Université de Montréal

L'enseignement des identités remarquables: un dispositif de formation initiale des maîtres

par

Mohamed Lamine TOURÉ

Département de Didactique
Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Philosophiae (Ph.D.)
en Sciences de l'éducation, option didactique

Juillet 2003

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

L'enseignement des identités remarquables:

un dispositif de formation initiale des maîtres

présentée par

Mohamed Lamine TOURÉ

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Philippe R. Richard
président-rapporteur

Jean Portugais
directeur de recherche

Gisèle Lemoyne
membre du jury

Jean Brun
examinateur externe, Université de Genève

Christiane Rousseau
représentante du doyende la FÉS

Thèse acceptée le 23 janvier 2004

RÉSUMÉ

La présente recherche porte sur la formation des futurs enseignants en abordant le problème du sens dans cette formation sous l'angle de l'intégration des connaissances algébriques et géométriques dans l'enseignement des identités remarquables. Les identités remarquables (IR) relèvent des champs conceptuels des structures additives et multiplicatives. Leur apprentissage est une tâche complexe et constitue une étape importante dans le développement des aptitudes des élèves à résoudre des problèmes. Si cet apprentissage pose un défi important à l'élève, il en pose un tout aussi préoccupant à l'enseignant. La présente étude, qui s'inscrit dans le cadre de l'ingénierie didactique, examine chez 27 enseignants en formation initiale à l'Université Gamal Abdel Nasser de Conakry (UGANC) et à l'Institut Supérieur des Sciences de l'Éducation de Guinée (ISSEG) le rôle que joue l'intégration des connaissances dans l'enseignement des IR, la nature des difficultés rencontrées dans cette intégration, en particulier, le poids respectif des difficultés de la composante cognitive et de la composante didactique.

L'objectif principal de cette recherche est donc d'explorer l'impact d'une telle intégration sur la compréhension des IR et, de cette intégration, apporter un éclairage sur les liens existant entre l'algèbre et la géométrie dans la formation des futurs enseignants. Les observations faites par le biais d'enregistrements audiomagnétiques et magnétoscopiques et par d'autres sources d'informations (traces écrites, journaux de bord, verbalisations et entrevues) nous ont permis de mieux cerner les mécanismes d'adaptation des sujets au dispositif de formation. Les principaux résultats montrent que, par rapport à l'emploi des règles formelles qui produisent des représentations essentiellement instrumentales, l'intégration des connaissances permet de diversifier les représentations des IR, de mettre en évidence la propriété de la distributivité (qui est la clé de la factorisation des polynômes) et les caractéristiques du carré parfait, et de montrer que tout polynôme identifiable à une différence de carrés peut être factorisé selon le modèle $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Puis, l'habileté des formés à concevoir, réaliser et analyser des activités d'enseignement des IR a varié en fonction du contexte spécifique lié à leur position duale *d'élève* (par rapport au formateur) et d'*enseignant* (par rapport à leurs élèves de 9e année). Cela est conforme à d'autres résultats de recherche sur le fonctionnement du formé à partir de sa position anticipée dans le système didactique (Portugais, 1995).

Par ailleurs, d'après le nombre de sujets les ayant rencontrées et leur fréquence d'apparition, trois grandes difficultés se sont manifestées de façon prépondérante chez presque tous les formés lors de l'intégration des connaissances: il s'agit de la difficulté d'implication dans le travail d'autrui (certains élèves ne se sentant pas concernés par la production des modèles de leurs camarades), de la tentation de communiquer la «bonne» réponse (ce qui court-circuite le travail d'élaboration des connaissances) et le piège de la non-intervention (en s'interdisant toute intervention de façon à ne pas interférer avec les productions des élèves). À ces trois difficultés, qui se situent en quelque sorte dans des registres opposés, s'ajoutent la difficulté des formés à centrer leur observation sur les élèves dans les activités de modélisation, l'inadéquation de leur formation initiale, la rigidité des programmes d'études et leur cloisonnement, la formation didactique insuffisante (sinon l'absence de cette formation chez les sujets de l'UGANC), la rareté des ressources didactiques, la résistance du formateur de futurs enseignants et, parfois, de l'institution elle-même au changement.

Les résultats obtenus montrent que les formés rencontrent diverses difficultés d'ordre cognitif dont nous avons analysé les plus importantes dans les registres de l'interprétation et de la prédiction des modèles des IR. Ces difficultés sont contraignantes dans le registre des preuves et une certaine validation géométrique doit être instituée en vue de les surmonter. Les résultats confirment la coexistence des difficultés d'ordre cognitif et d'ordre didactique dans l'intégration des connaissances et aident non seulement à mieux comprendre les liens entre ces deux types de difficultés, mais aussi à évaluer l'influence de ces liens sur leur persistance. Les résultats montrent, en particulier, que cette liaison n'est pas indépendante des registres dans lesquels l'intégration des connaissances a lieu. Dans les situations de validation, les difficultés de nature didactique sont particulièrement difficiles à surmonter et les problèmes rencontrés dans l'adaptation progressive du futur enseignant au dispositif de formation montrent clairement la prédominance de ces difficultés. Les croyances et les habitudes concernant le statut et le rôle du contexte géométrique constituent des obstacles didactiques et doivent être questionnées, de façon explicite, en vue d'obtenir de nécessaires ajustements épistémologiques tant chez les élèves que chez les enseignants.

Notre recherche aura permis de cerner de façon particulière des stratégies que les formés ont utilisées lors de l'intégration des connaissances, notamment des stratégies d'élaboration ou d'organisation, de procéduralisation, de généralisation ou de discrimination, et de contrôle du sens qui sont centrales dans les activités de modélisation. Les résultats de notre recherche apportent un éclairage original à l'étude d'une question négligée dans la formation didactique des futurs enseignants, celle de l'intégration des connaissances dans cette formation pour construire le sens des concepts et asseoir leur compréhension. Les pistes de recherche que nous avons suggérées à la fin de ce travail sont une invitation à poursuivre l'exploration de la question du sens dans la formation des futurs enseignants par l'étude des difficultés liées à l'utilisation de plusieurs systèmes de représentation.

Mots clés: intégration des connaissances, modèles et modélisation, ingénierie didactique, sens et compréhension, identités remarquables, difficultés cognitives et didactiques, situations didactiques, champ conceptuel, tuiles algébriques, formes géométriques.

N.B. Dans le but d'alléger le texte, nous utilisons le genre masculin au sens générique pour désigner à la fois le masculin et le féminin, à moins que le contexte ne s'y oppose. Aussi, et à la suite de Portugais (1995), désignons-nous l'étudiant ou l'étudiante en formation par le «maître», l'enseignant ou l'enseignante par le «formateur», et le formateur ou la formatrice par le «formateur».

SUMMARY

The present research relates to preservice teachers education while addressing the meaning issue in their training from the inter-setting relations about algebraic and geometric knowledge in the teaching of remarkable identities. The remarkable identities (RI) concern the conceptual fields of the additive and multiplicative structures. If their learning really defies the student, it also issues a worrying challenge to the teacher. The present study, which lies within the scope of didactic engineering, is carried out with 27 preservice teachers from a mathematics field at the Université Gamal Abdel Nasser de Conakry (UGANC) and the Institut Supérieur des Sciences de l'Éducation de Guinée (ISSEG); it examines the role that can be played by knowledge integration in the teaching of RI, the nature of the difficulties encountered in the establishment of these connections and, in particular, the respective weight in these difficulties of the cognitive component and the didactic component.

The principal objective of this research is to explore the impact of such an integration on the understanding of the RI and, of this integration, to throw some light on the bonds between algebra and geometry in the preservice teachers' education. Data gathered by means of tape and videotape recordings and by other sources (written tracks, logbook, verbalizing and interviews) enabled us to better specify the scope of the mechanisms of preservive teachers' adaptation to the training device. The results clearly show that, compared with employing formal rules which primarily produce instrumental representations, knowledge integration makes it possible to diversify the RI representations, to display the distributive property (that is the key to polynomials factorization) and the characteristics of the perfect square, and to show clearly that any identifiable polynomial with a difference in squares can be factorized according to the model $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Then, preservice teachers' ability to conceive, to carry out and to analyze teaching activities varies according to the specific context tied to their dual position: *student* (compared to the trainer) and *teacher* (compared to the 9th year pupils). That is in accordance with other research results on preservice teachers' functioning from their early position in the didactic system (Portugais, 1995).

In addition, according to the number of subjects having met and their frequency of appearance, three great difficulties expressed themselves in almost every preservice teacher while integrating knowledge: it acts of the difficulty of implication in the work of others (some students feeling not concerned by their friends' modeling activities), of temptation to communicate the «right» answer (what short-circuits the work on knowledge elaboration), and non-intervention trap (by avoiding any intervention in order not to interfere with the students' works). To these three difficulties, which are to some extent in opposed registers, are added preservice teachers' difficulty to center their observation on the students' modeling activities, the inadequacy of their initial training, the rigidity of the training programs and their partitioning, the insufficient didactic preparation (if not the absence of the UGANC preservice teachers' education), the scarcity of didactic resources and the trainers' resistance to the change.

The resules show that preservice teachers meet cognitive difficulties of which we analyze the most significant ones in the registers of interpretation and prediction of the models of RI. These difficulties are constraining in the register of proofs, and a certain geometric validation must be instituted in order to overcome them. The results confirm the coexistence between cognitive difficulties and didactical ones in the construction of these inter-setting relations and help to better understand both how these two kinds of difficulties are interwoven and to evaluate the influence of these bonds on their obstinacy. In particular, the results sow that this interweaving is not independent of the contexts in which knowledge integration takes place. In the situations of validation, difficulties of a didactic nature are particularly difficult to overcome. Beliefs and habits about the status and the role of the geometrical context act as didactic obstacles and must be questioned, explicitly, in order to obtain the necessary epistemological changes both in teachers and students.

Our research will have made it possible to determine in a particular way the strategies that preservice teachers used while integrating knowledge, in particular strategies of elaboration/organization, proceduralization, generalization/discrimination and control of meaning, strategies which are central to the modeling activities. The results of our research bring an original lighting to the study of a question neglected in preservice teachers' didactic training, the one of knowledge integration in this training to build the meaning of the concepts and sit their comprehension. The research tracks that we suggested at the end of this work are an invitation to keep up the exploration of the meaning issue in preservice teachers training by studying difficulties linked to the use of several representation systems.

Key words: Knowledge integration, models and modelization, didactic engineering, meaning and understanding, remarkable identities, cognitive and didactic difficulties, didactic situations, conceptual field, algebraic tiles, geometric patterns.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES (suite)

Page

TABLE DES MATIÈRES (suite)

Page

TABLE DES MATIÈRES (suite)

TABLE DES MATIÈRES (suite)

Page

TABLE DES MATIÈRES (suite)

Page

TABLE DES MATIÈRES (suite)

Page

TABLE DES MATIÈRES (suite)

TABLE DES MATIÈRES (suite)

TABLE DES MATIÈRES (suite)

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX (suite)

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES (suite)

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ACDI:	Agence Canadienne de Développement International
CAPES:	Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire
CIAM:	Collection inter-africaine de manuels de mathématiques
CT:	Code thématique (regroupement conceptuel, par thèmes qui «vont ensemble»)
DEUG:	Diplôme d'études universitaires générales
DDM:	Didactique des mathématiques
ÉNI:	École normale d'instituteurs
ÉNS:	École normale supérieure
INRAP:	Institut national de recherche et d'action pédagogique
IPC:	Institut polytechnique de Conakry
IPJNK:	Institut polytechnique Julius Nyéréré de Kankan
IR:	Identité(s) remarquable(s)
ISSEG:	Institut supérieur des sciences de l'éducation de Guinée
MD/MF:	Milieu didactique/Milieu de formation
MESRS:	Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
PCBF:	Programme canadien des bourses de la francophonie
PEINT:	Méthode de calcul d'un produit de binômes: chaque lettre de cet acronyme est l'initiale d'une étape de cette méthode qui consiste à trouver les produits respectifs des **P**remiers termes, des termes **E**xtérieurs, des termes **IN**térieurs et des termes **T**erminaux.
PRG/SGG:	Présidence de la République de Guinée/Secretariat Général du Gouvernement
SD:	Système didactique
S1/S2/S3:	Savoir mathématique (S1)/Savoir didactique (S2)/savoir d'expérience (S3)
TCC:	Théorie des champs conceptuels (Vergnaud)
UGANC:	Université Gamal Abdel Nasser de Conakry

DÉDICACE

Je dédie cet ouvrage

à mon très regretté père
Elhadj Naby Moussa pour m'avoir donné l'essentiel:
une éducation de qualité, de la sagesse et l'amour du prochain

à mon très regretté frère **Elhadj N'Fansoumane**
qui était si fier de moi et qui m'avait généreusement
offert son affection, son amitié et son soutien durant sa vie

à ma très chère maman
Hadja Mama Asta Camara
pour son affection, son soutien et ses bénédictions
qui m'ont donné le courage et le *momentum* si nécessaires
à la réalisation de cette merveilleuse entreprise scientifique

à ma très chère épouse, **Tabara Thiam,**
et à notre cher fils, **Naby Moussa** (**Moïse**)
pour leur amour, leurs constants encouragements,
leur indéfectible patience et leur grande compréhension

REMERCIEMENTS

Il convient, en premier lieu, de remercier particulièrement et très chaleureusement le Professeur Jean Portugais, mon directeur de recherche, qui m'a accordé, dès le début, sa confiance, son respect et son soutien. Je le remercie vivement pour sa clairvoyante direction, son constant soutien et sa grande disponibilité tout au long de mon cheminement dans le programme de doctorat. Son orientation et ses conseils, précieux tant sur les questions conceptuelles, méthodologiques qu'analytiques, ont été déterminants à chaque étape de cette réalisation scientifique. Ses judicieuses rétroactions ont contribué à enrichir les discussions et favoriser l'atteinte de mes objectifs. Son expertise et ses critiques constructives ont contribué, à différents niveaux, à rehausser la qualité de cette thèse. Ceux qui me liront trouveront dans cette thèse le reflet de sa chaleur humaine et de sa rigueur intellectuelle: autant de qualités qui ont assuré l'excellence de l'encadrement dont j'ai bénéficié.

Je tiens également à remercier tous les professeurs du Département de didactique et à souligner l'apport constructif et très bénéfique des professeurs Gisèle Lemoyne, Sophie René De Cotret et Philippe R. Richard. Présidente de mon jury d'examen général de doctorat, la professeure Gisèle Lemoyne m'a fait part de ses critiques et suggestions constructives. Les professeurs Sophie René De Cotret et Philippe R. Richard ont pris le temps de faire une lecture critique de mon projet de thèse et m'ont fait part de leurs commentaires judicieux. Je les remercie pour leur écoute attentive et les discussions éclairantes que j'ai eues avec eux.

Je remercie toutes les personnes qui ont contribué à la collecte des données, notamment les futurs enseignants de l'Université Gamal Abdel Nasser de Conakry (UGANC) et de l'Institut Supérieur des Sciences de l'Éducation de Guinée (ISSEG), qui ont répondu généreusement à mes questions et qui ont participé avec enthousiasme à cette recherche. Je remercie aussi le personnel administratif et pédagogique de l'UGANC et de l'ISSEG pour leur collaboration de qualité à la réalisation du Séminaire. Je ne peux oublier mes collègues Yaya Mané, Mme Elena Ekimova, Kovana Marcel Loua et Michel Omalosanga pour le partage de la vie de doctorat. Je ne peux non plus oublier les belles-familles Thiam du très regretté Elhadj Souleymane, Kaba du très regretté Mohamed Aly, Kéita de Mory Kabinè, Soumah de Ousmane, Fadiga de Nourdine, Sylla de Aly, Condé de Hassane Laho, des M'Bô Hassanatou et Kadiatou, familles dont les membres résidant à Montréal m'ont entouré de leurs précieux soins et de leur grande amitié.

Je reste redevable à tous mes parents, beaux-parents et amis pour leur attachement indéfectible et leur arrière-garde rassurante. Parmi eux, je nomme tout spécialement mes frères Elhadj Imourana Fadiga, Elhadj Aboubacar Somparé, Aboubacar James Touré, Ibrahima Sorel Sankhon et Ibrahima Sylla, mes soeurs Safiatou et Yarie Touré, mon cousin Mohamed Rachid Youla ainsi que ma belle-soeur Khady Fadiga. Je cite également mes amis de longue date Hamidou Mané, Abdourahmane Abdel Soumah, Youssouf Yansané, Oumar Sivory Camara, Kandas Condé, Almamy Sékou Diaby, Souleymane Cissé, Ousmane Cissé, Alpha Mahmoudou Diallo, Youssouf Camara, Jean Delacroix Camara et Bocar Cissoko.

Des études de doctorat et la rédaction d'une thèse ne se font pas sans affecter la vie familiale, surtout lorsqu'on entreprend ces études très loin des siens. À cet égard, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon épouse, Tabara Thiam, pour son amour, sa compréhension et pour ses encouragements soutenus avant qu'elle me rejoigne à Montréal. Elle m'a entouré de sa présence aimante à tous moments et elle a été plus qu'extraordinaire dans toutes les situations.

Mes remerciements vont aux parents et amis qui me sont très chers, mais avec lesquels je ne pourrai malheureusement partager la joie d'avoir complété les études doctorales à l'Université de Montréal, la plus grande université francophone du monde, au nombre desquels les très regrettés papa Amadou Touré, maman Amy Sylla, beau-père Elhadj Souleymane Thiam, maîtres Elhadj Ibrahima Bayo et Issiaga Soumah, karamôkhô Elhadj Nabaniou Chérif, tonton Elhadj Boubouya Sankhon, cousins Commandant Karamoko Camus Camara, Sékou Yansané et Abdoulaye Camara, soeurs Alimatou et Mâmady Touré, frères Mourane Touré, Moussa Fadiga et Zaïnoul Abidine Sanoussi, neveu Salimou Fofana, grand ami Alkhaly Bangoura. Puissent-ils trouver dans cet ouvrage un hommage mérité à leur illustre mémoire.

Mes remerciements vont aussi à tous les amis canadiens et compatriotes guinéens de Montréal qui ont partagé avec mon épouse Tabara et moi-même leurs temps de loisirs et qui nous ont apporté leur soutien moral inestimable lors des décès que nous avons enregistrés en Guinée.

Je tiens à remercier la Faculté des études supérieures (FÉS) et le Comité des études supérieures du département de Didactique de l'université de Montréal dont le soutien constant, sous forme de bourses d'excellence à différentes étapes de mon cheminement académique, fut une source de motivation, d'encouragement et un appoint déterminant pour achever la recherche dans les délais prévus par la FÉS. Je remercie Madame Caroline Reid et tout le personnel du Bureau des étudiants internationaux de l'Université de Montréal. Je remercie les secrétaires de direction et des affaires académiques du Département de Didactique, notamment Mme Nicole Gaboury et Mme Danielle Beadouin pour leur sollicitude et les «jokes» (belles blagues) auxquelles elles se sont parfois jovialement prêtées.

J'adresse, finalement, mes sincères remerciements au Programme Canadien de Bourse de la Francophonie (PCBF) et à ses différentes équipes d'encadrement pour l'octroi de leurs bourses d'excellence, leur substantiel soutien financier et pour la qualité du suivi pédagogique. Je remercie particulièrement Mme Colette Gagnon, responsable des étudiants de doctorat, et le Comité de gestion du PCBF qui ont bien voulu tenir compte de mon état de santé pour m'accorder un soutien financier exceptionnel.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La présente thèse porte sur la formation didactique des futurs enseignants, en abordant le problème du sens dans cette formation sous l'angle de l'intégration des connaissances algébriques et géométriques. Les cours de mathématiques destinés aux futurs enseignants apparaissent souvent à ces derniers comme une «transmission» de savoirs abstraits et formels sans beaucoup de sens et renforcent le modèle stéréotypé qu'ils se font des mathématiques. Jusqu'à présent, peu de recherches ont été menées auprès de ces derniers en vue d'explorer comment ils se prêtent aux activités de modélisation favorisant une meilleure compréhension des identités remarquables (IR). En visant un tel objectif, la présente étude cherche à établir en quoi et jusqu'où le passage du cadre algébrique au cadre géométrique et le passage inverse sont féconds. Le choix des IR permet de mieux mettre en évidence, par comparaison, le rôle du modèle géométrique dans la construction du sens pour ces IR.

Dans la formation des maîtres à l'enseignement des mathématiques, nous devons accorder plus d'importance à la manière dont les modèles géométriques, jusqu'ici très peu utilisés dans le processus enseignement/apprentissage, pourraient contribuer à mieux faire comprendre, représenter et interpréter les structures (multiplicatives et additives) sur lesquelles reposent les IR. Ceci est d'autant plus important qu'en Guinée, nous sommes loin de pouvoir mettre en place et d'expérimenter les stratégies d'enseignement basées sur les larges possibilités, avantages et raccourcis qu'offre l'ordinateur pour établir une relation étroite entre différents cadres conceptuels. Le fondement épistémologique central de notre démarche n'est pas la perspective du chercheur-expert, mais celle de l'enseignant-chercheur, selon laquelle l'enseignant peut développer ses habiletés, connaissances et compétences professionnelles en tant qu'instruments d'intervention pédagogique et didactique, par le développement de ses cours «en prenant acte des résultats de la recherche et les exploitant pour concevoir et réaliser des activités de formation» (Portugais, 1995, p. 13).

Dans cette démarche, nous privilégions la recherche de type exploratoire, fondée sur une méthodologie qualitative qui nous permet, d'une part, de collecter sur le terrain les données liées au dispositif expérimental faisant référence à la méthodologie de l'ingénierie didactique et, d'autre part, de traiter les données en faisant appel à la méthodologie d'analyse des protocoles et à la réduction des données qualitatives. Artigue (1988) conçoit l'ingénierie didactique comme une forme de travail didactique comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un certain projet, se base sur ses connaissances, accepte de se soumettre à un contrôle scientifique mais qui, en même temps, se voit contraint de travailler sur des objets plus complexes que ceux épurés de la science, et qui se voit donc obligé d'aborder effectivement, avec tous les outils dont il dispose, les questions peu ou non encore traitées par la science. À l'image de cet ingénieur, le didacticien cherche, d'une part, à se dégager des rapports entre la recherche et l'action, rapports qu'il conçoit soit en termes d'innovation, soit par le biais de la notion de recherche/action, pour être à même d'affirmer la possibilité d'agir rationnellement sur le système d'enseignement à travers des activités basées sur des théories didactiques préalablement élaborées; d'autre part, à souligner l'importance de la «réalisation didactique» en classe comme pratique de recherche, à la fois pour des raisons liées à l'état de jeunesse de la recherche en didactique et pour satisfaire des besoins permanents – ceux de la mise à l'épreuve des constructions théoriques élaborées.

La formation didactique des futurs enseignants et les réflexions que nous faisons sur l'intégration des connaissances dans l'enseignement des IR incluent dans leur problématique un bref aperçu historique de la formation des enseignants en termes d'institutions, d'orientations et de stratégies.

1. Problématique de la formation des enseignants en Guinée

La formation des enseignants a évolué au rythme des multiples réformes qu'a connues la République de Guinée depuis son indépendance: Réforme de 1958, Révolution culturelle socialiste de 1968, Conférences nationales de l'éducation de 1984 et 1985, États-Généraux de l'éducation et journées de réflexion sur l'enseignement supérieur de 1989, 1995, etc. Malgré de grands efforts consentis dans l'élaboration de ces réformes, les maîtres d'œuvre de la réforme de l'enseignement des mathématiques n'ont pas réussi pour autant à contrôler la question du sens dans la formation des futurs enseignants. Or, remarque Lemoyne (1993, pp. 274-75), «si on fait abstraction de la quête du sens, on comprend mal comment pourrait se réaliser un enseignement». Nous imaginons difficilement comment l'enseignant qui désire provoquer un apprentissage des IR peut éviter de s'informer du sens des activités, des problèmes et des explications qu'il donne à ses élèves et du sens que ses élèves attribuent à ces actes. Nous imaginons tout aussi difficilement comment l'élève peut éviter de s'enquérir du sens des actes que l'enseignant attend de lui, du sens des actes qu'il pose en résolvant les problèmes. Le sens devrait donc exercer un contrôle sur l'ensemble des actions de l'enseignant et de l'élève.

Mais, fort malheureusement, en rénovant de fond en comble les contenus mathématiques jusqu'au langage et aux mots qui désignent les objets à connaître, on diminuait d'autant les relais culturels et didactiques par lesquels l'enseignant pouvait se présenter aux élèves comme maître du savoir. Les différents projets de réforme de la formation des enseignants se sont avérés insatisfaisants, parce que la quasi-totalité des formateurs ont évolué jusqu'ici dans un contexte d'enseignement universitaire de type classique, privilégiant l'enseignement magistral formel comme méthode par excellence. Comme l'atteste Kourouma (1997, p. 13): «C'est dans ce contexte d'enseignement traditionnel, doublé de la rareté ou du manque de pertinence de documents, que l'enseignant demeure à la fois la personne-ressource et le document de référence».

La critique principale que nous faisons aux multiples réformes dont la formation initiale des enseignants a fait l'objet, à la suite de Conne (1993, p. 208), consiste à relever le fait qu'«elles ont sacrifié le sens à l'autel des formes et du langage». Ces incessantes réformes ont été insatisfaisantes précisément parce qu'elles s'inscrivaient dans une perspective d'innovations qui avaient le plus souvent un fonctionnement de type «*process-product*». Aussi, les décideurs du système avaient considéré ces réformes comme un levier qui aurait permis d'agir sur la qualité de l'enseignement et, partant, sur l'apprentissage des élèves. Nous pensons qu'il s'agissait là d'une position épistémologique à la fois naïve et présomptueuse. En effet, comme le souligne Portugais (1995, p. 21),

> *Elle est naïve parce qu'elle suppose que l'action sur une ou quelques variables des systèmes de formation va permettre, sans travail d'analyse du*

fonctionnement de cette formation et des phénomènes qui lui sont propres, d'obtenir un effet en termes de rendement académique chez les élèves. Cette naïveté est apparemment liée au paradigme process-product[1] *selon lequel un changement de procédé de formation donne lieu à une modification substantielle de ses produits. Et c'est en cela même qu'elle est présomptueuse car elle relève d'une conception éminemment empiriste de la formation des maîtres, elle renvoie à des modèles de formation de type «boîte noire».*

Avant 1988, la formation des enseignants du secondaire se réduisait essentiellement à une formation disciplinaire. Ceci a eu pour corollaire de percevoir l'enseignant «compétent» comme étant celui qui fait simplement montre d'une bonne maîtrise d'une discipline d'enseignement, des mathématiques en l'occurrence. Mais les administrateurs de l'Institut Supérieur des Sciences de l'Éducation de Guinée (ISSEG) et les décideurs du système ont fini par comprendre qu'il est difficile, sinon impossible, de poser efficacement des actes d'enseignement si l'on n'a pas été spécifiquement préparé à cette formation par la didactique de la discipline, la didactique des mathématiques en l'occurrence.

Pour mieux comprendre la problématique de la formation des futurs enseignants en République de Guinée, il est important de décrire le contexte socio-historique dans lequel le projet de formation s'inscrit, en dressant l'inventaire des difficultés rencontrées et les mesures prises pour améliorer la qualité de cette formation.

2. Contexte socio-historique de la formation des enseignants

La formation des enseignants du Secondaire en Guinée a été marquée par les multiples réformes de son système éducatif, réformes consécutives à des moments particulièrement importants de son histoire. En effet, la Guinée a connu une histoire politique difficile et mouvementée. Ce pays, qui a vécu sous un régime colonial pendant plus de 60 ans, a été l'unique colonie française d'Afrique à opter pour son indépendance le 28 septembre 1958, à l'occasion du Référendum Gaulliste. La France a mis alors fin à son soutien à la Guinée qui proclamait son indépendance le 2 octobre 1958; la France lui a fait

---

[1] Plusieurs chercheurs ont posé la question de savoir si les enseignants font une différence pour favoriser l'apprentissage des élèves, autrement dit s'il y a un «effet enseignant» (Durand, 1996). Pour répondre à cette question, il fallait conduire des recherches dans les classes et observer les comportements des enseignants auprès de leur groupe d'élèves. Il fallait aussi mettre en relation les comportements des enseignants (processus) avec la performance des élèves à des épreuves standardisées (produit). Mais rien ne garantit que les résultats de ce type de recherche contribuent à réduire le fossé entre la théorie et la pratique de formation de futurs enseignants.

subir une grave pénurie d'enseignants provoquée par le rapatriement des enseignants français des collèges et lycées.

2.1 Avant l'indépendance

Vers 1935, l'organisation de l'enseignement en Guinée correspond, selon Lewin (1984, p. 46) à 16 cours préparatoires, 11 écoles élémentaires, 8 écoles régionales, 2 orphelinats et une école primaire supérieure, le tout tenu par 82 maîtres africains et européens, et fréquenté par 5723 élèves. Dans l'ensemble, il y a, à la veille de l'indépendance, 62 enseignants au secondaire (Lewin, 1984). Aucun lycée n'existe en Guinée jusqu'en 1957. Jusqu'à l'indépendance, la Guinée n'assurait que la formation de moniteurs d'enseignement dans les «cours normaux» ouverts dans les années 50. Les instituteurs étaient formés dans les écoles normales de Katibougou (Mali), Dabou (Côte d'Ivoire) et William Ponty (Sénégal) – cette dernière étant de loin la plus grande et la plus prestigieuse de ces écoles. L'École William Ponty s'est, en effet, particulièrement distinguée pour avoir fourni à l'Afrique francophone ses premières élites modernes et à la lutte contre le colonialisme un noyau important des premiers dirigeants nationalistes. Les enseignants des collèges et des lycées étaient essentiellement des français, la Guinée ne comptant que onze diplômés d'enseignement supérieur en 1958 (Rivière, 1965, p. 81).

2.2 Première réforme de 1959

La première réforme du système éducatif de 1959 a permis de relever la capacité d'accueil de l'école et de se doter de nouvelles institutions, pour la formation d'un personnel enseignant capable de faire fonctionner le nouveau système éducatif. Ainsi, créée en 1961, l'École Normale Secondaire de Dabadou devenait en 1965 l'École Normale Supérieure Julius Nyéréré de Kankan (Kankan étant la seconde ville universitaire, après Conakry, la capitale), avec pour mandat la formation, en deux ans, des enseignants de collège et de lycée. En 1962, l'Institut Polytechnique Gamal Abdel Nasser de Conakry (IPGANC) donnera naissance aux Facultés des sciences de la nature et des sciences sociales. Bolibaugh (1972, p. 32) rapporte que «the faculties of science and social sciences principally prepare teachers for third-cycle schools». En 1968, l'École Normale Julius Nyéréré de Kankan deviendra l'Institut Polytechnique Julius Nyéréré de Kankan (IPJNK), structuré en une Faculté des sciences sociales et une des sciences de la nature, pour la formation d'enseignants du secondaire.

Les institutions guinéennes d'enseignement supérieur, en général, et les institutions de formation à l'enseignement, en particulier, sont assez mal connues. Le système scolaire et universitaire guinéen lui-même commence à peine à être connu, depuis que durant ces dix-sept dernières années quelques travaux d'étudiants guinéens sont disponibles aux États-Unis, au Canada et en France. Aussi, présentons-nous l'université de Conakry, la plus grande et la plus prestigieuse de ces institutions.

2.2.1 De l'Institut Polytechnique de Conakry (IPC) à l'Université Gamal Abdel Nasser de Conakry (UGANC)

Créé en 1962, sous la dénomination «Institut Polytechnique de Conakry» (IPC), grâce à la coopération bilatérale entre la Guinée et l'ex-URSS, l'IPC comprenait alors les facultés des sciences (mathématiques, physique, chimie, biologie, etc.), des lettres, de génie civil, des mines et géologie, et d'agronomie. Successivement dénommé «Institut Polytechnique Gamal Abdel Nasser» (IPGAN) en 1970, «Université de Conakry» (UC) en 1984, «Université Gamal Abdel Nasser de Conakry» (UGANC) en 1989, cette université, à l'instar des autres institutions d'enseignement supérieur, est érigée en établissement public à caractère scientifique et dotée de l'autonomie de gestion. Le statut de l'Université et celui des enseignants et chercheurs sont alors promulgués par décrets présidentiels N^os^ 175 et 176/PRG/SGG. L'autonomie de gestion a été rendue effective sur le terrain le 26 Juillet 1993, après une longue préparation qui a nécessité l'élaboration et la promulgation de nombreux textes de réglementation, au nombre desquels figurent le Règlement Intérieur et le Cadre Organique.

La réforme de 1990-1991 a consisté au regroupement des onze anciennes facultés en cinq unités au sein de l'Université: une faculté des Sciences, une faculté des Lettres et Sciences Humaines, une faculté de Droit et Sciences Économiques, une faculté de Médecine et de Pharmacie, et l'Institut Polytechnique de Conakry (IPC). Chacune de ces unités comprend désormais les Départements subdivisés en Chaires. En plus de ces facultés et de l'IPC, l'université comprend un Centre d'Étude de la Langue Anglaise

(CELA), un Centre Informatique, un Centre d'Étude et de Recherche en Environnement (CERE).

2.2.1.1 La place des mathématiques dans les programmes de formation

Lorsqu'ils sont admis en faculté, les étudiants du premier cycle de mathématiques doivent préparer en deux ans le Diplôme d'Études Universitaires Générales (DEUG). Un deuxième cycle, d'une durée de deux à trois ans, les prépare à la licence et à la maîtrise. Les mathématiques doivent surtout répondre aux besoins réels de la Guinée et ouvrir la voie de la recherche (fondamentale ou appliquée) aux étudiants. L'insistance sur les mathématiques est faite non seulement à cause de la valeur heuristique, mais aussi à cause de la volonté de corriger les stéréotypes, notamment les préjugés sur l'incapacité des Noirs à apprendre les sciences en général, les mathématiques en particulier, où priment la logique et la raison - préjugés répandus par l'idéologie coloniale. Touré (1990, p. 10) note que sous le régime colonial et au début de l'indépendance, «des milliers d'élèves ont été brouillés avec les mathématiques à cause du caractère par trop uniforme et non personnalisé de l'enseignement. L'enseignement dispensé dans les écoles était essentiellement livresque et axé sur la mémorisation de l'information, même si celle-ci n'avait rien à voir avec le vécu quotidien de l'élève». Aussi, l'élève était-il plongé dans un ensemble de forces, de contraintes qui venaient oblitérer ses apprentissages. Ces forces sont l'image dévalorisée de soi comme mathématicien, la «bosse des maths» que seuls les rares «doués» posséderaient, et l'anxiété face aux mathématiques.

2.2.1.2 Corps hétérogène d'enseignants

L'arrivée des premières promotions universitaires dans l'enseignement secondaire se situe au tournant des années 70. L'UGANC et l'IPJNK, par leurs facultés des sciences sociales et des sciences de la nature, continuent de garder le monopole de la formation des enseignants du secondaire. Toutefois, affirme Tounkara (1984, p. 34): «En raison de l'accroissement des effectifs scolaires, lié à la réforme de 1959, et du nombre insuffisant de diplômés des institutions chargées de la formation des enseignants du secondaire, le personnel de cet ordre a finalement absorbé un grand nombre d'instituteurs ordinaires, exerçant initialement au primaire». La physionomie de l'école secondaire guinéenne de cette période témoigne ainsi de l'hétérogénéité de son personnel enseignant, du manque de préparation adéquate de ce dernier à assumer efficacement ses fonctions. Notons que si les universitaires possédaient une formation disciplinaire acceptable, il n'en était pas ainsi sur le plan de la pédagogie et des sciences de l'éducation. De même, les diplômés des institutions normales pouvaient se targuer d'une formation pédagogique à leur dimension, tout en accusant des lacunes au plan des contenus disciplinaires. D'ailleurs, le type de formation en pédagogie générale reçue par ces derniers ne permettait pas de répondre aux nombreuses questions relatives à l'enseignement des mathématiques, ni même d'envisager de telles questions.

2.2.1.3 De la pédagogie traditionnelle

À l'université, comme dans les institutions normales, la méthode d'enseignement couramment utilisée et imitée des prédécesseurs et formateurs relève de la pédagogie traditionnelle dont le fondement focalise le processus d'enseignement et d'apprentissage sur l'activité de l'enseignant. L'enseignant est essentiellement centré sur la logique du contenu à transmettre. Pour lui, enseigner consiste d'abord à se préoccuper de la matière, à la subdiviser en parties plus simples et à la faire apprendre, inlassablement. Avec ce modèle, le rapport triangulaire «enseignant/savoir/enseigné» consacre au savoir la valeur de vérité universelle, fait de l'enseignant le représentant de ce savoir, tandis que l'élève est constamment placé dans l'ignorance. Lire, relire, copier, apprendre par cœur sont les procédés de ce dernier. De cette façon, l'enseignement, voire la formation à l'enseignement, a toutes les chances de devenir ce que Freire (1977, p. 51) appelle un «acte de dépôt où les élèves sont les dépositaires et l'enseignant, le déposant». Et Freire (1977) de noter que «si l'éducateur est celui qui sait, si les élèves sont ceux qui ne savent rien, il revient au premier de donner, de livrer, d'apporter, de transmettre son savoir aux seconds. Et ce savoir n'est plus celui de l'"expérience vécue", mais celui de l'"expérience racontée" ou transmise» (p. 53).

À la suite de l'arrivée des cohortes de collégiens et de lycéens à effectifs pléthoriques, il devenait difficile pour l'enseignant de pratiquer cette pédagogie de «révélation professorale». Des enseignants plus âgés et expérimentés s'étaient chargés d'imaginer de nouvelles façons de dispenser les cours à ces contingents d'élèves. Ils consignaient alors leurs recettes, astuces et trucs dans des traités de pédagogie générale et «révélaient» ce savoir-faire aux novices qui l'apprendront et le reproduiront à leur tour. Ainsi, loin d'être théorique, le savoir pédagogique consiste en procédures inférées des pratiques et de l'expérience des enseignants "chevronnés", procédures que devront apprendre et reproduire fidèlement les novices. Son apprentissage s'effectue donc selon le modèle ci-dessus décrit par Freire, c'est-à-dire selon l'archétype de l'apprenti au contact de son maître déposant. Cette tradition pédagogique a fait l'objet de vives critiques au début du 20e siècle et a pris une connotation péjorative avec l'étiquette de «pédagogie traditionnelle» qui prévaut encore de nos jours. Dans ce système traditionnel d'enseignement/apprentissage, ce qui caractérise l'étudiant, explique bien Chevallard (1988), c'est qu'il «raisonne sous influence», par le jeu du contrat didactique. Il sait, ajoute-t-il «qu'il est attendu et, si le contrat didactique fonctionne bien, il sait où on l'attend». Cette image du contrat didactique et de la relation «enseignant/savoir/enseigné» traduit assez fidèlement les caractéristiques de la pédagogie traditionnelle qui a prévalu en Guinée durant la fameuse Révolution culturelle socialiste.

2.3 De la Révolution culturelle socialiste

Avec la réforme de 1968, inspirée de la Révolution culturelle chinoise, dont l'idéologie était d'en arriver à «l'enseignement de masse», avec pour corollaires l'institutionnalisation du travail productif, des méthodes d'évaluation favorisant la progression en masse des cohortes d'un niveau à un autre et l'exploitation insuffisante du temps en faveur des activités d'enseignement/apprentissage.

2.3.1 Caractéristiques de l'éducation guinéenne

Bolibaugh (1972, pp. 36-37) caractérise le développement de l'éducation guinéenne en ces termes:

> *Educational development in Guinea has been characterized by (...) dramatic enrollment increases at the elementary level, limited attention to secondary education in relation to a premature emphasis upon higher education, and an intent to render as practical as possible education at all levels (...). Programs have been started and operated with inadequately prepared teachers, and occasionnaly with no teachers at all in certain disciplines.*

La Guinée est restée coincée avec cette image d'un enseignement qui, sans que cela réflète ses finalités, a atteint trop souvent davantage la mémoire des élèves que leur intelligence. Cela a provoqué des conséquences déplorables tant au plan de la compétence mathématique qu'à celui des relations affectives aux mathématiques, des attitudes et des représentations des élèves. L'image dévalorisée de soi comme mathématicien s'est constituée aux travers d'échecs successifs, sanctionnés par de «mauvaises notes» et a rendu encore plus délicate la relation à la difficulté, en intervenant comme agent aggravant de cette difficulté. Certains élèves y ont récolté des «cicatrices d'apprentissage». Face à la dangereuse notion de la «bosse des maths», Blouin (1985) porte son réquisitoire sur toutes les conceptions associant la réussite ou l'excellence en mathématiques au fait de posséder des aptitudes intellectuelles spéciales, aptitudes que les hasards génétiques auraient fait fleurir dans certains cerveaux, mais pas dans d'autres.

Touré (1990, p. 39) souligne que «ces réactions d'anxiété et autres sentiments d'incompétence et de dévalorisation, qui sont le lot quotidien de tellement d'élèves dans leur confrontation avec les mathématiques, conduisent inéluctablement à la démission prématurée en cas de difficulté, et à la remise à plus tard du travail à faire». L'école devrait aider chacun à construire une image positive de soi en tant que mathématicien, c'est-à-dire permettre à tout élève d'entrer dans des activités de recherche, de formuler des hypothèses et de les tester, d'identifier les savoirs de référence. C'est dans ce contexte qu'est née l'École Normale Supérieure (ÉNS) de Manéah (par décret présidentiel N° 402/PRG/SGG/79 du 2 octobre 1979), avec le double mandat de former académiquement et professionnellement les enseignants du secondaire.

2.3.2 L'École Normale Supérieure (ÉNS) de Manéah

L'ÉNS mobilisait un corps enseignant compétent au plan des disciplines académiques, mais qui manquait de préparation en pédagogie et en sciences de l'éducation. C'est ce que confirme Tounkara (1990, pp. 6 et 7) lorsqu'il dit: «Au demeurant, jusqu'à maintenant, peut-on dire, pour donner un cours dans les écoles (...) il suffit de faire preuve de connaissances dans une matière donnée». On pouvait constater, par exemple, à l'ÉNS de Conakry, que les cours, dont on dit qu'ils sont de «formation pédagogique», sont, bien souvent, comparables à des cours de philosophie, desquels le professeur s'efforce de tirer des leçons de pédagogie. Ce phénomène concrétise aussi, selon Lallez (1986) et Plevoets (1982), une situation générale où les cours de pédagogie sont donnés par des professeurs qui n'y ont pas été spécialement préparés parce que n'ayant pas eux-mêmes de formation conséquente en pédagogie. Il est tout de même injuste d'attribuer l'échec de l'école guinéenne aux enseignants, puisque ces derniers étaient prisonniers de théories idéologiques inappropriées, de projets éducatifs qui ne les concernaient pas, de politiques publiques qui ne valorisaient pas leur travail et ne les encourageaient pas au développement professionnel.

2.3.3 Du «recyclage» des enseignants en exercice

Il a été, certes, quelques fois question du «recyclage» des enseignants en exercice. Mais, en réalité, peu de possibilités d'assistance ont été offertes aux enseignants qui éprouvaient des problèmes dans leur pratique. Ni l'université ni les institutions normales n'offraient de programme de formation continue. On incitait plutôt les enseignants à l'auto-développement, prenant pour acquis que celui qui veut se former le peut. L'absence de repères théoriques reposant sur les connaissances actuelles et actualisées, la solitude et l'abandon, les maigres salaires, les conditions très précaires de travail, le climat de pessimisme et d'insécurité ont réduit les enseignants des années 80 à une situation déplorable. Il faudra attendre l'avènement de la deuxième République, le 3 avril 1984, pour voir s'opérer des changements qui, bien que lents, vont permettre de relever l'un des défis majeurs que suscite le nouveau contexte de la professionnalisation - celui de la formation didactique des futurs enseignants.

2.4 Le tournant historique du 3 Avril 1984

À l'avènement de la Seconde République (3 avril 1984), le réseau des institutions d'enseignement supérieur comprenait deux instituts polytechniques (l'IPGANC à Conakry et l'IPJNK à Kankan); trois instituts agronomiques situés à Foulaya (Kindia), Bordo (Kankan) et à Faranah; l'institut des mines et géologie à Boké, 29 facultés agronomiques autonomes disséminées à travers les quatre régions naturelles du pays, quatre facultés non-agronomiques toutes situées à Conakry; et une seule école normale supérieure à Manéah (Coyah).

2.4.1 Des mesures de redressement du secteur éducatif

Aux nombres des mesures prises par la première conférence nationale convoquée en Mai 1984, figurent la restructuration des institutions avec la réduction très sensible de leur nombre et l'organisation des enseignements. En l'absence de ressources matérielles modernes et suffisantes et de ressources humaines compétentes, il est utopique de prétendre à une quelconque qualification du système d'enseignement. Ainsi, conformément à l'article 1 du décret présidentiel 088/PRG/SGG/90 relatif à «l'organisation des enseignements supérieurs en République de Guinée», deux universités (à Conakry et à Kankan) et trois instituts supérieurs (des sciences de l'éducation de Guinée à Manéah, des mines et géologie à Boké, des sciences agronomiques et vétérinaires à Faranah), tous dotés du statut d'établissement public à caractère scientifique et placés sous la tutelle du ministre chargé de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, constituent, à présent, les cinq établissements d'enseignement supérieur en Guinée.

Conséquence directe de cette restructuration institutionnelle, la deuxième mesure a porté sur la réorientation des enseignements en fonction des nouvelles missions assignées aux différents établissements. Ainsi, face à la nécessité d'améliorer la qualité de l'enseignement et de la formation, l'ISSEG s'est lancé dans un programme de formation de ressources en psychopédagogie et en sciences de l'éducation. Et, fort heureusement, le retour en 1988 d'un noyau de quatre enseignants, formés au certificat en enseignement secondaire et collégial à la Faculté des Sciences de l'Éducation de l'Université de Montréal, a rendu possible l'ouverture d'un département des stages. Ce nouveau département a travaillé à la planification et à l'implantation d'un programme rénové de formation professionnelle d'enseignants du secondaire, programme inspiré du certificat de l'Université de Montréal, et tenant, bien sûr, compte du contexte spécifique de la Guinée.

Ce n'est donc qu'à partir de 1988 que l'on peut parler d'une formation professionnelle des enseignants en Guinée. Cela se comprend dans la mesure où la France, ancienne puissance coloniale, dont le système d'éducation ne manqua pas d'aliéner celui de la Guinée, a elle-même pris du retard dans ce domaine. En effet, comme l'affirme Zay (1994, p. 164), «c'est avec la réforme de 1989, qui a conduit à la création des instituts universitaires de formation des maîtres (IUFM), que la France s'est alignée sur le mouvement général de la formation des enseignants, qui a démarré depuis plus de vingt ans dans la plupart des pays de niveau industriel comparable». La Guinée ayant relevé ses exigences d'entrée au programme de formation, nous pensons qu'il est désormais possible de former les futurs enseignants au chapitre de la didactique des mathématiques (DDM). Notons que l'Agence canadienne de développement international (ACDI) participe à un programme de formation et de perfectionnement de nos cadres, comprenant l'envoi de professionnels, de matériel didactique et le financement de séminaires de formation ainsi que des stages au Canada et en pays tiers.

2.4.2 Profitant de l'expérience québécoise

Les grandes orientations prises par l'ISSEG en 1990 ressemblent à celles suivies par les facultés des études supérieures québécoises de formation des enseignants, après la publication du rapport Parent en 1964. Lessard (1994) relève trois fonctions essentielles, à savoir: la formation initiale des enseignants, le perfectionnement en cours d'emploi et le développement de la recherche en sciences de l'éducation. Les objectifs que se fixe l'ISSEG à travers son statut et sa structure en quatre départements confirment cette analogie. Ces départements sont ceux de la formation des professeurs de collège et lycée, formation des professeurs d'écoles normales, d'inspecteurs et de conseillers pédagogiques, formation de planificateurs et administrateurs de l'éducation, formation continue et recherche en éducation. Nous constatons qu'à l'image du modèle québécois, les systèmes français et guinéen se développent progressivement selon la trilogie rapportée par Lessard (1994). La tendance actuelle de ces trois systèmes d'éducation est de recruter les futurs enseignants du secondaire à différents niveaux universitaires, en consacrant au moins 1/4 à 1/3 du temps à la formation professionnelle (psychologie, pédagogie, sciences de l'éducation, didactiques spécifiques et stages). Cette vision de la formation des maîtres s'accorde avec celle de Mialaret (1985, p. 95) qui affirme que «l'évolution actuelle de toutes les sociétés et la civilisation universelle font qu'il est difficile, sinon impossible, de jouer le rôle d'un éducateur sans y avoir été préparé».

2.4.2.1 Du stage, composante essentielle de la formation professionnelle

Le stage s'affirme comme un aspect nodal de la formation des enseignants. Il se déroule dans les écoles secondaires d'application pendant les mois de mars et d'avril, sous la direction des maîtres hôtes. Le service des stages de l'ISSEG autorise ses superviseurs d'assurer le suivi et l'évaluation du stage, en collaboration avec les maîtres hôtes. Le stage amène le futur enseignant à faire le lien entre la théorie enseignée à l'ISSEG et la pratique sur le terrain. Le stagiaire tient un cahier de préparation et un journal de bord dans lequel il consigne son vécu quotidien. Ces documents servent aussi à compléter l'évaluation sommative du stage. Comme l'objectif à long terme est de préparer les futurs enseignants à devenir des enseignants professionnels, il est prévu que le stage soit l'occasion de leur faire réaliser la complexité des tâches dans l'organisation des activités pédagogiques. Toutefois, l'écart ressenti entre la pratique professionnelle et les cours de didactique préoccupe aussi bien les formateurs que les didacticiens.

2.4.2.2 Réduire l'écart entre la théorie et la pratique

Portugais (1995, p. 13) a remarqué que «le discours des formés au retour des stages accentuait (...) fréquemment la rupture entre les contenus didactiques et ce qu'ils appellent la vraie pratique ou la réalité scolaire». Pour Portugais (1995, p. 13):

> *Poser la question de l'écart ressenti entre la pratique professionnelle et les cours de didactique des mathématiques, c'est (...) se demander: «comment exploiter les travaux de recherche auprès des praticiens [les enseignants]» et se mesurer à la métaphore de «l'incommunicabilité entre deux planètes [celles de la recherche et de la pratique enseignante]». Il y a donc lieu de se demander si la dissémination des travaux de recherche doit être faite directement (l'enseignant comme utilisateur de recherches) ou indirectement (le formateur prenant acte des résultats de la recherche et les exploitant pour concevoir et réaliser des activités de formation).*

Nous optons pour la seconde assertion, entendu que l'idée fondamentale de notre démarche est d'impliquer le futur enseignant dans un processus d'enseignement et d'apprentissage pour qu'il soit en mesure de comprendre comment les élèves peuvent apprendre de façon significative les mathématiques, en l'occurrence les IR. Il nous faut cependant rester vigilant, car l'expérience des stages peut se révéler fortement contre-productive: elle risque parfois de ramener le futur enseignant vers la conformité la plus désolante. Risque d'autant plus grand qu'en Guinée ces stages échappent presque toujours au contrôle des didacticiens.

2.5 Encore du chemin à faire

S'il convient de reconnaître que d'importants efforts ont été fournis par le gouvernement guinéen pour soutenir les actions de formation des enseignants, il faut cependant noter que les mesures prises sont encore insuffisantes, par rapport aux objectifs de qualification du personnel enseignant. Il reste encore, entre autres, à définir la tâche du formateur des futurs enseignants, promouvoir et évaluer sa propre formation, alléger la tâche d'enseignement, établir un équilibre entre l'enseignement et la recherche en didactique, laisser plus d'initiatives au futur enseignant et le placer dans un environnement didactique favorable. L'absence d'un fond de bibliothèque, de didacthèque à jour, de laboratoires bien équipés (y compris le laboratoire d'informatique) sont aussi des facteurs explicatifs de la pédagogie en vigueur, trop centrée sur le cours magistral, la prise de notes et la mémorisation des contenus en fonction des examens. Par ailleurs, étant donné que les universités de Conakry et de Kankan continuent de garder le monopole dans la formation des enseignants du secondaire, il est, à notre avis, temps de considérer l'hypothèse d'intégrer la formation des futurs enseignants à l'université, ce qui permettrait d'en améliorer la qualité et d'éviter les nombreuses opérations de recyclage.

3. Organisation de la thèse

En Guinée, la vision additive, cloisonnée et linéaire de l'enseignement des mathématiques demeure un modèle solidement ancré qui, en plus de trouver de nombreux défenseurs chez les universitaires, paraît la «bonne méthode». C'est ignorer que dans les systèmes de formation vers la professionnalisation, tant en Europe francophone qu'en Amérique du Nord, les formatrices et formateurs sont confrontés à la nécessaire intégration de nombreux savoirs. La présente étude, qui s'inscrit dans le cadre de l'ingénierie didactique, se propose d'examiner un tel processus chez les futurs enseignants des départements de mathématiques de l'UGANC et de l'ISSEG.

Dans le premier chapitre (Problématique), nous situons le champ conceptuel des IR pour aborder le problème du sens dans la formation didactique des futurs enseignants. Nous examinons le cadre algébrique privilégié pour l'enseignement des IR; nous soulignons la nécessité d'utiliser le contexte géométrique pour construire le sens des IR et asseoir leur compréhension. Nous formulons nos questions et nos objectifs de recherche ainsi que leur pertinence. Le deuxième chapitre (Cadre théorique) fait état de l'apport indispensable de Vergnaud dont la théorie des champs conceptuels nous suggère d'accorder une attention particulière aux différents aspects des IR, aux différentes situations dans lesquelles ces aspects prennent leurs significations et aux différents systèmes de signifiants utilisés. Le cadre théorique fait aussi état de la théorie des situations de Brousseau qui constitue à la fois un modèle théorique et une grille des comportements des enseignants. Nous y définissons quelques termes-clefs de la recherche (intégration des connaissances, ingénierie didactique, modèles, modélisation, etc.) pour mieux les appréhender.

Dans le troisième chapitre (Recension des écrits), nous décrivons les paradigmes de recherche actuels sur l'enseignement des IR et précisons les choix que nous avons faits pour construire les séquences qui ont été expérimentées pendant le Séminaire de formation de Conakry. Au nombre des analyses a priori figurent l'éclairage de la notion de modélisation (Chevallard, 1989; René de Cotret, 1990; Laborde, 1994; Pressiat, 1996) et l'examen des positions développées par les programmes officiels et les pratiques suscitées par les auteurs de manuels. C'est à la lumière de cette revue critique des écrits du domaine que nous précisons nos choix didactiques, en les positionnant d'une part, par rapport aux pratiques évoquées et, de l'autre, par rapport aux contraintes institutionnelles.

Dans le quatrième chapitre (Méthodologie), nous présentons les sujets qui ont participé à l'étude et les critères qui ont présidé à leur choix; nous décrivons les différentes phases de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988) en précisant dans chacune d'elles où se situe notre recherche; nous décrivons la formule du dispositif expérimental (séminaire/ingénierie) de Portugais (1995) dont nous nous sommes inspiré. Ceci nous amène à formuler nos hypothèses de travail, à décrire les techniques de collecte des données, à retenir des mesures assurant la validité de cette recherche et le respect des règles d'éthique. Nous traitons, enfin, des codes thématiques et de la façon dont nous analysons les données qui sont recueillies à l'ISSEG et à l'UGANC.

Dans le cinquième chapitre (Séminaire), nous présentons les contenus et les activités du séminaire de formation, ainsi que les choix didactiques qui leur sont relatifs. Le Séminaire de Conakry a pour fonction de mettre les «analyses préalables», c'est-à-dire les savoirs mathématiques et didactiques à la disposition des futurs enseignants. Nous y réduisons au minimum la part de l'implicite pour les séminaristes, ce qui justifie les longs développements et les précisions à propos de nos choix. L'analyse des activités que les formés ont eux-mêmes conçues, conduites dans les classes de 9^{e} ou 10^{e} année, qu'ils ont analysées et validées, fait l'objet du sixième chapitre (Analyse des résultats globaux), analyse qui situe la place centrale des activités de modélisation et le rôle primordial que joue l'intégration des connaissances. Le chapitre 6 présente aussi les difficultés rencontrées dans la réalisation de ces activités.

Dans le chapitre 7 (Étude des cas), nous illustrons le fonctionnement du formé au sein du dispositif de formation au moyen de deux études de cas: un cas qui représente une adaptation assez remarquable au dispositif de formation et un autre cas qui donne une idée des difficultés que peut rencontrer un futur enseignant placé dans ce dispositif. Cette analyse diachronique des cas nous permet de mieux saisir la richesse et la complexité des données recueillies, de mieux percevoir les adaptations intervenues d'une séquence à l'autre et, en quelque sorte, de voir le formé au travail et en réflexion dans le cadre du dispositif. Enfin, dans le dernier chapitre (Interprétation et conclusion), nous résumons la recherche ainsi que les principaux résultats; nous dégageons les implications au plan didactique, précisons les limites de la méthodologie et du modèle théorique utilisé pour l'analyse des données recueillies; nous esquissons quelques perspectives de recherche et faisons quelques remarques finales.

Le lecteur a le loisir de lire cet ouvrage de différentes manières. Ainsi, le lecteur pressé de s'enquérir de la «substantifique moelle» de cette thèse lira, en priorité, les chapitres de la problématique et du cadre théorique, suivis du Séminaire; il consultera les chapitres des études de cas et de la conclusion. De même, le lecteur qui est plus intéressé par le fonctionnement de l'ingénierie de formation (et qui est désireux d'en constater tous les détails) que par les résultats globaux de la recherche peut lire le chapitre 7 avant le chapitre 6. Les chapitres 6 et 7 sont complémentaires, l'un rassemblant les résultats globaux de la recherche, l'autre une illustration pleine et sensible du parcours du futur enseignant au sein du dispositif de formation.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

PROBLÉMATIQUE

Nous nous proposons de traiter des identités remarquables (IR) pour aborder le problème du sens dans la formation didactique des futurs enseignants. La question du sens nous semble pertinente et sensible dans cette formation, parce qu'il y a un lien essentiel entre le sens de l'entreprise d'enseignement et le sens conféré au contenu enseigné, et parce que «les activités de formation doivent être construites pour que le formé découvre les faits didactiques de son propre mouvement de manière à redonner à ces connaissances un bien-fondé et un sens» (Portugais, 1995, p. 11). Poser la question du sens dans l'enseignement des IR, c'est amorcer une problématique qui confronte les points de vue sur la formation et sur le rôle de l'enseignant, sur les contenus mathématiques et didactiques à enseigner, sur les méthodes d'enseignement des IR.

1. Des identités remarquables (IR)

En Guinée, les élèves du secondaire rencontrent deux notions importantes qu'ils doivent savoir bien distinguer l'une de l'autre: l'équation et l'identité. Si toutes les deux sont des égalités, celle qui exprime l'équation n'est satisfaite que pour certaines valeurs de l'inconnue (parfois même, elle n'est satisfaite pour aucune d'elles) alors que l'identité est exprimée par une égalité vérifiée pour toutes les valeurs de l'inconnue. Par exemple, l'égalité $a - a = 0$ est une identité alors que $2a + 1 = 5$ est une équation qui n'est satisfaite que pour la valeur $a = 2$ de l'inconnue. L'écriture $(a + b)^2$, (respectivement $(a - b)^2$), est utilisée pour résoudre des problèmes du «carré de la somme» (respectivement «carré de la différence) dans lesquels on cherche le produit de deux binômes identiques. L'écriture $(a + b)(a - b)$ est, elle, utilisée pour résoudre des problèmes de type «produit de la somme de deux nombres par leur différence».

Ces premières significations, essentiellement algébriques, vont devoir être étendues et, par là, plus nuancées: on peut, en effet, concevoir ces produits en termes d'étendue, d'aire de surface. Elles constituent donc en même temps le terreau sur lequel d'autres significations (numériques et géométriques) devront être élaborées. Nous pensons qu'il vaut mieux doter les élèves de connaissances utilisables dans des contextes très divers plutôt que de leur enseigner des solutions toutes prêtes pour quelques «problèmes types». Des exemples d'usage des IR peuvent aider à réhabiliter les contenus de connaissance (i.e., règles de calculs rapides) trop souvent minimisés par l'approche formelle. Nous pouvons, par exemple, calculer mentalement en utilisant les facteurs d'une différence de carrés: $53 \times 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$. De même, en utilisant la factorisation dans l'IR $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, nous pouvons montrer que $45^2 - 44^2 = 89$; $78^2 - 77^2 = 115$; nous pouvons généraliser ce résultat pour tout nombre naturel, en écrivant l'égalité $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$. En outre, en remarquant que les carrés des nombres se terminant par 5 ont des caractéristiques particulières: ($15^2 \rightarrow 1 \times 2 = 2 \rightarrow 15^2 = 225$), ($35^2 \rightarrow 3 \times 4 = 12 \rightarrow 35^2 = 1225$), nous pouvons nous servir de l'IR $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour montrer que le carré de tout nombre entier terminé par 5 se termine par 25 et indiquer ainsi un procédé très pratique du calcul du carré d'un nombre entier terminé par 5. L'avantage de tels exemples est d'amener les élèves à prendre conscience de l'utilité opératoire des IR, de leur pertinence dans certaines situations de calcul numérique ou de résolution de problèmes, notamment des problèmes de partage ou de partition d'aires de surfaces en géométrie.

1.1 Champ conceptuel des IR

Les IR sont le produit de l'interconnexion de deux grands champs conceptuels: les structures additives et les structures multiplicatives, «champs conceptuels qui sont évidemment en relation avec d'autres champs conceptuels comme la mesure, la géométrie, etc.» (Vergnaud, 1981a). En fait, en Guinée comme dans bon nombre de pays, ces IR sont présentées comme de simples résultats de calculs algébriques, fondés sur les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition, et de la multiplication des nombres réels ainsi que sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction. Ainsi, il n'est pas rare de rencontrer dans les copies de travaux d'élèves les erreurs du type $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$, erreurs résultant du «théorème-en-acte» $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, parce que l'approche algébrique qui a prédominé n'a pas permis d'en expliciter le sens.

1.2 Comprendre le sens des IR

La question du sens et de la signification est une question essentielle dès que l'on veut intégrer, dans l'étude du fonctionnement des activités cognitives fondamentales, le rôle de leur orientation et de leur contrôle conscients par le sujet lui-même. Pour que le futur enseignant soit formé à tenir compte du sens des IR dans son enseignement, il faut que la formation soit rythmée par des situations-problèmes organisées de telle sorte que le sens y apparaisse en tant que nécessité didactique. La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'élaboration et l'appropriation des connaissances sur les IR. Pour l'élève (comme pour le futur enseignant), ce sont les problèmes que les IR permettent de résoudre qui en déterminent le sens. Il convient donc d'organiser le champ des situations qui peuvent être traitées avec les IR. Aussi, considérons-nous les situations suivantes (tableau 1):

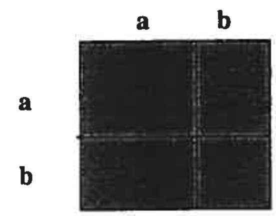
Situation1: Effectue la multiplication selon l'algorithme de la multiplication des binômes.	a + b x a + b
Situation 2: Le propriétaire d'une parcelle carrée de *a* mètres de côté veut bâtir une nouvelle maison. Pour cela, il décide d'agrandir le terrain d'une longueur de *b* mètres sur les côtés nord et est. Quelle est l'aire de son nouveau terrain?	

Tableau 1: Diversité des formes de représentation du même contenu représenté: (a+b)(a+b) ou $(a+b)^2$

Le calcul à effectuer est le même pour chaque situation, mais les aptitudes requises sont différentes. La première situation est un exercice syntaxique qui est relativement simple et clair: le calcul à effectuer est un traitement interne au registre de l'écriture alphanumérique; on y substitue de nouvelles expressions à des expressions données dans le même registre d'écriture. Par contre, la seule lecture de l'énoncé de la situation 2 devrait conduire à penser à la fois à l'expression et à l'objet «carré de la somme de *a* et *b*», ce qui est la condition pour regarder la figure de façon utile. Cela est évident pour un mathématicien, mais pour l'élève qui n'a pas déjà présent à l'esprit l'objet «carré de la somme...», il y a peu de chance de reconnaître sur la figure l'unité figurale qui le représente. Aussi, l'évidence pour le mathématicien, la rapidité d'exécution et le moyen de contrôle que lui permet le traitement figural reposent sur une utilisation du contexte géométrique pour que les variables «a» et «b» trouvent leur signification.

La situation 2 est moins simple; il faut la comprendre et mobiliser le raisonnement. C'est précisément pour la solution des problèmes que la compréhension et la réflexion, complémentaires de la technique opératoire, sont déterminantes. Lorsque la situation 2 est proposée, on constate une certaine modification dans les initiatives et dans les démarches des élèves pour effectuer les traitements mathématiques, pour les contrôler et aussi pour l'intérêt pris à la tâche. La prise de sens par les élèves demande une double compétence: compréhension de la situation proposée et de l'enjeu mathématique pour choisir les stratégies et les outils appropriés. L'élève ne peut engager le travail de lecture, de tri d'informations, de réorganisation des données que s'il est guidé par une idée de stratégie de résolution. Le traitement algébrique ou numérique, à proprement parler, peut être différé (mise en place des opérations, calcul, contrôle des résultats, etc.), mais la mise au point d'une stratégie évolue d'une manière dialectique avec le contrôle du sens. Ainsi, nous fait remarquer Duval (1995, p. 6), «il n'y a pas simplement réussite, mais modification de la qualité des productions. Ce saut qualitatif dans le développement des "compétences" et des "performances" apparaît lié à la coordination des systèmes sémiotiques chez les élèves». Duval (1995, p. 2) définit les représentations sémiotiques comme étant «des productions constituées par l'emploi de signes: énoncé en langue naturelle, formule algébrique, graphe, figure géométrique (...)» qui sont indispensables à des fins de communication et nécessaires au développement de l'activité mathématique elle-même. En s'inspirant du contexte géométrique de la situation 2, on obtient l'expression $(a + b)^2$ dont il est question de développer dans la situation 1.

De tels constats nous font dire que l'apprentissage des IR tient à ce que les activités cognitives (conceptualisation, raisonnement, résolution de problèmes, compréhension) y requièrent l'utilisation de systèmes d'expression et de représentation autres que le langage naturel ou symbolique. Il est important de recourir à la variété des systèmes d'écriture pour les nombres, aux tuiles qui ne sont pas des figures géométriques, mais qui constituent un modèle d'une partie de l'écriture algébrique. Les tuiles peuvent servir à exprimer visuellement la relation entre les aires (en jeu dans la situation 2) et l'évocation des monômes dont la somme égale $(a + b)^2$. En tant que signes de structure dyadique, les tuiles n'ont pas de signification intrinsèque; «elles sont constituées par une référence instituée» (Duval, 1995, p. 63). Cette utilisation de plusieurs systèmes sémiotiques de représentation et d'expression est essentielle à la construction du sens et de la compréhension des IR. D'autre part, du point de vue mathématique et didactique, le calcul sur les IR est strictement dépendant du système de représentation ou d'écriture que l'on adopte. Ainsi, ce ne sont pas les mêmes traitements qui permettent d'effectuer $(a + b)^3$ selon qu'on adopte une écriture algébrique ou un développement géométrique. Aussi, l'analyse des difficultés des élèves avec le traitement algébrique des IR nous conduit-t-elle à envisager une variété de représentations sémiotiques posssibles.

Introduite depuis la classe de 9^e^ année, l'étude des IR se résume par les trois relations fondamentales $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Ces égalités sont satisfaites pour toutes valeurs attribuées aux lettres a et b. Elles sont introduites par la seule voie algébrique, avec toutes les difficultés que les élèves éprouvent à les comprendre et à les utiliser. C'est plus tard (en 11^e^ et 12^e^ années) que sont introduites d'autres IR telles que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ et $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. À ces niveaux, on parle plutôt du théorème du binôme qu'on trouve très intéressant et fort important en algèbre. Le théorème du binôme - on ne parle plus d'IR- étudie la structure et le développement de $(a + b)^n$. On peut faire découvrir cette structure à l'élève, en lui demandant de développer les binômes suivants: $(a + b)^4$, $(a + b)^5$, etc. On peut, par exemple, lui demander d'utiliser les résultats pour écrire directement le développement de $(a + b)^6$. Dans certains cas, l'élève peut avoir à se renseigner au sujet du triangle de Pascal pour noter les rapports entre sa structure d'une part, et le théorème du binôme, de l'autre. C'est pour ces considérations d'ordre curriculaire que nous nous limitons aux trois premières IR qui sont introduites dès la 9e année.

2. Constats à l'origine de cette recherche

Cette recherche a pour origine un certain nombre de constats. Le premier constat est que l'enseignement du calcul algébrique pour lui-même, sous forme de règles formelles, a longtemps eu et occupe encore une place importante dans les nouveaux programmes guinéens de mathématiques. Ces programmes, tout en réduisant leur composante géométrique à la portion congrue, étalent sur tout le cycle secondaire l'usage des lettres et des symboles en les rattachant aux calculs numériques et à la résolution des équations. L'absence apparente des actes de sens dans l'enseignement traditionnel traduit ainsi une incompréhension de la construction de certains savoirs mathématiques tels que les IR. Aussi, comme le rappelle Brousseau, «ces règles formelles sont considérées dans la communauté des mathématiciens, et dans la communauté en général, comme une suite de règles d'écriture qu'il faut mémoriser sans plus». D'ailleurs, en expliquant ces règles, le «prof» glisse banalement dans ses envolées oratoires qu'en réalité «c'est facile»! Les élèves grincent, bien sûr, des dents en silence, car ils ne peuvent que vivre cela comme un déni de leur peine, de leur «misère» à comprendre. Ils aimeraient qu'on reconnaisse et qu'on dise au «prof» à quel point ils «galèrent».

Le second constat a trait à l'enseignement de l'algèbre et de la géométrie qui accorde une grande place à la démonstration formelle. Comme le remarque Audibert (1994, p. 9), «la forme scolaire donnée à la démonstration a estompé la richesse et la variété des processus intellectuels qui doivent accompagner l'enseignement de la géométrie. Ces processus se reconnaissent à travers les mots clefs suivants: symbolisme, formalisme (...), raisonnement, propriétés, démonstrations, images mentales, concepts». La pratique de ces processus est indispensable aux sciences et aux techniques; la géométrie en est une bonne initiation. Mais, lors de la réforme des mathématiques modernes, il y a bien eu un effet de dépossession, qui explique peut-être une fuite en avant dans le formalisme. Ceci est la manifestation d'un effet de perte de sens. Le «prof» donne des réponses «correctes» et cela rassure les élèves. Nous pouvons ici citer cet extrait de *La formation de l'esprit scientifique* de Bachelard (1938) lorsqu'il écrivait: «Les professeurs de [mathématiques], plus encore que les autres..., ne comprennent pas que les élèves ne comprennent pas. Ils s'imaginent qu'on peut faire comprendre une démonstration en la répétant point par point». Ceci est, bien sûr, illusoire et, 65 ans après, ces propos de Bachelard n'ont pas pris une ride.

Le troisième constat est que nous gardons nous-mêmes encore quelques souvenirs vivaces des interminables colonnes de calcul subies dans notre scolarité; sans doute, sans trop savoir pourquoi. Les IR n'avaient que peu de sens pour nous. Et pourtant nous les traitions comme bon nombre d'élèves, sans trop y comprendre. L'algorithme était toutefois décontextualisé et imposé, et même si nous parvenions à utiliser ces IR dans le seul contexte algébrique qui nous était proposé, elles étaient dépourvues de tout sens pour nous. Tout se passait comme si nous devrions nous livrer à ce que nous appelons «gymnastique intellectuelle». Aujourd'hui, nous pouvons encore fort malheureusement constater qu'à l'issue du collège, la manipulation des IR n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences.

Ce sont ces constats qui nous amènent à réfléchir aux conditions de l'enseignement des IR. Bien sûr, nous ne pouvons négliger l'approche algébrique et son aspect calculatoire; mais, pour nous, il y a plus fondamental: les IR sont porteuses de sens très larges. Nous prenons ces constats et cette prise de conscience comme la manifestation d'un changement d'attitude vis-à-vis des questions didactiques en formation de futurs enseignants. À un moment donné, nous ne pouvons plus nous accommoder des effets de la «coutume didactique»[2] tels que l'âge du capitaine, car il s'agissait là d'une rupture massive de contrat didactique puisqu'on avait soumis les élèves à une question stupide. D'ailleurs, nombreux sont encore les cas, plus fins, où les élèves hésitent entre répondre à la question posée ou répondre à l'enseignant qui la pose. Et l'apparition du «métier d'élève» coïncidait à ce moment où les enseignants étaient comme dépossédés du contrôle du sens de ce qu'ils enseignaient, mais aussi à ce moment où on cherchait à exploiter les mécanismes naturels du développement cognitif des élèves, en construisant des situations didactiques - ce que Brousseau évoque en parlant de la conception moderne de l'enseignement. Ceci n'est sans doute pas un hasard.

C'est peut-être là ce que Brousseau a voulu exprimer avec le «paradoxe du comédien»: l'enseignant est un acteur qui connaît d'avance son rôle, tandis que l'élève, lui, est convié à une

---

[2] Ce que Balacheff (1988) appelle la «coutume didactique» peut être considéré comme une singulière alchimie pour décrire le fonctionnement de la classe comme une société coutumière, c'est-à-dire une société disposant de ses propres règles, mais sans que celles-ci soient édictées, encore moins formalisées. N'empêche qu'il faut les respecter car leur transgression est sanctionnée!

représentation (théâtrale) du savoir, si bien que leur relation est analogue à celle qui lie le comédien et le spectateur.

3.Cadre algébrique, cadre d'enseignement privilégié

La compréhension conceptuelle, la différenciation et la maîtrise des différentes formes de raisonnement, les interprétations des énoncés sont intimement liées à la mobilisation et à l'articulation de plusieurs registres de représentation sémiotique: figures, schémas, graphiques, expressions symboliques, expressions linguistiques, etc. Malheureusement, de façon générale, les IR sont présentées aux élèves dans le seul registre des graphies algébriques comme un système de cas «spéciaux» de produits de binômes. Prenons l'exemple suivant du «carré d'un binôme» dans lequel on procède comme suit:

Disposition horizontale

$$
\begin{aligned}
&(2x + 5)(2x + 5)\\
&= (2x + 5)(2x) + (2x + 5)(5)\\
&= 4x^2 + 10x + 10x + 25\\
&= 4x^2 + 20x + 25
\end{aligned}
$$

Disposition verticale

$$
\begin{array}{r}
2x + 5\\
2x + 5\\
\hline
4x^2 + 10x \\
10x + 25\\
\hline
4x^2 + 20x + 25
\end{array}
$$

Ainsi, pour bon nombre d'élèves, comme pour la plupart des enseignants, ce sont les symboles et les opérations sur ces symboles qui constituent l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématique, alors que cette connaissance et cette activité se situent principalement au double plan conceptuel et pratique (Vergnaud, 1981b). Toute notre expérience personnelle s'inscrit en faux contre l'idée que nous devons appliquer mécaniquement des règles ou que tout soit affaire de calcul. En entraînant les élèves vers le seul calcul algébrique, on les détourne de l'essentiel: bien comprendre le sens des symboles et rendre significatif l'apprentissage des concepts constitutifs des IR et des procédures algébriques. La présente étude examine comment faire avec l'intégration des connaissances pour que le rapport des élèves à l'égard du calcul algébrique sur les IR soit plus idoine.

3.1 Identités, objet de manipulations symboliques institutionnalisées

Telles qu'enseignées en Guinée, les IR nous semblent comme institutionnalisées par les enseignants en de simples manipulations de symboles, tout comme le langage pseudo-naturel qui s'y rattache. Et, faute de faire suffisamment d'une part, la distinction entre ces représentations symboliques et leurs contenus mathématiques, et d'autre part, les connexions entre les cadres algébrique et géométrique de leur traitement, de leur interprétation et de leur utilisation, il arrive que les élèves mémorisent ces IR et les appliquent syntaxiquement. C'est avec beaucoup de difficultés que les élèves parviennent, en général, à considérer l'écriture $(x + 5)^2 = 10x + (25 + x^2)$, pour montrer que $(x + 5)^2 > 10x$. Cet exemple est tiré d'un article de Michel Julien (1989-90) qui relate un phénomène apparu en France à la suite d'une épreuve de brevet où l'on posait aux candidats les deux questions suivantes: «x désignant un réel quelconque: a) développer $(x + 5)^2$ et b) expliquer pourquoi $(x + 5)^2$ est toujours strictement supérieur à 10x». La première question a été généralement réussie, parce qu'elle en appelle à l'application de la règle d'«*élevation d'un binôme au carré*», tandis que la seconde, qui nécessite l'emploi des sens algébrique et/ou géométrique de l'IR, a provoqué un échec massif. Aucun de ces élèves n'a jugé opportun de donner un sens géométrique aux graphies algébriques (basées implicitement sur les longueurs et les aires) comme ci-dessous (figure 1):

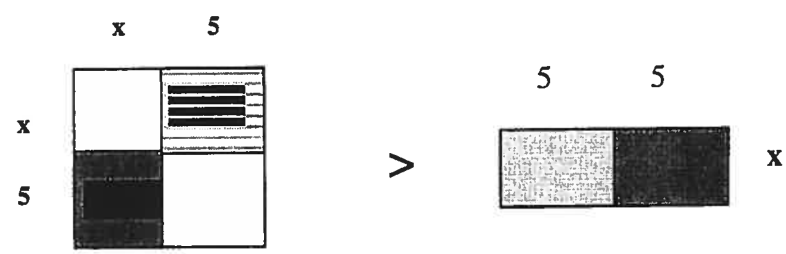


Figure 1: Illustration de l'inégalité $(x + 5)^2 > 10x$.

