xx x xx x x
xxxxxxxxx xxX
Xxxxxx
xx xxxx xxxxxx x x xxx xxxxxxxxxx x x xxx
x x x x x xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx xxxxx
xx x x x x x xxxxxxxxx x xx x x x
xxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Total des X :______________________

Quelle est la façon la plus rapide et la plus efficace pour dénombrer et comparer ces deux collections :

____

____

____

____

#2) Observe les nombres suivants et réponds aux questions demandées:

a) 87 934 :

Combien il y a de dizaines en tout? : ____________

Quel est le chiffre à la position des dizaines? : ____________

Quelle est la valeur du 7? : ____________

b) 56 034 :

Combien il y a de centaines en tout? : ____________

Combien il y a de centaines de mille en tout? : ____________

Quel est le chiffre à la position des unités de mille? : ____________

Quelle est la valeur du 0? : ____________

c) 247 441:

Combien il y a d'unités de mille en tout? : ____________

Si tu ajoutes 34 centaines, quel nombre obtiens-tu? : ____________

Si tu enlèves 67 dizaines, quel nombre obtiens-tu? : ____________

Entre le 2 et le 7, quel est le chiffre qui a le plus de valeur?: ____________

#3) Arrondis les nombres suivants.

a) 18 987 :

à la centaine près _____________

à l'unité de mille près ________________

b) 45 509 :

à la dizaine près _____________

à la dizaine de mille près _____________

c) 299 959 :

à la centaine près _____________

à la dizaine de mille près _____________

Est-ce qu'il est important de savoir arrondir? Si oui, dis-moi à quoi cela est utile?

____

____

____

____

#4) Effectue les soustractions et les additions suivantes.

a) 54 671 - 38 989 =

b) 10 010 - 7 927 =

c) 345, 17 - 78, 235 =

d) 8 947 + 1 456 =

e) 0, 345 + 17, 56 =

Est-ce que certains algorithme t'ont posé des difficultés? Explique…

____

____

#5) Effectue les multiplications suivantes :

a) 4 567 X 1 000 =

b) 7 100 X 100 =

c) 7 987 X 2 754 =

d) 34 621 X 43 001 =

e) 62 415 X 24 686 =

f) 45, 17 X 2, 345 =

As-tu rencontré des difficultés lors de la résolution de ces multiplications? Si oui, lesquelles?

Post-Test #2

#1) Effectue les multiplications suivantes :

a) 4 567 X 1 000 =

b) 7 100 X 100 =

c) 7 987 X 2 754 =

d) 34 621 X 43 001 =

e) 62 415 X 24 686 =

f) 45, 17 X 2, 345 =

Maintenant, est-ce que la résolution d'un algorithme de la multiplication te pose encore des problèmes? Ou peut-être es-tu plus à l'aise avec cet algorithme? Exprimes-toi!

____

____

____

____

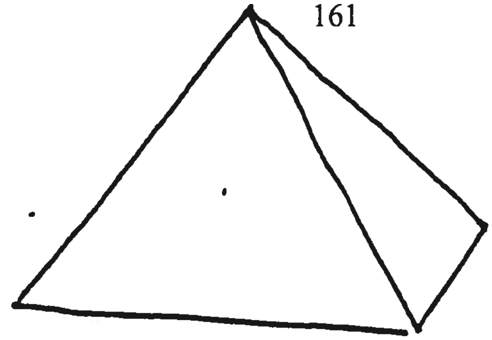
____

____

Annexe B

Trois activités se rapportant aux différents systèmes de numération :
Égyptien, Chinois, Maya
(+système babylonien pour certains élèves plus rapides)

Égypte



Hindou-Arabe	Égyptien
1	𓏺
2	𓏻
	𓏼
4	𓏽
5	𓏾
6	
	𓐂
10	𓎆
23	
	𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏽𓏽
56	
99	
115	𓍢𓎆𓏾
348	

Hindou-arabe	Égyptien
726	
879	
1133	𓆼𓍢𓎆𓎆𓎆𓏼
3126	
10 302	𓂭𓍢𓍢𓍢𓏻
12 345	
100 000	𓆐
1 000 000	𓁨

LA NUMÉRATION CHINOISE

Indo-Arabe	Chinois
1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
	十二
14	

人皆知有用之用而莫知无用之用也

Indo-Arabe	Chinois
23	二十三
35	
	五十六
77	
104	百 四
222	
	六百七十九
	千
20 202	二万二百二
35 279	

MAYA (3)

Indo ARABE.	MAYA
0	𝋠
1	𝋡
4	𝋤
5	𝋥
6	𝋦
8	
10	𝋪
13	
15	
17	𝋱
20	𝋡 - - - - 𝋠
28	𝋡 - - - - 𝋨
	𝋡 - - - - 𝋰
	𝋢 - - - - 𝋢

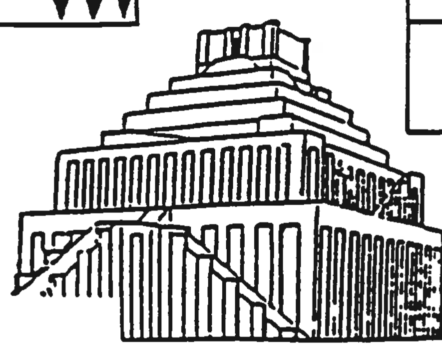
Indo ARABE	MAYA
	𝋢 - - - - 𝋨
85	 - - - -
100	𝋥 - - - - 𝋠
173	𝋨 - - - - 𝋭
	𝋫 - - - - 𝋧
246	 - - - -
	𝋱 - - - - 𝋰
360 ~~400~~	𝋡 - - - - 𝋠 - - - - 𝋠
	𝋢 - - - - 𝋡 - - - - 𝋱

National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 22091

Babylonien Numération

Indo-ARABE	BABYLONIEN
0	
1	
7	
10	
27	
48	
52	

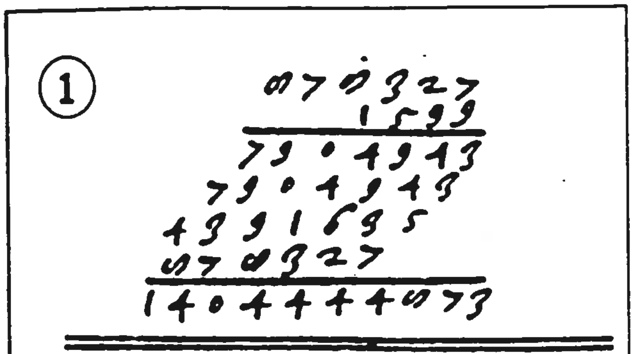
Indo-ARABE	BABYLONIEN
60	
73	
95	
200	
683	
732	
3600	
9000	



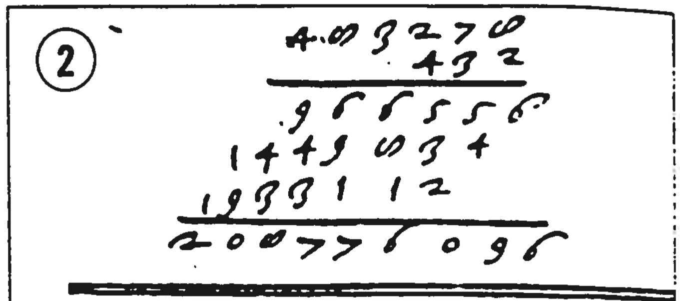
Annexe C

Une photocopie du document officiel de J. Nicolay, deux pages montrant différentes façons d'effectuer la multiplication, treize multiplications effectuées de sept manières différentes.

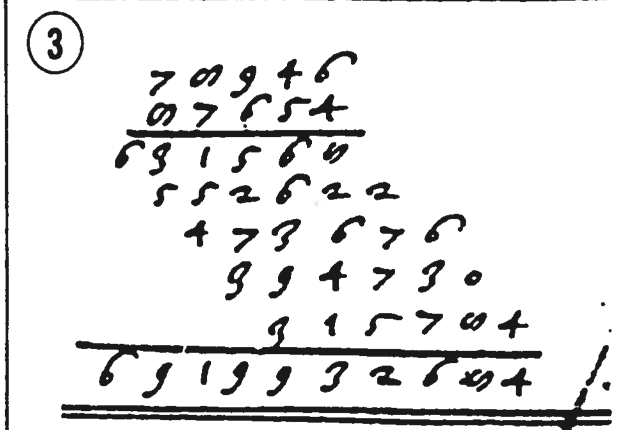
1



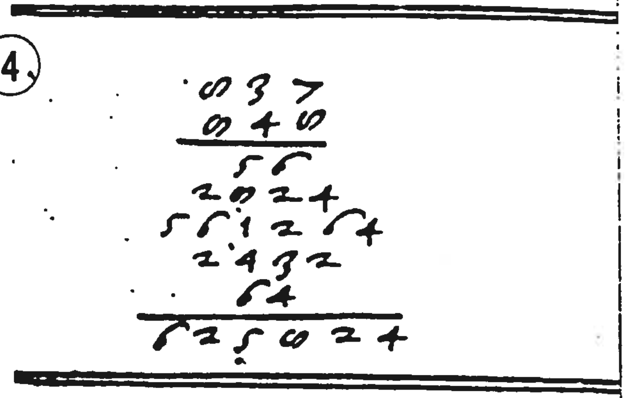
2



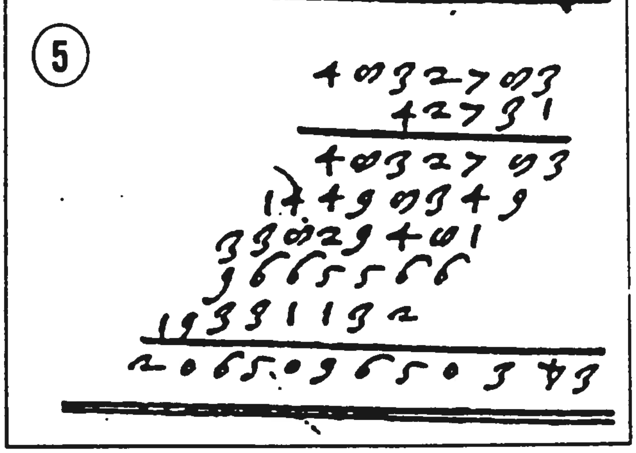
3



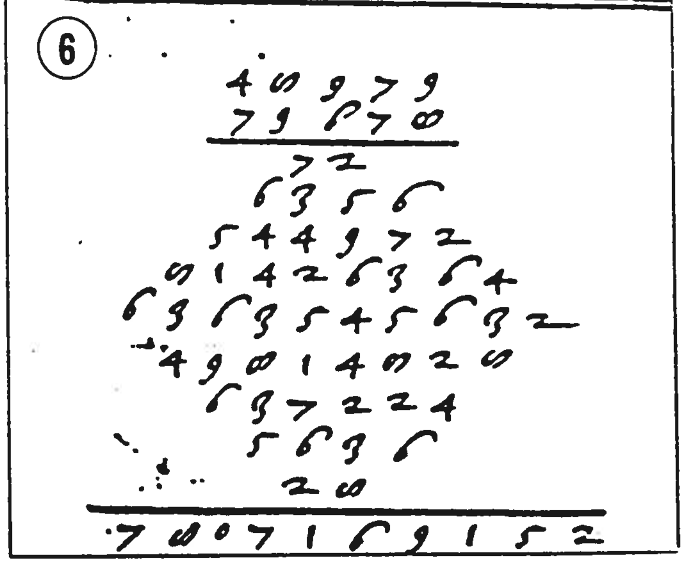
4



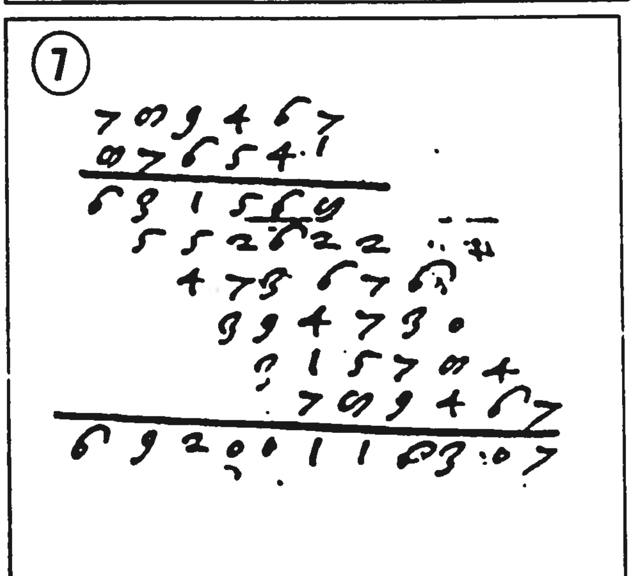
5



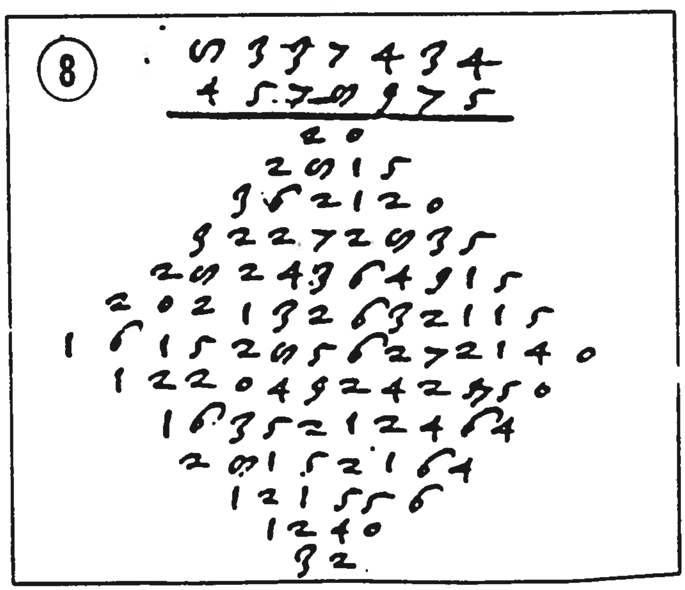
6

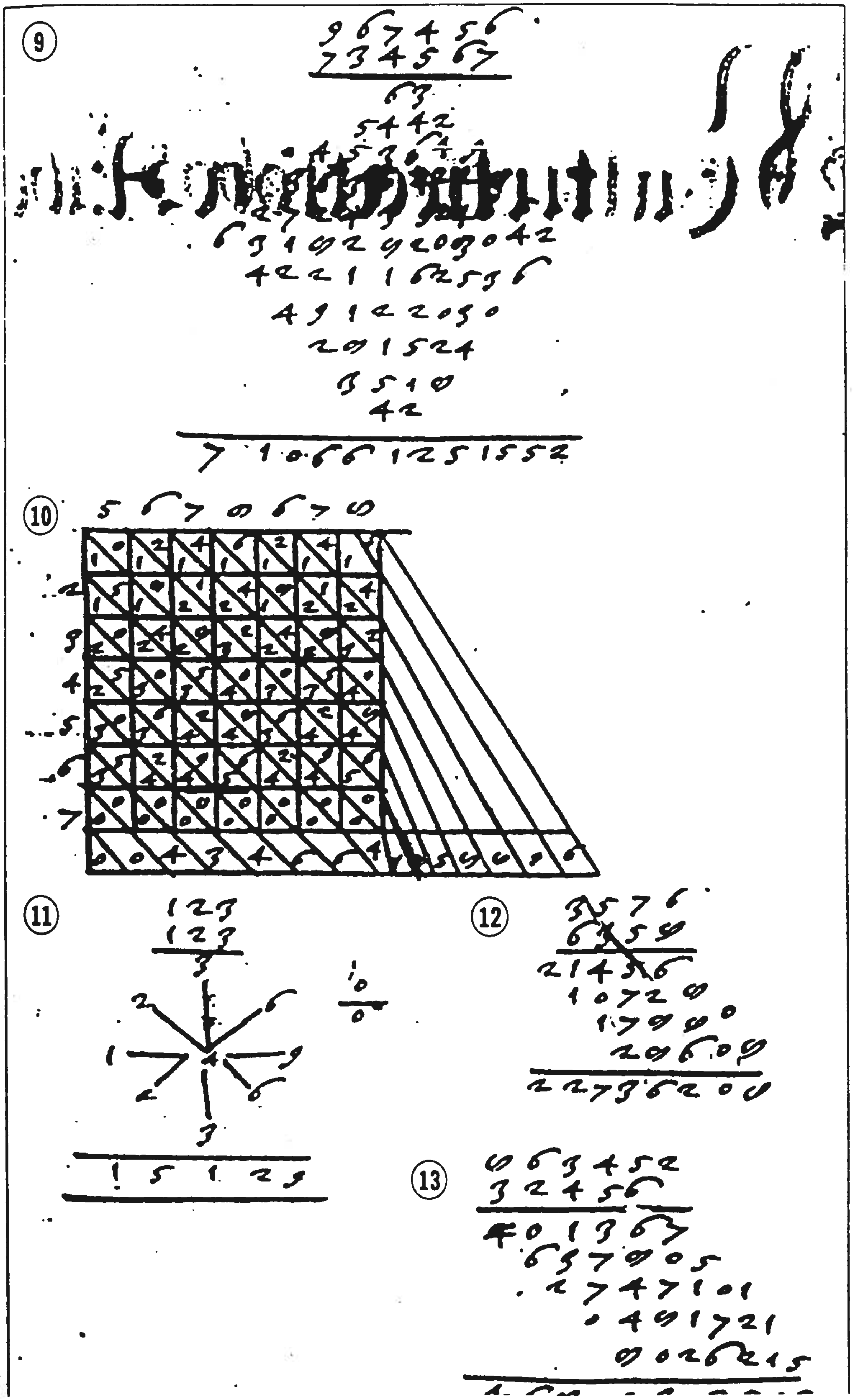


7



8




9
967456
734567
7 1066 1251552
10
5670670
11
123
123
15129
12
3576
6459
22736200
13
063452
32456