Le tracé de x représente une longueur quelconque, alors que le tracé de 5 représente une longueur de 5 unités (sous-entendues). Le même signe est utilisé, mais dans le premier cas, la référence doit s'instituer, alors que dans le second cas, elle dépend de la propriété spatiale du tracé (dans ce qu'on voit). Privés de ces sens, les élèves n'ont pas pensé que le résultat de leurs opérations pouvait être illustré en unités d'aire. L'illustration est la mise en correspondance d'un énoncé avec une figure; le passage inverse, de l'image au texte, peut être une description ou une interprétation. La figure 1 ainsi construite est une illustration à fort pouvoir figuratif qui exprime les relations entre les aires de surface, l'exactitude des mesures n'étant pas un critère pertinent pour décrire ces relations. D'ailleurs, plusieurs schémas différents peuvent être présentés pour un même énoncé. Chacun des schémas réalisés apparaît alors comme une instanciation de l'énoncé. L'arbitraire dans l'ordre des dimensions de la figure 1 signifie simplement que l'ordre y apparaissant réfère à autre chose que l'ordre logique qui, vraisemblablement, est suffisamment disponible pour ne pas nécessiter en lui-même une traduction graphique. Ces considérations ne signifient nullement que la figure 1 présente une «supériorité» quelconque sur le développement algébrique. Elles soulignent l'importance de présenter des situations didactiques qui nous permettent d'avoir une variété de représentations pour un même objet, cette variété pouvant se révéler décisive à la fois du point de vue de la fonction de traitement et du point de vue de la conceptualisation.

3.2 Absence de modèles géométriques

Très peu d'élèves ont eu l'occasion de rencontrer des situations-problèmes où ils sont amenés à interpréter, par exemple, le produit 34 x 25 en termes d'aire de surface (figure 2).

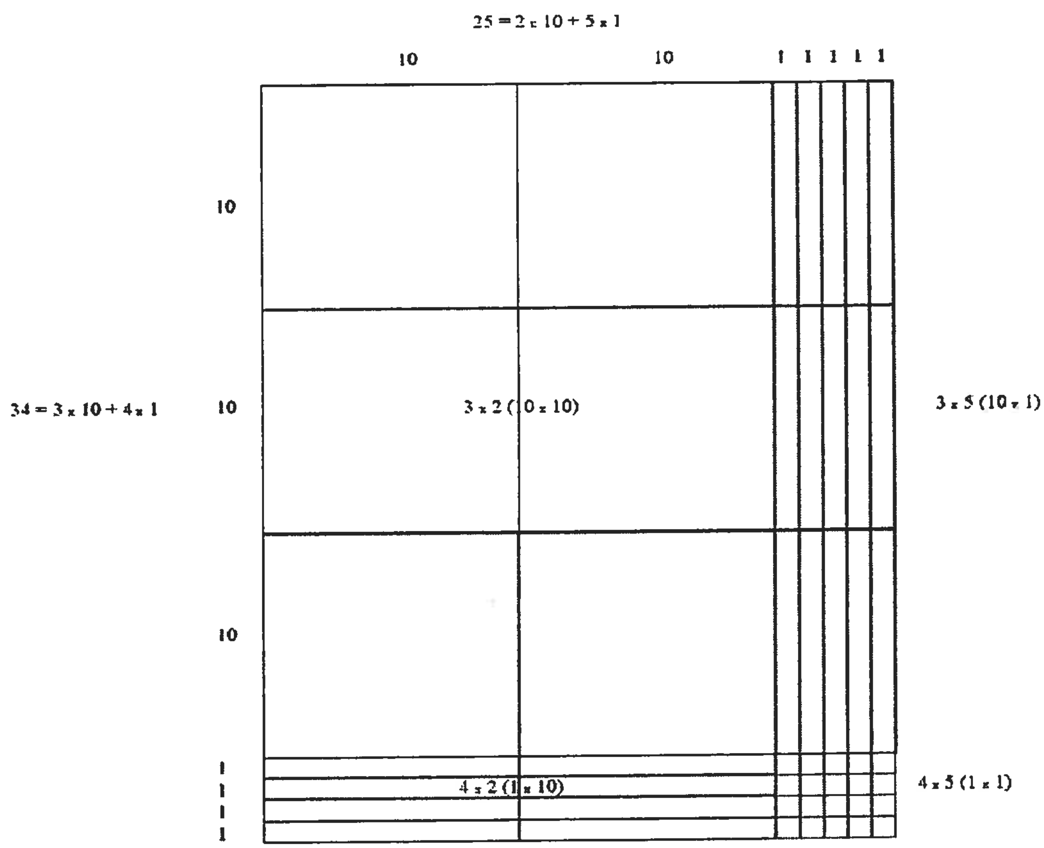
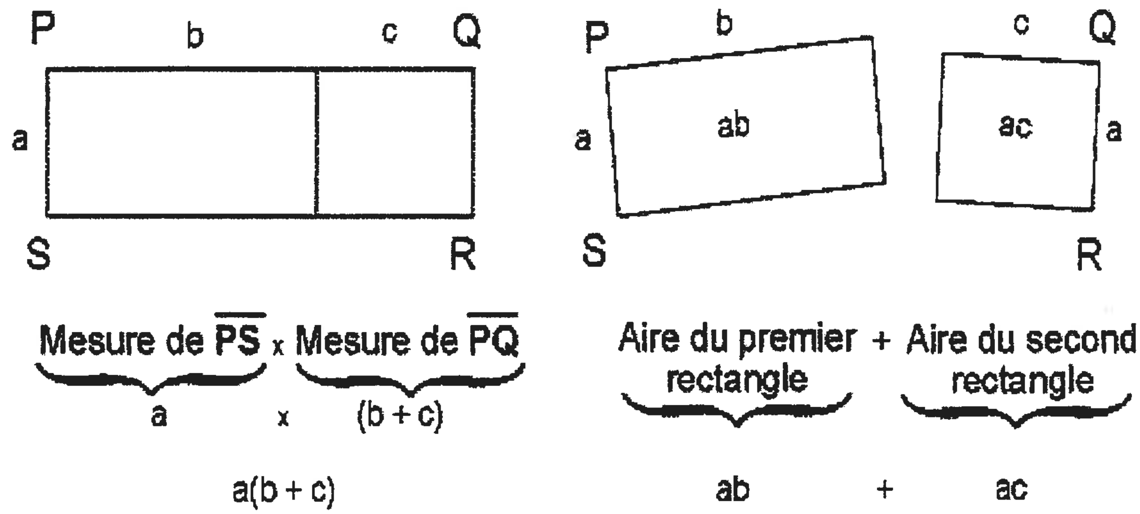


Figure 2: Modèle géométrique du produit 34 x 25 en produit d'unités de 10 et de 1.

Très peu de nos élèves ont eu l'occasion de reconnaître la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le contexte géométrique, comme c'est le cas dans la figure ci-dessous (figure 3):



a(b + c) = ab + ac

Figure 3: Modèle géométrique de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Nos élèves ont eu très peu d'occasions de reconnaître les IR dans le contexte géométrique, comme dans les figures ci-dessous (figures 4 a, b et c). Évidemment, comme il n'y a pas de dessin sans légende, il faut donner une indication verbale pour ancrer les figures 4 comme représentation de telle ou telle IR et expliquer les identités en question.

$\mathbf{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$ **(1)** $\mathbf{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$ **(2)** $\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$ (3)

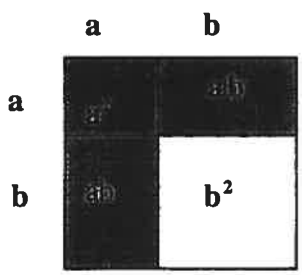


Figure 4a

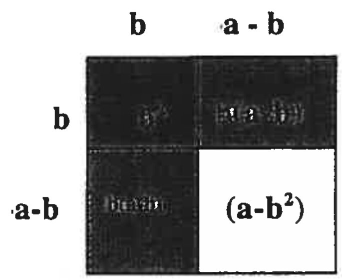


Figure 4b

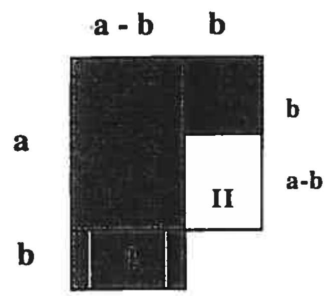


Figure 4c

Figures 4: Contexte géométrique des IR

En constatant que deux carrés de côtés a et b ont respectivement pour aire a^2 et b^2 et que le rectangle de côtés a et b a pour aire ab, nous pouvons donner l'interprétation géométrique suivante de ces IR. Supposons que a et b sont des nombres réels positifs et considérons le grand carré de côté $a + b$ (voir figure 4a). En décomposant ce carré comme indiqué sur la figure 4a, nous voyons que son aire est égale à l'aire du carré de côté a, augmentée de celle du carré de côté *b* et de celles de deux rectangles de côtés *a* et *b*, ce qui signifie que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1). Ensuite, si *a* et *b* sont des réels positifs tels que $b < a$, on peut écrire $a = b + (a - b)$ et $(a - b) > 0$. Ainsi, le carré de côté *a* peut être décomposé en deux carrés de côté *b* et *a-b* (voir 4b). D'après ce qui précède, nous avons: $a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b)$ ou encore $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2). Enfin, étant donné deux réels positifs *a* et *b* tels que $a > b$, construisons le rectangle de côtés *a+b* et *a-b*. En prolongeant la largeur *a-b* de *b* unités nous obtenons le carré de côté *a* (voir figure 4c). Les rectangles I et II étant égaux, par construction, et le carré hachuré ayant pour aire b^2, on a que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (3).

Bien qu'elles ne soient pas un modèle, les tuiles sont un appui pour établir ces IR. Pour que les tuiles soient un modèle des graphies algébriques, il faut que toutes les propriétés qui sont vraies avec ces graphies demeurent avec les tuiles. Selon Laborde (1994, p. 49), «une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble (...) de relations qui sont représentées dans le modèle». Dans la figure ci-dessous (figure 5), les tuiles ne rendent compte que d'une partie du domaine de réalité, celui des graphies algébriques.

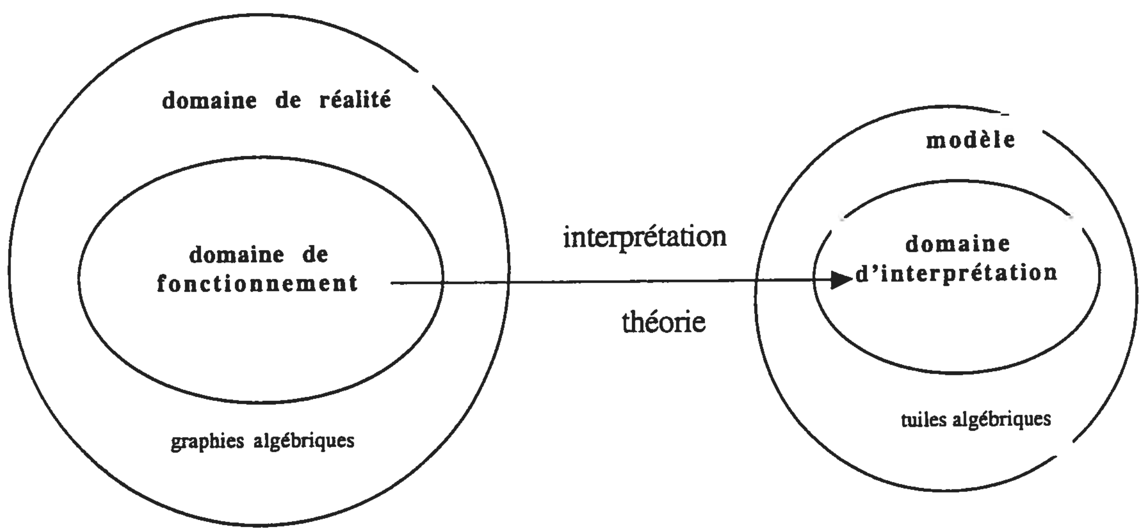


Figure 5: Domaine de fonctionnement et domaine d'interprétation

Comme ce ne sont pas toutes les propriétés des graphies algébriques qui sont vérifiées par les tuiles, on attacherait au modèle un domaine de fonctionnement dans le domaine des graphies algébriques dépendant des propriétés et des relations retenues pour la modélisation. Ainsi, 1°) de l'IR exprimée par la graphie algébrique, on peut procéder au développement et à la factorisation; 2°) de l'IR exprimée avec la figure géométrique, on peut faire la somme des parties pour former le tout (le grand carré de côté $a + b$) – il s'agit d'une factorisation – ou bien décomposer le tout (le grand carré) en parties (petits carrés, bandes rectangulaires) – il s'agit d'un développement; 3°) une troisième caractéristique retenue est la *généralité implicite* du procédé de manipulation des tuiles qui se fait sans recours à une mesure et qui est indépendante de la taille des segments (Laborde, 1994, p. 56).

La connaissance des objets mathématiques tels que les IR est effectivement liée à la construction de leurs sens, ainsi que l'atteste Thom (1974) lorsqu'il affirme que le défi de tout enseignement des mathématiques est bien celui de «la construction du sens et de la justification ontologique des objets mathématiques», et non pas une stricte question de rigueur calculatoire ou de «gymnastique intellectuelle». En effet, si les manipulations algorithmiques purement formelles devaient être la finalité de l'enseignement des IR, on assisterait à un phénomène décrit par Skemp (1976) comme étant un enseignement de «règles sans raisons». Aussi, engageons-nous le futur enseignant dans un projet d'ingénierie didactique qui lui permet d'envisager plusieurs éclairages de la même notion d'IR.

4. De l'ingénierie didactique

Pour comprendre l'importance des situations d'apprentissage des IR, nous devons préciser le rôle de l'enseignant et celui de l'élève vis-à-vis du savoir relatif à ces IR. L'enseignant ne peut se contenter d'enseigner le programme de mathématiques tel qu'il le reçoit du Ministère de l'Éducation, car ce programme est un ensemble de savoirs décontextualisés et dépersonnalisés. Pour rendre ces savoirs accessibles aux élèves, l'enseignant doit, avec les moyens dont il dispose, les apprêter, les présenter dans un contexte significatif et acceptable. Il doit repersonnaliser ce savoir décontextualisé en proposant des situations qui permettent de rejoindre les connaissances des élèves sur les IR et qui confèrent un sens à ces IR. L'élève, à son tour, doit traiter ces situations et aboutir à une recontextualisation et une repersonnalisation du savoir investi dans ces situations. Ceci est une condition nécessaire de transposition didactique pour traiter de nouvelles situations.

Pour le didacticien, les caractéristiques des situations sont de première importance pour recontextualiser les savoirs retenus et donner du sens aux actes d'enseignement et aux comportements des élèves face à ces savoirs, ceci pour les prévoir, les orienter ou les reproduire de façon délibérée. En effet, face aux situations de modélisation des IR, les indices que les futurs enseignants retiennent pour les traiter, les décisions qu'ils prennent et, donc, les procédures qu'ils développent, reflètent à la fois: (a) leurs conceptions des IR; (b) leurs pratiques et habitudes de traitement de ces IR; (c) leurs interprétations du contrat didactique. Alors que la psychologie cognitive n'éclaire que le seul point (a), que la transposition didactique ne s'occupe que des points (a) et (b), et que le point (c) et, à un certain degré, le point (b) relèvent du contrat didactique, l'ingénierie didactique englobe, à elle seule, la totalité de ces éléments. En prenant la classe comme objet d'étude, le didacticien cherche à répertorier les phénomènes d'enseignement/apprentissage; il cherche à établir des relations entre ces phénomènes et à les expliquer à travers leur reproduction, par l'analyse des conditions de leur reproductibilité (Artigue, 1984).

De façon complémentaire aux méthodes habituelles (questionnaires, entrevues individuelles, épreuves papier-crayon, observation de groupes), une méthode de recherche propre à la DDM s'est constituée, celle de l'ingénierie didactique. On désigne ainsi la réalisation en classe d'une ou de plusieurs séquences d'enseignement successives. Outre la réalisation en classe, cette méthodologie demande la conception de séquences en fonction de questions précises de recherche, puis l'observation et l'analyse. C'est dans cette démarche dynamique et en suivant les pas de Portugais (1995) que nous engageons le formé dans les analyses préalables, l'analyse a priori, la réalisation didactique proprement dite; et l'analyse a posteriori. C'est dans cette perspective d'ingénierie didactique que nous analysons les relations entre les difficultés cognitives et didactiques rencontrées dans le processus enseignement/apprentissage des IR ainsi que les structures additives et multiplicatives qui les sous-tendent. Aussi, nous intéressons-nous à la manière dont l'intégration des connaissances s'opère dans la formation des futurs enseignants.

5. Intégration de connaissances dans la formation didactique de futurs enseignants

La question de l'intégration des connaissances dans la formation didactique des futurs enseignants constitue l'un des arguments majeurs de notre choix. En effet, comme le souligne le Conseil Supérieur de l'Éducation du Québec (1991, p. 5), «cette question constitue un enjeu éducatif fondamental parce que, d'abord et avant tout, elle se passe dans la tête et le cœur de chaque élève». De son côté, Jacobs (1991), soutient que «les éducateurs ne se questionnent plus sur la pertinence d'établir des liens entre les disciplines, mais plutôt sur quand, jusqu'où et comment couvrir le curriculum pour le mieux». Selon Ansart (1990), «dans les divers systèmes de formation vers la professionnalisation, tant en Europe francophone qu'en Amérique du Nord, les formatrices et formateurs sont confrontés à la nécessaire intégration de nombreux savoirs d'origines diverses». Le futur enseignant doit être capable de transférer des connaissances d'une discipline mathématique à l'autre, ce qu'on a renommé depuis la question des «compétences transversales». Au lieu de compartimenter l'enseignement en matières cloisonnées, il doit encourager des investissements de connaissances, par exemple, de géométrie en algèbre et vice versa.

5.1 Nécessité d'une formation à l'intégration des connaissances

Comment favoriser l'engagement du formateur en matière d'intégration des connaissances, alors que sa propre formation a été fractionnée? Ceci n'est pas chose facile, car comme le dit Beane (1993, p. 197), «l'intégration ... est quelque chose que nous faisons nous-mêmes; elle n'est pas réalisée pour nous par d'autres». Or, remarque Klein (1998, p. 65), «malgré leur désir à s'y engager, les enseignants sont souvent handicapés par leur peu de formation». Pour bon nombre d'enseignants, ce genre d'exercice relève plutôt d'une prise de risque, faute de connaître avec précision les limites de validité des règles, de savoir discriminer les cas particuliers ou les exceptions. C'est le propre de toute activité de transfert. Or, le transfert ne concerne pas le terme de l'apprentissage, postérieur au travail didactique, mais il doit être pensé tout au long de celui-ci.

En Guinée, les rares enseignants qui s'y sont engagés ont appris sur le tas, une fois les pieds en classe. Cette tendance montre bien l'importance de la formation didactique des futurs enseignants dans le cadre d'une intégration des savoirs disciplinaires et didactiques. La formation à cette intégration peut donner la capacité aux futurs enseignants de rapprocher différents contextes et la possibilité de progresser parce qu'ils seront en mesure de pratiquer un travail de changement de cadre, d'expérimenter de manière personnelle divers outils qu'ils peuvent maîtriser et adapter aux différentes situations qu'ils rencontrent. La prise en compte des savoirs d'expérience des enseignants et de nouvelles conceptions du rapport au savoir mathématique, soutenues en partie par l'hypothèse constructiviste, renforcent cette exigence d'intégration et son corollaire, la mise en œuvre des processus d'apprentissage intégrateurs et l'acquisition de savoirs intégrés, transférables et actualisables dans l'action.

5.2 Du cadre algébrique au cadre géométrique, et vice versa

Notre étude cherche à établir en quoi et jusqu'où le passage du cadre algébrique au cadre géométrique et le passage inverse sont féconds. Elle explore comment les futurs enseignants apprennent à raisonner et résoudre des problèmes dans les deux cadres, et quelles sont leurs difficultés. Le passage d'un cadre à l'autre n'est pas sans difficulté pour eux-mêmes et cette connexion doit être envisagée progressivement pour les élèves, tout au long de la scolarité. Indiquons un exemple de problème géométrique dont la résolution fait intervenir l'algèbre. Considérons le problème suivant:

> Aïcha possède un terrain rectangulaire (ABCD) de 1 728 m^2. Elle cède à Jeanne, sa voisine, une bande (EBCF) de 4 mètres de largeur en échange d'une bande (DFGH) de 6 mètres de largeur (voir figure 6), et ceci de façon à conserver la même aire de surface. Combien mesurait la largeur (AB) du terrain?

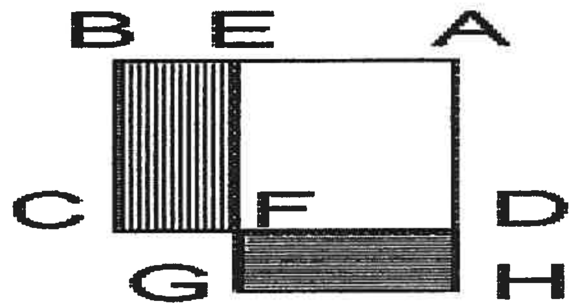


Figure 6: Passage du géométrique à l'algébrique

L'habillage de l'énoncé de ce problème en texte narratif est justifié par la volonté de rendre «concrètes» les notions mathématiques en jeu (aire de surface, début du développement d'un carré, complétion du carré) pour qu'elles gardent du sens en tant qu'outils. Ceci est d'autant plus important que l'énoncé de problème et l'écrit mathématique sont, en général, réduits à une forme simplifiée de texte visant l'automatisation de techniques ou de règles en contexte et faisant fi de la nécessaire appropriation du sens de l'activité à réaliser par l'élève. La conceptualisation, le raisonnement, l'appréhension des figures, la résolution de problèmes et la compréhension des textes, sont des activités cognitives fondamentales dont l'étude relève de champs aussi différents que ceux de la psychologie, des sciences de l'éducation, de la didactique. Les questions relatives à leur développement, à leur apprentissage, ou à leur modélisation sont des questions essentielles.

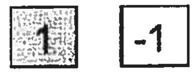
6.Des formes géométriques et des tuiles algébriques

Étant donné l'ampleur de la question du sens en formation des enseignants, nous partons d'un schéma qui est celui de l'intégration de connaissances et nous encourageons les futurs enseignants à mettre en œuvre un système de représentation des IR avec les formes géométriques et les tuiles qui sont, par définition, des représentations sémiotiques.

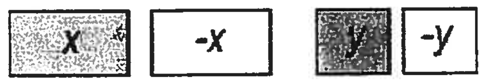
6.1 Formes géométriques

Nous proposons un ensemble de praxèmes (Chevallard) dont certains éléments sont déterminés par la combinaison de différentes formes géométriques: leur forme géométrique simple (carrés unitaires représentant les termes constants; bandes rectangulaires pour les variables du premier degré; rectangles pour les variables de second degré; etc.), leur couleur (gris ou hachuré; non coloré ou non hachuré, selon le signe), leur taille et leur épaisseur (figures 7).

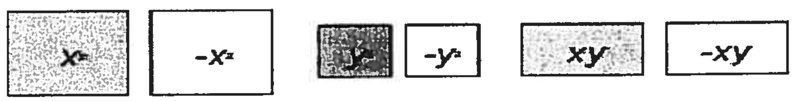
- Les **carrés unitaires** (mesurant une unité de côté) représentent les termes constants:



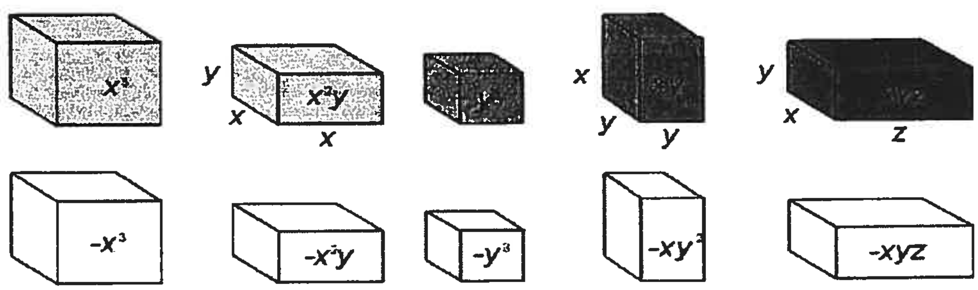
- Les **bandes rectangulaires** (ayant une longueur de x unités et une largeur de 1 unité) représentent les termes du premier degré à une variable:



- Les **grands carrés** (ayant x ou y unités de côté) et les **grands rectangles** (de dimensions x et y unités) représentent les termes du deuxième degré, à une ou deux variables:



- Les **prismes** représentent les termes du troisième degré à une, deux ou trois variables:



Figures 7: Formes géométriques des monômes

Ces différentes formes sont des unités élémentaires du registre des figures géométriques. Ces représentations sont accessibles à tous les sujets qui ont appris le système de représentation géométrique. Elles remplissent donc une fonction de communication, mais, elles remplissent aussi deux autres fonctions cognitives: la fonction d'objectivation (qui correspond à la découverte par le sujet lui-même de ce que jusqu'avant le Séminaire de formation il ne soupçonnait même pas, même si d'autres le lui avaient expliqué) et la fonction de traitement, directement liée à l'utilisation d'un contexte géométrique avec les tuiles pour illustrer les IR. Le caractère intentionnel que présentent ces formes géométriques permet de prendre en compte le rôle fondamental de la signification dans la détermination de ces objets que nous convenons d'utiliser pour représenter respectivement les termes 1, x, y, x^2, xy, x^3, x^2y, y^3, xy^2 et xyz. Nous convenons également d'utiliser les mêmes formes géométriques (en blanc ou non colorées) pour représenter des termes correspondants à coefficient négatif. C'est à travers une signification que se fait l'appréhension perceptuelle ou conceptuelle des monômes concernés. L'appréhension des couleurs ou celle des différentes formes de la figure 7 en sont des exemples typiques.

En regroupant les représentations de plusieurs termes, nous formons la représentation des polynômes. Ainsi, le modèle géométrique ci-dessous (figure 8) correspond au développement de l'IR $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

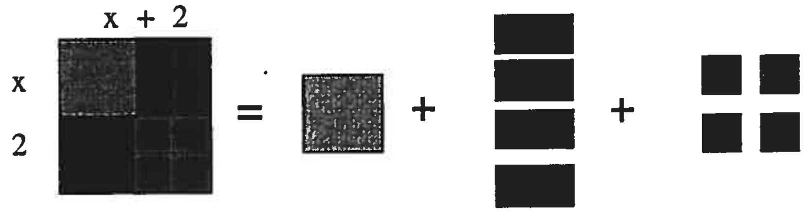


Figure 8: Modèle géométrique de l'identité $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

L'ordre apparaissant graphiquement a une signification précise par rapport à la variable représentée (ici la succession des monômes à prendre en compote les uns après les autres dans le raisonnement), même s'il peut être modifié pour d'autres fins.

6.2 Des tuiles algébriques

Aux formes géométriques s'ajoutent des tuiles algébriques dont l'utilisation permet non seulement de représenter dans le plan cartésien la multiplication et la factorisation des polynômes, mais aussi de confirmer le fait que la différence de deux carrés est factorisable (figure 9):

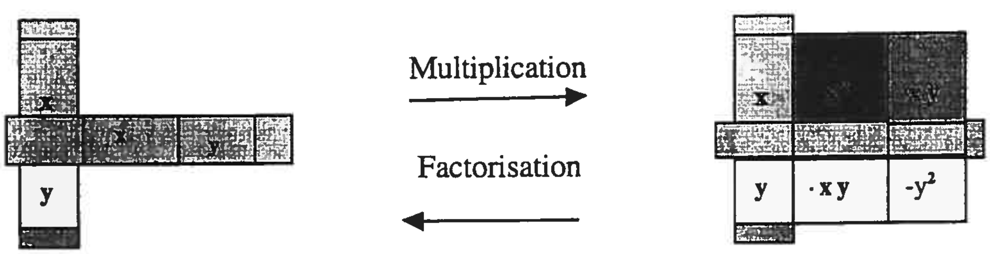


Figure 9: Mise en évidence géométrique des facteurs d'une différence de carrés

Le futur enseignant est conduit à constater et à dire que l'aire du rectangle obtenu correspond à $x^2 - y^2$, étant donné que les deux autres régions sont opposées et correspondent à 0. En effet, dans le sens de la multiplication, il construit le rectangle de dimensions $x + y$ et $x - y$, ce qui lui donne $x^2 + xy - xy - y^2$ ou, après réduction, $x^2 - y^2$. Dans le sens inverse, il s'agit de dégager de la disposition des tuiles les dimensions du rectangle: $x + y$ et $x - y$. On peut donc factoriser tout polynôme identifiable à une différence de carrés selon le modèle suivant: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Mais, à la différence d'autres changements de registre, la conversion de l'énoncé $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ en une figure géométrique n'entraîne pas l'abandon des traitements liés au registre de départ, c'est-à-dire aux traitements discursifs (application de définitions, de théorèmes...). Car il doit y avoir une interaction entre les traitements figuraux qui guident la démarche heuristique et les traitements discursifs qui, par déduction, constituent la démarche portant sur l'IR représentée dans la figure. Duval (1995) remarque que pour celui qui a atteint le stade d'une coordination des registres, c'est l'articulation globale qui constitue l'essentiel de l'activité géométrique: pour lui, l'heuristique et la démonstration ne sont plus alors qu'une seule et même démarche. Mais, il n'en est pas ainsi pour les élèves de 9e année, qui ont besoin d'un double apprentissage préalable: l'un concernant les traitements propres au registre des figures, l'autre relatif à l'organisation déductive du discours, pour que se mette d'abord en place une articulation locale entre figure et raisonnement.

7. Objectifs de modélisation

L'objectif des activités de modélisation n'est pas de se passer du concours de l'algèbre, mais d'investir à la fois dans les connaissances algébriques et géométriques et de montrer leur impact sur la compréhension des IR. Ainsi, dans la figure 8 ci-dessus, les rapports entre les aires sont modélisés par l'IR $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Inversement, la figure 8 peut être regardée comme un modèle géométrique de cette IR. Ce qui rend cette intégration des connaissances si intéressante, ce sont les isomorphismes que nous pouvons établir entre les «géométries» et leurs «algèbres» respectives. Nous sommes habitués à l'isomorphisme entre le plan cartésien et l'algèbre traditionnelle, mais nous y sommes peut-être trop habitués pour être conscients de l'existence de cet isomorphisme, et peu d'enseignants s'en servent en classe. Ce type d'intégration requiert ainsi une utilisation pragmatique des deux champs et, par là, l'augmentation de leur pertinence à travers des activités de modélisation.

7.1 Activités de modélisation

Les activités de modélisation sont de nature à impliquer le futur enseignant dans les manipulations avec les objets concrets (feuille, carton, fil, etc.), les observations et le questionnement, la collecte et l'organisation des données, la description et/ou l'explication des liens entre les modèles algébriques et géométriques, la vérification soit par manipulation, par observation et mesure, ou par simulation avec contrôle de variables, la validation (conclusion) en perspective de généraliser ou de tirer les leçons. L'on oublie presque toujours le caractère hautement construit des modèles et des connaissances intégrées et on en «naturalise» volontiers le fonctionnement. Donnons quelques exemples d'activités de modélisation.

7.1.1 Regroupement des monômes

Cette activité établit la possibilité de représenter géométriquement les polynômes les plus simples à partir d'un regroupement de tuiles. Le formé peut demander de déterminer le polynôme qui est représenté ici (figure 10).

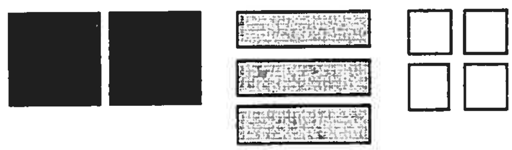


Figure 10: Représentation géométrique du trinôme $2x^2 + 3x - 4$

7.1.2 Arrangement des tuiles algébriques

Cette activité établit la possibilité d'illustrer la multiplication à l'aide des tuiles algébriques. Le formé peut demander aux élèves d'assembler les tuiles (figure 11a).

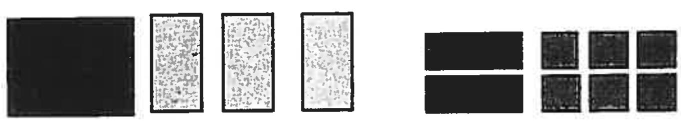


Figure 11a: Représentation d'un polynôme par assemblage de tuiles algébriques

Le formé peut inviter les élèves à déterminer le polynôme qu'on a représenté par assemblage. Il peut aussi leur demander d'utiliser la mise en évidence pour montrer que les facteurs de ce polynôme sont bien ceux qu'on a illustrés par la ci-dessous (figure 11b):

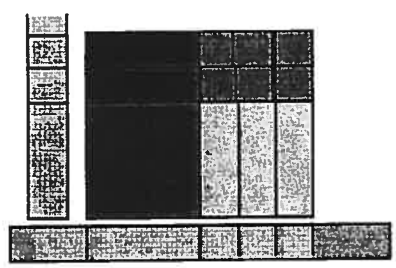


Figure 11b: Mise en évidence des facteurs d'un polynôme par assemblage de tuiles

7.1.3 Construction du «carré parfait»

Avec l'assemblage des tuiles algébriques servant à former des rectangles, cette activité permet de montrer que les carrés parfaits [i.e.; $(a \pm b)^2$] sont des rectangles carrés dont les dimensions sont les facteurs a ± b. Au Séminaire de formation, nous avons invité le futur enseignant à considérer l'assemblage de tuiles algébriques (figure 12a):

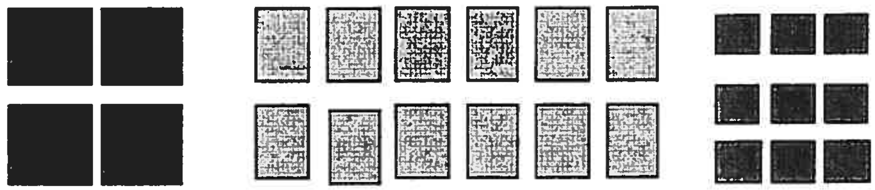


Figure 12a: Assemblage de tuiles algébriques

Le futur enseignant doit déterminer le polynôme qui est associé à cet assemblage. Il doit expliquer comment il peut disposer ces tuiles de manière à construire le grand rectangle ci-dessous (figure 12b).

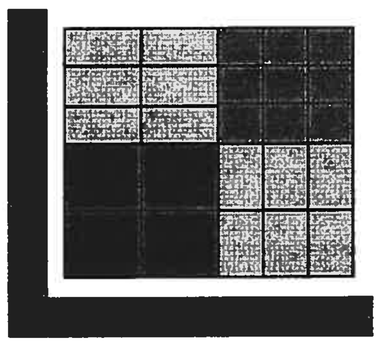


Figure 12b: Construction du carré parfait par assemblage de tuiles algébriques

Le futur enseignant peut déterminer la caractéristique du premier et du dernier terme de ce trinôme; il peut déterminer les dimensions du rectangle obtenu ci-dessus et déduire sa particularité. Il peut déterminer les facteurs de ce trinôme.

7.1.4 Avec les coups de ciseaux

Cette activité permet de montrer que les polynômes qu'on ne peut factoriser par la mise en évidence (simple ou double) peuvent l'être par un autre procédé, en l'occurrence par le découpage. On peut proposer l'activité suivante qui confirme ce fait. Voici une figure dont l'aire correspond à la différence de deux carrés a^2 et b^2 (figure 13):

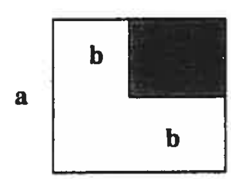


Figure 13: Différence de deux carrés

Au cours du Séminaire, on peut demander au futur enseignant d'expliquer en quoi l'aire de cette figure correspond à une différence de carrés $a^2 - b^2$. On peut lui demander de découper de façon adéquate et de montrer qu'il peut transformer l'aire correspondant à $a^2 - b^2$ en l'aire d'un rectangle de dimensions $(a + b)$ et $(a - b)$. On peut aussi lui demander d'expliquer comment il peut passer d'une figure à l'autre. Ce type d'activité montre la priorité que nous donnons au raisonnement contextualisé et verbalisé. En effet, il s'agit pour nous de faire fonctionner le modèle géométrique comme «outil», et non pas se limiter à l'étudier pour lui-même, et, par conséquent, d'amener le futur enseignant à utiliser des raisonnements qui mettent implicitement en œuvre différents aspects des IR, raisonnements qui gagneront pour cela à être plutôt verbalisés que formalisés. Dans cette perspective, les procédures qui ne correspondent pas à des raisonnements possibles dans le contexte des situations travaillées sont évitées, car elles risquent de conduire les futurs enseignants à des automatismes stériles que nous avons justement dénoncés.

Chaque représentation géométrique produite est un support au raisonnement, mais ne se superpose pas entièrement au raisonnement lui-même, car la nature des enchaînements de propositions qui expliquent les figures 4 (a, b, c) ci-dessus est, au minimum, toujours implicite. Implicites aussi, c'est-à-dire censées être évoquées mentalement et non matériellement, une bonne partie du raisonnement et des données traitées. Si les implicites dans les outils graphiques peuvent être vus négativement, comme des lacunes ou comme des sources d'erreurs éventuelles, il convient de modérer ce jugement et d'en considérer aussi les aspects positifs: nous ne devons pas perdre de vue qu'une sélection des informations est aussi nécessaire. En effet, pour une raison d'efficacité (intérêt épistémologique des graphies algébriques), il est nécessaire que la charge en informations ne soit pas trop grande. Un outil saturé d'informations diverses devient illisible et peut être source d'erreurs aussi bien qu'un outil lacunaire. Il perd sa valeur synoptique et réduit, par là même, une partie importante de son intérêt didactique. La sélection des informations utiles est donc nécessaire dans la construction des modèles.

Les tuiles ne constituent pas en elles-mêmes un modèle, mai simplement un autre mode de représentation des IR sous certaines conditions évoquées plus haut. La maîtrise d'une telle modélisation suppose des compétences complexes: graduation des axes, repérage vertical-horizontal, signification à attribuer aux formes géométriques (de différentes couleurs), à leur disposition dans les différents quadrants. Ces compétences ne sont globalement pas en place avant la fin du collège. Il convient donc de faire un usage modéré et prudent des tuiles. Les élèves peuvent être mis en situation de lire et d'interpréter les modèles géométriques des IR ou des polynômes. Ils peuvent constater le regroupement des tuiles et en déduire les caractéristiques des dimensions des rectangles ou des carrés formés. Mais cet exercice doit être d'usage limité (caractère coûteux en temps), car il est impossible de représenter toutes les IR par les tuiles. Le futur enseignant doit vivre ces types d'activités qui lui permettent de réaliser que la factorisation est pratiquement liée à la capacité de construire un rectangle dont l'aire correspond au polynôme et dont les dimensions correspondent aux facteurs de ce polynôme. Ce choix, nous le croyons pertinent, quand nous considérons, d'une part, les difficultés concernant l'enseignement et l'apprentissage des IR (notamment la difficulté à poser la base d'un carré lorsque celui-ci comporte un coefficient), mais aussi l'importance pour le futur enseignant de développer une représentation claire et fonctionnelle de l'intégration des connaissances en situation réelle, de façon à l'incorporer adéquatement à son propre travail didactique et pédagogique.

7.2 Travail formel du modèle comme économie

La simplicité apparente du modèle graphique n'est qu'un effet réaliste et masque la formalisation sous-jascente. En effet, le modèle n'est pas qu'un modèle par réalisation (c'est-à-dire par simple confection de formes géométriques) mais aussi par formalisation (c'est-à-dire l'usage réglé de registres sémiotiques autour de codes spécifiques - notamment celui de l'algébrique qui fournit un moyen puissant, lié à l'usage des lettres pour désigner différentes aires de surface et à la possibilité de calculer sur les expressions littérales). Nous devons lever là un malentendu qui pèse lourd dans l'analyse didactique des objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège. En effet, comme le souligne Chevallard (1989, p. 52): «Il faut (...) distinguer formalismes et formalisme: si l'on peut désirer combattre le formalisme dans l'enseignement, on ne peut, sans ignorer et l'histoire des mathématiques et le fonctionnement même des mathématiques, minorer la place qui doit être donnée à l'enseignement des formalismes mathématiques». Ainsi, à partir des observations qu'il a faites dans les activités portant sur les arrangements de tuiles (activité 7.1.2), le futur enseignant peut déterminer le produit des monômes et des binômes donnés, par exemple: $-2ab(a + b)$ et $-4x(-2x + 3)$. En lui faisant remarquer que les trinômes $9x^2 + 16x - 4$, $9x^2 + 12x + 4$, $9x^2 + 13x + 4$ et $9x^2 + 20x + 4$ expriment l'aire de certains rectangles, on peut lui demander de déterminer, dans chaque cas, les deux binômes qui en expriment la base et la hauteur. On peut, ensuite, lui demander d'indiquer les rectangles qui sont des carrés. On peut également lui demander de calculer mentalement les produits 33×47, 54×46 et 68×72.

7.3 Place du travail formel dans le processus transpositif

Dans sa thèse, Conne (1981) a montré que le déni de sens s'effectue autour de deux illusions. La première consiste à prendre le milieu comme transparent, c'est-à-dire à mettre tout le sens dans la réponse attendue, la question s'identifiant à la réponse. Selon Conne, «c'est donc l'univocité de sens qui estompe le sens puisqu'il n'y a aucun choix, aucun travail à fournir pour le déterminer, si ce n'est un travail considéré comme automatique et mécanique de mémorisation, ce qui suppose une théorie de la mémorisation comme une fonction cognitive marginale». La seconde illusion consiste à penser que l'algorithme demandé pour trouver, par exemple, le produit de la somme (a + b) par la différence (a - b) est parfaitement clair, qu'il ne nécessite aucun travail pour l'effectuer, qu'il ne mobilise rien d'autre chez l'élève, de logique, pouvant l'amener à diverger, ou encore que les actions élémentaires mobilisées par l'effectuation de l'algorithme ne nécessitent aucun contrôle de sa part. La logique de «retrancher du carré du premier le carré du second» serait franche. Or, ainsi que le reconnaît Conne, «comme cette logique est très profondément ancrée dans nos schèmes, il serait étonnant qu'il en soit ainsi et que toute l'expérience du sujet ne vienne pas interférer». Il y a donc incompréhension de ce à quoi on fait appel chez l'élève dans l'assimilation de sa tâche et qui assure le succès de ce type d'activité en classe.

Les difficultés des élèves seraient alors réduites à des difficultés marginales de concentration, typiques par exemple d'une surcharge informationnelle. De plus, on évoquera facilement l'incohérence, réelle ou apparente, de la réponse de l'élève pour lui dénier un sens. Il n'est aussi pas exclu que les erreurs repérées chez les élèves soient perçues comme quelque chose qui remet l'enseignant lui-même en question à travers un certain constat d'inefficacité de l'enseignement dispensé. Conne (1993, p. 240) estime qu'«un travail formel est donc requis pour qui veut se déprendre de l'intention didactique et de ses préjugés sur la réalité».

8. L'enseignant, objet de la recherche

Notre projet répond, en partie, au souci pour le chercheur en didactique de prendre très sérieusement en compte le problème de la formation des enseignants. L'enseignement doit devenir un objet de recherche au même titre que l'apprentissage. Selon Lemoyne (1993, p. 208), «des recherches américaines et européennes ont (...) été réalisées afin de mieux comprendre ce problème; la recherche menée par Portugais (1992) sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants, recherche inscrite dans le cadre de l'ingénierie didactique, est sûrement une contribution importante en ce domaine». Rappelons le hiatus, voire le fossé que nous avons évoqué en parlant de l'écart entre la théorie et la pratique, qui existe pour le futur enseignant entre les cours théoriques qu'il reçoit à l'ISSEG ou à l'ÉNI et les pratiques à mettre en place dans les stages. Si la formation universitaire du futur enseignant de mathématiques peut constituer un levier pour transformer les pratiques d'enseignement, nous admettons avec Lemoyne (2000) que «dans l'état actuel des recherches sur la formation des enseignants, on ignore encore en grande partie comment ce levier opère et quelles sont les conditions d'une opération réussie. Les recherches entreprises depuis quelques années par Portugais s'inscrivent dans un cadre théorique et méthodologique qui nous semble important pour l'étude de ces questions» (p. 13).

8.1 Modèle de formation à la didactique des mathématiques (Portugais, 1995)

En admettant le double système dans lequel évolue le futur enseignant (le système didactique et le système de formation), le modèle de Portugais (1995) tient compte de la nécessité d'établir un lien entre la théorie et la pratique et confirme ainsi notre conviction selon laquelle il est important d'amener le futur enseignant à réinvestir ses apprentissages. En adoptant la terminologie utilisée par Portugais (1995), nous désignons l'étudiant en formation par le «formé», l'enseignant par «le maître», et le formateur ou la formatrice par «le formateur». D'une part, la triade maître (M)/élève (E)/savoir mathématique (S1) compose le système didactique (SD), qui se situe dans le plan du milieu didactique (MD). D'autre part, la triade formateur (Fr)/formé (Fé)/savoir didactique (S2) constitue le système de formation, qui se situe dans le plan du milieu de formation (MF). La figure ci-dessous (figure 14) représente le modèle théorique de formation à la didactique mettant en valeur le plan du milieu didactique (MD) et celui du milieu de formation (MF).

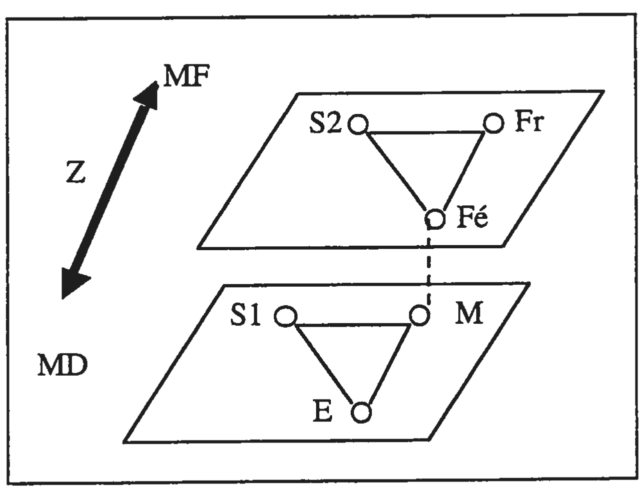


Figure 14: Modélisation théorique du double système (Portugais, 1995, p. 282)

En considérant ces deux plans de façon séparée, mais toujours en connexion, ce modèle met en évidence la situation duale du maître/formé qui évolue de la position de formé (ou d'enseigné) à celle de maître (ou d'enseignant), et vice versa. Dans ce système, lorsque le formé intègre le savoir didactique et l'introduit dans le milieu didactique en y devenant maître, il «en fait une 'utilisation' qui devient réorganisatrice au niveau des relations E - S1» (p. 283), ce qui ouvre la voie à un troisième savoir (S3), le savoir d'expérience qui se construit en situation. Voici la modélisation que Portugais fait à propos du savoir d'expérience S3 et de sa constitution (figure 15).

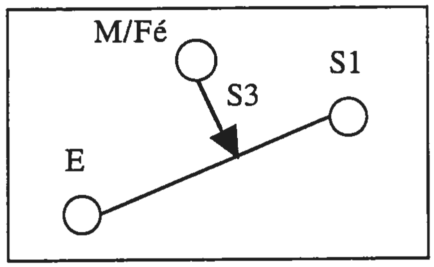


Figure 15: Position du savoir d'expérience dans l'interaction didactique (Portugais, 1995, p. 283)

Ce type de savoir s'élabore plutôt de façon progressive. En effet, à partir des expériences vécues dans le milieu didactique, le maître/formé doit sans cesse trouver un équilibre entre les plans du milieu de formation et du milieu didactique. La fonction Z, illustrée par la figure 14, concerne d'ailleurs cette relation didactique qui s'établit entre le formateur, le formé, le savoir didactique et le savoir d'expérience. Ce point renvoie au transfert des apprentissages qui ne se fait pas toujours facilement.

8.2 Le rôle de l'enseignant

L'enseignant représente une variable incontournable dans toute planification pédagogique et didactique en milieu scolaire. Il est lui-même le meilleur des moyens pédagogiques et didactiques dont il dispose. Envers ses élèves, il a la responsabilité d'exploiter au maximum ce moyen. Il doit aider les élèves à développer leurs capacités de réflexion et de raisonnement pour résoudre des problèmes. Il doit être capable d'utiliser une variété de situations (certaines pouvant être concrètes) pour introduire des modèles algébriques et géométriques qui en rendent compte. Il ne suffit pas de dire aux élèves que les mathématiques constituent un outil important, très employé en sciences et en technologie; il faut les en convaincre par des exemples précis. Il doit aider les élèves à découvrir comment les mathématiques s'insèrent dans leur expérience, puis à les appliquer à d'autres situations. Bref, l'enseignant est constamment amené à opérer des choix didactiques, concernant aussi bien le contenu du savoir, ses dimensions épistémologiques que le rapport des élèves au savoir et la fonction de ce savoir. L'ingénierie didactique lui permet de prendre en charge toutes ces composantes, autrement dit, la complexité de la classe.

9. Questions et objectifs de la recherche

En nous appuyant sur des résultats de travaux de recherche et d'analyses sur les plans pédagogique et didactique, nous visons à explorer l'impact d'une intégration des connaissances pour une meilleure compréhension des IR et, de cette intégration, apporter un éclairage sur les liens qu'on peut tisser entre l'algèbre et la géométrie dans la formation didactique des futurs enseignants. Aussi, cherchons-nous des éléments de réponses aux questions suivantes concernant leur formation.

9.1 Questions de recherche

Les questions de recherche comprennent deux questions générales et plusieurs questions spécifiques.

9.1.1 Questions générales

La disparition dans les programmes de mathématique de la connexion entre l'algèbre et la géométrie (Chevallard, 1991) a abouti à un relâchement des connexions entre l'algébrique et le géométrique. Ceci nous amène à nous poser les questions suivantes:

1. Quel rôle peut être joué par l'intégration des connaissances algébriques et géométriques dans l'enseignement des IR?
2. Quelle est la nature des difficultés rencontrées dans l'établissement de telles connexions? En particulier, quel est le poids respectif des difficultés de la composante cognitive et de la composante didactique? Comment ces composantes sont-elles liées?

9.1.2 Questions spécifiques

Ces questions nous renvoient aux avantages spécifiques de l'intégration des connaissances algébriques et géométriques chez les futurs enseignants. Nous les formulons de la façon suivante:

1. Par rapport à l'emploi des règles formelles qui produisent des représentations essentiellement instrumentales, l'intégration des connaissances permet-elle aux futurs enseignants de «dégager» les règles de l'addition et de la multiplication des monômes?

2. L'intégration des connaissances permet-elle aux futurs enseignants de mettre en évidence la propriété de la distributivité (qui est la clé de la factorisation des polynômes) et les caractéristiques du carré parfait en vue de sa factorisation?
3. L'intégration des connaissances favorise-t-elle la connexion des connaissances mathématiques et didactiques requises par l'enseignement des IR? Permet-elle, par exemple, de montrer que tout polynôme identifiable à une différence de carrés peut être factorisé selon le modèle $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$?
4. L'enseignement s'adapte-t-il ou se modifie-t-il en fonction des données et des contraintes du Séminaire de formation? Si oui, quels types de modifications ou d'adaptation pouvons-nous constater? Si non, quelles hypothèses explicatives pouvons-nous formuler à ce sujet?
5. L'habileté des futurs enseignants à concevoir, réaliser et analyser des activités de modélisation et d'intégration des connaissances varie-t-elle en fonction du contexte spécifique lié à leur double statut d'«élève» et d'«enseignant»?

9.1.3 Questions complémentaires

Nous qualifions ces questions de complémentaires parce qu'elles concernent les effets indirects du dispositif de formation, dont la manifestation constitue des indicateurs complémentaires de son efficacité. Elles sont ainsi libellées:

1. Quels effets positifs du dispositif se sont-ils manifestés?
2. Quels effets négatifs du dispositif se sont-ils manifestés? (Dans cette catégorie, nous rangeons toutes les formes de difficultés, d'erreurs reliées à l'emploi des savoirs didactiques dans MD/MF et qui nous sont rapportées par les futurs enseignants; cf. Supra: figure 14).

Nous entendons approfondir avec les futurs enseignants les aspects suivants dont plusieurs sont exprimés en termes de difficultés: types de difficultés dans l'établissement des connexions entre les modèles algébriques et géométriques; difficultés particulières liées à l'utilisation du matériel concret (feuille de papier, carton, etc.); difficultés d'envisager les savoirs possibles pour la construction de sens, de nouvelles connaissances sur les IR.

Ces questions ainsi formulées nous conduisent à la définition des objectifs de la recherche.

9.2 Objectifs de la recherche

Nous poursuivons dans notre recherche deux objectifs généraux dont l'atteinte passe par plusieurs objectifs spécifiques.

9.2.1 Objectifs généraux

1. Vérifier l'efficacité de l'intégration des connaissances algébriques et géométriques dans l'enseignement des IR chez des futurs enseignants.
2. Évaluer les difficultés rencontrées par les futurs enseignants dans les activités de modélisation et d'intégration des connaissances.

9.2.2 Objectifs spécifiques

1. Analyser les compétences des futurs enseignants dans l'utilisation des modèles algébriques et géométriques reliées à l'enseignement des IR.
2. Répertorier les difficultés à construire et utiliser les modèles intégrés (résultats de l'ingénierie, donc S2).
3. Explorer l'impact d'une intégration des connaissances pour une meilleure compréhension des IR et, de cette intégration
4. Apporter un éclairage sur les liens existant - ou à tisser - entre l'algèbre et la géométrie dans la formation des futurs enseignants.
5. Vérifier si des effets du dispositif se sont manifestés.

10.Pertinence de la recherche

Il est important de cerner la question d'intégration des connaissances autour de certains enjeux de la formation didactique des futurs enseignants. Ces enjeux sont très présents, tant sur le plan cognitif que sur ceux didactique et pédagogique. N'entendons-nous pas souvent dire: «C'est d'abord la faute au Primaire», mais jusqu'à l'université, nous entendons regretter les enseignements antérieurement dispensés. Bien des fois, les étudiants sont «sanctionnés» parce qu'ils n'ont pas réinvesti en algèbre ou en physique ce qu'ils ont appris en géométrie. L'enseignant assure même avoir vérifié auprès de son collègue l'apprentissage préalable sur lequel il croit pouvoir s'appuyer. Mais s'il est réfractaire à l'intégration des connaissances préalables dans sa propre discipline, comment peut-il souhaiter compter sur les connexions établies ailleurs.

D'abord, l'un des enjeux majeurs, généralement absent, de cette formation est la géométrie. Bauersfeld (1994, p. 189) remarque, en effet, que «la géométrie joue d'ailleurs un rôle mineur dans les programmes d'enseignement des mathématiques. Et lorsque l'on manque de temps à l'école, les thèmes géométriques sont les premiers à être mis de côté». En Guinée, la partie Géométrie est toujours placée à la fin du programme et lorsque l'enseignant dit qu'il n'a pas couvert tout le programme, il sous-entend qu'il a à peine entamé cette partie ou qu'il ne l'a pas «touchée» du tout.

Le drame est que dans nos classes, on utilise les modèles graphiques et les représentations géométriques comme si l'élève en saisissait toutes les propriétés et qu'il était capable de les intégrer. Tant que ces schémas semblent fonctionner, il n'y a aucune raison de prendre en considération leurs structures sous-jacentes, même si on peut douter que les élèves y voient une quelconque signification. C'est le cas de l'enseignement et de l'apprentissage des concepts mathématiques tels que les IR où, lorsque le recours à ces schémas ne permet pas d'obtenir les résultats escomptés, l'on constate, à la suite de (Bauersfeld, 1994), que «l'enseignant propose un correctif basé sur la perspective arithmétique, forçant ainsi les élèves à adapter leurs manipulations aux résultats algébriques ou arithmétiques plutôt que d'utiliser, à l'inverse, les propriétés géométriques comme ancrage pour la construction des opérations et des propriétés arithmétiques».

Pour Duval (1995, p. 174), «l'une des principales sources de difficulté dans l'apprentissage de la géométrie est à chercher, non pas dans les concepts d'abord, mais dans le parasitage dû à un voisinage de traitements pertinents et non pertinents à l'intérieur d'un même registre, ainsi que dans l'absence de coordination entre des traitements relevant de registres différents». Duval (1995) estime que «pour la plupart des élèves du Collège, cette coordination est loin d'être acquise, et les activités proposées dans le cadre de l'enseignement ne semblent pas suffisantes pour la favoriser» (p. 174). Trop peu de travaux ont jusqu'à présent été consacrés à une analyse précise de ces différents traitements, ou même à leur importance. Toujours, selon Duval (1995, p. 174), «l'approche trop exclusivement psychologique de la perception des figures comme l'approche trop immédiatement algébrique de la lecture des figures ne peuvent que méconnaître la diversité des traitements propres au registre des figures géométriques». Or ces traitements sont importants «puisque c'est leur exécution, en partie non consciente, qui permet aux figures de remplir leur fonction heuristique» (Duval, 1995, p. 175).

Une autre raison de se pencher sur l'intégration des connaissances dans la formation des futurs enseignants est l'absence de recherche sur ce sujet. Nous sommes, en effet, conscient que le savoir didactique n'est pas totalement exploré et qu'il n'existe pas encore en Guinée de tradition d'enseignement de la didactique, ce qui implique les difficultés, pour le moment, d'exercer un contrôle sur le processus transpositif qui le concerne. Et puisque, en Guinée, la formation ne fournit jusqu'ici pas au futur enseignant les expériences nécessaires, comment pouvons-nous alors amener des changements dans nos classes? De toute évidence, les cours de géométrie abstraite ou d'algèbre formelle sont peu utiles. Notre recherche apporte quelques éléments de solution à cet enjeu. L'inexistence en Guinée d'une tradition de recherche en DDM et encore davantage en ingénierie didactique, nous met en situation de rechercher l'efficacité d'une formation auprès d'enseignants en formation non habitués aux genres d'activités didactiques, aux exercices de modélisation dont la pertinence devra être attestée, en prenant soin d'adapter les situations-problèmes au contexte guinéen.

À en croire Bauersfeld, et sur la base de nos propres observations sur quinze ans de carrière enseignante, trop d'enseignants éprouvent des difficultés lorsqu'ils organisent de telles activités avec leurs élèves, entre autres, «parce qu'ils n'ont jamais pu les expérimenter eux-mêmes, ou encore, parce qu'ils croient que c'est trop compliqué pour les élèves». Jovenet (1998, p. 49), quant à lui, constate que «certains enseignants réduisent, voire suppriment la géométrie pour éviter les manipulations difficiles ou pour consacrer plus de temps à des activités qu'ils jugent plus utiles». Ainsi, en explorant l'efficacité de l'intégration des connaissances dans la formation des futurs enseignants, nous soulevons en même temps le problème de la mise en œuvre d'un programme intégré à la suite d'une formation disciplinaire des candidats à l'enseignement et du degré de difficulté de transfert de leur apprentissage d'un secteur à l'autre. Les modifications qu'exige cette formation concernent plus particulièrement les cours de DDM où il s'agit de faire appel à l'expérience du formateur des formateurs dans un contexte d'intégration pour le moins inhabituel en Guinée.

La Guinée ne dispose, en effet, pas encore d'expertise permettant d'assurer cette formation. Aussi, il n'y a pas encore à proprement parler de didactique des mathématiques intégrées, du moins pas de théorie didactique constituée comme c'est le cas en «mathématiques et sciences». En explorant ce domaine, nous orientons notre étude vers la recherche des voies et moyens de formation à l'intégration des connaissances dans la formation des futurs enseignants. En nous y engageant, nous avons conscience des difficultés qu'il faut surmonter. C'est tout de même pour nous le privilège d'ouvrir la voie à d'autres chercheurs qui voudront s'y engager et d'attirer l'attention de la communauté des didacticiens sur l'importance d'un tel enjeu.

Ayant réussi à circonscrire le problème de notre recherche et affirmé sa pertinence, il est important que nous décrivions le cadre de nos références, en vue d'aboutir à un modèle théorique devant guider notre projet d'ingénierie didactique. Ce cadre de références fait l'objet du chapitre suivant (chapitre 2).

CHAPITRE 2

CADRE THÉORIQUE

CADRE THÉORIQUE

La présente étude s'inscrit dans le cadre des recherches en ingénierie didactique chez les futurs enseignants de mathématiques au Secondaire. Elle vise particulièrement la possibilité d'intégration des connaissances algébriques et géométriques dans leur formation à l'enseignement des identités remarquables (IR). Afin de pouvoir situer le sens d'une telle ingénierie, le présent chapitre fait état de l'apport indispensable de Vergnaud dont la théorie des champs conceptuels nous suggère d'accorder une attention particulière aux différents aspects des IR, aux différentes situations dans lesquelles ces aspects prennent leurs significations et aux différents systèmes de signifiants utilisés. La présente étude se situe aussi dans le cadre de la théorie des situations de Brousseau. Cette dernière constitue à la fois un modèle théorique qui ordonne les rapports que l'élève développe avec le savoir, et une grille des comportements qui rend compte de l'investissement didactique des enseignants. Mais, avant de progresser, il convient de définir d'abord quelques termes clés de notre recherche pour mieux les appréhender. Nous y relevons «didactique des mathématiques», «système», «modèle», «modélisation», «intégration des connaissances», «savoir didactique», «savoir d'expérience» et «transposition didactique». Il convient aussi de faire l'analyse conceptuelle des IR.

1. Clarification terminologique et conceptuelle

La clarification terminologique et conceptuelle à laquelle nous consacrons cette longue mais utile section est d'autant plus importante qu'un ensemble de concepts tels que «système», «modèle», «modélisation», «intégration», assure plusieurs fonctions cognitives, notamment la sélection de l'information pertinente dans l'environnement didactique, et le travail d'inférence de la pensée mathématique, travail qui est souvent accompagné par des formes langagières et des manipulations symboliques.

1.1 Didactique des mathématiques (DDM)

Il semble qu'une "modernisation" des contenus n'aurait pas été accompagnée d'une amélioration sensible des méthodes d'enseignement. Une telle dissociation entre le contenu et la façon de l'enseigner mérite discussion, car cette opposition est l'une de ces simplifications abusives qui posent problème à l'enseignement des mathématiques, en général, et celui des concepts tels que les IR, en particulier. Il faut, en l'espèce, nuancer en disant que si les méthodes d'enseignement simplistes souvent proposées n'ont pas été considérablement "modernisées", c'est probablement que les contenus l'ont été moins, et c'est surtout que ces contenus ont été plutôt perçus comme des résultats figés que comme des modalités d'une somme d'activités cognitives et didactiques.

En plus de cette fausse opposition entre les contenus mathématiques qui seraient fixés une fois pour toutes et des méthodes d'enseignement qui en seraient indépendantes, on constate un phénomène universel non moins inquiétant: avec des modalités différentes selon les pays, on assiste à une pénurie d'enseignants qualifiés et à une considérable augmentaion des effectifs des classes du Primaire et du Secondaire. Pour combler le manque à gagner, on n'a eu d'autre solution que d'utiliser des maîtres insuffisamment qualifiés. Le plus grave est qu'au lieu de chercher à remédier à cette pratique désastreuse, on s'est complu à la pérenniser, et c'est alors qu'on a cherché, en vain, à faire jouer les arguments basés sur la distinction entre les contenus et la «pédagogie». Ces arguments sont d'autant plus fallacieux qu'ils sont fondés sur les prétextes simplistes qu'un maître qui connaît bien les contenus peut les enseigner sans grande difficulté, même s'il n'a reçu aucune formation pédagogique, et qu'un maître pourvu d'une «bonne pédagogie» peut tout enseigner, y compris ce qu'il ignore!

L'idée que, pour enseigner les mathématiques, il suffirait de bien connaître les contenus mathématiques, est certes fausse. Cette connaissance est bien sûr nécessaire, mais elle n'est certainement pas suffisante. La formation à l'enseignement des mahématiques fait appel à d'autres contenus qui permettent d'aborder les questions telles que «comment l'élève apprend-il?», «quelles transformations subissent les savoirs mathématiques lors de leur enseignement?», «quels effets peuvent être prévisibles, souhaitables ou néfastes?», «quelles décisions peuvent être prises par l'enseignant?», etc. Ce sont là des questions qui font qu'une formation à l'enseignement des mathématiques ne saurait se réduire ni à l'acquisition des contenus mathématiques, ni à un discours de pédagogie générale qui, par nature, exclut l'étude des contenus.

C'est la réforme des mathématiques modernes des années soixante qui est à l'origine de la constitution de la didactique des mathématiques (DDM). Premiers défenseurs de cette réforme, les mathématiciens dénonçaient les deux siècles de retard des mathématiques enseignées par rapport aux mathématiques produites et, pour corriger l'image des mathématiques comme science immobile, voulaient mettre à jour cet enseignement. Selon Portugais et Brun (1998, p. 2), «il s'agissait pour eux de combler l'écart grandissant entre les programmes d'enseignement en vigueur et l'état de développement des mathématiques elles-mêmes. Ils critiquaient en particulier les programmes pour leur morcellement: juxtaposition inorganisée d'activités d'algèbre, de géométrie, de trigonométrie, de géométrie spatiale, etc.».

1.1.1 Les difficultés des mathématiques modernes

Autour de 1960, on a vu arriver la réforme des mathématiques modernes, laquelle a beaucoup porté sur les contenus des programmes, mais qui n'a pas apporté les succès escomptés. Plusieurs analystes (Colmez, 1979; Portugais et Brun, 1998) ont vu dans cette réforme le résultat de l'entrée des mathématiciens professionnels dans le domaine clos de l'enseignement, en particulier de l'enseignement élémentaire. La relative solidité d'un tel enseignement est devenue aussi le prétexte pour faire des mathématiques le filtre d'une sélection qui a mis «hors-circuit» bon nombre d'élèves. Les mathématiques de la scolarité obligatoire constituent un enjeu important du point de vue de la réussite scolaire. Chevallard (1992) note que «d'un côté, les mathématiques constitueraient un passage obligé sur la route de la réussite scolaire et sociale. De l'autre, leur difficulté ne serait plus à dire». En interrogeant des élèves du Primaire ou du Secondaire sur ce qu'ils pensent des mathématiques, on obtient des réponses très variées comme «j'ai horreur des maths et je suis nul», «c'est intéressant, mais on ne voit pas à quoi ça sert», «j'adore ça, c'est un jeu». Souvent très influencé par l'histoire du moment, ce rapport aux mathématiques peut évoluer au cours d'une scolarité. Il arrive cependant que certaines blessures se creusent et débouchent sur un sentiment d'échec. Les parents, les enseignants et la communauté ont tous un rôle important à jouer pour qu'un élève, momentanément en difficulté, ne se sente exclu de l'activité mathématique ou ne «décroche».

Portugais et Brun constatent que, face aux besoins exprimés par les organisations internationales en personnels scientifiques et technologiques compétents, possédant une solide formation de base en mathématiques, «l'enseignement mathématique est devenu une préoccupation importante sur le plan mondial» (Ibid., p. 3). Les nouvelles mathématiques se révèlent difficiles à comprendre, tout au moins dans leurs premières formes de présentation. En effet, Portugais et Brun notent que:

> *Beaucoup de gens vont commencer à se détourner des mathématiques modernes, en particulier les parents, qui ne reconnaîtront plus dans les activités de leurs enfants des traces de leurs propres connaissances mathématiques. Et puis un autre phénomène va alerter les esprits: les échecs scolaires en mathématiques vont s'aggraver à un point inconnu avant la réforme. De plus, les difficultés rencontrées à faire vivre le projet de réforme vont révéler peu à peu la méconnaissance du fonctionnement des systèmes didactiques (Ibid., p. 7).*

1.1.2 Le modèle métadidactique de Dienes

Grand innovateur en psychopédagogie, Dienes propose une double démarche: élaborer une théorie de l'apprentissage des mathématiques et innover dans l'enseignement mathématique. Il fonde son innovation sur un principe psychopédagogique assez général: l'enseignement doit être modelé sur le processus d'abstraction des concepts mathématiques. Pour illustrer ce principe, il propose un modèle du processus d'abstraction progressive des concepts mathématiques, les *Six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*[3]. Portugais et Brun (1998) remarquent que «le passage d'un niveau à l'autre d'abstraction est, dans le modèle Dienes, pris en charge par les jeux successifs. Cette progression, que l'on qualifierait aujourd'hui de métadidactique, est postulée comme devant se réaliser au moyen de la seule succession des jeux évoqués (i.e.: sans enseignement)» (Ibid., p. 8). Le fait que ce genre de postulat psychopédagogique (l'abstraction progressive naît des jeux successifs) soit couplé à un projet d'innovation pour l'enseignement conduira la DDM à se constituer. En effet, à la même époque, Brousseau conduit à Bordeaux des travaux sur des situations expérimentales d'enseignement des mathématiques. L'équipe de DDM de Genève et celle de Brousseau mènent, chacune de son côté, une démarche critique du travail de Dienes portant sur l'amalgame entre innovation et recherche, amalgame qui fait obstacle à l'émergence d'une didactique théorique.

1.1.3 Les critiques de l'équipe de Genève du modèle de Dienes

Portugais et Brun remarquent que dans le modèle de Dienes, «les situations sont présentées dans le but d'abstraire progressivement les concepts mathématiques; c'est-à-dire que l'abstraction y est en quelque sorte réalisée par la bonne marche de l'innovation proposée» (Ibid; p. 9). La fonction innovatrice couplée à celle de théorisation pousse, en quelque sorte, obligatoirement à des validations symétriques des deux démarches; le principe psychopédagogique fonctionne alors pour justifier les options prises sans qu'il y ait eu de contrôle externe d'exercé. Ainsi, notent Portugais et Brun:

> *la psychopédagogie des mathématiques se caractérise comme une démarche où les choix pédagogiques sont justifiés par des références à la psychologie contemporaine. La critique de Brousseau sur l'amalgame innovation/recherche prend alors tout son sens: une bonne didactique n'est possible qu'à la condition*

---

[3] (1) Jeu libre avec un environnement construit exprès pour que certaines structures mathématiques en soient dégagées; (2) jeux structurés avec règles: des régularités sont découvertes par l'élève dans son environnement et l'amènent à examiner les jeux; (3) jeux isomorphes: l'élève peut rendre compte de la structure commune des jeux joués; (4) représentation: la structure est représentée graphiquement ou représentée à l'aide de matériel; (5) symbolisation: les propriétés de la représentation sont étudiées, c'est-à-dire de l'abstraction atteinte et on invente un langage pour l'exprimer; (6) axiomatisation.

> *de se départir de cette position applicationniste des résultats de la psychologie dans l'enseignement (Ibid; p. 9).*

L'équipe de Genève (Brun, 1975, 1981; Conne, 1981; Portugais, 1992) met en évidence les deux paradoxes auxquels conduit le processus psychopédagogique d'apprentissage général (du type de celui de Dienes): le premier paradoxe est que pour majorer l'importance du raisonnement, on doit minorer la place des contenus mathématiques eux-mêmes; le second paradoxe est que la continuité entre raisonnement et contenus est totalement laissée à la charge du développement spontané du sujet psychologique. Ces critiques vont être intégrées dans la constitution de la DDM, qui se définit, en partie, en s'opposant à l'emploi de principes psychopédagogiques. Ce faisant, les didacticiens cherchent non seulement à éviter les amalgames enseignement/recherche, mais ils tentent aussi de clarifier leurs objectifs en les centrant sur les contenus à enseigner.

1.1.4 Objectifs de la DDM

En précisant les objectifs de la DDM, pour marquer la différence des projets de la didactique et de la psychopédagogie des mathématiques, Portugais et Brun notent que:

> *La didactique des mathématiques va chercher à prendre en compte l'urgent besoin d'une analyse du fonctionnement de l'enseignement mathématique. Il apparaît de plus en plus clair qu'une amélioration significative de l'enseignement des mathématiques ne sera possible que si elle est basée sur une étude des conditions et des contraintes où se situe la réalisation didactique. Cette idée, peu à peu, fera son chemin (Ibid; p. 10).*

Force nous est de dire, à la suite de Portugais et Brun (1998), que «les nombreuses difficultés de la réforme des mathématiques modernes ont été des conditions prévalantes pour la constitution de la didactique des mathématiques» (Ibid; p. 10). Toutefois, les critiques de la psychopédagogie ont également joué un rôle important, car elles ont incité les chercheurs à s'outiller en matériels conceptuels et méthodologiques rigoureux qui leur ont permis de proposer des actions rationnelles sur le système d'enseignement et d'affirmer la nécessité d'une démarche scientifique sur l'enseignement des mathématiques.

1.1.5 La dynamique de l'évolution de la DDM

La DDM étudie ainsi les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se borne pas à chercher une bonne manière d'enseigner des concepts ou notions fixés. Elle se précise largement avec les travaux importants menés en Europe francophone autour de Guy Brousseau, Yves

Chevallard et Gérard Vergnaud, et au Québec par le CIRADE, fondé par Albert Morf. Elle connaît un développement considérable, comme en témoignent la longévité de la revue «Recherches en didactique des mathématiques» (plus de 57 numéros parus), la pérennité des Écoles d'été de didactique des mathématiques (10 regroupements bi-annuels de quelques 125 chercheurs de haut niveau), celle aussi du Séminaire National de didactique (3 fois par an depuis plus de vingt ans). À cela s'ajoutent d'excellentes thèses sur de nombreux contenus mathématiques abordés suivant l'approche de la didactique et les nombreuses collaborations internationales dans ce domaine. Il est important de préciser une caractérisation récente de la DDM rédigée par Brousseau.

1.1.6 Caractéristiques de la DDM

Brousseau (1991b) présente la DDM comme une véritable science qui s'intéresse à la production et à la communication des connaissances mathématiques dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances. «La didactique des mathématiques étudie la façon dont les connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société». Cette définition montre bien le caractère scientifique du projet de la DDM, projet qui se veut à la fois plus ambitieux et plus modeste que le projet psychopédagogique. Ce projet est, en effet, plus ambitieux parce que le travail de théorisation vise l'ensemble des processus relatifs à la mise en circulation des savoirs; il s'agit aussi bien des apprentissages mathématiques scolaires que des transformations sur le savoir produites par la transposition didactique. Ce projet est également plus modeste parce qu'il ne proposera des situations d'enseignement que dans la mesure où ces dernières seront attestées par un contrôle expérimental serré (au moyen d'ingénieries didactiques). Ainsi que le remarque Portugais (1995, p. 29), la DDM permet donc de «théoriser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage de la mathématique ... et d'agir sur le système d'enseignement».

1.1.7 Différences entre le projet de la didactique et celui de la psychopédagogie

La DDM se constitue, en partie, pour réagir à l'application transversale dans l'enseignement des mathématiques de principes généraux dérivés sans doute un peu hâtivement de la psychologie. Portugais et Brun (1998) notent que:

> *Si le projet de la didactique est constitué à la fois pour mieux documenter les phénomènes d'enseignement des mathématiques et pour répondre au besoin d'une action rationnelle sur le système d'enseignement, le projet de la psychopédagogie, en revanche, est (...) principalement orienté vers une modification empirique de l'enseignement fondée sur l'application de principes*

dérivés de l'évolution de la psychologie, en particulier de l'évolution de la psychologie de l'apprentissage. La didactique des mathématiques ne néglige pas pour autant les questions d'apprentissage, mais elle les reformule en rapport avec les contenus de connaissances mathématiques (théorie des champs conceptuels de G. Vergnaud, 1991).

L'emploi de principes dérivés de la psychologie ne pose pas problème en lui-même; c'est plutôt parce que l'exercice du contrôle, fait dans le développement des résultats de psychologie, est presque toujours beaucoup moins grand lorsque l'on apprête le résultat sous forme de principe ou de prescription pédagogique. La centration sur les savoirs mathématiques est constitutive du projet de la DDM, mais cela ne veut pas dire que l'on se désintéresse des capacités de raisonnement des élèves. Portugais et Brun ont montré quelques exemples concrets des différences importantes qu'ils ont identifiées entre les projets de la psychopédagogie et de la DDM. Ils ont souligné quelques unes de ces différences de manière synoptique dans le tableau ci-dessous (tableau 2).

Didactique des mathématiques	Psychopédagogie des maths
Science qui étudie la mise en circulation des connaissances mathématiques.	Réflexion de l'éducateur sur les actions d'enseignement mathématique qu'il analyse, critique et oriente.
théoriser les phénomènes d'enseignement	proposer des principes organisateurs pour l'enseignement (principes psychologiques, etc.)
agir rationnellement sur le système d'enseignement	proposer des innovations pour l'enseignement
cherche à construire des ingénieries didactiques sur des bases scientifiques	cherche à rationaliser le travail d'éducation sur des bases idéologiques
Séparation enseignement/recherche (Brousseau)	amalgame enseignement/recherche (Dienes)
centration sur les situations aptes à développer l'acquisition de connaissances mathématiques spécifiques	couplage des objectifs de développement des capacités générales de raisonnement et des objectifs d'acquisition de connaissances mathématiques spécifiques
les propositions pour l'enseignement ont une base expérimentale	les propositions pour l'enseignement ont une base normative
: relatifs aux contraintes du système d'enseignement sont étudiés (ex. transposition didactique)	
	l'élève a la charge d'assurer lui-même la continuité entre les raisonnements et les contenus

Tableau 2: Différences entre les projets de la didactique et de la psychopédagogie, différences identifiées par Potrugais et Brun (1998, p. 14).

La formation didactique des enseignants devrait s'inspirer d'une logique de «didactification de la didactique» des mathématiques. En mettant en évidence les apports de la recherche de Jean Portugais (1995) sur la formation didactique des maîtres à l'enseignement des mathématiques, Brun reconnaît que:

[...] De même qu'on ne peut séparer le savoir didactique du savoir mathématique, de même on ne peut séparer ce savoir didactique d'un autre

> *savoir, savoir que Portugais appelle savoir d'expérience. [...] En montrant la solidarité des savoirs mathématiques, didactiques et d'expérience d'une part, et en proposant des articulations de ces trois savoirs dans un dispositif pour l'étude de la formation d'autre part, Jean Portugais nous donne les termes d'une problématique à même de prendre en compte la complexité des questions qui se posent à l'enseignement des mathématiques (Brun, 1995, Préface de Portugais, 1995, pp. XIV-XV).*

1.2 Systèmes, modèles, modélisation, processus de modélisation

Notre revue bibliographique comparée nous fait constater la diversité des conceptions relatives aux systèmes et la polysémie des termes de modèle, de modélisation. Nous en avons retenu les points de congruence qui sont importants pour le didacticien.

1.2.1 Système

Dans son livre *Systèmes et modèles*, Bernard Walliser (1977, p. 13) définit un système comme «une entité relativement individualisable, qui se détache de son contexte ou de son milieu tout en procédant à des échanges avec son environnement». Il définit l'étude des systèmes comme une approche cognitive qualitative qui précède la mathématisation proprement dite. Faite avant tout à partir d'un point de vue logico-mathématique, cette étude porte sur les relations de situation de causalité ou de finalité, qui permettent de les définir par rapport à l'environnement, sur les interactions entre les sous-systèmes et systèmes, sur les modalités de leur évolution ou de leur régulation. Les systèmes ne sont pas présentés comme des objets de l'expérience immédiate, mais comme des constructions formelles à partir d'une opération de séparation des variables.

Von Bertalanffy (1977, p. 53), pour sa part, définit un système comme «un complexe d'éléments en interaction. Par "interaction" nous entendons des éléments p liés par des relations R, en sorte que le comportement d'un élément p dans R diffère de son comportement dans une autre relation R'». Sa théorie des systèmes définit les cadres qui permettent de repérer des isomorphismes entre les schémas conceptuels de la réalité et de les mettre en œuvre. Ces isomorphismes se distinguent des analogies globales non calculables. De plus, ils permettent de transférer l'expérimentation d'un système peu accessible sur un modèle qui représente un système bien maîtrisé. Toutefois, le didacticien éprouve une certaine difficulté à traduire les principes posés dans la pratique de classe. Les compétences transversales proposées se rapportent le plus souvent à une modélisation mathématique alors que celle-ci n'est pas toujours réalisable en classe; l'approche qualitative d'intégration des connaissances, en particulier sa traduction par les images graphiques, est négligée.

Les systèmes décrits, par ailleurs, sont d'une extrême diversité: système physique (comme le système solaire) déterminé de façon rigoureuse, système technique (comme le réfrigérateur) caractérisé par une fonction technique, système biologique (comme celui régulant le taux de glucose sanguin), système économique et social (comme les prises de décisions) réalisant un projet dans un contexte de communication. Mais deux classes de problèmes nous conduisent à rechercher des éléments de convergence à travers la diversité des situations: d'une part, la nécessité de ne pas étouffer, par l'analyse trop minitieuse, l'étude des problèmes nés de la complexité du système en tant qu'ensemble des interactions (une telle analyse ne donne pas à elle seule la réponse aux problèmes complexes posés) et, d'autre part, la nécessité de réagir contre une tendance dominante de la science actuelle, tendance qui conduit à l'éclatement en disciplines de plus en plus cloisonnées, au blocage de la communication et de la création de champs conceptuels nouveaux.

L'étude comparée ne nous a pas permis de dégager une définition exhaustive des systèmes, mais conduit à articuler deux points de vue complémentaires, analytique et globaliste. Le premier définit les systèmes comme des ensembles d'éléments en relation, et le deuxième détermine le système par rapport à l'environnement en fonction d'un principe organisateur ou d'un projet qui lie un certain nombre de variables. Le système se distingue d'un ensemble quelconque parce que l'articulation des éléments crée des propriétés nouvelles. Par exemple, en associant un poids et un ressort, on crée un pendule, c'est-à-dire un système oscillant. Un système ne s'identifie pas à un objet réel s'il en porte le nom. Sa définition fait toujours intervenir le choix d'un observateur qui abstrait certaines propriétés; de ce fait, il représente une classe d'objets et désigne les isomorphismes qui les unissent. Aussi, retenons-nous la proposition de René De Cotret (1990, p. 19) qui définit un système comme «une portion particulière de la réalité, cette portion étant choisie en fonction de ses aspects relatifs au problème que l'on veut étudier» et qui note que «certains éléments de la réalité entourant la situation ... sont volontairement omis afin de délimiter le système sur lequel on devra travailler».

1.2.2 Modèle

Face à la multiplicité des emplois du terme de modèle, et sans prétendre aboutir à une définition unique et fermée, nous tentons de faire une réflexion théorique qui permet de clarifier ce dont nous parlons lorsque nous utilisons le terme modèle. Le concept de modèle a des résonances qui évoquent aussi bien les images et les schémas que la théorisation sans figuration, ou la mathématisation. La première résonance évoque l'idée qu'un modèle peut être un objet concret (maquette, modèle réduit), un schéma simplificateur (sous forme d'image concrète ou de mise en rapport d'éléments divers, sans figuration) ou une analogie (avec ou sans figuration concrète) . Ce qui est en jeu, c'est le «figuratif» par rapport à l'«opératif»: le modèle est considéré comme un «objet pour penser avec», un schéma directeur se traduisant souvent, mais non nécessairement, par une image ou un objet concret - ce qui supposerait que visualiser une IR peut constituer une aide à la pensée mathématique. Le modèle analogique peut être considéré comme un simple moyen d'investigation au début d'une recherche et comme n'ayant qu'une fonction heuristique. Il peut être aussi un modèle a posteriori, mis en place pour la pédagogie et la vulgarisation, et a, dans ce cas, une fonction de communication: l'explication de l'IR $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ par le découpage et le recollage correspond bien au besoin de se "représenter" les diverses opérations.

Une deuxième résonance fait que la distinction n'est pas toujours nette entre modèle et théorie ou entre modèle et loi. La théorie peut être conçue comme un ensemble de lois qui sont ponctuellement explicatives et prévisionnelles, mais conçues souvent comme la traduction des phénomènes de la nature, alors que la notion de modèle s'avouerait plus volontiers et plus ouvertement comme un artefact, comme une interprétation plausible de la réalité, sans prétendre en être la traduction fidèle. La troisième résonance du concept de modèle est la mathématisation qui est associée à la formalisation et qui passe parfois par l'analogie. La mathématisation offre au modèle la possibilité de mettre en relation des paramètres qui, mis en oeuvre dans une expérimentation, suscitent de nouveaux paramètres, en amenant ainsi une modification ou une rectification du modèle. Il y a ainsi un va-et-vient continuel entre la formalisation et le retour au concret.

Les trois directions ainsi définies de la notion de modèle se trouvent à part inégale dans les activités d'intégration des connaissances algébriques et géométriques qui occupent les futurs enseignants de la présente recherche. Elles recoupent l'idée de Walliser (1977, p. 116) qui pense que «la notion de modèle recouvre toute représentation d'un système réel, qu'elle soit mentale ou physique, exprimée sous forme verbale, graphique ou mathématique». Toutefois, note René De Cotret, «le modèle n'est pas nécessairement une représentation de tout système. Il se restreint aux caractéristiques du système qui sont intéressantes pour l'étude que l'on veut réaliser» (Ibid. p. 20). En cela, elle rejoint Chevallard (1989, p. 60) qui suggère de construire «un modèle de la réalité qui ne prend en compte que les aspects de cette réalité qui apparaissent pertinents par rapport à la question que l'on se pose à son propos. Ce modèle (...) n'est pas l'image la plus complète possible du réel». L'essentiel est que le modèle soit efficace et ne se perde pas dans les détails non signifiants. Il y a donc un choix des éléments pertinents pour construire un modèle.

Comme l'on peut s'en rendre compte, nous n'avons pas abouti à la conception d'une définition unique et définitive du concept de modèle; ce n'était pas notre but. Cependant, nous pouvons, sans illusion mais dans un désir de synthèse au moins provisoire, retenir quelques traits minima que nous jugeons nécessaires pour la pertinence du concept: le modèle est "quelque chose" (objet concret, représentation imagée, système d'équations, etc.) qui se substitue au réel trop complexe ou inaccessible à l'expérience, et qui permet de comprendre ce réel par un intermédiaire plus connu ou plus accessible à la connaissance; mais ce substitut a parfois pour fonction, non pas d'expliquer un processus, mais d'en calculer les variations, de faire des prévisions. Nous pouvons retenir qu'un modèle est avant tout quelque chose qui fonctionne comme modèle, ce qui veut dire qu'un modèle est peut-être moins un "objet" qu'une fonction particulière attribuée à un objet. Ainsi, comprendre, expliquer, prévoir, calculer, manipuler, formuler des analogies, communiquer, rendre pensable ce qui est difficile à cerner, sont les fonctions qui se dégagent des divers modèles que l'on peut rencontrer. Toutes ces fonctions ne sont pas forcément présentes à la fois en un seul modèle. Et, par ailleurs, ces fonctions représentent des tendances plutôt que des catégories fermées. Un modèle peut avoir été construit pour une fonction et se révéler utile pour une autre. C'est une des raisons pour lesquelles on ne saurait établir une définition qui satisfasse à tous les cas particuliers des modèles.

1.2.3 Modélisation, processus de modélisation

S'intérroger sur les modèles en mathématiques ne peut se faire sans que se profile, derrière les mots, l'idée de la modélisation elle-même. La modélisation est la démarche de construction d'un modèle ou d'appropriation d'un modèle déjà construit. Le passage du système au modèle se fait par l'entremise d'un processus de modélisation. Walliser (1977, p. 156-157) découpe le processus de modélisation en quatre phases: (1) une *phase déductive* qui consiste à faire dériver d'un modèle théorique préalable un modèle empirique; (2) une *phase prévisionnelle* qui consiste, à partir du modèle hypothétique précédent, à imaginer des expériences permettant de le tester; (3) une *phase descriptive* qui consiste à intégrer les observations dans un modèle empirique nouveau ou dans un modèle préexistant, et (4) une *phase inductive* qui consiste à analyser les écarts entre le modèle hypothétique et le modèle confirmé et à en induire, en tenant compte d'autres modèles empiriques, les modifications à apporter au modèle théorique ou la structure d'un modèle théorique nouveau.

René De Cotret note que «le processus de modélisation ne se réduit pas à un seul passage par chacune de ces phases, il s'agit d'un processus itératif qui permet d'améliorer le modèle, de le rendre plus adéquat, si besoin est» (Ibid., p. 21). On évite ainsi de rigidifier le modèle en un objet statique et stérile; de plus, cela conduit éventuellement à établir la pluralité des modèles. Chevallard donne une description du processus de modélisation qui est un peu différente de celle de Walliser dans la mesure où il démarre ce processus avec la définition du système. Pour Chevallard (1989, p. 53), «le processus de modélisation comporte, schématiquement, trois étapes:

> *1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les 'aspects' pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît.*
> *2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations R, R', R", etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.*
> *3. On 'travaille' le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.*

En comparant les deux descriptions, on peut dire, à la suite de René De Cotret, que «c'est à la deuxième phase de Chevallard que s'insère le processus de modélisation décrit par Walliser» (Ibid., p. 22). La première étape de Chevallard, qui consiste à définir ou à circonscrire le système, est importante dans la mesure où, de l'avis de Baruk (1985), de Puchalska et Semadeni (1988), la discrimination entre les éléments pertinents pour la résolution et ceux qui ne le sont pas n'est pas toujours évidente. Le 'travail' sur le modèle (étape 3) est également important car il s'agit d'un but du modèle. Toutefois, remarque René De Cotret, «cette étape est au-delà de la modélisation comme telle, car elle contribue à donner une nouvelle représentation du système en faisant apparaître de nouvelles connaissances» (Ibid., p. 23).

Dans la littérature analysée, les modèles matériels et iconiques sont à peine cités, alors qu'ils ont une grande importance en mathématiques (illustrations, schémas des algorithmes, dessin géométrique) et qu'ils font partie de l'environnement didactique habituel des élèves (manuels scolaires). Pour l'enseignement des mathématiques et pour la formation didactique des futurs enseignants, cette lacune est regrettable, car elle signifie l'absence des va-et-vient successifs entre un champ empirique de recueil et de traitement des données (manipulations, expérimentations, ...), qui permet, par exemple, de passer du modèle hypothétique au modèle confirmé, et un champ théorique caractérisé par des procédures d'axiomatisation et de déduction, qui induisent des projections conduisant à un nouveau modèle hypothétique. Cette lacune est regrettable, car elle signifie aussi l'absence d'un enseignement de la modélisation, enseignement dont René De Cotret (1990) souligne les divers avantages, en particulier celui de restituer son sens aux procédures de résolution. «L'enseignement de la modélisation, nous dit-elle, pourrait favoriser le développement de l'esprit critique, puisqu'on y apprendrait à analyser chacune des situations afin de déterminer le modèle adéquat» (p. 18).

La modélisation ou construction de modèles est l'une des composantes fondamentales de la démarche didactique qui prévaut dans notre ingénierie. Elle n'est pas que simple représentation graphique des IR; elle n'est pas non plus l'outil qui assure, à lui seul, la compréhension. Mais, en revanche, cet outil rend la représentation plus opérationnelle et permet un passage plus performant à l'action. En parlant d'outil, c'est bien à cette fonction que nous pensons: amplifier le sens des IR et les possibilités d'agir sur elles, et de démultiplier la puissance des procédures et des stratégies que nous pouvons élaborer. L'outil de modélisation contribue aussi à structurer la représentation d'une autre façon: par la simplification qu'il permet. C'est là une fonction essentielle du modèle. L'idée que cette simplification est orientée vers l'action (activités de découpage, de recollage, d'assemblage de tuiles) est fondamentale. Ainsi, dans la présente recherche, on modélise pour agir, pour soumettre à l'expérience une théorie, pour rendre opérationnel un ensemble d'hypothèses. C'est en ce sens que les modèles diffèrent le plus des théorèmes ou des lois algébriques qui cherchent plutôt à expliquer les IR qu'à agir sur elles.

1.3 De l'intégration des connaissances

Tout en évitant des débats qui agitent les travaux et les préoccupations interdisciplinaires, nous voulons cerner la question d'intégration des connaissances algébriques et géométriques autour de certains enjeux de la formation didactique des futurs enseignants, tels que ceux de la construction du sens et de la recherche de la compréhension. Ces enjeux sont très présents, tant sur le plan cognitif que sur ceux des niveaux didactique et pédagogique. Ainsi, en parlant d'intégration de connaissances, il s'agit de faire appel à la pluralité des systèmes de représentation des IR dont nous avons parlé plus haut. La présente recherche en fait une préoccupation, car l'intégration et la coordination de ces systèmes n'ont rien de spontané. L'intégration dont il est ici question permet ainsi non seulement d'opérer des tranformations immédiates de la représentation des IR mais aussi de mobiliser d'autres connaissances soit sous la forme d'outils plus puissants soit sous la forme de connaissances opératoires contribuant à de nouvelles étapes dans l'opérationnalisation de la représentation, du traitement et de l'utilisation des IR.

1.4 Savoir mathématique, savoir didactique et savoir d'expérience

Dans son modèle théorique de formation à la didactique, Portugais (1995) aborde la notion de savoir sous différents angles: le savoir mathématique (savoir S1), le savoir didactique (savoir S2) et le savoir d'expérience (savoir S3). Mais que désigne-t-on au juste par ces savoirs dont la maîtrise est nécessaire pour enseigner? Plusieurs auteurs parlent de «savoir», puis de «connaissance». Hutchinson (1992, p. 223) distingue entre le savoir disciplinaire et la connaissance technique d'enseignement:

> *Le savoir disciplinaire consiste en la connaissance d'une discipline; c'est-à-dire ce à quoi se réfèrent les gens lorsqu'ils disent que quelqu'un «connaît sa matière». [...] Par contre, la connaissance des techniques d'enseignement correspond à «savoir comment»; on l'utilise habituellement pour décrire une séquence d'actions, par exemple, savoir comment (...) résoudre un type particulier de problème d'algèbre ou enseigner un concept mathématique à des élèves de troisième année.*

Elliot (1992, p. 152) insiste, quant à lui, sur la composante disciplinaire de la profession, tout en invitant à dépasser l'aspect simplement pédagogique. Pour lui: «bien que les habiletés pédagogiques et la connaissance pédagogique soient importantes pour réussir en classe, l'enseignement comporte beaucoup plus que cela. Il doit incorporer non seulement la forme et les processus de la transmission du savoir, mais aussi quelque chose de la substance de cette transmission: quelque chose à enseigner». Cette conception de Elliot nous invite à un ensemble intégré de savoirs disciplinaires et didactiques, ensemble face auquel l'enseignant est appelé à maîtriser non seulement sa discipline, mais la didactique de celle-ci.

Les deux aspects fondamentaux du savoir enseignant tels qu'il ressort de la plupart de ces études, sont ce que Chevallard (1985) appelle «le savoir à enseigner» et le «savoir enseigné». Chevallard (1985, p. 39) souligne que:

> *Le savoir ne porte pas en lui-même la finalité d'être enseigné, mais seulement la nécessité d'être utilisé. C'est le projet social d'enseignement qui fait naître une dialectique entre la "désignation de contenus de savoirs et les contenus à enseigner". Ainsi, lorsqu'un contenu de savoir a été choisi pour l'enseignement, ce savoir va subir un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement.*

Plusieurs auteurs parlent ainsi de «savoir», puis de connaissance». Pour éviter toutes confusions, nous avons choisi la distinction apportée par Brun (1994):

> *Dans mon propos, la distinction entre connaissances et savoirs restera très générale; par savoirs je désignerai les savoirs constitués, ceux qui ont trait au projet d'enseignement, et par connaissances, ce qui relève du développement et de l'expérience, du côté du sujet donc, en-deça de toute objectivation en savoirs (p. 70).*

Ainsi, selon Brun, par «connaissances» on désigne ce que l'on construit tandis que le «savoir» réfère à ce qui se trouve dans les livres. Dans la présente recherche, nous parlerons de «connaissance» pour désigner ce que le futur enseignant doit développer (en termes de conception, de réalisation didactique et d'analyse) pour enseigner les IR. Dans cette recherche, le savoir mathématique (S1) correspond aux opérations sur les IR et aux propriétés de ces opérations avec les algorithmes de multiplication, de factorisation de polynômes, de complétion de carré; tandis que le savoir didactique (S2) concerne, entre autres, les processus ou stratégies de modélisation et d'intégration des connaissances. Nous parlerons de savoir d'expérience (S3) pour désigner le travail d'analyse que doit faire le formé, en situation, pour traiter et prendre en compte les difficultés que les élèves rencontrent dans les activités proposées. Le savoir d'expérience consiste donc à gérer, à partir des connaissances puisées du savoir S2, les erreurs et les difficultés des élèves dans les activités proposées. Il existe ainsi une relation d'emboîtement entre les savoirs S1, S2 et S3. En admettant le double-système dans lequel évoluent ces futurs enseignants (le système didactique et le système de formation), le modèle de Portugais (1995) permet de rendre compte de la dynamique particulière des systèmes de formation, notamment au regard de la transposition didactique.

1.5 Transposition didactique

Brousseau note que le mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés. Il les réorganise, leur donne une forme aussi générale que possible, les met sous une forme communicable, décontextualisée. L'enseignant fait le travail inverse du mathématicien. Il procède à une recontextualisation, à une repersonnalisation du savoir. Il conçoit des situations qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner. Pour faire l'objet d'un enseignement, un savoir donné subit des transformations inévitables. Chevallard (1985) a mis ce phénomène en évidence et lui a donné le nom de «transposition didactique».

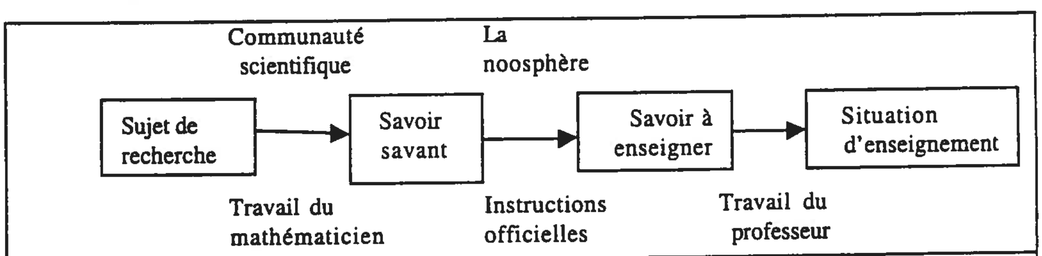


Tableau 3: Chaîne de transposition didactique, Chevallard (1985, p. 39)

Selon lui, «un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le 'travail' qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique» (p. 39). L'équipe de Genève a bien insisté sur le fait important que la chaîne de transposition didactique «objet de savoir - objet à enseigner - objet d'enseignement» ne s'arrête pas à l'objet d'enseignement et qu'elle se poursuive jusqu'à l'élève, comme le montre bien Brun (1992, pp. 1-2), en reprenant les notions de décontextualisation et de recontextualisation du savoir à l'œuvre dans le processus de transposition:

> *En contexte didactique, l'enseignant devra repersonnaliser ce savoir décontextualisé en proposant des activités, des situations qui permettent de rejoindre les connaissances de l'élève et qui donneront du sens à ce savoir. L'élève à son tour devra redécontextualiser et redépersonnaliser ce savoir pour objectiver son propre apprentissage et référer ses connaissances à un savoir, culturellement reconnu. Ce jeu de décontextualisation/ recontextualisation à différents échelons de la chaîne de la transposition didactique, et en différents lieux (laboratoires, commissions de manuels, classe, ...) est essentiel pour comprendre ce qui est en cause dans le processus d'apprentissage.*

2. Analyse épistémologique des IR

Ainsi que nous l'avons évoqué dans la problématique, beaucoup de difficultés éprouvées par les élèves dans le développement des IR émergent des problèmes rencontrés dans la construction des concepts qui les sous-tendent: la compréhension des algorithmes de la multiplication des binômes ou d'élevation au carré des binômes, par exemple, repose sur les notions de commutativité, d'associativité, de distributivité, et bien d'autres. Par exemple, la factorisation de l'expression polynomiale $(7x+2)^2-(5x+2)(7x+2)+2(13x^2-6)$ (i) ne présente pas de complexité apparente supérieure aux calculs usuels proposés aux élèves de 9^e ou 10^e année. Pour factoriser ce polynôme, les élèves sont généralement tentés de choisir, parmi toutes les actions possibles, la mise en facteur de $7x+2$ dans $(7x+2)^2-(5x+2)(7x+2)$, ce qui les conduit à $2x(7x+2)+2(13x^2-6)$ (ii). Cette dernière expression, (ii), leur pose souvent problème: on ne peut ni la factoriser, ni la réduire. L'expression (ii) représente, d'une certaine façon, une rupture du contrat didactique relatif aux factorisations selon lequel le processus de traitement est linéaire et ne peut conduire (sauf erreur de calcul) à une étape où l'élève ne peut ni la factoriser ni la réduire. Cette rupture de contrat amène les élèves à admettre que la résolution les a conduits à une impasse: un développement de l'expression (ii) conduit à $40x^2+4x-12$, qui ne peut être factorisé par les élèves ne connaissant pas le discriminant. C'est, en général, avec de nombreux essais infructueux (développements partiel ou total, mise en facteur de x ...) que les élèves opèrent un retour à l'étape initiale.

Le deuxième point de difficulté qui pose problème est le choix nécessaire, pour factoriser le polynôme donné, du développement d'une sous-expression, ce qui n'est pas dans la «coutume didactique». Le développement, dans (i), de $-(5x + 2)(7x + 2) + 2(13x^2 - 6)$ en $-9x^2 - 24x - 16$, permet de réécrire l'expression initiale (i) en $(7x + 2)^2 - 9x^2 - 24x - 16$, puis en $(7x + 2)^2 - (3x + 4)^2$, qui conduit à la forme factorisée à l'aide d'une IR. Le choix d'une telle situation permet aux élèves d'accéder à une véritable réflexion stratégique, sous couvert de problèmes de factorisation qui, à première vue, ne semblent pas en rupture avec le contrat didactique usuel. Pour factoriser des expressions polynomiales de type (i), les élèves de 9ᵉ année obéissent ainsi à un code implicite de bonne conduite inféré des traitements antérieurs et acquis par habitude. Ainsi, les décisions qu'ils prennent ne sont pas reliées à l'exercice à traiter mais à ce code implicite. On comprend dès lors que Chevallard (1989) ait opposé deux cadres d'enseignement de l'algèbre cognitive: le *cadre formel*, dans lequel on propose aux élèves les premiers exercices de manipulations algébriques tels que développer une IR, factoriser ou simplifier une expression polynomiale. Ce cadre induit chez les élèves des comportements automatiques non guidés par un but et se présentant souvent comme une liste d'itérations à parcourir. Par contre, le *cadre fonctionnel*, lieu d'un véritable apprentissage, suppose des prises de décisions en fonction d'un but et induit la recherche de telle ou telle forme d'expression.

Dans l'enseignement des IR, peu de situations didactiques sont proposées aux élèves qui en infèrent à partir des problèmes rencontrés. De plus, les concepts constitutifs des IR se révèlent mal adaptés pour organiser l'intégration des connaissances. Par exemple, les transformations T_1: $81x^2 - 16 \rightarrow (9x + 4)(9x - 4)$ et T_2: $81 - 16 \rightarrow (9 + 4)(9 - 4)$ sont généralement classées parmi les factorisations puisqu'elles sont engendrées par la même IR. Or leur intérêt didactique est très différent. La première concerne les expressions de degré non nul; elle est intéressante car elle est susceptible de rapprocher d'une forme résolue. Par contre, la seconde ne peut, en aucun cas, être didactiquement pertinente puisque les expressions concernées ne contiennent pas d'indéterminée x.

2.1 Traits sémiques

Les traits sémiques qui nous intéressent ici sont le *degré formel* d'une expression et le *degré de factorisation*.

2.1.1 Degré formel

Le degré formel d'une expression évoque le degré d'un polynôme. Les degrés formels des expressions $5x$ et $7x^2 - 7x^2 + 5x$ sont respectivement 1 et 2, alors que le degré du polynôme $5X$ associé aux deux expressions précédentes est 1. Le degré formel d'une expression polynomiale est égal à 1 pour l'indéterminée, à 0 pour une constante numérique et le paramètre k. Le degré formel d'une somme (respectivement d'un produit) est égal au maximum (respectivement à la somme) des degrés formels des arguments. Ainsi, le degré formel de $x^2 - x^2$ est 2. Le degré formel est souvent utilisé en classe, parfois à l'insu des élèves. En effet, lorsqu'un élève affirme que la transformation $7x^2 - 7x^2 + 5x \rightarrow 5x$ abaisse le degré, il fait référence au degré formel et non au degré du polynôme (les expressions représentent le même polynôme de degré 1). Le degré formel d'une expression permet de discriminer des transformations intéressantes. Par exemple, les transformations $7x^2 - 7x \rightarrow x(7x - 7)$ et $49 - 16 \rightarrow (7 + 4)(7 - 4)$ ne présentent pas le même intérêt didactique, bien qu'étant toutes deux des factorisations dans un certain sens. Seule l'application de la première est susceptible de faire avancer un problème de factorisation, puisqu'elle apporte des facteurs de degrés formels non nuls.

2.1.2 Degré de factorisation

Dans le cas d'un produit, le degré de factorisation est égal au nombre de facteurs de degrés formels non nuls. Ainsi, le degré de factorisation de $5x(7 - 2)(x^2 + 3)$ est 2, car seuls les facteurs x et $x^2 + 3$ ont un degré non nul. Une puissance d'exposant n est considérée comme un produit à n arguments. Dans les autres cas, il est égal à 1 si le degré formel de l'expression est non nul, à 0 sinon. Par exemple, le degré de factorisation de $x^2 + 1$ est 1. Le degré de factorisation permet de caractériser certaines transformations dans un sens que nous qualifions ici de fort. Par exemple, les transformations $900x^2 - 100 \rightarrow 100(9x^2 - 1)$ et $900x^2 - 100 \rightarrow (30x + 10)(30x - 10)$ n'ont pas le même intérêt: la première ne constitue pas à nos yeux une factorisation au sens fort, au contraire de la seconde. Le degré de factorisation permet de cerner cette différence. En effet, le degré de factorisation est identique (égal à 1) pour les deux expressions de la première transformation. Par contre, il augmente strictement (de 1 à 2) entre les expressions de la deuxième transformation que nous qualifions de factorisation au sens fort.

Nous pouvons ainsi dire que le concept de factorisation, tel qu'il est traditionnellement utilisé, est mal adapté. Un concept de factorisation, de nature moins syntaxique, applicable aux monômes de degré non nul serait didactiquement plus pertinent. Son intérêt n'est donc pas celui des développements parmi lesquels on la classe généralement. Un concept de réduction différent, englobant la transformation T, serait plus pertinent d'un point de vue didactique. L'analyse conceptuelle des IR doit donc se préoccuper des aspects cognitifs pour permettre au formé d'analyser le travail de l'élève en situation d'intégration des connaissances, les aides dont celui-ci a besoin pour construire des modèles des IR et les explications pertinentes. Elle doit aussi comprendre des aspects formels et didactiques pour structurer les connaissances sur les IR. Les notions de trait sémique et de concept carré que nous présentons ci-dessous placent ces aspects au centre de la construction des IR.

2.2 Le concept carré

Les élèves (mais aussi les futurs enseignants) sont capables de créer certains indices formels sur les IR à partir des différents problèmes résolus. Par exemple, l'IR $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ est appliquée à l'expression $36x^2 - 49$ à l'aide des indices constitués du nombre de termes de l'expression et des formes carrées $36x^2$ et 49. Kieran (1991) souligne l'importance de ces indices visuels et de traits de surface provenant des notations usuelles des expressions et qui aident les élèves à prendre des décisions syntaxiques pertinentes. À ces traits sémiques s'ajoutent des expressions telles que «produit de la somme par la différence …» et «différence des carrés …». En résolvant des problèmes sur les IR, l'élève organise son travail autour de l'expression de ces IR. Certaines règles de réécriture utilisées dans la résolution de problèmes de factorisation font appel à la notion de carré, comme la règle ® de factorisation $a^2 - b^2 \rightarrow (a + b)(a - b)$ qui provient d'une IR. La plupart du temps, l'élève utilise cette règle dans un *schème de décodage*, c'est-à-dire que pour appliquer cette règle à $36x^2$-49, l'élève doit expliciter les racines carrées de $36x^2$ et de 49. On observe beaucoup plus rarement le *schème productif* qui correspond exactement à la règle $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ et qui permet à certains élèves de réécrire $36x^2 - 49$ en $(\sqrt{36x^2} + \sqrt{49})(\sqrt{36x^2} - \sqrt{49})$, lui-même réécrit en $(6x + 7)(6x - 7)$. Nous nous plaçons ici dans un schème de décodage et nous considérons que le concept de carré est pertinent pour appliquer la règle ®. À un certain niveau de procéduralisation/composition, nous trouvons intéressant de manipuler les carrés, comme le font certains élèves qui appliquent en un pas de calcul cette règle à l'expression $50(x - 8)^2 - 18$ qu'ils réécrivent en $2[5(x - 8) + 3][5(x - 8) + 3]$.

Le concept *carré* se caractérise par les traits *coefficient* et *racine-carrée*. Ces traits peuvent admettre plusieurs valeurs. Par exemple, l'expression $50(x - 8)^2$ appartient au concept carré et les valeurs respectives des traits coefficient et racine-carrée sont d'une part 50 et $(x - 8)$ et, d'autre part, 2 et $5(x - 8)$. Le terme -18 appartient aussi à ce concept et les valeurs respectives des traits *coefficient* et *racine-carrée* sont d'une part -1 et 18 et, d'autre part, -2 et 3. Par contre, $50(x - 8)^3$ et 4x n'appartiennent pas au concept carré. L'application de la même règle à l'expression $50(x - 8)^2 + (x - 9)(x + 3) - 18$ peut utiliser le concept carré. En effet, il suffit de déterminer les arguments additifs de l'expression $50(x - 8)^2 + (x - 9)(x + 3) - 18$ qui appartiennent au concept carré et qui admettent des valeurs de traits coefficient opposées. Seuls les termes $50(x - 8)^2$ et -18 y appartiennent, avec des coefficients respectifs égaux à 2 et -2. Il existe donc des coefficients opposés et l'application de la règle est possible. L'expression obtenue après application est $2[5(x - 8) + 3][5(x - 8) - 3] + (x - 9)(x + 3)$.

En outre, un élève ayant atteint un certain niveau de procéduralisation/composition, peut réécrire $x + x(90x^2 - 40)$ en $x + 10x(3x + 2)(3x - 2)$ à l'aide de la règle ®, en utilisant les égalités des expressions $(90x^2 - 40)$ et $10(9x^2 - 4)$ d'une part et $9x^2 - 4$ et $(3x)^2 - 2^2$, d'autre part. Après application de la règle, c'est l'expression $x + 10x(3x + 2)(3x - 2)$ qui est présentée comme résultat de la réécriture et non $x + x \times 10[(3x + 2)(3x - 2)]$ qui isole le terme réécrit mais qui ne respecte pas les conventions habituelles de notations d'expressions. La réécriture de $x + x(90x^2 - 40)$ en $x + 10x(3x + 2)(3x - 2)$ n'est pas possible directement à l'aide de ladite règle. Nous pouvons ainsi associer le concept *carré* à la transformation $a^2 - b^2 \rightarrow (a + b)(a - b)$. Par exemple, les expressions $90x^2$ et -40 appartiennent au concept de carré avec des valeurs respectives pour leur trait *racine-carrée* de 3x et 2 et une même valeur pour le trait *coefficient* de 10. Les expressions $90x^2$ et -40 sont respectivement équivalentes par transformations élémentaires à $10(3x)^2$ et $(-10)2^2$. Le concept *carré* permet de déterminer l'expression $x + 10x[(3x)^2 - 2^2]$ équivalente à l'expression initiale $x + x(90x^2 - 40)$ et à laquelle la règle ® est applicable.

La signification du concept *carré* ci-dessus développée est masquée lorsque les processus de choix sont occultés, c'est-à-dire lorsque l'enseignant s'attache à faire apprendre exclusivement les systèmes d'affirmations: définitions, règles, procédures, algorithmes, astuces, etc. Nous avons fait le choix de ne pas limiter notre champ d'investigation aux moyens de faire acquérir des notions relatives aux IR se réalisant et se concrétisant par des algorithmes; nous avons choisi de ne pas restreindre les concepts constitutifs des IR au triplet (situation-problème, algorithme, notion), triplet qui, pour beaucoup d'élèves, se réduit au couple (indice, procédé), couple qui se traduit par: «tel indice apparaît alors telle tâche est à faire» ou «j'entrevois tel indice, alors j'applique tel procédé». De façon schématique, de telle réduction occulte en fait les concepts constitutifs des IR. Cette occultation enlève à l'élève tout moyen de régulation et de contrôle du sens.

Une remédiation, une procédure corrective, voire un réapprentissage basé sur une trop grande centration sur la procédure constitue, à notre avis, une approche incomplète et par trop normative. En effet, les opérations et les propriétés sur lesquelles reposent les IR ne sont pas que «stratégie de résolution», «articulation de procédures» ou «algorithme normatif». Une vision partielle de ces dernières néglige systématiquement ce sur quoi elles portent effectivement: les IR elles-mêmes, c'est-à-dire leurs sens. L'élève devrait aborder les opérations sur les IR au départ tant de sa compréhension de l'algorithme à utiliser que de ce qu'il a à traiter dans cet algorithme: l'IR elle-même. Le tout n'aura de sens que contextualisé. Bien sûr, la prise en compte du contexte n'exclut nullement le modèle algébrique généralement mis en avant. Il s'agit de rechercher comment articuler en un processus de construction de sens le traitement algébrique et la représentation géométrique des IR. La difficulté est sans doute d'organiser ce changement de représentation, l'intégration de ces deux modèles, sans qu'il y ait perte de sens pour l'élève. L'apprentissage des IR peut devenir ainsi un processus d'amplification du sens par intégration des connaissancees algébriques et géométriques.

3. Deux concepts du sens: Vergnaud et Brousseau

Parmi les concepts de sens qui nous apparaissent actuellement les plus riches, nous retenons ceux qui ont été développés par Vergnaud et Brousseau, bien que leurs cadres théoriques soient différents. Vergnaud et Brousseau ouvrent de nouvelles voies pour l'intervention didactique, au lieu de céder au *lamento* général de la baisse de niveau et au sentiment d'impuissance qui accompagne l'idée que les élèves sont «bloqués» et démotivés. Si nous ne pouvons amalgamer leurs épistémologies sur le plan des cadres théoriques respectifs, nous pouvons cependant les «convoquer» tous deux pour traiter de la question de sens dans la formation des futurs enseignants. Pour nous, leurs théories gardent alors le statut de référents complémentaires pour éclairer notre vision et orienter notre projet d'ingénierie didactique.

Si la DDM s'intéresse aux divers contenus spécifiques de connaissances, il faut noter qu'elle ne les considère pas comme les seuls éléments en cause dans l'organisation cognitive et didactique du savoir chez l'élève, ce dernier faisant également recours à toute une série de concepts et de procédures de différents types (Vergnaud, 1981b). C'est la raison pour laquelle nous nous inspirons de la théorie des champs conceptuels (TCC), qui nous suggère d'expliquer l'espace de la situation-problème, ce qui élargit le cadre d'analyse des composantes élève-savoir, au-delà du seul objet spécifique d'enseignement considéré dans tel type de problème comme trop étroit ou trop fin pour provoquer à lui seul la genèse des connaissances.

3.1 La question de sens chez Vergnaud

L'idée de base est que les concepts mathématiques sont d'une grande diversité, que leur développement fait corps avec celui de concepts non strictement mathématiques, et que ces ensembles évolutifs de concepts forment des systèmes à tout moment de la construction des objets mathématiques et de leur sens par l'élève. C'est ce qui a conduit Vergnaud à parler de champ conceptuel, préoccupé qu'il est de la question de sens. Ce sont les situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques, mais le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes. Il n'est pas non plus dans les mots et les symboles mathématiques. Pourtant, on dit souvent qu'une représentation symbolique, qu'un mot ou qu'un énoncé mathématique ont du sens, ou plusieurs sens, ou pas de sens pour tels ou tels individus; on dit aussi qu'une situation a du sens ou n'en a pas. Alors - s'interroge Vergnaud (1981a) - qu'est-ce que le sens? Vergnaud définit le sens comme «une relation du sujet aux situations et aux signifiants» (p. 228). Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui construisent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. Le concept de schème est donc central pour tous les registres de l'activité: gestes, raisonnements mathématiques et techniques, interactions sociales et affectives, dialogues et autres productions du sujet. Aussi, Vergnaud s'explique-t-il un peu plus sur ce concept et nous en donne-t-il une définition.

3.1.1 Schème et sens

Vergnaud (1977, p. 53) définit le schème comme «l'organisation invariante de l'action pour une classe donnée de situations». Ce qui est invariant, c'est l'organisation, non l'activité. Cette dernière est flexible et dépend des valeurs des variables de situations, qui sont contingentes pour l'élève, alors que le maître les a choisies intentionnellement, en connaissance de cause. Le schème permet ainsi l'adaptation de l'activité et de la conduite aux différentes valeurs prises par les variables de situation. C'est en cela qu'il constitue une totalité dynamique fonctionnelle, c'est-à-dire un ensemble cohérent d'éléments qui s'impliquent mutuellement et assurent la signification globale de l'acte. C'est ainsi que le schème se distingue d'un simple automatisme, d'un stéréotype ou d'un algorithme. En général, le schème n'est pas un algorithme. Certaines formes d'organisation des activités d'enseignement et d'apprentissage sont effectivement des algorithmes, qui aboutissent, en un nombre fini d'étapes, au traitement de ces situations. «Les algorithmes sont des schèmes, mais tous les schèmes ne sont pas des algorithmes», remarque Vergnaud (2000a, p.22) qui, dans sa comparaison, ajoute que:

> *Beaucoup d'algorithmes perdent leurs caractéristiques, y compris leur propriété d'effectivité: des erreurs et des raccourcis interviennent qui leur enlèvent la propriété d'aboutir à coup sûr. L'incertitude est au rendez-vous des schèmes, pas des algorithmes. Les algorithmes sont effectifs, les schèmes ne sont qu'efficaces, le plus souvent, pas toujours.*

Le schème est une totalité dynamique fonctionnelle; sa fonctionnalité est celle de cette totalité tout entière et non pas de telle ou telle composante seulement. Mais l'analyse des composantes du schème n'en est pas moins essentielle à la théorie, si l'on veut comprendre comment tel schème peut être efficace ou non.

3.1.2 Les composantes du schème

Le schème comprend des composantes: le but, les sous-buts, les règles, invariants opératoires et inférences. L'analyse de ces composantes nous permet de mieux saisir ce qui distingue le schème d'autres concepts qu'on confond éventuellement avec lui (i.e; schéma, script, scénario, frame), lesquels concernent des objets, des situations ou des scènes, mais n'ont pas la fonction spécifique d'engendrer l'activité au fur et à mesure.

3.1.2.1 Le but, les sous-buts, les anticipations

Cette première composante représente dans le schème ce qu'on appelle parfois l'intention, le désir, le besoin, la motivation. Mais aucune de ces idées n'est habituellement intégrée dans l'organisation même du schème, à moins d'assimiler à «intention» l'*Intentio* par lequel Portugais (1999, p. 73) désigne «l'intention didactique du système d'enseignement à l'endroit des objets de savoir et du sens de ces objets de savoir». Comme la représentation est composée de formes d'organisation de l'activité, et pas seulement d'images, de mots et de concepts, Vergnaud intègre but, intention et désir dans le schème lui-même. De la même manière que les schèmes se composent et se décomposent hiérarchiquement, le but se décline en sous-buts et anticipations.

3.1.2.2 Les règles d'action, de prise d'information et de contrôle.

C'est cette composante qui constitue la partie proprement générative du schème, celle qui engendre au fur et à mesure le décours temporel de l'activité; de même que ce sont les règles de l'algorithme qui engendrent la suite des actions conduisant au résultat recherché. Les règles n'engendrent pas que l'action, mais toute l'activité; aussi bien les prises d'information et les contrôles que les actions matérielles elles-mêmes. En outre, les règles n'engendrent pas seulement la conduite observable, mais toute une activité non directement observable, comme les inférences et la recherche en mémoire. Vergnaud constate que, faute de reconnaître ces différents points d'application des règles et des processus de régulation, beaucoup de chercheurs qui en font usage restent finalement proches du behaviorisme. C'est le concept d'invariant opératoire qui permet d'aller plus loin dans l'analyse.

3.1.2.3 Les invariants opératoires: concepts-en-acte et théorèmes-en-acte.

Les invariants opératoires forment la partie la plus directement épistémique du schème, celle qui a pour fonction d'identifier et de reconnaître les objets, leurs propriétés, leurs relations et les transformations que ces objets subissent. La fonction principale des invariants opératoires est de prélever et de sélectionner l'information pertinente et d'en inférer des conséquences utiles pour l'action, le contrôle et la prise d'information subséquente. C'est une fonction de conceptualisation et d'inférence. Vergnaud (2000a) précise que «cette vision des choses s'écarte totalement d'un modèle de type "information puis action": les schèmes gèrent, en effet, de manière entremêlée la suite des actions, des prises d'information pour poursuivre, et des contrôles. L'adaptation se fait au fur et à mesure» (p. 25).

La fonction des invariants opératoires dans l'activité est la même, en principe, que celle du "système de concepts" (deuxième sens évoqué plus haut). Mais la terminologie utilisée ici par Vergnaud est préférable, parce qu'elle ne préjuge pas du caractère explicite ou non, conscient ou non, des connaissances mises en œuvre, et parce que les invariants opératoires ne sont pas seulement des concepts-en-acte, mais aussi des théorèmes-en-acte. Si la pensée est calcul, il faut bien qu'il existe dans son fonctionnement des éléments qui se prêtent à l'inférence, notamment aux anticipations et prédictions, et à la production des règles. Or les concepts, qu'ils soient objets ou prédicats, ne se prêtent pas directement et à eux seuls à l'inférence: ils ne sont pas susceptibles de vérité ou de fausseté, mais seulement de pertinence ou de non-pertinence. Vergnaud (2000a, p. 26) note que «les inférences vont du vrai au vrai, plus exactement de ce qu'on tient pour vrai à ce qu'il est raisonnable de tenir pour vrai. Seules les propositions peuvent être vraies ou fausses». Et il faut donc que des propositions fassent partie intégrante du système de connaissances évoqué ou évocable par une situation pour que le sujet y engage son activité et opère des inférences.

Vergnaud définit un théorème-en-acte comme «une proposition tenue pour vraie dans l'activité». En effet, l'étude du développement des compétences au cours de l'apprentissage ou au cours de l'expérience révèle qu'«un même concept peut, selon l'état de son élaboration, être associé à des théorèmes plus ou moins nombreux et plus ou moins riches» (Ibid., p. 26). En général, le cortège des théorèmes-en-acte susceptibles d'être associés au même concept est très grand, de telle sorte que pour Vergnaud (2000a, p. 26) «il est souvent vide de sens de déclarer que tel sujet a compris tel concept; il faudrait pouvoir préciser dans chaque cas quels théorèmes-en-acte il est capable d'utiliser en situation». Vergnaud nous rappelle que les théorèmes sont des propositions et non des concepts, même s'ils sont bien évidemment constitués de concepts. Les inférences sont des relations entre propositions et sont enchaînées par des métathéorèmes (ou théorèmes d'ordre supérieur) comme les syllogismes aristotéliciens, ou la transitivité des relations d'ordre.

La relation entre théorèmes et concepts est évidemment dialectique, en ce sens qu'il n'y a pas de théorème sans concepts et pas de concept sans théorème. De façon métaphorique, Vergnaud (2000a, pp. 26-27) dit que «les concepts-en-acte sont les briques avec lesquelles les théorèmes-en-acte sont fabriqués, et la seule raison d'existence des concepts-en-acte est de permettre la formation de théorèmes-en-acte, à partir desquels sont rendues possibles l'organisation de l'activité et les inférences». Les théorèmes sont donc constitutifs des concepts, sans quoi ces derniers seraient vides de contenu. Mais un concept-en-acte est toujours constitué de plusieurs théorèmes-en acte, qui ne se forment pas tous en même temps au cours du développement et de l'expérience.

3.1.2.4 Les inférences

Cette dernière composante du schème est un élément indispensable à notre cadre théorique, justement parce que les activités de modélisation et d'intégration des connaissances ne sont jamais automatiques; bien au contraire, elles sont régulées par les adaptations locales, les contrôles de sens, les ajustements progressifs. Les inférences sont présentes dans toutes ces activités, car, comme le remarque Vergnaud (2000a, p. 27), «il n'arrive jamais qu'une action soit déclenchée par une situation-stimulus, puis se déroule ensuite de manière totalement automatique, c'est-à-dire sans contrôle et sans prise nouvelle d'information». Vergnaud n'exclut pas que cela se produise en théorie, mais cela ne peut concerner que des segments d'activité très petits, dont la fonctionnalité ne vient pas d'eux seuls mais des schèmes dont ils sont partie intégrante.

Le caractère adaptable des schèmes est essentiel; cela signifie que, si on veut représenter formellement leur fonctionnement, il faut faire appel à des règles conditionnelles de type «SI... ALORS... ». SI telle variable de situation a telle valeur, et SI telle autre variable de situation a telle valeur…ALORS l'action X, la prise d'information Y, ou le contrôle Z doivent être éffectués. Vergnaud (2000a, p. 27) note que «cette formalisation est, bien sûr, celle du théoricien, pas du sujet lui-même, sauf exception, pour qui les inférences et les règles restent presque toujours implicites, et même souvent inconscientes». Les règles d'action, de prise d'information et de contrôle sont l'incarnation pragmatique des théorèmes-en-acte: elles traduisent principalement le fait que les variables de situation peuvent, en général, prendre plusieurs valeurs, et que les sujets sont en mesure de s'adapter à ces différentes valeurs.

Sans l'identification de ces quatre composantes du schème, on ne peut pas comprendre pleinement la structure de l'activité et sa double caractéristique d'être à la fois systématique et contingente: systématique parce que, dans beaucoup de situations, l'activité est assujettie à des règles univoques. C'est le cas notamment pour les algorithmes (la recherche du plus grand facteur commun pour la factorisation des polynômes ou le calcul du discriminant pour écrire un trinôme sous la forme d'un produit de binômes); contingente parce que les règles engendrent des activités et des conduites différentes selon les cas de figure qui peuvent se présenter, ainsi que nous venons de le voir. Mais cette contingence de l'activité est encore plus visible pour les situations nouvelles, comme celles de modélisation et d'intégration des connaissances, lorsque le sujet ne dispose pas de schème tout prêt dans son répertoire et doit improviser les moyens d'y faire face. Vergnaud (2000a, p. 28) note que «la contingence tourne alors à l'opportunisme, et le sujet fait feu de tout bois en puisant dans ses ressources cognitives, c'est-à-dire dans les schèmes antérieurement formés susceptibles d'ouvrir une voie à la recherche de la solution». Tous ces aspects du schème sont illustrés dans la figure ci-dessous (figure 16).

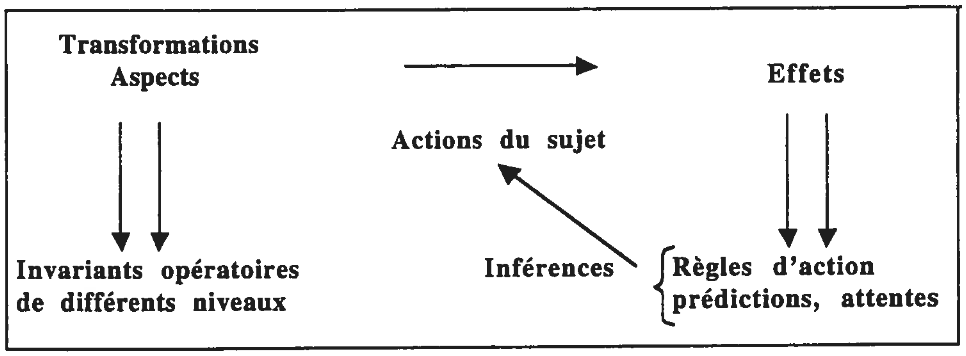


Figure 16: Ce en quoi consiste le schème

L'analyse des schèmes passe inévitablement par l'analyse des conduites en situation, mais le schème n'est pas une conduite, c'est un constituant de la représentation, dont la fonction est d'engendrer la conduite et l'activité. La clarification du concept de représentation nous paraît essentielle pour comprendre le champ conceptuel des structures multiplicatives, en général, et celui des IR, en particulier.

3.1.3 Le concept de représentation, un concept fondamental

Le concept de représentation est fondamental pour la DDM dans l'analyse des connaissances. Peu de concepts sont utilisés avec autant de significations différentes et peu d'auteurs fournissent l'effort de définir le sens qu'ils lui donnent. Le concept de représentation a occupé une grande place en psychologie cognitive, au point d'être entouré d'un certain flou, et il n'est pas inutile d'en repréciser la fonction en didactique où il a également un certain succès. Vergnaud définit les trois sens fréquemment adoptés et utiles à l'analyse; puis il introduit un quatrième sens, celui-ci rarement exposé, qui modifie sensiblement la compréhension des trois premiers, sans pour autant en annuler l'intérêt théorique.

3.1.3.1 Sens 1: le flux de la conscience

Selon Vergnaud, il s'agit du flux dont l'expérience est la preuve la plus directe de l'existence de la représentation comme phénomène psychologique. En effet, tout individu a l'expérience du mouvement quasi-permanent d'images visuelles ainsi que de la succession de ses propres gestes et paroles, effectués ou seulement ébauchés en pensée. Cependant, remarque Vergnaud (2000a, p. 19), il n'est pas capable de les analyser; «mais ce mouvement quasi continu de percepts, d'idées, d'images, de mots et de gestes, plus ou moins intériorisés, témoigne du fait que la représentation fonctionne de manière irrépressible et spontanée en toute occasion». Le flux de la perception fait partie intégrante du flux de la conscience; de même le flux de l'imagination, associée ou non à la perception. Vergnaud souligne qu'un critère simple de l'une et de l'autre est la présence des objets dans un cas, leur absence dans l'autre. Mais il s'empresse de remarquer que «ce critère pourrait laisser entendre que l'imagination ne peut porter que sur des objets correspondant à une perception potentielle toujours possible. Il n'en est rien!».

3.1.3.2 Sens 2: le système de concepts

Il s'agit du système avec lequel nous prélevons l'information dans l'environnement, en vue de conduire notre action et notre activité de la manière la plus pertinente possible. Ce sens est moins évident que le premier, parce qu'il repose sur l'idée que la représentation, y compris la perception, est structurée par des concepts qui permettent de penser des objets de différents niveaux, leurs propriétés, leurs relations, leurs transformations. Le mot "concept" est pris ici dans un sens large, puisqu'il désigne des constituants de nature diverse, qui peuvent rester totalement implicites, alors que le mot "concept" est normalement réservé à des objets de pensée explicites, aussi bien définis que possible.

3.1.3.3 Sens 3: les signes et symboles

Sans signes et symboles, la représentation conceptuelle et l'expérience ne peuvent pas être communiquées. En outre, le travail de la pensée est souvent accompagné, voire piloté, par des formes langagières et des manipulations de symboles. En effet, souligne Vergnaud (2000a, p. 20). «les notations algébriques ne sont pas les mathématiques, mais elles jouent un grand rôle dans la conceptualisation et le raisonnement mathématiques; le langage n'est pas la pensée, mais que serait la pensée sans le langage?». La distinction entre conceptualisation et symbolisation est essentielle au plan théorique; on ne peut donc pas confondre les sens 2 et 3 du mot «représentation», quel que soit par ailleurs le rôle des signes et des symboles dans la conceptualisation.

3.1.3.4 Sens 4: la représentation comme activité et comme ensemble de schèmes

A côté des trois sens que nous venons de mentionner, Vergnaud a analysé un quatrième sens, celui de la représentation comme activité fonctionnelle: la représentation est, en effet, un processus dynamique, ou mieux encore un ensemble de processus dynamiques. Vergnaud (2000a, p. 20) précise que «la fonctionnalité de la représentation vient de deux raisons complémentaires: elle permet la simulation du réel, et donc l'anticipation; elle organise l'action, la conduite, et plus généralement l'activité, tout en étant elle-même le produit de l'action et de l'activité». Ce quatrième sens modifie la portée théorique des trois premières acceptions évoquées ci-dessus. En effet, le flux de la conscience est une activité qui peut, elle-même, être considérée comme organisée par des schèmes, avec leur double caractéristique d'être opportunistes et systématiques; il revient au système de concepts d'être placé au centre de l'organisation de l'activité. Enfin, les activités langagières et symboliques sont elles-mêmes gérées par des schèmes de dialogue et d'énonciation.

3.1.4 Du champ conceptuel des structures multiplicatives à celui des IR

La présente recherche s'intéresse particulièrement à la théorie des champs conceptuels (TCC) pour approfondir la question du sens des IR à partir de celle des situations multiplicatives. L'avantage de cette approche par les situations est de permettre de générer une classification reposant sur l'analyse des tâches cognitives et des procédures pouvant être mises en jeu dans chacune d'entre elles. Le concept de situation n'a pas ici le sens de situation didactique, mais plutôt celui de tâche, l'idée étant que toute situation complexe peut être analysée comme une combinaison de tâches dont il est important de connaître la nature et la difficulté propres. Certes, la difficulté d'une tâche n'est ni la somme ni le produit de la difficulté des différentes sous-tâches; mais, comme l'affirme clairement Vergnaud, l'échec dans une sous-tâche entraîne l'échec global.

Pour cette analyse, certains chercheurs privilégient des modèles de la complexité relevant soit de la linguistique, soit des théories du traitement de l'information. Au contraire, la TCC privilégie les modèles qui donnent un rôle essentiel aux concepts mathématiques eux-mêmes. Certes, la forme des énoncés et le nombre d'éléments mis en jeu sont des facteurs pertinents de la complexité, mais leur rôle est subordonné. La logique n'est non plus un cadre suffisamment opératoire pour rendre compte de la complexité relative des tâches et sous-tâches, des procédures, des représentations symboliques. Vergnaud pense qu'elle est trop réductrice et qu'elle met sur le même plan des objets mathématiques qui, tout en ayant éventuellement le même statut logique (prédicat du premier ordre, classe de fonctions propositionnelles, loi de composition, etc.), ne soulèvent pas les mêmes problèmes de conceptualisation.

Dans le cas des situations multiplicatives, nous nous référons à «l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations». Vergnaud (1981a) identifie trois formes de relations dans les problèmes de type multiplicatif. La première forme met en évidence l'isomorphisme des mesures; la seconde traite du produit des mesures; la troisième s'attache aux proportions multiples. Ces relations se caractérisent par une multiplication ou une division; elles proposent des calculs qui portent sur quatre ou trois éléments, selon l'une ou l'autre des formes adoptées. Rechercher, par exemple, le temps qu'il faut mettre pour parcourir 860 km sur l'autoroute sachant qu'on a parcouru 245 km en 2 heures et 5 minutes (et en faisant l'hypothèse que la vitesse moyenne restera la même), relève de plusieurs raisonnements possibles. On peut, en effet, chercher le coefficient constant qui fait passer de la durée du parcours à la distance parcourue, puis le coefficient inverse, et appliquer le second à 860 km; on peut aussi utiliser le produit en croix; on peut également calculer la distance parcourue en une heure et diviser 860 par cette distance; on peut encore diviser 860 par 245 pour trouver le nombre de fois qu'il faudra rouler 2 heures et 5 minutes; on peut autrememt observer que 2 heures et 5 minutes c'est 125 minutes et que 125 c'est la moitié de 250, proche de 245, ce qui se traduit par une vitesse de 2 km par minute; tout comme on peut considérer que 245 + 245 + 245 ça fait 735 et que les 125 km restants pour atteindre le nombre 860, c'est à peu près la moitié de 245.

Ces différentes manières de raisonner résultent de la mise en œuvre de schèmes distincts concernant la proportionnalité et l'approximation, qui mettent différemment en jeu les propriétés de la linéarité (isomorphisme, additivité, multiplication par un scalaire), ainsi que celles des coefficients de proportionnalité, et des quotients de dimension qu'ils représentent: vitesse exprimée en kilomètres à l'heure, en kilomètres par minute, et inverse de la vitesse. Vergnaud rapporte que ces schèmes sont inégalement disponibles chez les élèves. Le plus souvent, plusieurs de ces schèmes coexistent, dont l'utilisation dépend de leur plus ou moins grande pertinence par rapport aux variables de situation. L'orientation vers telle ou telle manière de procéder est elle-même pilotée par un schème qui évalue la faisabilité plus ou moins aisée de chaque procédure disponible par rapport à la situation particulière rencontrée.

Il existe donc, au-delà des compositions numériques telles que la multiplication, la division ou la règle de trois simple ou composée, des compositions qui portent également sur les dimensions. Du point de vue numérique, nous pouvons dire qu'il y a similitude entre la troisième forme et la forme précédente. Nous ne pouvons cependant les confondre, car certains problèmes qui impliquent des proportions n'ont pas toujours un coefficient égal à 1. Ainsi, comme le fait remarquer Vergnaud dans quelques exemples, nous ne pouvons logiquement affirmer qu'une vache donne un litre de lait par jour, ou qu'une personne mange un kilogramme de riz par jour. Dans de telles situations, le concept de moyenne est implicite, de même qu'est rendue nécessaire la référence au contexte du problème.

Le champ conceptuel des structures multiplicatives, comme le montre l'analyse qui précède, est vaste. Aussi, notre étude s'intéresse-t-elle plus spécifiquement aux situations de produit de types «produit d'une somme (respectivement d'une différence) par elle-même» ou «produit de la somme de deux nombres par leur différence». Notre étude cherche à explorer comment les futurs enseignants peuvent aider les collégiens de 9^{e} ou 10^{e} année à mieux comprendre et construire les relations multiplicatives de la forme $(a \pm b)(a \pm b)$ qu'impliquent non seulement l'application d'un opérateur scalaire mais aussi l'utilisation de tuiles algébriques et de formes géométriques. Nous pensons ainsi que pour identifier la structure des IR dans plusieurs cadres (algébrique, numérique et géométrique), l'élève doit être en mesure de multiplier «géométriquement» les quantités impliquées dans ces problèmes. Ainsi, la solution de $(a \pm b)(a \pm b)$ est accessible à l'élève qui peut déterminer géométriquement le produit de 34×25. En effet, ce traitement géométrique aide l'élève à comprendre comment la multiplication 34×25 est effectuée en plusieurs étapes comme le montre la figure 2 ci-dessus (cf. Problématique, p. 26).

Dans cette démarche, non seulement les connaissances sur l'écriture positionnelle des nombres sont exploitées à bon escient dans la décomposition des nombres 34 et 25, mais aussi la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition contrôle les écritures successives des produits réalisés et la somme de ces produits. Dans cette optique d'intégration des connaissances, la technique usuelle apparaît une façon économique de rendre compte de l'ensemble de ces traitements. Dans cette optique, la maîtrise des multiplications se vérifie autant par la flexibilité des élèves à utiliser les nombres dans différents contextes que les types de justifications qu'ils fournissent, ou par leur capacité d'imaginer de nouvelles procédures. L'intégration des connaissances est justifiée par le souci de provoquer chez les élèves une recherche de sens personnel dans l'activité de modélisation à laquelle ils participent, souci sans lequel l'enseignant ne peut prétendre développer la compréhension en mathématiques.

3.1.5 La complexité de l'enseignement et les difficultés d'apprentissage des structures multiplicatives, des IR en particulier.

L'analyse des situations multiplicatives montre que la complexité liée à leur traitement dépend des calculs algébriques en cause, de facteurs autres qui sont reliés à la structure et à la formulation des problèmes, ainsi que des représentations auxquelles ces situations donnent lieu. La maîtrise des problèmes multiplicatifs en général, des IR en particulier, n'est pas simple pour les élèves. Leur enseignement n'est pas non plus exempt d'écueils pour l'enseignant, compte tenu des exigences épistémologiques liées à leur présentation en classe. En convenant des difficultés particulières inhérentes aux apprentissages et à l'enseignement des problèmes multiplicatifs, des IR en particulier, nous devons nous préoccuper de celles que pose le passage des structures additives aux structures multiplicatives. La déstabilisation peut être très forte; Vergnaud (2000b) trouve que «la didactique des mathématiques est friande de telles déstabilisations, et cherche les moyens de permettre aux élèves de franchir le cap» (p, 6). On connaît des déstabilisations analogues dans l'histoire des mathématiques, par exemple avec la lente reconnaissance des nombres négatifs. Ainsi que le souligne Vergnaud, cette transition pose de nombreuses difficultés dont nous ne pouvons ignorer l'ampleur.

3.1.6 La TCC, théorie de la conceptualisation

La TCC comble d'abord un vide en proposant une véritable théorie de la conceptualisation et des apprentissages complexes. En effet, rapporte Vergnaud (2000b, p. 6), «dans le processus de conceptualisation progressive des structures additives, on peut parfois s'en sortir localement par des glissements de sens et par la formation de concepts dérivés des concepts antérieurement formés: filiation donc! Mais on peut aussi se trouver dans l'impossibilité d'opérer de tels glissements de sens: rupture donc!». L'un des objectifs de la TCC est justement de proposer un cadre pour étudier des filiations et des ruptures entre diverses connaissances, dans notre cas entre connaissances algébriques et géométriques. Son objet est d'étudier «les filiations et les ruptures» entre connaissances; mais cette étude est toujours faite du point de vue des concepts mathématiques. Cette liaison est maintenue grâce aux «schèmes». Étudier leurs filiations et leurs ruptures conduit alors à prendre nécessairement en compte non plus des concepts isolés, mais des «champs conceptuels». La DDM affirme la nécessité d'une prise de position épistémologique concernant le rapport du sujet connaissant à l'objet de connaissance, en adoptant une position constructiviste et interactioniste dans le sillage de l'épistémologie génétique. Vergnaud (1977, p. 53) résume ainsi la position interactioniste: «L'activité en situation est, pour une majorité croissante de psychologues, à la fois la source et le critère de la pensée conceptuelle. Le langage joue, bien entendu, un rôle fondamental, (...) mais il ne construit pas, aux yeux des psychologues, le critère le plus décisif. Le critère le plus décisif reste l'action en situation».

En s'attaquant à la question des contenus d'enseignement à l'intérieur d'une psychologie du développement cognitif, Vergnaud (1985, p. 251) renouvelle cette question de la manière suivante: «La psychologie cognitive est confrontée au double problème de tenir compte au plus près des savoirs sociaux constitués (...) et en même temps de ne pas rester prisonnière de leur description actuelle, de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances des sujets individuels». Ceci traduit la double et forte exigence de tout travail sur le cognitif en didactique, travail qui demande que soit réinterrogée la description des savoirs constitués. Il s'agit là d'une démarche nouvelle pour le psychologue, habitué soit à se référer à des modèles généraux et à ne pas entrer dans les savoirs constitués, soit à admettre par avance la description qui en est donnée au moment où il s'y réfère. La première exigence - tenir compte des savoirs constitués - marque la première différence avec le point de vue piagétien qui réorganisait les connaissances dans les structures logico-mathématiques générales. Vergnaud (1991, p. 147) répond à cette exigence en élaborant la TCC: «Par rapport à une psychologie cognitive centrée sur les structures logiques comme celle de Piaget, la TCC apparaît plutôt comme une psychologie des concepts, même lorsque le terme "structures" intervient dans la désignation même du champ conceptuel considéré: strucures additives, structures multiplicatives».

Ainsi, si la première entrée d'un champ conceptuel est celle des situations, nous pouvons aussi identifier avec Vergnaud une deuxième entrée, celle des concepts et théorèmes. Portugais et Brun (1998) y voient un point important qui marque une étape décisive dans la façon d'envisager les rapports entre la psychologie du développement cognitif et la DDM. La seconde exigence demande que l'on considère sérieusement chez les sujets individuels une organisation des connaissances qui ne se laisse pas enfermer dans les descriptions des savoirs et qui, en plus, tient compte des activités en cours du sujet connaissant dans des situations. Rappelons que pour Vergnaud l'action en situation est la source de la formation des concepts.

3.1.7 Deux entrées pour un champ conceptuel

Un champ conceptuel s'explique par deux entrées: l'entrée par les concepts et les théorèmes d'une part, l'entrée par les situations d'autre part. À ce niveau d'analyse, «situation» est pris au sens large de «situation-problème» et non de situation didactique. Ainsi, pour Vergnaud, le lien entre «situation» et «concept» a pour corollaire que l'on fasse des découpages originaux et assez grands dans le savoir, en tenant compte du fait qu'un concept ne prend pas sa signification dans une seule classe de situations et qu'une situation ne s'analyse pas à l'aide d'un seul concept. La recherche est alors engagée sur la voie des «filiations et des ruptures» entre les connaissances demandées par la transformation des situations sur le long terme. L'unité de base de cette architecture de filiations et de ruptures est le schème, qui organise et donne du sens à la fois aux actions, aux situations et aux représentations symboliques qui les accompagnent. Les schèmes sont des organisations, produit de l'activité cognitive, et des organisateurs, instruments d'assimilation. La TCC valorise ces deux caractères du schème.

Nous pouvons ainsi comprendre le mouvement réciproque de transformation des situations et de transformation des connaissances en rapport avec les concepts. Cette démarche de recherche montre sa grande fécondité par l'intermédiaire du travail de classification des situations, des problèmes, des procédures et des représentations, travail qui constitue l'un des acquis majeurs de la recherche en DDM. Dans cette classification des situations, résultant à la fois de considérations mathématiques et de considérations psychologiques, Vergnaud (1991, p. 156) note que

> *certaines distinctions ne sont intéressantes que parce qu'elles entraînent des différences significatives dans la manière dont les élèves s'y prennent pour traiter les situations ainsi différenciées ...[et que] si l'on s'en tenait aux mathématiques constituées, on négligerait des distinctions qui sont importantes pour la didactique. Pourtant une classification qui n'aurait pas de sens mathématique serait irrecevable.*

Cependant, à propos des situations didactiques cette fois, la thèse sous-jascente à la TCC que soutient Vergnaud (1991, p. 157) est qu'«une bonne mise en scène didactique s'appuie nécessairement sur la connaissance de la difficulté relative des tâches scolaires, des obstacles habituellement rencontrés, du répertoire des procédures disponibles et des représentations possibles». Dans cette architecture cognitive, le concept de représentation est également important. Dans les situations de résolution de problèmes sur les IR cette fois, la représentation met en fonctionnement les connaissances en rapport avec une situation précise; elle sert à choisir et à évoquer les schèmes utiles pour atteindre le but fixé et pour engager les démarches à entreprendre; elle travaille alors comme intermédiaire entre schèmes et situation pour en préciser les significations (Brun et Conne, 1990).

Les champs conceptuels, leur organisation sur une échelle temporelle longue aussi bien que leur formation à travers des séquences de situations, constituent des acquis décisifs en réponse à la question de la place des contenus mathématiques dans l'architecture cognitive. Ils donnent de surcroît aux enseignants des outils pour se représenter ces contenus et agir en termes adaptés à la formation des concepts chez les élèves. La démarche qui produit ces résultats est systématique, et il est bon de la rappeler à la suite de Vergnaud (1990): analyser et classer la variété des situations dans chaque champ conceptuel; décrire avec précision la variété des conduites, des procédures et des raisonnements des élèves face à chaque situation; analyser les compétences mathématiques comme organisées en schèmes et identifier les invariants qui constituent ces schèmes, ceci en relation avec les invariants des situations; analyser comment le langage et d'autres activités symboliques prennent place dans de tels schèmes, comment ils aident les élèves, comment les enseignants les utilisent; suivre la transformation des invariants implicites (connaissances et théorèmes-en-acte) dans des objets mathématiques bien identifiés.

3.2 Le sens, préoccupation première chez Brousseau

Conne (1993, p. 208) note que dans les études en didactique, «dès que le chercheur veut assumer, en même temps que ses expériences, la responsabilité d'un enseignement effectif, la préoccupation du sens devient première». C'est le cas de Brousseau dont la théorie des situations didactiques constitue la clef de compréhension des systèmes didactiques. Aussi, allons-nous le citer presque *in extenso*:

3.2.1 Situation didactique, situation adidactique

> *Dans la conception la plus générale de l'enseignement, le savoir est une association entre les bonnes questions et les bonnes réponses. L'enseignant pose un problème que l'élève doit répondre: si l'élève répond, il montre par là qu'il sait, sinon se manifeste un besoin de savoir qui appelle une information, un enseignement.*
>
> *[...] L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage. ...*
>
> *[...] La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées par un choix judicieux des «problèmes» qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. [...] L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle, mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi, car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en oeuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation adidactique. Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale.*

> *[...] Le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela, il communique ou s'abstient de communiquer, selon les cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, des heuristiques, etc. L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation plus vaste est la situation didactique. ...*
>
> *[...] Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. Mais l'évolution de la situation modifie le contrat qui permet alors l'obtention de situations nouvelles.*
>
> *Le contrat didactique n'est pas un contrat pédagogique général. Il dépend étroitement des connaissances en jeu. Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation adidactique, correcte; l'apprentissage est une adaptation à cette situation. Nous verrons plus loin que l'on peut concevoir ces situations comme des jeux formels et que cette conception favorise la compréhension et la maîtrise de situations d'enseignement (Brousseau, 1986a, pp. 48-50).*

Analysons cette citation de plus près.

3.2.1.1 La situation didactique pour une compréhension du système didactique

La théorie des situations didactiques élaborée par Brousseau (1980, 1986, 1999) au cours des 20 dernières années s'impose comme paradigme de référence pour analyser la dynamique mise en jeu dans l'apprentissage, en fonction de la double perspective constructiviste et systémique qu'elle endosse pour expliquer la construction des connaissances en mathématiques. Brousseau (1986b, p. 34) définit ses objets d'études comme étant «la description et l'explication des activités liées à la communication des savoirs et les transformations, intentionnelles ou non, des protagonistes de cette communication, ainsi que les transformations du savoir lui-même». En plus de ces activités liées à la communication des savoirs, ce sont les phénomènes spécifiques que ces activités produisent, comme les effets de contrat, qui deviennent objet d'étude. Ces phénomènes didactiques restent inexpliqués par les disciplines auxquelles on fait d'ordinaire appel pour répondre aux questions posées par l'enseignant. Pour expliquer ces phénomènes, la démarche habituelle est inversée. En effet, remarque Brun (1996, p. 11), «au lieu d'envisager successivement et séparément les activités de l'enseignant, de l'enseigné, et le savoir, on prend comme objet d'étude le système formé par ces trois éléments, appelé "système didactique", en considérant les jeux qui s'y jouent». Le concept de «situation» devient alors nécessaire pour expliquer comment il en est ainsi.

La théorie des situations constitue la clef de compréhension des systèmes didactiques. En effet, nombre d'analyses butent sur le fait qu'elles ne décomposent le système qu'en reprenant chacun de ses éléments; elles étudient alors respectivement les élèves, les savoirs, parfois les enseignants. Elles peinent ensuite à reconstituer le système, ne pouvant envisager que certaines relations partielles comme, par exemple, l'échange entre l'enseignant et l'élève, mais alors les savoirs deviennent de simples messages, ou bien comme l'interaction entre l'élève et la tâche, mais ce sont les intentions didactiques qui deviennent alors absentes. Brousseau nous propose une modélisation en montrant comment l'analyse du fonctionnement des systèmes didactiques peut finalement surmonter ces difficultés. Il étudie non plus chaque élément du système, mais différents types de «situations», que sont les situations d'action, de formulation, de validation, puis d'institutionnalisation. Organisées en un processus, ces situations sont à même de rendre compte des fonctionnements des systèmes didactiques.

3.2.1.2 La théorie des situations, modèle théorique et grille de comportements

En raison de l'importance des situations au sein desquelles se produit l'échange didactique, la théorie des situations se propose comme un répertoire permettant de témoigner des comportements didactiques des enseignants lors des situations d'apprentissage. Si les situations didactiques reflètent les rapports entre un élève ou un groupe d'élèves et le milieu éducatif en vue de l'appropriation du savoir (Brousseau, 1986a), nous pouvons dire que cette théorie constitue à la fois un modèle théorique qui ordonne les rapports que l'élève développe avec le savoir, et une grille des comportements qui rend compte de l'investissement didactique des enseignants. En tant que modèle théorique, cette théorie suggère, d'une part, une hiérarchisation qui fixe essentiellement quatre étapes (correspondant aux situations d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation) pour rendre compte des différents états ou niveaux de l'apprentissage chez l'élève. D'autre part, en tant que grille des comportements ou des pratiques d'enseignement, cette théorie s'inscrit comme un modèle de gestion didactique susceptible de traduire les intentions et les actions de l'enseignant au regard des différentes conduites que l'élève adopte par rapport au savoir.

Il ne s'agit pas d'un modèle d'enseignement qui s'emploierait à manipuler les actions, les communications, les réflexions ou encore les résultats produits par l'élève. C'est l'élève lui-même qui peut prendre en charge les activités proposées et les problèmes posés et construire progressivement le sens de ses connaissances. «Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement». Toutefois, cette liberté de l'élève ne doit pas être perçue comme une entreprise hasardeuse et solitaire, voire anarchique ou débridée, pas plus qu'elle ne dispense l'enseignant des responsabilités liées au contrat didactique. Nous devons même parler, pour ce dernier, d'une réelle prise en main des différentes situations en vue de planifier et de gérer les comportements didactiques susceptibles d'infléchir la trajectoire d'apprentissage de l'élève.

Si le rôle de l'enseignant est de conduire progressivement l'élève vers la construction de ses savoirs en en créant les meilleures conditions et, au terme, de les reconnaître comme tels, l'épineux problème didactique réside essentiellement dans la conception, la réalisation et l'analyse des activités adéquates et adaptées lors des différentes étapes que traverse l'élève, activités qui feront évoluer les conceptions de ce dernier. Ces activités ne sont cependant pas exemptes de chocs ou de conflits pour l'élève; bien au contraire, elles jouent souvent le rôle de provocations de nature à dévoiler bon nombre d'obstacles épistémologiques et à permettre les dépassements cognitifs nécessaires.

3.2.1.3 La situation didactique et l'apprentissage des savoirs sur les IR

L'exigence impérative de comprendre les organisations de connaissances des sujets du point de vue des contenus de savoirs sur les IR est donc réalisée par la TCC, qui cherche les filiations entre schèmes et concepts solidaires des situations de modélisation. Dans cette démarche, les savoirs sur les IR sont pris comme modèles pour comprendre et décrire ces organisations en fonctionnement. Ils restent tacites dans les processus cognitifs à l'œuvre sur les situations de modélisation. L'activité de modélisation peut revêtir trois formes possibles, selon qu'il est question pour l'élève de lire le modèle d'une IR, de le modifier ou de le constuire lui-même. Toutes ces situations (de lecture, de modification ou de construction de modèles) peuvent être considérées comme des situations d'apprentissage, à différents degrés, en fonction précisément du degré de nouveauté qu'elles présentent pour l'élève, du point de vue des connaissances en jeu, des types de modèles à comprendre ou à produire, des types d'activités requises, des contraintes à respecter.

Les situations de modélisation peuvent différer entre elles selon le mode de lecture auquel sont soumises les images proposées, compte tenu de la question posée. Ainsi, la tâche peut exiger de lire l'image selon trois modes différents. En mode "analyse", l'image contient en elle-même les informations nécessaires; il est donc surtout demandé à l'élève d'accomplir sur l'image graphique un travail d'observation et de recueil de données. En mode "raisonnement", la tâche exige de développer la pensée bien au-delà de ce que contient l'image et de recourir à d'autres connaissances, par exemple, compléter un carré en complétant une figure délibérément incomplète. En mode "évaluation", les caractéristiques de l'image sont à rapporter à des valeurs de référence, d'ordre théorique ou pratique; il est demandé à l'élève, en fonction d'un ou de plusieurs critères, de porter un jugement sur les modèles qui lui sont présentés, ou encore d'en construire qui correspondent à ces critères.