Document n° 2

n° 1

```
    878327
      1599
   7904943
  7904943
 4391635
 878327
1404444873
```

n° 2

```
   483278
      432
   966556
 1449834
1933112
208776096
```

n° 5

```
    4832783
      42731
    4832783
  14498349
 33829481
 9665566
19331132
206509650373
```

3

```
78946
87654
631568
 552622
  473676
   394730
    315784
6919932684
```

n° 7

```
789467
876541
631568
 552622
  473676
   394730
    315784
     789467
69200116307
```

n° 12

```
3576
6358
21456
 10728
  17880
   28608
22736208
```

n° 13

```
863452
32456
401367
 637805
  2747101
   0481721
    8026215
46802303525
```

n° 4

```
  837
  848
   56
  2824
561264
  2432
   64
625824
```

n° 6

```
   48979
   79678
     72
    6356
   544972
  81426364
6363545632
 49814828
  637224
   5636
    28
7807169152
```

n° 9

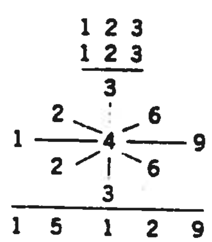
```
     967456
     734567
       63
      5442
     453649

 631828203042
  4221162536
   49122030
   281524
    3518
     42
710661251552
```

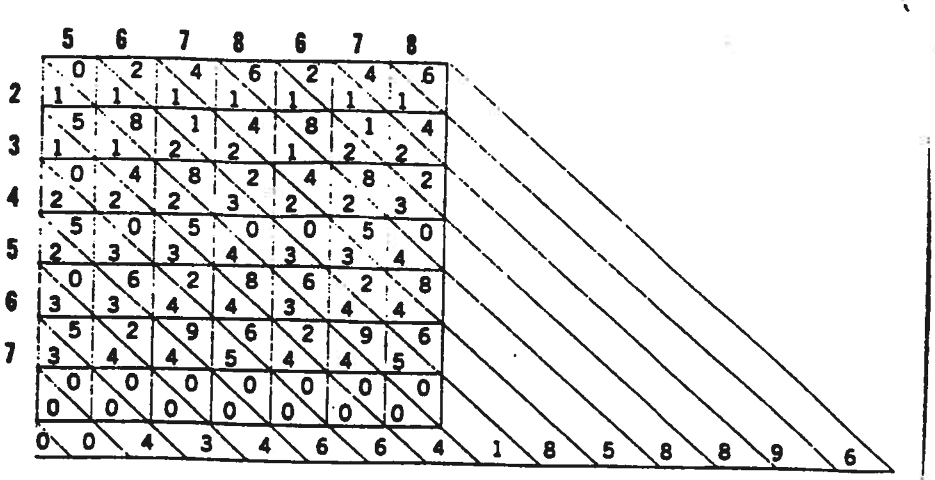
n° 8

```
     8337434
     4578975
        20
       2815
      362120
     32272835
    2824364915
   202132632115
  1615285627214
   122049242756
    1635212464
     28152164
      121556
       1240
        32
```

n° 11



n° 10



Annexe D

Le « *Journal de bord* », un compte rendu quotidien des comportements et des impressions des élèves durant l'expérimentation

Journal de bord

1. La période du pré-test

Avant de commencer un nouvel apprentissage, il est important de savoir où en sont les élèves. Ainsi, c'est pour cela qu'un pré-test administré aux élèves est l'occasion d'observer leurs progrès des élèves. Il est important de ne pas préparer préalablement les élèves, le but étant de connaître leurs connaissances, leurs acquis. Ce test nous donne une piste réelle du travail qu'il reste à faire, de l'aide que nous pouvons leur apporter.

2. La mise en situation

> « Les nombres et le calcul sont tellement importants dans notre vie qu'il est difficile d'imaginer un monde sans eux. Pourtant, pendant des milliers d'années, il n'y avait aucun système d'écriture de flair pour estimer et comparer les quantités et les dimensions; on inventait des manières toutes simples de compter le bétail, les sacs de blé et autres possessions. Les nombres écrits se développèrent à partir de techniques simples qui ont varié suivant les régions du monde. » (Ganeri A., 1997, page 6)

Lundi le 19 janvier 2003.

Pour commencer le tout, il faut mettre les enfants dans l'ambiance. Nous oublions les chiffres connus et nous abordons la matière en présentant des symboles nouveaux et souvent perçus comme étranges. En fait, les symboles qui illustrent les nombres sont appelés des chiffres. Un nombre est un ensemble de chiffres et le système de numération est composé des règles d'utilisation pour le comptage, le calcul, la comparaison des quantités et la mesure des objets. Les peuples mirent au point des systèmes de calcul différents à différentes périodes.

Il importe de savoir que les phrases en italique sont des phrases d'enfants. Toutefois, il ne s'agit pas d'un verbatim. Les propos qui suivent résument l'essence des commentaires des enfants, les mots clés de leurs messages sont présents.

Première période (une heure trente)

Pour la première heure, nous remontons très loin dans l'histoire, au temps des Égyptiens. À l'époque des Pharaons, les Égyptiens utilisaient des symboles imagés, les hiéroglyphes, pour écrire les mots et les nombres. Les élèves sont confrontés à ce système, ils doivent trouver les symboles correspondant entre eux, la paire; les hiéroglyphes et les nombres connus (les symboles indo-arabes). Pour ce faire, ils reçoivent une feuille trouée et ils doivent combler ces espaces libres (Annexe 2 : Exercice sur les symboles égyptiens) Le but de l'activité n'est pas uniquement de trouver la correspondance, les enfants doivent aussi faire ressortir les concepts sous-entendus à l'intérieur de ce système, ainsi que cibler les avantages et les désavantages.

Les découvertes des enfants

- *Il n'y a pas beaucoup de symboles à mémoriser parce qu'il y a beaucoup de répétitions. Mais ce n'est pas facile, il faut toujours inventer des symboles, jusqu'à l'infini car il y a un nouveau dessin à chaque groupement de dix.*
  Un second enfant ajoute au commentaire : *Ce système a la même base que celui que l'on connaît, la base 10.*
- *L'écriture des nombres est souvent très longue parce qu'il faut répéter chacun des symboles.*

- *Il n'y a pas d'ordre. Nous pouvons placer les symboles où nous voulons et la valeur du nombre demeure la même.*
- *Les symboles ne sont pas très simplifiés, plus la valeur augmente et plus le dessin est difficile à faire... imaginez des nombres faisant appel aux milliards!*
- *Il n'y a aucun symbole pour représenter le zéro.*
  Un enfant tient à préciser qu'il y a un symbole pour le zéro : *L'absence du symbole c'est le zéro.*

C'est une première pour les enfants, jamais ils n'ont été mis en contact avec l'histoire des nombres. Nous avons avant tout questionné les enfants et tous ont dit qu'ils ne savaient pas d'où venaient ces symboles depuis longtemps étudiés. Un enfant a dit *Le nombre existait avant le 0, 1, 2, 3...c'est impossible car on l'aurait appris.* Les enfants ont pris quelques secondes avant de se mettre au boulot et ils ont fait entendre leur surprise. Cette activité était différente de celles vécues auparavant. La surprise passée, les enfants se sont mis au travail. Un fait nous a impressionnés. Tous les enfants, sans exception, se sont mis au travail, ils ont cherché le raisonnement et les réponses. Plus concrètement, aucun enfant n'est venu au bureau de l'enseignante poser une question quelconque, ils ont persévéré pour trouver quelques pistes pouvant surprendre leurs pairs. Ils savaient que leur réflexion était un pas en avant, que toutes les réponses étaient acceptées et bonnes. Un enfant résume nos propos en disant simplement *Je vois que mes questions font réfléchir car il y a toujours quelqu'un qui parle après moi, qui en rajoute!* Les enfants semblaient stimulés, ils voulaient être les chercheurs qui font progresser la mathématique *Nous redécouvrons, mais encore... nous allons plus loin, on va découvrir de nouvelles choses et nos noms seront inscrits dans un livre historique. On est brillant!*

Donc, malgré la différence des rythmes d'apprentissage, pour une fois tous les enfants se retrouvaient au même niveau, à la découverte des notions historiques pour mieux comprendre le présent. Ensemble, ils cherchaient et ensemble, ils reprenaient confiance en eux *Pour la première fois, j'ai trouvé la réponse en premier!*

Mardi le 20 janvier 2003.

Deuxième période (une heure trente)

Ensemble, nous faisons un bond dans le temps. Nous traversons les années jusqu'au temps des Chinois. Voilà un système qui vit toujours vu les avantages qu'il présente. Les enfants sauront-ils les découvrir? C'est l'intérêt de la période suivante. Encore une fois, les enfants se retrouvent devant une feuille trouée où ils doivent combler les espaces vides. (Annexe 2 : Exercice sur les symboles chinois) Évidemment, un nouveau système sous-entend de nouveaux concepts ou peut-être un réinvestissement des concepts jugés favorables. Laissons la parole aux enfants.

Les découvertes des enfants

- *Des signes, des signes... rien n'est simple!*
  Toutefois, un enfant répond à cette critique en argumentant *Ces signes ne veulent rien dire pour toi car ils sont nouveaux mais nos chiffres 0, 1, 2 et 3 sont aussi bizarres pour les jeunes de la Chine. On trouve nos chiffres plus clairs car on les nomme et les mémorise depuis qu'on est petit.*
- *Il y a dix symboles différents comme pour nous. Nos symboles c'est les chiffres de 0 à 9. En Chine, c'est dix dessins, le zéro n'existe pas et le dix est un signe différent au lieu d'être l'union de deux symboles.*
  Un second enfant a levé la main pour ajouter à ces propos *Il n'y a pas uniquement dix symboles, il y a un nouveau symbole pour l'entrée des centaines, des milliers, des dizaines de milliers et probablement ainsi jusqu'à l'infini*
- *L'ordre de gauche à droite est important, si on change l'ordre c'est un nouveau nombre*

- *Le système chinois est comme celui-ci que l'on connaît, il s'agit d'un système en base dix mais ce n'est pas la position qui indique la valeur du nombre, c'est le symbole inscrit.*
  Donc, un pair résume cette phrase en ajoutant que *Le système chinois en comparaison au système indo-arabe, est désavantagé. Pourquoi? Il demande plus de mémorisation puisqu'il implique un plus grand nombre de symboles.*
- *Le système chinois a l'avantage de se lire tel qu'il est écrit.*

Les enfants sont plus à l'aise avec la nouvelle formule de la construction des apprentissages : recherche/hypothèse/vérification/partage. Ceci était perceptible dans la participation active de tous les élèves sans exception. En fait, les élèves ont compris que l'on progresse si on essaie. Cela signifie que les élèves ont partagé leurs idées bien qu'ils n'étaient pas sûrs de leur validité. L'exercice leur permet de comprendre qu'il n'y a pas une seule bonne réponse. Un camarade a répondu à cette remarque en disant simplement *Tous les chemins mènent à Rome et Rome ne s'est pas fait en un jour, comme dit mon père.* Enfin, les enfants ont compris que les réponses ne tiennent pas la route sans raisonnement. Celui-ci prime.

Mercredi le 21 janvier 2003

Troisième période (une heure trente)

Au IVe siècle avant Jésus Christ, les Mayas d'Amérique Centrale inventèrent un système de hiéroglyphes. Les nombres étaient représentés par des points et des traits. Les Mayas, excellents mathématiciens, ont fait grandement progresser le système de numération. Quelles nouveautés viennent s'ajouter au tableau? C'est encore une fois aux enfants de le découvrir. Rien ne change, les élèves ont la tâche de trouver la paire impliquant les hiéroglyphes mayas et les nombres connus. (Annexe 2 : Exercice sur les symboles mayas) Puis, ils continuent d'analyser l'évolution du système numérique en faisant ressortir les changements, les points marquants ayant traversé le temps, les difficultés toujours rencontrées, etc. Les enfants observent les symboles, jouent avec eux, émettent des hypothèses, défendent leurs points de vue, etc. Un travail qui demande réflexion et communication.

Les découvertes des enfants

- *C'est drôle, avec seulement trois différents symboles, les Mayas pouvaient écrire un infini de nombres. C'est impressionnant!*
- *On peut franchement dire que ce système n'exige pas beaucoup de travail à notre mémoire. C'est bien pour les paresseux.*
- *En plus d'être peu nombreux, les symboles Mayas sont simples, ce n'est pas des dessins exigeant plusieurs petits détails.*
- *L'ordre dans lequel on place les points et les traits importe beaucoup.*

  Il était nécessaire de préciser cette affirmation, un pair s'en est chargé. *En fait, il faut lire le nombre de bas en haut. Plus nous montons les étages, plus la valeur du point ou du trait est plus grande.*

  Pour plusieurs, ce n'était toujours pas suffisant. *C'est comme le système indo-arabe, la position du point et du trait défini sa valeur.*

  Cependant, un camarade, à ce dernier point, tient fortement à ajouter *C'est vrai que les deux systèmes sont semblables mais le système Maya est beaucoup plus compliqué. Je crois qu'il y a deux bases: maximum quatre points, à cinq on change le symbole et c'est l'entrée en jeu du trait. La deuxième base privilégiée est celle du maximum trois traits et on change, on revient au point mais de plus, il faut changer d'étage.*

  Un enfant vient préciser toutes ces définitions en donnant des termes mathématiques. *Le système maya fait appel à la valeur de position et les bases utilisées sont celles de cinq et vingt.*
- « *Enfin, le zéro fait son apparition, les Mayas ont vu la nécessité d'inscrire un symbole pour illustrer l'absence.* »

Voilà une discussion riche en contenu. Les enfants ont rapidement observé les ressemblances entre le système maya et celui indo-arabe. En fait, ils ont ressorti les concepts illustrés et ensuite, les discussions se sont généralement centrées sur une confrontation entre ces deux systèmes. Quel est le système le plus performant? Pourquoi le système Maya fut transformé à l'avantage du système Indo-Arabe? Voilà des questions que les élèves se sont posées et auxquelles ils ont cherché des réponses en discutant entre eux, en échangeant leurs points de vue et parfois, en devant défendre ardemment leur position par de bons arguments mathématiques.