Ainsi, loin d'écarter le cognitif, Brun nous invite à approfondir et à compléter les niveaux d'analyse où il peut intervenir. Le premier niveau où se trame ce relais entre connaissance et savoir a été finement analysé par Conne (1992); c'est celui qu'il appelle «l'échange didactique». Au niveau de cet échange, «vouloir traiter les théorèmes-en-acte comme des savoirs paraît plutôt problématique» à Conne (p. 236). Brun pense qu'en ne traitant pas cette question comme problématique, on peut être conduit à se satisfaire des actions des élèves et attribuer d'office à ces derniers des savoirs qu'on a reconnus dans leurs actions selon des «effets Jourdain» décrits par Brousseau. Les élèves feraient des mathématiques sans le savoir, comme Monsieur Jourdain de la prose.

3.2.1.4 Expériences, théorie, schéma

Ainsi, dans toute sa démarche, Brousseau entend partir du plan expérimental pour réaliser ce qu'il appelle des apprentissages par adaptation. Le moyen de cette réalisation est la mise en œuvre de situations conçues théoriquement comme des jeux formels. En pratique, c'est-à-dire sur le plan expérimental, les jeux formels devraient permettre d'inscrire l'autonomie des élèves dans la finalité didactique (faire apprendre tel savoir défini d'avance). En ceci, Brousseau prolonge et renouvelle les propositions de la pédagogie institutionnelle pour laquelle il s'agissait de créer une institution garantissant à l'élève et au groupe-classe la maîtrise de leurs décisions. Constatant les multiples échecs à l'établissement de méthodes d'enseignement fiables et reproductibles, le didacticien a modifié ses priorités; il fait le pari de la constitution de la DDM comme discipline scientifique, et non plus comme doctrine empirique. Sur le plan théorique, son ambition est d'appréhender les phénomènes de nature didactique et de les comprendre. Il est donc «conduit à s'occuper de diverses questions reliées de près ou de loin à leur ancrage scientifique, celui de décrire et de théoriser les phénomènes propres à l'enseignement des mathématiques» (Portugais, 1995, p. 5).

Il s'agit là d'une entreprise théorisante fructueuse puisqu'elle a permis d'élaborer un schéma fondamental de la DDM: la dualité «situation didactique/situation adidactique». La notion piagétienne de situation réfère à un modèle emprunté à l'épistémologie génétique qui est, en quelque sorte, la situation du sujet épistémique. Puisque cette notion ne suffit pas et ne convient pas à décrire la réalité didactique, Brousseau a élaboré un modèle plus complexe, dédoublé, pour décrire l'agencement du didactique et de l'adidactique. Mais cela n'a pas été sans difficultés, difficultés que Brousseau a lui-même décrites sous l'identité des «paradoxes du contrat didactique». Au centre de la théorie de Brousseau se trouve le schéma de l'apprentissage par adaptation. De tels apprentissages sont expérimentés par divers groupes de chercheurs. La connaissance qui en est visée n'est pas prise comme un terme, mais comme un schéma, et la situation adidactique qui lui correspond. Mais les résultats d'analyse ne suffisent pas à établir un modèle par réalisation, c'est-à-dire un modèle qui retraduit le schéma en recourant à des éléments réels (effectifs ou évoqués). La métaphore utilisée par Brousseau consiste à placer son schéma d'apprentissage face à des schémas plus classiques. En illustrant ses modèles par réalisation de schémas il les caricature; il les schématise. Or cette schématisation procède de la question de sens dont nous nous préoccupons dans cette recherche.

Nous trouvons que le modèle proposé par Brousseau est relativement économique, en tant que noyau adidactique, sur lequel vient se greffer une «gestion» didactique. Le langage par lequel il nous présente ses modèles est métaphorique. Brousseau évoque des images de l'enseignement ordinaire ou classique. Ce sont les matériaux du modèle (c'est un modèle et non pas un schéma, car il réfère à une signification externe). Ceci doit nous rendre prudent quant à la compréhension, à l'analyse et à l'emploi de son modèle. Tout en empruntant des matériaux à ce modèle, nous devrons puiser dans un stock d'images tirées de l'expérience guinéenne.

Qu'en est-il de l'expression relevée dans la citation plus haut: «[...] une situation adidactique, correcte»? Brousseau veut-il dire qu'il existe des situations adidactiques incorrectes? Si c'est le cas, devons-nous y voir un non-sens? En Guinée, c'est effectivement ce dont témoigne la pratique courante à l'école. Nous pouvons donc courir le risque d'incorrection. Et l'une des questions que nous nous posons est de savoir ce qui se passerait si, sans nous en rendre compte, nous partions d'une situation adidactique incorrecte. Allons-nous nous trouver empêtré dans les deux dimensions, adidactique et didactique, de la situation? Devons-nous voir dans cette éventualité un non-sens? Une autre interprétation que nous pouvons donner de cette expression est que Brousseau est probablement parti d'un constat implicite: nous ne disposons pas, pour enseigner les IR, de méthode générale pour construire des situations adidactiques fondamentales. D'un point de vue méthodologique, il faut que l'échec de l'expérience soit envisageable a priori. Comment définir ceci (échec ou réussite de l'expérience) dans les termes du modèle proposé par Brousseau? Ceci nous amène à reprendre la citation plus haut pour aborder le second aspect du langage adopté dans cette théorisation.

3.2.2 L'épistémologie, comme sens, et l'échange didactique

La métaphore choisie par Brousseau consiste à situer son schéma d'apprentissage face à des schémas plus classiques, en les illustrant par l'évocation d'images courantes (caricatures). Le sens intervient à un premier niveau, celui de l'échange didactique. Voici une nouvelle citation du même article: «L'enseignant doit obtenir que l'élève résolve les problèmes qu'il lui propose afin de constater et de pouvoir faire constater qu'il a accompli sa propre tâche» (Brousseau, 1986a, p. 66). De là, le modèle de l'apprentissage par adaptation est opposé à d'autres modèles théoriques présentés comme plus traditionnels. Ces schémas sont didactiques et leur cadre directeur est, dans notre cas, la volonté d'enseigner les IR et l'obligation partagée entre l'enseignant et l'élève d'attester et de fournir des éléments de preuve de l'apprentissage effectif de ces identités.

3.2.2.1 De l'échange didactique

De façon toujours schématique, Brousseau présente l'échange didactique à propos d'un savoir donné comme consistant à faire correspondre une série de questions (à poser par l'enseignant) et de réponses (à fournir par l'élève), «contrat didactique oblige!». À chaque savoir (signifié) correspond donc deux couples (signifiants) de bonnes questions (Q) et de bonnes réponses (R). Le sens s'établit avec cette correspondance. Ce schéma permet de décrire certains phénomènes didactiques qui relèvent de la transposition didactique (les fameux effets Topaze, Jourdain, etc.). Il permet aussi d'ordonner différents modèles didactiques selon les moyens mis en œuvre pour établir ce lien entre savoir et couples Q/R. Brousseau présente ainsi une graduation selon que l'on fait appel à un processus interne chez l'élève, selon que l'on fait appel à une adaptation spontanée de l'élève (modèle piagétien), ou encore selon que l'on y articule le jeu de l'enseignant (modèle didactique). C'est celui-ci que Brousseau nomme modèle d'apprentissage par adaptation.

3.2.2.2 Autres problèmes liés à l'échange didactique

Un autre problème lié à l'échange didactique tient au fait que le levier de l'explicitation est la verbalisation par l'élève de ses connaissances-en-acte. Or, il ne suffit pas d'interroger l'élève pour qu'il puisse expliciter le modèle implicite qui a guidé son action. Nous connaissons également les effets de contrat qui accompagnent cette verbalisation lorsqu'elle prend la forme d'un dialogue entre l'enseignant et l'élève. Cette remarque ne remet nullement en question l'intérêt de la verbalisation; c'est plutôt son organisation didactique qui est à réfléchir. Le rôle de transformer les connaissances-en-acte en objets de connaissance ou savoirs est également dévolu à un hypothétique processus d'abstraction, à la manière de

Dienes: de la manipulation concrète on passerait directement à la représentation des actions, ce qui laisse supposer que le relais entre connaissances-en-acte et connaissance objective va de soi, que leur jonction est immédiate, et que les connaissances-en-acte se transforment comme naturellement en savoirs. Comme le note Brun, ce serait sous-estimer le travail spécifique de ces connaissances-en-acte qui structurent les savoirs enseignés, travail long et nécessaire.

Conne insiste également sur ce point en posant bien les connaissances comme non réductibles aux savoirs. Si des connaissances implicites structurent donc bien les savoirs, la question du relais des unes aux autres reste posée; c'est le problème de l'objectivation des connaissances-en-acte. La théorie des situations de Brousseau (1986, 1998), de même que la dialectique outil/objet de Douady (1986) apportent des réponses à cette question. Dans la théorie des situations, l'objectivation des connaissances s'effectue en priorité dans un rapport à une situation qui met en jeu une nouvelle fonction du savoir et à laquelle les connsissances-en-acte peuvent se raccorder. Ces différentes fonctions sont représentées par des situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Dans cette théorie, le principe d'objectivation des connaissances relève en priorité des fonctions du savoir et des situations qui représentent ces fonctions, et les pratiques qui leur correspondent. Ce point semble caractériser la façon dont cette théorie conçoit le lien entre le cognitif et la situation didactique.

Les réponses fournies à l'observation de «manque» dans l'enseignement renvoient parfois à des tentatives d'enseignement direct de ce qu'on appelle des métaconnaissances, démarche analogue à celle que Brun a dénoncée à propos du transfert des expériences piagétiennes dans l'enseignement. Pour Brun (1996, p. 38), le problème posé n'est pas celui de métaconnaissances, mais bien «le problème, didactique, de raccordement entre savoirs constitués et connaissances, problème face auquel l'enseignant se trouve démuni, obligé qu'il est par le contrat didactique envers une certaine description du savoir». L'enseignant interagit au moyen d'une représentation imposée du savoir. D'où la nécessité de repenser les conditions didactiques de son interaction avec les connaissances des élèves. Nous savons que les ingénieries de Brousseau ont considérablement fait avancer cette question, en faisant prendre conscience des contraintes qui imposent les connaissances des élèves dans le choix des contenus même d'enseignement, et en donnant des moyens pour assumer ces choix.

3.2.3 Situations, sources d'objectivité

À ce niveau d'analyse, les situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation cherchent donc moins à décrire les étapes d'un processus d'apprentissage interne au sujet qu'un processus de changement de fonctions du savoir comme sources d'objectivité pour les connaissances des élèves. Le contrat didactique opère également comme source d'objectivité, en ce sens qu'il fixe les enjeux mutuels de la situation. C'est un point essentiel pour toute analyse cognitive des conduites de prendre en compte les éléments contractuels qui font partie de la signification que les élèves attribuent à leurs actions. Les interactions sociales entre élèves sont également des sources d'objectivité, en particulier à propos des créations symboliques comme l'ont bien montré les travaux de Laborde (1982) et de Brun (1985).

L'institutionnalisation pourrait sembler marquer pour chaque objet de savoir enseigné le terme du processus d'objectivation, à la fin d'un parcours continu où s'enchaîneraient et se convertiraient harmonieusement rapport de connaissance, rapport de savoir et rapport institutionnel. Ce serait oublier les contraintes que fait peser sur le savoir le temps didactique. Mercier (1992) a montré les effets de ces contraintes temporelles et a noté que «cette composante fondamentale du contrat didactique est le plus souvent occultée». La didactique cherche, elle, à prendre en charge cette composante du contrat et à créer des lieux appropriés à l'activité personnelle et réorganisatrice de l'élève. Cette nouvelle création didactique demande une grande attention car, comme avertit Mercier, la gestion didactique de cette activité personnelle de chaque élève ne peut être explicite sous peine de la substituer au savoir. Ce niveau d'analyse supplémentaire en didactique prend donc en compte la durée des apprentissages ou, dans les termes de Mercier, «la biographie didactique» des élèves. À ce niveau d'analyse, le pôle cognitif a la responsabilité de l'organisation des savoirs et, in fine, au delà des contraintes posées par le temps didactique (qui organise de la façon que l'on sait, cumulative et linéaire, la succession des objets de savoir) la responsabilité de ces savoirs.

3.2.4 Situations, source de créativité

En relisant le dernier paragraphe, nous pouvons nous demander si l'on peut vraiment décider a priori qu'une situation est correcte. Comment comprendre cet appel à une représentation formelle (concevoir des situations comme des jeux formels), alors qu'au début du texte, Brousseau s'est démarqué d'une didactique formelle, qui ne fait pas cas de sens? Il nous semble que Brousseau cherche à attraper le sens avec un filet formel, filet classique dans lequel on retrouve expériences, théorie et schéma. Brousseau ne se contente pas de constater cet apprentissage de l'extérieur, comme le ferait un psychologue, par exemple. Il attend de l'enseignant qu'il puisse attester que l'élève a construit un isomorphisme des modèles ainsi ordonnés et que cette construction subsiste au-delà des contextes d'apprentissage. Le critère le plus contraignant serait de requérir que l'élève ne se contente pas non plus de répétition, mais qu'il fasse montre d'une certaine créativité. La dévolution consiste à articuler l'intention d'enseigner sur l'autonomie cognitive de l'élève. La créativité serait le signe de cette autonomie. Mais la question de l'appréciation de cette créativité se pose: «Comment l'enseignant pourra-t-il la reconnaître?». À la manière dont on reconnaît à son partenaire la qualité de son jeu?

Comme nous pouvons nous en rendre compte, ce que cherche Brousseau, c'est le moyen de faire que le sens s'enracine bien sur le plan épistémologique. La situation didactique doit servir de moyen et sa réalité ne doit pas se substituer à celle de la situation adidactique. L'apprentissage et sa réussite doivent être reconnaissables. La question du sens est alors comme celle de l'adéquation cognitive de l'élève aux formes du savoir à enseigner, déjà définies; c'est l'adéquation entre un savoir donné initialement et les connaissances que ce savoir a suscitées; c'est la question du contrôle du couple dévolution/institutionnalisation.

Toujours dans cette citation, la question du sens est traitée à un autre niveau, antérieur à celui de l'échange didactique: celui de la définition de la situation fondamentale. Ici, Brousseau considère le problème comme réglé car, en définitive, la détermination des situations fondamentales est une question d'épistémologie plus que de didactique: «Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appelons situation fondamentale» (Brousseau, 1986a, pp. 59-60). De ceci nous retenons l'expression «qui en préserve le sens», qui a trait au contrôle du sens (partie de la question du contrôle de la transposition didactique).

3.2.5 Les paradoxes du contrat didactique

Les questions de méthode sont également traitées par Brousseau dans la citation plus haut. Mais, comme nous l'avons déjà mentionné, ce modèle conduit à certains paradoxes du contrat didactique, qui sont des interférences du jeu didactique sur l'apprentissage. Envisager l'enseignement comme la dévolution à l'élève de la responsabilité de l'usage et de la construction du savoir, conduit à des paradoxes qu'il est utile de signaler. Il s'agit, entre autres, des paradoxes liés à la dévolution des situations, à l'inadaptation de la situation à l'exactitude du savoir, à l'inadaptation de la situation à préparer l'élève à une adaptation ultérieure, à la négation du savoir lorsqu'on s'en remet exclusivement à l'adaptation de l'élève. Ces paradoxes revêtent une signification pratique; ils rendent compte d'observations effectives et ils expriment une réalité. C'est cet entrelacs du théorique et du pratique qui rend finalement le modèle à la fois intéressant et compliqué à analyser.

Conne (1993, p. 224) trouve que c'est le fait d'«enrober la situation adidactique d'une gestion didactique, relativement externe, [qui] amène à ces impasses. Les plans psychologique, épistémologique et didactique interfèrent et les trois thèses explicitées plus haut ne peuvent être simplement juxtaposées». Dans un texte plus récent, Brousseau (1990) s'est lui-même expliqué là-dessus:

> *Les paradoxes de la relation didactique montrent que le modèle mécaniste exposé jusqu'ici est inadéquat sauf pour les séquences non didactiques: un jeu, où l'un des joueurs agit ouvertement sur des partenaires afin de les modifier en cours de partie, est évidemment de nature toute différente des jeux évoqués plus haut où les règles restent fixes au cours d'une partie.*
>
> *Ces paradoxes entraînent deux conséquences: nécessité d'une résolution temporelle, et afin de permettre l'avancement de la relation, nécessité d'un blocage temporaire de certaines conditions de la situation par des conventions provisoires, implicites ou explicites. Ces conventions deviennent l'objet et l'enjeu de la relation didactique. La forme générale de ces conventions est le contrat didactique. ...*

Brousseau reconnaît, lui-même, que considérer le milieu comme source ou image du jeu de chaque acteur est insuffisant et qu'il faut montrer que c'est une nécessité du contrat didactique. L'intervention de l'enseignant modifie les conditions de fonctionnement du savoir, conditions qui font aussi partie de ce que l'élève doit apprendre. L'objectif final de l'apprentissage est que l'élève puisse faire fonctionner ce savoir dans des situations où l'enseignant aura disparu. D'où la distinction d'un fonctionnement didactique et d'un fonctionnement adidactique de l'élève dans la classe.

3.2.6 Limites du modèle

Conne (1992), Conne et Brun (1992) ont pointé certaines limites du modèle théorique. Selon Conne (1993, p. 223), «en ce qui concerne le plan psychologique, c'est l'insuffisance du modèle de l'adaptation lui-même». En effet, comme il doit y avoir une entrée de l'élève dans un processus d'apprentissage par adaptation, on placerait volontiers la situation adidactique plus particulièrement au début de l'apprentissage. Mais, par contre, à la sortie, il faudra garantir que l'élève recoure à ce qui aura été appris en dehors de toute référence didactique. Ceci se réalise aussi à propos d'une situation adidactique. Ensuite, il va y avoir une progression entre les moments d'entrée et de sortie. Et, selon Brousseau lui-même, lorsqu'on ne peut trouver une situation fondamentale suffisamment élémentaire pour amorcer un enseignement, comment peut-on réussir la dévolution, c'est-à-dire comment faire rejoindre l'adidactique à partir d'une entrée didactique? Ceci montre une des faiblesses du modèle emprunté à l'épistémologie. Les psychologues piagétiens ont cherché à y répondre en faisant la distinction entre processus microgénétiques et macrogénétiques, et en étudiant la question de la spécification des connaissances (voir Inhelder, Cellerier et al., 1992). En dépit de tous ces efforts de recherche, la question reste ouverte en DDM. À propos d'un de ces modèles psychologiques et concernant ses recherches sur l'enseignement de la division, Conne a montré les difficultés qu'il y avait à reporter un modèle de fonctionnement psychologique dans un modèle du fonctionnement du système didactique (Conne et Brun, 1991).

Ces limites du modèle théorique ne lui enlèvent évidemment pas du tout son sens. Prenons un seul exemple, la négation du savoir. Le fait que l'élève puisse ne pas identifier les savoirs appris lors de son adaptation s'observe effectivement. On voit souvent des élèves omettre de faire part de leurs propres observations, parce qu'ils n'imaginent tout bonnement pas que celles-ci pourraient avoir un intérêt. Il arrive que l'élève, ne trouvant pas à donner une forme, qu'il croit attendue, à ses réflexions, ne les soumette pas à l'enseignant, quand bien même, en réalité, ce dernier n'attendrait que cela. Dans cette question, le contrat didactique est en cause. Il y aurait méprise sur le plan didactique, quant aux attentes réciproques des partenaires. De plus, le hiatus porte bien plus profondément sur ce qui fait l'objet de l'étude, sur la réalité qui est partagée. Dès lors, comme plusieurs didacticiens l'ont fait remarquer ensuite, la dimension didactique ne vient pas seulement s'ajouter à la dimension adidactique, mais se greffe au niveau même de la réalité traitée, sur les objets qui sont l'enjeu de la relation didactique et les rapports qu'entretiennent les acteurs à ces objets. Cet exemple montre que ce qui est évoqué plus haut comme paradoxes du modèle n'a pas qu'une valeur de dérivation théorique.

4. Ce que nous retenons de ces modèles

Ce que nous retenons de ces modèles est que l'opérationnalité des concepts constitutifs des IR doit être éprouvée à travers des situations variées, et le chercheur doit analyser une grande variété de conduites et de schèmes pour comprendre en quoi consiste, du point de vue cognitif, tel ou tel concept. Certaines peuvent être comprises très tôt, d'autres beaucoup plus tard au cours de l'apprentissage. Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques nous conduit à considérer les concepts constitutifs des IR comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique que Vergnaud donne d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les élèves dans ces situations.

Toutefois, l'action opératoire n'est pas le tout de la conceptualisation du réel, loin de là. En effet, souligne Vergnaud (1981a, p. 212) «on ne débat pas de la vérité ou de la fausseté d'un énoncé totalement implicite, et on n'identifie pas les aspects du réel auxquels il faut prêter attention, sans l'aide de mots, d'énoncés, de symboles et de signes. L'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation». C'est ce qui le conduit à considérer un concept comme un triplet de trois ensembles: C = (*S*, I, S) où *S* est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence); I, l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié); et S, l'ensemble des formes langagières et non-langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). Étudier le développement et le fonctionnement des IR et des concepts sous-jacents, au cours de l'apprentissage ou lors de leur utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois.

Vergnaud s'est attaché notamment à démontrer que la formation des concepts chez l'élève dépend du traitement pragmatique d'un ensemble de situations, de problèmes ou de tâches. La TCC rend ainsi compte d'une logique d'enseignement et d'apprentissage qui relève «d'un ordre partiel et à plusieurs branches», lequel ordre suppose des connexions nécessaires entre les concepts mathématiques. Vergnaud note que, en général, il n'y a pas de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. Nous ne pouvons donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations. La connaissance des IR ne peut être réduite à la maîtrise des définitions ou à la mémorisation des règles de calcul. Le processus de conceptualisation qui les produit découle des activités de l'élève qui apprend, moyennant l'action des schèmes organisateurs qui règlent ses conduites. C'est ainsi que l'élève peut être amené à attribuer aux IR un sens géométrique, une signification numérique, qu'il peut construire une représentation des IR à l'aide de tuiles algébriques et de formes géométriques.

Selon Vergnaud, la représentation permet «de conceptualiser le réel pour agir efficacement». L'élève forme et construit ses représentations dans ses interactions avec ses pairs, l'enseignant, les évènements ou les praxèmes (objets); mais il est aussi guidé par les échanges didactiques dans le modelage même de ses actions. Cela signifie que les représentations des IR ne peuvent être réduites à quelque état statique formé d'images mentales auquel l'élève accéderait «après coup», après avoir agi sur le réel, pas plus qu'elles ne peuvent être assimilées au langage et aux procédures qu'il déploie. Le concept de schème, défini comme étant «une totalité dynamique organisatrice de l'action de l'élève pour une classe de situations spécifiées», est constitué de règles d'actions et d'anticipations, d'invariants opératoires, d'inférences et de prédictions. S'agissant d'invariant opératoire, ça peut être des propositions ou des théorèmes dont l'élève dispose pour résoudre le problème posé, ça peut être aussi des concepts ou des catégories auxquels il se réfère; il peut s'agir des arguments ou des praxèmes (objets, choses, dessins, etc.) sur lesquels l'élève s'appuie. Ce que nous en comprenons, c'est que les «concepts-en-acte» et les «théorèmes-en-acte» ne sont pas explicites et qu'ils se manifestent en interconnexion.

Le concept de situation a été beaucoup renouvelé par Brousseau qui lui a donné non seulement une portée didactique qu'il n'avait pas en psychologie, mais aussi une signification dans laquelle la dimension affective intervient autant que la dimension cognitive. Vergnaud, lui, ne prend pas le concept de situation avec toute cette signification ici. Il se limite au sens que lui donne habituellement le psychologue: les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonctions des situations auxquelles ils sont confrontés. Et nous en retenons deux idées principales, celle de variété: il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer l'ensemble des classes possibles; et celle d'histoire (individuelle de l'apprentissage des mathématiques): les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner.

La combinaison de ces deux idées ne rend pas nécessairement aisé notre travail car la première idée nous oriente vers l'analyse, la décomposition en éléments simples et la combinatoire des possibles, alors que la seconde nous oriente vers la recherche des situations fonctionnelles, presque toujours composées de plusieurs relations, et dont l'importance relative est largement liée à la fréquence avec laquelle nous les rencontrons. Cela nous invite à l'analyse et à la classification des situations et des problèmes. Résultant à la fois de considérations mathématiques et de considérations psychologiques, cette classification permet d'ouvrir le champ des possibles et de dépasser le cadre trop limité des situations habituelles de vie. Pour Vergnaud (1981a, p. 225), «la spécificité des apprentissages mathématiques est dans les mathématiques elles-mêmes». Cela ne signifie pas que la théorie de l'apprentissage des mathématiques soit tout entière contenue dans les mathématiques. Une situation didactique est d'abord une mise en scène intéressante et riche. Toute situation complexe est une combinaison de relations élémentaires, et nous ne pouvons pas contourner l'analyse des tâches cognitives que ces relations permettent de générer; mais l'organisation d'une situation didactique en un projet collectif de recherche pour la classe suppose la considération à la fois des fonctions épistémologiques d'un concept, de la signification sociale des domaines d'expérience auxquels il est fait référence, des jeux de rôle entre les acteurs de la situation didactique, des ressorts du jeu, du contrat et de la transposition.

L'activité langagière favorise l'accomplissement de la tâche et la résolution du problème rencontré, sans quoi elle n'interviendrait pas. Tout se passe comme si l'activité langagière favorisait la découverte des relations pertinentes, l'organisation temporelle de l'action et son contrôle. Vergnaud nous renvoie ainsi à la triple fonction de représentation du langage: représentation des éléments pertinents de la situation, représentation de l'action et représentation des relations entre l'action et la situation. Tout cet appareillage langagier est excellent pour véhiculer l'information, aussi bien dans l'expression de la solution ou dans les verbalisations qui accompagnent le raisonnement, que dans l'énoncé du problème lui-même. Mais de telles formes linguistiques s'analysent comme des outils de pensée, non pas comme des objets de pensée. Si la conceptualisation mathématique ne se borne pas à la compréhension des relations et des propriétés comme outils, mais recouvre aussi la transformation de ces outils en objets de pensée (Douady, 1986), alors nous ne pouvons rester indifférent aux moyens dont disposent l'enseignant et l'élève pour cette transformation.

Le fonctionnement cognitif du sujet en situation dépend de l'état de ses connaissances, implicites ou explicites. Il faut donc accorder une grande attention au développement cognitif, à ses discontinuités, à ses ruptures, à ses passages obligés, à la complexité relative des classes de problèmes, des procédures, de représentation symbolique, à l'analyse des principales erreurs et difficultés. Cette attention est d'autant plus importante qu'un concept ne peut prendre sa signification dans une seule classe de situations, et qu'une situation ne peut s'analyser à l'aide d'un seul concept. Il faut donc se donner comme objets de recherche des ensembles relativement larges de situations et de concepts, en classant les types de relations, les classes de problèmes, les schèmes de traitement, les représentations langagières et symboliques, et les concepts mathématiques qui organisent cet ensemble. Il faut également identifier les correspondances entre ces différents ensembles si l'on veut saisir l'essentiel des relations entre le réel, la pensée et le langage: (i) des objets du réel, de leurs propriétés et relations vers les invariants opératoires; (ii) des invariants opératoires vers les signifiés de la langue et des systèmes symboliques utilisés dans la communication; (iii) des signifiés vers les signifiants lexicaux et syntaxiques correspondants.

Pour chacune de ces correspondances il existe à la fois des homomorphismes et des écarts. L'idée d'homomorphisme formalise cette idée de classe, par rapport à celle de phénomène ou d'objet singulier. En effet, à la différence d'un isomorphisme, un homomorphisme est seulement univoque: de la classe d'activités et de conduites vers le schème qui les organise. L'homomorphisme entre le modèle algébrique et le modèle géométrique ne doit pas être recherché au niveau des symbolismes d'abord, mais au niveau des invariants opératoires contenus dans les schèmes. C'est là que se situe la base principale de la conceptualisation des IR. De ce fait, Vergnaud n'insiste jamais assez sur la nécessité de mettre en scène dans des situations didactiques significatives les concepts qu'on veut enseigner, et sur la nécessité pour cela d'analyser les tâches cognitives rencontrées par le sujet. Nous ne pouvons échapper à la classification des relations, des problèmes et des opérations de pensée nécessaires à leur solution. Les schèmes organisent la conduite du sujet pour une classe de situations données, mais ils organisent à la fois son action et l'activité de représentation symbolique, notamment langagière, qui accompagne cette action. Ainsi, la modélisation des IR s'accompagne d'une activité langagière et symbolique. Cette activité, éventuellement intériorisée, est d'autant plus importante et manifeste que la situation de modélisation est plus nouvelle et le traitement géométrique moins automatisé. La résolution de problèmes très nouveaux sur les IR est impossible sans cette activité.

La compréhension des difficultés rencontrées dans l'apprentissage des IR et dans l'intégration des connaissances qu'elles impliquent exige que nous mettions l'accent sur la conception, la réalisation et l'analyse des activités de modélisation appropriées pour aider les élèves à mieux comprendre les IR. Notre recherche s'inscrit dans une telle perspective, non seulement pour aider l'élève à construire des modèles significatifs des IR, mais aussi pour permettre à l'enseignant d'éviter les contradictions inhérentes à la communication des savoirs, l'enseignement se nourrissant, comme l'atteste Brousseau (1988), de paradoxes qui rendent fragile cette communication. Ainsi, les situations didactiques demandent à être conçues en fonction des connaissances visées et Brousseau nous suggère de prévoir un ensemble de scénarios possibles qui permettent de les construire. L'avantage de l'approche par des situations est de permettre de générer une classification reposant sur l'analyse des tâches cognitives et des procédures pouvant être mises en jeu dans chacune d'entre elles. La théorie des situations didactiques est, à cet égard, intéressante pour notre étude, dans la mesure où elle nous permet d'examiner les échanges didactiques, de mieux cerner la progression dans l'apprentissage des IR et de comprendre aussi bien les continuités que les discontinuités épistémologiques qui le caractérisent.

Vergnaud nous rappelle que les situations auxquelles l'élève est confronté sont, pour la plupart d'entre elles, fabriquées par la culture (notamment par l'école) et qu'en outre, les mots, les énoncés et les arguments imprègnent de leur marque la manière dont sont identifiés les objets mathématiques, leurs propriétés et leurs transformations. Le langage est donc essentiel lui aussi, et Vergnaud va même plus loin, en disant avec Vygotski et Piaget, qu'un concept n'est pas totalement un concept tant qu'il n'est pas formulé, lui et ses propriétés. C'est un autre point intéressant de relever que la connaissance est adaptation. Il ne s'agit pas du processus d'assimilation/accommodation qui est vu par Piaget dans les termes généraux sujet/objet ou sujet/environnement. Ce sont les schèmes qui assimilent et accommodent, c'est-à-dire des formes d'organisation de l'activité. En effet, c'est à des situations que le schème s'adapte, et un schème constitué et stabilisé peut être considéré comme une forme invariante d'organisation de l'activité pour une classe de situations donnée. C'est donc le couple situation-schème qui est au centre du processus de construction des modèles des IR, ou encore d'appropriation des compétences en intégration des connaissances.

Notre dispositif de formation est, à bien des égards, après Vergnaud et Brousseau mais de manière plus modeste, une provocation. Et les provocations prennent d'abord la forme de situations que nous avons présentées au Séminaire de Conakry. Organisé en relation dynamique avec l'ingénierie, ce séminaire met à la disposition des enseignants du Secondaire en formation initiale à l'UGANC et à l'ISSEG des matériaux des «analyses préalables». Développées dans un format de travaux en plénière, ces analyses portent sur les activités bi-hebdomadaires de modélisation pour construire le sens et asseoir la compréhension des IR. En particulier, ces analyses sont axées sur le fonctionnement et la signification de l'intégration des connaissances. Nous y aménageons diverses activités didactiques qui amènent les futurs enseignants eux-mêmes à expliciter le rôle de cette intégration. Un chapitre entier (chapitre 5) est exclusivement consacré à ce séminaire pour apprécier l'opportunité de telle ou telle provocation.

CHAPITRE 3

RECENSION DES ÉCRITS

RECENSION DES ÉCRITS

Dans ce chapitre, nous poursuivons un double objectif: d'abord, décrire qualitativement les paradigmes de recherche actuels sur l'enseignement des identités remarquables (IR), c'est-à-dire les choix des problèmes à étudier et des techniques propres à leur étude; ensuite, préciser les choix didactiques que nous avons adoptés pour construire les séquences qui ont été expérimentées pendant le Séminaire de Conakry. Les recherches sur les IR elles-mêmes sont très peu nombreuses, pour ne pas dire inexistantes. Ceci n'est guère étonnant, car dans la plupart des cas, les IR sont présentées comme des cas particuliers de produits de binômes sur lesquels on attire l'attention des élèves pour que ces derniers les gardent dans leur «gibecière»! Comme la plupart des objets mathématiques qui sont ainsi taxés de «remarquables», les IR ont le mérite d'être juste mémorisées pour les besoins de ce que nous appelons «gymnastique calculatoire». La présente recherche en fait un enjeu d'apprentissage scolaire pour une population d'élèves de plus en plus enclins (pour des raisons à examiner) à employer des formules, des trucs, des moyens mnémotechniques pour résoudre des problèmes mathématiques. L'enseignement des IR étant essentiellement centré sur son fonctionnement dans le cadre algébrique, il est intéressant d'étudier, d'une part, la viabilité et la complémentarité (avec le cadre algébrique) de l'approche géométrique, et, d'autre part, les difficultés que rencontrent les futurs enseignants à faire fonctionner le cadre géométrique.

Pour donner un aperçu des recherches et éviter une simple juxtaposition de celles-ci relativement à la problématique, au cadre théorique, au recueil des données, à l'interprétation de ces données, nous choisissons de les regrouper en différents paradigmes. Ainsi, nous parlons du passage de l'arithmétique à l'algèbre, problématisons le lien entre l'algébrique et le géométrique, signalons l'absence de lien entre le calcul algébrique formel et le calcul algébrique fonctionnel; nous éclairons, ensuite, l'importante notion de modélisation et examinons les positions développées par les programmes officiels et les pratiques suscitées par les auteurs de manuels scolaires. C'est à la lumière de cette revue critique des écrits du domaine que nous précisons nos choix didactiques en les positionnant, d'une part, par rapport aux paradigmes évoqués et, de l'autre, par rapport aux contraintes institutionnelles, tout en précisant ces choix en termes de contenus.

Le premier paradigme a pour emblème le couple «arithmétique, algèbre».

1. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre

De nombreuses recherches ont tenté de comparer l'arithmétique et l'algèbre dans le but de mieux comprendre ce qui, dans cette dernière, pose problème aux élèves, notamment en début d'apprentissage: quelles explications pouvons-nous donner aux difficultés, maintes fois constatées, que rencontrent certains élèves à établir un rapport convenable à l'algèbre, alors que «dans le domaine de l'arithmétique scolaire, leur comportement n'appelle guère de remarques» (Pressiat, 1996, p. 9)? Cette prise de position s'avère, sans doute, un peu extrême. Elle doit être nuancée en reconnaissant que l'apprentissage des concepts algébriques, en général, et des structures multiplicatives, en particulier, est une tâche complexe et constitue une étape importante dans le développement de la pensée mathématique des élèves. Les enjeux d'un tel apprentissage sont à ce point importants qu'ils teintent les apprentissages ultérieurs sur les notions de fraction, d'IR, voire même de fonction. Si cet apprentissage pose un défi à l'élève, il en pose un tout aussi grand à l'enseignant.

La présente recherche est donc concernée par cet apprentissage et s'y intéresse particulièrement pour creuser la question des relations additives et des relations multiplicatives. Cette question nous a conduit à tenir compte des considérations épistémologiques et à déterminer aussi bien les continuités (réelles ou apparentes) que les discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre.

1.1 Le danger d'une simplification réductrice

Comme le futur enseignant attend que les théories enseignées puissent être immédiatement appliquées à l'enseignement, il y a, bien sûr, un danger de voir son formateur se contenter de développer des directives superficielles portant sur la façon d'enseigner. Les méthodes classiques utilisées au collège et au lycée ont largement succombé à ce danger. En effet, en traitant, par exemple, de la propriété de distributivité, l'enseignant assume que les élèves l'ont apprise auparavant au cours des années précédentes pour les nombres concrets et qu'ils doivent maintenant la comprendre pour des variables. Il va ainsi introduire les dimensions d'un rectangle en tant que grandeurs variables, x, y et z. Il va aussi se servir d'une illustration «concrète» sous-jacente au dessin d'un jardin, par exemple, (figure 17) dont on veut déterminer l'aire.

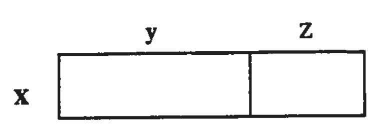


Figure 17: Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, support géométrique

Généralement, l'enseignant ne tarde pas à se rendre compte, à travers les réponses des élèves, que la question posée est trop «abstraite». Aussi, va-t-il essayer de remplacer les variables x, y et z par des nombres «concrets». On s'attend à ce qu'après de nombreuses étapes de concrétisation et de contextualisation, l'interaction entre l'enseignant et les élèves conduise au résultat désiré $x(y + z) = xy + xz$. C'est à partir de cette formule que l'enseignant introduit le terme de distributivité et qu'il pose la question de la distributivité «générale». L'enseignant «affine» le résultat et conclut que l'on a «trouvé» la distributivité.

Ainsi, à partir d'une question géométrique relativement ouverte, par des recours au «concret», par des généralisations qui s'y rattachent, par des limitations de la question et donc aussi des possibilités de réponses, ainsi que par l'exclusion de fautes, le déroulement d'un tel cours conduit finalement au résultat unique donné. Nous pouvons, sans exagération aucune, taxer une telle démarche de routine et d'itinéraire obligatoire, si caractéristiques des cours d'algèbre. Nous sommes ici confrontés à des situations de contextualisation et à leurs variations, situations dans lesquelles nous pouvons découvrir les caractéristiques du «modèle de l'entonnoir», c'est-à-dire de «la limitation du champ d'action par l'attente explicite d'une réponse» (Bauersfeld, 1978, p. 162). L'interaction entre l'enseignant et les élèves conduit à limiter les significations et les explications du savoir à une formule «générale» de la distributivité.

Du point de vue épistémologique, le problème lié au contenu réside dans le passage d'une connaissance de la distributivité pour des nombres «concrets» à la «distributivité générale pour des variables». Le dessin est présenté comme illustrant le cas d'un jardin réel. L'explication réductrice développée à plusieurs étapes conduit, en principe, à justifier la distributivité générale de la façon suivante: puisque la distributivité est valable pour des nombres concrets, elle l'est aussi pour des lettres mises à la place de ces nombres. La réduction qui s'effectue par une algorithmisation du savoir transforme ainsi la nature épistémologique des concepts de variable et de distributivité. Le dessin du rectangle n'est utilisé que pour les besoins de la méthode; il est envisagé comme image et non comme symbole. On n'accorde donc finalement au concept de variable qu'une valeur de substitution et non une valeur d'objet mathématique. Les concepts perdent ainsi leur nature théorique (conceptuelle); ils reçoivent une signification immédiate, empirique. Ils sont de plus en plus vidés de leur sens au profit d'une simplification croissante due à la méthode d'enseignement.

1.2 Considérations épistémologiques

Parmi les éléments essentiels des IR, un type d'objet occupe une place centrale: l'algorithme ou séquentiation des opérations de calcul suivant un ordre prédéterminé.

1.2.1 Algorithme

Le mot *algorithme* est dérivé du nom propre arabe *Al-Khwrarizmi* qui désignait, à l'origine, le système décimal de numération emprunté aux hindous et adapté par les arabes. De Champlain et al. (1996, A19) le définissent comme «une suite de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données». Ainsi, un algorithme ne résout pas seulement un problème particulier mais toute une classe de problèmes soumis aux mêmes conditions et qui ne diffèrent que par les données. Lorsque l'élève veut résoudre un problème, il se demande quel algorithme devrait être utilisé. Supposons qu'il désire multiplier les deux entiers positifs 1258 et 135, en n'utilisant qu'une feuille de papier et un crayon. Si cet élève provient d'une culture francophone, il est fort probable qu'il multipliera successivement le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, de la droite vers la gauche, et que, tenant compte des décalages nécessaires, il terminera le calcul par une simple addition. Il aura ainsi appliqué l'algorithme *classique* de la multiplication, connu de tous, celui qui fut enseigné dans les universités italiennes du XVI^e siècle et qui, depuis, est utilisé partout ailleurs.

Il existe pourtant d'autres procédés de calcul du produit de deux nombres. Actuellement, on cherche à privilégier la construction du sens des opérations par les élèves. Cela amène les didacticiens à comparer ces procédés et à étudier leur adéquation à cette construction du sens. Voici deux autres algorithmes, totalement différents de l'algorithme classique, pour calculer le produit 1 258 x 135:

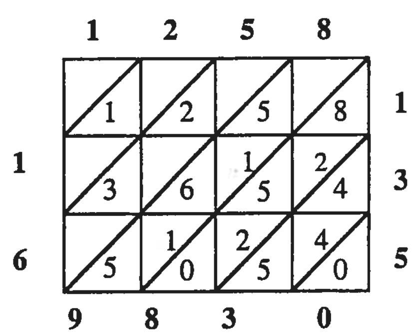


Figure 18a: Méthode «per gélosia»

1 258	135	1258
2 516	67	+2516
5 032	33	+5032
10 064	16	
20 128	8	
40 256	4	
80 512	2	
161 024	1	+161 024
		=169 830

Figure 18b: Méthode «à la russe»

L'algorithme dit «à la grecque» ou «per gélosia» tire son nom de celui des grilles que l'on trouve devant les fenêtres en Andalousie[4]. Il se comprend mieux avec la présentation suivante:

	1 000	200	50	8	
	100 000	20 000	5	8	100
1	30 000	6 000	1500	240	30
6	5 000	1 000	250	40	5
	9	8	3	0	

Les calculs en jeu sont: (1 000+200+50+8)(100+30+5) = 1 000x100 + 1 000x30 + 1 000x5 + 200x100 + 200x30 + … etc. Cette possibilité d'écrire le résultat se fonde sur l'écriture des nombres en base décimale et sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. En tant qu'algorithme, ce procédé permet à l'élève de réaliser une tâche élémentaire (calcul d'un produit lié à une case), d'interrompre son travail, puis de continuer et de prévoir l'ordre de grandeur du résultat. Il requiert la connaissance des tables et demande de prévoir le dessin. Ce procédé permet aussi de visualiser effectivement les erreurs commises (produits partiels non mémorisés) et de prévoir l'ordre de grandeur du résultat.

L'algorithme dit «à la russe» se fonde sur la propriété suivante: dans l'ensemble des entiers naturels N, si b est pair, on a alors ab = 2a(b/2); si b est impair, on a alors ab = a(b-1)+a. Dans ce cas, b - 1 est pair et on a ab = 2a[(b – 1)/2] + a. Dans cet algorithme, on a donc 1 258 x 135 = 1 258 x 134 + 1 258 (ce 1 258 est consigné à droite, cf. figure 18b). On ne s'occupe donc plus que de 1 258 x 134 ou de 2 516 x 67 et ainsi de suite. On écrit le multiplicateur et le multiplicande l'un à côté de l'autre. On forme une colonne en dessous de chacun des opérandes en itérant la règle suivante jusqu'à ce que le nombre sous le multiplicateur soit égal à 1: diviser par deux le nombre sous le multiplicateur, sans tenir compte du reste éventuel, et doubler par addition le nombre sous le multiplicande. Du point de vue mécanisme, il suffit de dire: lorsque le deuxième facteur est impair, on place le premier à droite; lorsque le deuxième facteur est pair, on ne met rien, et ainsi de suite. Finalement, on raye tous les nombres de la colonne du multiplicande correspondant à une ligne de nombres pairs sous le multiplicateur. Il ne reste plus qu'à additionner les nombres restants (en colonne, à droite): 1258 + 2516 + 5032 + 161 024 = 169 830.

---

[4] Andalousie, communauté autonome de 7 100 069 habitants de l'extrême Sud de l'Espagne et région de la CE, formée des provinces d'Almeria, Cadix, Cordoue, Grenade, Huelva, Jaén, Màlaga et Séville (la capitale).

Peut-être trouvons-nous cet algorithme un peu loufoque. C'est pourtant, en essence, la méthode employée dans les circuits électroniques de nombreux ordinateurs. Pour appliquer cet algorithme, nul besoin de mémoriser une longue table de multiplication; l'élève n'a qu'à savoir additionner, ainsi que doubler et diviser par deux. Il existe, bien sûr, d'autres algorithmes plus efficaces pour effectuer la multiplication de très grands entiers; mais ces algorithmes plus sophistiqués sont, en fait, plus lents lorsque les opérandes ne sont pas suffisamment grands[5]. Toutefois, même si d'autres procédés facilitent l'apprentissage, le poids de la tradition ne permet pas, pour autant, d'abandonner totalement l'algorithme classique. Abandonner un tel procédé serait un peu renoncer à un élément du patrimoine culturel devenu universel.

Une question importante se pose dans l'enseignement des IR: comment y représenter les algorithmes? Si nous essayons de les exprimer en français, nous nous rendons rapidement compte des lacunes du langage naturel. Même la description d'un algorithme aussi simple que celui de la multiplication à la russe n'est pas tout à fait claire. Quant à l'algorithme classique, nous n'avons même pas tenté de le décrire. Pour éviter tout risque de confusion, on exprimerait donc les algorithmes sous la forme de formule: par exemple, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Toutefois, pour éviter d'obscurcir les idées essentielles des algorithmes par des détails de symbolisation de peu d'importance, on ne devrait pas se limiter à un langage d'algorithmisation spécifique. Bon nombre d'enseignants pensent que les IR servent à résoudre, de façon globale, le problème de la multiplication de binômes identiques ou de la décomposition d'une différence de carrés en un produit de facteurs conjugués. Ainsi, il n'est pas surprenant qu'on oublie le caractère géométrique hautement construit des IR, et qu'on en «naturalise» volontiers leur fonctionnement dans le seul cadre algébrique.

1.2.2 La démarche géométrique des Pythagoriciens

Pourtant, avant 1600, les mathématiques sont presque entièrement un domaine géométrique. C'est notamment le cas des nombres réels et de nombreuses courbes qui n'étaient connues de manière détaillée que par des méthodes géométriques (Buekenhout, 1992, p. 12). En fait, la géométrie a d'abord été la science de la mesure des étendues (*yé*: «terre »; *metron*: « mesure »). Laborde (1994, p. 48) rapporte que «la géométrie serait née chez les Égyptiens de la mesure des terrains qu'il leur fallait sans cesse renouveler à cause

[5] En recourant à une implantation logicielle des opérations arithmétiques, des opérandes de plus de 10 millions de chiffres décimaux ont été manipulés au Japon en 1985 pour un calcul très précis des décimales de Π et de leurs propriétés statistiques. Ce calcul a été étendu en 1986 à près de 30 millions de chiffres aux Etats-Unis, ce qui a nécessité une trentaine d'heures de calcul sur ordinateur CRAY-Z.

des crues du Nil». Pour les Grecs de l'Antiquité, un nombre était un segment; le produit de deux nombres, un carré ou un rectangle, et le produit de trois nombres, un cube. C'est donc par la géométrie qu'ils résolvaient les opérations. En effet, pour Pythagore et ses disciples, diviser, par exemple, 5 par 2 consistait à trouver la dimension d'un rectangle dont on connaît l'aire (5) et la mesure (2) d'un de ses côtés. La solution repose sur l'égalité des aires des rectangles, égalité qui, elle-même, est obtenue par une manipulation opératoire du modèle géométrique (dessin) et par la mise en évidence explicite de l'additivité des aires. Le modèle géométrique joue ainsi un rôle fondamental dans la manipulation et dans les mises en évidence sensible qu'il permet d'établir.

L'une des grandes difficultés qu'éprouvent les élèves dans leur passage de l'arithmétique à l'algébrique réside dans l'interprétation et l'utilisation des symboles.

1.2.3 Symboles

Pressiat (1996, p. 33) remarque que «jusqu'au début de la 6^e année, les lettres sont assez peu utilisées. À l'école primaire, elles ne sont utilisées qu'en géométrie qui est un gros "consommateur" d'expressions littérales, que ce soit pour identifier des figures, des parties de figures ou pour établir des formules». L'un des problèmes fondamentaux de l'enseignement de l'algèbre est que les symboles apparaissent comme une collection d'objets dont les élèves ne perçoivent ni l'intérêt, ni la nécessité. Bon nombre d'élèves les utilisent uniquement parce qu'on le leur commande et que c'est au programme. Plusieurs recherches ont révélé les difficultés que certains élèves éprouvent en interprétant les lettres comme des inconnues et plus encore comme des données (Booth, 1984; Kieran, 1981; Kücheman, 1981; Vergnaud, 1988).

Selon Kücheman (1981, p. 104), les élèves perçoivent les lettres comme «objet, ou inconnue particulière, comme nombre généralisé, ou variable». Ces différentes perceptions des lettres reflètent l'une des difficultés inhérentes à la formalisation précoce qui se rapporte au symbolisme mathématique. Par exemple, le fait que certains élèves considèrent les lettres comme des «inconnues particulières», plutôt que «nombres généralisés» ou «variables», peut expliquer la réponse «jamais» à la question de savoir si oui ou non on a l'égalité $L + M + N = L + P + N$. L'importance du symbolisme en mathématiques est connue et il est quasi impossible d'y échapper. Cependant, ce symbolisme ne peut ni ne doit servir de fondement à la compréhension et à l'interprétation des lettres, mais exprimer ce qui est compris des élèves. Il y a donc là un besoin réel de travailler sur les expressions numériques, littérales et algébriques. De même, les parenthèses jouent un rôle important dans le calcul algébrique. Dans ce calcul, nous pouvons nous apercevoir qu'une bonne maîtrise des parenthèses, de leur sens et de leur utilisation est l'une des conditions nécessaires à un bon passage de l'arithmétique à l'algèbre au collège.

1.2.4 Parenthèses

Selon Booth (1984), plusieurs erreurs de calculs en algèbre proviennent de la difficulté qu'ont les élèves à utiliser convenablement les parenthèses. Pour la majorité des élèves, il n'est pas évident – comme certains enseignants l'assument - que dans une chaîne d'opérations, on effectue d'abord les opérations entre parenthèses. Pour bon nombre d'entre eux, il n'est pas évident non plus que les parenthèses permettent de fixer un certain ordre dans les opérations à effectuer lorsqu'il n'existe pas de convention de priorité, soit par la nature des opérations ou pour toute autre raison. Booth a proposé aux élèves la figure et les expressions suivantes, et leur a demandé de déterminer la (ou les) expression qui donne l'aire de ce rectangle (figure 19).

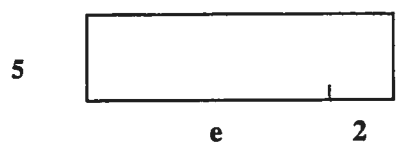


Figure 19: Figure illustrant l'un des items de Booth sur l'utilisation des parenthèses

Booth (1984, p. 24) a donné la consigne suivante: «Écris chaque réponse que tu juges correcte: 10 e; 5 x e + 2; 5 x (e + 2); 5 x e2; 5(e + 2); e + 2 x 5; aucune correcte». Il résume le protocole que voici (Ibid.; p. 30):

[Intervieweur: I; Christopher: C, 15 ans]
C : (Répondant à la question ci-dessus posée) «5 x e2 et 5(e + 2), c'est tout».
I : Pourquoi tu dis 5 x e2?
C : 5 fois e2, cela signifie le e plus 2, mis ensemble, fois 5. C'est ce qui doit être la réponse, 5 fois e2.
I : Que signifie e2?
C : La réponse à «e ajouté à 2» … 5 fois e2. Le e2 signifie que tu dois additionner le e et le 2 avant. C'est donc … Je pense que je prendrai celui-ci (5 x e2), en fait, parce que tu dois additionner le e et le 2 d'abord.

L'une des conclusions tirées par Booth est que les élèves peuvent ne pas sentir la nécessité d'utiliser les parenthèses et qu'ils peuvent, par conséquent, ne pas les utiliser. En effet, comme le rapporte Booth, bon nombre d'entre eux ont considéré les expressions avec ou sans parenthèses comme si elles étaient équivalentes. Aussi, disent-ils: «Tu peux y mettre les parenthèses, si tu le désires, c'est la même chose». D'autres élèves, non moins nombreux, ont, quant à eux, exclu de leurs choix les parenthèses, soit parce qu'ils ne les ont pas trouvées nécessaires, soit parce qu'ils ne savaient pas ce qu'elles signifiaient (ce second cas étant tout de même rare). Il ne suffit donc pas que l'enseignant énonce les règles ou les priorités des opérations pour que l'élève puisse ensuite intérioriser le contenu de ce discours.

Une bonne façon de faire comprendre les priorités d'opérations est de résoudre des situations. Par exemple, lorsqu'on songe à un billet de 10$ et à trois billets de 5$, l'expression $1 \times 10 + 3 \times 5$ laisse peu (sinon aucun) doute quant au sens de $(1 \times 10) + (3 \times 5)$. L'enseignant peut aussi demander aux élèves d'indiquer l'ordre dans lequel ils doivent effectuer des opérations pour déterminer la valeur de certaines expressions, surtout si celles-ci contiennent une chaîne d'opérations, par exemple, $28 \div (7 \div (4 - 22) \times 3)$. Il peut profiter de ce genre de question pour signaler que c'est une excellente habitude que d'observer la chaîne dans sa globalité et de décider de l'ordre des opérations avant de commencer les calculs. Il s'agit, en fait, de nommer les opérations, et non de les effectuer. Cette optique de la conceptualisation par des approches de situations favorise le passage d'une phase intuitive vers une phase conceptuelle. C'est une transition dont il n'est pas tenu compte, en général, dans l'enseignement actuel de l'algèbre.

La présente recherche se propose de montrer, entre autres, comment l'activité de modélisation peut contribuer à résoudre le problème de la factorisation ou de la mise en évidence des graphies algébriques, notamment celles qui expriment les IR. Les activités de démonstration bien choisies doivent conduire, en particulier, à faire ressentir aux élèves la nécessité d'y recourir. Les élèves ne devraient pas se sentir troublés, comme l'ont été bon nombre de leurs parents, à la seule vue d'une formule mathématique. Il nous paraît décisif pour la compréhension que l'introduction et l'usage des parenthèses se fassent dans un contexte de problèmes variés.

La résolution du problème des parenthèses exige donc des prises de décision de la part de l'enseignant. C'est une préoccupation importante pour la présente recherche que de rendre le futur enseignant conscient de la nécessité de telles décisions, de mettre en évidence la marge de liberté possible dont il dispose lorsqu'il prend de telles décisions et de réfléchir sur ses effets. Il doit insister sur le fait que les parenthèses servent à éliminer la confusion et montrer, à travers des situations variées, que ce n'est pas pour rien qu'on fixe de telles conventions. Comme le souligne Vergnaud (1996, p. 211), «l'opérationalité d'un concept doit être éprouvée à travers des situations variées» et l'enseignant doit analyser une grande variété de conduites et de schèmes pour comprendre en quoi consiste, du point de vue cognitif et didactique, l'usage des parenthèses.

Au nombre des difficultés posées par l'introduction de l'algèbre au niveau du Secondaire figure la signification du signe d'égalité.

1.2.5 Le signe «égal»

Dans l'utilisation du symbole « = » et, d'une manière générale, dans la résolution des problèmes d'arithmétique, le signe d'égalité représente davantage l'annonce d'un résultat que l'existence d'une relation symétrique et transitive. Vergnaud (1988, p. 190) en donne l'exemple suivant: «*Bruno est passé chez sa grand-mère qui lui a donné 15 francs; puis il est allé acheter une voiture miniature qui lui a coûté 32 francs. Il lui reste maintenant 23 francs. Combien d'argent avait-il avant de passer chez sa grand-mère?*». Vergnaud note que la solution la plus fréquente en 6e année est: 23 + 32 = 55 - 15 = 40, et que la symétrie et la transitivité du signe d'égalité sont ainsi souvent violées. Ce signe est lu comme «ça donne», c'est-à-dire comme une relation fléchée de la gauche vers la droite. Une telle conception de ce signe (comme «signal pour faire des opérations») permet ainsi de donner du sens à des relations telles que $3x + 2 = 8$, en pensant que le second membre (8) est le résultat (la somme) à obtenir. Il n'en est plus de même pour des relations telles que $3x + 2 = x + 5$.

Kieran (1981) ajoute que «ceci est attesté par la répugnance de certains élèves à accepter des énoncés tels que 4 + 3 = 6 + 1». Bon nombre d'élèves voient le signe « = » comme un séparateur, et non comme un symbole de relation symétrique et transitive. Aussi, le domaine du calcul numérique est régi par la loi de simplification, dont l'une des clauses est le principe d'achèvement des calculs. Selon ce principe, l'expression «6 + 1» ne saurait figurer comme réponse, le calcul étant inachevé. Dans l'une des expérimentations que Kieran (1983) a conduites pour amener les élèves à accepter que des graphies algébriques puissent être considérées comme réponses à des problèmes, elle a trouvé que certains élèves étaient incapables de donner du sens à la lettre « a » dans l'expression « a + 3 », parce qu'elle manque un signe « = » et un second membre.

De ce premier paradigme, nous retenons à la suite de Vergnaud (1988, p. 195) que «l'algèbre représente une rupture par rapport à l'arithmétique parce qu'elle demande le plus souvent qu'on manipule des nombres inconnus, ce qui est contre-intuitif: l'élève répugne à raisonner et à opérer sur des nombres inconnus ou sur des nombres quelconques». En même temps qu'existe cette rupture, nous pouvons observer avec Vergnaud que «l'algèbre s'inscrit dans une continuité fonctionnelle avec les acquisitions antérieures en arithmétique et en géométrie élémentaire: résoudre des problèmes d'arithmétique présentés en langage naturel». D'où l'intérêt pour notre recherche de déterminer comment les apprentissages et les conceptions antérieurement acquis permettent de comprendre les IR, et à quelles opérations de modélisation il faut accéder pour traiter ces IR. Il y a lieu d'envisager un certain enseignement de l'algèbre, des IR en particulier, tout au long de la scolarité, y compris au Primaire, pour permettre aux élèves d'aborder avec plus de chance de succès cette rupture épistémologique.

Les travaux de recherche, comme ceux de Booth (1984), de Pressiat (1996) et de Vergnaud (1981, 1988) ont attiré notre attention sur les difficultés qu'éprouvent les élèves à donner un sens aux symboles algébriques. Selon Vergnaud, il est illusoire d'essayer d'enseigner l'algèbre à des jeunes élèves qui distinguent mal les concepts. Pour lui, il ne s'agit pas non plus de donner les définitions de ces concepts, mais de proposer une riche variété d'activités permettant de les mettre en place. En ce qui a trait à la préparation des futurs enseignants à l'enseignement de l'algèbre, en général, et des IR, en particulier, Vergnaud (1988) relève de sérieux inconvénients à ne pas aborder dès le Primaire un certain nombre de représentations géométriques et de concepts algébriques. Nous n'évoquons que trois points que Vergnaud trouve importants:

> *(1) les nombres négatifs, auxquels il est possible de donner du sens, comme transformations ou comme relations; (2) la représentation par des schémas...de problèmes de structures diverses, et la manipulation de ces représentations symboliques; (3) l'utilisation plus grande des formules de géométrie (périmètre, aire, volume), de modèles géométriques, dans l'introduction et l'utilisation de l'algèbre.*

Cela peut donner aux élèves une certaine préparation aux manipulations algébriques qu'ils rencontreront plus tard. L'enseignant doit donc disposer d'un stock de situations didactiques et d'activités pédagogiques appropriées. C'est là, à notre avis et comme se propose de l'établir la présente recherche, que les activités de modélisation et d'intégration des connaissances jouent un rôle important. Il est important que le futur enseignant acquière un «savoir d'expérience» (Portugais, 1995) par la pratique de telles activités.

Le second paradigme des recherches considérées concerne le lien entre l'algébrique et le géométrique.

2. Lien entre l'algèbre et la géométrie

Les recherches évoquées dans ce paradigme ont comme a priori le fait que l'«essence» de l'algèbre peut être dégagée en procédant à une comparaison entre l'algébrique et le géométrique[6], dans le but de pouvoir négocier avec des élèves un bon passage didactique de l'un à l'autre. Nous forgeons ainsi des expressions telles que «algèbre géométrique» et «géométrie algébrique» pour décrire une réalité située entre les champs algébrique et géométrique, une réalité qui est bien difficile à saisir. La remise en cause de cet a priori ne

[6] Comme on dit *le* didactique ou *le* cognitif (voir Portugais, 1999); *le* social ou *le* religieux (voir Blanchard-Laville, Chevallard et Schubauer-Leoni, 1996).

peut se faire qu'en problématisant le lien entre l'algèbre et la géométrie, en ne considérant surtout pas ce lien comme allant de soi. En effet, situer l'algèbre et la géométrie dans le prolongement l'une de l'autre, sans les opposer, est le produit d'actions de transposition didactique qui s'est naturalisé et qui peut ainsi donner l'impression d'être conforme à la nature des liens entre l'algébrique et le géométrique, alors que cette transposition n'est qu'un construit, un acquis culturel déjà ancien. En effet, Bass (1905, p.716) nous donne les arguments historiques pour enseigner l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie ensemble dès la première année du Collège:

> *[...] Every race to develop a considerable body of mathematical knowledge has begun with simple arithmetic and geometry. [...] The Hindoos carried the three along together, their arithmetic and algebra leading their geometry. When the Arabs became the leaders in the mathematical world, they worked out the general solution of the quadratic equation (with real positive roots), justified the process on geometrical grounds, and found geometrical solutions to a large class of cubic equations.*

Laborde (1994) témoigne qu'on a pu, dans le passé (un peu plus de 32 ans), apprendre à des élèves à résoudre sans le recours de l'algèbre des problèmes arithmético-algébriques à l'aide de modèles géométriques. Ainsi, trouver deux quantités inconnues dont on connaît la somme et la différence se faisait par la représentation des deux inconnues par deux segments. Résoudre ce problème consistait à en construire le modèle graphique, c'est-à-dire un premier segment (segment-somme), juxtaposition des deux segments et, en dessous, le segment- différence, comme ci-dessous indiqué (figure 20).

Figure 20 Modèle géométrique de la somme et de la différence de deux nombres

On pouvait, par une *manipulation*, constater que la différence s'obtenait à partir de la somme en retranchant deux fois le plus petit des segments. Laborde note que «cette manipulation toute géométrique se fait sans recours à une mesure et est indépendante de la taille des segments (généralité implicite). Le procédé géométrique, ici, est certes très semblable à celui de l'algèbre: manipulation de grandeurs inconnues comme si elles étaient connues, mais il prend une forme totalement différente» (Ibid., pp.56-57). En algèbre, les inconnues sont des lettres tandis que les quantités connues sont des nombres. Il y a mélange de deux registres (i.e., de supports de représentation) de statut différent, le numérique et le littéral, et l'on opère comme si les deux registres étaient identiques. Le modèle géométrique n'a, lui, qu'un seul registre, le registre figuratif.

2.1 Des facteurs de la dichotomie «algébrique/géométrique»

La dichotomie «algébrique/géométrique» continue de structurer les programmes guinéens de mathématiques. Ceci n'est, bien sûr, pas propre à la Guinée. Sous l'influence des mathématiques universitaires et des mouvements de réformes, l'enseignement de la géométrie se fait sur la base des structures algébriques. On invoque la rigueur facile de l'algèbre pour enseigner une géométrie dépouillée de ce qui fait sa spécificité et au contenu généralement appauvri. D'une façon ou d'une autre, l'enseignement au Primaire et au Secondaire subit ces influences. En effet, nous constatons qu'actuellement, l'analyse et l'algèbre prédominent dans les mathématiques universitaires. En outre, l'industrie et le commerce sont de plus en plus tributaires des techniques de la statistique, de la recherche opérationnelle et de l'analyse numérique, et ces domaines qui dérivent des mathématiques sont l'objet d'un intérêt croissant. Certains d'entre eux ont déjà fait leur entrée dans les programmes scolaires, en particulier la statistique. La place accordée à ces domaines réduit la part de la géométrie enseignée dans les écoles et les universités.

La formation initiale des enseignants est un autre facteur en cause. Diplômés ou non de l'université, les enseignants n'ont généralement pas eu l'occasion d'étudier de façon appropriée la géométrie au cours de leur formation. À cela s'ajoute le fait qu'ils n'ont pas une idée claire sur le type de géométrie qu'il faut enseigner au Primaire, lorsqu'on sait qu'à peine 50% des élèves n'iront pas au-delà du lycée. Aussi, compte tenu du très faible pourcentage de ceux qui feront des études supérieures complètes (environ 25 à 30% de la cohorte entrée au Primaire) mais aussi du rôle fondamental que ce petit groupe est appelé à jouer dans l'avenir du pays, quelle géométrie faut-il enseigner tout au long de la scolarité? Simplement celle qui est nécessaire à l'étude des autres matières? Celle dont les élèves auront peut-être ultérieurement besoin dans l'exercice de leur métier? Celle qui offre une solide formation scientifique? Ou un mélange de tout ceci, mais dans quelles proportions? Tant que nous n'accorderons pas plus d'attention à la formation de futurs enseignants dans ce domaine, l'enseignement de la géométrie à l'école et au collège demeurera déficient.

Quant à l'algèbre, l'amer constat est que le raisonnement géométrique s'y trouve réduit à la portion congrue. Les programmes ne reviennent que sur la façon de traiter les contenus, sans vraiment affecter ces derniers. Ils insistent beaucoup moins sur les aspects géométriques et, en revanche, ils mettent l'accent sur l'axiomatique et les procédures algorithmiques. Or, un cours de mathématiques influencé par l'axiomatique conduit assez souvent à un trop-plein de concepts et d'algorithmes ayant peu d'applications. En outre, lorsque les élèves manquent d'activités et d'expérience avec les modèles concrets (géométriques), leurs connaissances ne peuvent être organisées en un système, et un système déjà tout construit leur apparaît arbitraire et artificiel. Cette analyse fait alors apparaître une autre dialectique, celle qu'entretiennent le numérique et l'algébrique.

2.2 De la dialectique «numérique/algébrique» à la dialectique «algébrique/géométrique»

Pressiat (1996) fait remonter les racines historiques de la dialectique «numérique/algébrique» à la dichotomie entre l'arithmétique et la théorie des nombres. Dans l'arithmétique, on attend d'un «bon système» numération–algorithme de calcul que toute l'information nécessaire pour appliquer les algorithmes soit fournie d'emblée avec les nombres écrits dans le langage numérique convenu, c'est-à-dire que l'information soit apparente dans l'écriture même de ces nombres. Par contre, dans la théorie des nombres, telle que pratiquée par les pythagoriciens, on a recours à des représentations géométriques pour démontrer certaines propriétés, par exemple, que $5 + 7$ est un multiple de 4 et qu'il est aussi une différence de deux carrés ($5 + 7 = 4 \times 3 = 4^2 - 2^2$), ce que, à l'aide du langage algébrique moderne, on peut éviter: $(2p - 1) + (2p + 1) = 4p$ et $4p = (p + 1)^2 - (p - 1)^2$.

Du point de vue de l'écologie des savoirs, le développement historique de l'algèbre met en évidence deux faits importants: l'algébrique est un outil de l'étude géométrique et, inversement, pour que le fonctionnement de cet outil soit efficace, il faut étudier cet outil, par exemple, se poser le problème de la validation reposant sur les propriétés des suites numériques ou sur les propriétés géométriques des patterns. Et pour ce faire, nous pensons que le géométrique est un bon moyen d'étude. En voici un exemple (figure 21).

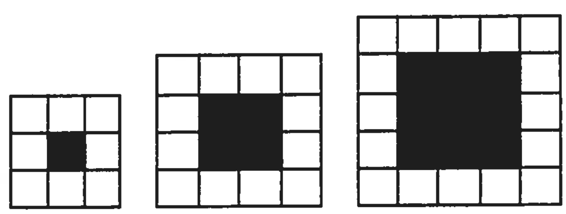


Figure 21: Suite de patterns propice à une généralisation, exemple tiré de Bell (1993, p. 28)

Dans la figure 21, si n désigne le nombre de carrés non colorés sur un côté, alors le nombre total de carrés non colorés peut s'exprimer de différentes façons: $n^2 - (n - 2)^2$, $4n - 4$ ou $4(n - 1)$, ou encore $4(n - 2) + 4$. La validation peut reposer sur les propriétés du carré.

De ce second paradigme, et à la suite de Vergnaud (1988), nous retenons que «l'algèbre représente une rupture par rapport à la géométrie parce qu'elle constitue un détour formel»: de l'algèbre considérée comme outil permettant de résoudre les problèmes du monde réel, on est passé à la représentation de structures algébriques en tant qu'éléments nécessaires à la poursuite ultérieure de l'étude des mathématiques pures. L'utilité immédiate de l'algèbre a perdu de son importance au profit d'objectifs plus mathématiques: la précision du langage et la démonstration déductive. La géométrie, quant à elle, est menacée par les idées dogmatiques sur la rigueur mathématique qui s'expriment de deux façons: l'adoption de la géométrie dans un système mathématique comme l'algèbre linéaire, ou son étranglement par une axiomatique rigide (Freudenthal, 1971).

De très nombreuses leçons relatives à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction sont construites sur un modèle où l'on donne à voir aux élèves, l'abstraction étant supposée immédiate et facile. Nombreux sont les enseignants qui peuvent témoigner du contraire, car comme le note Pressiat (1996, p. 17), «il est clair que ce que l'on fait dans ces exemples "concrets" n'est que la pâle copie du fonctionnement abstrait, algébrique, d'où le caractère spécieux d'une telle approche, faussement empiriste», approche qui repose sur des raisons de simplification didactique. En commentant les programmes guinéens de 1995, l'Institut National de Recherche et d'Action Pédagogioque (INRAP) confirme cette approche empiriste, caractérisée par la poussée vigoureuse de l'algébrique et l'évanouissement de l'apprentissage des outils géométriques: «La propriété de Pythagore sera utilisée de manière performante en classe de 10^e année avec l'introduction de la notion de radical d'un nombre» (Ibid., p. 59).

Vergnaud (1996, p. 219) remarque, en outre, que «dans les situations habituelles les données sont immergées dans un ensemble d'informations peu ou pas pertinentes, sans que soient toujours clairement exprimées les questions qu'on peut se poser». De telle sorte que le traitement de ces situations suppose à la fois l'identification des questions et celle des opérations à faire pour y répondre. Les intentions qui se créent au cours du processus d'enseignement - celles de dégager le noyau explicite de la signification des concepts en les réduisant à des formules et procédés - ont pour corollaire de laisser la place aux formules et aux algorithmes pour eux-mêmes et de ne plus fournir d'explication globale. C'est surtout dans l'enseignement des IR que nous trouvons une telle forme de transmission du sens. Les formules, les lois mathématiques sous leur forme algébrique, sont souvent le seul aboutissement du processus d'explication. Tout se passe comme si les IR ne devraient pas être comprises, mais mémorisées par l'élève. En s'appuyant sur la dialectique «outil/objet», où la complémentarité conceptuelle constitue un moyen d'analyse didactique et psychologique du développement des concepts (Douady, 1984; Vergnaud, 1984), la présente recherche contribue à sortir de ce cycle de simplification réductrice et de disparition concomitante du sens.

Le troisième paradigme des recherches présente justement l'apport du calcul algébrique fonctionnel conforté par la modélisation au calcul algébrique formel.

3.Calcul algébrique formel/calcul algébrique fonctionnel

Chevallard (1989) constate qu'à l'issue du collège, la manipulation des graphies algébriques n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique. En effet, dans la réalité des classes et des manuels, les exemples d'emploi fonctionnel de l'algèbre au collège sont rares, alors qu'ils sont incontournables et se présentent sous une forme institutionnalisée au lycée. Par exemple, f(x) désignant la fonction à étudier $(x^3 + x^2 - 2x)/(x^2 - 5x + 6)$, l'écriture $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ est utile pour déterminer le domaine de définition. Encore, faut-il vérifier qu'un prolongement par continuité est impossible (ce qui serait ici le cas si le numérateur s'annulait pour $x = 2$ ou $x = 3$). La réécriture adaptée de f(x) facilite le calcul des limites en ces points: $f(x) = [(x^3 + x^2 - 2x)/(x - 3)]/(x - 2)$.

Dans cette réécriture, le numérateur (qui est lui-même une fraction rationnelle) tend vers une limite finie non nulle, ici –8. On en déduit que lim $f(x) = -\infty$ (lorsque x tend vers 2 par valeurs supérieures) et que lim $f(x) = +\infty$ (lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures). La réécriture de f(x) correspond, mais «à l'envers», au schème $(a/b)/c = a/(bc)$. Chevallard (1989, p. 48) souligne que «cette réécriture n'a, bien sûr, aucune raison d'apparaître dans le maniement formel des expressions algébriques, puisqu'elle ne correspond ni à une consigne de développement, ni à une consigne de factorisation, etc». En fait, elle se justifie tout entière ici par une fin extrinsèque au calcul lui-même, une fin à l'égard de laquelle le calcul constitue un moyen: la détermination des limites. Ce type d'emploi fonctionnel (c'est-à-dire tendu vers un autre but que lui-même) est très fréquent au lycée, mais les élèves y sont mal préparés au collège, ce qui, de l'avis de Pressiat, joue un rôle non négligeable dans l'échec au lycée.

3.1 Transposition et conceptualisation

La transposition didactique, qui modifie le fonctionnement des objets de savoir, confère une certaine spécificité au rapport officiel que l'enseignement dispensé propose à l'élève. Ce rapport officiel engendre chez ce dernier un rapport personnel qui, ayant cessé d'être un pur enjeu didactique, ne sera plus qu'un praxème de l'activité scolaire, dès lors que dans le cas de l'exemple précédent, la factorisation du dénominateur cessera d'être le but de son activité, pour devenir le moyen de déterminer le domaine de définition. Aussi, pouvons-nous constater, à la suite de Vergnaud (1981a) que «pour bon nombre d'élèves, [comme pour la plupart de leurs maîtres], ce sont les symboles et les opérations sur ces symboles [qui] constituent l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématique, [alors que] cette connaissance et cette activité se situent principalement au [double] plan conceptuel [et pratique]». Vergnaud (1996, p. 239) ajoute que «en dernier lieu, c'est l'action du sujet en situation qui constitue la source et le critère de la conceptualisation».

Cette conceptualisation ou construction des notions mathématiques dans l'esprit de chacun n'est pas linéaire, comme on a pu le croire, mais très complexe. On a longtemps enseigné les mathématiques (et on continue de le faire) comme une science toute faite. En particulier, les IR et les concepts sous-jacents étant élaborés en définitions, formules et théorèmes, on demande aux élèves de les combiner et de les appliquer dans les problèmes abstraits, ce qui ne convient qu'à une minorité, d'où les nombreuses difficultés que la majorité des élèves éprouvent à s'y exercer. C'est cet effort de conceptualisation qui constitue l'élément central que nous développons dans le travail du dispositif de Conakry. L'utilisation du calcul algébrique fonctionnel devrait permettre de réhabiliter les contenus de connaissance (i.e., règles de calculs rapides, règles de signes) trop souvent minimisés ou effacés par l'approche structuraliste.

3.2. Identités, outil de calcul algébrique fonctionnel

Selon Vergnaud (1996, p. 198), «un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'élève». Nous pouvons ainsi considérer les situations où nous pouvons nous servir des IR pour prouver que le carré de tout nombre entier terminé par 5 se termine par 25. Outre le fait que l'égalité $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$ nous permet de prouver notre affirmation, elle nous indique également un procédé très pratique de calcul du carré d'un nombre entier terminé par 5. En effet, n étant le nombre formé par les chiffres autres que l'unité du nombre $10n + 5$, le nombre formé par les chiffres, autres que les deux derniers chiffres 2 et 5, du carré $(10n + 5)^2$ du nombre, s'obtient en multipliant n et $n + 1$.

Ainsi, comme le souligne Vergnaud (1996, p. 224), «beaucoup de questions seraient mieux enseignées si leur statut était mieux connu. Or les élèves n'en comprennent que faiblement les tenants et aboutissants: d'un côté parce qu'elles sont conceptuellement difficiles, de l'autre parce qu'elles mettent en jeu de nombreux éléments», éléments qui relèvent du savoir enseigné et du savoir savant. Pour nous, cette dialectique entre le numérique et l'algébrique devra être confortée par la dialectique, tout aussi importante, entre l'algébrique et le géométrique. Il nous faut donc considérer des classes de problèmes, de représentations symboliques et géométriques qui organisent cet ensemble. Aussi, le quatrième paradigme des recherches embrasse-t-il les questions liées à l'importante notion de modélisation. Nous constatons, avec Chevallard, que cette notion permet de développer une vue d'ensemble sur les activités mathématiques, de l'école primaire à l'université.

4. Modèles et modélisation

La question de la fonctionnalité du calcul algébrique que soulève Chevallard requiert des domaines d'emploi. Ceux auxquels on recourt fréquemment sont des emplois intramathématiques (systèmes de nombres); d'autres usages ont trait à l'étude mathématique d'objets extramathématiques: systèmes physiques, biologiques, sociaux, etc. Chevallard (1989, p. 53) rapporte que «c'est d'ordinaire à l'étude mathématique de tels systèmes non mathématiques que l'on réserve le nom de "modélisation mathématique"». Pour recouper les deux domaines d'emploi (habituellement séparés), Chevallard réfère à «un schéma général de modélisation, dans le dessein d'appréhender sous des catégories communes les emplois intramathématiques et extramathématiques auxquels nous nous intéressons» (Ibid., p. 53). Les modèles dont il est ici question sont pour la plupart implicites et s'expriment dans divers supports d'expression (ou systèmes de signifiants): formes géométriques, graphies algébriques, langages naturels ou conventionnels, etc. Chevallard appelle modèle le résultat même de cette expression. Par exemple, parmi les modèles explicites des IR, ceux illustrés par les figures 4 ci-dessus peuvent être collectivement partagés pour une certaine lecture de ces identités. Par contre, dans certains cas, comme dans les activités de découpage/recollage, le modèle sert, lui- même, de lieu d'expérimentation pour étendre les connaissances sur le domaine de réalité (ou système initial).