Quelques réflexions des enfants

- *Le système maya est meilleur vu le peu de symboles qu'il implique, c'est plus facile de les mémoriser. Ce système est plus accessible.*
- *Cette simplicité est superficielle. Il y a juste deux symboles mais ils ont plus d'une valeur. Voilà de nouveaux éléments qu'il faut mémoriser. Il faut connaître les symboles et leur valeur selon la position qu'ils occupent. De son côté, le système Indo-Arabe a dix symboles à connaître et la valeur sous-entendue de chaque position, cette valeur demeurant la même peu importe le symbole en place : unité, dizaine, centaine, unité de mille, etc.*

  Un pair appuie ces dires en ajoutant simplement *Notre système est simplifié car il fait appel une base unique, la base dix. Le système maya est plus complexe car il fait appel à deux bases, la base cinq et la base vingt.*
- *L'avantage du système Indo-Arabe est qu'il correspond avec le système d'écriture : de gauche à droite. Avec le système maya il faut lire de haut en bas.*
- *Le système Maya est logique puisque plus c'est grand, plus c'est haut. Si je monte sur une marche, je suis plus haut. Simple!*
- *Plus on avance, plus on cherche le perfectionnement, le système indo-Arabe étant arrivé plus tard, il est supérieur au système maya car il a su profiter des difficultés vécues antérieurement.*

> « Les chiffres que nous utilisons aujourd'hui, ont pour origine ceux qui ont été inventés en Inde vers l'an 500. Ils sont souvent appelés chiffres « arabes » parce que les marchands et les savants arabes les apprirent des Indiens et en diffusèrent l'utilisation en Occident vers l'an 1200. La plupart des habitants d'Europe utilisaient alors les chiffres romains. Le système arabe était beaucoup plus rapide et facile à l'usage. » (Ganeri, A., 1997, page 12)

Donc, les élèves ont découvert que le temps et les besoins ont fait évoluer le système de numération. Finalement, « *Nous comptons probablement par 10 parce que nous avons dix doigts.* » Cela explique pourquoi nous avons pris le temps de faire ressortir tous les concepts propres au système indo-arabe : les dix symboles, la valeur de position, le groupement par dix et la raison de la présence du zéro. Ces concepts, les élèves les ont découverts, ils ont vu leur évolution… il a suffit à l'enseignante d'institutionnaliser les concepts, de donner les termes mathématiques justes pour que la communication soit plus efficace.

Jeudi le 22 janvier 2003

Quatrième période (une heure)

C'est bien beau de cibler tous les éléments sous-entendus sous chacun des systèmes ancestraux, mais ces systèmes répondent-ils aux besoins de la société, la réalité dans laquelle ils évoluent? Plus concrètement, est-ce que les différents systèmes vus en classe pouvaient répondre aux besoins réels, aux besoins des différents calculs?

Pour répondre à cette question, nous avons imaginé une situation vécue plus d'une fois par nos plus lointains ancêtres : faire le commerce. En ce sens, un élève se retrouvait être le vendeur et un second, l'acheteur. Ils devaient transiger une offre de vente/achat.

Ensuite, ils échangeaient leur rôle afin de vivre la situation des deux côtés. En un mot, l'enfant doit résoudre une addition ou une soustraction impliquant des symboles longtemps reconnus mais aujourd'hui oubliés.

- *C'est loin d'être évident, il faut constamment se référer à la légende pour reconnaître les symboles transcrits.*
- *Zut, les Égyptiens aimaient écrire et écrire et écrire... C'est long additionner et soustraire de la façon égyptienne.*
- *Les Chinois emploient des termes plutôt complexes, ce n'est pas simple de reproduire leurs dessins.*
- *Pour résoudre les équations mayas, il faut toujours reprendre du début pour se remémorer la valeur du point et du trait lorsque ce dernier change d'étage, il faut reprendre l'évolution du trait et du point en partant du bas. Plus d'un calcul à faire chaque fois.*
- *Il faudrait plus d'une fois pour prendre l'habitude... Ce ne fut pas simple non plus de faire pour une première fois les équations avec les symboles indo-arabes. La pratique c'est nécessaire!*
- *La grandeur des nombres indique le travail à effectuer, c'est contraire au système indo-arabe.*
- *L'absence du symbole 0 pour signifier le zéro ce n'est pas évident d'y penser. Nous sommes habitués que l'absence d'un symbole c'est tout simplement l'absence et ainsi donc un nombre plus petit. Il faut dire les choses comme elles sont, alors il faut écrire les choses comme elles sont : un point c'est tout!*
- *Il est intéressant de voir l'évolution des symboles aujourd'hui reconnus, car ainsi on comprend les raisons de notre système. Cependant, ce n'est pas pour rien si les symboles et les règles des systèmes ont changé, c'est parce que c'était plus simple et efficace.*

Il est clair que l'exercice du vendeur/acheteur ne fut simple pour aucun enfant. En fait, il fut réussi mais après plus d'un essai. Les élèves ont vécu les difficultés rencontrées au cours du temps, en quelques jours ils ont vécu l'évolution du nombre. Ils ont dû surmonter les obstacles et trouver des solutions, que ce soit à la longueur des calculs, à l'exigence demandée à la mémorisation, à la difficulté de reproduire correctement les symboles, etc. En résumé, les élèves n'ont pas seulement observé les difficultés des différents systèmes ancestraux, ils les ont vécues. Cela étant dit, les élèves peuvent aujourd'hui mieux s'exprimer quant aux avantages et aux inconvénients des systèmes mais de plus, ils sont habiletés à s'affirmer sur les concepts sous-entendus à l'intérieur du système indo-arabe qui a traversé le temps et aussi, l'évolution.

Le système indo-arabe a l'avantage de demander peu de mémoire puisqu'il fait appel à uniquement dix différents symboles. Le système arabe fonctionne par groupement de dix. Puis, le système indo-arabe a l'avantage de profiter de la valeur de position pour réduire le nombre de symboles, profitant de la place qu'occupe ce dernier. Finalement, le système indo-arabe profite de l'intégration d'un symbole pour le zéro, il change de symbole mais conserve l'idée. Voilà les conclusions communiquées par les élèves de la classe. Les élèves n'ont pas toujours les mots justes, mais ils savent observer, discuter et conclure. Ils jouent bien les rôles qui leur reviennent pour faire leurs propres apprentissages scolaires. L'enseignant a de son côté aussi deux rôles à remplir; celui d'encourager l'ensemble des élèves et celui d'institutionnaliser (Pourquoi devoir institutionnaliser? Simplement pour s'assurer d'un vocabulaire commun afin de facilité les discussions ultérieures) les notions décrites par chacun.

3. <u>Le cœur de la situation d'apprentissage</u>

> « Les mathématiques sont faites d'inscriptions, de traces écrites sur un support matériel. Ces traces, constituées de figures, de lettres, de tableaux et de discours, ont pour visée de conserver ou de transmettre des raisonnements. » (Cerquetti-Aberkane F. et Rodriguez A., 2002, page 8)

Lundi le 27 janvier 2003

Dans un premier temps, nous avons pris quelques instants pour observer minutieusement le document ancestral illustrant des multiplications réalisées de diverses façons. Il était important que les élèves se familiarisent avec les écritures et les symboles, très ressemblant pour la majorité à ceux d'aujourd'hui.

Paroles d'enfants

- *L'écriture est spéciale! En particulier le M qui est grand et décoré!*
- *La majorité des symboles sont identiques aux chiffres que l'on connaît, excepté la spirale couchée.*

  Voulant répondre à cette observation, un élève ajoute. *Il faut chercher sa signification. Facile!. Il manque le 8 lors du décompte des dix symboles aujourd'hui connus.*

  Un ami tient à ajouter son grain de sel. *Si on tente de faire les calculs sur une feuille brouillon, on remarque rapidement que ce symbole se remplace par le chiffre huit, les calculs en sont une preuve.*
- *Il n'y a pas de signes indiquant l'opération de la multiplication, le « X ».*
- *Il n'y a aucune retenue d'inscrite.*
- *Les chiffres, comme les lettres, semblaient davantage artistiques à l'époque, par exemple le « 6 » est plus stylé par une grande courbe en haut, le « 7 » et le « 1 » n'avaient pas de barre et plus, le « 7 » ressemblait à un signe voulant donner la grandeur, plus grand que ou plus petit que...puis le 3, il commençait plus vers l'intérieur, des courbes plus marquées, etc.*

  En fait, un enfant interrompt son camarade pour résumer. *Les symboles depuis 1608 n'ont pas beaucoup changés. Il est toujours possible de les reconnaître. C'est peut-être simplement l'écriture de la personne qui est particulière... Je n'écris pas comme mon voisin et lui n'écrit pas comme son autre voisin.*

Du coup, nous essayons aussi de mettre un peu d'ordre dans ces pages de calcul. En les regardant attentivement, en détail, il est possible de regrouper, selon leur apparence, les différentes opérations. En sous-groupe de trois ou quatre, les élèves se sont dispersés afin de discuter des différentes opérations contenues dans le document entre leurs mains. Tous les élèves sont arrivés aux mêmes conclusions, ils ont tous trouvé cinq méthodes de réaliser une multiplication sous-entendue dans ces 13 équations.

Catégorisation des élèves

- *C'est plutôt évident car l'organisation des calculs est très différente d'un numéro à un autre. Il est simple de les rassembler, les ressemblances et les différences sont flagrantes.*
- *La première catégorie est celle voulant que l'on fasse la multiplication telle que nous l'apprenons aujourd'hui.* Nous l'appellerons la méthode traditionnelle (#1-2-5).
- *La seconde catégorie est aussi très simple à identifier, c'est la méthode que l'on connaît mais cette fois on commence les calculs par la gauche. Ils font tout à l'envers.* Nous l'appellerons la méthode inversée (#3-7-12-13).
- *La troisième méthode c'est celle du grand carré où chaque case est divisée en deux.* Nous l'appellerons la méthode du quadrillage (#10).
- *La quatrième méthode est une toute nouvelle méthode. On pourrait comparer cette opération à une forme géométrique.* Nous l'appellerons la méthode du losange. (#4-6-8-9)
- *Cela ne ressemble pas à une opération, cela ressemble à un dessin d'enfant.* Nous l'appellerons la méthode du soleil. (#11)

Cet exercice fut simple, les enfants ont exprimé ce sentiment: « *C'est tout! Il faut uniquement les classer! C'est facile! Toutefois, j'espère qu'il ne faudra pas aussi les comprendre et les expliquer...!* » Ce n'est pas seulement les mots qui donnent la nature de la complexité de l'exercice. Premièrement, il a été réalisé rapidement. Deuxièmement, il a été réussi par toutes les équipes, sans erreur. Puis, en faisant un tour lors des discussions en groupe, aucune hésitation ou confrontation ne fut entendue. Simple peut-être, mais l'avantage est que les enfants se sont sentis confiants d'aller de l'avant : « *On est égyptien, on est romain, on est grec... si on apprend tout de chacun on sera beaucoup plus brillant qu'eux!* » Toutefois, cet exercice avait plus d'une raison d'être, il n'avait pas uniquement comme fonction de donner aux enfants confiance en eux-mêmes, l'exercice cherchait aussi à voir la diversité, à cibler les nombreux chemins pour un même objectif.

Dans un premier temps, nous concrétisons, en grand groupe, la nature des différents symboles puisque nous observons les trois opérations faisant appel à la méthode enseignée à l'école aujourd'hui. En fait, nous refaisons les calculs pour vérifier les étapes et bien sûr les réponses : « *Tout fonctionne à merveille! Ils ont tous la bonne réponse, c'est un examen à 100%.* »

Mardi le 28 janvier 2003

3.1 La méthode inversée

Au lendemain de ce premier contact avec les techniques de multiplication de l'époque, les élèves poursuivent l'exercice en explorant les opérations placées dans l'autre sens par rapport à la méthode connue des enfants. Rapidement, les élèves ont remarqué que les calculs étaient effectués de la même façon que celle apprise, mais dans le sens inverse. *J'ai essayé de faire cette multiplication comme à l'habitude et j'ai tout de suite vu que les calculs intermédiaires donnaient les mêmes résultats dans les deux cas. Toutefois, l'un commence par le haut et l'autre par le bas, la première ligne de calcul correspond à la dernière ligne de la nouvelle opération.*

Évidemment, l'analyse ne se termine pas ici. Les enfants ont compris le principe, mais leur compréhension est-elle suffisante, peuvent-ils trouver les erreurs présentes dans le document? *Tout est beau puisque chaque opération a la même apparence.* Une seconde équipe ne s'est pas fiée uniquement à l'aspect extérieur, elle a cherché à valider les calculs présentés *L'opération #12, pas de problème, elle est juste. Toutefois, pour les opérations #7 et #13, les réponses ne sont pas bonnes. J'ai fait le calcul de façon habituelle et la réponse est différente. Cependant, nous n'avons pas trouvé l'origine des erreurs.* Une chance, une autre équipe est venue enrichir la discussion en donnant une hypothèse pouvant expliquer le raisonnement. *En fait, la troisième multiplication et celle #7 sont semblables. Ou il faudrait plutôt dire que l'opération #7 reprend les mêmes chiffres que la précédente, mais ces derniers n'ont pas la même valeur. Ces chiffres n'occupent pas la même position étant donné l'ajout du 7 aux unités dans le nombre 789467 et l'ajout du 1 aussi aux unités dans le nombre 876541. Il s'agit maintenant de nombres dans les centaines de mille contrairement aux précédents qui se situaient dans les dizaines de mille. La réponse est évidemment trop petite.* Un camarade de cette équipe ajoute aussi. *Il ne faut par croire pour autant que la méthode ne soit pas juste. Nous avons refait le calcul, utilisant la même méthode, la méthode inversée. Tranquillement, nous avons fait chaque étape et nous sommes parvenus à la bonne réponse. Si l'élève avait révisé ses calculs, il aurait pu l'observer, où il aurait simplement eu à faire une approximation pour rapidement se rendre compte que la réponse n'était pas réaliste, beaucoup trop petite.* La discussion semble terminée. L'enseignante attend quelques secondes avant de demander ce qu'il en était de la quatrième opération, utilisant toujours la méthode inversée. Le raisonnement est-il correct ou faux? Les élèves avaient des commentaires à formuler. *La réponse n'est pas bonne et nous en sommes certains car nous avons vérifié en refaisant le calcul et cela des deux façons : habituelle et inversée.* Une seconde équipe lève la main pour obtenir la parole. *Nous en sommes arrivés à la même conclusion mais sans trouver l'endroit où l'erreur a été commise. En fait, nous ne comprenons pas la réponse aux calculs intermédiaires effectués. Comme par exemple, 863452 par 30000 devrait donner 25903560000, mais il est inscrit 40136700000. Plus simple, 3 multiplié par 2 donne 6, mais c'est 7 qui est écrit comme résultat. Nous avons d'abord pensé à une erreur d'inattention mais on oublie cette hypothèse quand on voit le nombre élevé d'erreurs. Nous en sommes là!* » Toutes les équipes étaient sur un pied d'égalité concernant cette opération, les élèves voient que le résultat est négatif mais ne cernent pas la faille dans le raisonnement. Il faut avouer que rien n'est sûr, les chercheurs ont trouvé une piste intéressante sans pour autant pouvoir valider leur hypothèse. Au tableau, l'enseignante démontre aux élèves comment les chercheurs ont donné une logique aux calculs effectués.

> « Est-ce que le calculateur a essayé de faire les calculs de cette manière ? Peut-être a-t-il tout simplement voulu inventorier toutes les façons possibles d'effectuer une multiplication? L'histoire sème le doute. » (Cerquetti-Aberkane F. et Rodriguez A., 2002, page 67)

Les avantages de cette méthode de l'avis des élèves

- *Elle est simple puisqu'elle ressemble beaucoup à la méthode que l'on connaît.*
- *Nous pouvons découvrir l'ordre de grandeur approximatif de la réponse finale après avoir effectué seulement le premier calcul intermédiaire.*
- *Elle semble plus logique puisqu'elle s'effectue dans le même sens que l'écriture et la lecture.*
- *Toutes les opérations peuvent se résoudre de par cette méthode.*

Les inconvénients de cette méthode selon l'œil des élèves

- *Elle est si semblable, pour ne pas dire pareille, à la méthode habituelle, je ne vois pas en quoi elle peut m'aider. J'ai déjà de la difficulté.*
- *On change l'ordre mais rien d'autre.*

Cette méthode est appréciée par tous et chacun. *Je crois adopter cette méthode pour l'avenir, car dès le départ on a une idée de la fin!* Un pair ajoute à ces paroles *Je vérifierai mes résultats en utilisant cette méthode.*

Mercredi le 29 janvier 2003

3.2 La méthode du quadrillage

C'est parfois nos erreurs qui nous permettent de mieux comprendre!

Cette méthode du quadrillage est aussi appelée la méthode *per gelosia* ou la méthode arabe. Elle se présente comme un tableau à double entrée. Les élèves ont immédiatement compris le procédé, tout semblait si simple. Mais oui, il a fallu compliquer les choses! Est-ce que la réponse est bonne? *Toutes les additions fonctionnent.* Ceci est la réponse spontanée d'un élève de la classe. Les enfants semblent satisfaits de ce qu'ils observent sauf une équipe. *Nous avons effectué la multiplication de 5678678 par 234567 et la réponse n'est pas celle donnée. Nous avons chacun fait le calcul, ce qui signifie que nous l'avons fait quatre fois! Voilà une preuve qui est concluante!* Une seconde équipe ne comprend pas le problème soulevé, ils affirment tous que leur réponse est correcte, le nombre est le même que celui indiqué sur le document. Un doute se pose! L'enseignante demande à un représentant de chacune des deux équipes qui se confrontent de venir illustrer leurs calculs au tableau afin de pouvoir comparer et analyser le raisonnement de chacun. Évidemment, les deux équipes ont utilisé la méthode traditionnelle pour donner la preuve. Toutefois, un fait intéressant est apparu. L'une des deux équipes a aussi fait la preuve par la multiplication inversée, mais il est clair que la réponse est inchangée. Quelle différence apparaît au tableau entre les calculs de chacune des équipes? Chacune des équipes a raison, ils obtiennent la bonne réponse aux calculs qu'ils effectuent. En fait, la première équipe a multiplié 5678678 par 234567 et leur réponse est juste en affirmant 1332030462426. Toutefois la deuxième équipe obtient aussi la bonne réponse en disant 4346641858896, mais ces derniers ont multiplié 5678678 par 765432. Voilà la différence entre les deux équipes, l'opération au départ est différente. Nous apprenons de nos erreurs, n'est-ce pas un proverbe? Pourquoi avoir inversé les chiffres, l'équipe ne parvient pas à répondre à cette question. *Oups! On s'est trompé! Mais on a la bonne réponse!*

> « Devoir écrire l'un des deux nombres en commençant par le bas peut poser un problème à certains élèves, car il est moins aisé de voir quels sont les deux nombres à multiplier. En fait, on peut tout à fait résoudre ce problème en écrivant le premier nombre horizontalement et le deuxième nombre verticalement en commençant par le haut, mais à droite du tableau. Il faut alors changer le sens des diagonales et procéder de la même pour faire l'addition. » (Cerquetti-Aberkane F. et Rodriguez A., 2002, page 70)

Il est vrai que la solution a été trouvée à partir d'une erreur, mais l'important, maintenant, est de saisir le raisonnement de la méthode, son fonctionnement. L'enfant doit s'habituer et se souvenir de la disposition initiale des nombres puis du procédé. *C'est facile!*

<u>Les avantages de cette méthode de l'avis des élèves</u>

- *Il suffit d'effectuer les multiplications correspondant à chaque case. Nous séparons ainsi le chiffre des unités de celui des dizaines en traçant la diagonale des cases rectangulaires. Il faut uniquement bien connaître les tables de multiplication.*
- *C'est plus simple car il n'y a aucune retenue. Donc, il est impossible d'oublier d'en tenir compte, d'oublier de les inscrire ou d'utiliser la mauvaise retenue.*
- *On respecte la position de chacun des chiffres puisque la retenue, l'indication montrant qu'il y a un groupement, s'inscrit simplement dans une case différente. La diagonale sépare deux ordres de grandeurs différentes.*
- *C'est long mais j'aime mieux prendre mon temps et m'assurer que ma réponse est juste. J'évite les erreurs d'inattention.*

Les inconvénients de cette méthode selon l'œil des élèves

- *C'est une méthode efficace, évitant quelques soucis comme celui de la retenue mais par contre c'est une méthode plus longue à réaliser. Il faut tracer préalablement le quadrillage et les diagonales.*
- *Ce n'est pas difficile mais c'est long il n'y a pas de doute.*
- *Plus on perd de temps, plus on perd patience, plus on fait des erreurs simples.*

Il est clair que cette méthode ne fait pas l'unanimité. En fait, les élèves éprouvant des difficultés avec les méthodes traditionnelles ont affirmé qu'ils appréciaient réduire le pourcentage de difficultés, peu importe le temps exigé. Prendre le temps pour réussir ne les dérange pas car comme un proverbe le dit si bien : « La fin justifie les moyens. » Toutefois, les élèves maîtrisant l'opération de la multiplication par la méthode traditionnelle ne voient pas l'intérêt de perdre du temps inutilement. Il y a une chose de bien comme dit un élève. *Il n'est jamais inutile d'apprendre une nouvelle façon de faire, c'est une méthode de plus si l'on se retrouve devant un nouveau défi, peut-être plus complexe ou si on veut vérifier nos réponses.* Un autre proverbe ajouterait : « Deux fois valent mieux qu'une! »

Jeudi le 30 janvier 2003

3.3 La méthode du losange

Voilà une nouvelle méthode qui a permis plusieurs discussions. Dans un premier temps, les enfants cherchaient la position des produits partiels à l'intérieur du losange. Une fois le temps écoulé, toutes les équipes disent avoir saisi le raisonnement de cette méthode, mais ne voulant pas embrouiller leurs idées, nous avons commencé la discussion par l'opération #4 uniquement. Un enfant a répondu. *C'est très simple, ce n'est pas bien différent de la multiplication habituelle. On effectue l'opération, on distribue le dernier chiffre 8 de 848 sur 837 (8 X 7 = 56, 8 X 3 = 24 et 8 X 8 = 64)*

Toutefois, on écrit la réponse de chaque résultat sur une ligne différente en décalant toujours vers la droite. Le premier résultat (8 X 7 = 56) est écrit au milieu de la première ligne. Finalement, comme toujours, il faut additionner, colonne par colonne pour obtenir le résultat final. Tous les élèves acquiescent. Alors, il leur est demandé de refaire l'opération mais en utilisant cette fois la méthode traditionnelle. Un problème de taille apparaît. *Tout semblait bon, nous avions les bons produits partiels, chaque ligne correspondait lorsque nous effectuions la méthode du losange. Mais pourquoi les deux réponses, d'un même algorithme, sont différentes? Nos réponses devraient être identiques peu importe la méthode utilisée.* Toutefois, un élève provoque le doute en observant. *Il y a un des deux nombres de cette multiplication qu'il faut changer. La réponse indique un 4 à la position des unités, ce qui est impossible si l'on multiplie 7 X 8 = 56. Il ne s'agit alors plus d'un 4 mais d'un 6. Voilà le problème! Il y a parmi les deux nombres que l'on voit, l'un qui n'est pas bon.* Ne voulant pas décourager leur initiative de recherche, il a simplement suffit d'affirmer que le calcul sous-entend une logique différente et qu'il est juste. Motivés à trouver eux-mêmes la réponse, les élèves ont demandé si c'était possible de leur laisser quelques minutes supplémentaires pour chercher un peu plus loin. Finalement, sur un total de sept équipes, six ont trouvé la solution. *Il faut inverser le premier nombre, l'opération demandée est 738 X 848.* Cependant, seulement deux équipes pouvaient expliquer pourquoi c'était ainsi qu'il fallait agir. *Il faut observer la position des produits partiels pour mieux comprendre. Nous avons multiplié chaque chiffre de chaque nombre par chaque chiffre de l'autre nombre proposé : 56, 24, 64 / 28, 12, 32 / 56, 24, 64. Tous les résultats partiels sont là et il n'y a pas de problème au niveau des tables. Ensuite, on observe la position. Chaque fois on change de ligne et on décale la réponse vers la droite. Cette règle est conservée du début à la fin et de cette suite aucune erreur apparaît. Il nous faut chercher ailleurs. La réponse fut notre prochain point de départ. Le chiffre 4 aux unités vient du produit partiel à l'extrémité droite de mon losange, le produit partiel de 8 X 8 = 64. Cette multiplication étant donc celle des unités par les unités. Alors, le premier nombre est inversé. À des fins de vérification, nous avons fait la multiplication de 738 par 848 qui donne 625824.* Un enfant ayant alors compris ajoute aux propos de son camarade. *C'est la même logique que la méthode du quadrillage.*

Ensuite, nous avons observé l'opération #6, il n'y a aucun problème. *Plus la grandeur des nombres augmente, plus le losange est grand, mais la technique demeure la même. C'est difficile au départ de s'ajuster car c'est nouveau et il faut réfléchir avant d'écrire nos premières réponses pour ne pas se tromper.* Un second enfant répète en d'autres mots. *Quand on sait nos tables de multiplication, c'est rapide!*

Puis vint l'opération #8. Il n'y a malheureusement pas de réponse inscrite au-bas de l'équation. Les élèves se mettent à la tâche et cherchent à terminer ce problème. Certains élèves ont seulement fait la somme des produits partiels et concluent qu'ils avaient la réponse, la seule réponse possible. Certaines équipes ont eu un raisonnement pluspoussé, ils ont recommencé sur une feuille brouillon le calcul donné. Qui a opté pour le meilleur chemin? Bien sûr, les trois premières équipes ont terminé plus rapidement, mais ont-elles la bonne réponse? Les quatre autres équipes ont travaillé plus fort, ils ont tout refait. *Il y a une erreur à la neuvième ligne, la multiplication de 9 X 8 = 72 et non 64 tel qu'il est écrit sur le document original. Pour le reste tout est bien, il suffit uniquement de résoudre l'addition des sous-produits afin d'obtenir le résultat final.* Voilà une belle leçon de persévérance par les pairs pour les autres équipes ayant cherché trop rapidement des conclusions.

Finalement, nous passons à la dernière opération valorisant la technique du losange, l'équation #9. Deux gros problèmes se posent. Premièrement, deux lignes sont illisibles, il faut élucider ces trous. Deuxièmement, les produits partiels ne sont plus placés comme précédemment. Les élèves retournent à leurs papiers brouillons, crayons et efface. Les résultats sont impressionnants. Il faut savoir que l'opération est cette fois différente car aucun des nombres n'est inversé, c'est pourquoi il faut commencer le calcul différemment pour conserver la valeur réelle de chaque chiffre. Tous les élèves ont essayé de reproduire les calculs tels qu'appris et tous ont vu que c'était impossible. Lorsque la question suivante fut posée : « Quel est le problème avec l'équation sous vos yeux? » Tous les élèves ont levé la main pour répondre. *On remarque que les nombres ne sont pas retournés. En fait, les nombres observés sont les nombres réels. Toutefois, le* *calculateur a commencé le travail par les chiffres aux opposés.* Comment l'avez-vous découvert? Plusieurs enfants ont souri et ont voulu répondre. *Encore une fois, il faut observer les produits partiels et jumeler ceux-ci à la réponse. En regardant les unités, on remarque que le produit partiel voulu est celui de la multiplication de 6 par 7 = 42. Ensuite, il suffit de suivre la logique de la place occupée par chaque produit partiel de la méthode du losange. Pour valider notre hypothèse, on utilise une autre technique et on observe si on a la même réponse.* C'est ainsi, qu'en observant les feuilles de chaque équipe, on remarque que tous les élèves ont trouvé les deux lignes manquantes.

Les avantages de cette méthode de l'avis des élèves

- *C'est semblable à la technique du quadrillage mais c'est moins long car on n'a pas à tracer le carré.*
- *C'est simple car il n'y a aucune retenue à considérer.*
- *Voyant tous les calculs à faire, il est plus facile d'identifier nos erreurs.*
- *La forme est déjà un bon indicateur à savoir s'il y a erreur.*

Les inconvénients de cette méthode de l'avis des élèves

- *Il ne faut pas uniquement se fier à la forme géométrique du losange car cela pourrait porter à confusion. Si on multiplie deux nombres n'ayant pas le même nombre de chiffres, il n'y a plus de losange.*
- *Il ne faut pas faire erreur et veiller à bien placer les nombres dès le départ.*

Plusieurs élèves affirment que cette méthode est très avantageuse et surtout, qu'elle a plus de sens. Toutefois, cette nouveauté arrive tardivement selon certains élèves, l'habitude est plus simple à conserver.

Vendredi le 31 janvier 2003

3.4 La méthode du soleil

Une nouvelle méthode apparaît et s'avère très artistique. Toutefois, un élève a fait une bonne remarque suite à son travail. *C'est vrai que huit traits forcent à penser à un soleil et c'est attrayant, mais ils ne sont pas indispensables.* » Un camarade d'une autre équipe répond à ce commentaire. *Il est vrai que les traits ne sont pas essentiels mais ils simplifient la tâche puisque qu'ils nous orientent dans l'espace.*

Il est évident que les élèves commencent graduellement à s'habituer à la recherche de solutions par raisonnement, à émettre des hypothèses et à les vérifier par des méthodes testées antérieurement. C'est ainsi que cinq équipes sur sept ont trouvé comment s'élaborait la méthode dite du « soleil ». Un élève résume l'opération de la multiplication. *Il suffit de trouver où placer les produits partiels. Il faut les calculer avant de les trouver. Ici, les produits intermédiaires sont situés en diagonale, en décalant toujours vers la gauche.* » Un ami à ses côtés réplique. *Je suis d'accord avec lui pour la diagonale, mais je dirais qu'il faut décaler les produits intermédiaires vers la droite.* » Qui a raison? Qui a tort? La question est posée à l'ensemble du groupe. Il y a eu une minute de silence, les élèves croyant soudainement que la question était un piège. La surprise passée, un élève partage sa réflexion. *Gauche ou droite, cela n'a pas d'importance. En fait, tout dépend de l'unité de grandeur que l'on choisit, pour débuter l'opération. Si nous commençons par les centaines (123 X 100) il faut poser le résultat partiel à la gauche. Dans le cas contraire, si nous commençons par les unités (123 X 3), il faut poser cette fois le résultat partiel à la droite.* La majorité des élèves de la classe acceptent l'idée sauf deux élèves. *C'est vrai que les deux façons de faire sont bonnes. Toutefois, il faut être logique. Il est plus simple d'orienter ses réponses si tout commence directement sous l'équation. Il faut privilégier la technique qui propose de débuter par les unités (123 X 3), ce résultat partiel donne un indice pour bien disposer les prochains* *résultats. En partant du sens inverse, nous ne savons pas exactement où mettre le résultat obtenu craignant de manquer de place pour les prochains.* »

<u>Les avantages de cette méthode de l'avis des élèves</u>

- *Il n'y a pas de retenue.*
- *Simple et rapide.*
- *Même lorsque les produits partiels sont supérieurs à 9, rien ne change. En fait, la seule différence se situe au niveau de l'addition des produits partiels, des retenues entreront en jeu.* (Pour obtenir de tels commentaires, il faut savoir que plusieurs enfants ont essayé, sans pourtant qu'il y ait une consigne en ce sens, diverses multiplications, mettant en jeu différents ordres de grandeur chez les nombres.)