Chevallard trouve que la modélisation est intéressante lorsqu'elle permet de produire des connaissances qu'une autre voie ne nous donnerait pas aussi aisément. En effet, notre propre expérience nous fait observer, par exemple, qu'il n'y a qu'un seul développement (algébrique) d'un cube alors que nous pouvons dénombrer onze façons de le développer géométriquement, dont voici huit (figure 22).

Figure 22: Huit des onze développements géométriques d'un cube

4.1 Les modèles géométriques

Le point de départ des modèles géométriques est, selon Laborde (1994, p. 55), «ce qu'on a souvent appelé "géométrisme hellène", dont l'inventivité est due, en partie, à l'obstacle à une avancée purement algébrique que constituait pour les Grecs anciens leur numération engoncée dans le carcan de leur alphabet». Laborde a dégagé, à l'aide d'un exemple de ce géométrisme hellène, les caractéristiques géométriques sur lesquelles s'appuient les procédés de résolution d'un problème algébrique. Pour elle, le choix du domaine algébrique permet de mieux mettre en évidence, par contraste, le rôle du géométrique dans la solution de l'équation ax = b. Rappelons que résoudre cette équation revient à construire un rectangle dont on connaît le côté *a* et l'aire *b*.

Du point de vue de la modélisation, il est plus adéquat de distinguer «figure» de «dessin» comme cela a déjà été proposé par Laborde (1990, p. 57-58): «La figure est l'objet mathématique du modèle euclidien pris comme domaine de réalité, tandis que le dessin est une matérialisation de la figure sur le papier, (...) sur l'écran de l'ordinateur, un modèle de la figure». Les difficultés des élèves liées à l'interprétation des dessins en tant que modèles de figures ont néanmoins été dégagées depuis quelque temps. Ces difficultés concernent la confusion entre figures semblables et figures équivalentes, la non-familiarité avec les unités arbitraires (non conventionnelles) qui sont très peu utilisées dans les situations scolaires de mesure d'aire, et la non-discrimination entre «aire», «superficie» et «surface».

Nous nous intéressons aussi aux caractéristiques des modèles géométriques qui rendent leur prégnance si forte en algèbre, en général, et sur les IR, en particulier.

4.2 Caractéristiques des modèles géométriques et algébriques

Chevallard (1989, pp. 55-56) note que «c'est le travail du modèle qui apporte la lumière aux relations [de modélisation] et ces relations constituent une nouvelle connaissance, dont on n'avait peut-être pas entrevu jusque-là la possibilité». Il souligne également le caractère réversible de la relation de modélisation: «Le rapport du système au modèle peut, en effet, s'inverser: le système peut apparaître, à rebours, comme un modèle de son modèle» (Ibid., p. 55). Ainsi, dans la figure 4a ci-dessus, les rapports entre les aires sont modélisés par l'égalité algébrique $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Inversement, on peut regarder la figure 4a comme un modèle géométrique de cette égalité algébrique. Et, constate Chevallard, «c'est par la considération de tels modèles géométriques que Alkhwarizmi procédait pour étudier et résoudre les équations du second degré» (Ibid., p. 57). Ce que Chevallard a appelé plus haut «travail du modèle» peut être interprété comme la construction de modèles successifs mieux adaptés à l'étude. Cette «réccurence» des modèles se conjugue avec la réversibilité de la relation de modélisation.

Nous retrouvons ici le thème du «jeu de cadres» développé par Douady (1986). Par exemple, pour trouver les racines de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$, on peut trouver avantage à se tourner vers le modèle algébrique constitué des équations $x_1 + x_2 = 4$ et $x_1.x_2 = 3$, modèle qui montre immédiatement que les nombres 1 et 3, dont la somme vaut 4 et le produit 3, sont les racines de l'équation proposée. Il n'y a pas d'autre solution (en dehors de $x_1 = 1$, $x_2 = 3$) puisque c'est une propriété générale de ces systèmes mathématiques que sont les équations du second degré que de n'admettre pas plus de deux solutions. En d'autres termes, il faut connaître le modèle algébrique ($S = x_1 + x_2 = b$; $P = x_1.x_2 = c \Leftrightarrow x^2 + bx + c = x^2 - Sx + P$) pour décider, d'une part, si un problème impliquant un tel trinôme peut être représenté par un tel modèle et, d'autre part, pour savoir que l'outil ($x^2 - Sx + P$) satisfait aux caractéristiques de ce modèle.

La portée de l'algèbre est quelque peu limitée; la clé du succès dans son utilisation, ce n'est pas de désigner par des lettres les inconnues, mais aussi de désigner par des lettres les quantités connues (les données); autrement dit, ce qui fait la force de l'algèbre, ce sont les paramètres, les variables du système dont les valeurs sont supposées connues, mais que malheureusement les élèves ont de la «misère» à comprendre. Cette difficulté tient au passage difficile de la lettre qui sert seulement à désigner un nombre ou une grandeur (l'inconnue) à la lettre qui a un statut de variable, c'est-à-dire d'objet mathématique indéterminé mais qui est le même malgré les traitements (transposition, factorisation, etc.) que l'on fait subir à l'expression qui la contient. Ce passage difficile est un obstacle pour de nombreux élèves. En outre, la fonctionnalité du modèle géométrique suppose l'emploi des praxèmes à composantes algébriques; elle suscite la ré-appropriation de la notion de formule (en mettant en avant autant leur production à partir de la modélisation que leur mise en œuvre par la formalisation algébrique); elle conduit à envisager la familiarisation avec les formes géométriques et les tuiles algébriques. De même, pour rendre fonctionnels les écritures littérales et le traitement des IR, un réel travail d'appropriation de l'addition, de la multiplication, de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, en plus du travail essentiel de compréhension des symboles (parenthèses, égalité) devra être accompli.

4.3 Des modèles concrets

L'efficacité des modèles concrets a fait l'objet d'une recherche conduite par Filloy et Rojano (1984, 1985). Dans leur expérience d'enseignement, Filloy et Rojano se proposent d'aider les élèves à créer un sens pour les équations de type $ax + b = cx$ et un sens pour les opérations utilisées dans leur résolution. Essentiellement géométrique, leur approche s'illustre comme suit (figure 23) pour résoudre le problème suivant:

> Une personne dispose d'un lopin de terrain de dimensions A et x. Ensuite, elle achète une parcelle adjacente d'aire B mètres carrés. Une seconde personne lui propose d'échanger ce domaine contre le sien sur la même rue, ayant une meilleure forme (d'un seul tenant). Combien de mètres doit mesurer la largeur pour que l'échange soit équitable? (Traduction libre).

Figure 23: Modélisation d'une situation exprimée par les équations de la forme ax + b = cx, selon Filloy et Rojano (1985 a, p. 56)

Filloy et Rojano constatent que plusieurs élèves ont tendance à choisir les modèles concrets, mais qu'ils semblent incapables de voir les connexions entre les opérations effectuées sur le modèle géométrique et les opérations algébriques correspondantes. Cependant, nous pensons qu'un apprentissage basé à la fois sur le modèle algébrique et sur le modèle géométrique est possible et fécond. En effet, dans une phase d'introduction à l'algèbre, et à la suite de Vergnaud (1988, p. 190), «il faut utiliser des situations [algébriques et géométriques] qui conduisent l'élève à comprendre le caractère symétrique et transitif de l'égalité, en même temps qu'il faut introduire les règles élémentaires de manipulation des équations, qui conservent cette égalité».

Telles qu'elles sont habituellement présentées et dans leur statut de graphies algébriques, les IR auraient du sens par elles-mêmes, indépendamment des procédures qu'elles représentent dans la résolution de problèmes. Cette attitude est délibérée en ce sens qu'il n'est pas difficile de trouver des enseignants, tant dans le secondaire qu'à l'université, qui promeuvent ce type d'approche. Un enseignement réduit au seul calcul symbolique donne presque toujours l'illusion d'une connaissance, tout en masquant une absence de sens ou de fondements. De même, si l'on enseigne les IR en faisant un usage abusif d'une représentation concrète unique (i.e., les modèles géométriques), il peut en résulter que certains élèves se familiarisent très bien avec cette représentation sans saisir pour autant les concepts sous-jacents qu'elle est censée illustrer. Ces concepts étant des entités abstraites, il est raisonnable de chercher à faciliter leur acquisition à l'aide d'un certain nombre de modèles faciles à associer aux concepts qu'ils illustrent. Mais l'enseignant doit prendre garde au fait que certains élèves peuvent très bien assimiler tout ce qui caractérise les modèles concrets des concepts sans pour autant appréhender les concepts eux-mêmes.

Avant d'exposer le détail des situations de modélisation retenues pour l'ingénierie didactique, il convient d'examiner les positions développées par les programmes officiels et les pratiques suscitées par les auteurs de manuels scolaires.

5. Positions développées par les programmes officiels et les auteurs de manuels sur l'enseignement des IR

Les nouveaux programmes du Collège, qui sont progressivement mis en place depuis 1995, sont en conformité avec les décisions du 4e Séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre ces pays remonte à l'année 1983 où fut organisée par l'Institut de Recherche en Mathématiques Appliquées (IRMA), à Abidjan, le premier séminaire. Depuis, d'autres séminaires ont suivi: en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en 1992 à Abidjan, avec la participation de 20 pays. La suite logique en a été l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de Manuels de Mathématiques (CIAM) pour l'enseignement secondaire. Cette collection a pour objectifs majeurs, entre autres, «l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion» (p. 3).

Examinons d'abord les positions des programmes sur les points ci-dessus évoqués.

5.1. Concernant les programmes

Des programmes officiels déterminent les contenus d'enseignement du collège et du lycée. L'objectif sembait clair: savoir calculer, savoir traiter des exercices types, c'est-à-dire des exercices analogues à ceux qui sont traités en classe. Le mot «calcul» devait donc être pris au sens de «mise en place de mécanismes» ou renvoyer à des ensembles d'exercices types. On était presque toujours loin de l'activité mathématique qui consiste à résoudre des problèmes ou poser des questions. Plus récemment, les nouveaux programmes marquent une évolution qui ne s'est pas faite sans heurts. Selon l'INRAP (1997, p. 5), «les nouveaux programmes tiennent compte des recherches actuelles en didactique des mathématiques et visent à corriger quelques dysfonctionnements des anciens programmes». Leurs orientations générales se traduisent par quelques grands principes: consolider et renforcer les connaissances antérieures des élèves, favoriser leur participation active à leur apprentissage et favoriser le processus de résolution de problèmes. Dans ses commentaires généraux, l'INRAP (1997, p. 5) souligne que «les élèves doivent faire un maximum de manipulations et d'exercices. [...] Il s'agit d'activités de l'élève, non du professeur (...). C'est pourquoi le cours doit être bref, son contenu doit se limiter aux savoirs explicités dans la présente brochure». S'agissant du programme de la 9^e année qui est conçu pour l'apprentissage de connaissances nouvelles (dont les IR), l'INRAP (1997, p. 57) le commente en ces termes:

> *«Il s'agira pour le professeur de mener sa classe de façon à consolider les savoirs et savoir-faire acquis en classe de 7^e et 8^e années en les réinvestissant immédiatement dans des exercices; enrichir ces connaissances de façon à assurer la progressivité de leur acquisition; utiliser ces nouveaux acquis dans des situations variées au travers de la résolution d'exercices qui donnent du sens à ces nouvelles connaissances, en tenant compte dans la mesure du possible de l'environnement socioculturel proche de l'élève.*

Nous avons choisi d'analyser les sections numériques, algébriques et géométriques du programme de 9^e pour trois raisons. D'abord, nous constatons que «comme dans les classes précédentes, les notions numériques présentées en 9^e année sont des outils et non des objets d'étude pour eux-mêmes» (Ibid.; p. 59). En plus, ce sont les principes psychopédagogiques qui orientent les activités numériques. En effet, dans ces activités, «l'élève devra avoir des réflexes d'auto-contrôle, choisir la démarche la plus performante pour effectuer un calcul numérique, adopter une démarche expérimentale pour de nombreux exercices» (Ibid.; p. 58). Deuxièmement, au début du collège, les lettres sont introduites dans les programmes comme une commodité d'écriture pour nommer les objets et les décrire. Cette commodité s'enrichit très vite en une sténographie qui sert à résumer les propriétés géométriques, numériques ou algébriques des objets que l'on étudie. «En classe de 9^e année, il est question d'amener l'élève à manipuler des expressions littérales au sens général du terme, sans nécessairement que les lettres aient un sens» (Ibid.; p. 77).

Il est attendu que l'enseignant parte de l'organisation du calcul numérique pour présenter celle du calcul littéral. On s'attend à ce qu'il puisse ainsi reprendre, en les formalisant au besoin, les règles essentielles du calcul numérique sur les nombres relatifs. Ces règles seraient aussi celles du calcul littéral. Troisièmement, en géométrie, les lettres sont utilisées dans les formules de calcul des périmètres, des aires et des volumes des figures usuelles. Des remarques s'imposent d'emblée. La nécessité d'utiliser les expressions littérales (surtout avec les parenthèses) n'est pas toujours évidente pour bon nombre d'élèves. En effet, comme l'ont révélé les études de Booth (1984) et de Vergnaud (1981b, 1996), ce sont là des connaissances qui sont apportées comme des évidences culturelles, sans faire l'objet d'une construction didactique. De ce fait, elles ne sont pas fonctionnelles pour les élèves et nous pouvons craindre qu'elles aient du mal à le devenir, lorsqu'elles seront sollicitées dans un contexte d'intégration des connaissances.

Nous notons aussi l'insuffisance de l'explication de la nature des IR, surtout dans les programmes guinéens qui envisagent très peu de situations de modélisation et d'intégration des connaissances. Cette insuffisance est due, en partie, au fait que les IR sont essentiellement présentées dans l'unique cadre algébrique et dans le seul contexte de multiplication de binômes ou de factorisation de polynômes. En leur déniant ainsi le statut d'«outil/objet» et en ne leur donnant que l'unique mandat de représenter les «cas remarquables» de produits binomiaux, on impose du coup une attache empirico-algébrique de leur conceptualisation mathématique et de leur utilisation didactique. Certes, le programme prévoit qu'«[on mette ces IR] en évidence en les visualisant à l'aide d'un support géométrique, ceci étant un des moyens de remédier à l'une des erreurs trop fréquemment rencontrées: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$» (Ibid.; p. 77). Le programme prévoit également que «ce chapitre [soit] l'occasion d'utiliser les développements d'un produit et les produits remarquables pour faire du calcul rapide et du calcul mental aux élèves en leur faisant dégager des méthodes ...» (Ibid., p. 77). Mais aucune mention n'est faite des activités qui permettent de réaliser de tels objectifs. Le Séminaire de Conakry, qui fait l'objet du chapitre 5, explicite tout ce à quoi réfèrent les IR et leur utilité en dehors de la vue simplificatrice que semble leur faire l'enseignement classique.

L'idée directrice des programmes est d'initier les élèves aux algorithmes de calcul et aux conventions usuelles d'écriture. Pour cela, la démarche suggérée est de schématiser, à partir des situations «concrètes» (numériques s'entend), un algorithme de calcul en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des nombres. Introduites essentiellement, sinon exclusivement, dans des situations algébriques en 9^e^ ou 10^e^ pour calculer rapidement les produits spéciaux, les IR apparaissent en 11^e^ et 12^e^ pour résoudre les équations, factoriser ou décomposer les polynômes, ou encore pour simplifier certaines graphies algébriques. Dans les classes de 9^e^ ou 10^e^ qui nous intéressent, les IR sont ainsi enseignées pour faire énoncer des règles dont la formulation en français serait trop lourde à mémoriser. En Guinée, comme en d'autres lieux, leur utilisation, déjà pratiquement dérisoire, se veut prudente; on n'y met que peu ou pas d'accent sur le rôle des modèles et de leur intégration. Bien sûr, on y étudie les identités trigonométriques, mais sans insister sur les aspects géométriques qui déterminent pourtant leur spécificité, qui leur confèrent une certaine «remarquabilité». Les connexions que nous voulons établir entre les connaissances algébriques et géométriques se révèlent en tout premier lieu dans les questions qui traitent de l'utilisation d'un support géométrique pour un traitement qualitatif des IR et, au-delà même de ces questions, de la formation des futurs enseignants à l'intégration de ces connaissances.

5.2. Concernant les manuels scolaires

Dans les manuels scolaires, les éléments des programmes officiels sont diversement interprétés. Selon les manuels, les approches des IR sont différentes en bien des points.

5.2.1 Les manuels de la collection inter-africaine de mathématiques (CIAM)

Les ouvrages de la collection CIAM, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les «motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice». Les IR sont présentées sous la rubrique «calcul littéral – égalités remarquables». En termes de savoir-faire, on y mentionne que «l'élève doit être capable d'établir les égalités $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Conformément à leur conception de l'enseignement des mathématiques, «[les auteurs] n'ont pas voulu présenter des leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents … sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves». Une rubrique résume, dans les encadrés, les résultats fondamentaux, les définitions ou les propriétés qu'il faut retenir. Les encadrés sont le plus souvent étayés d'exemples. Des «points de méthode» signalent brièvement quelques applications de la propriété ou de la définition concernée.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate devraient permettre l'assimilation des notions étudiées. Pour chacune des situations classiques proposées à l'élève, un ou plusieurs exemples indiquent la démarche à suivre et la rédaction souhaitée. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement devraient permettre aux élèves de «mettre en pratique directe des notions du cours, d'organiser les connaissances et d'élaborer des raisonnements». Nombreux et progressifs, ces exercices permettraient, en somme, aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement. On y fait, certes, appel au support géométrique, sans pour autant se baser sur les formes géométriques et les tuiles algébriques. C'est, d'ailleurs, de façon assez brève, pour ne pas dire timide, qu'ils utilisent les modèles comme ceux qui sont illustrés par les figures 4 ci-dessus.

En plus de la collection CIAM, nous avons analysé d'autres manuels dont certains partent de l'idée générale d'identité algébrique remarquable (englobant, entre autres, la formule du binôme de Newton, les relations trigonométriques fondamentales) pour aboutir à la classe des IR proprement dites. C'est le cas de De Champlain et al. (1996). D'autres, fidèles à l'esprit du programme, abandonnent dans la partie «travaux numériques» les formulations littérales au profit des exemples; c'est le cas de Vance (1967) et d'Assouline et al. (1995).

5.2.2 De l'identité trigonométrique à l'identité algébrique (De Champlain et al., 1996)

Pour De Champlain et al. (1996), l'identité algébrique est l'égalité qui est vérifiée pour toutes les valeurs numériques que l'on peut donner aux variables qu'elle contient. Le symbole «≡» est parfois utilisé pour indiquer les identités trigonométriques, mais on conserve généralement le symbole «=» dans les identités algébriques. De Champlain et al. en donnent quelques exemples: l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et la formule du développement du binôme de Newton $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ sont des identités algébriques; tandis que la relation $\sin(A + B) = \sin A.\cos B + \sin B.\cos A$ est une identité trigonométrique.

Les coefficients du binôme de Newton (coefficients binomiaux) sont trouvés par la formule $C_{(n,k)} = n!/k!(n - k)!$, qui s'écrit sous la forme généralisée $(a + b)^n = \Sigma C_n a^{n-k} b^k$. Le triangle de Pascal permet de déterminer ces coefficients, sans connaître ces notations. Il suffit d'écrire les coefficients sur une ligne du triangle, comme l'indique la figure ci-dessous (figure 24). On commence par $(a + b)^0 = 1$, par $(a + b)^1 = a + b$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, et ensuite on utilise l'équation $(a + b)^n = \ldots$

1	$(a + b)^0$	$n = 0$	**1**	$k = 0$
1 1	$(a + b)^1$	$n = 1$	**1 1**	$k = 1$
1 2 1	$(a + b)^2$	$n = 2$	**1 2 1**	$k = 2$
1 3 3 1	$(a + b)^3$	$n = 3$	**1 3 3 1**	$k = 3$
1 4 6 4 1	$(a + b)^4$	$n = 4$	**1 4 6 4 1**	$k = 4$
1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5$	$n = 5$	**1 5 10 10 5 1**	$k = 5$

Figure 24: Développement du binôme de Newton à l'aide du triangle de Pascal

Le triangle de Pascal correspond à la représentation des suites de nombres qui sont disposés sous la forme d'un triangle. Cet arrangement présente plusieurs caractéristiques intéressantes. Entre autres, chaque nombre du triangle s'obtient en additionnant les deux nombres qui sont situés immédiatement au-dessus de lui.

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

L'expression *«identités trigonométriques»* est donnée à certaines relations qui existent entre divers rapports trigonométriques. Certaines de ces identités sont fondamentales et découlent, par définition, de l'étude du triangle rectangle. D'autres identités trigonométriques découlent de l'étude du cercle trigonométrique (figure 25).

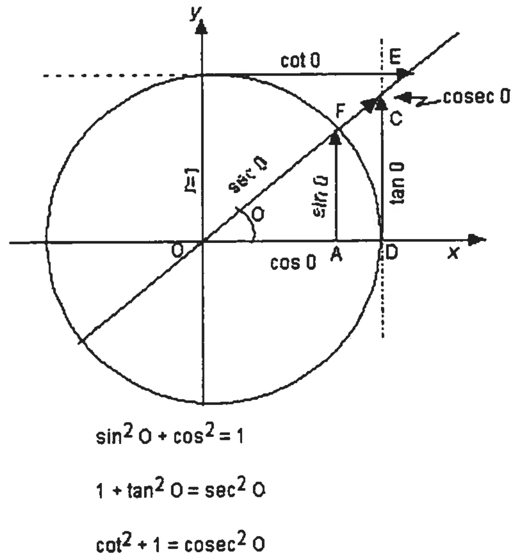


Figure 25: Identités trigonométriques

Nous pouvons noter que, conformément aux programmes, la résolution de problèmes, qui doit nourrir les activités, ne fait pas l'objet d'un chapitre en soi, ce qui donne lieu à des pratiques très variées. Ainsi, chez De Champlain et al., par exemple, nous pouvons voir traitées dans un même chapitre les notions aussi diverses que la décomposition des polynômes, la mise en évidence des facteurs, la simplification des écritures polynomiales, le calcul de la différence de deux carrés et la complétion du carré. Pour De Champlain et al., décomposer un polynôme, c'est chercher des polynômes de degrés inférieurs dont le produit est égal au polynôme donné; ils appellent cette opération une «factorisation». Ils exposent les deux principales formes de décomposition, à savoir la mise en évidence simple d'un facteur commun à plusieurs autres et la complétion du carré. Ils trouvent en cette dernière une technique qui permet d'obtenir le carré d'un binôme à partir d'un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$, technique qui donne: $x^2 + bx + c = x^2 + bx +(b/2)^2 + [c - [b/2]^2] = (x +b/2)^2 + [c - (b)^2/2]$.

Nous n'exagérons rien en affirmant qu'il faut que l'élève soit un «expert» en herbe et qu'il dispose d'une gamme de références pour faire d'emblée les choix adéquats et parcourir sans heurt les différentes étapes de cet algorithme. En effet, même si la démarche de complétion est illustrée par quelques exemples, les questions du nombre de transformations à opérer sur les coefficients et du comment les choix s'effectuent n'y sont pas abordés. Rien n'est dit des différentes voies que les élèves ne manquent pas d'explorer, dont certaines conduisent à des impasses (mais susceptibles d'éclairer ces voies). Pour ces raisons, la présentation qui est faite des exemples de complétion peut ne pas garantir la réussite des élèves dans la complétion d'autres carrés.

5.2.3 Identités remarquables, telles qu'enseignées par Vance

Vance (1967, p. 44) présente les IR comme faisant partie de certains «produits spéciaux qui se présentent si fréquemment qu'ils ont fait l'objet d'une catégorisation». Il s'agit des produits suivants: (i) $a(x + y) = ax + ay$ (ii) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (iii) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ (iv) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ (v) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (vi) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ (vii) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (viii) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$. Le lecteur devrait déterminer laquelle de ces formules est utilisée dans les illustrations suivantes:

Illustration1: $(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y) = (2x^2)^2 - (3y)^2 = 4x^4 - 9y^2$.

Illustration2: $(3x + 4y)(2x - 3y) = 6x^2 + (-9 + 8)xy - 12y^2 = 6x^2 - xy - 12y^2$.

Illustration3: $(x + y - 1)^3 = [(x + y) - 1]^3 = (x + y)^3 - 3(x + y)^2 + 3(x + y) - 1.$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 + 3x + 3y - 1$$

Ici, $(x + y)$ est considéré d'abord comme un seul terme.

Illustration4: $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4) = (3x + 2y)[(3x)^2 + (3x)2y + (2y^2)]$

$$= (3x)^3 + (2y)^3 = 27x^3 + 8y^3.$$

5.2.4 Les identités, «formes fréquentes» chez Kolman et Shapiro

Chez Kolman et Shapiro (1980), nous rencontrons la multiplication des formes simples de polynômes tels que: $3x.x = 3x^2$ et $2x(x + 4) = 2x^2 + 8x$. Selon eux, il suffit d'utiliser la règle des exposants: $a^n. a^m = a^{n+m}$ et les lois distributives: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ pour pouvoir déterminer le produit de deux polynômes quelconques. Leur stratégie est de «renommer» les termes et les groupes de termes de manière qu'ils correspondent à l'une des formes distributives (par exemple, la seconde). L'exemple suivant illustre comment procéder:

$$(\underset{a}{x} + \underset{b}{2})\underbrace{(3x^2 - x + 5)}_{c} = \underbrace{x(3x^2 - x + 5)}_{ac} + \underbrace{2(3x^2 - x + 5)}_{bc}$$

$$= 3x^3 - x^2 + 5x + 6x^2 - 2x + 10$$

$$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 10$$

Kolman et Shapiro notent qu'on peut, en général, multiplier deux polynômes en multipliant l'un des deux par l'autre et en additionnant les produits partiels. En procédant ainsi, ils mettent en évidence les formes qui se présentent fréquemment et qui, selon eux, méritent une «attention spéciale»: $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$, $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. Ils proposent, ensuite, quelques exemples d'illustration et de vérification de la progression.

Exemples: Développer a) $(x + 2)^2$

$= (x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$

b) $(x - 3)^2$

$= (x -3)(x -3) = x^2 - 6x + 9$

c) $(x + 4)(x - 4)$

$= x^2 - 16$

Vérification de la progression: multipliez mentalement

a) $(x - 4)^2$ b) $(x + 1)^2$ c) $(2x - 3)^2$ d) $(2x+3)(2x-3)$

Réponses: a) $x^2 - 8x + 16$ b) $x^2 + 2x + 1$ c) $4x^2 - 12x + 9$ d) $4x^2 - 9$

Comme nous pouvons nous en rendre compte, tous ces auteurs de manuels considèrent les IR comme un ensemble de résultats ou de techniques qu'il faut apprendre. Peu d'entre eux les envisagent comme un langage qu'il faut savoir utiliser, comme des moyens pour maîtriser des situations. Le choix d'Assouline et al. (1995) n'est pas très différent, dans la mesure où les outils qu'ils élaborent ne peuvent être étudiés que pour eux-mêmes et ne permettent pas aux élèves de résoudre de véritables problèmes.

5.2.5 Identités, «cas particuliers» de produits de binômes chez Assouline et al., 1995).

À l'instar de Vance, Assouline et al. (1995) considèrent les IR comme des cas particuliers de produits de deux binômes. Ainsi, pour trouver $(a + b)^2$, ils consièrent le produit correspondant $(a + b)(a + b)$ auquel ils appliquent la distributivité. Ils nous invitent à effectuer le produit en disposant les facteurs horizontalement ou verticalement (Voir Problématique, p. 19). Ainsi, pour développer le produit $(a + b)(c + d)$, ils recommandent d'utiliser plusieurs fois la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction: $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$. En se promenant dans l'ensemble des nombres réels, cette propriété permet de développer les produits de polynômes tels que: $a(b \pm c) = ab \pm ac$. Assouline et al. proposent une autre méthode, appelée PEINT, pour trouver le produit de deux binômes. Chaque lettre ou groupe de lettres de cet acronyme est l'initiale d'une étape de la démarche. Cette méthode consiste à trouver les produits respectifs des Premiers termes, des termes Extérieurs, des termes

INtérieurs, et des termes Terminaux. À titre d'exemple, voici comment s'applique la méthode PEINT pour développer le produit (x + 3)(2x + 1).

$$\overset{2x^2}{(x + 3)(2x + 1)}$$

P Produit des *premiers* termes

$$\overset{x}{(x + 3)(2x + 1)}$$

E Produit des termes *extérieurs*

$$\overset{6x}{(x + 3)(2x + 1)}$$

IN Produit des termes *intérieurs*

$$\overset{3}{(x + 3)(2x + 1)}$$

T Produit des termes *terminaux*

De telle sorte que

$$\begin{aligned}(x + 3)(2x + 1) &= \overset{P}{2x^2} + \overset{E}{x} + \overset{IN}{6x} + \overset{T}{3} \\ &= 2x^2 + 7x + 3\end{aligned}$$

Aussi, Assouline et al. recommandent-ils de calculer le carré d'un binôme en le multipliant par lui-même, selon la méthode PEINT. Ils en donnent quelques exemples avant d'en arriver au schéma général suivant:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= \underbrace{a^2}_{\text{Carré du premier terme}} + \underbrace{2ab}_{\text{(+2) fois le produit des termes}} + \underbrace{b^2}_{\text{Carré du dernier terme}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= \underbrace{a^2}_{\text{Carré du premier terme}} - \underbrace{2ab}_{\text{(-2) fois le produit des termes}} + \underbrace{b^2}_{\text{Carré du dernier terme}}\end{aligned}$$

5.2.6 Types d'exercices souvent rencontrés dans les manuels

La plupart des auteurs de manuels que nous avons passés en revue proposent les exercices de types suivants:

1. Multipliez

a) $(x + 2y)(x - 2y)$ b) $(x + 0{,}1)(x - 0{,}1)$ c) $a(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ d) 101×99

2. Calculez

a) $(10t + 7s)^2$ b) $(a/2 - b/3)^2$ c) $2(1{,}2a - 0{,}4)^2$ d) $(a^2x^2 - y^2)^2$

3. Trouvez les termes manquants

a) $(x + 3)(\_\_\_\_\_) = x^2 - 9$ b) $(\_\_\_\_\_)(y + 4) = y^2 + 8y + 16$

c) $(3a + \_\_\_)^2 = \_\_\_ + 30ab - 9$ d) $(\_\_\_\_\_)^2 = 100x^2 - 100xy \_\_\_\_$

4. Simplifiez

a) $(x+1)^2 + (x+1)(x-1)$ b) $(2m+1)(2m-1) - (2m-1)^2$ c) $(x - 1/x)^2 + (x - 1/x)(x + 1/x)$

5.3 Quelques commentaires sur l'apport des études revues et leurs liens avec la présente recherche

Le survol des types d'exercices proposés nous permet de noter:

- le classement des exercices par ordre de difficulté croissante, tout portant à croire que l'enseignant s'efforce, une fois les exercices les plus faciles achevés, de faire «glisser» le maximum d'élèves vers une résolution couronnée de succès des exercices les plus difficiles, sans que le rapport réciproque de ces exercices ni la particularité des exercices les plus difficiles ne fassent l'objet de discussion;
- le manque d'activités didactiques à travers lesquelles l'élève peut découvrir le champ conceptuel des IR. Les concepts étant élaborés en définitions et algorithmes, il est peu probable que les élèves cherchent à comprendre pourquoi ça marche et pourquoi ça ne marcherait pas s'ils s'y prenaient autrement, puisque ça marche;
- la rareté, sinon le manque, de problèmes ouverts susceptibles de rendre les élèves capables de reconnaître des situations mettant en jeu les concepts enseignés.

La revue des écrits du domaine nous permet également de noter une certaine similitude sur le plan de deux observations: celui de la prégnance du modèle algébrique privilégié (formules, règles, symboles), et celui de la diversité de la hiérarchisation des stratégies de résolution à l'intérieur du modèle algébrique. Si la plupart de ces recherches s'inscrivent nettement dans la perspective d'une bonne compréhension des activités de construction de la multiplication chez les élèves et si elles contribuent à préciser le sens de la dévolution des continuités, il en est peu qui s'intéressent à l'analyse fine des comportements didactiques et qui tentent de faire évoluer les conceptions des élèves à partir de situations riches et variées; il en est peu qui mettent en connexion les cadres algébrique et géométrique. La plupart de ces études proposent des problèmes verbaux de différents types, encore que la variété au sein d'une même catégorie soit plutôt mince. Il en est très peu qui abordent la conceptualisation, alors que celle-ci constitue un référent essentiel pour situer l'ensemble des stratégies.

C'est précisément l'absence de commentaires sur l'intégration des connaissances qui nous gêne dans ces études et qui nous amène à les éclairer dans le cadre de la présente recherche. Par ailleurs, les questions concernant l'importance à accorder à chaque concept constitutif des IR, la façon d'organiser ou de regrouper ces concepts, et la façon de planifier leur enseignement sur une certaine période, sont rarement traitées de manière explicite par les chercheurs et auteurs de manuels visités. Les réponses à ces questions sont pourtant essentielles parce que l'appropriation de ces concepts doit s'inscrire, d'une part, dans la continuité qui relie les connaissances algébriques sur les IR entre elles et, d'autre part, dans l'intégration des connaissances construites au cours des activités de modélisation. C'est ce type d'analyses, largement développées pour chaque thème du Séminaire de Conakry, qui nous conduit à structurer différemment les apprentissages et l'enseignement des IR.

5.4 Des manuels québécois, comme modèle

Fort heureusement, nous notons que dans certains manuels québécois tels que *Carrousel et Scénarios*, les pratiques sont plus homogènes. Bon nombre d'entre eux ont le souci de ménager la connexion entre l'algébrique et le géométrique. Certes la collection CIAM utilise aussi un support géométrique, mais peu de problèmes motivent cette utilisation. Le matériel illustre quelques manipulations algébriques. Les manuels québécois valident ces manipulations, le travail avec les formes géométriques et les tuiles algébriques s'y intégrant au travail avec les graphies des IR. Toutefois, les limites de ces praxèmes sont passées sous silence dans *Scénarios*, alors qu'elles sont étendues dans *Carrousel* par l'adoption de conventions concernant les nombres négatifs et les monômes à coefficient négatif, comme l'indiquent les figures 7 ci-dessus Problématique, p. 28).

Une première convention consiste à représenter les monômes à coefficient négatif. On peut ainsi interpréter la soustraction comme la juxtaposition de tuiles blanches (non colorées) qui sont les opposées des tuiles colorées ou grises. Une deuxième convention consiste à situer les suites colorées (grises) à coefficient positif dans les premier et quatrième quadrants (par rapport à un système orthonormé) et à placer les tuiles blanches (non colorées) à coefficient négatif dans les deuxième et quatrième quadrants. Comme toute convention, ces codes doivent être nuancés pour minimiser le danger de faire penser à des aires négatives, de faire croire que la variable x est toujours positive et qu'elle devient négative lorsqu'elle est précédée d'un signe «moins». Cette remarque ne diminue en rien le rôle que les formes géométriques et les tuiles algébriques jouent dans *Carrousel*. Elles permettent de représenter les termes semblables et d'éviter les erreurs que les élèves commettent lorsqu'ils additionnent les monômes.

Le manuel *Scénarios* insiste sur les nombres derrière les graphies algébriques. On y précise que deux termes peuvent représenter le même nombre sans être pour autant semblables. Le fait d'y garder présent le nombre à la fois derrière la lettre et la représentation minimise les risques de déviation du matériel vers une lettre objet. Si les formes géométriques et les tuiles algébriques servent de support au raisonnement, les activités de modélisation non contextualisées peuvent créer des biais indésirables. En effet, l'enseignant ne devrait pas proposer les activités de modélisation sans faire sentir aux élèves la nécessité d'utiliser les tuiles, sans qu'un problème soit posé, sans que l'expression (par exemple, $x^3 - x^2 = x$) soit présentée avec information concernant ce qu'elle modélise, sans référence aux nombres. Demander à l'élève de dire si un tel énoncé est vrai ou faux n'a pas de sens: cet énoncé n'est ni vrai ni faux, tout dépendant du contexte.

En résumé, nous retenons que dans bon nombre de manuels québécois se présentent des occasions pour les élèves de recourir aux formes géométriques et aux tuiles algébriques, alors que dans les manuels utilisés en Guinée, nous en rencontrons au détour de quelques exercices, l'accent y étant mis sur l'aspect calculatoire. Les manipulations pseudo-géométriques qui y sont alors faites sont calquées sur la démarche arithmétique et sont perçues par les élèves comme un «accoutrement», c'est-à-dire un habillage théâtral de celle-ci. La démarche géométrique doit prendre tout son sens, non pas nécessairement en rupture avec la démarche algébrique, mais en complémentarité avec celle-ci. Tandis que les programmes québécois cherchent à inscrire cette démarche dans la continuité du travail algébrique formel, les programmes guinéens en font très peu cas, s'ils ne la taisent pas. Avec Bass (1905, p. 718), nous avons aussi retenu que:

> *Arithmetcic, geometry and algebra arose at pratically the same stage of civilization and have advanced in close contact, constantly receiving and giving aid to each other. Geometry has been the largest giver. Without it, arithmetic and algebra would probably never have their present position. We must therefore conclude that what has always been joined together in the development of the subject ought not to be put asunder in its teaching.*

Après avoir analysé les paradigmes de recherche actuels, les programmes en vigueur en Guinée et quelques activités proposées par les manuels guinéens et québécois, nous allons préciser, dans le chapitre suivant (chapitre 4), notre méthode de recherche ainsi que nos instruments de collecte des données.

CHAPITRE 4

MÉTHODOLOGIE

MÉTHODOLOGIE

Nous débutons ce chapitre par la présentation des sujets, de l'ingénierie didactique comme méthodologie de recherche et du dispositif expérimental. Dans une deuxième section, nous décrivons la structure, l'organisation, les composantes et les modalités de la mise en œuvre du dispositif expérimental. Nous poursuivons en décrivant, de façon globale, la formule du dispositif (séminaire/ingénierie) avant d'exposer ses fondements théoriques. Dans la troisième section, nous décrivons le contexte didactique dans lequel évoluent les sujets; nous décrivons le rôle, le contenu, l'organisation pratique et les activités du Séminaire. Nous précisons les activités planifiées dans le dispositif et les différentes étapes de l'expérimentation. Ceci nous amène à formuler nos hypothèses de travail. Viennent ensuite, dans la quatrième section, les techniques de collecte des données, les mesures retenues pour assurer la validité de cette recherche et le respect des règles d'éthique. La cinquième section traite de la façon dont nous analysons les données.

1.Choix des sujets

La population visée par cette étude est celle des étudiants du Département de mathématiques de l'UGANC et les futurs enseignants de mathématiques de l'ISSEG qui sont en voie de compléter leur formation dans le cadre du Certificat d'Aptitude à l'Enseignement Secondaire (CAPES). Comme profil académique, les sujets de l'ISSEG ont déjà tous obtenu une maîtrise en mathématiques avant de réussir le concours d'entrée à L'ISSEG. Lors de l'expérimentation, les sujets de l'UGANC étaient sur le point de terminer leur troisième année de formation académique, tandis que ceux de l'ISSEG se préparaient à effectuer leur stage en milieu scolaire, stage durant lequel ces derniers ont réalisé leurs séquences d'enseignement.

1.1 Critères de choix

Des chercheurs comme Lessard-Hébert et coll. (1990) pensent que le critère le plus important dans le choix des sujets en recherche qualitative est leur compétence pertinente par rapport à la problématique de recherche. Pour d'autres chercheurs, comme Merriam (1988), il s'agit d'orienter l'échantillonnage pour le but recherché par des critères ou des standards nécessaires à l'investigation. L'objectif ici est de sélectionner les futurs enseignants appelés à enseigner les IR aux élèves de 9^{e} ou 10^{e} année, après qu'ils aient participé aux activités du séminaire de formation. Nous pensons qu'au sortir du séminaire, ces sujets sont capables de concevoir, de réaliser et d'analyser les activités d'enseignement qu'ils auront conduites dans des vraies classes, qu'ils sont capables de parler de leurs méthodes de travail, de les analyser et de les évaluer. En plus, nous pensons qu'ils ressemblent à la plupart des futurs enseignants de l'ordre collégial, c'est-à-dire qu'ils ne se situent pas trop à l'un ou l'autre des extrêmes par rapport à des variables telles que la motivation, l'anxiété et les croyances irréalistes, comme l'ont montré les études de Blouin (1985) et de Merriam (1988).

Les sujets ont été tous invités par lettre personnelle à se présenter à la première rencontre d'informations. Au cours de cette rencontre, nous leur avons présenté les buts et le déroulement prévu de cette recherche, et avons sollicité leur collaboration volontaire pour participer à l'ensemble de la recherche (prétest, activités du séminaire, post-test, activités d'enseignement, analyses, entrevues, etc.). Les raisons qui ont motivé le choix des questionnaires et des activités du séminaire sont présentées dans la troisième section. En contrepartie, nous leur avons exposé quelques avantages au plan de la formation professionnelle, de la connaissance des IR et des méthodes d'enseignement. Il nous a paru important de leur offrir quelques avantages à participer à cette recherche, étant donné l'investissement considérable (en temps et en énergie) que cela leur a demandé.

Nous avons finalement retenu 27 sujets (6 de l'UGANC, 21 de l'ISSEG, dont une fille dans chaque groupe). Un formulaire d'engagement volontaire a été signé par chacun d'eux (Annexe A). Les questions de représentativité et de généralisation ne sont pas pertinentes ici. Il s'agit surtout de faire une analyse fine du processus d'enseignement de quelques sujets, d'en dégager certaines convergences et divergences et de vérifier l'adéquation de la grille d'observation que nous proposons. Lors d'une seconde rencontre, les sujets nous ont fourni quelques informations générales les concernant (Annexe B); ils ont subi l'épreuve du prétest (Annexe C) avant de répondre au questionnaire sur leurs conceptions de l'enseignement des mathématiques en tant que futurs enseignants (Annexe D).

1.2 Contexte didactique

En complément à la description des sujets retenus, cette section présente quelques éléments du contexte didactique dans lequel ces sujets ont évolué. Il s'agit plus précisément du contenu du séminaire, des méthodes d'enseignement utilisées, des activités de modélisation et d'intégration des connaissances proposées. Cette section présente aussi des éléments explicites du contrat pédagogique (contrat de formation) et du contrat didactique qui lient le formateur et les formés. Nous avons conduit deux entrevues par sujet, la première immédiatement après la première séquence didactique, la seconde à la fin de l'ingénierie. Les protocoles de ces entrevues se trouvent à l'annexe F.

1.2.1 Contenu à enseigner

Le contenu du Séminaire comporte les trois IR de base programmées en 9^e année, leur développement algébrique et leur représentation géométrique. Le programme et le manuel[7] du Séminaire sont disponibles dès le premier jour. Le séminaire a pour fonction de mettre des analyses préalables à la disposition des formés. Ces analyses ont pour thèmes les opérations sur les monômes (soient l'addition, la soustraction et la multiplication) dont résultent les IR, l'utilisation des formes géométriques et des tuiles algébriques pour expliquer quelques règles (de factorisation, de mise en évidence), la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, surtout les techniques de complétion de carré et de calcul numérique. Les séminaristes résolvent ensuite une série d'exercices et de problèmes faisant appel à une variété de représentations, à une intégration des connaissances.

1.2.2 Organisation et méthode d'enseignement

Quatre périodes de cours de 50 minutes sont à l'horaire hebdomadaire des séminaristes (deux périodes consécutives le mardi, deux autres périodes le vendredi). Le formateur fournit aux séminaristes des informations et les invite à résoudre des problèmes. Ainsi, selon le système de «boucles» (Portugais, 1995), chaque cours commence par un retour sur l'activité ou les problèmes d'investissement précédents, suivi de la présentation d'un nouveau contenu, de la dévolution de nouvelles activités et, enfin, d'une période de mise en commun et de discussion collective supervisée par le formateur. Le contenu est présenté, le plus souvent, à l'aide d'exposés informels de 10 minutes, ces exposés pouvant être interrompus par la pose de questions dans les deux sens. À la suite de l'exposé, les séminaristes résolvent les problèmes proposés, d'abord individuellement, puis par «binômes» formés librement.

Dans le cadre du Séminaire, nous faisons la distinction entre «apprendre l'image d'une IR» et «apprendre par l'image d'une IR». Car ce que nous visons au travers des activités proposées, c'est bien finalement la compréhension des IR auxquelles réfère l'image, cette compréhension passant nécessairement par celle des modes de représentations par lesquels peuvent être justement saisis les concepts constitutifs de ces IR. Cette distinction est d'autant plus importante que la plupart des modèles que l'on trouve dans les manuels scolaires ne permettent pas de travailler sur ces concepts; ou bien ils se bornent à les évoquer

---

[7] Il s'agit du texte de base que nous avons préparé pour aider les séminaristes à se faire une idée des activités de modélisation et d'intégration des connaissances algébriques et géométriques, texte dont les séminaristes peuvent aussi s'inspirer pour l'ingénierie. Le chapitre 5 est exclusivement consacré à ces élémemts du dispositif de formation.

ou bien ils montrent ce qu'i faut voir, ils ne donnent rien à faire. Les futurs enseignants sont ici invités à concevoir d'autres modèles dont les caractéristiques répondent aux besoins de l'activité d'intégration des connaissances. C'est cette complémentarité entre le «voir» et le «faire» qui motive les activités que le Séminaire leur a proposées. Les séminaristes peuvent commencer les activités de résolution en classe et les poursuivre à la séance suivante. À un certain nombre de reprises, ils sont invités à produire un travail écrit, soit individuellement soit en équipe. Il s'agit, entre autres, de convertir le «voir» en le «faire» (i.e; découpage/recollage), de monnayer l'image en opérations sur les IR. Les problèmes sont conçus de telle façon que les formés ne puissent éliminer des leurres ou choisir la bonne réponse, en se fiant à des indices non pertinents par rapport à la nécessité de construire le sens et d'asseoir la compréhension.

2. L'ingénierie didactique, comme méthodologie de recherche

L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des «réalisations didactiques» en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. Par rapport à d'autres types de recherche basés sur des expérimentations en classe, cette méthodologie se caractérise aussi par le registre dans lequel elle se situe et les modes de validation qui lui sont associés. En effet, l'approche comparative, avec validation externe basée sur la comparaison statistique des performances de groupes expérimentaux et de groupes témoins, n'est pas celle de l'ingénierie didactique. À l'opposé, le paradigme de l'ingénierie didactique se situe dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori.

Quatre phases caractérisent le processus de l'ingénierie didactique. Dans ce qui suit, nous décrivons globalement ces phases en précisant dans chacune d'elles où se situe notre recherche.

2.1 Phases de la méthodologie d'ingénierie didactique

Dans le processus expérimental de l'ingénierie, nous distinguons quatre phases: la phase 1 des analyses préalables, la phase 2 de la conception et de l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie, la phase 3 de l'expérimentation et la phase 4 de l'analyse a posteriori et de l'évaluation.

2.1.1 Première phase: les analyses préalables

Cette première phase du dispositif est consacrée aux analyses préalables qui présentent les contenus, les activités du Séminaire et les choix didactiques qui lui sont relatifs. C'est la phase de la conception de l'ingénierie que nous effectuons en nous référant à notre cadre théorique et en nous basant sur les connaissances didactiques déjà acquises dans le domaine étudié, mais aussi en nous appuyant sur un certain nombre d'analyses préliminaires: (1) l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement des IR; (2) l'analyse de cet enseignement et de ses effets; (3) l'analyse des conceptions (aussi bien des élèves que des futurs enseignants), des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution; (4) l'analyse du champ de contraintes dans lequel se situe la réalisation didactique effective, et, bien sûr, en tenant compte des objectifs spécifiques de notre recherche. L'analyse des contraintes s'appuie sur trois cadres: le cadre algébrique du développement des IR et de leur résolution par les formules, le cadre numérique de l'utilisation des IR pour le calcul numérique rapide ou mental, et le cadre géométrique de l'utilisation des formes géométriques et des tuiles algébriques. Ces cadres étant identifiés, l'analyse des contraintes s'effectue sur trois dimensions; il s'agit de la dimension *épistémologique* associée aux caractéristiques des IR, de la dimension *cognitive* associée aux caractéristiques cognitives des futurs enseignants de l'ISSEG et de l'UGANC qui prennent part à cette étude, et de la dimension *didactique* associée aux caractéristiques du fonctionnement du séminaire de formation de ces futurs enseignants à l'enseignement des IR.

Nous avons identifié les contraintes suivantes comme étant celles qui s'opposent à l'extension de l'enseignement des IR au cadre géométrique. Sur le plan épistémologique: la longue domination institutionnelle de l'algébrique, l'introduction tardive de l'approche géométrique en résolution de problèmes, les questions liées à la naissance et au développement de la pensée géométrique et le développement récent du processus de transposition didactique. Sur le plan cognitif, nous notons l'exigence de mobilité permanente entre différents cadres, la mobilité étant ici d'autant plus délicate qu'elle s'accompagne de décalage de niveaux (passage du niveau des formes géométriques à celui des expressions des polynômes ou des carrés parfaits) et le niveau de maîtrise des outils élémentaires de l'analyse requis par les justifications. Sur le plan didactique, nous relevons la force du refuge algorithmique (ce refuge se trouve bloqué ici; l'étude géométrique peut donner lieu à l'élaboration de méthodes qualitatives qui ne peuvent pas être algorithmisées), le statut infra-mathématique dans l'enseignement du cadre graphique et le mythe de la résolution complète (l'étude qualitative, en particulier l'approche géométrique, met souvent l'enseignant dans la position de devoir s'arrêter en chemin, d'admettre qu'il ne peut pas répondre à toutes les questions qui se posent à lui).

En outre, les difficultés des élèves en résolution de problèmes liés aux IR ont été partiellement repérées lors de la recension des écrits ainsi que par des observations faites dans notre pratique. Ces analyses seront complétées en regard du traitement algébrique des IR et nous permettront de cibler le type de difficultés importantes rencontrées par les formés dans l'intégration des connaissances et les éléments qui contribuent à l'émergence de ces difficultés. Par ailleurs, une analyse de l'enseignement actuel des IR, de la pratique d'enseignement et des approches possibles lors des activités de modélisation permettent dès maintenant d'envisager plusieurs éléments face à un choix de situations didactiques (en regard des savoirs mathématiques et didactiques, du choix de situations-problèmes et de leur niveau de difficulté, des stratégies d'intervention).

2.1.2 Deuxième phase: conception et analyse a priori

Dans cette seconde phase, le chercheur prend la décision d'agir sur les variables dites de commande dont il suppose qu'elles sont des variables pertinentes par rapport au problème posé. À la suite de Artigue (1988, p. 291), nous distinguons deux types de variables de commande:

> *- les variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie,*
> *- et les variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé.*

Après l'analyse des contraintes, les premiers choix que nous avons présentés sont des choix globaux: limitation de l'ingénierie didactique aux trois IR fondamentales (en excluant les identités trigonométriques et les autres identités algébriques), recours aux formes géométriques et aux tuiles algébriques, limitation de la complexité au niveau de la complétion du carré, choix des situations adidactiques. Ces choix globaux, même s'ils sont présentés en amont des choix locaux, n'en sont pas pour autant indépendants. Nous présentons, ensuite, le canevas du processus d'enseignement où interviennent nos choix locaux en termes de variables, sauts informationnels, coûts, etc. Nous concevons l'analyse a priori comme une analyse du contrôle du sens, l'objectif étant de déterminer en quoi les choix effectués nous permettent de contrôler les comportements des futurs enseignants et leurs sens. Pour ce faire, l'analyse a priori se base sur nos hypothèses dont la validation est directement mise en jeu, dans la confrontation qui s'opère dans la quatrième phase entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori.

Dans cette analyse, il n'y a traditionnellement pas de place pour le jeu du maître. En effet, comme le constate Artigue (1988, p. 296), «si l'élève est pris en compte à un double niveau: descriptif et prédictif, le maître n'intervient, lui, qu'à un niveau descriptif, comme si la situation le déterminait complètement en tant qu'acteur du système». Certes, la notion de contrat didactique permet de récupérer, en partie, cet enseignant comme acteur à part entière du système. Cependant, comme l'atteste Artigue, «on ne peut nier que, pour l'instant, dans la théorisation didactique, l'enseignant occupe toujours une place marginale et que (...) les phénomènes didactiques qui l'impliquent tendent à être perçus comme des bruits» (Ibid., p. 296). Comme nous l'avons souligné dans le cadre théorique, cette question des rapports entre les dimensions adidactique et didactique, dans la théorie de Brousseau et la méthodologie d'ingénierie, constitue un problème majeur car, en fait, elle engage la validation de la méthodologie. Aussi, l'analyse a priori comporte-t-elle une partie descriptive et une partie prédictive; elle est centrée sur les caractéristiques des situations adidactiques que le formateur constitue et dont il fait la dévolution aux futurs enseignants.

2.1.3 Troisième et quatrième phase: expérimentation, analyse a posteriori et validation

L'expérimentation a lieu dans les classes de 9^e et 10^e années des collèges de Conakry et de Coyah. Tous les sujets ont été préalablement initiés aux activités de modélisation dans le cadre d'un Séminaire d'un mois et demi et dans un contexte d'intégration de connaissances. Chaque séance élaborée (ensemble de situations-problèmes et leur exploitation anticipée) a donné lieu à une expérimentation sous forme d'activités à réaliser par les élèves. Nous ne nous étendons pas sur la phase de l'expérimentation, non seulement parce qu'elle est classique, mais aussi parce que nous en reparlons lorsque nous présentons le dispositif expérimental. Cette phase est suivie d'une phase d'analyse dite *a posteriori*, qui s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation: observations réalisées des séances d'enseignement et des productions des formés en classe. C'est sur la confrontation des deux analyses (analyse a priori et analyse a posteriori) que se fonde essentiellement la validation des hypothèses que nous avons formulées plus haut.

2.2 Phénomènes didactiques à observer

Ainsi conçue et appliquée comme méthodologie de recherche, l'ingénierie didactique nous permet de mettre en évidence les phénomènes didactiques qui échappent à des méthodologies plus externes. C'est le cas, par exemple, des problèmes de la transmission et de la représentation. L'usage qui est fait de l'ingénierie ne correspond pas à la transmission, auprès du formé, des situations didactiques déjà constituées par le formateur. L'ingénierie requiert que ce soit plutôt le formé qui conçoive et réalise des séquences didactiques sur les IR, séquences dans lesquelles le formé peut interagir avec les élèves sur les activités de modélisation et d'intégration des connaissances qu'il aura proposées. Ce sont justement les difficultés rencontrées dans la transmission didactique qui ont attiré notre attention sur un autre problème, celui des représentations que les enseignants se font des mathématiques, de leur apprentissage, de leur enseignement et de l'influence de ces représentations sur les choix qu'ils prennent dans leur enseignement. Notre ingénierie est corollairement conçue pour provoquer, de façon contrôlée, l'évolution de ces conceptions. Un questionnaire (Annexe D) est administré pour en faire un portrait.

2.3 Présentation du dispositif expérimental

Nous avons utilisé la méthode de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988) telle que présentée au début de ce chapitre, et avons adapté le dispositif expérimental de Portugais (1995) que nous trouvons transparent et efficace. Le dispositif s'est mis parallèlement en œuvre selon deux plans: le séminaire et l'ingénierie proprement dite. Cette organisation du dispositif expérimental en deux plans correspond au découpage que Portugais (1995) fait entre la charge des analyses préalables (du côté du formateur) et la charge de l'ingénierie (du côté du formé). Selon Portugais, «le fonctionnement en parallèle signifie que les séances du séminaire ont lieu dans la même période que l'ingénierie» (Ibid., p. 61).

2.3.1. Le Séminaire

Organisé sous la forme d'un séminaire, le premier plan du dispositif a été consacré aux «analyses préalables», c'est-à-dire les savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2) qui ont été traités en Séminaire pour devenir des connaissances. Le séminaire a pour thème l'enseignement des trois principales IR. Il est bâti autour de quatre situations didactiques: la première concerne l'utilisation des formes géométriques et des tuiles algébriques dans la représentation, le regroupement, l'addition et la soustraction des monômes les plus simples; la seconde traite de la multiplication des polynômes, de l'illustration de cette multiplication à l'aide des tuiles, de la factorisation et de la mise en évidence des facteurs; la troisième propose des activités de découpage et de recollage d'aires de surface pour mettre en facteurs la différence de carrés, ainsi que des activités visant à développer les techniques de calcul numérique; la quatrième situation est consacrée aux techniques de complétion de carré, à l'utilisation des tuiles pour construire des trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$ et des carrés parfaits.

Le séminaire a pris appui sur les analyses que nous avons faites dans le précédent chapitre. Le Séminaire a insisté sur le rôle central du futur enseignant et l'importance donnée aux activités de modélisation et d'intégration des connaissances. Il a cherché à faire construire le sens des IR en s'appuyant sur ces activités. Ce choix n'est pas celui de la majorité des manuels: on y présente d'habitude les IR comme des cas remarquables de produits de binômes. C'est à partir d'une série d'exercices et de problèmes apparemment simples et de questions sur comment enseigner certains concepts constitutifs des IR (monômes, opérations et propriétés de ces opérations sur les monômes) que s'est construit le séminaire. Les formés ont été invités à traiter ces exercices et problèmes en se servant aussi bien des tuiles algébriques que des formes géométriques. La plupart de ces situations ne leur étant pas familières, ils ont, en général, mis beaucoup de temps à résoudre ces problémes et se sont heurtés à leurs limites dans la compréhension des notions (telles que factorisation, complétion du carré) qu'ils croyaient maîtriser parfaitement. Ce déséquilibre les a incités à mobiliser un important travail adaptatif aux situations de modélisation et d'intégration des connaissances. Ce travail a été régulé par le fonctionnement cognitif du formé, en conformité avec la théorie des champs conceptuels (Vergnaud) et l'hypothèse épistémologique selon laquelle c'est le formé lui-même qui, en situation, mobilise ses ressources et réalise, en particulier, le travail de conceptualisation et de ré-équilibration.

Nous avons proposé le schéma suivant de déroulement des phases collectives. Dans un premier temps, chaque binôme (groupe de deux séminaristes) a eu l'occasion de présenter ses modèles des IR, le formateur se contentant de gérer les discussions. Il est revenu, ensuite, au formateur de prendre position sur les arguments et les conclusions auxquelles la classe a abouti. La familiarisation des séminaristes avec ces objets s'est réalisée au fur et à mesure du déroulement du Séminaire. Ces phases nous ont permis d'organiser le Séminaire de manière à favoriser les échanges, à voir se déployer successivement la mise en route de plusieurs schèmes, et à voir le formé donner ou redonner du sens aux concepts constitutifs des IR que le procédé algorithmique avait auparavant «cassés». Les premières phases de ce schéma ont donc été des situations d'action, c'est-à-dire que les connaissances investies dans ces activités n'avaient pas à être formulées. En effet, reconnaître ou savoir construire un modèle d'une IR ne relève pas du même fonctionnement des connaissances que le désigner ou décrire en mots les étapes de la construction de ce modèle. Nous donnons plus de détails sur les différentes situations dans le chapitre suivant (chapitre 5) qui est entièrement consacré au séminaire de Conakry.

2.3.2 L'ingénierie proprement dite

Dans le second plan, celui de l'ingénierie proprement dite, nous avons demandé aux séminaristes de concevoir, de réaliser et d'analyser des séquences didactiques. Nous leur avons demandé de procéder eux-mêmes à: (i) l'analyse *a priori* qui constitue le travail de préparation des séquences didactiques à proprement parler; l'analyse du contrôle du sens et des choix didactiques signifie qu'à partir d'une situation donnée, les séminaristes anticipent le fonctionnement didactique découlant de ces choix; (ii) la réalisation didactique proprement dite, et (iii) l'analyse *a posteriori* qui commence dès la fin d'une séquence; il s'agit de la confrontation de l'expérience d'enseignement avec les résultats des analyses préalables et des analyses a priori, puis de la validation. Les entrevues entre le formateur et le formé ont permis à ce dernier d'entamer, immédiatement après la réalisation proprement dite, son analyse a posteriori, en quelque sorte «à chaud».

Ainsi placées sous la responsabilité du formé, les séquences didactiques prennent en compte les difficultés à construire des modèles et à intégrer des connaissances. C'est le formé lui-même qui fait des prédictions, ce qui nous permet de cerner son travail didactique d'anticipation des conduites des élèves. Cela nous permet d'identifier, en plus des effets de ces prédictions, les choix didactiques du formé en question. Ainsi, par les jeux de cadres qu'il offre, le Séminaire peut aider le formé à analyser les phénomènes qui se produisent dans sa classe et à porter un regard critique sur ses interventions pour éventuellement les ajuster aux actions et raisonnements des élèves ainsi qu'aux difficultés particulières que ces derniers éprouvent dans leur apprentissage des IR. L'ingénierie fonctionne alors comme une «suite de boucles» (Portugais,1995), comme l'indique la figure ci-dessous (figure 26):

Conception de la séquence 1 (apriori 1) **-Réalisation de la séquence 1** **-Analyse de la séquence 1 (a posteriori 1)**
Conception de la séquence 2 (apriori 2) **(basée sur l'analyse de la séquence 1)** **-Réalisation de la séquence 2** **-Analyse de la séquence 2 (a posteriori 2)**
etc.

Figure 26: Boucles de l'ingénierie selon Portugais (1995)

Dans la réalisation pratique de l'expérimentation, nous avons veillé à ce que les formés se basent sur leurs propres initiatives pour concevoir et réaliser les séquences didactiques avec un groupe-classe réel de 9e ou 10e année. Les réalisations des séquences ont été vidéotapées et transcrites sous forme de protocoles; elles ont été suivies d'une entrevue d'explicitation avec le formateur qui a assisté à la séquence. Nous avons aussi demandé que les protocoles soient transcrits par un pair, non par le formé qui a réalisé la séquence. Ceci a permis d'assurer l'objectivité des analyses à faire «sur-le-champ» à partir de l'objectivité des traces du protocole, non pas à partir du seul visionnement de la bande vidéo, lui-même source de biais connus tels que l'effet de halo, le biais de confirmation, etc. Ceci a permis aussi de s'assurer que l'analyse a posteriori se fasse dans les meilleures conditions. L'analyse a posteriori s'est prolongée bien au-delà, dans le tissu des réflexions du formé. Chaque formé a effectué un feedback sur le protocole de sa propre séquence didactique et en a fait une analyse par écrit. Le formé a fait cette analyse a posteriori sur la base de ses éléments d'a priori et à l'aide des éléments d'analyses préalables dont il disposait (ceux du séminaire). Les documents que le formé a utilisés et sur lesquels reposent la plus grande part de son analyse a posteriori (préparations, protocoles, notes de travail) sont consignés dans le journal de bord (voir Annexe E).

2.4 Le problème: la situation adidactique de modélisation

Conformément à la théorie des situations et à l'hypothèse constructiviste, le dispositif de formation crée une situation qui génère, chez le formé, un problème à résoudre: comment intervenir sur les difficultés des élèves à intégrer les connaissances relatives aux IR? Ce problème découle des contraintes posées par le dispositif et par la non-explication du savoir d'expérience (S3). Cela se traduit par une absence complète de consignes pour tout ce qui concerne la façon de gérer les activités de modélisation, d'intégration des connaissances, et des difficultés rencontrées. En se refusant à expliciter le savoir S3, le formateur induit intentionnellement un élément perturbateur dans la situation. Le contrat de formation subit donc, dès le départ, une importante rupture de contrat, rupture qui est constitutive de la situation adidactique de formation et qui est nécessaire au fonctionnement «problématique» de celle-ci pour le formé. Elle conduit le formé à mobiliser un travail adaptatif à la situation: rechercher activement comment utiliser les difficultés et les erreurs des élèves didactiquement, c'est-à-dire de façon à redonner du sens aux opérations et aux propriétés des opérations sur les IR. Ce travail adaptatif est si essentiel que dans la situation traditionnelle, l'acte éducatif est initié par l'enseignant et les élèves ne font que s'y conformer, sans chercher les raisons pour lesquelles certaines tâches leur sont demandées. Le dispositif d'ingénierie montre l'importance que les formés sentent eux-mêmes, avant de faire sentir à leurs élèves, les avantages à utiliser les stratégies aussi bien algébriques que géométriques. Pour cela, le Séminaire les expose à plus d'une perspective d'enseignement, les outille mieux en leur offrant la possibilité d'avoir plusieurs cordes à leurs arcs. Dans une situation traditionnelle de formation, cet apprentissage est plutôt laissé au hasard.

Un des enjeux du dispositif est de mettre en évidence les mécanismes d'adaptation du futur enseignant face à la situation de formation. Nous nous attendons donc à ce que cette adaptation se fasse progressivement mais de façon relativement lente. Pour que le formé assume la rupture de contrat, le formateur doit lui aménager des conditions qui rendent possibles la recherche d'un nouveau contrat coïncidant avec la recherche de solutions pertinentes au problème posé. Pour que le formé assume la rupture de contrat, il faut aussi que le formateur mette en place des conditions qui favorisent la poursuite de la dynamique de l'ingénierie et qui jouent sur les «perturbations/déséquilibres/ré-équilibrations». C'est à travers les déséquilibres et ré-équilibrations que la dynamique de l'ingénierie va permettre au formé de faire des prises de conscience (conceptualisations) au sujet de ses choix didactiques et de ses décisions pour faire intégrer les connaissances sur les IR. Une telle dynamique peut favoriser (à travers l'élaboration des savoirs d'expérience) la prise en compte, par le formé, tant des dimensions liées au contenu mathématique que de celles liées au contenu didactique. Ces dimensions peuvent alors être vues comme des facteurs prépondérants de l'échange didactique avec le formateur, par exemple, lorsque le formé prend en compte les conséquences de ses choix didactiques sur le sens que l'élève attribue aux IR.

3. Nos choix didactiques

En insistant sur l'importance de la résolution de problèmes, nous avons proposé aux futurs enseignants des activités qui ont permis de mettre en place des compétences spécifiques. Les orientations que nous y avons privilégiées ont consisté à (i) confronter les futurs enseignants à de véritables situations de recherche, (ii) privilégier des objectifs spécifiques de la présente recherche, et (iii) constituer un enseignement organisé de divers modèles des IR.

3.1 Proposer de véritables situations de modélisation

Il s'agit de proposer aux futurs enseignants de véritables situations de lecture, de modification et de construction de modèles, pour lesquelles ils ne disposent pas de démarche préalablement explorée. Une dimension importante qui caractérise les *situations de lecture* de modèles des IR est la présentation de plusieurs données entre lesquelles il est demandé au formé d'établir des relations, ces données pouvant appartenir à des registres sémiotiques différents. Ce qui est aussi important, c'est que les réponses peuvent prendre des formes diverses: expressions verbales, orales ou écrites, liens entre images ou entre images et texte; actions pratiques (découpage/recollage) visant à donner forme au réel pour le lire et le transformer. Les *situations de modification* sont les situations dans lesquelles il est demandé au formé de retoucher, de transformer, de réorganiser les modèles des IR. Il s'agit, entre autres, des situations de correction (les retouches étant le résultat d'une évaluation de la figure ou de ce qu'elle représente), des situations de simulation dans lesquelles la figure simule les modifications apparentes qui résultent de la manipulation active (découpage/recollage) d'un modèle. Les *situations de construction* de modèles sont des situations de schématisation où l'on représente ce que différents éléments constitutifs des IR ont en commun, de façon à ne conserver que l'essentiel; ce sont des situations de conception où, par l'image, le formé recherche différentes solutions possibles à un problème (de factorisation, de complétion). L'important est que les contraintes de la mise en forme graphique des IR, les règles de codage et de construction de la figure permettent au formé, en retour, de donner forme à des contenus de pensée, de leur fournir un format organisateur.

3.2 Privilégier des objectifs spécifiques

Le travail de formation des futurs enseignants à la modélisation repose sur la mobilisation de savoirs construits dans différents domaines, et il met en jeu des compétences, des comportements qui se développent sur le long terme (comme des habiletés à concevoir des modèles, prendre du recul par rapport à sa propre méthode, contrôler ce que l'on est en train de faire, comparer les différents modèles). Plusieurs situations proposées par le Séminaire ont contribué à l'acquisition de telles compétences. Analyser les compétences des futurs enseignants dans l'utilisation des formes géométriques et des tuiles algébriques, identifier leurs difficultés à construire et utiliser des modèles des IR, et explorer l'impact d'une intégration des connaissances pour une meilleure compréhension des IR, constituent certains des objectifs spécifiques de la présente recherche.

3.3 Construire un enseignement organisé des modèles

Les objectifs que nous visons ne peuvent être réalisés par une simple fréquentation épisodique : il ne suffit pas de présenter deux ou trois situations isolées pour mettre en place des conditions favorables à un apprentissage. Il faut aussi construire de véritables progressions qui offrent aux futurs enseignants l'occasion de réutiliser les méthodes appréhendées dans d'autres situations. Il leur est essentiel de pouvoir réinvestir rapidement ces acquis et d'appréhender ainsi leur efficacité dans une situation d'enseignement assez proche de la réalité. Ainsi, pour permettre un travail didactique approfondi, pour assurer une meilleure continuité des apprentissages et pour pouvoir en mesurer les effets, avons-nous demandé aux futurs enseignants de concevoir, de réaliser, d'analyser et de valider leurs propres activités réalisées dans des classes de 9^e ou 10^e année. Les activités de modélisation qu'impliquent les situations proposées aux formés, qu'il s'agisse de compréhension, de production ou d'utilisation de modèles, sont des activités au travers desquelles sont visés des apprentissages tant sur le plan des élaborations conceptuelles que sur celui des schèmes et de procédures de traitement.

3.4 Nos choix par rapport aux paradigmes de recherche, aux contraintes institutionnelles, ...

Nous exprimons nos choix didactiques par rapport aux paradigmes de recherche que nous avons évoqués dans le chapitre de la recension, par rapport aux contraintes institutionnelles, et en termes de contenus présentés au séminaire de formation.

3.4.1 Positionnement de nos choix par rapport aux paradigmes évoqués

De l'analyse des paradigmes de recherche actuels, des programmes en vigueur, ainsi que des manuels scolaires traitant des IR, nous avons retenu quelques idées clés qui ont servi de base à l'élaboration des séquences didactiques qui ont été expérimentées dans le séminaire. Ces idées clés sont les suivantes. Par rapport aux conditions à satisfaire pour garantir un apprentissage fonctionnel du calcul algébrique, nous avons choisi de privilégier la réappropriation de la notion d'IR et des concepts sous-jacents, en mettant en avant leur modélisation et, dans une démarche didactique parallèle, l'intégration des connaissances. Nous avons privilégié aussi la familiarisation progressive des futurs enseignants avec les formes géométriques et les tuiles algébriques en vue de favoriser les activités d'intégration.

3.4.2 Positionnement de nos choix par rapport à l'institution

Nous avons cherché à trouver un compromis entre les deux contraintes institutionnelles suivantes : tenir compte des apports de recherches récentes sur l'enseignement et l'apprentissage des IR; expérimenter des séquences didactiques compatibles avec le curriculum actuel, pour ce qui est de l'enseignement et de l'apprentissage du calcul algébrique en Guinée. En ce qui concerne la seconde contrainte, qui détermine largement la recevabilité de ce type de travail par les enseignants de collège, nous pouvons déjà dire que l'essentiel des activités d'expérimentation est conforme au programme officiel, programme qui, en Guinée, ne définit pas entièrement le curriculum, et n'en fixe qu'un cadre directeur. Puisque «l'*Intentio*[8] pousse [le chercheur] à se convaincre qu'il y a conformité entre le savoir des programmes scolaires et le savoir qu'il veut faire vivre dans la classe» (Portugais, 1998, p. 64), les formés peuvent donc construire des situations d'enseignement et les expérimenter pour les classes de 9^e et de 10^e années.

4. Techniques de collecte de données

Nous avons exploré quelques techniques de collecte des données avec la préoccupation de réunir les informations pertinentes pour atteindre nos objectifs, mais aussi avec le souci d'assurer la validité de cette recherche. Rappelons que l'un des objectifs poursuivis par notre recherche est d'explorer l'impact d'une intégration des connaissances pour une meilleure compréhension des IR. L'examen des paradigmes de recherche actuels sur l'enseignement des concepts algébriques, en général, et celui des IR en particulier, montre que les chercheurs considèrent qu'aucune technique de collecte de données, prise isolément, n'est suffisante pour explorer les questions de sens et de compréhension en formation de futurs enseignants. La difficulté majeure réside dans le fait que les critères pour évaluer ou mesurer la compréhension ne sont pas entièrement définis et ne sont pas directement accessibles au chercheur. Pour procéder à une analyse sérieuse de phénomènes didactiques comme les séquences d'enseignement, il serait donc judicieux de disposer de plusieurs sources d'informations et de recouper les informations ainsi obtenues.

Dans la section suivante, nous présentons les instruments qui nous ont permis de circonscrire les données servant à répondre à chacune de nos questions de recherche de même que le rationnel à la base de chacun de ces instruments. Pour bénéficier des avantages de plusieurs techniques, tout en réduisant leurs limites, nous avons choisi différentes techniques pour notre recherche, dans les modes de l'enquête, de l'observation et de l'analyse documentaire, selon les termes de Lessard-Hébert et al. (1990).

4.1 L'enquête

Dans le mode de l'enquête, nous avons utilisé deux questionnaires et avons conduit deux entrevues à chacun des 27 sujets.

---

[8] Portugais (1998) note que le passage du système d'enseignement au système didactique fait peser sur ce dernier des contraintes liées au projet social d'enseignement. Il appelle ces contraintes *Intentio* pour désigner «l'intention didactique du système d'enseignement à l'endroit des objets de savoir et du sens de ces objets de savoir» (p. 63).

4.1.1 Les questionnaires

Nous avons administré aux sujets des deux groupes (UGANC et ISSEG) un prétest, un questionnaire portant sur ce que les sujets pensent de l'enseignement des mathématiques en tant que futurs enseignants, et le post-test.

4.1.1.1 Le prétest et le post-test

Le prétest est un ensemble de 14 exercices et problèmes qui permettent, d'une part, d'évaluer les compétences des sujets à construire des modèles et, d'autre part, de cerner leurs aptitudes à intégrer diverses connaissances. De façon explicite, les exercices 1, 6 et 14 se rapportent à la construction des modèles géométriques de polynômes ($P(x) = x^2 - x$, $Q(x) = x^2 + 2xy + y^2$) et à l'utilisation de ces modèles pour expliquer les IR à de jeunes élèves. Les problèmes 2, 3, 7 et 12 réfèrent à l'utilisation des tuiles pour illustrer une multiplication, démontrer la relation de Pythagore, déterminer les polynômes associés à des tuiles et en déduire les facteurs de ces polynômes. Les problèmes 4, 10 et 13 se rapportent à l'analyse d'un modèle algébrique qui présente une certaine régularité, à l'explication du fait que la somme $x^2 + y^2$ ne peut pas être factorisée, et à la transformation de la différence d'aires de deux carrés en l'aire d'un rectangle. Les problèmes 5, 8, 9 et 11 ont trait au calcul du volume d'une boîte fabriquée à l'aide du carton, au calcul rapide de produits tels que 68×72, 98×102, et au calcul mental des nombres terminés par 5.

À la fin du Séminaire, nous avons administré un post-test en soumettant de nouveau le même jeu de problèmes qu'au prétest. Cela nous a permis de mesurer le parcours réalisé et les efforts d'accommodation fournis par les séminaristes. Cela a aussi permis que les séminaristes auto-évaluent l'état de leurs apprentissages. Le grand nombre de questions se rapportant à la construction des modèles, à leur utilisation et à l'intégration des connaissances se justifie par le fait que nous tenions à vérifier si les résultats obtenus au prétest confirmaient certains éléments de notre problématique. En effet, le rationnel à la base de ces questions se trouve dans cette problématique où nous avons fait cas de certaines lacunes chez les futurs enseignants aussi bien dans leur formation académique que dans leur préparation didactique à l'enseignement des mathématiques. En raison de leur faible et timide formation didactique, ces futurs enseignants éprouvent de sérieuses difficultés lorsqu'ils organisent des activités de modélisation avec leurs élèves, parce qu'ils n'ont jamais eu à les expérimenter eux-mêmes. À la fin de cette épreuve, nous avons demandé à chaque sujet de nous dire ce qu'il a éprouvé face aux problèmes qu'il venait de résoudre. Par exemple, avait-il l'impression d'être heureux lorsqu'il trouvait la «bonne» réponse ou se sentait-il comme vaincu lorsqu'il ne trouvait pas la solution?

4.1.1.2 Ce que le futur enseignant pense de l'enseignement des mathématiques

La documentation guinéenne sur la conception des enseignants étant maigre (Touré, 1997), nous avons décidé d'élaborer et d'administrer un questionnaire aux futurs enseignants. Le questionnaire est divisé en trois sections. Constituée de 12 questions, la première section a trait au comportement du sujet en tant que futur enseignant. Ces questions font référence, entre autres, à la fréquence avec laquelle le futur enseignant recourt à l'exposé magistral, favorise la discussion en petits groupes, organise la leçon autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes, utilise des situations d'intégration des connaissances pour construire le sens. La deuxième section est élaborée de la même façon et est constituée des mêmes questions que la première. Mais ici, nous demandons au futur enseignant d'imaginer ce qu'il considère comme une situation d'enseignement idéale. Cela signifie qu'il dispose de toutes les ressources nécessaires pour enseigner ce qu'il veut à un groupe d'élèves tous désireux d'apprendre. Il peut même décider du nombre d'élèves qu'il aimerait avoir dans sa classe. La troisième section comporte trois questions et invite le futur enseignant à dire laquelle des 11 méthodes décrites dans la section précédente serait la plus importante pour lui, dans la situation idéale d'enseignement. Les questions visent, entre autres, à déterminer si le futur enseignant présente la leçon à l'aide d'un support audio-visuel, mais sans discussion, s'il utilise la plus grande fraction du temps pour faire des démonstrations ou s'il divise le temps de la leçon en deux moitiés: l'une pour l'exposé, l'autre pour les questions des élèves. Plus de détails sur le questionnaire sont donnés dans l'annexe D.

4.1.2 Les entrevues

Pour compléter les données recueillies quant aux activités proposées et effectivement réalisées, nous avons administré à chaque formé deux entrevues d'une durée moyenne de 90 minutes chacune. Semi-structurées et construites, en partie, à partir du modèle d'entretien d'explicitation proposé par Vermersch (1994), les entrevues nous ont permis de mieux comprendre les comportements qui sont difficiles voire impossibles à observer, par exemple, les préparations de leçons à la maison, les pensées, les sentiments, les intentions et les interprétations du futur enseignant. La première entrevue nous a permis d'explorer l'ensemble des méthodes de travail pédagogique et didactique du futur enseignant. Nous ne voulions pas seulement tenir compte de ce que le formé savait et de ce qu'il a enseigné, mais aussi et surtout de la manière dont il a conçu, réalisé et analysé ses activités d'enseignement. Pour conduire l'entrevue, nous avons élaboré un cadre général, mais en cours d'entrevue, nous l'avons adapté à ce que le formé a consigné dans son journal de bord durant les semaines d'ingénierie, pour nous conformer au modèle de Vermersch qui demande cette adaptation continuelle. Le protocole d'entrevue qui vise à explorer les stratégies cognitives et de gestion des ressources didactiques utilisées par les formés se trouve en annexe F.

Une deuxième entrevue a lieu quelques jours après la deuxième ou troisième leçon et le post-test. La majorité des questions ont été préparées à l'avance, conformément à nos questions et objectifs de recherche. Cependant, certaines questions ont été déterminées en fonction des informations plus personnelles recueillies auprès du formé (préparation des leçons, difficultés rencontrées dans la conception, la réalisation et l'analyse des activités didactiques), et en fonction des réponses apportées par ce dernier lors du visionnement des séquences. En effet, des parties de l'enregistrement vidéo sont visionnées pour que le formé puisse apporter un éclairage supplémentaire sur certains phénomènes didactiques. Durant le visionnement des séquences, le formé est invité à arrêter la vidéo à n'importe quel moment pour souligner une information qui, selon lui, présente un certain intérêt didactique. Pour nous assurer que chacun des formés a bien compris nos consignes, nous avons donné les exemples suivants: En visionnant ta leçon, tu remarques que tu as fait une intervention qui, selon toi, a vraiment aidé tes élèves à comprendre un modèle géométrique. Alors tu m'arrêtes pour m'en faire part et m'expliquer en quoi ton intervention a été salutaire. Par contre, en te regardant enseigner les IR, tu te rends compte que tu as dit ou fait quelque chose que tu aimerais modifier si tu avais à refaire la leçon. Dans ce cas aussi, tu peux m'arrêter pour m'en faire part et m'expliquer pourquoi tu penses que tu devrais apporter une modification.

Cette entrevue est donc aussi semi-structurée à partir du même protocole que pour l'entrevue d'explicitation. Des documents comme le plan du cours, les plans de leçons, les analyses de protocoles ont été recueillis lors de cette entrevue. Cela nous a permis de confronter les perceptions des formés à ce sujet et de faire l'analyse des contenus enseignés et des activités réalisées pendant l'ingénierie. Les deux entrevues sont enregistrées sur cassette audio.

4.2 L'observation

Dans le mode de l'observation, les techniques que nous avons utilisées sont l'observation enregistrée sur bande vidéo et l'enregistrement des protocoles de pensée à voix haute (ou verbalisations).

4.2.1 L'observation sur bande vidéo

Nous avons invité les formés à accepter un enregistrement vidéo d'au moins deux de leurs séquences d'enseignement. Une autorisation avait été préalablement demandée au

Censeur du Collège ou au Proviseur du Lycée afin que nous puissions procéder à l'observation et à l'enregistrement des séquences didactiques. Les séquences à filmer ont été choisies par chaque formé en collaboration avec le chercheur. Pour mieux contrôler «les effets du chercheur sur le site» (Huberman et Miles, 1991), c'est-à-dire les effets de la présence du chercheur sur les formés et les élèves, l'observation s'est faite à l'aide d'une bande vidéoscopique. Pour nous assurer que l'observation dérange le moins possible d'une part, la façon d'enseigner les IR de chacun des formés et, d'autre part, le comportement des élèves auxquels les cours ont été dispensés, l'enregistrement s'est fait discrètement. Les moments choisis sont également pertinents pour que le visionnement permette d'en faire une analyse en profondeur. Cela nous a permis de les observer dans le feu de l'action et d'analyser une bonne partie (tacite) de leurs activités d'enseignement. Ces enregistrements ont aussi permis aux formés d'expliquer davantage leurs processus de pensée lors de la seconde entrevue.

4.2.2 Les protocoles de pensée à voix haute (verbalisations)

Nous avons invité les formés à exprimer leurs pensées, leurs démarches et choix didactiques à voix haute, sans chercher à expliquer les raisons de leurs actions. Au besoin, un exercice préparatoire a été effectué avant la séance d'enregistrement, lors d'une rencontre d'information, car les formés n'étaient pas tous familiers avec cette technique et pouvaient être réticents à y participer. Ils ont reçu des consignes de choisir eux-mêmes le moment pertinent pendant lequel ils allaient planifier les séquences, travailler sur les activités de leur choix et procéder comme à leur habitude. Ces séances ont duré, en moyenne, une heure et demie pour chacun des formés, pris dans différentes situations et à différentes étapes de l'ingénierie. Elles se sont déroulées dans un lieu calme afin d'assurer que l'enregistrement des verbalisations soit le plus audible que possible.

De façon complémentaire, l'entrevue d'explicitation a permis la verbalisation de la manière dont bon nombre de formés ont traité l'information qu'ils ont recueillie dans leur classe. Par cette mise en mots, la verbalisation a rendu possible une prise de conscience qui a permis à bon nombre de formés de modifier, en retour, leur fonctionnement didactique ultérieur. Ainsi, l'enregistrement vidéoscopique et les entrevues représentent pour nous des instruments qui sont à la fois indispensables et complémentaires de la collecte des données sur les situations expérimentées.

4.3 L'analyse documentaire

Dans le mode de l'analyse documentaire, nous avons analysé deux types de documents: les journaux de bord des formés et les traces écrites de leurs activités d'ingénierie (plan de cours, plan de leçons, autres activités).

4.3.1 Les journaux de bord

Pour cerner les connaissances mathématiques, les connaissances didactiques de même que le niveau d'analyse faite par chacun des formés, nous avons eu recours au journal de bord dans lequel les formés ont consigné, au jour le jour, certaines informations. Ces informations ont trait, entre autres, à toutes les idées et actions que le formé a utilisées pour choisir, organiser et contrôler le contenu, le matériel et les autres ressources, les moyens qu'il a pris pour vérifier ou évaluer ses actions, pour poursuivre, modifier ou abandonner ce qu'il a fait. Ces informations nous ont aussi permis de suivre pas à pas la démarche de chaque formé et d'avoir accès à des aspects (comme des impressions personnelles) auxquels il nous aurait été difficile de parvenir autrement. Les formés ont pu profiter d'un feedback sur la tenue de ce journal de la part du chercheur qui tenait à obtenir des informations aussi variées que les intentions visées, les choix didactiques, les activités de modélisation prévues au départ, ce qui a été fait du point de vue intégration des connaissances, ce qui a été vu, entendu, les circonstances des actions (découpage, recollage, etc.), leurs effets, les difficultés qui ont été rencontrées. Aussi, le chercheur a-t-il encouragé les formés à rédiger et à tenir à jour leur journal, en plus de leur fournir un guide (consignes, questions spécifiques) pour compléter le journal de bord. Plus de détails concernant le journal de bord se trouvent dans l'annexe E.

4.3.2 Les autres traces écrites

À toutes ces données s'ajoutent les traces écrites des travaux produits au cours de l'ingénierie. Les cahiers de préparation, les plans de cours, les résumés, les questions, les activités proposées, les productions du prétest et du post-test, les remarques écrites en marge des documents (manuels) sont des sources fiables et accessibles des activités qui ont été réellement conduites avec les élèves de 9^{e} ou 10^{e} année. Les traces écrites sont précieuses pour analyser de façon plus fine les comportements et les interprétations du futur enseignant en tant que «formé» et du futur enseignant en tant qu'«enseignant». En bénéficiant des traces écrites de ces différentes phases, nous avons mis ainsi à jour l'évolution de la pensée réflexive des formés à travers les séquences qu'ils ont eux-mêmes conçues, réalisées et analysées. Le tableau ci-dessous (tableau 4) résume les différentes sources de collecte de données.

MODE DE CUEILLETTE DE DONNÉES	INSTRUMENTS
ENQUÊTE	Prétest/Post-test (résolution de 14 problèmes) suivi d'un questionnaire sur les impressions des sujets face aux problèmes résolus.
	Questionnaire relatif aux conceptions des futurs enseignants sur l'enseignement des mathématiques (cas réel et cas idéal).
	Entrevues: deux entrevues individuelles par formé sur l'organisation, le déroulement et l'analyse des activités didactiques; l'analyse des méthodes d'enseignement, des difficultés, etc., enregistrées.
OBSERVATION	-Une séance de verbalisations, enregistrée -Deux ou trois activités de modélisation et d'intégration des connaissances, filmées.
ANALYSE DOCUMENTAIRE	-Un journal de bord par sujet -Traces écrites des activités d'ingénierie. -Notes de terrain du chercheur, etc.

Tableau 4: Sources de cueillette de données

Le plan de cours et les plans de leçons de chacun des formés ont été recueillis et examinés. Les formés nous ont fourni des feuilles supplémentaires d'explication concernant les activités qu'ils ont proposées à leurs élèves. Lors des entrevues, nous avons cherché, à travers les commentaires des formés, à mieux comprendre leur travail cognitif comme étant régulé par les schèmes et les invariants opératoires. Nous avons cherché à comprendre leurs interprétations de certains éléments du contrat de formation et à valider ce qui s'est passé en classe. Cela nous a surtout aidé à mieux comprendre le fonctionnement didactique (choix, anticipations, décisions, etc.) et à analyser leurs intentions en termes de projet d'enseignement. Les protocoles, entrevues et journaux de bord nous ont fourni un corpus de données suffisamment important pour les besoins de la présente étude.

Les notes personnelles du chercheur ainsi que ses propres observations sur les préparations des leçons et les approches pédagogiques utilisées par les formés, ses commentaires sur ce qui a bien fonctionné et sur les difficultés rencontrées, ses interprétations des impressions (positives ou négatives) concernant les aspects cognitifs et didactiques des activités de modélisation et d'intégration des connaissances, son analyse des analyses qui ont été faites par les formés sur chacune des séquences didactiques, constituent les autres sources de données qui ont permis de valider les interprétations des résultats.

4.4 Codes thématiques et codage des données

Huberman et Miles (1991, p. 96) définissent le code comme «une abréviation ou un symbole attribué à un segment de texte, le plus souvent une phrase ou un paragraphe de la transcription, en vue d'une classification. Les codes sont des *catégories*». Nous les utilisons ici pour regrouper tous les éléments liés à nos hypothèses, questions et objectifs de recherche. Pour faciliter l'analyse des données, nous avons regroupé les codes par thèmes ou items qui «vont ensemble». Huberman et Miles (1991) parlent de «codes thématiques», de «méta-codes» ou de «regroupement conceptuels». Dans cette thèse, nous utiliserons plutôt la dénomination «codes thématiques». En exploitant le cadre théorique et la recension des écrits du domaine, nous avons retenu comme éléments du modèle utilisé pour notre analyse les codes thématiques suivants, codes dont la description est illustrée de quelques exemples.

4.4.1 Mobilisation des savoirs mathématiques et didactiques, (code thématique 10)

Empruntée aux modèles de résolution de problèmes (Vergnaud, 1984, 1988, 2000), cette catégorie a trait à la recherche d'indices pertinents emmagasinés dans la mémoire à long terme ou au rappel des connaissances précédemment acquises. Elle est utilisée lorsque le formé amène les élèves à se remémorer des connaissances mathématiques (S1) et didactiques (S2) antérieures ou lorsqu'il fait survoler la théorie à la recherche d'éléments qui peuvent aider les élèves à réaliser les tâches proposées. Par exemple, l'élève peut utiliser un résultat précédent ou garder en tête une estimation. C'est en comparant les éléments du problème posé avec des éléments déjà mémorisés que l'on peut se faire une idée de la tâche à faire.

4.4.2 Prise d'informations (CT[9] 11)

La prise d'information est une activité centrale pour le futur enseignant qui recherche un renseignement ou une information lui permettant de poursuivre le travail. Il s'agit de lire les énoncés, de survoler rapidement certains éléments théoriques, de chercher des exemples dans les livres, le manuel ou les notes du Séminaire. Il s'agit aussi de vérifier l'agenda, de comparer son modèle ou sa réponse avec ceux des autres, d'écouter des explications fournies par d'autres.

[9] CT mis pour code thématique. Les numéros attribués aux codes thématiques sont arbitraires et visent à faciliter le traitement descriptif des données.

4.4.3 Consignation d'informations (CT 12)

Tout aussi centrale, la consignation d'informations consiste, entre autres, à recopier des notes, prendre des notes sur les activités à faire, prendre pendant le Séminaire des notes recopiées au tableau. Il s'agit de pointer avec ses doigts les éléments essentiels d'un modèle, d'écrire un aide-mémoire en marge du manuel, de référer à un document, de surligner une formule, une définition ou un symbole. Il s'agit aussi d'utiliser des codes, de recopier au propre, d'encercler une réponse ou un élément théorique jugé important, de noter un renseignement ou une information pour qu'ils soient disponibles plus tard, de noter les tâches à faire.

4.4.4 Représentation/Environnement didactique (CT 20)

Également empruntée aux modèles de résolution de problème (Vergnaud, Brousseau), cette catégorie concerne toutes les actions que le formé pose pour s'approprier le problème, la tâche à réaliser; elle concerne aussi les comportements ou pensées qui montrent que le formé est en voie d'ajuster, de moduler l'image mentale qu'il se fait de l'activité à réaliser. Se représenter le problème, c'est d'abord se faire l'écho de l'ensemble des informations qui sont données à son propos. L'objet de représentation peut être une figure géométrique ou une graphie algébrique plus ou moins complexe, comme celle qui caractérise le problème de la complétion du carré. Se représenter le problème, c'est aussi se représenter la tâche et ses liens avec l'objet du problème, en particulier le contrat qui règle le niveau auquel l'objet est explicité dans l'énoncé. Pour le formé, il s'agit, entre autres, de survoler le travail à faire, d'identifier la question posée, d'anticiper le résultat ou une étape ultérieure, d'évaluer la difficulté d'une activité de modélisation, d'amener l'élève à se questionner sur le sens d'une telle activité ou d'identifier ce qui pose problème.

La gestion de l'environnement concerne les comportements qui montrent que le sujet organise son environnement didactique immédiat (espace-classe, matériel didactique, ressources humaines), les comportements ou pensées qui indiquent une manifestation de la dimension affective, et les comportements ou pensées reliés aux conditions physiques et morales de travail. Ainsi, dans cette catégorie que nous avons greffée à la présentation, il est question, entre autres, d'utiliser le matériel didactique pertinent, de bien l'utiliser ou d'aider quelqu'un à s'en servir; il est aussi question de prendre en compte la quantité de travail à faire réaliser, d'accorder une pause, d'entretenir la motivation à travers la variété et la richesse des situations-problèmes, de gérer l'anxiété et la confiance en soi par l'ambiance de la classe ou encore le mode de travail négocié. Se dire des paroles encourageantes, éprouver du plaisir (ou du déplaisir), montrer de la confiance en soi, exprimer de l'inquiétude, extérioriser une émotion, mais aussi se blâmer gentiment ou en se taquinant, s'énerver, sont quelques aspects affectifs de l'environnement didactique.

4.4.5 Planification (CT 30)

Cette catégorie regroupe tout ce qui concerne l'organisation de la façon dont les activités de modélisation et d'intégration des connaissances sont dévolues et conduites. Il s'agit, entre autres, de se fixer des objectifs, de subdiviser ces objectifs en sous-objectifs, d'établir un horaire, d'évaluer la quantité de travail à faire, d'estimer le temps requis pour réaliser chacune des activités proposées. Il s'agit aussi de se donner des règles de conduite, de disposer et d'utiliser son matériel, de vérifier les consignes, d'évaluer la quantité du travail déjà accompli et de se situer par rapport à ce qui reste à faire.

4.4.6 Contrôle du sens et régulation (CT 40)

Ces catégories concernent les stratégies que le formé utilise ou fait utiliser pour surveiller les activités de modélisation et d'intégration de connaissances et pour déceler les erreurs et les difficultés en cours. S'agissant du contrôle, le formé peut, par exemple, évaluer son fonctionnement face à son projet d'enseignement, évaluer ce qui peut (ou ne peut pas) être réussi par l'élève, surveiller l'activité mentale, reconnaître une difficulté, faire reprendre une démarche. Le formé peut aussi surveiller la tâche que l'élève est en train de réaliser, identifier l'existence d'une erreur, évaluer la plausibilité d'un modèle et décider qu'un sous-objectif est atteint. Il peut également vérifier ou faire vérifier les calculs, s'assurer que l'élève comprend aussi bien le sens de la question que celui de la démarche à suivre pour réaliser la tâche. Il peut aussi faire réviser des étapes passées. En matière de régulation, le formé peut changer de cadre ou du type d'activité, accélérer ou ralentir, attendre de nouvelles explications pour valider le modèle. Il peut aussi arrêter l'activité (parce qu'il estime il y a plus important à faire ou qu'il constate que l'élève ne sait plus quoi faire ou encore que tout le monde est fatigué). Il peut également faire recommencer ou compléter un exercice laissé en suspens, faire reprendre un essai infructueux. Il est surtout important qu'il aide l'élève à se calmer, contrôler son anxiété, se concentrer, supporter l'incertitude et solliciter de l'aide. En fait, le contrôle du sens et la régulation permettent d'ajuster l'activité cognitive à tout ce qui survient pendant le déroulement des activités de modélisation et d'intégration des connaissances.

4.4.7 Élaboration/organisation (CT 44)

Ces catégories concernent les stratégies constituées des processus cognitifs qui facilitent l'acquisition de connaissances déclaratives (ou connaissances conceptuelles), qui consistent à ajouter de nouvelles informations (élaboration) à la structure cognitive ou à structurer des connaissances déjà en place par la création de nouvelles connexions (organisation). Le formé peut, par exemple, demander à l'élève de construire un modèle géométrique ou un tableau résumant une structure algébrique. Il peut lui faire répéter, redire à l'élève dans ses propres mots ou lui faire rechercher l'idée principale d'un thème donné. Il peut ajouter des remarques, des notes personnelles à la théorie, inventer des exemples. Il peut amener l'élève à se poser des questions, répondre à une question ou donner du sens à sa réponse.

4.4.8 Généralisation/discrimination (CT 45)

Ces catégories sont liées aux stratégies qui consistent à élargir une connaissance à un ensemble de cas dont on reconnaît les points communs (généralisation) ou à restreindre une connaissance à certains cas dont on reconnaît les particularités (discrimination). Il s'agit, en quelque sorte, de processus cognitifs qui facilitent l'acquisition de connaissances déclaratives (ou conceptuelles) consistant à élargir ou à délimiter l'étendue des concepts constitutifs des IR ou des procédures de modélisation, c'est-à-dire à préciser les conditions dans lesquelles ces connaissances s'appliquent. Le formé peut, entre autres, inviter les élèves à chercher des exemples ou des exercices semblables; il peut les amener à comparer leurs modèles avec ceux qui sont construits en classe, à les analyser, à choisir ou éliminer certains de ces modèles, à explorer et valider des hypothèses pour identifier la nature de certaines erreurs, à identifier la démarche à suivre dans certains cas particuliers.

4.4.9 Procéduralisation/composition (CT 46)

Très fréquentes, comme le révèlent la problématique et la recension des écrits, ces catégories correspondent aux stratégies qui consistent à développer la capacité à reproduire une procédure ou à l'automatiser (procéduralisation) et à développer l'expertise à effectuer rapidement une procédure ou un algorithme (composition). Il s'agit des stratégies assez variées pour acquérir des connaissances dites procédurales. Il s'agit des processus cognitifs qui sont mobilisés lorsqu'on calcule à la main ou mentalement; lorsqu'on ébauche une solution ou la rédige, lorsqu'on pratique, imite ou refait parfois mentalement des exercices et des exemples. Au cours du Séminaire, le formé peut dresser une liste d'étapes d'une procédure de modélisation ou d'un algorithme de complétion de carré; il peut reprendre mentalement un exemple de calcul des nombres terminés par 5, compléter ou refaire des étapes antérieures, traiter des exercices supplémentaires.

4.4.10 Prise de décisions (CT 50)

Il s'agit des choix d'action ou des décisions que le formé prend parmi plusieurs possibilités. Pour préparer ses leçons sur les IR et pendant la conduite des activités de modélisation, le formé doit prendre constamment des décisions. Il s'agit qu'il réfléchisse sur certaines de ces décisions et de voir quels sont la marge de manœuvre, les espaces de liberté et les contraintes. Il peut, par exemple, choisir de faire travailler les élèves individuellement ou par petits groupes, décider de poursuivre ou d'arrêter une démarche. Nous avons retenu cette catégorie pour tenir compte de certaines stratégies qui ne «vont pas ensemble» avec d'autres catégories lorsque nous procédons au codage. En reprenant la transcription de ses séquences d'enseignement, le formé peut noter qu'il intervient pour donner des consignes de travail, noter au tableau les données importantes. Il s'assure que les élèves s'engagent dans les activités de modélisation qu'il leur propose, désigne l'élève qui passe au tableau, obtient le silence, fait préciser les explications données par un élève. Il juge de la validité du modèle construit. L'analyse ne porte pas seulement sur ses projets explicitement élaborés qu'il a en tête avant les leçons, mais aussi «sur les décisions didactiques qu'il a prises sur le vif de l'échange, sur ses intentions, ses prévisions, même sur ses conceptions relatives au savoir en jeu» (Portugais, 1998, p. 59). L'analyse porte aussi sur «l'épistémologie du professeur qui détermine les conditions de production des réponses, les désirs et croyances du maître à l'endroit des conduites des élèves sur une tâche donnée, les projets didactiques prémédités, conscients et organisés» (Ibid., p. 69).

4.4.11 Formulation (CT 60)

Cette catégorie est si importante qu'on établit le rôle de la formulation dans certaines formes de dysfonctionnement: une simple variation de formulation peut faire que le sujet réussisse ou qu'il échoue et ceci indépendamment de toutes les autres variables de présentation du problème. Un simple changement dans la formulation de la question peut rendre l'interprétation plus ou moins aisée. Vergnaud a remarqué que l'interaction entre le langage courant et le langage mathématique peut être à l'origine de dysfonctionnements importants dans la compréhension de l'énoncé. Bon nombre de ces difficultés relevant de la formulation de l'énoncé concernent, en fait, la question de l'explicitation que nous avons évoquée à propos du processus d'interprétation. L'idée qu'une formulation faisant référence au vécu de l'élève ou à une pratique sociale réelle (problèmes «concrets») conduirait à une meilleure compréhension qu'une formulation plus mathématique est loin d'avoir été montrée, bien que l'on sache que de telles variations dans la formulation du problème peuvent effectivement modifier la représentation que nous nous en faisons.

Pour le formé, il s'agit de préciser le rôle que peuvent jouer les variables linguistiques du point de vue de l'objectif d'explicitation du problème. Expliciter le savoir en jeu à un moment donné des apprentissages est une phase incontournable afin que les élèves repèrent ce savoir en jeu. Pour le formé, il s'agit de s'assurer que l'énoncé est compris par les élèves, c'est-à-dire qu'il est suffisamment explicite pour que les élèves interprètent correctement les données. Il s'agit aussi de souligner le décalage important qui peut exister entre un problème que les élèves peuvent résoudre très tôt (dès la 8^e^ année) et la formulation de contraintes du problème qui ne seront pas comprises si l'on veut qu'ils soient correctes sur le plan strictement formel. Le formé peut, par exemple, faire rédiger des énoncés par les élèves eux-mêmes à partir des données algébriques ou numériques et des relations entre ces données. La formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action: le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre. Réciproquement, l'action est facilitée par une formulation convenable, comme l'a montré Vygotsky. Mais nous sommes d'accord avec plusieurs chercheurs (Brousseau, Brun, Portugais, Vergnaud) sur le constat que les formulations de méthodes ne sont que rarement économiques à long terme.

4.4.12 Modélisation (CT 70)

Cette catégorie correspond aux processus qui participent aux activités de représentation et qui entretiennent les mêmes liens avec les processus d'interprétation et de structuration. Dans cette étude, la modélisation occupe une place centrale dans la construction d'une représentation plus performante des problèmes (de multiplication ou de factorisation de polynômes, de complétion de carré) et joue un rôle déterminant dans la façon dont on résout ces problèmes. En renforçant la structuration de cette représentation et en fournissant des possibilités nouvelles d'explicitation, la modélisation permet, tout d'abord, d'exercer un contrôle plus efficace sur cette représentation. Une fois mis en modèle, le problème de la multiplication ou de la factorisation de polynômes n'est certes pas plus concret au niveau de notre représentation; mais il est plus consistant, pourrions-nous dire, parce que plus simple et plus facile à appréhender (au sens où la représentation permet plus facilement de faire quelque chose, d'agir, d'assembler les tuiles, de les disposer de façon à mettre les facteurs en évidence). La modélisation permet surtout de construire des images mentales, des concepts-images (Touré, 1997): elle permet de contrôler plus facilement et plus efficacement la pertinence de ces praxèmes par rapport aux objectifs à atteindre. En conduisant à la mobilisation d'un langage et à une formalisation de la situation, la modélisation contribue ainsi, de manière assez déterminante, au contrôle de la représentation et du sens des IR, à leur mise en cause éventuelle et à leur évolution en fonction du changement de cadre.

4.4.13 Intégration des connaissances (CT 80)

Cette catégorie correspond aux stratégies qui conduisent à un renforcement tout à fait bénéfique de la représentation des IR, de la compréhension et de l'utilisation des connaissances qui leur sont plus ou moins liées. L'analyse des situations d'intégration des connaissances va ainsi consister à examiner la façon dont diverses connaissances interviennent dans la recherche et la découverte de la solution, dans la construction du modèle. Dans le cours traditionnel, tel qu'il se donne encore en Guinée, il n'y a pas nécessité de refléchir à de telles stratégies puisqu'il est évident qu'il faut chercher à utiliser les connaissances (algébriques) que l'on vient d'acquérir. Par contre, dans le cours que le formé préconise dans la présente ingénierie, les stratégies d'intégration des connaissances doivent lui permettre de mettre en œuvre des procédures de résolution orientées vers la recherche de tout ce qui est pertinent pour utiliser ces connaissances. Le formé cherchera donc à établir des connexions étroites et à créer une dynamique commune entre la manière dont on cherche la solution (dont on construit le modèle) et la façon dont on interprète le problème, entre les procédures ou les stratégies que l'on élabore et la représentation que l'on se construit progressivement, entre les connaissances qui ont servi à agir et celles qui ont servi à comprendre et à résoudre le problème.

4.4.14 Communication/Échange (CT 90)

Cette catégorie correspond au processus dont l'enjeu s'exprime par les rétroactions qu'exercent les uns sur les autres les signataires du contrat didactique pour s'assurer qu'ils se sont compris. Leurs exigences portent sur la conformité aux codes, conventions ou consignes, mais aussi sur l'ambiguïté, la redondance, le manque de pertinence (des informations superflues) et l'efficacité du message. Le formé peut faire en sorte que la production de messages dans les situations de communication entre les élèves puisse viser plusieurs objectifs tels que formuler des stratégies, élaborer un langage à propos des formes géométriques et des tuiles algébriques, décrire un processus de modélisation, faire apparaître les conceptions des élèves, réinvestir des notions. Le formé sait que construire un modèle ou en rédiger la procédure sont deux tâches différentes. La première est d'ordre privé alors que la seconde entre dans une démarche de communication et d'échange. Il est donc intéressant que le formé amène les élèves à échanger à propos des concepts en jeu dans leur propre langage, à confronter des points de vue pour faire évoluer leurs représentations.

4.4.15 Validation (CT 100)

Le formé veille à ce que l'élève établisse la validité d'une assertion, qu'il s'adresse à un autre élève susceptible d'accepter ou de réfuser ses assertions. Le formé peut lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance sur les modèles; il peut lui demander de proposer d'autres modèles. Le formé ne doit pas perdre de vue que «un problème de validation est bien plus un problème de comparaison, d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration» (Brousseau, 1998, p. 127). Pour leurs démarches de validation, les élèves peuvent s'appuyer sur des formulations préalables, même s'il faut pour cela les modifier. L'action (activité de découpage et de recollage) peut fournir un type de validation implicite fondamental et la formulation un autre.

4.4.16 Évaluation/Compréhension (CT 110)

Très proche du contrôle de sens et de la régulation, cette catégorie se rapporte au jugement que l'on porte sur la qualité des modèles produits, l'originalité des procédures de modélisation, l'efficacité des méthodes d'intégration des connaissances. Il s'agit d'évaluer la qualité de son travail, la plausibilité d'un modèle, la recevabilité (et non pas seulement l'exactitude) d'une solution. Il s'agit aussi d'amener un élève à comparer sa solution avec celle d'un autre élève, d'évaluer la justesse de sa démarche, de valider sa réponse par rapport à l'énoncé, de lui faire reconnaître des connaissances antérieures. Il s'agit de juger qu'un objectif de l'activité est atteint. Il s'agit d'évaluer sa compréhension (ou son incompréhension), ses chances de réussir l'activité. Il s'agit aussi d'une rétroaction après l'action, d'une évaluation du degré de compréhension. La prise de sens demande une double compétence: compréhension des situations didactiques de modélisation et de l'enjeu mathématique pour faire un choix de stratégies et d'outils pertinents. La mise au point de ces différentes stratégies évolue de manière dialectique avec la construction de sens.

5.Validité de la recherche

Pour évaluer la validité de la recherche, nous avons recouru aux paramètres de validité dans un processus de recherche qualitative, paramètres qui ont été présentés par Lessard-Hébert, Goyette et Boutin (1990). Dans un premier temps, la validité a été assurée par une validation des instruments de collecte des données auprès d'une collègue de l'Université de Montréal, suivie de leur raffinement ainsi que par la réalisation du codage par deux codeurs jusqu'à l'obtention d'un degré d'accord suffisant (Huberman et Miles, 1991). Dans un second temps, la validité a été assurée par la triangulation des diverses sources de données. Il s'agit de la confrontation des interprétations dégagées à la suite de l'analyse des données recueillies par les différentes techniques ci-dessus mentionnées. Nous sommes convenu aussi de prendre des mesures répétées et de nous assurer que nous mesurons le comportement, les effets eux-mêmes et non les indicateurs indirects.

La validité interne a été assurée par la triangulation des inférences ou conclusions entre le chercheur et les formés ayant réalisé l'ingénierie. Pour Lessard-Hébert, Goyette et Boutin (1990, p. 75), «il s'agit pour le chercheur de divulguer aux sujets les résultats obtenus ou les interprétations formulées ... dans le but d'en accroître la validité». Les formés ont pu alors confirmer ou infirmer les interprétations que nous avons dégagées. Ceci a été fait une première fois lors de la première entrevue pour ce qui est de la première séquence d'enseignement et une partie du journal de bord, une deuxième fois lors de la seconde entrevue pour ce qui est de l'enregistrement vidéo des séquences didactiques et du reste du journal de bord et, enfin, une troisième fois après l'ingénierie pour ce qui est du rapport écrit sur l'analyse de l'ensemble des activités réalisées.

La validation du cadre de référence à partir duquel nous avons élaboré les instruments d'analyse, ainsi que la liste des codes qui sont utilisés, a été réalisée auprès d'un expert en didactique des mathématiques, en l'occurrence par le directeur de recherche. La documentation systématique de toutes les activités didactiques expérimentées aussi bien au cours du séminaire que pendant l'ingénierie et de toutes les procédures utilisées à chaque étape de l'ingénierie augmente davantage la validité de la recherche en permettant que soit stimulée la critique chez le lecteur éventuel qui peut consulter toutes les références mentionnées. La validité des analyses et des interprétations dégagées est assurée par des observations répétées et différentes et par la proximité du chercheur. Cette proximité fait référence au fait que les interactions entre le chercheur et les formés sont davantage personnelles, ce qui a permis qu'un plus grand climat de confiance se soit établi et que les interprétations fournies par le chercheur et les formés soient plus significatives.

Nous avons tenu à ce que les situations d'ingénierie soient aussi naturelles que possible et que ce soit les séquences didactiques choisies par les formés eux-mêmes, en accord avec le chercheur, qui soient soumises à l'observation selon leur disponibilité. Ainsi, et à la suite de Lessard-Hébert et al. (1990), le critère de pertinence socio-professionnelle de la recherche ajoute à sa validité. En effet, comme le confirme Van der Maren (1990, p. 106), le problème de l'ingénierie est «posé à partir de la situation éducative, du point de vue et avec des catégories partagés par les acteurs impliqués», futurs enseignants formés à l'intégration des connaissances pour l'enseignement des IR, et formateur-chercheur. Enfin, à toutes les étapes de la présente recherche, le suivi par un expert en didactique et consultant en recherche extérieur à cette démarche d'ingénierie, dans notre cas, le directeur de recherche, garantit que soient respectés les principes qui assurent la validité d'une recherche qualitative et que les variables pertinentes à l'enseignement des IR ainsi qu'à l'ingénierie expérimentée soient prises en compte.

Quant à l'éthique, nous avons pris toutes les précautions pour assurer l'information et la protection des sujets. Nous avons cherché non seulement à obtenir la collaboration de leurs encadreurs de l'ISSEG et de l'UGANC, mais également à nous entendre sur le déroulement le moins dérangeant que possible. Comme nous l'avons dit plus haut, les sujets ont été informés de la recherche, cela dès le début. Ils ont été informés en détail de toutes les exigences liées à leur participation et ceci à deux reprises: lorsqu'ils ont été rencontrés pour la première fois, avant même le séminaire, et lors de la rencontre avec ceux d'entre eux qui ont été retenus pour l'ingénierie proprement dite. Le chercheur et les participants ont signé un protocole d'engagement volontaire et de confidentialité. Les sujets pouvaient se retirer à n'importe quel moment.

Comme déjà mentionné, il était aussi important que les sujets aient été informés des avantages personnels qu'ils pouvaient retirer de leur participation à une telle expérience de formation, tels que la bonne opportunité d'affermir leurs connaissances des IR, la possibilité d'élargir leur domaine de connaissance par leur exposition aux cadres géométrique et numérique, et l'intérêt d'intégrer leurs connaissances – toutes choses qui les ont conduits à une plus grande ouverture d'esprit ou de conceptualisation, à une plus grande autonomie et à une plus grande efficacité en résolution de problèmes. Nous avons veillé, enfin, que les activités du séminaire et de l'ingénierie soient organisées, en accord avec les sujets et leurs encadreurs, de façon à ne pas perturber leur cheminement scolaire ou universitaire et à respecter leurs contraintes personnelles.

6. Méthodes d'analyse et de réduction des données

Nous avons utilisé la méthodologie d'analyse de protocoles d'observation de séquences didactiques. En effet, dans le cadre de notre ingénierie, l'analyse des protocoles constitue le principal moyen de contrôle dont dispose le futur enseignant pour progresser dans la dynamique a priori/a posteriori (Portugais, 1995, p. 89). En prenant en compte les mécanismes d'adaptation du formé à la situation de formation, nous avons choisi d'analyser (1) les protocoles, (2) les verbalisations, (3) les entrevues, (4) les préparations des séquences et leurs relations avec les protocoles, et (5) les analyses faites par les formés de leurs propres séquences. Le noyau de cette étude est fourni par l'analyse des protocoles, les autres étapes

(2, 3, 4 et 5) servant plutôt à des triangulations successives qui nous ont permis de vérifier les hypothèses de façon continue. Portugais (1995, p. 115) appelle vérification continue d'hypothèse «l'action de comparer une même observation expérimentale sur plusieurs sources de données, de manière à s'assurer que le résultat est convergent, non-contradictoire et cohérent». Aussi, nous assurons-nous que ce que nous avons observé et interprété à partir de notre cadre théorique est bel et bien un résultat qui résiste à cette comparaison.

La prise en compte des données recueillies sous cette forme est difficile à transmettre sous la forme exhaustive parce qu'elle est liée à un volumineux corpus de données. Et comme il est très difficile, sinon impossible, de ressortir les tendances au niveau de l'échantillon complet, en ne disposant que d'une suite d'études de cas détaillées, nous avons procédé à une réduction des données. En suivant les principes de réduction des données qualitatives, principes élaborés par Huberman et Miles (1991), nous avons identifié les tendances globales (inter-sujets) et les profils individuels (intra-sujet); nous avons regroupé les profils individuels sous forme de tendances pour des classes distinctes de profils; nous avons fait des parallèles entre les tendances globales et les tendances du regroupement de profils individuels; nous avons réalisé deux études fines de cas pour illustrer les évolutions (différentes) des formés au sein du dispositif. Ce travail d'analyse des données fait l'objet des chapitres à venir (chapitres 6 et 7).

CHAPITRE 5

SÉMINAIRE

SÉMINAIRE

Ce chapitre constitue une partie importante de l'analyse a priori en ce qu'il permet, d'une part, l'explicitation des analyses préalables et, d'autre part, l'établissement des contenus relatifs aux différents types de savoirs utiles pour la formation initiale des enseignants: savoirs mathématiques (S1), didactiques (S2) et savoirs d'expérience (S3). Dans le cadre d'une ingénierie non classique, c'est-à-dire d'une ingénierie de formation comme la nôtre, ce chapitre permet au lecteur d'accéder à tout un ensemble de composantes d'une étude en didactique des mathématiques (variables et choix didactiques) et du montage des situations de formation en les rendant transparentes, accessibles et explicites. En effet, la présentation des identités remarquables (IR) est basée, en partie, sur les tuiles que les futurs enseignants de l'ISSEG et de l'UGANC n'ont jamais eu l'occasion de manipuler.

Les tuiles algébriques sont des bandes, des surfaces ou des solides qui illustrent des monômes. Un ensemble de tuiles de différentes formes correspond à un polynôme. Des recherches, comme la nôtre, indiquent que la manipulation est essentielle pour asseoir les règles et le symbolisme. Cette manipulation est nécessaire, car tout concept commence par l'image que l'on se fait de la chose. S'il n'y a rien de concret, s'il n'y a qu'une simple vision des yeux ou une simple règle, il n'y a pas d'apprentissage et l'oubli aura vite fait de s'installer. Si le futur enseignant n'a lui-même jamais manipulé les tuiles, ses élèves ont peu de chance de retourner à quelque chose de concret; ses élèves n'ont d'autres choix que de se confiner à des définitions, à des règles ou algorithmes. Le Séminaire lui offre l'opportunité de manipuler lui-même les tuiles avant de les faire manipuler plus tard par les élèves, car voir quelqu'un manipuler des tuiles n'est pas manipuler ces tuiles soi-même.

La présentation des IR est aussi basée sur leur traitement algébrique et numérique, car l'utilisation des tuiles a des limites certaines. En effet, il est impossible de représenter toutes les IR par des tuiles. Si sur le plan géométrique on peut associer un point (un carré unitaire) au degré 0, un segment (une bande) au degré 1, les carrés et rectangles au degré 2 et les prismes au degré 3, l'apport géométrique des tuiles s'arrête malheureusement là. Les formes géométriques et les tuiles sont des supports à la compréhension et non des outils pour additionner ou multiplier les monômes. Par contre, on peut poursuivre algébriquement, sans limite, la production de monômes de degrés de plus en plus élevés. La composante numérique des activités du Séminaire fait référence au développement du sens des IR, au calcul rapide ou mental. Il est important de développer ces habiletés tout aussi utiles à l'utilisation des IR en résolution de problèmes.

Le Séminaire accorde une grande importance à la résolution d'exercies, de problèmes et, en particulier, des problèmes d'investissement qui présentent une belle variété de situations. Il est bâti autour de quatre situations didactiques: la première concerne l'utilisation des formes géométriques et des tuiles dans la représentation, le regroupement, l'addition et la soustraction des monômes les plus simples; la seconde traite de la multiplication des polynômes, de l'illustration de cette multiplication à l'aide des tuiles, de la factorisation et de la mise en évidence (simple ou double) des facteurs; la troisième propose, avant le développement et la mise en facteurs par des procédés algébriques, des activités de découpage et de recollage d'aires de surface pour mettre en facteurs la différence de carrés, ainsi que des activités visant à développer les techniques de calcul numérique; la quatrième situation est consacrée aux techniques (algébriques et géométriques) de complétion de carré, à l'utilisation des tuiles pour construire des trinômes $ax^2 + bx + c$ et des carrés parfaits.

Dans toutes ces situations, le recours aux formes géométriques et aux tuiles n'a nullement pour but de se substituer aux procédures algébriques, mais plutôt d'expliciter et de justifier les règles en jeu. Si les formes géométriques et les tuiles sont importantes en tant que support visuel pour soutenir l'algorithme, la compréhension de la démarche algébrique est indispensable pour développer des concepts permettant de faire des liens nécessaires à la compréhension des procédés. Le Séminaire comble justement l'une des lacunes signalées dans nos analyses préalables, à savoir l'absence de lien entre l'algébrique et le géométrique, ceci en présentant d'une part, les moyennes algébriques et géométriques ainsi que les relations entre ces moyennes et, d'autre part, en reliant ces moyennes aux IR à travers une variété de problèmes de minimisation ou de maximisation (du périmètre, de la surface ou du volume).

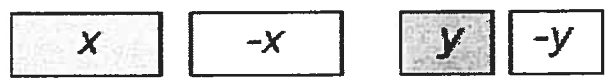
1.Première situation: utilisation de formes géométriques et de tuiles

1.1. Buts de la situation

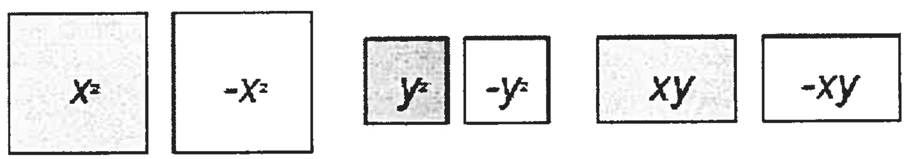
La présentation des monômes est basée sur les tuiles algébriques. Il vaut la peine de prendre le temps de faire manipuler les tuiles par les séminaristes quelques instants. Il s'agit d'abord d'introduire les formes géométriques dont l'utilisation est une façon de représenter certains termes algébriques appelés monômes: les petites unités grises (carrés unitaires) auxquelles correspondent les termes de degré zéro; les bandes correspondant à des termes du premier degré; les carrés ou les rectangles, aux termes de second degré et les prismes, aux termes de troisième degré. Différentes couleurs (dont le gris) correspondent aux termes à coefficient positif et le blanc à leur opposé respectif. Les formes géométriques utilisées sont les suivantes:

- Les **carrés unitaires** (mesurant une unité de côté) représentent les termes constants:

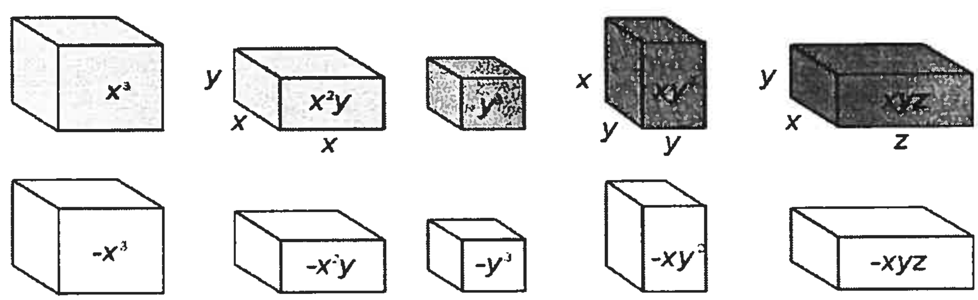
- Les **bandes rectangulaires** (ayant une longueur de x unités et une largeur de 1 unité) représentent les termes du premier degré à une variable:



- Les **grands carrés** (ayant x ou y unités de côté) et les **grands rectangles** (de dimensions x et y unités) représentent les termes du deuxième degré, à une ou deux variables:



- Les **prismes** représentent les termes du troisième degré à une, deux ou trois variables:



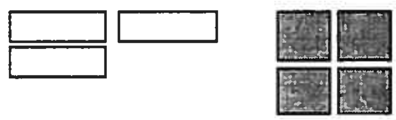
Figures 7: Formes géométriques des monômes

Il ne faut pas comprendre que seuls les termes de coefficient 1 ou -1 sont des monômes. Les termes algébriques ainsi représentés sont certes des monômes, mais les monômes ne sont pas que les termes représentés par les formes géométriques ci-dessus. Par monômes, il faut entendre tous les termes formés d'un nombre, ou d'une variable, ou du produit d'un nombre et d'une ou de plusieurs variables affectées d'exposants entiers positifs.

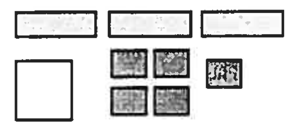
1.2. Activité 1: Regroupement de monômes semblables

Cette activité porte sur l'utilisation des formes géométriques pour représenter et regrouper les monômes semblables, monômes semblables qui correspondent à des tuiles de formes isométriques de même couleur. Dans cette activité, le coefficient exprime un certain nombre de tuiles d'une même sorte. Dans les exercices ci-dessous, chaque groupe de formes isométriques représente un monôme. Après que les formés aient déterminé de tels monômes, le formateur peut leur demander de dire comment représenter «le quart de x^2»; il peut leur demander de dire quel polynôme ils peuvent associer à chacune des représentations suivantes:

a)

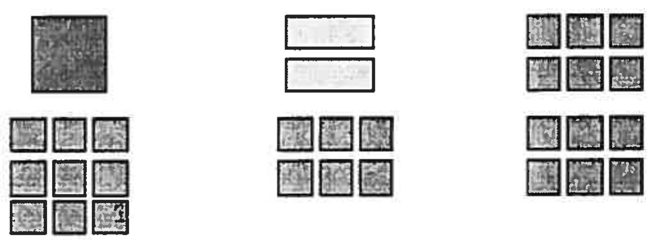


b)



Comme l'élève, le formé peut se rendre compte qu'il est impossible de représenter tous les termes algébriques par des tuiles. Certes, avec une certaine aisance, il peut utiliser des bandes en tant qu'objets à une dimension pour représenter une variable de premier degré, tout comme il peut se servir des carrés pour représenter les variables du second degré. Mais, déjà avec les carrés, il peut se rendre compte que deux carrés de dimensions différentes correspondent à des variables de second degré différentes.

2. Voici la représentation du polynôme $y^2 + 2y + 6$.



Si y = 3, le nombre représenté est: **3 x 3** + **2 x 3** + **6**

Quel est le nombre représenté par chacun des polynômes suivants si x = 2 et y = 3?

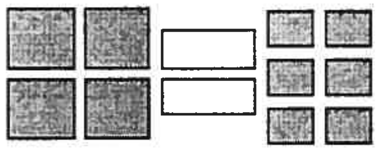
(i) $5x^2y$ (ii) $x^2 - y$ (iii) $3x^2 + 4x - 3$ (iv) $y^2 - 5x + 6$ (v) $3xy^2 + y - 1$

C'est l'occasion de rafraîchir les connaissances des élèves sur les signes des coefficients des polynômes et de rappeler que toute soustraction peut être ramenée à une addition. Ainsi, le polynôme $3x^2 + 4x - 3$ est équivalent au polynôme $3x^2 + 4x + (-3)$ dont les coefficients sont 3, 4 et -3. C'est aussi l'occasion de faire remarquer qu'on peut former les polynômes en utilisant une ou plusieurs variables et que c'est par simple convention qu'on note le polynôme en ordre décroissant des exposants de sa (ou ses) variable. Cette convention n'est pas une règle, c'est une simple question de commodité et l'on ne devrait pas pénaliser l'élève pour de telles choses.

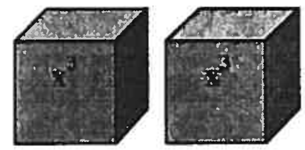
Ce qui est important, c'est d'amener l'élève à cultiver de bonnes habitudes de notation et d'interprétation qui l'aident à comprendre l'algèbre et à résoudre les problèmes.

3. Écris le polynôme correspondant à chacune des représentations ci-dessous et indique s'il s'agit d'un monôme, d'un binôme ou d'un trinôme.

a)



b)



Cet exercice vise à développer la notion de polynôme qui correspond à un regroupement, par addition ou soustraction, de monômes non semblables. En général, l'enseignant se contente de donner une définition générale et assez vague du polynôme: un polynôme est le regroupement par addition ou soustraction de plusieurs monômes; on l'appelle binôme s'il comprend deux monômes, et trinôme s'il en comprend trois. Mais cette définition ne veut rien dire si l'élève ignore la véritable nature des monômes qui constituent le polynôme. Il est donc important que l'enseignant lui précise que, par exemple, un binôme doit être formé de monômes non semblables, en faisant remarquer que l'expression $3x^2 + x^2$ n'est pas un binôme, mais qu'elle correspond au monôme $4x^2$.

1.3. Investissement 1

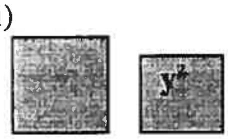
1.En te référant à leur représentation géométrique, détermine si les monômes suivants sont semblables ou non.

(i) $4x^2$ et $3x$ (ii) $-2xy$ et $3xy$ (iii) y^2 et $-y^2$ (iv) $2x^3$ et $3y^3$ (v) $8x$ et $8y$ (vi) xy et x^2y

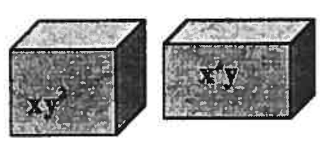
Cet investissement vise à faire les rappels et à rendre les élèves familiers avec les termes du langage algébrique. Le formé peut demander aux élèves de dessiner des formes géométriques s'il y a quelque hésitation de leur part pour identifier les monômes semblables. Il peut leur demander de justifier le fait que les monômes sont semblables ou non. Pour ce faire, les élèves peuvent se baser aussi bien sur leur compréhension de la notation symbolique que sur le sens qu'ils confèrent aux concepts évoqués par les modèles géométriques.

2.Voici des paires de formes géométriques correspondant à des monômes de même degré.

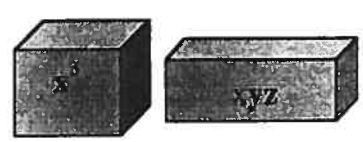
(i)



(ii)



(iii)



On peut demander au formé de dire si ces formes sont isométriques pour des valeurs différentes de x, y et z, de préciser les conditions dans lesquelles deux formes géométriques sont isométriques. On peut aussi lui demander la définition qu'il peut donner à l'expression «termes semblables» si toute quantité de formes géométriques représente des monômes semblables. Ce problème vise à faire comprendre que les valeurs que peuvent prendre x, y ou z n'ont rien à voir avec les dimensions des tuiles. En effet, chaque bande de longueur différente, chaque carré de grandeur différente, chaque prisme de dimensions différentes représentent des termes non semblables. Les formes isométriques ou groupes de formes isométriques correspondent à des termes semblables. Il est important d'inviter le formé à formuler la ou les conditions d'obtention des formes isométriques: deux tuiles ou formes géométriques sont isométriques seulement si elles ont les mêmes dimensions, ou à la condition que le rapport des mesures de leurs côtés homologues soit égal à 1; mais cela n'a rien à voir avec les valeurs prises par les variables. Il est aussi important de laisser les formés formuler les définitions et de leur demander de les expliquer. En effet, une définition est souvent une étape importante de l'apprentissage, car c'est précisément à ce moment que l'on développe le concept selon le sens qu'on donne aux mots.

1.4. Activité 2: Addition des monômes

Les discussions soulevées par cette activité permettent, d'une part, de juger du degré de compréhension du langage, du symbolisme et des modèles présentés et, d'autre part, d'introduire les tuiles pour asseoir les concepts pertinents et consolider les acquis. Les problèmes proposés dans cette activité ont trait aux règles sur lesquelles repose l'addition de polynômes. La première règle porte sur la réduction des termes semblables, la seconde règle sur la réduction des termes opposés.

1.4.1. Règle 1: Réduction de termes semblables

1.En utilisant les formes géométriques ci-dessous, détermine si les énoncés suivants ont du sens ou non. a)$x + x = x^2$

b)$x^2 + x = x^3$

c)$x^2 + x^2 = 2x^2$

d)$3x^3 - x = 2x^2$

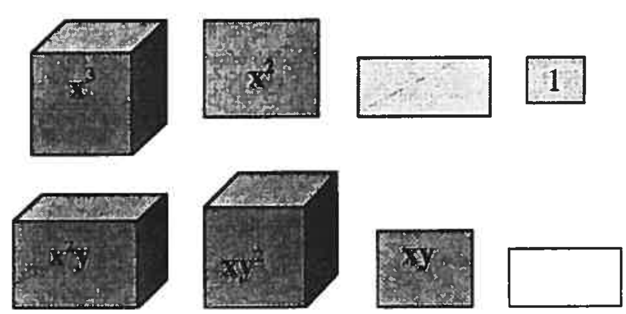
e)$xy + xy^2 = 2xy^2$

f)$2x + y = 2xy$

g)$x^2y - y = x^2$

h)$2x^2y + x^2y = 3x^2y$

i)$2x^2y - x^2y = 1$



L'objectif visé est de faire constater, selon le «gros bon sens», que seules les sommes ou les différences de termes semblables sont réductibles en un seul terme, également semblable. On parle alors de réduction des termes semblables par addition ou soustraction. La notion de termes semblables est intéressante en autant qu'elle permet une réduction de deux ou plusieurs termes en un seul. Il faut s'assurer que les élèves comprennent bien le sens de «réduction de termes algébriques». Pour ce faire, il faut insister pour qu'ils se réfèrent aux formes géométriques. Les tuiles montrent de façon concrète l'illogisme de réunir en un seul terme deux termes qui ne sont pas semblables. Mais attention! Certains de ces énoncés n'ont pas de sens, même si on les représente à l'aide de tuiles. Les tuiles peuvent nous amener à conclure que, par exemple, l'expression $x^2 + x = x^3$ n'a pas de sens alors que l'énoncé est vrai pour $x = 0$. Il est donc important qu'une discussion s'engage entre formés pour donner du sens à cette activité et pour ne pas leur donner l'impression que l'utilisation du contexte géométrique peut faire oublier le fait que les variables et les IR représentent des nombres.

2. Réduis les termes semblables s'il y a lieu.

a) $3x + 4y$ b) $3x^2y - 2x^2y$ c) $4y^2 - 2y$ d) $5x^2y - 2xy^2$ g) $2xyz + 4xyz$

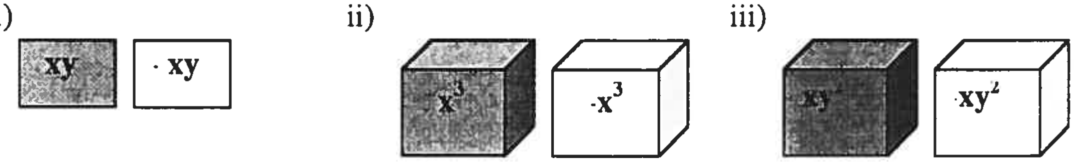
L'objectif est également de faire constater que seuls les termes semblables peuvent être réduits en un seul terme, par addition ou par soustraction. Certains élèves peuvent penser que deux termes non semblables ne s'additionnent pas. Cet exercice est une occasion pertinente d'attirer leur attention sur le fait que deux termes non semblables ne se réduisent pas en un seul terme, mais qu'ils s'additionnent ou se soustraient tout de même. En effet, le simple fait de poser le signe d'addition ou de soustraction entre ces termes constitue, en soi, une addition ou une soustraction. Et, bien que les termes non semblables ne se réduisent pas en un seul terme, on considère le tout, c'est-à-dire le résultat de l'opération, comme la somme ou la différence.

1.4.2. Règle 2: Réduction de termes opposés

Par convention, la réunion de deux formes isométriques représentant les termes opposés correspond à zéro. C'est ce qu'on appelle le *principe du zéro*: réunir deux opposés donne 0. En plus de faire traiter les cas suivants, il est intéressant de faire «inventer» par les formés des formes isométriques qui représentent des termes opposés.

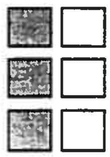
1. Voici des formes isométriques représentant des termes opposés.

i) ii) iii)

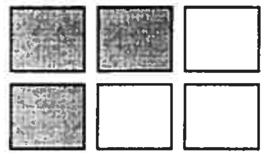


ii)

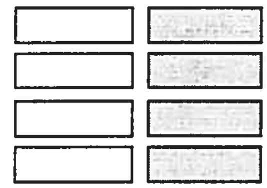
iv)



v)



vi)



On peut demander au formé de donner ces termes et de définir l'expression «termes opposés». Le formé ne doit pas se contenter de faire remarquer que la somme de deux termes opposés est nulle; il doit aussi s'assurer que les élèves ne s'imaginent pas que l'opposé est toujours le terme qui a le coefficient négatif. Par exemple, l'opposé de $-3x^2$ est $3x^2$. Il doit également s'assurer que les élèves comprennent bien qu'un terme dont le coefficient est négatif peut aussi bien représenter des nombres positifs que négatifs. Par exemple, pour $x = -5$, le monôme $-3x$ représente +15; pour $x = 2$, le même monôme représente -6.

2 a) Que suggères-tu comme résultat de l'addition $2(a + b)^2 + 4(a + b)^2$? Justifie ta réponse.

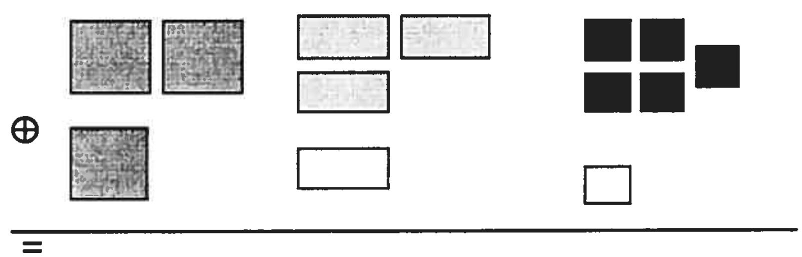
b) Pourquoi $2a^2b + 3a^2b$ égale-t-il $5a^2b$?

Il est important que l'élève puisse considérer l'expression entre parenthèses comme un tout, sans voir les parties de cette expression. On peut parler ici de «parenthèses semblables» que l'on peut ainsi regrouper, voire réduire.

3.Additionne les deux polynômes en t'inspirant de leur représentation géométrique.

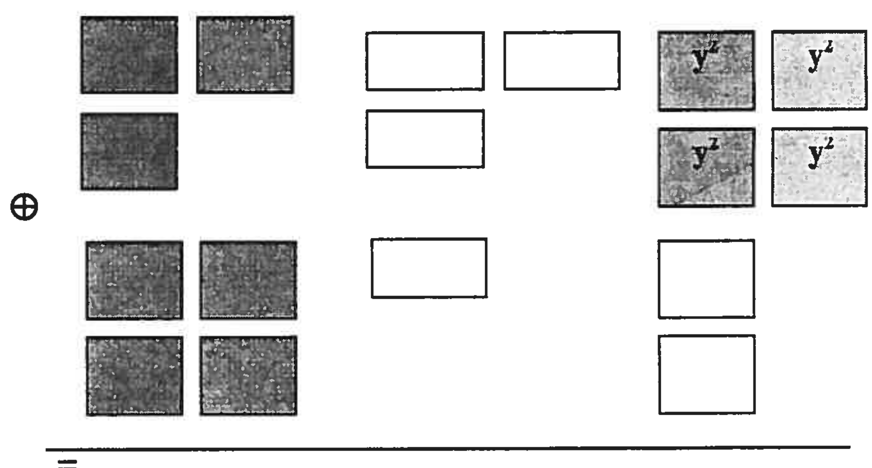
a) $2x^2 + 3x + 5$

$\underline{+\ x^2 - x - 1}$



b) $3x^2 - 3xy + 4y^2$

$\underline{+\ 4x^2 + xy - 2y^2}$



Ici, le séminariste est invité, en premier lieu, à vérifier si la graphie algébrique correspond à l'image graphique. Il est, ensuite, invité à comparer les sommes. Au cas où certains élèves éprouvent des difficultés à appliquer cette règle, le formé peut sortir de nouveau les tuiles, avec la volonté de réussir à développer chez ces derniers cette image mentale qui supporte la règle et qui n'en fait pas seulement une règle à mémoriser.

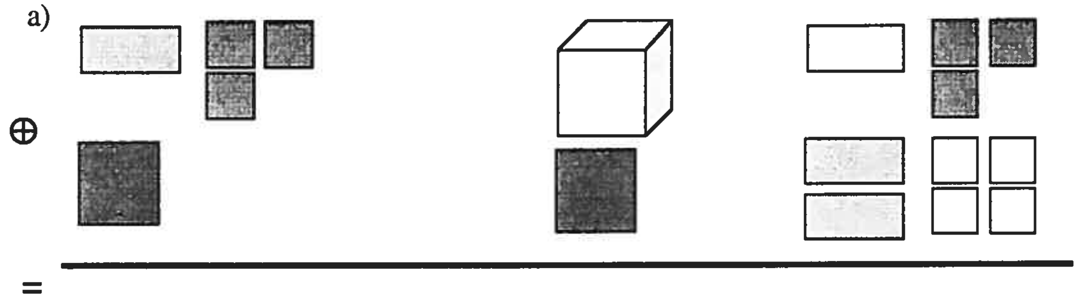
1.5. Investissement 2

1. Dessine à main levée et décris le modèle géométrique que tu peux faire correspondre à chaque monôme donné: a) $-3x^2$ b) $-2xy$ c) xyz d) xy^2

Les formés peuvent représenter les prismes en perspective cavalière en plaçant l'une des faces parallèlement au plan et de façon que les fuyantes soient obliques et parallèles. Ils peuvent également les représenter en perspective axonométrique qui est aussi un mode de représentation simple et commode, avec un sommet et trois demi-droites partant de ce sommet.

2. Donne mentalement la somme que suggèrent les modèles géométriques de polynômes ci-dessous.

a)



Cet investissement présente, sous diverses positions ou de différentes façons, l'addition de deux polynômes, tout en augmentant graduellement le degré de difficulté.

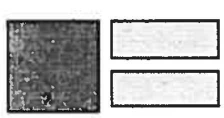
1.6. Activité 3: Soustraction de polynômes

Les deux premiers problèmes portent sur certaines règles de soustraction connues et fondamentales. Les deux règles de base présentées ici sont les suivantes:

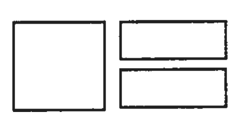
1.6.1. Règle 1: L'opposé d'un tout est l'opposé de chacune des parties.

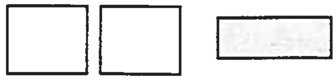
En d'autres termes, soustraire un tout, c'est soustraire chacune de ses parties. L'utilisation des tuiles apporte un support concret dans la compréhension de cette règle. À partir des représentations de polynomes opposés ci-dessous, le formé peut demander à l'élève de donner ces polynômes.

a)



a pour opposé



b)  a pour opposé 

Il est important que les élèves manipulent les tuiles, qu'ils les retournent pour représenter les opposés de ces termes.

2.Donne l'opposé de chaque polynôme.

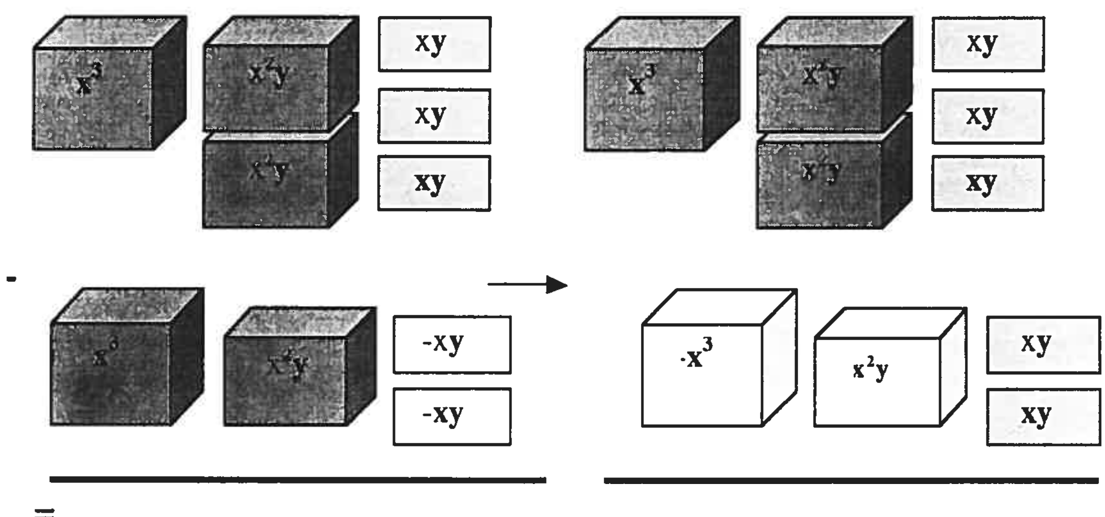
a) $2x - 3$ b) $-2x^2 + 3x - 1$ c) $4x^2 - 2xy + 3y^2$ d) $-2x^2 + 3xy^2 - 5$

L'enseignant doit amener les élèves à opérer un changement de signe pour chaque terme du polynôme. Plusieurs élèves peuvent développer l'idée d'écrire l'opposé de la manière suivante: $-(2x - 3)$.

1.6.2.Règle 2: Soustraire un tout, c'est additionner les opposés de ses parties.

Ces deux règles de soustraction sont des «autoroutes» en mathématiques, en ce sens qu'un grand nombre d'applications les empruntent. Il est donc important que les élèves les comprennent avant de les retenir. Aussi, faut-il éviter de les multiplier par toutes sortes de petites règles qui, bien souvent, relèvent d'une vision étriquée ou d'une compréhension douteuse de l'algèbre.

3.Effectue la soustraction des deux polynômes en t'inspirant de leur modèle géométrique.



Le formé ne doit pas hésiter à faire des manipulations qui visent à développer des concepts. Il peut demander aux élèves de dire dans quelles mesures les deux règles de la soustraction sont bien respectées. Il soulignera que soustraire un polynôme revient à additionner son opposé. Il s'assurera que les élèves savent soustraire les polynômes aussi bien verticalement que horizontalement. Il insistera sur le changement de signes dans la transformation de la soustraction en addition, tout en justifiant les différentes étapes.

$$\text{Ainsi : } \begin{array}{r} 4x^2 - 2xy + y^2 \\ \underline{-\,2x^2 + xy + 2y^2} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rr} & 4x^2 - 2xy + y^2 \\ + & \underline{-2x^2 - xy - 2y^2} \end{array}$$

De même : $(5a^2 + ab + 4b^2) - (2a^2 - 5ab + 3b^2)$

$\Updownarrow$ (en transformant la soustraction en addition des opposés)

$= (5a^2 + ab + 4b^2) + (-2a^2 + 5ab - 3b^2)$

$\Updownarrow$(en regroupant les termes semblables)

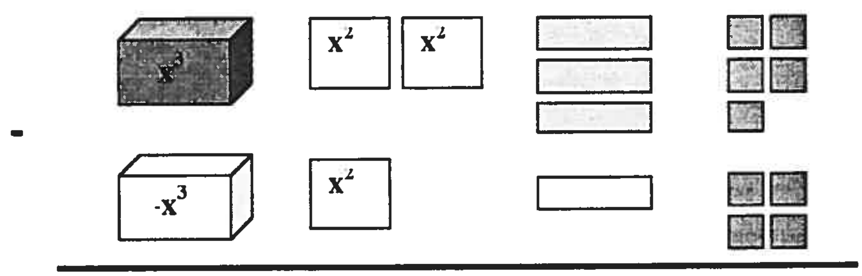
$= 5a^2 - 2a^2 + ab + 5ab + 4b^2 - 3b^2$

$= 3a^2 + 6ab + b^2$

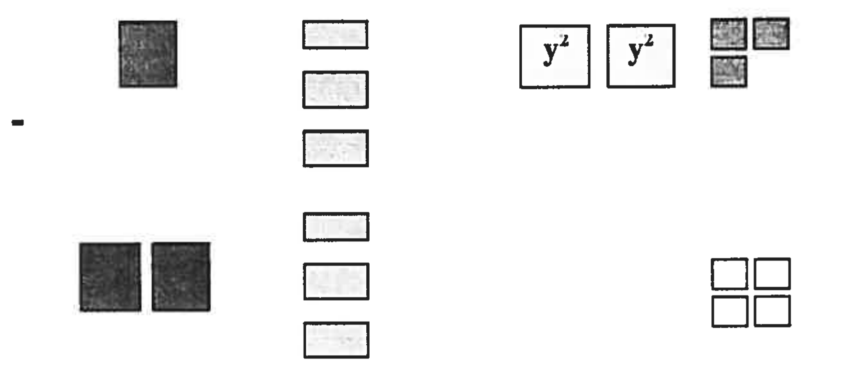
L'activité 3 se prolonge par la résolution de problèmes suivants, ce qui peut permettre aux séminaristes d'affiner leurs stratégies de résolution dans diverses situations.

1. Donne mentalement la différence que suggèrent ces représentations de polynômes.

a)



b)



Il est important de parler et de faire parler en termes de tuiles ou de formes géométriques, puis en termes algébriques, ceci pour assurer une compréhension des concepts investis.

2. Voici deux graphies algébriques comprenant le polynôme P(x):

i) $2x^2 + 3x - 4 + P(x) = 5x^2 - 3$ ii) $P(x) - (4x^2 - 2x) = 6x^2 - 4x + 6$

Le formé peut demander aux élèves de déterminer dans chacune de ces graphies le polynôme P(x) de sorte que l'égalité soit vraie, et d'expliciter la stratégie qui leur permet de déterminer facilement P(x). C'est l'occasion de les faire travailler par «binôme» ou «trinôme», car rien ne peut remplacer une discussion en équipe de deux ou trois élèves. Le raisonnement avec des nombres est plus simple et peut servir de base à la compréhension de la stratégie qui permet de déterminer facilement P(x), celle qui consiste à utiliser l'opération inverse. C'est donc aussi l'occasion d'amener les élèves à considérer le polynôme comme l'inconnue d'une équation.

2. Deuxième situation: multiplication de polynômes

2.1. Buts de la situation

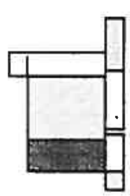
Il s'agit de montrer en quoi ou comment les formes géométriques, disposées en rectangle, peuvent aider à illustrer la multiplication et à en dégager une règle opératoire; à déterminer un polynôme correspondant à l'aire d'un modèle géométrique donné; à donner la multiplication illustrée dans chaque cas de modélisation géométrique.

2.2. Activité 1: Multiplication et rectangle

Les formes géométriques disposées en rectangle sont une bonne illustration de la multiplication. Comme l'ont montré nos analyses préalables, c'est depuis le Primaire que la multiplication doit être associée aux rectangles. Le résultat de la multiplication peut ainsi être vu comme le nombre de pièces de chaque type qui constituent le rectangle. Le Séminaire comble cette lacune en reprenant cette idée dans l'utilisation des tuiles pour mettre en évidence les facteurs. Il est important que le formé prenne le temps d'établir les conventions et de rendre les élèves familiers avec l'utilisation de ces tuiles pour la multiplication. Par exemple, ils peuvent convenir que le premier facteur correspond à l'axe des x et que le second correspond à l'axe des y. Ainsi, les tuiles sont grises si on les place dans les premier et troisième quadrants et blanches si on les place dans les deuxième et quatrième quadrants.

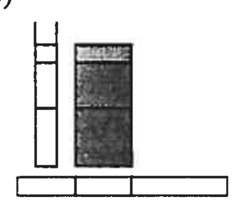
1. Donne le résultat de chacune des multiplications illustrées ci-dessous, puis dégage une règle de multiplication.

a)



$-y(-x - 1) =$

b)



$x(2x + 1) =$

Dans la construction du rectangle associé à la multiplication, le principe est de toujours utiliser la plus grande pièce possible pour le compléter. Dans le cas b), les rectangles se limitent au premier quadrant. On peut montrer qu'on peut utiliser tous les quadrants, selon les facteurs. Par exemple, pour le cas a) les tuiles sont placées dans le quatrième quadrant et sont colorées.

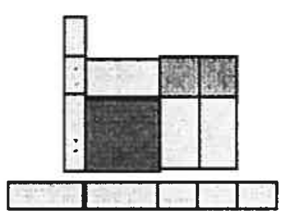
2. À partir de ces observations, détermine les produits suivants:

a) $4x \times -2x$ b) $5(x + 3)$ c) $-2bc(b + c)$ d) $2xy \times 3xy$ e) $-4y(-2y + 3)$

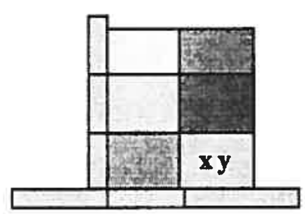
La représentation géométrique de la multiplication conduit à une représentation algébrique ou symbolique; celle-ci amène progressivement l'élève à une généralisation appelée règle. Il est important que l'élève utilise de façon alternative le support et la règle suivante: $ax^my^p.bx^ny^q = abx^{m+n}\,y^{p+q}$. Par exemple, on a $(2x^3y)(-4x^2y^2) = -\ 8x^5y^3$. Ce qui se passe au niveau des exposants correspond à des changements de dimension comme pour x.x. Il est utile que le formé fasse recours au changement de dimension pour asseoir les règles. L'addition et la soustraction n'affectent pas la dimension, mais la multiplication et la division impliquent un changement de dimension ou de degré. Le travail sur les tuiles peut ainsi déboucher sur la formulation d'une règle. Le formé peut faire observer que l'emploi du point de multiplication est superflu lorsque des parenthèses sont utilisées dans une multiplication. Il doit s'assurer de la bonne formulation de la propriété de distributivité: $a(bx+c) = abx+ac$. Il peut faire observer que cette propriété, lorsqu'elle est appliquée «dans l'autre sens», permet de factoriser l'expression.

3. Donne le résultat de chacune des multiplications illustrées ci-dessous, puis dégage une règle de multiplication.

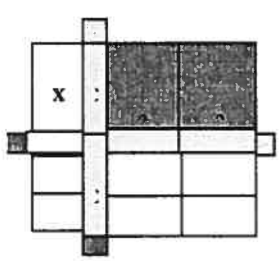
a) $(x + 2)(x + 1)$



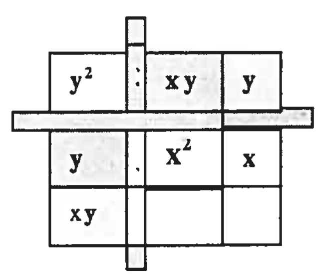
b) $(y + x)(y + x + 1)$



c) $(2x - 1)(x - 2) =$



d) $(-y + x + 1)(y - x - 1) =$

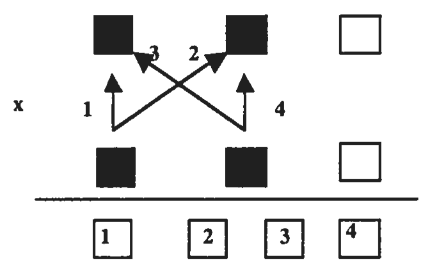


Cet exercice fait déboucher sur l'algorithme de la multiplication de polynômes, algorithme qui contient tous les cas de multiplication faisant référence à la distributivité. Le formé doit s'assurer que l'élève fait ce rapprochement. Comme ses élèves n'ont jamais travaillé avec les tuiles, il doit revoir les principes suivants: 1°) représenter, sur la partie négative des axes, les termes négatifs des facteurs et former des rectangles dans les quadrants concernés; 2°) suivre les règles des signes des coordonnées des points du plan cartésien; 3°) faire correspondre le produit à la réunion des rectangles et réduire les termes semblables.

4. Compare les résultats obtenus dans les multiplications précédentes avec ceux que tu obtiens ci-dessous en effectuant la multiplication de tous les termes entre eux.

a)	b)	c)	d)
$x + 1$	$y + x + 1$	$x - 2$	$y - x - 1$
$x + 2$	$y + x$	$2x - 1$	$y + x + 1$

Le formé peut parler ici de la double, de la triple distributivité, en s'assurant que l'élève fait bien correspondre le produit de chaque terme du multiplicateur par chaque terme du multiplicande à l'une des régions du rectangle. Il peut faire formuler la règle suivante: «chacun des termes du premier polynôme multiplie chaque terme du second polynôme».



En réalité, chaque terme du premier polynôme est distribué par rapport à chacun des termes du second polynôme:

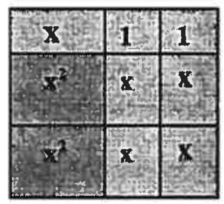
$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd \text{ (double distributivité)}$$

La multiplication peut s'effectuer autant d'une manière verticale que d'une manière horizontale; mais cette dernière façon de procéder est plus difficile et engendre plus d'erreurs de calculs. L'activité 1 se prolonge par la résolution de problèmes d'investissement suivants.