<u>Les inconvénients de cette méthode de l'avis des élèves</u>

- *La disposition spatiale est importante et pourtant il serait simple de faire une erreur car il y a toujours un grand espace entre les produits intermédiaires.*
- *Le soleil n'existe plus lorsque les deux nombres impliqués par la multiplication n'ont pas le même nombre de chiffres. Ce n'est pas un inconvénient si l'on s'y attend mais il faut le savoir pour ne pas se fier uniquement à l'aspect final pour valider sa réponse.*

Pour tous les élèves, il s'agissait d'une nouvelle méthode. Personne au cours de leur parcours scolaire n'en avait entendu parler ou en avait vu la démonstration.

Lundi le 03 février 2003

3.5 Retour sur les diverses activités: Avantages et Désavantages

Lors de cette période, nous avons simplement fait ressortir les différents avantages et inconvénients des diverses techniques observées. Les élèves ont mis par écrit ce tableau afin qu'il reste une trace écrite et qu'ils puissent s'y référer si le besoin se fait sentir. Il serait inutile de ressortir ici tous les avantages et inconvénients nommés précédemment, ce serait redondant. Toutefois, l'un des points marquants de la discussion fut la question : « Pourquoi ne nous a-t-on jamais enseigné ces diverses techniques au cours des années antérieures?» Ne pouvant m'exprimer pour les autres enseignants, nous avons contourné la question en cherchant plutôt à répondre à: « Quels sont les avantages de connaître notre passé mathématique et ainsi, observer les concepts mathématiques sous plus d'une optique? »

La parole aux enfants :

Premièrement, les similitudes entre les techniques permettent de renforcer les connaissances. Il s'agit indirectement de rappels des concepts. Un enfant explique ces mots. *J'ai maintenant compris pourquoi il fallait déplacer d'un espace vers la gauche les produits partiels à chaque ligne. On me l'avait souvent dit et répété mais cette fois j'ai vu. Le fait de voir la position des différents produits partiels de la méthode du losange et surtout, d'avoir personnellement cherché la logique de la méthode m'a aidé.*

Deuxièmement, la diversité permet évidemment le choix, un choix personnel et éclairé. Un enfant résume ces mots. *Moi, je préfère la méthode du quadrillage, c'est plus long mais je comprends mieux.*

Troisièmement, se pencher sur différentes méthodes oblige l'analyse et c'est pourquoi cela favorise la compréhension de chacune des étapes. Quelques enfants éprouvant au départ de grandes difficultés s'expriment. *On n'était pas seulement assis à écouter. On a travaillé.* Plus d'un enfant s'exprime. *C'est nous qui avons donné les idées et les réponses. On a travaillé fort.*

Quatrièmement, la recherche inspire au perfectionnement de l'élève. Toujours le crayon en main, un enfant a parlé. *En observant l'évolution, je vois que tout n'est pas parfait et qu'il est important de continuer à chercher le meilleur.*

Cinquièmement, c'est par des observations, des essais, des hypothèses, des discussions… que se développe le jugement critique. Il y a alors apprentissages. Un enfant admet que ce n'est pas toujours simple de construire ses apprentissages. *Pour travailler, on a travaillé! On a cherché, on a fait des hypothèses, on a fait des essais, on a calculé, on a discuté, on a critiqué... mais j'ai beaucoup appris.* Un deuxième enfant spécifie. *C'est intéressant d'observer plus d'une technique et d'en discuter. Bien que nous n'ayons pas la même opinion, le partage nous amène à considérer chaque élément différemment.*

Il est intéressant d'écouter les intérêts et les besoins des enfants. C'est eux qui doivent être au centre de l'éducation, car c'est eux qui construisent leurs apprentissages. Les enfants lorsqu'ils ont la parole, ont beaucoup à dire.

Jeudi le 06 février 2003

4. <u>Période du Post-test</u>

Nous voilà à la fin de notre situation didactique, nous voulons évaluer le travail accompli par chacun, le progrès réalisé par chacun. Nous voulons connaître l'intérêt de la situation didactique, savoir si elle a porté fruits aux yeux des élèves et si elle fut bénéfique pour chacun.

Annexe E

Une bibliographie, à titre d'exemples, des différents livres historiques pour des élèves d'âge primaire

BIBLIOGRAPHIE JEUNESSE

Livres à caractère historique

ALPHANDARI, Y., (1999), À la découverte des hieroglyphes. Collection Castor Doc, Université d'Utrecht : Éditions Père Castor Flammarion.

BURLAND, C., (1982), Une cité aztèque au téléobjectif. Montréal : Éditions École active/ Éditions Gamma, 29 pages.

COTTERELL, A., (1994), La Chine des Empereur. Collection Les yeux de la découvertes, Paris : Édition Gallimard, 64 pages.

DAUBER, M., NOBLET, M., (1992), La Chine : Les carnets de route de Tintin. Belgique : Édition Casterneau, 75 pages.

DELEDICQ, A. et J-C., (1997), Le monde des chiffres. Collection Aux couleurs du monde, Éditions Circonflex, 32 pages.

FAUCHET, F., (1996), La Chine ancienne. Collection Les clés de la connaissance, Éditions Nathan, 63 pages.

MCINTOSH, J., (1994), Trésor de l'archéologie. Collection Les yeux de la découverte, Paris : Gallimard, 64 pages.

PO KAN, L., (1981), Comment vivaient... les anciens Chinois. Paris : Éditions Fernand Nathan, 61 pages.

RACHET, G., (1976), Des mondes disparus des Égyptiens aux Mayas. Paris : Éditions Hachette Librairie, 125 pages.

RACHET, G. et M-F., (1968), Dictionnaire de la civilisation égyptienne. Paris : Librairie Larousse, 255 pages.

STEELE, P., (2001), Vivre comme... Les Incas. Éditions De la Marlinière jeunesse, 64 pages.

WOOD, T., (1992), Entrez chez les Aztèques. Paris : Éditions Gründ, 48 pages.

... Plusieurs autres livres pourraient être cités.

Annexe F

Les différentes compétences visées par cette situation-problème à caractère historique

Puis, un résumé des activités d'apprentissage : Activité de préparation et problème.

PROBLÉMATIQUE EN MATHÉMATIQUE AU PRIMAIRE

Titre : **Nos ancêtres les plus lointains savaient-ils compter?**

Thème : La multiplication (et la numération)

Niveau : Troisième cycle, plus précisément en 5^e année

Durée : Environ trois semaines, à raison d'une à deux heures par jour.

Objectifs :

Comprendre l'opération de la multiplication et savoir la mettre en pratique efficacement.

L'observation du passé à pour intérêt de permettre un travail spécifique sur notre propre technique opératoire et ses significations.
Prendre conscience aussi des différents concepts des nombres que l'on connaît (exemple : la base 10, la valeur de position, le zéro, etc.)

Préalables :

En fait, aucun préalable n'est requis. Nous savons que les élèves effectuent souvent des multiplications en répétant certains gestes qui sont devenus, pour une grande majorité d'entre eux, des gestes automatisés, comme par exemple celui de décaler les résultats d'un espace, en plaçant un zéro, vers la gauche au début de chaque ligne. Toutefois, l'élève connaît-il la raison de ce geste? Pourrait-il justifier son action?

Or, puisqu'il est question ici d'un retour en arrière, puisqu'il est question lors de cette situation didactique de s'intéresser à la disposition spatiale des chiffres dans les opérations posées et ainsi de réfléchir sur les différentes propriétés de la multiplication, il est clair que nous nous concentrons davantage sur les erreurs des enfants que sur le niveau de réussite. Donc, peu importe où l'enfant se situe mathématiquement par rapport à l'opération de la multiplication, nous revenons en arrière pour comprendre les concepts mathématiques sous-jacents à cette opération.

Aménagement :

Il est souhaitable de travailler en groupe de quatre élèves, de façon à ce qu'ils puissent se répartir le travail puis comparer leurs hypothèses et leurs propositions. Ensemble, ils s'encourageront afin de mieux comprendre pour construire leurs apprentissages.

Matériel :

- Images et manuscrits historiques (et en particulier le document des différentes techniques opératoires pour effectuer une multiplication.
- Transparents et rétroprojecteur
- Feuilles parchemins (transcription des messages des enfants)
- Papiers brouillons
- Crayons (plusieurs couleurs)
- Calculatrice
- Livres résumant et illustrant l'histoire des nombres
- Colle (exposition de l'histoire)
- Cartons (exposition de l'histoire)
- Ciseaux (exposition de l'histoire)
- Règle

- … Ou tous les autres matériaux que l'enfant pourrait demander

Pistes d'intégration :

Il est évidemment avantageux de construire des situations didactiques privilégiant l'intégration des matières. Ainsi, il est possible de rejoindre les différents intérêts des élèves qui voudront par conséquent s'impliquer au projet malgré les échecs qu'il est probable qu'ils rencontrent. Un élève motivé est un élève qui réussira, qui surmontera les obstacles.

Le français :
Compétences : * Écrire des textes variés
* Lire des textes variés
* Communiquer oralement

Géographie, histoire et éducation à la citoyenneté :
Compétences : * Lire l'organisation d'une société sur son territoire
* Interpréter le changement dans une société et sur son territoire
* S'ouvrir à la diversité des sociétés et de leur territoire

COMPÉTENCES EN MATHÉMATIQUES

**** Les compétences en caractère italique sont celles visées par la situation didactique présentée ici.*

Compétence 1 : **Résoudre une situation-problème mathématique**

Composantes de la compétence :
- *Décoder les éléments de la situation-problème*
- *Modéliser la situation-problème*
- *Appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution*
- *Valider la solution*
- *Partager l'information relative à la solution*

Compétence 2 : **Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques**

Composantes de la compétence :
- *Cerner les éléments de la situation mathématique*
- *Mobiliser des concepts et des processus mathématiques appropriés à la situation*
- *Appliquer des processus mathématiques appropriés à la situation*
- *Justifier des actions ou des énoncés en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques*

Compétence 3 : **Communiquer à l'aide du langage mathématique**

Composantes de la compétence :
- *S'approprier le vocabulaire mathématique*
- Établir des liens entre le langage mathématique et le langage courant
- *Interpréter ou produire des messages à caractère mathématique*

Savoirs essentiels :

À la lecture du nouveau programme, il est possible de cibler à l'intérieur de la section spécialisée au domaine de la mathématique quelques savoirs essentiels. Plus précisément, nous avons observé la section de l'arithmétique, le sens et l'écriture des nombres, le sens des opérations sur des nombres et les opérations sur des nombres. Puis, nous avons dénombré un total de quatre savoirs essentiels :

. Les nombres naturels inférieurs à 100000 : lecture, écriture, représentation, comparaison, classification, ordre, expressions équivalentes, décomposition, régularités, droite numérique.
. Approximation du résultat d'une opération : multiplication
. Propriété des opérations : commutativité, associativité et distributivité
. Sens des opérations : multiplication (addition répétée, produit cartésien, etc.), produit, facteur, multiples d'un nombre naturel.

Repères culturels :

Les repères culturels sont ici la source même de la situation didactique. En d'autres mots, la mise en situation privilégie les retours en arrière pour mieux comprendre la raison des concepts mathématiques présents. Il s'agit de voir l'évolution des concepts pour en comprendre le sens et l'utilité.

. Processus personnels ou conventionnels de calculs : évolution, limites, avantages et inconvénients.
. Technologie : évolution (exemple : bâtonnets, traits, boulier, abaque, calculatrice, logiciel), limites, avantages et inconvénients.
. Contexte interdisciplinaire ou social (exemple : histoire, géographie, science et technologie)

L'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement de la mathématique constitue une excellente façon d'en rehausser le niveau culturel et la motivation les élèves. Une approche différenciée permet de rejoindre une plus grande majorité d'élèves.

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

*** *Les compétences en caractère italique sont celles visées par la situation didactique présentée ici.*

D'ordre intellectuel

- *Exploiter l'information*
- *Résoudre des problèmes*
- *Exercer son jugement critique*
- *Mettre en œuvre sa pensée créatrice*

D'ordre méthodologique

- *Se donner des méthodes de travail efficace*
- Exploiter les technologies de l'information et de la communication (TIC)

D'ordre personnel et social

- Structurer son identité
- *Coopérer*

D'ordre de la communication

- *Communiquer de façon appropriée*

ACTIVITÉS FONCTIONNELLES

PRÉPARATION

But :

Quelle est l'origine du zéro? Que signifie la valeur positionnelle? Pourquoi a-t-on opté pour un système en base 10? Comment nos ancêtres effectuaient-ils leurs différentes opérations? Savaient-ils calculer?

La mise en situation a donc pour but d'amener l'élève à réaliser que les chiffres et les nombres ont une histoire. Notre système numérique a évolué pour répondre aux besoins des sociétés et pour réduire les problématiques. En fait, nous avons maintenant un même système international pour une meilleure communication. Cependant, il faut en saisir toutes les particularités.

Pour parvenir à répondre à ces questions qui sous-entendent des objectifs, il est sans aucun doute important de faire un retour en arrière et voir comment nos ancêtres les plus éloignés, les Égyptiens ou les Chinois et même les mayas travaillaient le chiffre et le nombre, si tel était le nom de différents symboles. Puis, ne serait-il pas bénéfique d'observer l'utilité du chiffre et des opérations pour ces anciens peuples?

Amener l'élève à considérer les découvertes de l'époque afin de mieux comprendre le sens et la pertinence des opérations d'aujourd'hui. Les activités suivantes inciteront l'élève à voir au-delà de ce qui est écrit, à voir la nécessité de bien saisir les concepts rattachés aux chiffres et aux nombres. Plusieurs concepts mathématiques sont sous-entendus et il faut bien les cerner pour mieux les comprendre.

De plus, les activités mettront l'élève en situation. L'élève sera actif, il construit lui-même ses apprentissages. Il lui faudra donc réfléchir et élaborer des stratégies qui lui permettront d'effectuer des opérations et les comprendre. Plus concrètement, l'élève sera amené à participer et découvrir les concepts du nombre et les opérations arithmétiques sans oublier qu'ils ont aussi leurs racines.

Nature de la première activité de préparation :

Il est probable que la majorité des erreurs commises par l'élève vienne d'une mauvaise compréhension de la numération. Un bon nombre d'élèves considèrent le nombre comme étant une séquence de chiffres avec un ordre prédéterminé. Une conception aussi linéaire a bien sûr des répercussions lors de l'application d'un algorithme de calcul telle que la multiplication. Ainsi, l'enfant est démuni lorsque la technique si souvent répétée donne un résultat négatif. Il ne parvient point à cerner ses erreurs.