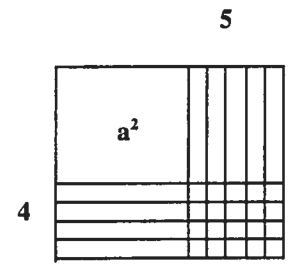
2.3 Investissement 4

1. Donne la multiplication illustrée dans chaque cas.

a)



b)



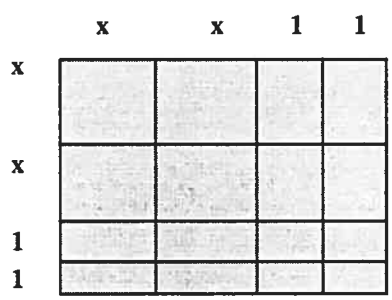
2. Détermine le produit dans chaque cas :

a) $(x + y)(2y - 5)$ b) $2(2x + 3)^2$ c) $(a - b)(a - b)$ d) $(by + 3)(ay - 2)$

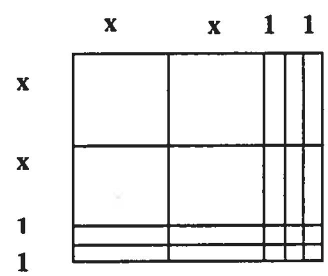
Dans les deux premiers exercices ci-dessus, les produits pourraient s'effectuer mentalement. Comme nous l'avons dit plus haut, l'élève ne devrait pas hésiter à effectuer les opérations mentalement lorsque cela est possible. L'importance accordée aux traces écrites a fait perdre aux élèves le juste milieu entre l'utilisation mentale et l'utilisation écrite des connaissances. Le formé ne devrait exiger d'eux la démarche complète que lorsque le risque de commettre des erreurs devient plus grand.

3. Donne le polynôme correspondant à l'aire des figures illustrées ci-dessous :

a)



b)



4. Complète les énoncés afin qu'ils se vérifient, quelle que soit la valeur qu'on donne à x.

a) $(2x + 3)(4x - \square) = \square\, x^2 + 6x - 9$. b) $(\square\, x + 5)(4x - \square) = 12x^2 + \square\, x - 10$.

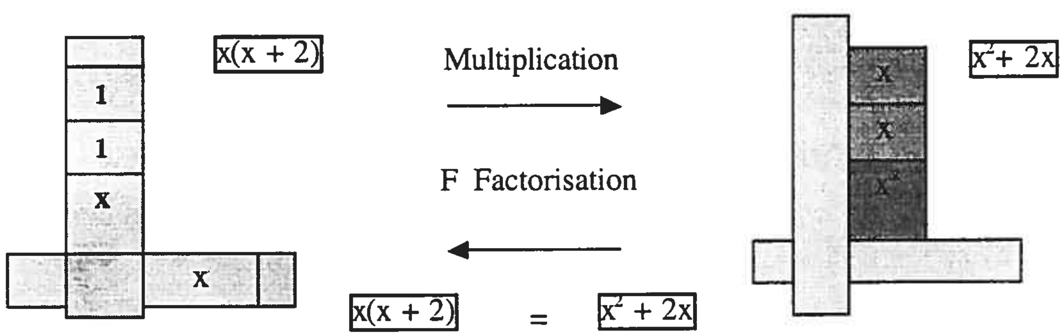
En permettant aux élèves d'associer les produits partiels à chaque terme du produit final, cet exercice vise à intégrer les acquis dans la compréhension et la résolution de ce type d'équations.

5. En procédant comme suit: $32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2(30)(2) + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$, évalue: a) 39^2 b) 102^2 c) 97^2 d) 203^2 e) 997^2

On accorde ainsi de l'importance à souligner les stratégies que les élèves utilisent pour effectuer rapidement, sinon mentalement, de tels calculs. Il est fréquent d'avoir à effectuer de tels carrés dans les situations scolaires et dans la vie courante. Pour le faire et le réussir, il faut en avoir pris l'habitude et avoir développé des habiletés.

2.4. Activité 2: Facteurs et zéros d'un polynôme

Cette activité vise à développer chez les séminaristes une habileté très importante en algèbre: factoriser des polynômes. En effet, la factorisation est utile dans la simplification des graphies algébriques, dans les opérations sur ces graphies et dans la résolution des équations. Elle a de nombreuses applications et elle est, pour ainsi dire, omniprésente en algèbre. Son enjeu didactique est de montrer en quoi et comment la représentation géométrique peut nous aider à visualiser à la fois la multiplication et la factorisation. Les principaux cas de factorisation exposés sont les mises en évidence (simple et double), les différences de carrés et les trinômes $ax^2 + bx + c$. Tous ces cas sont présentés dans les manuels comme des cas particuliers de la mise en évidence. Nous n'empruntons pas cette voie pour de nombreuses raisons évoquées dans nos analyses préalables. Nous préférons plutôt présenter des procédés (algébriques et géométriques) pour factoriser chaque cas. Les tuiles vont encore servir de support à la compréhension; elles vont servir à montrer que la factorisation est le processus inverse de la multiplication. Ce processus suppose avant tout une analyse de la forme et du degré de l'expression afin de reconnaître un procédé qui permet d'en effectuer la factorisation. La représentation géométrique dans le plan cartésien nous aide à visualiser cette opération.



Si les formés ont déjà travaillé avec les tuiles, ils n'auront aucune difficulté à suivre les explications et les exemples donnés à l'aide de cet outil didactique. Les activités du Séminaire peuvent très bien se poursuivre sans qu'on ait à manipuler les tuiles. Bien sûr, la manipulation ne peut que faciliter la compréhension. Alors qu'en termes algébriques, factoriser un polynôme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs (on dit aussi *décomposer* le polynôme en facteurs), le schéma ci-dessus montre bien que multiplier géométriquement, c'est trouver l'aire à partir des dimensions et que factoriser un polynôme, c'est trouver les dimensions à partir de l'aire. Mais, en raison de nombreuses erreurs constatées chez des élèves, les manuels en viennent à restreindre davantage cette notion de facteurs d'un polynôme, ce qui n'est pas toujours heureux.

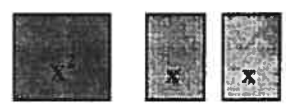
L'activité 2 se prolonge par la résolution des problèmes d'investissement suivants. Elle permet d'illustrer de quelle façon les facteurs sont utilisés dans chaque cas. C'est l'occasion pour le formé d'expliquer aux élèves que le but de la factorisation est d'abord et avant tout d'exprimer des expressions du second, du troisième degré à l'aide d'expressions de degré inférieur: $(x^2 + \ldots) = (x + \ldots)(x + \ldots)$.

2.5 Investissement 5

1. Donne tous les rectangles qui ont une aire de 18 unités carrées et des dimensions entières.

Les élèves sont invités à associer un produit à l'aire d'un rectangle et les dimensions aux facteurs. Cette association est heureuse et elle est importante dans l'utilisation des tuiles.

2. Voici un modèle géométrique d'un polynôme.

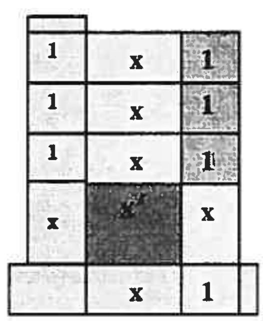


a) Quel est ce polynôme?
b) Quelles graphies algébriques représentent les dimensions du rectangle que tu peux construire avec ces formes géométriques?

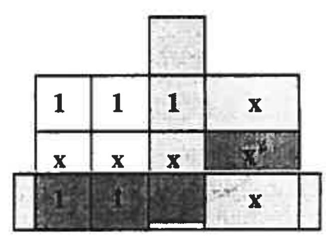
Le futur enseignant doit s'assurer de la compréhension de cette association. Certains élèves peuvent prendre x pour la hauteur et x + 2x pour la largeur, ce qui n'est pas correct.

3. Dans chaque cas, donne le polynôme et ses facteurs

a)



b)



Les formés sont amenés à lire les facteurs sur les axes selon leur signe. Ils peuvent comprendre que dans les premier et troisième quadrants, les tuiles sont colorées et que, dans les deuxième et quatrième quadrants, elles sont blanches ou non colorées.

4. Détermine si (a – 3) est un facteur du polynôme donné. Explique comment tu t'y prends.
(i) $a^2 - 9$ (ii) $a^2 + 6a - 27$ (iii) $2a^2 - 3a + 8$ (iv) $4a^2 - 12a + 5$

L'élève est amené à bien comprendre le lien entre le 3 et le facteur (a - 3). Si une multiplication contient un facteur de la forme (x – a), alors *a* est une valeur de x qui *annule* le produit. De même, si *a* est une valeur de x qui *annule* un polynôme P(x), alors (x - a) est un *facteur* de P(x). Ceci est une propriété importante concernant les facteurs d'un polynôme. L'élève peut comprendre que la présence d'un zéro en x = a assure la présence d'un facteur de la forme (x - a) dans le développement de ce polynôme. Il peut se familiariser avec plusieurs procédés qui lui permettent de vérifier s'il a les bons facteurs.

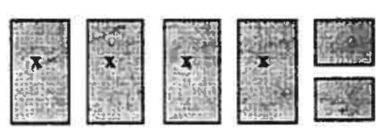
2.6. Activité 3 : Mise en évidence simple des facteurs

L'activité 3 a pour but de faire utiliser la propriété de distributivité qui est la clé de factorisation des polynômes, de faire expliciter les deux sens de cette propriété: dissimuler un facteur commun dans les termes d'un polynôme, mettre en évidence ce facteur commun et écrire le polynôme sous la forme d'un produit de facteurs. Un autre but est de montrer comment l'utilisation de tuiles permet de mettre en évidence les facteurs. La factorisation (par mise en évidence simple) est un processus qui demande aux élèves de percevoir un facteur commun; celui-ci peut être un coefficient, un monôme, un binôme ou un polynôme. Un nombre ou une expression quelconque étant toujours égal à son produit par 1, 1 peut être un facteur commun, comme dans l'exemple suivant: $a^2 + 3a + a + 3 = a(a + 3) + 1(a + 3) = (a + 1)(a + 3)$. Un facteur commun suppose qu'il y a eu distribution. Il s'agit de refaire, à l'envers, la distribution qui a été faite à l'endroit. L'habileté fondamentale consiste à percevoir ce facteur commun qui s'est dissimulé dans les termes de l'expression.

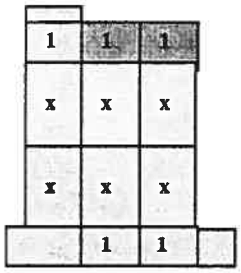
1. a) Tu connais bien la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. Explique cette propriété en tes propres mots.
b) Utilise cette propriété pour trouver mentalement le produit des facteurs suivants:
(i) 8 x 34 (ii) 9 x 99 (iii) 12 x 45 (iv) 20 x 42

Comme une mise en évidence suppose une distribution, il est bon de partir de la propriété de distributivité pour donner un sens à l'expression *mise en évidence*. La capacité de trouver mentalement ces produits fait que la connaissance devienne un outil.

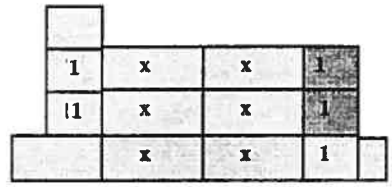
2. En disposant des tuiles ci-dessous, le formé peut demander aux élèves de déterminer le polynôme qui est représenté par ces tuiles.



Il peut leur demander de dire en quoi la propriété de distributivité est si importante pour la mise en évidence. Il peut, ensuite, leur présenter les deux façons suivantes de disposer ces tuiles pour former un rectangle dont les dimensions sont différentes de 1.



les facteurs de $4x + 2$ sont 2 et $(2x + 1)$.



Il est intéressant que les élèves expliquent en quoi ces deux façons de disposer les tuiles sont équivalentes, qu'ils disent comment ils appliquent la propriété de distributivité dans le sens inverse, et comment ils peuvent obtenir le second facteur du produit. Les tuiles peuvent être placées horizontalement sans que le raisonnement change. Dans cette démarche, l'élève est amené à comprendre que l'aire des rectangles peut être associée au polynôme, alors que leurs dimensions sont associées aux facteurs. Ce modèle se limite évidemment aux polynômes du second degré. Les tuiles ne sont qu'un support à la compréhension.

Pour passer des facteurs au produit, il suffit d'appliquer la *propriété de distributivité* de la multiplication. Il est important de montrer, par quelques exemples, que parfois le facteur commun se dissimule bien, par exemple: $2a(3a + 4) = 6a^2 + 8a$. La dissimulation est encore plus forte dans la double distributivité: $(2a - 1)(a + 4) = (2a - 1)a + 4(2a - 1) = 2a^2 - a + 8a - 4 = 2a^2 + 7a - 4$. En appliquant la propriété de distributivité, chaque terme du produit dissimule un facteur commun. Pour appliquer cette propriété dans le sens inverse, il faut d'abord identifier le plus grand facteur commun (PGFC) qui s'est «fondu» dans chaque terme du polynôme lors de la multiplication. Le formé doit insister sur l'importance du facteur commun et du PGFC. Il peut même faire prendre l'habitude de les rendre visibles. La décomposition en facteurs n'est complète que lorsqu'on a extrait le PGFC. Par exemple, dans l'écriture $x^3y^2 + x^2y^2 - x^2y^3 = xy(x^2y + xy - xy^2)$, la mise en facteurs est correcte mais incomplète; le PGFC est x^2y^2 et non xy.

3. Voici des polynômes dont chaque terme dissimule un facteur commun.

(i) $2a^2 + 2a$ (ii) $4uv + 6v^2$ (iii) $4x^2 - 8xy + 12$ (iv) $2xy+6yz+12z^2$

a) Quel est ce facteur commun?

b) Détermine les facteurs de chacun des polynômes.

Certains élèves peuvent ne pas comprendre l'importance de mettre les termes restants entre parenthèses. Le formé peut préciser que le facteur qui nous intéresse est *généralement* le plus grand. On souligne le mot généralement, parce qu'il peut arriver qu'on ne prenne pas le plus grand facteur, comme c'est le cas dans la recherche d'une simplification. Aux termes de ces exercices, le formé peut faire noter que pour factoriser un polynôme, il faut: 1°) identifier le PGFC et le rendre visible dans chaque terme; 2°) écrire ce facteur commun en le faisant suivre de parenthèses et 3°) diviser chaque terme du polynôme par ce facteur commun pour déterminer le facteur entre parenthèses.

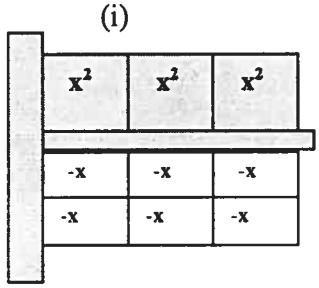
Lorsqu'on dit «*mise en évidence simple*», c'est que l'on veut faire le parallèle avec la «*double mise en évidence*». Le formé peut demander aux élèves d'expliquer pourquoi, dans la démarche de factorisation ci-dessus décrite, on doit diviser chaque terme du polynôme par le facteur commun. Ainsi, $3a^2 + 6a = 3a \times a + 3a \times 2 = 3a(a + 2)$, c'est-à-dire que pour factoriser un polynôme, nous devons toujours chercher d'abord à mettre en évidence un facteur commun. Le sens de l'expression «mettre en évidence» est bien son sens propre, c'est-à-dire mettre en évidence un facteur pour que toute la classe le voie.

L'activité 3 se prolonge par la résolution des problèmes d'investissement suivants qui visent la compréhension de l'algorithme de mise en évidence. Elle fait aussi discuter les élèves afin de les amener à s'approprier les concepts et à s'exprimer dans un langage mathématique correct.

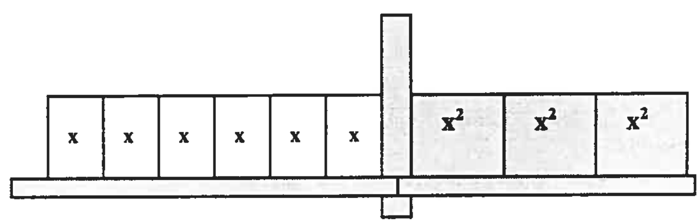
2.7. Investissement 6

1. Dans chacun des cas ci-dessous, on a formé un rectangle pour représenter un polynôme.

(i)



(ii)



Le formé fait déterminer ce polynôme; il fait donner la factorisation qui est illustrée dans chaque cas. En supposant qu'un élève (Souley) a factorisé ce polynôme comme suit: $x(3x - 6)$, le formé peut demander à un autre élève de dire la remarque qu'on peut faire à Souley et d'expliquer en quoi l'une de ces illustrations peut être la meilleure. Pour voir le rectangle, il faut faire abstraction des axes. Le formé doit s'assurer que tous les élèves savent lire les facteurs sur les axes. Il peut faire remarquer que, dans le second cas, le rectangle est plus compact et qu'il correspond au PGFC. Souley aurait dû factoriser le polynôme $3x^2 - 6x$ de la manière suivante: $3x(x - 2)$, car il est préférable de prendre le plus grand facteur. Les élèves doivent sentir que les mathématiques, tout en étant rigoureuses, sont cependant flexibles et ne vont pas contre le bon sens.

2. La factorisation du polynôme suivant présente une difficulté. Quelle est cette difficulté?

$$2a(2ax - 1) + (1 - 2ax) = (2a - 1)(2ax - 1)$$

Le formé peut laisser les élèves discuter pour qu'ils résolvent ce problème par «binôme» ou «trinôme», c'est-à-dire par groupe de deux ou trois. Il a ici une source intéressante de blocage qu'il peut exploiter pour l'analyse des difficultés.

2.8. Activité 4: Double mise en évidence

Cette activité a pour buts de présenter la double mise en évidence comme la deuxième façon de tenter une factorisation (la première étant toujours la mise en évidence simple), d'expliciter le rôle que joue la double distributivité dans cette double mise en évidence, et d'expliquer pourquoi la double mise en évidence exige un même nombre de termes dans chaque groupement du polynôme. On dit parfois «*mise en évidence double*» au lieu de «*double mise en évidence*», la seconde expression étant plus courante, parce que décrivant mieux le processus auquel elle fait référence. La double mise en évidence peut être considérée comme la mère de toutes les techniques des différents cas de factorisation. En effet, quel que soit le cas, le produit de polynômes s'effectue par distributions successives. Il est donc normal que l'opération inverse puisse se faire, elle aussi, par des mises en évidence successives.

Pour effectuer la multiplication de deux binômes, nous distribuons d'abord le premier binôme par rapport à chacun des termes du second binôme. Par exemple, nous pouvons écrire: $(2x + 1)(3y - 2) = 3y(2x + 1) - 2(2x + 1)$. Nous complétons ensuite la multiplication en distribuant chaque terme du second binôme par rapport au premier. Ainsi, on a: $(2x + 1)(3y - 2) = 3y(2x + 1) - 2(2x + 1) = 3y.2x + 3y.1 - 2.2x - 2.1 = 6xy + 3y - 4x - 2$. Il y a donc une double distributivité dans le calcul du produit. Par conséquent, le retour à la forme factorisée passe par *deux mises en évidence*:

- Première mise en évidence dans chaque groupement: $6xy+3y-4x-2 = 3y(2x+1) - 2(2x + 1)$.
- Seconde mise en évidence du facteur commun entre parenthèses $(2x + 1)(3y - 2)$.

Il est important de faire observer qu'on peut changer l'ordre des termes et parvenir au même résultat. On peut, en effet, écrire: $6xy - 4x + 3y - 2 = 2x(3y - 2) + 1(3y - 2) = (3y - 2)(2x + 1)$. Le formé peut utiliser le jeu des couleurs pour faire voir cette double distributivité. S'il y a double distributivité, il est normal qu'on ait double mise en évidence dans l'opération inverse. Pour effectuer une *double mise en évidence*, nous procédons de la façon suivante:

1°) nous *regroupons* les termes ayant un facteur en commun; 2°) nous *mettons en évidence* le facteur commun dans *chacun des groupes*; 3°) nous mettons en évidence le *facteur commun entre parenthèses.*

Il est parfois nécessaire de mettre en évidence un *facteur à coefficient négatif* pour obtenir un facteur commun entre parenthèses. Par exemple, $2xy - 6x - 5y + 15 =$

$2x(y-3) - 5(y-3)$ ▸ première mise en évidence

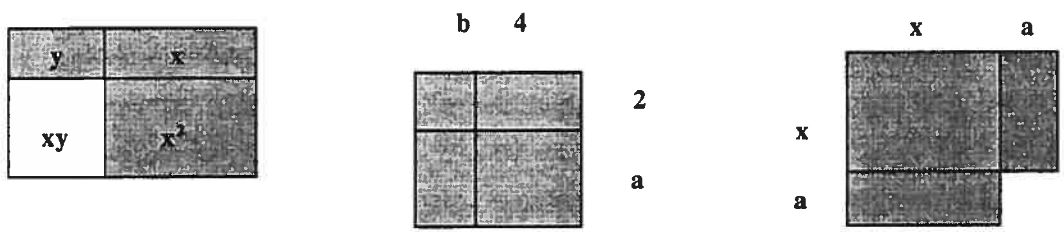
$= (y-3)(2x-5)$ ▸ seconde mise en évidence

Parfois, il est aussi nécessaire de *changer l'ordre des termes* afin de regrouper ceux qui ont un facteur commun. Par exemple, $a^2 + 4b + 2a + 2ab = a^2 + 2a + 2ab + 4b = (a^2 + 2a) + (2ab + 4b) = a(a + 2) + 2b(a + 2) = (a + 2)(a + 2b)$. Si les élèves disposent des tuiles, l'enseignant peut leur demander de les utiliser afin de trouver les facteurs avant d'appliquer la méthode ci-dessus suggérée. Les deux derniers exemples illustrent les difficultés les plus courantes que les élèves rencontrent dans ce genre d'exercices.

L'activité 4 se prolonge par la résolution des problèmes d'investissement suivants.

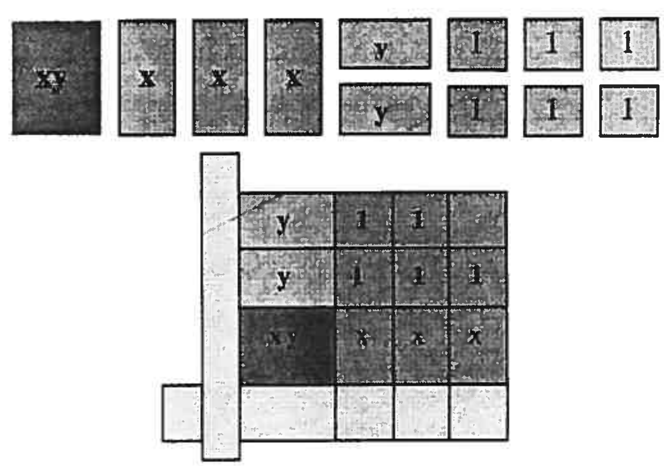
2.9 Investissement 7

1. Exprime l'aire des rectangles suivants sous la forme d'une somme et d'un produit.



Le formé peut demander aux élèves de donner deux expressions équivalentes de l'aire. Il peut souligner qu'on préfère bien souvent la forme qui montre les facteurs.

2. Voici un assemblage de tuiles.
a) Quel polynôme a-t-on représenté?
b) Utilise la double mise en évidence pour montrer que les facteurs de ce polynôme sont bien ceux qu'on a illustrés ci-contre.



La somme et le produit peuvent être déduits des figures ou en factorisant la somme. L'enseignant fait remarquer qu'en construisant un rectangle avec les tuiles représentant le polynôme, les élèves peuvent trouver les facteurs de ce polynôme.

3. Le polynôme $a^3 + 2a^2 + 4a + 8$ représente l'aire d'un certain parallélogramme et $(a + 2)$, la mesure de la base. Quel polynôme représente la hauteur du parallélogramme?

Les élèves peuvent utiliser diverses stratégies: factoriser par double mise en évidence, effectuer la division, ou procéder par multiplication. L'enseignant peut, au besoin, leur signaler quelques unes de ces stratégies et leur demander s'ils en ont d'autres à proposer.

3. Troisième situation: mise en facteur de la différence de carrés

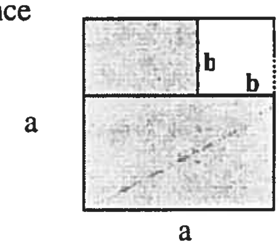
3.1. Buts de la situation

Cette troisième situation correspond au cas de factorisation où le produit de deux binômes entraîne un binôme, les produits croisés étant des opposés. Ce cas se présente lorsque les facteurs sont des expressions conjuguées. Il s'agit tout d'abord de montrer que la possibilité de factoriser un polynôme est directement liée à la possibilité de former un rectangle dont les dimensions correspondent aux facteurs du polynôme.

3.2. Activité 1 : Les coups de ciseaux

Cette activité de découpage et de recollage d'aires de surface a pour buts d'expliquer en quoi l'aire d'une figure donnée peut correspondre à une différence de carrés. L'enjeu didactique en est que certains polynômes que nous ne pouvons factoriser par la mise en évidence simple (ou double) peuvent l'être par un autre procédé, en l'occurrence le découpage.

1. Voici une figure dont l'aire ombrée correspond à la différence des deux carrés a^2 et b^2.
Explique en quoi l'aire de cette figure correspond à une différence de carrés.



Ainsi, on peut facilement se donner un support géométrique d'une différence de deux carrés. L'une des possibilités est, sans nul doute, celle présentée ci-dessus: l'aire du grand carré (a^2) diminuée de l'aire du petit carré (b^2) nous donne l'aire de la figure ombrée. On peut factoriser cette différence de carrés, $(a^2 - b^2)$, en autant qu'on soit capable de transformer la figure en un rectangle de même aire. On peut, en effet, effectuer cette transformation en coupant de façon adéquate, par exemple, en suivant les pointillés comme ci-dessous indiqués (figure 27).

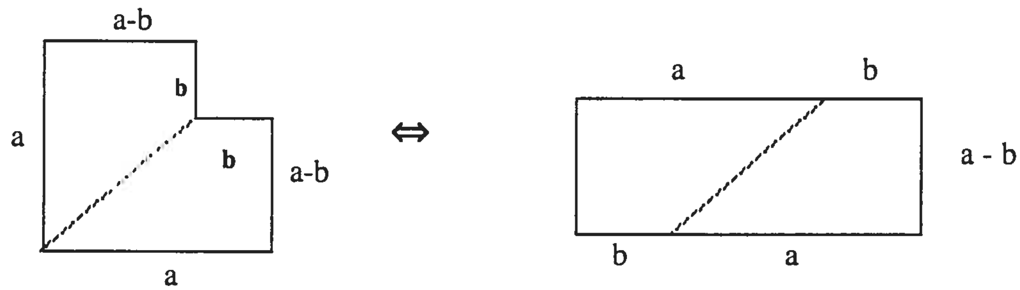
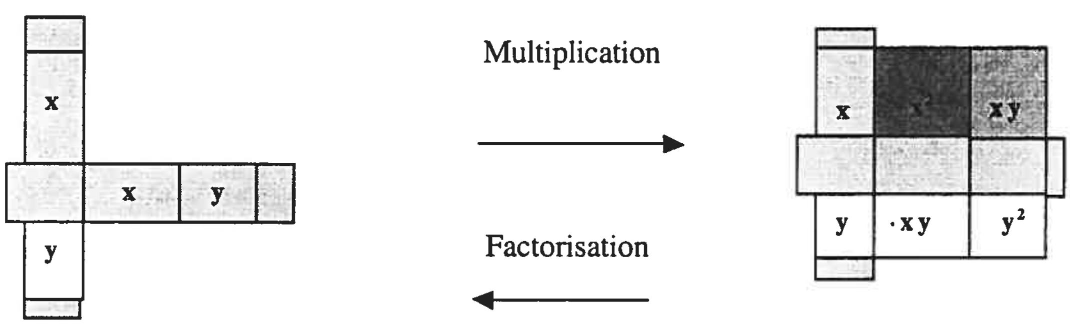


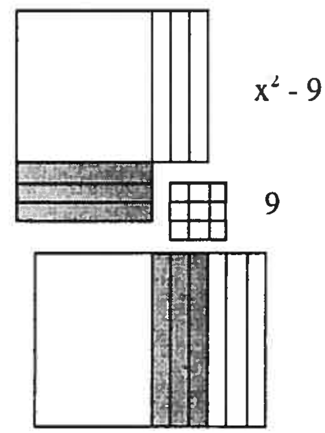
Figure 27: Les coups de ciseau, découpage et recollage

Le formateur peut demander au séminariste d'expliquer comment il peut passer d'une figure à l'autre; il peut lui demander d'écrire les expressions qui représentent les dimensions du rectangle obtenu et d'exprimer l'aire de ce rectangle sous la forme d'un produit de facteurs. Le séminariste est ainsi invité à découper la première figure suivant le pointillé, à retourner la partie intérieure et à coller ensemble les deux parties séparées selon la ligne de coupe. Il peut obtenir ainsi une figure identique à celle de droite. Ce faisant, il confirme le fait (algébrique) que les facteurs d'une différence de deux carrés sont des conjugués dont les termes correspondent aux côtés de chaque carré: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. L'utilisation des tuiles aide à confirmer le fait que la différence de deux carrés est factorisable.



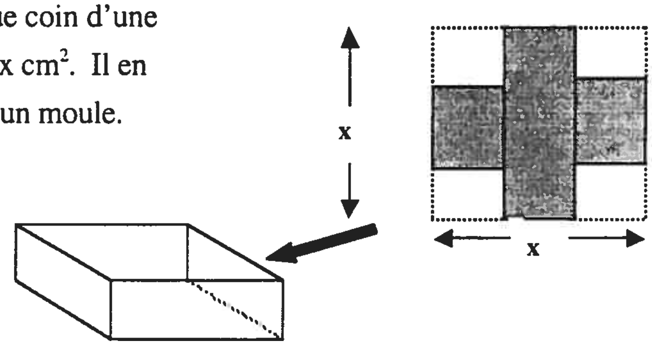
Le formé est conduit à constater et à dire que l'aire du rectangle obtenu correspond à $x^2 - y^2$, étant donné que les deux autres régions sont opposées et correspondent à 0. En effet, dans le sens de la multiplication, il construit le rectangle de dimensions $x + y$ et $x - y$, ce qui lui donne $x^2 + xy - xy - y^2$ ou, après réduction, $x^2 - y^2$. Dans le sens inverse, il dégage de la disposition des tuiles les dimensions du rectangle: $x + y$ et $x - y$. On peut donc factoriser tout polynôme identifiable à une différence de carrés selon le modèle suivant: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Il est important de tenir compte de la difficulté que certains élèves éprouvent à poser la base des carrés lorsque ceux-ci comportent un coefficient. Ainsi, $4x^2 - 9$ est identifiable à la différence de carrés $(2x)^2 - (3)^2$. On peut alors immédiatement écrire: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$. Nous devons les représentations géométriques d'une somme et d'une différence de carrés aux pythagoriciens (-540) qui illustraient les graphies algébriques par des diagrammes composés de carrés et de rectangles.

2. Prends une grande feuille de papier carrée.
a) Désigne son côté x cm.
b) Trouve une expression qui indique son aire.
Avec une règle, trace à la base et sur un côté 3 bandes mesurant chacune 1 cm de largeur.
Découpe et mets de côté le bloc mesurant 9 cm^2.
c) Quelle est l'aire de la partie restante?
Découpe les 3 bandes à la base et place-les sur le côté de la figure. Du rectangle ainsi formé, trouve: (i) la largeur, (ii) la longueur , (iii) l'aire.



Le découpage et le recollage permettent au séminariste de bien voir ce qui se passe dans cette situation et rendent le problème à la fois beaucoup plus simple et intéressant. Le formé ne doit pas oublier que les élèves ont cet outil à leur disposition et qu'ils ne demandent pas mieux que de s'en servir pour simplifier les tâches, comme celle qui consiste à illustrer, selon la méthode ci-dessus décrite, $x^2 - 25$, $x^2 - 36$ ou $x^2 - 49$.

3. Un ingénieur coupe 5 cm à chaque coin d'une feuille carrée en fer-blanc mesurant x cm^2. Il en relève ensuite les côtés pour former un moule.
Trouve:
a) le périmètre du fond du moule,
b) l'aire du fond du moule,
c) la capacité du moule.



3.3. Activité 2: Développement et mise en facteurs algébriques

Cette activité a pour buts d'illustrer, à l'aide des exemples variés, comment on met en facteurs la différence de carrés, et comment on regroupe les termes d'un polynôme pour obtenir la différence de carrés. Certains polynômes qui ne sont pas des différences de carrés peuvent ainsi donner lieu à une différence de carrés après une mise en évidence. Les exercices et problèmes ci-dessous visent à intégrer les acquis dans la compréhension et les applications de la factorisation de la différence des carrés.

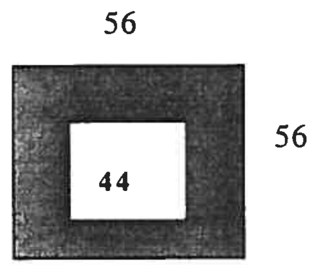
1. Les polynômes suivants sont-ils des différences de carrés?

a) $81 - a^9$ b) $y^2 - (x + z)^2$ c) $144x^2 + 81y^2$ d) $u^6 - 36$

Le formé peut demander aux élèves d'énoncer les propriétés des exposants auxquelles renvoie cet exercice.

2. Un côté d'un gymnase rectangulaire mesure $(2x - 5)$ m de longueur. Si l'autre côté mesure 10 m de plus, trouve une expression qui donne l'aire du parquet du gymnase.

3. Dans un carré dont la mesure du côté est de 56 unités, on a construit un carré dont la mesure du côté est 44 unités.
a) Détermine l'expression qui correspond à l'aire ombrée.
b) Factorise cette expression.



Le formé soulignera que cela est vrai quelle que soit la position du carré intérieur.

L'activité 2 se prolonge par la résolution des problèmes d'investissement suivants.

3.4. Investissement 8

1. Factorise les différences de carrés suivantes.

a) $25a^2/16 - 36/49$ b) $(a - b)^2 - 4c^2$ c) $4.41 - 1.21x^{10}$ d) $b^2 - (b + c)^2$

Cet exercice démontre pourquoi on doit toujours vérifier s'il est possible de faire une mise en évidence.

2. Lesquels des polynômes suivants ont $(x + 3)$ comme facteur?

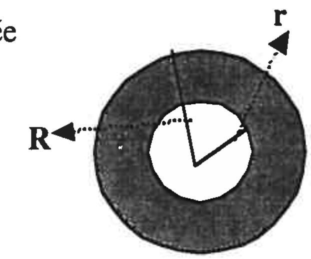
a) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ b) $R(x) = 2x^2 - 18$ c) $Q(x) = 12x^2 - 36x$

L'objectif visé est de faire décomposer en facteurs un polynôme donné. Cet exercice permet de vérifier d'un seul coup les trois cas de décomposition vus jusqu'à maintenant.

3. Manile affirme que la factorisation du polynôme $12y^2z + 18yz + 24yz^2$ est $2yz(6y + 9 + 12z)$. Tabara prétend qu'on peut poursuivre la factorisation en question. Quel peut être l'argument de Tabara?

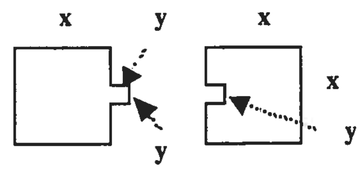
Il est important d'habituer les élèves à former un quotient et à simplifier les facteurs communs. L'argument de Tabara est que 6, 9 et 12 ont un facteur commun: 3; on peut donc poursuivre la factorisation du polynôme.

4. Une couronne est, comme l'indique la figure ci-contre, formée par la surface comprise entre deux cercles, l'un de rayon R et l'autre de rayon r. Exprime l'aire de cette couronne sous la forme d'un produit de facteurs indécomposables.



(R - r) est la largeur de la couronne. On a ici un exemple d'une même formule utilisée de deux façons différentes selon le contexte: $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$.

5. Des pièces de plastique d'une maquette ont les formes et les dimensions illustrées ci-contre. L'aire des pièces mâles est de 40 cm^2 et celle des pièces femelles, de 32 cm^2. Quelles sont les valeurs de x et de y?



Ce problème peut se résoudre de différentes façons. L'une des plus simples est de déduire que $y^2 = 4$, car la différence des aires est 8. Toutefois, il serait intéressant que le formé fasse voir aux élèves que le modèle de différence de carrés convient parfaitement pour ce problème.

3.5 Activité 3: Techniques de calcul numérique

Cette activité vise à faire utiliser les facteurs d'une différence de carrés et la propriété de distributivité, pour effectuer de façon rapide certains calculs numériques voire algébriques; de faire expliquer comment on peut calculer mentalement certains produits numériques, et comment on peut généraliser certains résultats de calcul numérique observés. La maîtrise des techniques de calcul numérique requiert beaucoup d'exercices et de problèmes. Le formé doit faire des choix en fonction des habiletés des élèves et du temps dont ces derniers disposent. En voici quelques uns:

1. En remarquant que $49 = 50 - 1$, que $51 = 50 + 1$ et que $49 \times 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2499$, calcule mentalement le produit dans chacun des cas suivants:
a) 42×38 b) 52×28 c) 53×47 d) 22×18 e) 68×72 f) 98×102

2. Évalue selon la méthode illustrée comme suit: $998^2 - 2^2 = (998 + 2)(998 - 2) = 1000 \times 996 = 996\,000$
a) $96^2 - 4^2$ b) $102^2 - 2^2$ c) $1006^2 - 6^2$ d) $997^2 - 3^2$

Ici, comme dans le premier exercice ci-dessus, on utilise le modèle de factorisation des différences de carrés pour calculer mentalement ces produits ou ces différences.

L'activité 3 se prolonge par la résolution des problèmes d'investissement suivants. Dans les types de problèmes comme ceux proposés ci-dessous, les calculs algébriques deviennent des outils incontournables. Le formé devrait s'efforcer d'amener ses élèves à faire ce genre de choses, tout en leur exposant ses exigences pour ce qui concerne l'effectuation du calcul symbolique.

3.6. Investissement 9

1. En utilisant deux méthodes différentes, montre que $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$.

L'élève peut effectuer les calculs ou procéder par factorisation.

2. Je pense à un nombre entier. Si je l'augmente de 1, son carré augmente de 19. Quel est ce nombre? Explique comment tu fais pour le déterminer.

L'équation à poser est $(x+1)^2 - x^2 = 19$ ou $(x^2 + 2x + 1) - x^2 = 19$ ou $2x + 1 = 19$.

3. En utilisant la factorisation, montre que :

a) $24^2 - 23^2 = 47$ et que

b) l'on peut généraliser ce résultat pour tout naturel, c'est-à-dire que $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$.

L'élève peut faire la preuve en effectuant les calculs subséquents. Il est important que les élèves sachent que la factorisation sert dans ces calculs.

Les problèmes 1 et 3 sont particulièrement intéressants en ce qu'ils contribuent à développer l'habileté des élèves à traduire des régularités par des règles. Cette habileté a très peu de chance d'être développée chez nos élèves, les problèmes de ce type relevant traditionnellement du domaine réservé à la démonstration dont seul l'enseignant détient la clé. Ces règles peuvent être plus complexes au niveau algébrique. Les «montrer» ne signifie pas «substituer» des valeurs à la variable, mais prouver que le membre de gauche égale le membre de droite en s'assurant que les deux membres ont la même signification.

3.7. Récapitulation

Les activités précédentes permettent d'établir que factoriser un polynôme revient à le transformer en un produit de facteurs. Nous distinguons différentes situations de factorisation des polynômes. La première situation nous met en face d'une mise en évidence simple ou double. Nous pensons ensuite aux situations qui font appel à la différence de carrés. Nous poursuivons la décomposition jusqu'à ce que nous obtenions les facteurs indécomposables. Voici les cas de factorisation abordés jusqu'ici.

Cas	Caractéristiques	Techniques de factorisation	Forme factorisée
Mise en évidence	Un facteur est commun à tous les termes	1° Écrire le facteur commun en le faisant suivre de parenthèses. 2° Diviser chacun des termes du polynôme par ce plus grand facteur commun.	ax + ay + az **a(x+y+z)**
Double mise en évidence	Un facteur est commun aux termes de chaque groupe	1° Regrouper les termes ayant un facteur commun. (ax + bx) + (ay + by) 2° Mise en évidence simple pour chacun des groupes 3° Mise en évidence du facteur commun entre parenthèses	**(a+b)(x+y)**
Différence de carrés $a^2 - b^2$	Les deux termes de la différence sont des carrés.	Écrire le produit de la somme des bases des carrés par la différence de ces mêmes bases.	**(a+b)(a-b)**

Tableau 5: Tableau récapitulatif des situations de factorisation de polynômes

4. Quatrième situation: techniques algébriques et géométriques pour la construction du carré parfait (complétion de carré)

4.1. Buts de la situation

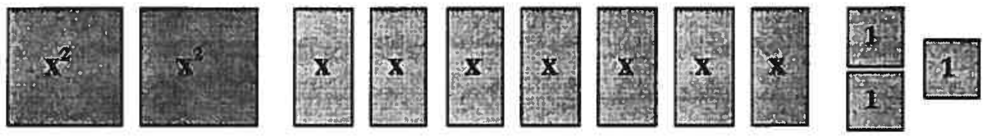
Il s'agit de montrer comment on peut construire des rectangles de manière à mettre en évidence les liens entre les coefficients du polynôme représenté par l'assemblage de tuiles et les dimensions de ces rectangles; de déterminer les caractéristiques de ceux de ces rectangles qui sont carrés (et appelés carrés parfaits); de présenter les techniques algébriques de factorisation de tels trinômes, et de montrer à la fois les procédés algébriques et géométriques de «complétion de carré» utilisés pour venir à bout des trinômes «récalcitrants», c'est-à-dire des trinômes qui sont difficilement décomposables.

4.2 Activité 1: Des tuiles pour construire les trinômes ax^2+bx+c

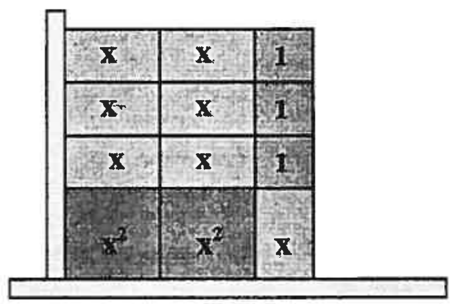
Cette activité a pour buts de montrer comment on peut, d'une part, assembler des tuiles de façon à construire des rectangles correspondant aux trinômes $ax^2 + bx + c$ et, d'autre part, comment on peut établir des liens entre les coefficients de tels polynômes et les coefficients des facteurs. Dans cette activité, l'introduction d'une valeur différente de 1 comme coefficient est de nature à modifier des éléments dans le processus de factorisation.

Pour ces polynômes, l'activité propose la méthode de factorisation basée sur la double mise en évidence.

1. Voici un assemblage de tuiles algébriques.



Le formé fait déterminer le polynôme qui est associé à cet assembage. La capacité de factoriser ce polynôme correspond à la capacité de former un rectangle et, avec cet assemblage, il est possible de former le rectangle ci-dessous.



Il est important que le formé fasse expliquer comment on obtient ce rectangle, qu'il fasse déterminer les expressions qui représentent les dimensions du rectangle formé, et les liens qui existent entre les coefficients du polynôme et ceux des facteurs. Le formé doit amener les élèves à discuter ces liens. Il peut effectivement faire établir des liens entre les coefficients du polynôme $2x^2 + 7x + 3$ et les coefficients des facteurs. Il peut faire remarquer que les tuiles en *x* ont été disposées en deux groupes: 6 tuiles disposées horizontalement et 1 tuile placée verticalement. Il peut demander aux élèves d'indiquer où retrouver la somme de ces deux nombres (1 et 6) dans le trinôme, d'expliquer comment ils peuvent retrouver le produit de ces deux nombres en utilisant le trinôme. Il peut aussi leur demander de vérifier si le trinôme $2x^2 + 7x + 3$ est égal au polynôme $2x^2 + 1x + 6x + 3$. Il peut leur demander de factoriser le polynôme $2x^2 + 1x + 6x + 3$ par une double mise en évidence.

Il est important que le formé fasse ressortir de l'assemblage des tuiles les faits que 1°) il y a plus d'une tuile en x^2; 2°) les tuiles en x se partagent en deux groupes; 3°) la somme du nombre de tuiles dans chaque groupe est «b», et leur produit est égal à «ac»; 4°) le trinôme peut être transformé en un polynôme où bx est remplacé par une somme de deux termes semblables: $2x^2 + 6x + x + 3$. Il est important de faire ressortir que le coefficient «b» correspond à la somme des deux nombres qui indiquent le nombre de tuiles dans chaque groupe, et que le produit «ac» correspond au produit de ces deux nombres. Les deux nombres repérés sont utilisés pour exprimer le terme «bx» afin d'obtenir une factorisation par double mise en évidence. On peut ainsi donner un sens au processus de factorisation selon lequel, pour factoriser un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des entiers: 1°) On trouve *deux entiers*, m et n, dont la *somme* est *b* et le *produit* est *ac*. 2°) On *remplace* le terme *bx* par l'addition de deux termes semblables: $mx + nx$. Le polynôme s'écrit donc $ax^2 + mx + nx + c$. 3°) On factorise par une *double mise en évidence*.

Le formé peut demander de faire quelques exercices pour compléter l'apprentissage de la méthode avant d'aborder la notion de polynôme carré. Par exemple, il peut demander aux élèves de factoriser le trinôme $3x^2 + 11x + 6$. En appliquant la méthode qui vient d'être exposée, 1°) on trouve deux nombres dont le produit est 18 et la somme, 11. Ces deux nombres sont 9 et 2; 2°) on écrit le polynôme sous la forme $3x^2 + 9x + 2x + 6$; 3°) on décompose par une double mise en évidence: $3x^2 + 9x + 2x + 6 = 3x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(3x + 2)$.

2. Factorise les trinômes ci-dessous :

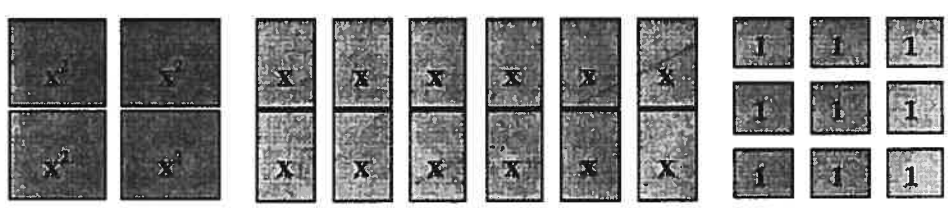
a) $8x^2 - 22x + 15$ b) $4y^2 - 4y - 15$ c) $3x^2 + 2x - 8$ d) $4y^2 + 3y - 1$

Le formé peut demander aux élèves de trouver les facteurs en appliquant la méthode et non par d'autres moyens. Il peut leur demander de poser la somme et le produit des nombres recherchés pour développer le terme du centre.

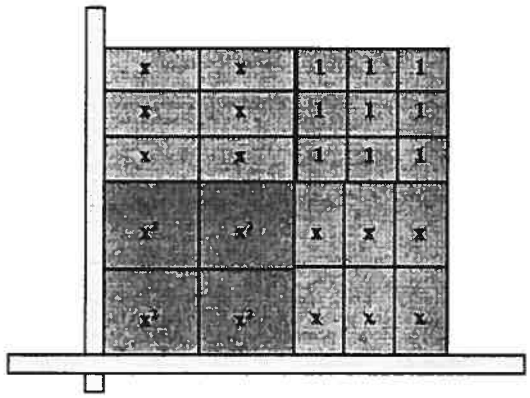
4.3 Activité 2: Construction de carrés parfaits

Il s'agit de mettre en évidence les caractéristiques tant algébriques que géométriques des carrés parfaits et de se familiariser avec diverses techniques pour factoriser les trinômes carrés parfaits. Du point de vue géométrique, construire un carré parfait consiste à construire des rectangles carrés à l'aide de tuiles. Il est nécessaire de bien explorer cette méthode avec les élèves. D'abord, elle peut sauver un temps considérable dans la factorisation de certains trinômes. De plus, cette méthode est le point de départ de la complétion de carrés et, par la suite, du travail sur les fonctions quadratiques.

1. L'assembage de tuiles ci-dessous représente un polynôme.



Le formé fait déterminer le polynôme qui est associé aux tuiles algébriques ci-dessus et fait expliquer comment on obtient le rectangle ci-dessous.



Il est intéressant que le formé fasse déterminer la caractéristique du premier et du dernier terme de ce trinôme, qu'il fasse déduire les dimensions du rectangle ci-dessus et sa particularité, qu'il fasse déterminer les facteurs de ce trinôme. Ces aspects contribuent à éclairer la notion de rectangle carré; ils permettent de souligner que le premier et le dernier terme sont des carrés, que le rectangle obtenu par assemblage des tuiles est un carré et que ce carré est lui-même formé de deux carrés et de deux rectangles congrus. Le formé peut, ensuite, amener les élèves à faire le parallèle avec la forme du trinôme. Il donne le nom de «*carré parfait*» à un tel trinôme. Il donne ainsi un sens à ce concept en soulignant que le trinôme $ax^2+bx + c$ est un carré parfait s'il possède les caractéristiques suivantes : 1°) a et c sont des *carrés*; 2°) b est le *double produit* des bases de ces carrés.

Les élèves doivent pouvoir reconnaître rapidement ces trinômes. S'ils prennent l'habitude de les vérifier, ils seront par ce fait même moins souvent portés à commettre des erreurs du type $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Un polynôme carré parfait est un polynôme factorisable dont les deux facteurs sont identiques et qui peut donc être exprimé comme un carré. Pour factoriser un trinôme carré parfait, on procède comme suit: 1°) on vérifie si le trinôme possède les caractéristiques d'un carré parfait ci-dessus mentionnées; 2°) on détermine si les facteurs sont des sommes ou des différences, selon le signe du terme médian: un b positif indique que les facteurs sont des sommes, tandis qu'un b négatif indique que les facteurs sont des différences; 3°) on détermine les bases des carrés; 4°) on écrit directement le carré du binôme. L'enseignant doit s'assurer que les élèves comprennent la signification de «terme médian». D'habitude, le terme médian est placé au milieu des deux carrés.

Exemple 1: Soit à factoriser le trinôme $x^2 + 4x + 4$, qui est un carré parfait.

1°) Le signe du terme médian permet de déterminer que les facteurs sont des sommes.

2°) Les bases des carrés sont x et 2.

3°) Les facteurs étant (x + 2) et (x + 2), le trinôme carré parfait s'écrit $(x + 2)^2$.

Le formé fait observer que les facteurs des polynômes «carrés parfaits» ne sont pas les facteurs d'une différence de deux carrés.

Exemple 2: Soit à factoriser le trinôme $9x^2 - 24xy + 16y^2$, qui est un carré parfait.
1°) Le signe du terme médian permet de dire que les facteurs sont des différences.
2°) Les bases des carrés sont 3x et 4y.
3°) Les facteurs étant $(3x - 4y)$ et $(3x - 4y)$, on peut écrire $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$.
Le formé montre l'importance des signes dans ce cas. On peut probablement choisir $(4y - 3x)$ au lieu de $(3x - 4y)$, comme on peut choisir deux termes négatifs lorsque tous les termes du trinôme sont positifs. Ce n'est peut-être pas le moment d'entrer dans ces considérations, et les formés auront l'occasion de discuter de ce sujet plus loin.

2. Vérifie si chaque trinôme est un carré parfait ou non.
a) $x^2 + 8x + 34$ b) $36y^2 + 108y + 81$ c) $4x^2 + 1 - 8x$ d) $25y^2 + 40y - 16$

Le formé demande aux élèves de justifier leur réponse; l'apprentissage n'en est que consolidé. Il fait remarquer qu'en c) le trinôme n'est pas ordonné. Ordonner constitue la première étape à faire pour décomposer un polynôme en facteurs.

3. Ajoute un terme à chacun des binômes suivants pour qu'ils deviennent des trinômes carrés parfaits.
a) $x^2 + 8xy$ b) $x^2 - 20x$ c) $-20xy + 25y^2$ d) $4x^2 - 9y^2$

Cet exercice est particulièrement important pour la compréhension de la complétion de carré. Le formé s'assure que les élèves sont capables de le réussir. Le formé fait également observer que le b correspond à la somme de deux nombres m et n égaux: il vient donc que $b = 2m$ ou $m = n = b/2$. De plus, $m^2 = c$ et $c = b^2/4$.

4. Lors d'un test, les élèves devaient, entre autres, factoriser les trois binômes suivants:
(i) $-12x^2 + 7x - 1$ (ii) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (iii) $49x^2 + 42x + 9y^2$
Hélène et Moïse ont donné les réponses suivantes:
Hélène : (i) $(-4x + 1)(3x - 1)$ (ii) $(2x + 5y)^2$ (iii) $(7x - 3y)^2$
Moïse : (i) $(1 - 3x)(4x - 1)$ (ii) $(-2x - 5y)^2$ (iii) indécomposable
Qui a le meilleur résultat? Explique les erreurs commises, s'il y en a.

Le formé demande aux élèves de décrire les erreurs de chacun, bien que Moïse ait un meilleur résultat.

4.4 Activité 3: Techniques (algébrique et géométrique) de complétion de carré

La complétion de carré est une méthode de factorisation générale pour les trinômes d'expression quelconque. Elle représente, en fait, les «grands moyens» (dans le sens populaire de l'expression) pour certains trinômes qui sont très difficiles à décomposer. On peut également lui attribuer le mérite de permettre le passage de la forme générale à la forme canonique des fonctions de second degré. De plus, elle permet l'utilisation de deux cas de factorisation antérieurs, soit la mise en évidence et la différence de carrés. L'essentiel de cette activité est de montrer l'avantage de se familiariser avec les deux approches (algébrique et géométrique) de la technique de «complétion de carré», technique que les Anciens utilisaient pour venir à bout des trinômes récalcitrants. L'approche algébrique consiste à former un trinôme carré parfait, afin d'obtenir une différence de deux carrés, tandis que l'approche géométrique consiste à transformer un rectangle en un carré. De l'avis de Breton et al. (1996, p. 198), «des tablettes d'argile remontant aussi loin qu'au roi babylonien Hammurabi (vers –1700) laissent croire que déjà, à cette époque, on connaissait la méthode de complétion de carré».

Malgré ses avantages, cette technique ne représente pas la méthode préférée de factorisation des trinômes. Toutefois, elle peut être utile à ceux des élèves qui poursuivront des études supérieures. De plus, elle donne lieu à d'intéressants exercices d'algèbre. Le formé a le soin de décider de l'importance qu'il lui accorde. Avant d'aborder cette technique, il nous faut d'abord bien comprendre le lien qui existe entre les coefficients **b** et **c** dans un trinôme carré parfait. En suivant les pas des mathématiciens babyloniens, on peut former des équipes et laisser les élèves discuter jusqu'à ce qu'ils découvrent la relation entre b et c. Ils pourront ainsi compléter le raisonnement suivant.

1°) Dans la factorisation du trinôme $x^2 + bx + c$, on recherche deux entiers m et n pour lesquels $m + n = b$ et $m \times n = c$.

2°) Or, dans un trinôme carré parfait, les entiers m et n sont égaux, ce qui entraîne les égalités suivantes : $2m = b$ ou $m = \square$ et $m . n = c$ ou $c = \square$

3°) Donc, la relation entre b et c est: $c = \square$

Voici en quoi consiste (algébriquement) la technique de factorisation par complétion de carré: L'essentiel de cette approche algébrique consiste à former un trinôme carré parfait afin d'obtenir une différence de carrés. D'où la confusion dans les appelations de la technique. En effet, on se demande si l'on doit dire «complétion *de* carré» ou «complétion *du* carré». Les deux expressions sont utilisées de façon non exclusive. Un point important dont les élèves doivent se rendre compte, dès le départ, est que les facteurs d'un trinôme sont deux binômes. On distingue principalement deux cas de trinômes: ceux dont le coefficient $a = 1$ et ceux dans lesquels $a \neq 1$. L'enseignant ne doit pas oublier que pour factoriser, les élèves disposent déjà d'un outil qu'il faut intégrer. Dans le premier cas (tableau 6a ci-dessous), l'unité du coefficient est la principale cause d'erreur dans l'application de cette technique.

Tableau 6a: Technique algébrique de complétion de carré (trinôme $ax^2 + bx + c$, où $a = 1$)

Démarche	Exemple
	$x^2 + 2x - 195$
1°) Puisque $a = 1$, il n'est pas nécessaire de le mettre en évidence	1°) $x^2 + 2x - 195$
2°) Compléter un carré parfait en ajoutant $(b/2)^2$ et soustrayant $(b/2)^2$ ou $b^2/4$ au trinôme.	2°) $x^2 +2x+(2/2)^2 -(2/2)^2 -195$ $x^2 + 2x + 1 \quad - \quad 1 \quad - 195$
3°) Former une différence de deux carrés.	3°) $(x^2 + 2x + 1) - 196$ $(x + 1)^2 \quad - 14^2$
4°) Factoriser la différence de carrés pour obtenir les facteurs du trinôme.	4°) $(x + 1 + 14)(x + 1 - 14)$ $(x + 15)(x - 13)$

Les élèves peuvent résoudre quelques exemples numériques en choisissant l'une de ces méthodes qu'ils peuvent suivre sans trop de difficulté. Les élèves doivent pouvoir justifier pourquoi on ajoute $(b/2)^2$ et pourquoi on retranche cette même quantité. Ils doivent bien maîtriser le premier cas (tableau 6a) avant d'aborder le second cas (tableau 6b).

Tableau 6b: Technique algébrique de complétion de carré (trinôme ax^2+bx+c, où $a \neq 1$)

Démarche	Exemple
	$2x^2 - 24x + 54$
1°) Mettre a en évidence pour obtenir 1 comme coefficient de x^2.	1°) $2(x^2 - 12x + 27)$
2°) Compléter un carré parfait en ajoutant et soustrayant $(b/2a)^2$ ou $b^2/4a^2$ au trinôme.	2°) $2[x^2-12x+ (12/2)^2 - (12/2)^2 + 27]$ $2(x^2 - 12x \; + \; 36 \; - \; 36 \; +27)$
3°) Former une différence de deux carrés.	3°) $2[(x^2 - 12x + 36) - 9]$ $2[(x - 6)^2 - 3^2]$
4°) Factoriser la différence de carrés pour obtenir les facteurs du trinôme.	4°) $2(x - 6 + 3)(x - 6 - 3)$ $2(x - 3)(x - 9)$

2. Vérifie ta compréhension de cette approche de complétion de carré en l'utilisant

a) pour factoriser le trinôme $4x^2 + 12x + 8$;

b) pour montrer que (i) $7x^2 + 28x +21 = 7(x+3)(x+1)$ (ii) $9x^2 + 36x+20 = (3x+10)(3x+2)$

Ces types d'utilisation justifient l'inscription au programme de la présente technique.

3. En utilisant la technique de complétion de carré, montre que les facteurs du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont: $a[(x + b/2a + \sqrt{b^2/4a^2 - c/a}) (x + b/2a - \sqrt{b^2/4a^2 - c/a})]$.

Cet exercice conduit les élèves à dégager le processus algébrique de factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ par la technique de la complétion de carré. Il leur montre une partie de la force de l'algèbre à travers cette technique. Pour factoriser un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ par cette technique: 1°) on met a, le coefficient de x^2, *en évidence*; 2°) on ajoute et on retranche la quantité nécessaire pour obtenir un trinôme carré parfait. Cette quantité est le *carré de la moitié du coefficient de* x: $(b^2/4a)$. 3°) On écrit sous la forme d'une *différence de carrés*; 4°) on factorise. Les élèves doivent effectuer quelques exercices avant de pouvoir maîtriser cette technique. Il vaut probablement mieux acquérir la maîtrise par la pratique que par la mémorisation de la démarche.

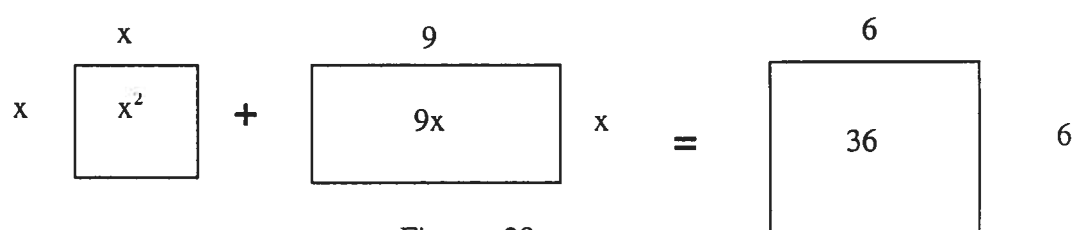
Considérons, par exemple, la méthode «standard» de résolution de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ (1) dans laquelle a, b et c sont des nombres réels et a # 0. Nous pouvons écrire l'équation (1) sous la forme: $a[x^2 + (b/a)x] + c = 0$ (2). Complétons le carré en utilisant les deux termes entre les parenthèses; nous obtenons: $a[x + (b/2a)]^2 + c - b^2/4a = 0$ (3), ce qui est équivalent à $a[x + (b/2a)]^2 = b^2/4a - c = (b^2 - 4ac)/4a$ (4)

Nous obtenons ainsi $[x + (b/2a)]^2 = (b^2 - 4ac)/4a^2$ (5)

et donc $x + b/2a = \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}$ (6)

Finalement $x =[- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})]/ 2a$ (7)

Appliquons cette technique à l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. Complétons le carré, en nous servant des deux premiers termes du premier membre; nous obtenons: $[x - (5/2)]^2 + 6 -25/4 = 0$ ou $(x - 5/2)^2 = 1/4$. Ainsi $x - 5/2 = \pm 1/2$ et, finalement, 3 et 2 sont les solutions de l'équation donnée. Si nous substituons a = 1, b = -5 et c = 6 dans l'équation (7), nous aurons: $x = [5 \pm \sqrt{25 - 24}]/2 = (5 \pm 1)/2$ et nous obtenons encore 3 et 2 comme solutions de l'équation donnée. Dans cette technique purement algébrique, le processus de «compléter le carré» apparaît comme un «truc», surtout la première fois qu'on l'utilise. Cependant, il se produit presque naturellement si l'on examine l'approche géométrique qui remonte bien avant l'antiquité grecque. Voyons à présent en quoi consiste l'approche géométrique de la complétion de carré. Illustrons cette approche en résolvant, par exemple, l'équation suivante: $x^2 + 9x - 36 = 0$, équivalente à $x^2 + 9x = 36$. En regardant chaque terme comme l'aire d'un rectangle, nous pouvons écrire cette équation de la façon suivante (figures 28):



Figures 28a

Essayons de partager le second rectangle en moitiés (figure 28b):

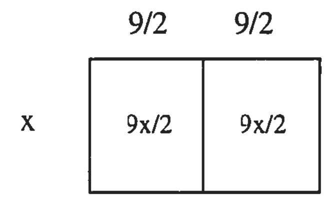


Figure 28b

et attachons chacune de ces moitiés au carré de côté x comme suit (figure 28c):

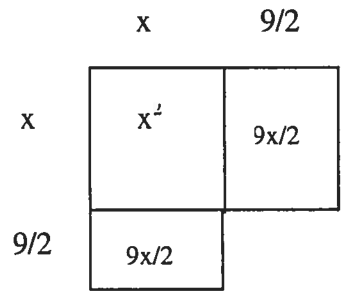


Figure 28c

Notre «équation géométrique» peut donc s'écrire comme le montre la figure 28d :

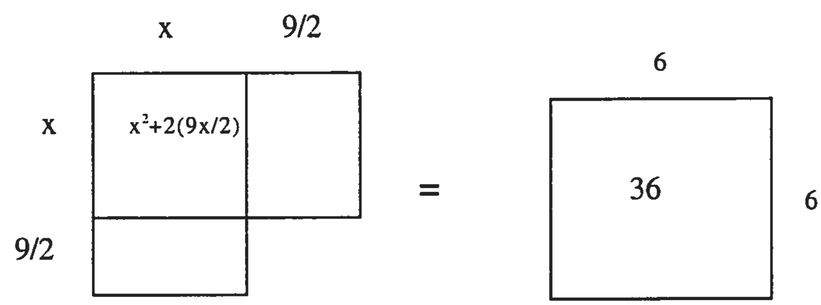


Figure 28d

Pour rendre la figure de gauche un carré, nous devons lui ajouter un carré de côté 9/2 en bas et au coin droit et nous devons ajouter ce même carré à la figure de droite. Nous obtenons ainsi (figure 28e):

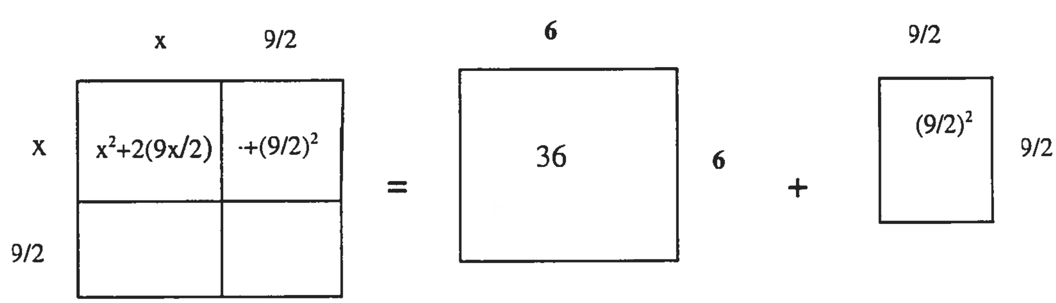


Figure 28e

À la droite de l'équation géométrique, nous avons un total d'aire de 36 + 81/4 = 225/4 et nous pouvons maintenant remplacer les deux carrés de droite par un seul ayant pour aire 225/4 (figure 28f) :

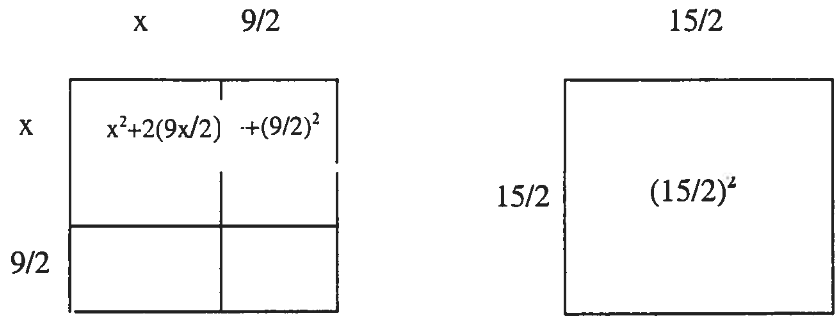
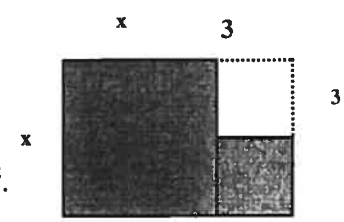


Figure 28f

Étant donné que les deux carrés sont d'égales aires, leur côté doit être égal, c'est-à-dire qu'on doit avoir $x + 9/2 = 15/2$ ou $x = 3$. Notons que nous obtenons une seule solution, bien qu'il est facile de vérifier que $x = -12$ est une autre solution (algébrique). Cependant, la méthode géométrique contraint x d'être positive, car elle représente la «mesure» du côté du carré. L'enseignant peut, par la suite, proposer aux élèves les problèmes suivants qui les conduisent graduellement à la maîtrise des techniques présentées. Ces problèmes peuvent aussi constituer une évaluation formative débouchant sur un travail de renforcement pour les élèves qui éprouvent des difficultés.



1. Le rectangle ci-contre a été amputé d'un carré de 3 cm de côté.

a) Détermine l'aire de la région colorée?

b) Trouve la valeur de x si l'aire du polygone coloré est de 79 cm^2.

Cet exercice présente une façon détournée de faire résoudre des équations. Les élèves doivent d'abord remarquer que l'aire de la région colorée correspond à la différence entre l'aire du rectangle, $x(x + 3)$, et l'aire du petit carré, 9. Le reste relève de la multiplication et de la soustraction.

2. Utilise l'approche géométrique pour déterminer la quantité qu'il faut ajouter et retrancher aux binômes suivants afin de former des trinômes carrés parfaits:

a) $x^2 + 10x$ b) $n^2 - 18n$ c) $3x^2 + 8x$ d) $x^2 + 2x/3$ e) $2y^2 + 6y$ f) $x^2 + bx/a$

Le niveau de difficulté monte ici d'un cran, particulièrement en d) et f). L'enseignant peut ainsi graduer les cas afin de conduire les élèves à l'utilisation du contexte géométrique.

4.5. Investissement 10

L'enseignant peut choisir, de préférence, les exercices et problèmes dont les élèves ont le plus besoin pour affermir leur compréhension des différentes techniques et pour compléter leur maîtrise des différents objectifs. Il ne doit pas perdre de vue que les besoins peuvent varier d'un groupe d'élèves à l'autre. L'exercice suivant présente tous les cas de factorisation qui ont été vus jusqu'ici.

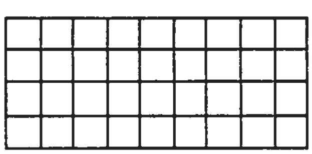
Factorise complètement les polynômes ci-dessous.

a) $x^2 - (y^2 - 2y + 1)$ b) $(a - b)^2 - c^2$ c) $3ab^2 - 6a^2x^2 + 9ay^3$ d) $2(m + n) - 3n(m + n)$
e) $81a^2 - 9c^2$ f) $5x - 10 + 4xy - 8y$ g) $(x-1)^2 - 2(x-1)$ h) $-3p^2 + 10p - 8$ i) $r^2 - 9r + 8$
j) $3y^3 - 12y + 3y^2 - 12$ k) $cy^2 + 11cy - 12c$ l) $2mn + m^2 - 1 + n^2$
m) $9a^2 - 42ab + 49b^2$ n) $18x^3 - 12x^2 + 6x - 4$ 0) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

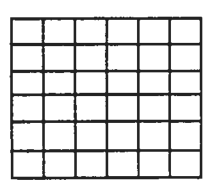
Le formé peut considérer cet exercice comme une révision des cas de factorisation. L'intérêt en est qu'il donne l'occasion de revoir tous les cas qui ont été abordés jusqu'ici et qu'il permet à l'élève de juger de la qualité de ses apprentissages.

4.6. Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

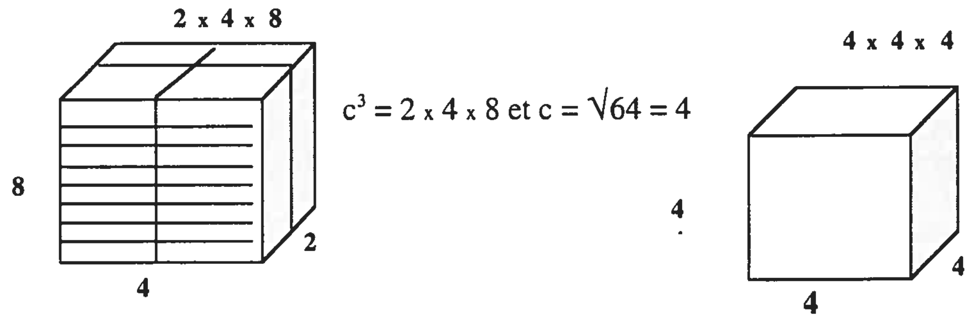
De Champlain et al. (1996, M29) définissent la moyenne arithmétique comme étant «le quotient de la somme des valeurs a_i d'une distribution d'un caractère statistique quantitatif par le nombre n de valeurs: $\mathbf{X = (1/n).\Sigma a_i}$ (8). Par exemple, la moyenne arithmétique des nombres 3, 4, 7 et 9 est: $X = (1/4)(3 + 4 + 7 + 9) = (1/4)(23) = 5.75$. La moyenne géométrique (encore appelée moyenne proportionnelle) est la racine n-ième du produit des n valeurs d'une distribution d'un caractère statistique quantitatif: $\mathbf{G = \sqrt{a_1.a_2. \ldots a_n}}$ (9). Par exemple, la moyenne G des nombres 2, 2, 8 et 8 est: $G = \sqrt{2 \times 2 \times 8 \times 8} = \sqrt{256} = 4$. On remarque que pour représenter la moyenne géométrique de deux nombres, on imagine que l'on veut remplacer un rectangle de dimensions L et l par un carré qui possède la même aire. On trouve alors une longueur c du côté de ce carré dont le carré est égal au produit des L et l, c'est-à-dire: $c^2 = L \times l$, d'où $c = \sqrt{L \times l}$. Par exemple, un rectangle dont les côtés mesurent 4 et 9 unités de longueur a une aire équivalente à un carré de 6 unités.

4

9

$c^2 = 4 \times 9$ et $c = \sqrt{36} = 6$

6

6

La moyenne géométrique se généralise à plus de deux nombres. Pour trois nombres, une représentation géométrique est celle d'un cube qui aurait même volume qu'un prisme droit à base rectangulaire. Par exemple, un prisme droit à base rectangulaire dont les arêtes mesurent respectivement 2, 4 et 8 unités de longueur a un volume équivalent à un cube de 4 unités d'arête.



En interprétant la formule (9), nous pouvons dire que *la moyenne géométrique de n nombres positifs est la racine n-ième de leur produit.* Ainsi, la moyenne géométrique de 2, 4, 4 et 8 est 4, car $\sqrt{2 \times 4 \times 4 \times 8} = 4$ et nous écrivons G = 4. Il ne faut pas confondre la moyenne géométrique avec la moyenne quadratique q de n nombres, qui, elle, est la racine carrée du quotient par n de la somme des carrés des n nombres. Ainsi, la moyenne quadratique q de deux nombres x et y est la racine carrée de la demi-somme de leurs carrés: $q = \sqrt{(x^2 + y^2)/2}$. Par exemple, la moyenne quadratique des nombres 3, 4, 5 et 6 est $q = \sqrt{(3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)/4} \approx 4.637$

4.6.1 Relation entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique

Entre la moyenne arithmétique $(a+b)/2$ et la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ de deux nombres réels a et b, nous pouvons établir la relation suivante: $[(a+b)/2]^2 \geq ab$. En effet, comme le carré de tout nombre est non-négatif, nous pouvons écrire pour deux nombres quelconques a et b: $(a-b)^2 \geq 0$ (et l'égalité a lieu si et seulement si a = b). Nous avons donc: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ et, en ajoutant 4ab aux deux membres, nous obtenons: $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ ou $(a + b)^2 \geq 4ab$. Nous avons donc:

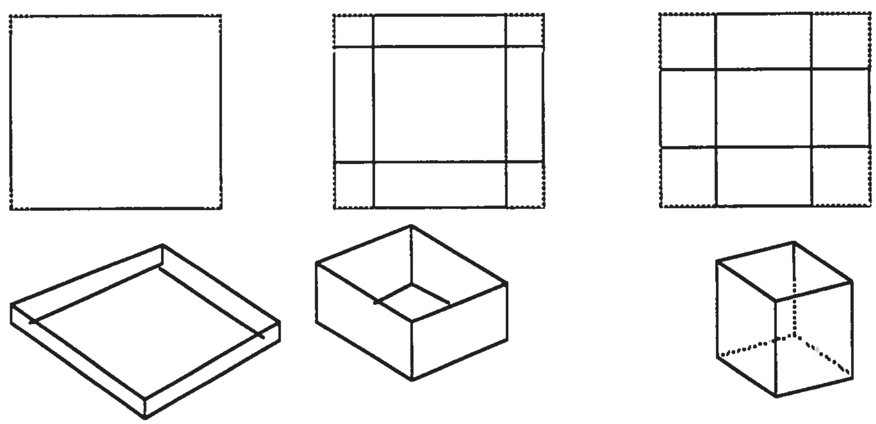
1) pour deux nombres réels quelconques a et b, la relation $[(a+b)/2]^2 \geq ab$ (10)

2) pour deux nombres a et b non-négatifs, nous pouvons extraire leur racine carrée pour obtenir: $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$ (11). (L'égalité a lieu dans les deux cas si et seulement si a = b).

Nous pouvons généraliser l'inégalité (11) qui lie les deux moyennes. En effet, si a_1, a_2, ..., a_n sont des réels non négatifs, alors nous pouvons écrire : $(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n \geq \sqrt{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$ (12)

4.6.2 Application

Comme application de la formule générale de l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique, considérons le problème suivant: «Un fabricant dispose d'une grande quantité de morceaux de cartons carrés de 10 m x 10 m. Il se propose de couper un carré à chaque coin et de plier les côtés pour former une boîte sans couvercle. Il peut y procéder de plusieurs manières, comme le montrent les diagrammes ci-dessous».



Le problème est le suivant: Quelle est la boîte dont la confection amène le fabricant à utiliser la plus grande quantité de matériel? En d'autres termes, quelle est la boîte qui a le plus grand volume? Considérons le cas typique de la figure ci-dessous.

On peut y voir que x doit être compris entre 0 et 5 m. Si V représente le volume de la boîte, alors $V = (10 - 2x)^2.x$. Ainsi, le problème revient à trouver le nombre x compris entre 0 et 5 tel que $(10 -2x)^2.x$ soit maximum. Or, $(10 - 2x)^2.x$ est maximum lorsque $[(10 - 2x)/2]^2.(2x)$ est maximum. En nous servant de l'inégalité (11) entre les moyennes arithmétiques et géométriques (pour n = 3), nous pouvons écrire:

$\{[(10 - 2x)/2 + (10 - 2x)/2 + (2x))/3\}^3 \geq [(10 - 2x)/2]^2.(2x)$ (12) ou, de façon équivalente, $(10/3)^3 \geq [(10 - 2x)/2]^2.(2x)$, ou $(10/3)^3 \geq V/2$ (12'). Remarquons que les constantes sont introduites pour réduire le numérateur du membre de gauche à une constante. Donc le volume de la boîte ne peut excéder $2(10/3)^3$. De plus, l'égalité a lieu dans (12) et donc dans (12') si et seulement si : $(10 - 2x)/2 = 2x$ ou $6x = 10$ ou encore $x = 5/3$.