Pour résoudre de tels problèmes, nous avons cru bon faire un retour en arrière. Ainsi, l'enfant comprendra l'origine des concepts de la numération et leur présence lors de l'application de l'algorithme de la multiplication. Il faut maintenant viser une bonne compréhension. Ce retour en arrière chez les Égyptiens, les Chinois et les Mayas permettra à l'enfant de voir l'évolution et le sens des différents concepts. Nous observons les nombres égyptiens, chinois et mayas pour faire ressortir les concepts de la base 10, du zéro et de la valeur de position.

Pour ce faire, l'enfant recevra des feuilles photocopiées reproduisant des nombres anciens (annexe) afin d'observer et de travailler les nombres des peuples anciens. Dans un premier temps, nous observerons les chiffres égyptiens. Ces chiffres permettront à l'enfant de voir l'utilité de nos symboles pour réduire le nombre de dessins pouvant être mémorisés. Beaucoup moins de conventions sous ce système numérique : pas de zéro, aucun groupement ni valeur de position. Ensuite, nous recommencerons cette même activité mais en observant cette fois les chiffres chinois. Quelles nouveautés surviennent lorsque nous nous attardons aux chiffres chinois? Le système numérique chinois a comme nous dix symboles pour représenter les chiffres, mais eux ils conçoivent les chiffres de 1 à 10 (le zéro n'existant pas et il y a un symbole différent pour le nombre 10). Toutefois, il est possible de voir apparaître de nouveaux symboles pour les centaines, les milliers, etc. Le système chinois a une particularité importante; il se lit comme il s'écrit. Finalement, l'activité sera reprise mais cette fois en valorisant les chiffres mayas. L'enfant constatera alors l'apparition d'un signe pour représenter le zéro. C'est une première. De plus, nous commençons à voir une certaine conception de la valeur de position alignée par le haut plutôt que de gauche à droite. Le concept de groupement se profile ici privilégiant la base 5 jumelée à la base 20.

Comment se déroulera cette activité? Il faut d'abord savoir que cette activité se réalisera en équipe. Les enfants travailleront en équipe de quatre afin que chaque élève puisse profiter des connaissances, habiletés et hypothèses des autres. De plus, la coopération permet à tous de s'encourager malgré les difficultés pouvant se présenter. Une fois installés, les élèves recevront une première feuille où sont présentés différents symboles égyptiens ou leurs correspondants en chiffres connus des enfants; les chiffres arabes. Toutefois, cette feuille comprend aussi des trous qu'il faut combler. Pour se faire, l'enfant devra comprendre la numération de chiffres anciens. Parfois, il lui est demandé de trouver le correspondant égyptien ou à l'inverse, l'élève connaît le chiffre égyptien (il est inscrit) mais il doit savoir à quel chiffre arabe il se rattache. Toute numération est logique mais toute logique n'est pas la même. En d'autres mots, l'enfant devra trouver les concepts qui réglementent chaque système numérique. Chaque jour, l'enfant sera placé devant une nouvelle culture et donc, un nouveau système numérique.

Lorsque nous aurons observé les principaux ancêtres des chiffres, soit le peuple égyptien, chinois et maya, nous serons davantage en mesure de comparer ces différents systèmes. C'est à ce moment précis que nous pourrons faire ressortir les avantages et les limites de chacun des systèmes observés pour comprendre la raison d'être de celui qui aura traversé le temps pour être aujourd'hui connu de tous. Le passé expliquera le pourquoi de notre système numérique.

Cette activité privilégie aussi la différence des rythmes d'apprentissage. En fait, les élèves démontrant plus de facilité auront la chance de bouquiner un peu et produire un exposé résumant les grandes lignes des peuples anciens. Ainsi, nous pourrons voir l'utilité des chiffres et des nombres pour chacun d'entre eux. Plusieurs livres seront mis à leur disposition afin qu'ils s'initient à la culture des peuples anciens.

Nature de la seconde activité de préparation:

Nous avons observé différents systèmes numériques, nous avons comparé ces différents systèmes numériques et nous avons fait ressortir les concepts mathématiques de ces derniers. Maintenant, il s'agit de voir et comprendre les avantages de notre système numérique, ceux qui expliquent qu'il a traversé le temps et qu'il est aujourd'hui le système adopté à travers le monde.

Les enfants, toujours regroupés en équipe de quatre, devront communiquer un message à une seconde équipe. Dans la classe, il y a six équipes. Deux équipes ont la tâche de travailler les nombre chinois, deux équipes les nombres égyptiens et les deux dernières les nombres mayas. En fait, ils sont des commerçants de ces différentes époques et ils font le commerce. Ces négociants financiers ont besoins de chiffres pour tenir leurs comptes et pour garder des traces de leurs transactions. Par exemple, chacune des équipes envoie un message à leurs vis-à-vis, ce message comportant une addition ou une soustraction laissant penser à une vente ou un achat. Évidemment, la tâche de le composer suppose qu'ils devront aussi résoudre un algorithme impliquant des symboles écrits des chiffres anciens.

Plusieurs solutions ou pistes de solutions peuvent être anticipées. Il est possible de croire que certains enfants, habitués aux chiffres arabes, auront tendances à faire mentalement les conversions. Toutefois, si les calculs impliquent des nombres suffisamment grands, il sera pratiquement impossible d'agir de la sorte. Ils essaieront, mais sans succès et devront trouver une autre technique. Il est probable que certains élèves tentent de tricher et d'effectuer le calcul en chiffres connus sur une feuille brouillon avant de retranscrire uniquement la réponse. Il faudra être vigilant et exiger la trace des calculs effectués. Quelques élèves essaieront, échoueront et ils s'avoueront vaincus. Il faut accepter cet échec mais il faut aussi demander aux enfants d'expliquer le pourquoi. Finalement, nous souhaitons que quelques élèves réussissent mais puissent tout de même cerner les inconvénients des systèmes numériques anciens. Peu importe le résultat, l'essentiel est que l'enfant soit porté à réfléchir et à trouver les raisons qui ont poussé les anciens peuples à perfectionner le système numérique jusqu'à l'obtention de celui connu aujourd'hui : le système arabe. Nos chiffres ont aussi une origine, ils ont été inventés en Inde vers l'an 500, mais ils sont appelés chiffres « arabes » parce que les marchands et les savants arabes les apprirent des indiens et en diffusèrent l'utilisation en Occident vers l'an 1200.

Cette activité a pour but de faire valoir encore une fois les concepts mathématiques de la numération. Toutefois, le fait de mettre l'enfant en pratique donne une chance à ce dernier de mieux cerner les inconvénients des anciens systèmes numériques car il aura vécu des difficultés reliées à ceux-ci.

En conclusion de cette section de préparation, voici deux activités qui demandent à l'enfant de construire ses apprentissages. Être actif permettra peut-être à chacun de mieux assimiler chacune des notions et ce retour en arrière permettra sûrement de voir le sens et l'utilité de tous ces concepts mathématiques.

PROBLÈME

RÉALISATION

Question :

Existe-t-il uniquement une seule façon d'effectuer l'algorithme de la multiplication?

Analyse du problème et des difficultés des élèves :

Les enfants sont tous différents en soi, donc il est logique qu'ils apprennent différemment. Ne serait-il pas profitable de démontrer différentes façons de multiplier? Ainsi, les autres techniques peuvent trouver preneur, c'est sûrement une nouvelle solution pour les enfants en difficultés. D'un autre côté, elles sont utiles au sens qu'elles favorisent la compréhension de la technique habituelle et ses propriétés ainsi que la justification de notre algorithme. En fait, en observant et en travaillant plusieurs techniques opératoires, l'enfant se verra placé devant l'obligation d'émettre des hypothèses, valider celles-ci, imaginer et même créer afin de tenter d'expliquer la logique de certaines d'entre elles ou en expliquer les erreurs. Cette observation minutieuse est une manière d'analyser le sens et par conséquent d'aiguiser son sens critique. En résumé, il s'agit ici d'une activité intellectuelle rigoureuse car l'intérêt de ces techniques variées est de permettre un travail spécifique sur notre propre technique opératoire et sur sa signification. Or ici, pour comprendre la façon dont sont faites les opérations, il est nécessaire de s'intéresser à la disposition spatiale des chiffres dans les opérations posées et ainsi de réfléchir sur les propriétés de la multiplication. De plus, l'enfant aura à faire des approximations des résultats et des vérifications de ces mêmes résultats.

Pour cette activité, nous utiliserons une image provenant d'un cahier de 1602 qui s'intitule *Opérations et problèmes d'arithmétiques* écrit par J. Nicolay (cote fonds français 660). Deux pages illustrant différentes façons d'effectuer la multiplication ont été choisies. Elles comprennent treize multiplications effectuées de sept manières différentes. Parmi ces treize opérations, trois sont fausses. Le lecteur remarquera que l'une des opérations n'est pas complétée et une seconde dissimule deux lignes car l'écriture à la plume de la page précédente avait transpercé la feuille, rendant ainsi pratiquement illisible une partie de l'opération. Il importe de présenter, malgré tout, ces traces d'un manuscrit à l'enfant car ces éléments constituent des atouts importants pour susciter la curiosité et générer des réflexions. Aucun texte n'accompagne les calculs alors il faudra chercher à comprendre simplement en observant les opérations, en s'interrogeant, en émettant des hypothèses et en partageant ensemble nos découvertes. Cette activité s'effectue en six étapes. En France, différentes activités ont été imaginées en partant de ce document et les résultats ont été, aux dires des auteurs, remarquables car les élèves auraient compris le sens des différentes étapes de l'algorithme de la multiplication. Reste à savoir maintenant si les élèves de notre classe verront aussi la pertinence du document et si leur compréhension s'améliorera.

. Dans un premier temps, nous présentons le document original. Cela suppose évidemment une phase d'exploration. Les enfants seront peut-être intrigués par l'écriture qui est très ornée (le nom : Multiplication). De plus, certains chiffres sont écrits différemment (c'est le cas du 1 et du 7). Puis, il y a un symbole particulier qui risque fort d'attirer leur attention car il n'existe plus aujourd'hui, il s'agit d'un *s* couché. Il pourrait s'avérer intéressant d'amener les élèves, par déduction, à trouver ce que ce symbole représente maintenant (le chiffre 8). De son côté, l'enseignante dispose de ce même manuscrit mais sur transparent afin de valider et consolider les découvertes de l'enfant à l'aide du rétroprojecteur. Donc, les élèves observent et cherchent les similitudes ou les différences. Il faut attendre que ressortent des remarques sur la calligraphie de certains chiffres, les dispositions particulières à celle connue, l'absence du zéro, la présence d'espaces vides ou de points. Cette phase d'exploration a pour but de découvrir les particularités du manuscrit original, tel que laissé par nos ancêtres. (*n.b.* Ensuite, pour éviter toute confusion, il serait préférable de transcrire les opérations avec les chiffres connus, actuels, des enfants. Il s'agit en fait de faciliter la lecture des calculs).

. La deuxième étape consiste à faire un classement des opérations. Il s'agit de rassembler celles qui se déroulent de façon similaire. Ce classement permettra aux enfants de travailler une opération et de vérifier par la suite leurs hypothèses sur une seconde opération qui est résolue par une même technique. Le classement attendu est le suivant :

- Les opérations présentées suivant notre technique
- Les opérations décalées dans l'autre sens
- L'opération présentée en quadrillage
- Les opérations présentées en losange
- L'opération présentée en soleil

Il est important de noter toutes les propositions des enfants mais ils devront d'abord justifier leurs critères de classement.

. La troisième étape est dite vérificative. Il s'agit de voir l'exactitude des trois opérations qui semblent proposer la technique habituelle, celle connue des enfants. Du coup, nous vérifions si toutes les hypothèses émises plutôt (exemple : le S, l'espace, le point, etc.)

sont une fois de plus plausibles.

. Maintenant, nous entrons dans le vif du sujet. La quatrième étape demande aux élèves d'observer et de travailler les opérations qui sont décalées dans l'autre sens, sens contraire de notre méthode habituelle (le deuxième groupe d'opérations). Il faut en venir à constater que la première ligne de calcul correspond à la dernière ligne de calculs de la façon habituelle. Cette méthode a l'avantage de donner tout de suite l'ordre de grandeur du résultat. Par ailleurs, il faut croire que les nombres à multiplier au #7 sont presque identiques à ceux proposés au #3. Un seul chiffre a été ajouté à chacun des deux nombres à multiplier. Il est probable que l'auteur ce soit contenter de recopier intégralement les cinq premières lignes de calcul intermédiaire et a seulement ajouté une ligne correspondant au produit de 789467 par 1. Aurait-il voulu aller trop vite? L'ordre de grandeur s'avère alors faux. L'opération est donc fausse bien que le calcul soit correct. Il serait pertinent de faire comparer ces deux opérations aux enfants (#3 et #7) et de rétablir le résultat correct de l'opération #7, en utilisant les calculs déjà effectués. Le troisième calcul fait selon cette technique vient consolider les hypothèses des enfants. Ce troisième calcul, qui s'avère juste, est aussi commencé par le chiffre de l'ordre le plus grand du deuxième nombre, offrant dès le premier résultat partiel, l'ordre de grandeur du résultat final. Cette technique permet d'accentuer l'importance de l'approximation, puisque les enfants la font dès le premier résultat partiel.

. Ensuite, il s'agit de travailler l'opération en quadrillage. Certains enfants ont possiblement déjà travaillé cette méthode, c'est pourquoi il pourrait s'avérer pertinent de trouver les avantages et les inconvénients de cette technique. Cette méthode, parfois reconnue pour être plus longue, est cependant intéressante car l'absence de mémorisation des retenues évite bien des erreurs. Les retenues des calculs intermédiaires ne sont pas présentées puisque toutes les multiplications élémentaires sont écrites. De plus, cette technique de calcul est adaptée à notre numération de position. Un autre point important s'ajoute. Cette méthode est intéressante à observer et analyser car, bien qu'elle semble magique, il y a une logique sous-jacente. Pour comprendre sa justification, il faut revenir avec les élèves à l'algorithme opératoire usuel et s'interroger sur la provenance des différents chiffres du résultat. Les enfants doivent découvrir que l'écriture dans des cases séparées par une diagonale permet de placer les chiffres des dizaines de chaque produit partiel immédiatement dans le calcul de l'ordre supérieur pour ainsi éviter les retenue ou devoir penser au décalage d'une ligne à l'autre. Plus long mais plus sûr.

. La sixième étape concerne les opérations en losange. Encore une fois, nous privilégions la discussion. Les élèves regardent une opération en particulier et ils font des remarques sur celle-ci. Il est à remarquer que ces multiplications impliquent toujours deux nombres ayant le même nombre de chiffres. Cela est nécessaire. Cette opération privilégie également le concept de l'ordre de grandeur. L'enfant doit prendre conscience que cette méthode est similaire à celle du quadrillage mais qu'elle est moins laborieuse puisqu'il n'a pas à tracer de carré, ou à faire le quadriller et ses diagonales. Cette manière de faire est avantageuse pour les enfants en difficulté puisque le problème des retenues n'est plus rencontré. L'activité suit son cours en prenant une seconde multiplication effectuée en suivant la même technique opératoire (losange). Puis, il importe de toujours faire décrire l'algorithme opératoire par l'enfant et surtout, de lui demander de le comparer à celui qui a été mis en place précédemment.

. La dernière opération, celle présentée en soleil, intrigue beaucoup les enfants. Comme lors des étapes antérieures, ils communiquent leurs remarques sur le comment. La question à répondre est de savoir si cette méthode est applicable sur tous les algorithmes de multiplication. Il serait profitable de demander aux enfants de résoudre, par cette technique, 457 x 283. Si cela est possible, comment?

Pour conclure, l'enseignante peut demander aux élèves leurs impressions sur ces deux pages de calcul, cet inventaire de toutes les méthodes possibles pour réaliser une multiplication. Quelques méthodes peuvent être généralisées, mais il faut cibler les méthodes plus spécifiques. L'observation et le travail sur différentes méthodes risque fort d'amener l'enfant à mieux cerner la technique opératoire habituelle ou tout simplement, à valoriser une nouvelle technique.

Concepts mathématiques :

Après la lecture du projet, il est clair que quelques concepts mathématiques sont visés et s'avèrent essentiels pour une suite. Nous en dénombrons 4 au total :

1) La numération
2) La disposition spatiale.
3) Les propriétés de la multiplication.
4) L'approximation

ÉVALUATION

Moyens d'évaluer les apprentissages des élèves :

Il est important de comprendre que cette situation didactique est un tout indissociable. Ainsi, il va de soi que l'évaluation ne se résume pas à un élément ou un moment précis. L'élève sera évalué tout au long de son cheminement car il progresse et fait chaque jour des apprentissages. Toutefois, il est certain que notre objectif premier est que l'élève puisse: savoir multiplier et comprendre les gestes qu'ils posent. Par contre, il a été dit plutôt que la multiplication est un algorithme qui sous-entend plusieurs concepts mathématiques reliés à la numération. C'est pourquoi un seul examen ne serait pas révélateur du progrès des élèves. En ce sens, trois types d'évaluation sont privilégiés.

. L'observation des comportements et de la participation durant toute la durée de la séquence didactique

. Les résultats concrets, cherchant à voir l'amélioration des élèves à multiplier et leurs connaissances réelles des concepts de la numération. (un pré-test ainsi que deux post-tests)

Il s'agit d'une évaluation formative qui nous permet de voir le progrès de l'élève, ses forces et ses difficultés.

Annexe G

Tableaux relevant les différentes erreurs commises par chaque élève de la classe lors du pré-test, du premier post-test et du second post-test.

Tableau classificatoire pour les erreurs au PRÉ-TEST

	Les Concepts Mathématiques				
Élèves	Regrouper les éléments d'un ensemble	Valeur de position	Le rôle de la retenue ou l'emprunt/ groupement (base 10)	L'arrondissement	La multiplication
A.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Résultat (2/3) *ne donne pas de rôle au zéro, l'abscence de boules à la tige des centaines porte à croire qu'il faut oublier cette position (324 au lieu de 3024)	Résultat (3/4) *la notion de base 10, ne transfert pas de position (ex: 9999=910000) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (3/7) *multiplication par 10 = multiplication par 100 *erreur de tables *ne respecte pas la valeur des chiffres au multiplicateur.
B.	Résultat (0/2) Dis faire des groupements de 20, mais peu de traces de ceux-ci	Résultat (9/10) *erreur de position	Résultat (2/3) *erreur d'emprunt avec le double zéro.	Résultat (1/4) *arrondis toujours vers le bas Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (5/7) *erreur de tables *aucun calcul et aucune réponse
C.	Réussite (2/2) Groupement par 5	Résultat (2/10) *donne la position et non le nombre total.	Résultat (1/3) *emprunt inutile *erreur d'inattention, oublie de soustraire les centaines.	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (6/7) *erreur de tables
D.	Résultat (0/2) Dénombrer par rangées des éléments un par un, puis addition de toutes les rangées.	Résultat (0/10) *les plus petites positions sont choisies (truc inversé)	Résultat (1/3) *oublie d'inscrire l'emprunt *emprunt inutile *n'utilise pas l'abaque.	Résultat (0/4) *arrondis vers le bas. *erreur de position Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (4/7) *erreur de tables *un chiffre est multiplié deux fois.
E.	Résultat (0/2) Dénombrer les éléments un à un.	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/7) *erreur de tables *un chiffre est multiplié deux fois.
F.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Résultat (3/4) *erreur d'inattention (1400 au lieu de 14000) Donne une bonne raison pour valoriser l'arrondissement.	Résultat (5/7) *incompréhension

G.	Réussite (2/2) Dénombrement un à un des éléments de chaque rangée puis addition des sous-totaux de chacune de ces rangées.	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (6/7) *erreur dans l'addition des produits partiels.
H.	Résultat (0/2) Dénombrer un à un les éléments.	Résultat (8/10) *erreur de position (89)	Résultat (0/3) *soustrait le plus grand chiffre peu importe sa position *ajout pour faire 10 et non 10 nouvelles.	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (4/7) *ne respecte pas la valeur des chiffres au multiplicateur *erreur dans l'addition des produits partiels occasionnée par les retenues
I.	Résultat (0/2) Dénombrer un à un les éléments.	Réussite (10/10)	Résultat (1/3) *oublie de marquer ses retenues et de les considérer	Réussite (4/4) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/7) *erreur dans l'addition des produits partiels
J.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Résultat (0/10) *arrondis vers le bas.	Résultat (1/3) *le double zéro complique l'emprunt *ajout pour faire 10 et non 10 nouvelles.	Résultat (3/4) *arrondis vers le bas (9999) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (2/7) *multiplication par 10=multiplication par 100 *oublie la multiplication d'un chiffre du multiplicateur, manque un produit partiel *ne respecte pas la valeur des chiffres au multiplicateur
K.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Résultat (1/3) *le double zéro complique l'emprunt *erreur de calcul mental	Résultat (2/4) *arrondis vers le bas (9999) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (5/7) *incompréhension
L.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (7/7)
M.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Résultat (0/10) *les plus petites positions sont choisies (truc inversé)	Résultat (2/3) *erreur de calcul mental	Résultat (2/4) *erreur de position Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (5/7) *erreur de tables
N.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Résultat (0/3) *oublie de marquer l'emprunt (abaque) *le double zéro complique l'emprunt *soustrait les chiffres plus grand du nombre inférieur à ceux du nombre supérieur pour éviter l'emprunt	Résultat (1/4) *arrondis vers le bas Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (0/7) *multiplication par 10=multiplication par 100 et le tout =multiplication par 1 *ne respecte pas la valeur de position des chiffres au multiplicateur *incompréhension

O.	Résultat (1/2) Dénombrer par rangées des éléments un par un, puis addition de toutes les rangées	Réussite (10/10)	Résultat (2/3) *le double zéro complique l'emprunt	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/7) *erreur dans l'addition des produits partiels, oublie d'une retenue *erreur de tables
P.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Résultat (4/10) *indique la position seulement	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (3/7) *multiplication par 10=multiplication par 100 *oublie la multiplication d'un chiffre du multiplicateur, manque un produit partiel *ne respecte pas la valeur des chiffres au multiplicateur
Q.	Réussite (2/2) Groupement par 5	Réussite (10/10)	Résultat (2/3) *emprunt inutile (abaque)	Résultat (3/4) *arrondis vers le bas (9999) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (4/7) *multiplication par 10=multiplication par 100 *erreur de tables *erreur dans l'addition des produits partiels, mauvaise indication des retenues
R.	Résultat (0/2) Dénombrer par rangées des éléments un par un, puis addition de toutes les rangées.	Résultat (8/10) *aucune réponse (9067) dû peut-être à la présence du 0	Résultat (1/3) *pas de calcul, pas de réponse (abaque) *le double zéro complique l'emprunt	Résultat (2/4) *incompréhension Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (5/7) *ne respecte pas la valeur de position des chiffres du multiplicateur *pas de calcul, pas de réponse
S.	Résultat (0/2) Différents groupements (10,5,4) sans traces évidentes d'une dominance	Résultat (0/10) *les plus petites positions sont choisies (truc inversé)	Résultat (1/3) *ajout pour faire 10 et non 10 nouvelles	Résultat (0/4) *incompréhension Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (1/7) *apparition d'une virgule à la réponse *oublie de considérer les retenue lors de la multiplication *erreur de tables
T.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Résultat (1/4) *arrondis vers le haut *aucune réponse (9999) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (2/7) *multiplication par 10 et par 100, aucun calcul et aucune réponse *oublie des retenues lors de la multiplication *erreur de tables
U.	Réussite (2/2) Dénombrer un à un jusqu'à un groupement de 100	Résultat (9/10) *erreur d'inattention, inversion de deux chiffres	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (4/7) *erreur de tables

V.	Résultat (0/2) Dénombrer les éléments un à un	Résultat (8/10) *erreur de position *l'absence de chiffre à la position des centaines dérange (89)	Résultat (0/3) *arrête la réponse aux dizaines, n'ayant aucune boule aux centaines et laissant le reste de côté (milliers) (ex: 24 au lieu de 3024) *le double zéro complique l'emprunt *erreur d'inattention, oublie de soustraire les centaines	Résultat (2/4) *arrondis vers le bas *erreur sur la grandeur Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (3/7) *erreur de tables *ne respecte pas la valeur de position des chiffres au multiplicateur
W.	Résultat (1/2) Dénombrer les éléments un à un	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Résultat (6/7) *erreur lors de l'addition des produits partiels
X.	Résultat (0/2) Dénombrer par bonds de deux.	Résultat (8/10) *erreur de position	Résultat (1/3) *emprunt inutile *le double zéro complique l'emprunt *pas d'abaque	Résultat (0/4) *arrondis mais laissant de côté les plus petites positions (ex: 1467 aux centaines= 15) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (4/7) *écriture telle que lecture *erreur lors de l'addition des produits partiels *erreur de tables *multiplication en double des centaines, ordre de grandeur de la réponse bien différent
Y.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Réussite (7/7)
Z.	Réussite (2/2) Groupement par 10 et addition des totaux de chaque rangée	Résultat (1/10) *les plus petites positions sont choisies (truc inversé)	Résultat (2/3) *arrête la réponse aux dizaines, n'ayant aucune boule aux centaines et laissant le reste de côté (milliers) (ex: 24 au lieu de 3024)	Résultat (3/4) *la similitude de deux réponses n'est pas habituelle surtout à deux questions différentes Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Résultat (2/7) *multiplication par 10=multiplication par 100 *oublie les retenue lors de la multiplication. *erreur lors de l'addition des produits partiels *ne respecte pas la valeur de position des chiffres du multiplicateur
AA.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement	Réussite (7/7)
AB.	Réussite (2/2) Groupement par 10	Réussite (10/10)	Réussite (3/3)	Réussite (4/4) Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement	Réussite (7/7)

Tableau classificatoire pour les erreurs au POST-TEST #1

	Les Concepts Mathématiques				
Élèves	Regrouper les éléments d'un ensemble	Valeur de position	Le rôle de la retenue ou l'emprunt/ groupement (base 10)	L'arrondissement	La multiplication
A.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
B.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (4/6) *oublie d'un produit partiel. *la multiplication des nombres à virgule.
C.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Résultat (9/11) *Ajout et retrait d'un certain nombre de dizaines et de centaines à une position donnée mais laissant tomber les autres chiffres du nombre en question.	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/6) *la multiplication des nombres à virgule.
D.	Résultat (0/2) Utilise une stratégie personnelle, faisant des bonds de deux.	Résultat (4/11) *trouve la position demandée et incluse les positions inférieures (truc à l'envers) *Ajout et retrait d'un certain nombre de dizaines et de centaines à une position donnée mais laissant tomber les autres chiffres du nombre en question.	Réussite (5/5)	Résultat (3/6) *Arrondis vers le bas *erreur de position *arrondis vers le bas lorsqu'il s'agit d'un nombre incluant le chiffre 9 à l'intérieur.	Réussite (6/6)
E.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
F.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)

G.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
H.	Résultat (0/2) Fais de groupement de 10 mais erreur d'inattention à l'intérieur des groupements.	Résultat (4/11) *arrondis les nombres à la position demandée au lieu de donner la quantité. *erreur de position, ajout de 34 dizaines et non des centaines. *ajout au lieu de retrait + l'ajout amenant un groupement et un transfert de position non fait.	Résultat (1/5) *soustraction du plus petit chiffre au plus grand chiffre, peu importe la position de celui-ci, (faisant partie du nombre du haut ou du bas.) *difficulté au niveau de l'organisation des nombres, ne positionne pas les chiffres selon leur valeur. *incompréhension du raisonnement. *erreur de calcul mental.	Résultat (4/6) *Il n'y a pas d'arrondissement lorsqu'il est question d'un nombre incluant un ou plusieurs 9 * erreur de position *Aucune raison pour l'arrondissement	Résultat (2/6) *erreur lors de l'addition des produits partiels *oublie de multiplier les centaines par les dizaines + erreur de tables. *calcul incomplet *multiplication de nombres à virgule.
I.	Erreur (0/2) Dis faire des groupements de 10, mais les traces ne sont pas cohérentes	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
J.	Résultat (0/2) Utilise une stratégie personnelle, faisant des bonds de deux pour l'une des collections et des bonds de douze pour la seconde collection.	Résultat (6/11) *erreur de position. *ajout d'une seule centaine. *retrait de l'ensemble des dizaines inscrites.	Résultat (2/5) *erreur d'organisation, soustraction du plus grand nombre par le plus petit.	Résultat (4/6) *arrondis vers le bas.	Résultat (2/6) *oublie de multiplier les centaines par les dizaines + erreur de tables. *erreur de tables. *multiplication de nombres à virgule.
K.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Résultat (4/5) *L'addition impliquant des nombres à virgule, ces nombres ne sont pas positionnés selon la valeur de leurs chiffres.	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
L.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/6) *oublie d'un produit partiel
M.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Résultat (9/11) *Ajout et retrait d'un certain nombre de dizaines et de centaines mais faisant erreur sur la position demandée	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/6) *oublie d'un produit partiel

N.	Erreur (0/2) Fais des groupements de 10, mais erreur d'inattention à l'intérieur d'un groupement.	Résultat (9/11) *Ajout et retrait: incompréhension du raisonnement	Résultat (4/5) *L'addition impliquant des nombres à virgule, ces nombres ne sont pas positionnés selon la valeur de leurs chiffres.	Résultat (3/6) *Arrondis vers le bas lorsque le nombre comporte un ou plusieurs 9. (299 959) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (2/6) *oublie plusieurs produits partiels, ne multiplie que les unités et les dizaines du multiplicateur. *erreur de tables. *incompréhension, seule la structure générale est semblable.
O.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
P.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
Q.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Résultat (7/11) *Ajout et retrait d'un certain nombre de dizaines et de centaines mais faisant erreur sur la position demandée. *Deux questions laissées sans réponse.	Résultat (3/5) *L'addition et la soustraction impliquant des nombres à virgule, ces nombres ne sont pas positionnés selon la valeur de leurs chiffres.	Résultat (2/6) *erreur de position. *conserve les chiffres suivants. * ajout du chiffre 1 lorsqu'il y a un 9, change ainsi l'ordre de grandeur du nombre. *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/6) *erreur de tables. *oublie d'un produit partiel.
R.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Résultat (3/5) *L'addition et la soustraction impliquant des nombres à virgule, ces nombres ne sont pas positionnés selon la valeur de leurs chiffres.	Résultat (5/6) *erreur de position. *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
S.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (5/6) *répétition d'une ligne de produits partiels.
T.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Résultat (4/5) *Pas de calcul et pas de réponse.	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
U.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)

V.	Erreur (0/2) Fais des groupements de 10, mais erreur d'inattention à l'intérieur d'un groupement.	Réussite (11/11)	Résultat (4/5) *L'addition impliquant des nombres à virgule, ces nombres ne sont pas positionnés selon la valeur de leurs chiffres.	Résultat (4/6) *arrondis vers le bas. *n'arrondis lorsqu'il y a présence du chiffre 9 à l'intérieur d'un nombre. *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (2/6) *calculs incomplets (manque de temps, ne connaissant pas ses tables de multiplication). *ne respecte pas la valeur de position des chiffres au multiplicateur.
W.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
X.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Résultat (4/5) *L'addition impliquant des nombres à virgule, ces nombres ne sont pas positionnés selon la valeur de leurs chiffres.	Réussite (6/6) *Aucune raison au sujet de l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
Y.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Résultat (5/6) *erreur de position. *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
Z.	Erreur (0/2) Fais des groupements de 10, mais erreur d'inattention à l'intérieur d'un groupement.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Résultat (4/6) *la multiplication des nombres à virgule. *erreur de tables.
AA.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)
AB.	Réussite (2/2) Groupement par 10.	Réussite (11/11)	Réussite (5/5)	Réussite (6/6) *Donne une bonne raison pour valoriser l'utilité de l'arrondissement.	Réussite (6/6)

Tableau classificatoire pour les erreurs au POST-TEST #2

Élèves	Concepts maths : La multiplication
A.	Réussite (6/6)
B.	Réussite (6/6)
C.	Réussite (6/6)
D.	Réussite (6/6)
E.	Réussite (6/6)
F.	Réussite (6/6)
G.	Réussite (6/6)
H.	Résultat (3/6) *erreur de tables (x2) *erreur de tables + oublie la multiplication d'un chiffre au multiplicande (l'organisation est un peu tassée, la lecture est difficile)
I.	Réussite (6/6)
J.	Résultat (2/6) *nombreuses erreurs de tables.(x2) *ne respecte pas la valeur de position d'un chiffre a multiplicateur (considérant les centaines comme des milliers) *calcul incomplet
K.	Réussite (6/6)
L.	Réussite (6/6)
M.	Réussite (6/6)
N.	Résultat (2/6) *erreur de tables *erreur de tables+oublie la multiplication d'un chiffre du multiplicande par les centaines du multiplicateur *ne respecte pas la valeur de position des chiffres au multiplicateur à partir des centaines + oublie la multiplication d'un produit partiel. *erreur lors de l'addition des produits partiels.
O.	Réussite (6/6)
P.	Réussite (6/6)
Q.	Réussite (6/6)
R.	Réussite (6/6)
S.	Résultat (3/6) *erreur de tables (x2) *ne respecte pas la valeur de position d'un chiffre (un seul) au multiplicateur+ erreur de tables (x1)
T.	Résultat (2/6) *erreur de tables (x2) *ne respecte pas la valeur de position des chiffres au multiplicateur lors de la présence de d'un double zéro. (x1) *calcul incomplet (bien commencé) (x1)
U.	Réussite (6/6)
V.	Résultat (5/6) *erreur de tables
W.	Réussite (6/6)
X.	Réussite (6/6)
Y.	Réussite (6/6)
Z.	Réussite (6/6)
AA.	Réussite (6/6)
AB.	Réussite (6/6)

Annexe H

Tableaux synthèse des erreurs des élèves, une vue d'ensemble des résultats au pré-test, au premier post-test et au second post-test

Tableau synthèse pour les erreurs au PRÉ-TEST

Groupe	Les Concepts Mathématiques				
	Regrouper les éléments d'un ensemble	Valeur de position	Le rôle de la retenue ou de l'emprunt/ groupement (base 10)	L'arrondissement	La multiplication
Échec... et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	13 élèves ont fait fi de la stratégie du regroupement pour des méthodes d'ordre personnel. Seulement 2 de ces élèves ont obtenu les bonnes réponses. . 4 élèves ont compté un à un chaque élément d'une ligne et marquant à l'extrémité de celle-ci le total. Ensuite, ils additionnent tous les totaux partiels pour connaître le nombre total d'éléments dans chaque collection. . 6 élèves ont compté un à un tous les éléments de chaque collection. . 3 élèves tentent différents groupements : par 100 ou par 2. Des groupements peu avantageux où le dénombrement demeure favorisé.	3 élèves ont eu une erreur. 4 élèves ont eu deux erreurs. 7 élèves n'ont aucune bonne réponse. * erreur d'inattention. * la présence du zéro importune; aucune réponse n'est inscrite. * l'absence d'un chiffre à la position interrogée provoque la confusion. * erreur de position. * donne la position plutôt que le total. * arrondissement * le truc à l'inverse, cible la position et inscrit tous les chiffres plus petits.	6 élèves ont eu une erreur sur un total de trois équations. 7 élèves ont eu deux erreurs. 4 élèves n'ont aucune bonne réponse. Sur un total de 32 erreurs, la soustraction avec le support de l'abaque a occasionné 13 erreurs. Puis, la soustraction mettant en jeu la présence d'un double zéro avec nécessité d'emprunt, nous comptons 12 erreurs. Finalement, la troisième soustraction, sans difficulté supplémentaire aux emprunts, 7 élèves se sont trompés. * l'emprunt à faire sur deux zéros de suite importune, il emprunte aux milliers pour donner 10 centaines ainsi que 10 dizaines et 10 unités. * oublie de considérer l'emprunt, celui-ci n'étant pas inscrit (organisation) * emprunt inutile, la soustraction étant possible sans. * erreur de calcul mental. * une absence de boules (sur l'abaque) au niveau des centaines signifie pour l'enfant le retrait de cette position ou un arrêt à cette position (différence entre l'illustration de l'abaque et la réponse donnée.) (la réponse devait être 3024 mais on trouve 324 ou même 24) * un emprunt est fait sans toutefois l'ajouter à la valeur déjà en position * pas d'abaque ou le dessin sans utilisation pour autant * soustraction du plus petit chiffre par le grand chiffre sans considérer sa position, parfois le nombre du bas ou le nombre du haut * oublie la soustraction d'une position	7 élèves ont eu une erreur sur un total de quatre réponses. 5 élèves ont eu deux erreurs. 3 élèves n'ont aucune bonne réponse. 19 élèves ne donnent pas une raison valable pour justifier le recours à l'arrondissement ou ils ne se prononcent pas. Sur un total de 33 erreurs, 20 erreurs se rapportent au nombre 9999. * erreur d'inattention * la présence de 9 continue amène l'enfant à arrondir par le bas. * arrondis toujours par le bas * arrondis par le haut mais le 9 devient 10 plutôt que valoriser le changement de position (9999 = 91000) * erreur de position * arrondis toujours vers le haut. * arrondis la position avoisinante seulement	3 élèves ont eu une erreur sur un total de sept réponses. 7 élèves ont eu deux erreurs. 6 élèves ont eu trois erreurs. 3 élèves ont eu quatre erreurs. 3 élèves ont eu cinq erreurs. 1 élève a eu six erreurs. 1 élève n'a eu aucune réponse. Il y a eu total 8 élèves qui n'ont pas réussi les multiplications mettant en jeu les nombres 10 et 100: * les multiplications par 100 et par 10 donnent la même réponse * les multiplications par 10 et par 100 dérangent et parfois aucun calcul ou réponse n'apparaît * la multiplication par 10 et par 100 est égale à une multiplication par 1. Les erreurs observées chez les élèves au sujet des autres multiplications: * erreurs de tables.(x23) * erreur d'inattention.(x5) * il n'y a aucun calcul.(x2) * calcul incomplet.(x2) * incompréhension du raisonnement fait par l'élève, seule la structure générale est ressemblante.(x6) * erreur s'expliquant par des retenues oubliées, n'étant pas écrites.(x7) * il n'y a pas de retenue car tout est inscrit au niveau des produits partiels, pas de groupement en base 10 (x9) * les produits partiels ne sont pas décalés vers la gauche, ne considérant pas ainsi la valeur de position des chiffres multipliés.(x16) * oublie d'une rangée de produits partiels, réponse d'un autre ordre de grandeur.(x5) * erreur lors de l'addition des produits partiels.(x5) * écriture telle que la lecture du nombre.(x1) * apparition d'une virgule.(x2)
Réussite	15 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement pour dénombrer les collections. De ces 15 élèves, 13 élèves favorisent le regroupement par 10. Puis, 2 élèves favorisent celui par 5.	14 élèves ont réussi la totalité des questions, ils ont eu les 5 réponses.	11 élèves ont réussi les 3 équations demandées.	13 élèves ont su arrondir les nombres à la valeur demandée sans erreur. 9 élèves donnent une raison valable pour justifier l'arrondissement.	4 élèves ont le résultat parfait, soit de sept bonnes réponses pour la multiplication.

Tableau synthèse pour les erreurs au POST-TEST #1

Groupe	Les Concepts Mathématiques: Regrouper les éléments d'un ensemble	Valeur de position	Le rôle de la retenue ou de l'emprunt/ groupement (base 10)	L'arrondissement	La multiplication
Échec... et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	. 3 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement par 10 pour dénombrer les collections mais ils ont fait de petites erreurs et n'ont pas la réponse finale. . 2 élèves disent avoir utilisé la stratégie du regroupement mais il n'y a aucune trace de cela au niveau des collections et ils n'ont pas la réponse finale. . 2 élèves ont fait fi de la stratégie du regroupement pour des méthodes d'ordre personnel (bonds de deux) sans toutefois obtenir la réponse finale.	3 élèves ont eu une erreur. 4 élèves ont eu plus d'une erreur. Les 3 élèves ayant eu une seule erreur, il s'agit pour chacun de la même erreur: 274 441, où il faut ajouter des centaines et enlever des dizaines. (il s'agissait d'une nouvelle question ne faisant pas l'objet d'une interrogation lors du pré-test) * considère seulement une partie du nombre, celles des dizaines et des centaines. * ajoute et enlève des unités plutôt que la valeur exigée. * erreur de position. Pour ce qui est des autres erreurs observées: * arrondis les nombres * donne uniquement la position * erreur de position * donne le nombre total de la valeur demandée sans cependant considérer le chiffre à cette position, considérant seulement toute supériorité.	5 élèves ont eu une seule erreur sur un total de cinq équations. 2 élèves ont eu deux erreurs. 1 élève a eu trois erreurs. 1 élève a eu quatre erreurs. Cinq équations sont proposées, il faut savoir qu'il y a un total de 16 erreurs. De cela, il y a 11 erreurs attribuables à des équations mettant en jeu des nombres à virgules. Puis, 3 erreurs se rapportent à la soustraction de 10010- 7927. Finalement, l'équation 54 671-38 989 a occasionné 2 erreurs. * lors d'équation faisant appel aux nombres à virgule, l'élève fait erreur dans l'organisation de son équation, les chiffres ne sont pas placés selon leur valeur. *aucun calcul, aucune réponse. * soustraction du plus grand chiffre le plus petit, sans différencier sa position (parfois du plus grand nombre ou du plus petit) Évite ainsi l'emprunt.	4 élèves ont eu une erreur. 3 élèves ont deux erreurs. 1 élève a eu trois erreurs. Sur un grand total de 13 erreurs, 6 erreurs sont attribuables au nombre comptant plus d'un 9: 299 959. Puis, 3 erreurs sont observées en partant du nombre 45 509. Finalement, il est possible de retrouver 4 erreurs en lien avec le nombre 18 987. * arrondis à une valeur de position différente. * arrondis vers le bas lorsqu'il est question du nombre à plus d'un 9. * n'arrondis pas. * arrondis vers le bas.	5 élèves ont une seule erreur sur un total de 6 multiplications. 1 élève a eu deux erreurs. 1 élève a eu trois erreurs. 4 élèves ont eu quatre erreurs. * erreur de table.(x7) * oublie la multiplication d'un produit partiel, la réponse étant alors d'un autre ordre de grandeur.(x5) * calculs incomplets (manque de temps).(x4) * erreur dans l'addition des produits partiels.(x1) * incompréhension, la structure globale est ressemblante.(x3) * la multiplication des nombres à virgule.(x7)
Réussite	21 élèves ont utilisé la stratégie du regroupement pour dénombrer les collections	21 élèves ont réussi la totalité des questions, ils ont eu les 11 réponses.	19 élèves ont réussi les 5 équations demandées.	20 élèves ont su arrondir les nombres à la valeur demandée sans erreur. 18 élèves donnent une raison valable pour justifier l'arrondissement.	17 élèves ont le résultat parfait, soit de six bonnes réponses pour la multiplication. Toutes les multiplications mettant en jeu les nombres 10 et 100 furent réussies.

Tableau synthèse pour les erreurs au POST-TEST #2

Groupe	Concepts maths : La multiplication
Réussite	22 élèves ont parfaitement réussi les six multiplications demandées. Tous les élèves ont réussi les multiplications mettant en jeu des multiplicateurs à plus d'un zéro (10, 10, 1000...)
Échec... et Pourquoi (les difficultés observées chez les élèves)	1 élève a une seule erreur sur un total de 6 multiplications. 2 élèves ont eu trois erreurs. 3 élèves ont eu quatre erreurs. *erreurs de tables (x10) * oublie la multiplication d'un chiffre au multiplicande (x2) *ne respecte pas la valeur de position d'un chiffre a multiplicateur (x4) *oublie la multiplication d'un produit partiel. (x1) *erreur lors de l'addition des produits partiels.(x1) *calcul incomplet (bien commencé) (x2)

Annexe I

Tableaux de fréquences des différentes erreurs relevées suite au pré-test, au premier post-test et au second post-test

Les Erreurs observées au Pré-test	**La Fréquence**
L'organisation des calculs	5
Aucun calcul	5
Incompréhension du calcul	4
La multiplication par 100 est égale à celle par 10	9
La multiplication par 10 ou par 100 est égale à celle par 1	3
L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicande	4
L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicateur	1
Un chiffre est multiplié à deux reprises	1
Erreur de tables	24
Ne respecte pas la valeur des chiffres du multiplicateur	14
Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de la multiplication	19
La retenue est placée au niveau de la réponse; pas de groupement	6
Erreur de tables au niveau de l'addition des produits partiels	5
Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de l'addition de produits partiels	4
Apparition d'une virgule lors de multiplication de nombres entiers	6 (la même élève)

Les Erreurs observées au Post-test #1	**La Fréquence**
L'organisation des calculs	3
Aucun calcul	1
Incompréhension du calcul	4
La multiplication par 100 est égale à celle par 10	0
La multiplication par 10 ou par 100 est égale à celle par 1	0
L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicande	0
L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicateur	6
Un chiffre est multiplié à deux reprises	0
Erreur de tables	8
Ne respecte pas la valeur des chiffres du multiplicateur	5
Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de la multiplication	5
La retenue est placée au niveau de la réponse; pas de groupement	0
Erreur de tables au niveau de l'addition des produits partiels	1
Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de l'addition de produits partiels	0
Apparition d'une virgule lors de multiplication de nombres entiers	0
Calcul incomplet	4
La multiplication des nombres à virgule pose un problème d'organisation	7

Les Erreurs observées au Post-test #2	**La Fréquence**
L'organisation des calculs	1
Aucun calcul	0
Incompréhension du calcul	1
La multiplication par 100 est égale à celle par 10	0
La multiplication par 10 ou par 100 est égale à celle par 1	0
L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicande	2
L'oublie d'un chiffre lors de la multiplication; au niveau du multiplicateur	1
Un chiffre est multiplié à deux reprises	0
Erreur de tables	9
Ne respecte pas la valeur des chiffres du multiplicateur	4
Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de la multiplication	5
La retenue est placée au niveau de la réponse; pas de groupement	0
Erreur de tables au niveau de l'addition des produits partiels	0
Oublie d'inscrire ou de considérer la retenue lors de l'addition de produits partiels	0
Apparition d'une virgule lors de multiplication de nombres entiers	0
Calcul incomplet	2
La multiplication des nombres à virgule pose un problème d'organisation	2