Sur cette lancée, nous invitons le formé à proposer d'autres problèmes, tout en ayant l'esprit ouvert, en intégrant les outils que le séminaire lui offre et en demeurant vigilant quant aux acquis des élèves. Il ne s'agit pas de lancer les élèves dans des manipulations algébriques ou de les faire recourir à des supports géométriques formels, mais de les amener à bien voir les techniques de factorisation ou de décomposition, à travers des cas assez simples, afin d'améliorer leur compréhension et leurs habiletés opératoires sur les polynômes, en général, et des IR, en particulier. Ces activités de résolution de problèmes sont d'autant plus importantes que faire les mathématiques, ce n'est pas que résoudre des problèmes, c'est aussi en formuler.

Ainsi, le Séminaire ne se prête nullement au jeu de suggérer des récettes toutes faites pour l'enseignement des IR. Il est aussi loin d'être une occasion de n'accumuler que des connaissances, car cette idée de «connaissances» dans la tête du futur enseignant fait sombrer dans les prescriptions. Le Séminaire n'offre pas que des connaissances; il permet également des savoir-faire qui se nourissent de la réflexion sur les activités orientées vers l'apprentissage des IR et favorisant cet apprentissage. Il n'est pas seulement un cadre de réflexion *pour* les activités et *sur* les activités d'enseignement; il est aussi un cadre de réflexion *dans* les activités du futur enseignant qui apprend à intégrer diverses connaissances. C'est ce qui permet à ce dernier d'ajuster sur le champ et à travers la dynamique des interactions ses interventions que permet le contrat de formation. Le Séminaire amène progressivement le futur enseignant à développer un nouveau rapport avec les savoirs sur les IR et ceci dans une perspective d'enseignement/apprentissage. Les futurs enseignants ont justement besoin d'un tel bouleversement de croyances et de pratiques.

CHAPITRE 6

ANALYSE DES RÉSULTATS GLOBAUX

CHAPITRE 6

ANALYSE DES RÉSULTATS GLOBAUX

Dans ce chapitre, nous analysons les résultats du prétest et du post-test; nous analysons les résultats globaux en décrivant les objectifs des formés à partir des intentions qu'ils expriment en introduction de leurs plans de leçons et dans les commentaires qui accompagnent chacune des étapes de la planification. Nous identifions ensuite la place et le rôle des activités de modélisation et d'intégration des connaissances en découpant les séquences en épisodes, en schématisant l'organisation de ces épisodes et en analysant les activités d'enseignement. Ceci nous conduit à présenter la place centrale de ces activités et le rôle primordial que joue l'intégration des connaissances en illustrant notre propos d'exemples. Nous présentons aussi les difficultés rencontrées dans la réalisation de ces activités et le bilan des résultats des analyses. Les résultats du questionnaire sur la conception des futurs enseignants concernant l'enseignement des mathématiques sont présentés dans l'appendice 1 de ce chapitre. Un complément de notre analyse porte sur la richesse des sources d'informations et se trouve dans l'appendice 2.

1. Analyse des résultats du prétest et du post-test

Le prétest et le post-test n'ont pas directement servi à fournir de données nous permettant de répondre aux questions de recherche; mais les résultats obtenus à ces tests ont contribué à mettre en évidence certaines difficultés que les futurs enseignants éprouvent tant sur le plan disciplinaire que celui didactique. En effet, le prétest nous a permis non seulement d'évaluer le niveau des connaissances déjà acquises (avant le Séminaire), mais aussi de cerner la nature des difficultés rencontrées par les sujets lorsqu'ils ont abordé des situations d'intégration des connaissances avant toute intervention de notre part. Le post-test a permis de témoigner de l'évolution des deux groupes de formés, en regard des activités de modélisation et d'intégration des connaissances sur les IR, et de mieux percevoir la pertinence et la nécessité de former les futurs enseignants à l'intégratiion des connaissances.

La correction du prétest montre que les sujets de l'ISSEG n'ont réussi que 6 des 14 problèmes proposés (cf Annexe C): il s'agit des problèmes 3, 4, 5, 8, 9 et 11 qui consistent respectivement à démontrer la relation de Pythagore (100 %), à analyser un modèle algébrique présentant une certaine régularité (95 %), à calculer le volume d'une boîte (100 %), à calculer rapidement les produits tels que 54 x 46, 98 x 102 (90 %), et à calculer mentalement le carré des nombres terminés par 5 (90 %). De même, 86 % d'entre eux ont pu dessiner le modèle géométrique de $(a + b + c)^2$, à partir de celui de $(a + b)^2$ fourni dans l'énoncé, et 75 % ont pu déterminer le polynôme (du problème 6) dont on a présenté les tuiles constitutives, mais n'ont pas pu en déduire les graphies algébriques qui expriment les facteurs. Par contre, ils ont été tous incapables de traiter les problèmes 2, 7, 10, 12, 13 et 14, reliés à l'utilisation des tuiles pour illustrer la multiplication, les facteurs d'un polynôme ainsi que des IR, à l'explication du fait que $x^2 + y^2$ n'est pas factorisable, à l'activité de découpage et de recollage conduisant au constat que la différence d'aires de deux carrés, $x^2 - y^2$, peut être transformée en l'aire du rectangle de dimensions $x + y$ et $x - y$.

À ce sujet, il est intéressant de constater qu'aucun sujet de l'ISSEG ne sait à quelles conditions le produit de deux binômes est un binôme; qu'à peine 3 % de ceux qui savent calculer rapidement 68 x 72 peuvent expliquer comment ils s'y prennent. Enfin, pour terminer avec les objectifs reliés au sens, à la compréhension et à l'utilisation des IR, 85 % des sujets de l'ISSEG ont connu des difficultés avec la détermination d'un polynôme et de ses facteurs à partir de l'assemblage des tuiles; 95 % des sujets ont eu des difficultés à déterminer un polynôme associé aux tuiles, à déterminer les caractéristiques d'un carré parfait; 95 % des sujets ont connu une grande difficulté avec le procédé géométrique de complétion du carré et avec l'utilisation des tuiles pour illustrer les IR et les expliquer dans un langage accessible à de jeunes élèves.

Quant aux sujets de l'UGANC, à peine 17 % d'entre eux ont réussi la majorité des problèmes reliés à la modélisation et à l'intégration des connaissances. Ils n'ont pu, non plus, résoudre aucun des problèmes reliés à l'utilisation des formes géométriques et des tuiles algébriques. Concernant les objectifs reliés à l'usage des IR dans le calcul numérique, ils ont pu effectuer quelques produits remarquables, mais avec de petites difficultés. D'ailleurs, 67 % n'ont pas pu expliquer comment ils s'y sont pris. De même, 83 % ont connu des difficultés pour dessiner le modèle qui correspond à $(a + b + c)^2$, alors que celui de $(a + b)^2$ leur était donné, et pour expliquer à un jeune élève qui n'a pas encore étudié les IR comment on peut, de cette façon, représenter l'IR $(a + b)(a - b)$.

Au niveau de leurs attitudes à l'égard des mathématiques, près de 84 % disent avoir toujours aimé cette matière tant au Secondaire qu'à l'Université, malgré qu'ils les trouvent plus difficiles à comprendre à l'Université. À ce stade, il est intéressant de constater que pour 33 % de nos sujets, l'enseignement des mathématiques est synonyme de transmission de connaissances. Les objectifs reliés à la construction de connaissances nouvelles (ici, les IR dans un contexte de modélisation et d'intégration des connaissances), à la résolution de problèmes ouverts (problèmes 2 et 10), à l'explicitation des démarches de résolution (problèmes 8, 11 et 13) et à l'argumentation autour de la validité des solutions (problèmes 4 et 14) sont, entre autres, des aspects pour lesquels les sujets de l'UGANC ont connu le plus de difficultés.

Par ailleurs, 22 % de nos sujets se sentent insécures et ne s'estiment pas tout à fait prêts à enseigner les mathématiques aux collégiens et lycéens. Chez les sujets de l'UGANC comme chez certains de l'ISSEG, ce sentiment d'insécurité a été ressenti au début du Séminaire. Changer la forme de représentation d'une IR s'est avéré être, pour beaucoup de nos sujets, une opération difficile et parfois même impossible. Tout s'est passé au prétest comme si la compréhension que la grande majorité des sujets avaient des IR était limitée à la forme algébrique de représentation que l'enseignement classique a privilégiée. Ce constat est révélateur de la compartimentalisation inappropriée certainement néfaste pour l'utilisation des savoirs S1 et S2. Comme en témoigne **Dane,** de l'UGANC, «*Les trucs que j'ai appris au collège et au lycée sont tellement automatiques et bien ancrés que j'éprouve encore de la difficulté à en expliquer les tenants et aboutissants*». Ce point de départ nous donne la mesure de l'importance de la formation du futur enseignant à l'intégration des connaisssances et de l'impact de l'ingénierie en termes d'acquisition de connaissances et de savoirs chez le formé.

Il est toutefois intéressant de constater que la perception des IR a positivement évolué chez 93 % des sujets. Ce n'est pas uniquement le Séminaire qui a contribué à ce changement, mais plutôt le fait que, après ce Séminaire, les sujets aient conçu, réalisé et analysé l'enseignement qu'ils ont dispensé. Ainsi, l'ingénierie leur a permis de vivre une tout autre relation avec les mathématiques. En effet, nous confie **Kandas**, «*j'ai trouvé le fait d'enseigner les IR de cette façon très enrichissant; le fait de tout concevoir est plus instructif et riche d'expériences*». Comme **Yong** de l'ISSEG, **Tomy**, trouve qu'«*il est intéressant d'enseigner les IR de façon illustrée et pratique, c'est-à-dire avec les tuiles et les formes géométriques*». Le constat que nous avons fait du cloisonnement inapproprié des cadres algébrique et géométrique pour l'utilisation de connaissances sur les IR nous fait dire, à la suite de Duval (1995, p. 19), qu' «on ne peut (...) pas faire comme si le contenu représenté était détachable de la forme qui le représente».

1.1 Comparaison de la performance globale prétest/post-test

Pour juger de l'impact du Séminaire, nous comparons la performance globale des sujets des deux groupes au post-test versus leur performance au prétest dans la résolution des mêmes problèmes proposés au début et à la fin dudit Séminaire. Le tableau ci-dessous (tableau 7) montre les différences entre les résultats au prétest et les résultats au post-test.

Tableau 7: Comparaison des résultats prétest/post-test pour l'échantillon des 27 sujets

Futur enseignant	Taux de réussite		Taux de variation (%)	Futur enseignant	Taux de réussite		Taux de variation (%)
	Prétest (%)	Post-test (%)			Prétest (%)	Post-test (%)	
Alex	41	82	200	Pagui	52	89,7	172,5
Bana	34	77,8	228,8	Penda	47	89,4	190,2
Berté	51,6	88,9	172,3	Réotra	43	87	202,3
Diak	45	85	189	Samp	42	85	202,4
Fadak	56	95	169,6	Tomy	36,4	79,4	218,1
Fana	38,9	61,2	157,3	Toya	39,3	81,7	207,9
Frank	51	87,8	172,2	Yong	44	76,7	174,3
Kandas	49	85	173,5				
Kant	39,7	86	216.6	Ada	35	75,2	214,8
Kémo	47,2	89	188,5	Alfa	38,6	79,8	206,7
Lika	51	90	176,5	Dane	49,7	85,3	171,6
Mab	38,4	75	195,3	Laye	43	81,4	189,3
Mady	42,7	79,7	186,6	Mane	41	78,7	191,9
Marc	50,3	83	165	Moh	40	78,2	195,5

On note des taux de réussite moyens de 42,5 % au prétest et de 82,7 % au post-test pour les 27 sujets. Le taux de variation 186,6 pour Mady signifie que le taux de réussite du post-test représente 186,6 % du taux de réussite au prétest, ou encore qu'on constate une augmentation de 86,6 % de réussite au post-test par rapport au prétest. Le tableau 20 montre qu'un sujet sur trois a doublé ou plus que doublé ses résultats du prétest. Le tableau 20 montre également l'évolution de chacun des sujets. Dans le groupe de l'ISSEG, nous remarquons que **Bana**, **Kant**, **Mab**, **Tomy** et **Toya**, qui avaient moins de 40 % de réussite au prétest, ont obtenu en moyenne 80 % de réussite. Quant aux sujets de l'UGANC, dont aucun n'avait obtenu la moyenne de 50 %, ils ont obtenu plus de 75 %. Les sujets qui semblent éprouver à ce stade quelques difficultés en résolution de tels problèmes sont **Fana** et, à un moindre degré, **Ada**. Le cas de **Ada** fait l'objet d'une étude fine dans le chapitre suivant (chapitre 7). Pour tous les sujets, nous notons un taux de variation de 190 %, ce qui signifie une augmentation de 90 % du taux de réussite au post-test.

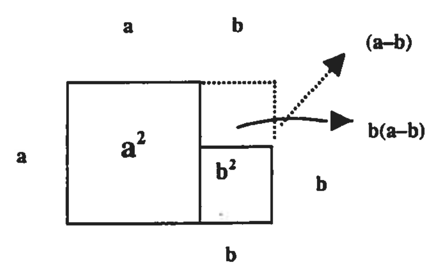
1.2 Comparaison de la performance globale à chacun des problèmes

Si nous comparons maintenant la performance de l'ensemble des sujets à chacun des problèmes proposés au prétest et au post-test (tableau 8), nous remarquons que les difficultés en construction ou en exploitation des modèles géométriques rencontrées chez ces futurs enseignants avant le Séminaire sont beaucoup moins marquées à la fin de notre intervention. En effet, quatre problèmes sur quatorze (problèmes n^{os} 3, 5, 8 et 9) sont réussis par tous les sujets. Les problèmes 7, 12, 13 et 14, qui sont considérés comme les plus complexes, ont un taux de réussite aussi élevé chez les sujets de l'ISSEG (95 % et plus) que chez ceux de l'UGANC (près de 90 %).

Tableau 8: Performance globale des sujets à chacun des problèmes du prétest et du post-test (cf. Annexe C).

Numéro du problème	Taux de réussite à l'ISSEG		Numéro du problème	Taux de réussite à l'UGANC	
	Prétest (%)	Post-test (%)		Prétest (%)	Post-test (%)
1	35	90	1	30	63
2	38	92	2	35	93
3	100	100	3	98	100
4	76	95	4	68	89
5	100	100	5	100	100
6	37	98	6	25	88
7	30	97	7	20	89
8	65	100	8	60	98
9	100	100	9	100	100
10	25	60	10	10	35
11	50	95	11	50	90
12	35	98	12	30	85
13	30	95	13	27	70
14	50	90	14	45	79

À l'exception du problème 10, qui apparaît complexe au post-test pour onze sujets, nous remarquons que les problèmes sont beaucoup mieux réussis au post-test qu'au prétest, avec un écart important, notamment pour les problèmes 7, 12, 13 et 14 (cf Appendice C). Dans le problème 10, on demande aux sujets de dire pourqoi la somme $a^2 + b^2$ ne peut pas être factorisée, et de dire quelle propriété aurait cette somme s'il était possible de la factoriser. On peut être surpris a priori par le fait que ce problème apparaisse complexe, même après notre intervention. L'absence d'effet du Séminaire sur le problème 10 est la conséquence d'une trop grande familiarisation des sujets avec le contexte algébrique privilégié. Ceci indique que les représentations initiales des sujets résistent bien malgré les activités didactiques proposées. Nous y voyons l'influence du déséquilibre cognitif provoqué par un nouvel apprentissage (passage de l'algébrique au géométrique). Dans un certain sens, on peut comprendre cela comme étant lié à la difficulté de la mise en œuvre des stratégies de procéduralisation/composition et d'élaboration/organisation par rapport à l'intégration des connaissances. Mais on peut aussi comprendre cela en rapport avec la faiblesse relative du travail de conceptualisation que le formé fait dans cette situation de modélisation: si le formé ne s'engage pas dans ce travail de conceptualisation et s'il interprète le contrat de formation comme allant dans le sens de «donner ou recevoir la recette», il s'expose à un sérieux appauvrissement de la situation de formation et à des déséquilibres cognitifs. Vergnaud trouve que la DDM est friande de tels déséquilibres et donne les moyens de permettre aux futurs enseignants de surmonter ces difficultés. Il suffit, ici, que les sujets recourent aux tuiles ou aux formes géométriques pour montrer qu'on ne peut pas partager la partie manquante de la figure ci-dessous en deux parties congrues et que, s'il était possible de factoriser la somme de deux carrés ($a^2 + b^2$), le produit de deux binômes lui donnerait la somme de deux carrés.



Nous notons un écart de 35 % chez les sujets de l'ISSEG et un écart de 30 % chez ceux de l'UGANC entre les résultats à ce problème au prétest et au post-test. Ceci indique un impact du Séminaire et témoigne d'un cetain engagement cognitif des formés face à une situation (non standard) d'intégration des connaissances.

2. Analyse des préparations de leçons

L'analyse des préparations de leçons montre que la majorité des formés (25 sur 27) ont trouvé important de travailler les deux aspects (algébrique et géométrique) des IR.

2.1 Intentions préalables et choix didactiques

Chez la majorité des sujets de l'UGANC (4 sur 6), nous ne trouvons pas, de façon explicite, les objectifs qu'ils visent dans le cadre de leurs séquences d'enseignement. Même si le but n'est pas pleinement conscient, ou s'il y en a plusieurs dans la même activité, on peut toujours identifier une orientation dans l'organisation de la séquence, avec son cortège de sous-buts et d'anticipations. Nous avons dû les inférer à travers la préparation de leurs leçons. Nous illustrons ici quelques cas d'espèce à travers l'analyse des protocoles, des séquences et des traces écrites, analyse qui nous permet de dire qu'au troisième épisode de la première leçon, **Moh** et **Berté** veulent que les élèves comprennent que les variables qui forment les monômes semblables sont respectivement affectés des mêmes exposants. Au quatrième épisode de la même leçon, ils visent à regrouper les monômes semblables et à développer la notion de polynôme qui correspond à de tels regroupements. Enfin, dans le cinquième épisode, ils reprennent l'objectif de réduire les termes semblables auquel ils ajoutent l'objectif de réduire les termes opposés, ces objectifs étant à la base de l'addition des polynômes.

Alfa n'avait pas, lui aussi, annoncé ses objectifs; mais nous n'avons pas de peine à les retrouver puisqu'il a suivi, presque à la lettre, le schéma du manuel du Séminaire. Les activités et les exercices qu'il a ainsi élaborés sont donc très cohérents dans la mesure où on y trouve une progression d'un objectif à l'autre, d'une leçon à l'autre. En effet, dans la première leçon, Alfa a pour but de sensibiliser les élèves à la représentation géométrique des polynômes; il veut que les élèves utilisent des tuiles pour représenter les IR. À la deuxième leçon, en plus de visualiser à la fois la multiplication et la factorisation des polynômes dans le contexte géométrique, il vise la mise en facteur de la différence de carrés. Enfin, dans la troisième leçon, il reprend les objectifs précédents auxquels il ajoute ceux liés au découpage/recollage et aux techniques de calcul numérique. En entrevue, **Alfa** nous a confié que « *[son] manque d'assurance a fait que j'ai préféré ne pas déroger de ce qui était consigné dans le manuel du Séminaire*» et ce, même s'il trouvait que certains éléments donnés à titre d'information étaient inopportuns ou non-pertinents. Il les a utilisés quand même «*de crainte d'oublier quelque chose ou de passer à côté d'un élément théorique essentiel*».

Les sujets de l'ISSEG ont, en général, fait une distinction entre l'objectif de construire les modèles graphiques des IR et le contenu mathématique habituellement consacré aux règles de calcul algébrique. Pour la plupart d'entre eux (15 sur 21), les objectifs formulés dans leur planification sont plus ou moins précis et les prestations attendues sont, par le fait même, plus ou moins observables. Pour d'autres, comme **Fana** et **Mab**, les objectifs ne sont pas clairs. Par exemple, lorsque **Fana** parle de «*formaliser les règles de calcul sur les sommes, les produits et les puissances*» qui sont supposées être déjà vues en 8e année, de quelles règles s'agit-il? Lorsque **Mab** se fixe pour objectif de «*présenter des situations dans la deuxième séquence, avec leur gradation en difficultés, qui permettraient aux élèves une amorce de construction de modèles à partir d'un contexte qui a du sens pour eux*», de quel type de difficultés s'agit-il? À quel type de situations, de contexte réfère-t-il? En revanche, si bien des détails de leurs intentions didactiques spécifiques nous échappent, nous voudrions souligner que ces données indiquent clairement que les sujets sont en train de réfléchir aux conditions d'acquisition et d'enseignement des IR, avec en particulier une prise en compte assez remarquable de la question du sens.

Dans la préparation de leurs leçons, **Réotra**, **Samp** et **Yong** ont élaboré le contenu selon les trois parties distinctes qui présentent les trois IR dont ils veulent construire les modèles graphiques avec les élèves. Ils ont choisi d'aborder ainsi les trois IR en autant de leçons, parce qu'ils ont suivi le schéma de la collection CIAM, 4e année, qui aborde plus d'une notion dans une séquence. Pour formuler les objectifs de chacune de ces leçons, ils se sont basés sur la hiérarchisation des objectifs telle que présentée par cette collection: écrire une somme ou une différence sous forme d'un produit de facteurs en utilisant les égalités $a(x \pm y) = ax \pm ay$, factoriser des expressions littérales en utilisant des produits remarquables, développer et déduire des graphies algébriques comportant des puissances. On note ici l'intérêt de ces formés de faire des liens entre ces différentes notions, et non de les enseigner de façon linéaire, c'est-à-dire une notion à la fois. Ceci signifie que l'essentiel du contenu d'une séquence se retrouve réinvesti dans les autres et que, par conséquent, plus d'un concept constitutif des IR est abordé dans une séquence didactique.

Quant à **Kant**, **Toya** et **Mady**, ils ont élaboré des objectifs d'apprentissage sous forme de contenu mathématique. Ainsi, ils se sont fixé pour but d'amener les élèves à développer les produits du type (3x - 5)(2y - 3). Ensuite, ils ont fait factoriser les expressions 15x + 10, $7x^2$ - 7x et (2x - 3)(x + 5) + 4(2x - 3), puis ils ont fait noter que «*factoriser permet de réduire des écritures littérales*». Dans l'un des épisodes, ils se proposent d'amener les élèves à «*développer les produits*», «*supprimer les parenthèses*», en plus de «*regrouper les termes semblables*». Dans un autre épisode, ils souhaitent que les élèves soient capables de «*factoriser en recherchant directement un facteur commun*». Pour terminer cette séquence, ils souhaitent faire «*développer un produit en utilisant les égalités remarquables*». Bien qu'ils aient élaboré un grand nombre d'activités, un bon nombre de celles-ci sont liées au même objectif: «*factoriser en appliquant des égalités remarquables*». Nous notons tout de même une certaine progression d'un épisode à l'autre. Nous pouvons aussi constater que les objectifs de «*factoriser en appliquant plusieurs méthodes*» gagnent en précision et représentent en quelque sorte les activités que ces formés se proposent de faire réaliser par les élèves.

2.2 Mise en situation ou contextualisation

Fait remarquable des effets du Séminaire, presque tous les sujets se sont accordés à sensibiliser les élèves sur l'importance des modèles graphiques et l'intégration des connaissances. Ils ont presque tous cherché à piquer la curiosité des élèves en leur montrant un exemple qui établit l'intérêt de recourir au modèle. Pour faire suite à cette contextualisation, la plupart d'entre eux (23 sur 27) ont annoncé le contenu d'enseignement en demandant aux élèves, d'une part, de construire le modèle graphique d'un binôme ou d'un trinôme et, d'autre part, de dire à quelle graphie algébrique correspond une image géométrique donnée. Ils s'attendaient tous à ce que les élèves trouvent ce nouveau contexte de modélisation à la fois difficile et intéressant.

Lors des leçons, une partie importante de la mise en situation a été consacrée à la présentation des formes géométriques. Les formés ont porté plus ou moins de soin à dessiner ces formes au tableau et à s'en servir pour représenter des polynômes. Ils ont abordé les leçons par les notions de monôme, binôme et trinôme à travers la manipulation des formes géométriques et la participation des élèves. Pour aider ces derniers à se familiariser avec ces différentes formes, bon nombre d'entre eux (15 sur 27) ont cherché à établir de façon judicieuse certaines conventions dans le but de distinguer ces formes. Les commentaires de **Bana** lors de l'entrevue d'explicitation montrent en quoi cette activité de mise en situation est intéressante: «*D'habitude, on donne directement les trois IR comme étant le résultat d'une série d'opérations sur lesquelles on applique les propriétés de commutativité et de distributivité. Nous, on est parti d'une figure qu'on a construite avec* *les élèves pour en arriver à l'expression littérale d'une IR»*. Avec cet exemple, on constate de nouveau comment l'intégration des savoirs didactiques du Séminaire est en cours d'élaboration; la pensée didactique des formés est ainsi visible, en quelque sorte, «en marche».

2.3 Consignation d'informations et négociation de sens

La plupart des formés de l'UGANC (4 sur 6) ont présenté les formes géométriques sous forme de consignes. Bien que ces formés aient donné des informations sur les signes et les couleurs, la façon dont ils ont fourni ces informations nous a préoccupé. En effet, plusieurs d'entre eux (dont **Ada** et **Mane**) ont dû revenir sur ces consignes, parce qu'ils se sont eux-mêmes rendus compte que les élèves n'y ont pas accroché et qu'ils ne les avaient pas comprises. **Mane** est revenu par deux fois sur ces consignes pour les expliciter de manière à permettre aux élèves de réaliser ses intentions. Mais, dans sa première séquence, les significations ne sont pas pour autant apparentes et, face aux premières situations de modélisation, les choix des élèves se réduisent à des choix dictés, et les tâches à réaliser sont déjà déterminées par des indices qui leur sont associés: tel indice apparaît, alors telle tâche est à réaliser. Il s'agit ici d'indices formels sur les graphies algébriques que **Mane** et les élèves créent à partir des différents exercices résolus. Par exemple, dans la première séquence, **Mane** attend de l'élève placé devant la question: «factorise $16x^2 - 36$» qu'il reconnaisse (à l'aide des indices constitués du nombre de termes de l'expression et des formes carrées) l'occasion de mettre en œuvre le schème de facorisation: $16x^2 - 36 = (4x)^2 - (6)^2 = (4x + 6)(4x - 6)$. Mais, devant cette question, l'élève peut également reconnaître une factorisation simple, celle qu'il a étudiée à l'aide de la seule propriété de *distributivité*, avant de rencontrer les IR: $16x^2 - 36 = 4(4x^2 - 9)$. Le rôle de **Mane** n'est pas d'interdire cette dernière réponse, mais d'amener l'élève à produire la réponse $4(2x + 3)(2x - 3)$, celle-ci désignant implicitement la «mauvaise» factorisation. L'intégration des connaissances S1 et S2 liées aux IR suppose ainsi la mobilisation des notions de factorisation et de simplification qui, à leur tour, doivent être vues à la lumière des notions de monômes, d'opérations sur les monômes, des propriétés de ces opératrions, etc. En l'absence de cette intégration, ce sont, au bout du compte, des choix appauvris par des associations directes que les élèves ont mis en œuvre en recourant à la mémorisation, du moins dans la première des trois séquences.

Presque tous les formés de l'ISSEG (18 sur 21) ont choisi de travailler avec les formes géométriques tout en posant aux élèves des questions quant à leur utilisation raisonnée. D'autres (**Kémo**, **Kandas** et **Marc**) ont présenté ces formes sous forme de consignes dont ils n'ont pas explicité le sens par rapport à leur double statut d'outil et d'objet, et à leurs limites. Comme la plupart des sujets de l'UGANC, **Kémo, Kandas** et **Marc** se sont d'abord attachés à faire apprendre les systèmes d'affirmations: définitions, règles, procédures, algorithmes, astuces, etc. Leur première leçon témoigne que la signification des conventions sur l'utilisation des formes géométriques est réduite aux figures dessinées au tableau. Tout s'est passé dans leur première séquence comme si la figure allait de soi et ne demandait pas à être interprétée dans une variété de registres. C'est lors de la première entrevue qu'ils ont appris que percevoir une image n'est pas percevoir le réel mais devoir, à travers elle, le reconstruire. Comme le reconnaît **Kandas,** en entrevue, l'intérêt de négocier les conventions avec les élèves est de voir que, «*malgré le fait que les élèves connaissent déjà le carré et le rectangle, et comment déterminer leur aire, les élèves ne les avaient jamais utilisés pour développer ou établir une IR; ils n'avaient pas eu à associer les couleurs [des tuiles] aux signes des monômes*». Ainsi, les formés deviennent conscients de l'opérationnalité de certains savoirs didactiques. Ils se sont aussi rendus compte que la façon dont ils ont «mis en image» l'information sur les IR est une source de difficultés, en ce sens que les conventions et les règles de codage ne sont pas totalement explicitées. La complexité des figures provient, non pas de leur degré d'abstraction par rapport à la perception ordinaire des éléments constitutifs des IR, mais plus essentiellement, des schèmes cognitifs qu'implique leur traitement. Ceci témoigne à nouveau, nous semble-t-il, de la dynamique de la construction des savoirs S1, S2 et S3.

À l'instar de **Fadak, Frank** et bon nombre de formés ont ainsi visé la compréhension et le partage de ces conventions plutôt que les simples consignes auxquelles les élèves peuvent ne rien comprendre. Ainsi, pour introduire les formes géométriques, **Alex, Tomy, Toya, Samp** (de l'ISSEG) ont non seulement recouru au dessin, mais sont aussi revenus au «concret». Les commentaires de **Toya, par exemple,** nous informent là-dessus: «*Des différentes formes dessinées au tableau, nous sommes allés au concret en découpant ces formes dans des feuilles de carton. Ceci a été d'autant plus intéressant qu'il suffisait de retourner la feuille découpée pour se donner une image de l'opposé d'un monôme*». Par ce recours au modèle en carton, **Toya** montre que «*l'opposé de l'opposé s'obtient en retournant deux fois la même feuille de carton*», ce qui est une façon intéressante d'établir des liens entre les mathématiques et la réalité dynamique. Cette façon de présenter les formes géométriques a permis à **Alex** et à **Tomy** de vérifier les acquis des élèves par rapport à leurs apprentissages de ces nouveaux outils; cela nous permet de constater de nouveau la prise en compte des savoirs S1 et S2 pour l'élaboration de S3 personnalisés, adaptés aux circonstances particulières de chaque groupe.

2.4 Prise d'informations

Dans l'élaboration de leurs leçons, tous les formés ont utilisé le manuel du Séminaire ainsi que les notes qu'ils y ont prises. Treize des formés de l'ISSEG ont, en plus, consulté le manuel de 4e Secondaire de la collection CIAM. En entrevue, ceux des formés de l'ISSEG qui n'ont pas utilisé ce manuel nous ont dit qu'il n'y est fait nulle part mention de tuiles ou de formes géométriques comme celles que présente le manuel du Séminaire. En comparant les deux matériels pédagogiques, **Pagui** ajoute que «*les élèves peuvent disposer des tuiles et des formes géométriques comme support visuel pour multiplier ou factoriser certains polynômes. Ce support visuel favorise la compréhension des élèves en les aidant à intégrer leurs connaissances*». Plus intéressante est la remarque que fait **Berté** sur le recours à ce support "concret": «*Il est important de proposer aux élèves des exercices où ils peuvent se rendre compte qu'ils ne peuvent plus s'accrocher aux formes géométriques ou aux tuiles, qu'ils n'ont d'autre choix que de revenir au symbolisme algébrique*». Cette remarque est d'autant plus intéressante qu'elle souligne les limites de l'outil géométrique. En effet, un outil, aussi puissant soit-il, ne donne accès en lui-même, à l'objet du problème et ne rend pas sa structure plus transparente comme on le croit souvent. C'est notamment le cas des exercices sur les polynômes de degré supérieur à 2 et à grands coefficients, dont la représentation "concrète" (i.e; géométrique) devient fastidieuse sinon impossible.

Les formés de l'UGANC n'ont majoritairement utilisé que le manuel du Séminaire dont ils ont exploité les activités d'investissement. L'inexpérience en matière d'enseignement et le manque d'assurance ont fait que ces formés ont préféré suivre presque intégralement les activités du manuel du Séminaire et qu'ils en ont produit très peu de leur propre chef. Rappelons que c'est au cours du Séminaire que tous les formés se sont familiarisés avec ces objets. Contrairement à leurs camarades de l'UGANC, les sujets de l'ISSEG n'ont pas suivi intégralement les activités présentées dans le manuel du Séminaire. Ils ont plutôt conçu quelques activités en s'inspirant de ce manuel et de la collection CIAM. Certains d'entre eux (**Fadak**, **Pagui**, **Penda**, **Réotra** et **Frank**) ont confectionné leur propre matériel: feuilles de carton, tuiles découpées avec un côté peint, l'autre non, etc. Cinq des 21 formés de l'ISSEG (**Kant**, **Yong**, **Kémo**, **Lika** et **Marc**) ont utilisé très peu de matériel de manipulation durant leurs leçons; le peu de fois qu'ils en ont fait usage, ce sont eux qui ont réalisé l'essentiel des activités. Ils ont donc préféré suivre le manuel du Séminaire à la lettre, de peur d'escamoter une notion et d'en faire subir les conséquences aux élèves par la suite. Ces derniers se sont contentés de dessiner des formes et des tuiles au tableau et d'utiliser des illustrations du manuel que leur «prof» leur avait demandé de reproduire. En entrevue, tous les formés ont affirmé que les élèves ont trouvé intéressant le fait d'utiliser le support visuel et le matériel de manipulation. «*Plusieurs élèves m'ont dit que le découpage les a beaucoup aidés à comprendre le rationnel à la base de l'IR* $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ *et que c'était vraiment intéressant*», nous confie **Penda**, en entrevue.

2.5 Planification et réalisations didactiques

Pour les sujets de l'ISSEG, les étapes du déroulement des leçons sont relativement bien décrites dans le journal de bord, même si leur durée n'est pas toujours précisée. Cette omission n'a pas eu d'impact puisque la majorité des formés (18 sur 21) ont complété le travail dans le temps prévu. **Diak**, **Fadak**, **Kandas** et **Mab** nous disent qu'ils ont presque entièrement suivi leur plan. «*Après la première séquence, j'ai dû me réajuster pour devenir de plus en plus capable d'entrer dans mon temps*», nous confie **Fadak**, en entrevue.

La difficulté des sujets de l'UGANC se situe dans la planification de leurs leçons. En effet, ils n'avaient pas pris le temps de s'assurer que leur planification était adéquate par rapport au temps alloué par les collèges où ils devaient enseigner. Il nous a fallu demander au professeur d'anglais d'accorder à deux d'entre eux (**Alfa** et **Dane**) une bonne fraction de son temps pour permettre à ces derniers de couvrir l'essentiel des activités prévues. Cet arrangement était d'autant plus nécessaire que le respect du temps alloué par les institutions ne devrait pas se faire au détriment du contenu à enseigner et du rythme des élèves. **Laye** et **Moh** avaient, eux aussi, mis trop de temps à vérifier les connaissances des élèves sur les monômes et binômes. Ils n'ont malheureusement cherché à réajuster leur planification qu'après la seconde leçon, alors qu'il ne leur restait plus qu'une séance de travail.

La majorité des formés (22 sur 27) ont mis l'accent sur la résolution de problèmes et non sur les manipulations de symboles: «*L'apprentissage des IR ne doit pas être dominé par la manipulation des expressions littérales; ces manipulations découlent du besoin de l'élève de résoudre des problèmes sur les IR*», nous confie **Alex**. En outre, les formés insistent sur la compréhension plutôt que sur la mémorisation: **Alex** précise que «*la compréhension des IR doit être basée sur la logique et le sens et non sur les règles qui semblent descendre du ciel!*»; **Penda** souligne que «*les IR sont parfois perçues comme une simple manipulation de symboles*» en précisant qu'«*il faut y amener un raisonnement basé sur les activités et le matériel*»; **Berté** dit que «*les élèves doivent apprendre à résoudre des problèmes en se servant des connaissances sur les IR, notamment des techniques de calcul que permettent les IR*» et que «*pour développer ces habiletés, il est important de favoriser* *la construction des modèles par l'élève plutôt que de lui montrer des modèles déjà conçus et réalisés par l'enseignant*». **Alfa** précise que le but de sa leçon est de «*donner un sens aux opérations sur les IR et montrer leur utilité dans la résolution de problèmes*».

2.6 Contrôle du sens et validation des modèles

Nous pouvons associer les intention des formés de donner du sens aux conventions et règles, de les faire comprendre et de les faire découvrir à un objectif de validation des modèles dans la mesure où les formés veulent montrer que ces conventions ne sont pas arbitraires, qu'elles «*ne descendent pas du ciel*» et qu'elles se négocient. C'est ce que montrent de manière explicite les extraits suivants d'**Alex**, de **Frank** et de **Lika**.

> Alex: «Le but de cette leçon est de faire découvrir les règles de multiplication et de factorisation et justifier les opérations qui engendrent les IR à partir du gros bon sens ou de la logique des choses et non sur des règles dictées et répétées».
>
> Frank: «Une fois que les élèves ont découvert comment on se sert des tuiles pour représenter la multiplication de polynômes ou déterminer les facteurs d'un polynôme à l'aide de l'assemblage des tuiles, on se détache du contexte pour revenir au cadre symbolique formel habituel».
> (Fait remarquable, chez Frank, de l'effet Dienes si décrié par Brousseau)
>
> Lika: «Les méthodes de modélisation doivent venir des élèves et non de l'enseignant; les procédures leur apparaîtront ainsi plus logiques et efficaces».

Dans les extraits des plans de leçons, **Mady** et **Frank** parlent même de fondements, comme en témoignent les extraits suivants.

> Mady: «J'utiliserai l'activité de découpage et de recollage me permettant de mettre en évidence les facteurs (a + b) et (a - b) de l'IR correspondante et d'illustrer le fondement de cette IR. Au lieu d'appliquer l'IR comme une règle apprise par coeur, les élèves seront amenés à lui donner un sens et à l'accepter comme la conclusion de l'activité proposée».
>
> Frank: «À partir du contexte géométrique, les élèves pourront illustrer le fondement ou le rationnel de la technique de complétion du carré. En effet, le modèle géométrique est un excellent support visuel si nous voulons que les élèves dégagent par eux-mêmes les règles, l'observation et l'action valant parfois mille mots. C'est par la compréhension du support visuel que les élèves pourront faire le passage vers les manipulations des expressions algébriques correspondantes».

Frank semble réaliser que la compréhension des techniques de complétion, la différenciation des traitements algébrique et géométrique et la maîtrise des raisonnements correspondants sont étroitement liées à la mobilisation et à l'articulation de plusieurs registres de représentation sémiotique. Ceci est d'autant plus important que la question de la coordination de ces registres et celle des facteurs susceptibles de favoriser cette coordination sont centrales pour la construction des savoirs S2 et S3.

Tous les formés n'expriment pas aussi clairement leurs intentions, mais la majorité (21 sur 27) a pour projet de donner du sens aux conventions et aux règles , voire de les faire comprendre. Ceci implique la participation active des élèves à plusieurs activités de modélisation à partir desquelles ils peuvent découvrir des techniques de factorisation, de complétion de carré et de calcul rapide. Mais il serait naïf de croire qu'introduire des exercices de conversion sur quelques cas typiques suffirait pour créer les conditions favorables à une utilisation des contextes algébrique et géométrique des IR par les élèves. Loin s'en faut, car la conversion des représentations d'un contexte à l'autre requiert l'identification des unités signifiantes qui correspondent aux valeurs des différentes variables visuelles. Or, nous rappelle Duval (1995, p. 76), «souvent, c'est la discrimination de ces unités signifiantes qui fait défaut». La non discrimination des différentes valeurs visuelles pertinentes ne conduit pas seulement à des confusions dans l'interprétation des images graphiques, elle a aussi pour effet que la plupart des traitements effectués dans le registre de l'écriture algébrique perdent leur sens.

3. Analyse des séquences didactiques

Deux types de leçons ont pu être dégagées, par rapport à la construction et la validation des modèles. Dans le premier groupe, celui des 6 de l'UGANC, les formés ont pour objectif principal d'introduire à des procédures de modélisation et à des règles de calculs qui seront institutionnalisées. Dans le second groupe, celui des 21 de l'ISSEG, les formés ont construit des leçons sur les activités didactiques avec des moments adidactiques faisant appel aux tuiles et aux formes géométriques; ils ont utilisé les activités de découpage/recollage pour favoriser les habiletés des élèves à l'intégration des connaissances et pour les rendre familiers aux techniques de calcul numérique.

3.1 Mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2)

Les 27 formés ont tous conçu des séquences visant à introduire les formes géométriques et les tuiles algébriques. Ils ont mis en œuvre des schèmes de production des formes géométriques avec les instruments usuels que sont la règle, l'équerre et le compas. Nous avons affaire à plusieurs leçons d'introduction pour lesquelles 19 des 27 formés ont mis un soin particulier à décrire, dans leur plan de leçons, des carrés unitaires, des bandes rectangulaires et les tuiles algébriques, l'utilisation qu'ils comptent en faire et le déroulement des activités. Nous nous intéressons particulièrement à ces leçons parce qu'elles sont plus détaillées et qu'elles nous permettent d'identifier des éléments que nous reconnaissons comme mobilisateur de savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2).

3.1.1 Connaissances mathématiques

Dans l'ensemble, l'analyse des séquences révèle que les formés ont commis très peu d'erreurs au plan mathématique. Ils ont, en général, démontré une très bonne maîtrise des connaissances mathématiques qu'ils se proposaient d'enseigner sur les IR. Pour bon nombre d'entre eux, le résultat au post-test laissait d'ailleurs présager une certaine aisance sur ce plan. Nous avons toutefois noté quelques difficultés chez certains à enseigner les notions les plus théoriques (monôme, binôme, etc.). C'est le cas de **Fana** qui, n'étant pas parvenu à donner une définition satisfaisante de monôme, s'est plutôt étendu sur des exemples et sur des cas assez particuliers ($3x^2y^3$, x^2x^4, etc.). Par ailleurs, après avoir présenté le carré unitaire comme étant «*un carré de dimension 1, c'est-à-dire de côté 1*» et après avoir coloré ce carré pour l'appeler «*carré plein*», **Fana** a poursuivi ses «*consignes*» en affirmant que «*le carré de dimension –1 est le carré de côté 1, mais non coloré; on l'appelle "carré vide", parce qu'il ne contient aucune couleur*». En plus de manquer de clarté dans ses explications, **Fana** semble ignorer qu'une dimension n'est jamais négative.

C'est aussi le cas de **Laye** et de **Mab** qui n'ont fait que répéter dans les mêmes mots ce qu'ils avaient déjà dit aux élèves. C'est comme si dans la préparation de leurs leçons, ils avaient prévu un type d'explication et, dans la conduite des activités, ils ont repris cette même explication jusqu'à ce qu'elle soit retenue et ce, indépendamment des difficultés des élèves. Or, ce n'est pas en répétant une définition dans les mêmes termes qu'elle sera certainement comprise. **Mab** a souvent commuté les expressions «bande rectangulaire» et «grand carré»; il a parlé de «carré de dimensions x et 1» plutôt que de «bande rectangulaire» représentant le monôme x, ceci à plusieurs reprises dans la première leçon. De même, dans ses explications du plan cartésien, **Laye** a interverti quelque fois l'axe des x et celui des y. Ces faits nous rappellent que les formés sont en train d'apprendre leur métier d'enseignant; et cette incomplétude dans la mise en œuvre des savoirs S2/S3 est un bon indicateur de ce parcours en progression.

Comme leurs résultats au prétest (respectivement 43 % et 38,4 %) le laissent entrevoir, **Laye** et **Mab** présentent certaines difficultés quant à la conception qu'ils se font des formes géométriques: ils ont pris ces formes pour des symboles qui, en algèbre, sont souvent utilisés au sens général, sans qu'ils aient nécessairement un sens, ce qui n'est pas très aidant en soi lorsqu'ils annoncent trois leçons basées sur l'utilisation de ces outils. **Laye** et **Mab** ont traduit les monômes à coefficient négatif par des aires de surface négative! Le fait d'introduire les formes géométriques et les tuiles algébriques sans leur rattacher de significations négociées a ainsi engendré des difficultés supplémentaires pour ces formés. Du point de vue du contrat de formation, ils s'obligent à employer les aires même lorsqu'elles deviennent contre-productives. Lors du visionnement des leçons, **Mab**, à la différence de **Fana** et de **Laye**, s'est lui-même aperçu de ces difficultés. Cette prise de conscience est l'indice que **Mab** est un futur enseignant qui peut s'analyser et poser un regard critique sur son enseignement.

3.1.2 Travail sur l'emploi des savoirs S1 et S2 dans l'enseignement

Pour intégrer adéquatement ses savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2) dans l'enseignement, il importe d'établir des connexions entre les notions à enseigner, c'est-à-dire les concepts constitutifs des IR, ce que bon nombre (18 sur 27) de nos formés ont fait à plusieurs reprises. En effet, l'un des objectifs de la présente recherche est d'abord d'amener le futur enseignant à intégrer et à faire intégrer les savoirs S1. Dans le cadre du Séminaire, les formés ont appris et apprécié l'importance de faire cette intégration, notamment pour construire le sens des IR et ce, à partir de plusieurs situations. Toutefois, dans la pratique, **Fana**, **Mab**, **Lika**, **Mane,** et **Réotra** n'ont pas intégré leurs savoirs mathématiques et didactiques à l'enseignement des IR, mais les ont communiquées directement aux élèves. En témoigne l'extrait suivant:

<u>Extrait de Réotra: Découpage et recollage**Erreur! Signet non défini.**, épisode 2, séquence 3</u>

<u>Réotra</u>: «Je veux qu'on découpe et qu'on recolle du papier pour montrer qu'on peut transformer la différence de deux carrés $a^2 - b^2$ en le produit $(a + b)(a - b)$». (Il dessine un grand carré de côté *a*, à l'intérieur et à l'angle supérieur droit duquel il dessine un petit carré de côté *b*).

<u>Réotra</u>: «On va couper le petit carré, de côté b». (Il le fait faire par un élève, qui découpe la partie (b^2) du carton en face du reste de la classe.

<u>Réotra</u>: «Qu'est-ce qu'on a à l'intérieur? (Bon nombre d'élèves répondent, en choeur, «$a^2 - b^2$»).

<u>Réotra</u>: (revenant sur le modèle dessiné au tableau): «Qui peut déterminer les [nouvelles] dimensions … ?» (Ce que font ceux des élèves interrogés, sans peine).

<u>Réotra</u>: (revenant sur le carton): «Qui peut venir découper selon la diagonale ?», (ce qu'il appelle ainsi "diagonale"étant déjà tracée par lui).

L'activité perd ainsi de son intérêt didactique, puisqu'il ne s'agit plus d'amener l'élève à réfléchir sur la façon de découper le carton et de transformer pratiquement la figure donnée en un rectangle de même aire, mais plutôt de lui faire exécuter une opération (découper une feuille de carton) selon la méthode qu'on lui indique (suivre le tracé de la diagonale). Il était très important, voire essentiel, de laisser l'élève déterminer comment effectuer ce découpage de façon adéquate. La tentative de montrer la bonne solution est très présente et assez forte chez **Réotra** et d'autres sujets de l'UGANC. C'est d'ailleurs lui-même qui fait le recollage, à la place de l'élève.

Les distinctions que les formés font, d'une part, entre les modèles pour «voir» les IR et les modèles pour «faire» comprendre les IR et, d'autre part, entre «apprendre l'image» d'une IR et «apprendre par l'image» d'une IR dénotent une variété de développements des savoirs S3: ou bien l'on fait, un moment, arrêt sur l'image graphique d'une IR, car la difficulté des images est telle qu'on ne peut les utiliser sans un temps préalable d'élucidation; ou bien l'on inclut cette compréhension des images graphiques dans leur utilisation même, en considérant que le sens de l'image provient de l'activité dans laquelle elle se trouve insérée. Qu'il s'agisse de proposer des activités préparant à une meilleure compréhension des modèles graphiques des IR (et donc à leur meilleure utilisation) ou qu'il s'agisse d'intégrer ces modèles dans une logique d'intégration, en privilégiant alors leurs propriétés fonctionnelles par rapport à des tâches, il apparaît que les activités de modélisation prennent des significations variables du point de vue des pratiques de référence auxquelles on peut les rapporter. D'un côté, ce que le formé de l'UGANC propose à l'élève, c'est précisément une application étroite d'outils et d'activités qui lui permette de revivre une pratique de modélisation. D'un autre côté, le formé de l'ISSEG souligne plutôt une nécessaire intégration, c'est-à-dire une transformation plus ou moins importante, de manière à ajuster images graphiques des IR et activités sur les IR, d'une part aux perspectives d'apprentissage, d'autre part, aux capacités mêmes des élèves selon leur niveau. Le Séminaire a contribué à faire découvrir cette distinction jusque là inexplorée par les formés.

3.2 Approche didactique privilégiée

L'analyse de la plupart des leçons dispensées par les sujets de l'UGANC ne nous a pas permis de connaître de façon explicite les approches pédagogiques privilégiées. C'est en analysant leurs leçons que nous avons pu constater que, à l'exception de **Ada** et de **Dane**, ils se sont livrés à un enseignement directif et au travail en grand groupe. **Alfa**, **Laye**, **Mane** et **Moh** ont accordé une place prédominante à l'enseignement directif dans lequel ils ont joué beaucoup plus le rôle de «transmetteur de connaissances» que celui de «facilitateur». En effet, dans la deuxième séquence, **Alfa**, **Laye**, **Mane** et **Moh** n'ont mis les élèves à contribution que pour répondre à quelques questions dont certaines contenaient des éléments de réponse. Ces sujets ont inlassablement dirigé les élèves dans les activités de modélisation et leur ont donné peu de chance de construire leurs propres modèles.

Mane a, quant à lui, écrit presque mot à mot ce qu'il a dit aux élèves et dans les activités proposées. Le visionnement montre qu'il tient toujours sa préparation en main, qu'il tient parfois peu compte des questions des élèves qui ne sont pas prévues dans sa préparation et qu'il laisse peu de temps aux élèves pour découvrir par eux-mêmes les connexions entre ces parties. En entrevue d'explicitation, avec du recul, **Mane** a remis en question sa façon de procéder: «*À la deuxième séquence, j'ai mis un peu plus de temps que prévu pour corriger les exercices. Pour me rattraper, j'aurai dû consacrer moins de temps à faire en classe certaines activités que les élèves savaient déjà faire*».

Nous avons constaté, à certaines reprises, que lorsque **Toya** et **Réotra** posent, par exemple, des questions aux élèves et qu'ils n'obtiennent pas de réponses qui correspondent à celles qu'ils ont en tête, ils les réfutent jusqu'à ce que les élèves produisent la réponse qu'ils veulent entendre. En témoigne l'extrait suivant:

<u>Extrait de Réotra: (Une façon d'introduire le cours), épisode 1, séquence 1</u>

<u>Réotra</u>: «Si, par exemple, j'écris l'expression $(a + b)^2$, qu'est-ce que c'est?».
<u>Élève</u>: «C'est une identité remarquable».
<u>Réotra</u>: «Vous connaissez donc déjà les identités remarquables!», (commente-t-il avant de demander à une fille de développer $(a + b)^2$. La fille écrit rapidement au tableau l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$).
<u>Réotra</u>: «Avez-vous compris?» ("Oui!", répondent bon nombre d'élèves).
Réotra: «Moi, je n'ai pas compris; j'aimerai que quelqu'un me l'explique». (Une élève justifie l'égalité par le fait que $(a + b)^2 = (a + b)(a +b)$.
<u>Réotra</u>: «Ce n'est pas ce que je veux. Ce qu'elle a écrit est juste; mais moi je n'y ai rien compris».
<u>Un autre élève</u>: «C'est la forme développée de l'identité remarquable»..
<u>Réotra</u>: «D'accord! Comment on peut appeler encore cette forme? ... (Silence) Est-ce une forme algébrique, numérique ou géométrique?».
<u>Un élève</u>: (qui exploite cette piste): «C'est la forme algébrique de l'identité remarquable» .
<u>Réotra</u>:«Voilà!», (renchérit-il sur cette réponse en soulignant qu'il s'agit effectivement de la forme algébrique de cette IR, forme à laquelle les élèves sont déjà habitués).

Par contre, ce que **Berté**, **Fadak**, **Pagui** et bien d'autres formés de l'ISSEG visent au travers des activités proposées, c'est bien la compréhension de l'écriture alphanumérique de l'IR à laquelle réfère l'image graphique, cette compréhension passant nécessairement par celle des modes d'utilisation des tuiles par lesquelles peuvent être justement saisis les concepts constitutifs de ces IR. L'intérêt des modèles, dans l'enseignement ou la formation, est alors non pas tant de constituer des sources d'information que de constituer des instruments qui permettent aux élèves d'apprendre des démarches: ainsi, en est-il de l'utilisation des tuiles algébriques et des formes géométriques pour l'étude des IR.

Le visionnement des leçons laisse cependant voir que l'enseignement dispensé par 19 des 27 formés est loin d'être un cours magistral. En effet, les formés ont travaillé plutôt de façon collective avec les élèves, en laissant à ces derniers une grande place dans les activités. Les formés ont proposé à ces derniers des problèmes; ils leur ont posé des questions; ils ont fait passer certains d'entre eux au tableau après qu'ils les aient laissés travailler individuellement ou par groupe. Ce mode de fonctionnement n'a pas été facile dans les classes à effectif pléthorique (plus de 100 élèves) où le travail en équipe a pris plus de temps que prévu. Il fallait attendre que tous les groupes aient terminé avant de demander aux élèves de comparer leurs modèles ou de vérifier leurs réponses entre eux.

Une autre stratégie que nous avons observée chez plusieurs formés (dont **Berté**, **Bana**, **Fadak**) est l'*institutionnalisation primitive* par élève interposé (Portugais, 1995). Fonction du contrôle des actes, cette approche consiste à demander à un élève (qui fait juste) d'aider un autre (qui n'a pas compris) à appliquer la procédure correcte. Par exemple, lorsqu'une élève (Marie), à qui **Berté** a demandé de construire le modèle graphique de $x^2 + 6x$, s'est trompée en partant d'un carré de côté $x + 6$, **Berté** a demandé l'avis des autres élèves et a invité une autre élève (Mimi) à ressortir l'erreur. **Berté** a ainsi amené les élèves à s'interroger sur la construction du modèle. Bon nombre de formés de l'ISSEG ont pu ainsi considérer l'erreur comme faisant partie intégrante du processus d'apprentissage et ont pu laisser de la place aux élèves en les amenant à réfléchir sur leurs procédures. Lors du visionnement, **Berté**, après s'être vu intervenir, a fait le commentaire suivant: «*Là, c'est l'élève (Mimi) qui a déterminé qu'il y avait une erreur et qui a expliqué pourquoi le modèle était erroné. Le tout est venu d'elle; moi je n'ai fait que réinvestir cette erreur en insistant sur le sens de $a \pm b$: prolonger de b unités le côté de mesure a ou le retrécir en autant d'unités*».

Ces commentaires soulignent l'importance de guider les élèves dans leurs activités et de leur donner quelques pistes, «*juste pour les dépanner, mais sans plus*», comme le dit **Fadak**. Le visionnement des leçons a permis à **Alex**, **Kémo**, **Mane** et **Moh** de se rendre compte que leurs introductions ne respectent pas cette approche didactique à certains moments, qu'ils adoptent une attitude de «prof» autoritaire et qu'ils s'orientent quelques fois même vers une «révélation» directe des connaissances. Dans les activités de modélisation, les élèves doivent plutôt construire leurs propres modèles des IR et montrer qu'ils peuvent intégrer leurs connaissances. «*Ce n'est pas au prof de leur montrer des trucs; il revient aux élèves de découvrir eux-mêmes des moyens à partir de leurs propres observations et expériences*», reconnaît **Alex**.

C'est au cours de la troisième séquence que se dessine la tendance des formés vers une approche didactique qui s'apparente le plus à la construction des connaissances par les élèves qu'à l'institutionnalisation directe de ces connaissances. Le manque d'expérience en enseignement des sujets de l'UGANC a fait que ceux-ci n'ont pas toujours fonctionné de cette façon. Ils ont certes laissé quelques fois de la place aux élèves, les ont quelques fois amenés à se questionner sur leurs démarches de modélisation, ont cherché sans toujours réussir à adapter leur enseignement à la compréhension des élèves, ont parfois réinvesti les réponses fournies par les élèves. Mais les contraintes de temps et la surprise créée par des situations non planifiées les ont rendus quelque peu rigides et les ont fait parfois dicter aux élèves leurs façons de construire des modèles au lieu de mettre en place des conditions qui permettent aux élèves de construire leurs modèles à partir de leurs propres expériences.

Bana, **Laye, Mab** et **Mane** ont dispensé chacun trois leçons sans pour autant trouver du temps de faire confectionner des modèles avec du matériel. Lorsque les élèves leur posent des questions sur l'utilisation des tuiles, ils se mettent à leur place et verbalisent leur propre démarche de représentation géométrique pour les aider. Ainsi, au lieu de dévoluer ces activités aux élèves, ils les réalisent eux-mêmes. Leur manque d'assurance les amène à expliquer aux élèves comment représenter géométriquement une IR avant de les laisser essayer. Dans les deux premières séquences, ils ont souvent donné des exemples pour s'assurer que les élèves «partent du bon pied». Après l'entrevue d'explicitation et le visionnement de ces séquences, **Bana** et **Mane** ont réalisé qu'ils auraient *dû recourir parfois au matériel concret pour favoriser la compréhension des élèves et rendre leurs apprentissages plus significatifs*. Dans la troisième séquence, **Mane** et **Laye** ne se sont plus contentés des bonnes réponses des élèves; ils ont demandé à ces derniers de dire comment ils ont procédé pour dessiner tel ou tel modèle. Ainsi, même s'ils n'ont pas repéré toutes les erreurs lors du visionnement des leçons, **Bana**, **Mab**, **Laye** et **Mane** se sont rendus compte de leurs difficultés et ont su qu'ils ont encore du chemin à faire.

Le visionnement de leur troisième séquence laisse voir qu'ils favorisent de plus en plus l'acquisition de connaissances par les élèves au détriment de la simple réception des consignes à exécuter. Ils partent de plus en plus des connaissances des élèves (aire du carré et du rectangle, plan cartésien) pour introduire de nouvelles connaissances (assemblage de tuiles de manière à mettre en évidence les facteurs d'un polynôme). Ils les amènent de plus en plus à la découverte des caractéristiques des modèles en mettant en place les éléments nécessaires pour asseoir la compréhension et susciter une réflexion chez les élèves. De même, dans leur troisième leçon, se manifeste le souci de **Pagui** et de

Frank d'amener les élèves à découvrir par eux-mêmes certaines applications des IR dans le calcul numérique. Au lieu d'énoncer directement ces techniques, ils ont laissé les élèves s'y exercer. Cette démarche a été certes intéressante pour faire définir certaines notions, laisser les élèves formuler leurs propres procédures et permettre que se négocie le sens à travers un consensus avec toute la classe et l'enseignant.

3.3 Formulation, communication et échanges

Dans l'ensemble, les formés conçoivent le processus enseignement/apprentissage comme un échange de connaissances dans lequel les élèves prennent une part active. Cette vision transparaît aussi bien dans la préparation des leçons que dans le déroulement des séquences. En effet, nous notons chez 15 des 27 formés l'utilisation d'un vocabulaire qui rejoint les élèves. Par exemple, lorsque **Berté** et les élèves sont convenus de ce qu'un carré unitaire coloré représente le monôme 1, **Berté** a simplement demandé quel nombre représenterait un carré unitaire non coloré; il n'a pas dit aux élèves ce que c'est. Pour ceux des élèves qui ont eu de la «misère» à trouver -1, **Berté** les a invités à tenir compte de ce que «*dans la vie, toute chose a son contraire*» et que «*si j'existe, c'est que mon opposé existe quelque part*». Malgré ses limites évidentes, nous trouvons l'usage de telles métaphores intéressant pour stimuler la créativité et la négociation du sens. Il s'est souvent arrêté pour dire que «*c'est une convention que vous et moi avons adoptée*». Aussi, a-t-il fait intervenir les élèves dans la négociation de ces conventions; les élèves y ont eu leur mot à dire, car c'est sous forme de questionnement que ces conventions ont été présentées et négociées. Ceci est une belle occasion d'intégrer des éléments de la philosophie à l'enseignement des mathématiques et de jouer sur la perception ou la représentation que les élèves se font des mathématiques.

L'analyse des journaux de bord, des séquences didactiques et des entrevues nous a permis de constater que bon nombre de formés (21 sur 27) favorisent largement les interactions (échanges) avec leurs élèves. Ceux d'entre eux qui ont enseigné en grand groupe (16 sur 21) ont accordé une place importante aux élèves en sollicitant fréquemment leur participation, en les faisant travailler au tableau, en leur demandant d'expliquer leurs démarches et en encourageant les interactions entre les élèves. «*J'amène fréquemment les élèves à vérifier leurs réponses entre eux. Je les fais travailler par groupe de cinq et, lorsque le représentant du groupe est au tableau et qu'il est bloqué, j'invite un autre membre de ce groupe à venir l'aider*», nous confie **Diak**, en entrevue. Les nombreuses questions posées aux élèves au cours des leçons attestent que les formés ont favorisé les interactions avec les élèves.

De façon générale, lorsqu'ils corrigent des activités, les formés font intervenir les élèves, leur demandent leur avis et les font venir au tableau. Bon nombre accordent une grande importance à l'écoute des élèves, ce qui leur permet de s'ajuster constamment à ces derniers et d'apporter des améliorations. Il est important de noter que **Diak** et **Réotra** (de l'ISSEG), **Ada**, **Alfa** et **Mane** (de l'UGANC) ont fini par éviter d'ignorer certains commentaires des élèves ou de poser des questions à sens unique. Alors qu'au début, ces formés s'arrangeaient pour que les élèves disent ce qu'ils voulaient entendre, ils ont fourni l'effort de partir, plusieurs fois dans la deuxième et troisième séquence, des questions des élèves et d'intégrer celles-ci dans leur enseignement.

3.4 Utilisation de situations d'apprentissage concrètes

L'utilisation de situations d'apprentissage concrètes comme le découpage/racollage est un aspect essentiel dans l'enseignement des IR pour que les apprentissages des élèves soient significatifs. Trois des formés de l'UGANC (**Mane**, **Moh** et **Laye**) et deux de l'ISSEG (**Fana** et **Mab**) ont rarement placé les élèves en situation de découpage. Les activités qu'ils ont proposées ne sont, en fait, que des exercices dont les élèves se sont vite lassés. Lorsqu'ils présentent des situations un peu plus difficiles telles que la complétion du carré, ils les reformulent de façon que les élèves sachent comment les traiter. Le visionnement des leçons a permis à ces sujets de réagir à cette façon peu stimulante de fonctionner. En effet, «*dans les deux premières séquences, les élèves n'ont fait que dessiner des IR et quelques polynômes; ils ont rarement manipulé. Ils auraient pu faire autre chose que de faire toujours des dessins qui se ressemblent tous*», nous confie **Mab**.

Pour favoriser la compréhension de l'IR $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, plusieurs formés n'ont pas hésité à faire des démonstrations, en découpant et en recollant des feuilles de carton. Plusieurs d'entre eux ont rapporté que les élèves ont reçu cette démonstration avec un grand intérêt puisqu'ils l'ont trouvée assez concrète. «*Les élèves ont trouvé intéressant de présenter particulièrement cette IR tant de façon concrète qu'imagée. Ils ont trouvé important qu'ils aient accès à ces deux modes de représentation*», nous dit **Marc**, en entrevue. Presque tous les formés (24 sur 27) s'accordent à dire que les élèves comprennent mieux les IR lorsqu'ils manipulent les tuiles et les formes géométriques pour les représenter, les interpréter et les utiliser dans différents contextes. Le commentaire que **Mady** en fait pendant le visionnement de ses séquences est assez éloquent: «*On peut comprendre les IR sans les modèles géométriques; mais avec ces modèles, on les comprend mieux*».

De nombreux formés de l'ISSEG (15 sur 21) ont utilisé des situations d'apprentissage concrètes dans lesquelles les élèves ont joué un rôle actif: découpage et recollage de feuilles pour établir l'IR $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ou pour illustrer le procédé de complétion de $x^2 + 6x$; quadrillage et découpage des feuilles de carton pour déterminer la surface comprise entre deux carrés emboîtés ou entre deux cercles concentriques, etc. Les formés de l'ISSEG ont donc conscience du fait que les élèves ont plus de chance de comprendre le sens des IR s'ils peuvent les rattacher à des éléments signifiants pour eux. Ils se sont bien fortement inspirés du Séminaire qui a suscité la réflexion et les interrogations chez eux et qui a les a amenés à établir des liens entre les leçons. En entrevue, **Samp** nous a confié que «*sans forcément présenter des situations qui sortent de l'ordinaire, j'ai souvent proposé des situations concrètes qui piquent la curiosité des élèves, qui les rendent actifs et qui les amènent à vouloir s'exercer davantage*».

Dans les journaux de bord, bon nombre de formés (16 sur 27) ont souligné l'importance pour les élèves de découvrir, d'observer et de manipuler des tuiles. **Diak** y mentionne que «*l'intérêt que les leçons ont suscité chez les élèves est dû à l'approche qui leur a permis de faire des découvertes, des observations au cours des activités de modélisation, de partager leurs idées pendant la validation des modèles et surtout de les laisser s'entraider*». Ce commentaire montre l'intérêt de former les futurs enseignants à la conception de véritables problèmes qui offrent un défi pour les élèves et qui utilisent quelques situations concrètes d'apprentissage.

3.5 Schémas d'élaboration/organisation des séquences didactiques

Nous avons dégagé deux schémas d'élaboration/organisation des séquences didactiques. Le premier schéma (figure 29) regroupe les séquences qui exposent les éléments théoriques sans grand souci de contrôle du sens par les élèves. Ce schéma est celui de **Ada**, **Laye**, **Mane** et **Moh** (de l'UGANC) qui l'utilisent systématiquement et de **Fana**, **Mab** et **Yong** (de l'ISSEG) qui l'utilisent à l'occasion.

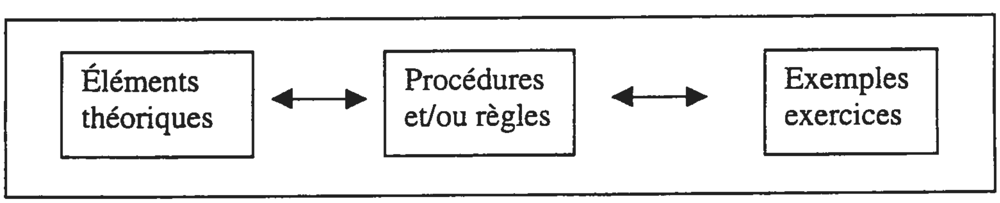


Figure 29: Schéma d'élaboration/organisation des séquences, sanc contrôle du sens

Ces formés donnent des définitions nécessaires, indiquent parfois la procédure de modélisation ou de calcul qu'ils exécutent sur un exemple; ils donnent ensuite des exercices à faire par les élèves. Chez les 4 formés de l'UGANC, le schéma se répète pour les notions plus théoriques (monômes, binômes, etc.) et les séquences se terminent par des exercices d'application. Ces formés n'ont pas d'intention explicite d'intégration des connaissances: ils n'en formulent pas pour donner du sens à la modélisation. Du point de vue de l'élève, les conventions et les règles qui sont énoncées sont considérées vraies par l'autorité du formé. Or, nous enseigne Henderson (1996, p. xviii), «you should not accept anything just because (...) some authority says it's good. Insist on understanding (or seeing) why it is true or what it means for you. Pay attention to your deep experience of these meanings». Le questionnement prévu par le formé permet certes l'enchaînement des idées, mais il ne favorise pas le «deep experience of these meanings» comme l'atteste l'extrait de **Fana** ci-dessous:

Extrait de Fana: addition et soustraction de monômes (planification, épisode 3, séquence 1)

Question: *Qu'est-ce que des monômes semblables?*
Réponse: Des monômes formés des mêmes variables.
Question: *Donne-moi deux exemples*
Réponse: 2x et 3x sont des monômes semblables; 5y et 2y aussi
Question: *Est-ce que x^2y et $3xy^2$ sont des monômes semblables?*
Réponse: Oui
Question: *Pourquoi sont-ils semblables?*
Réponse: Les deux monômes sont formés des mêmes variables x et y.
[...]
Exemples avec des binômes et des trinômes
Fana: «Pour additionner ou soustraire des monômes semblables, il suffit d'additionner ou de soustraire les coefficients. Exemple: 5x + 3x = 8x; les monômes 3x et 5y n'ayant pas la même variable, leur somme (3x + 5y) ou leur différence (3x - 5y) ne peut donc pas être réduite. Qu'en est-il de 5a + 7a? (8z + 4) + (3z + 7)? 7x + 2y - 8x? -8b -4b - (-b)?».

L'autorité et la prescription du formé tenant lieu de validation du modèle, cette validation se situe à l'extérieur du schéma d'organisation. À ce niveau, la réalisation de la séquence correspond à ce que le formé veut que ses élèves prennent en note pour garder en mémoire.

Le deuxième schéma (figure 30), celui de 15 formés de l'ISSEG, se caractérise par une activité de départ qui situe les élèves dans un contexte d'exploration, et qui vise à donner du sens et à faire participer les élèves aux activités de modélisation. Si, dans le premier schéma, il arrive qu'un exemple précède l'énoncé de la procédure ou de la règle de calcul, dans le deuxième schéma, la place qu'occupe l'activité exploratoire est beaucoup plus grande. L'activité de modélisation ne se résume pas à montrer aux élèves quoi faire, mais elle comporte implicitement une part d'explication des fondements et, dans ce sens, elle a un potentiel de preuve, elle est porteuse de validation.

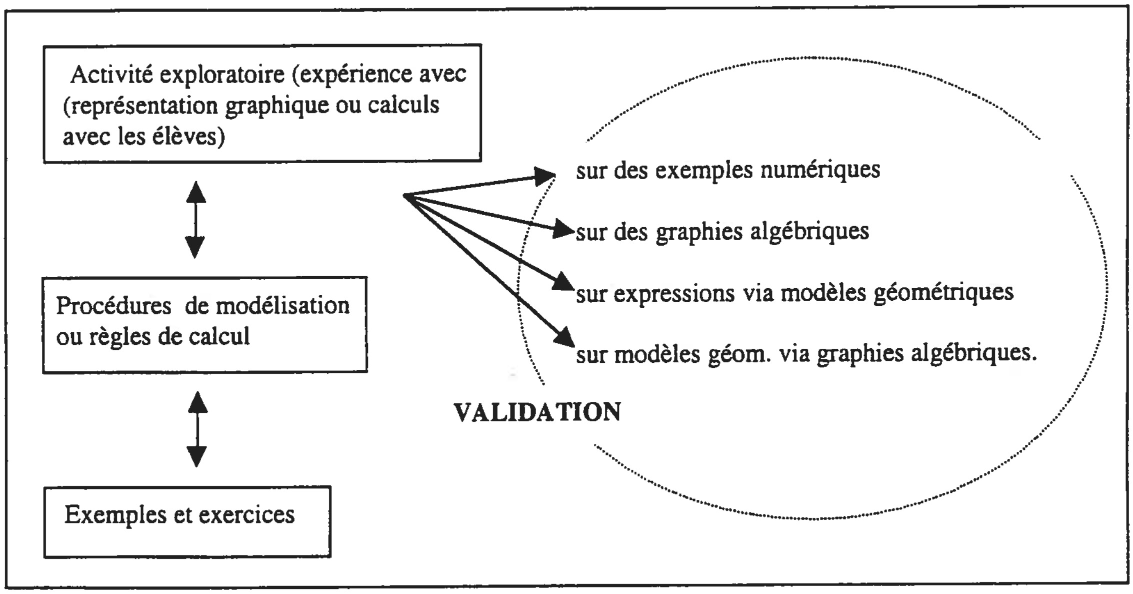


Figure 30: Schéma d'élaboration/organisation des séquences, avec étapes de contrôle du sens

L'activité exploratoire se fait à partir d'exemples numériques (**Marc**, **Samp**, **Toya**), de graphies algébriques de polynômes (**Alfa**, **Diak**, **Frank**), de graphies algébriques via modèles géométriques (**Frank**, **Alfa**, **Penda**, **Réotra**), de modèles géométriques via graphies algébriques (**Mady**, **Penda**, **Moh**). **Marc**, **Samp** et **Toya** utilisent des exemples numériques lorsqu'ils introduisent la loi des exposants pour la multiplication des monômes. Ils se basent sur la définition d'exposant pour dégager la loi des exposants à partir d'exemples numériques ($x^2 . x^3$) = (x . x)(x . x . x) = x^5); puis ils institutionnalisent: «*(...) Nous pouvons donc retenir que pour multiplier les monômes de même base, on additionne les exposants de base identique*». Ils donnent d'autres exemples et passent au modèle algébrique (formalisme): «*(...) À présent que vous êtes des experts, dites-moi à quoi est égal x^3 x x^4 [...] (Élève: x^7). Qu'as-tu fait?* (Élève: Je décompose les deux facteurs en appliquant la définition: x . x . x . x . x . x . x et je compte les x». D'autres exemples participent à la validation de la loi d'exposant en amenant les élèves à réaliser que le principe de décomposition peut donner du sens à la règle et même la prouver.

3.6 Proféduralisation/composition

Dans leurs conceptions et réalisations des séquences didactiques, **Mady**, **Penda** et **Moh** utilisent des formes géométriques et des tuiles algébriques pour supporter le travail sur les graphies algébriques des IR. **Penda** utilise les carrés unitaires et les bandes rectangulaires. Elles les dessine au tableau en notant leur signification et en précisant que *«les carrés sont des unités et les bandes rectangulaires représentent le nombre x»*. Elle insiste sur la convention de couleur.

L'extrait ci-dessous montre le déroulement de la séquence tel que prévu en classe.

Extrait de Penda: addition de binômes (planification et réalisation de la séquence)

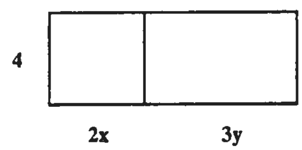
À l'aide des carrés unitaires et des bandes rectangulaires, je représente l'addition suivante:

Je demande à un élève de venir effectuer cette addition et de représenter la somme à l'aide de ces rectangles et carrés. Si l'élève a de la difficulté à représenter la somme, je verbaliserai l'addition de la façon suivante: tu as 4 bandes rectangulaires et 5 carrés unitaires auxquels tu ajoutes 2 bandes rectangulaires et 3 carrés unitaires. Combien as-tu de bandes rectangulaires au total? Combien as-tu de carrés unitaires au total?
J'inviterai un autre élève à indiquer, en-dessous des sous-ensembles de rectangles et de carrés, l'expression littérale correspondant à chaque terme, y compris la somme. Je lui demanderai d'écrire au tableau l'égalité qu'il vient de compléter: $((4x + 5)+(2x + 3) = 6x + 8)$.

C'est à la suite de plusieurs exercices avec les formes géométriques que **Mady**, **Penda** et **Moh** demandent aux élèves de dégager la règle. Les élèves peuvent ainsi compter les bandes rectangulaires et les carrés unitaires; ils peuvent trouver la règle en constatant que pour passer de l'expression de départ à la réponse, il faut additionner 4 et 2 puis 5 et 3. Ils peuvent réfléchir sur les graphies algébriques sans faire appel aux propriétés et le modèle géométrique ne leur aura servi qu'à trouver la réponse. C'est dire que les activités réalisées avec les formes géométriques ne suffisent pas complètement à formuler la règle puisque celle-ci doit être énoncée indépendamment de ces formes. **Penda** anticipe les réponses qui «collent» au modèle géométrique: *«on additionne les bandes rectangulaires ensemble et les carrés unitaires ensemble»*. Elle est consciente que le passage du géométrique à l'algébrique nécessite une attention particulière. Toutefois, le passage se limite à la représentation et à la traduction des termes du début et de la somme qui résulte de l'assemblage des formes respectives, alors qu'il aurait pu concerner aussi les étapes intermédiaires: $[(4x + 5) + (2x + 3) = (4x + 2x) + (5 + 3) = (4 + 2)x + 8 = 6x + 8]$.

Cette procéduralisation/composition cache un aspect négatif. En effet, même s'il est important de travailler avec les tuiles et les formes géométriques, nous pensons que **Penda** court le risque contrôlé de substitution d'objet: apprendre aux élèves à additionner les formes plutôt que de les inviter à travailler algébriquement. **Penda** risque aussi de ne pas se rendre compte qu'un tel modèle peut être perçu par l'élève comme un ensemble indifférencié de symboles. L'impression que donne de tels modèles (dans lesquels les systèmes de symboles et de conventions ne semblent pas justifier une explicitation) est superficielle et trompeuse. Cette procéduralisation/composition dénote l'intention manifeste de **Penda** de fournir un modèle qu'elle suppose plus «concret» et plus accessible. Conséquence involontaire d'une telle stratégie: les élèves risquent d'adopter une approche littérale, non pertinente pour interpréter un tel modèle. Une lecture littérale, dans laquelle la disposition spatiale des symboles et leurs liens sont considérés comme décrivant directement la réalité, risque d'engendrer une base inappropriée pour un traitement ultérieur. **Penda** doit apprendre à aller au-delà des aspects perceptifs superficiels d'ordre visio-spatial du modèle géométrique pour prendre en compte le système de symboles et de conventions qui constitue le cadre sous-jacent.

Quant à **Mady**, il associe la multiplication d'un binôme par une constante au modèle graphique suivant:



Mady: Quel est l'aire totale?
Élève: 8x + 12y
Mady: Comment as-tu trouvé cela?
Élève: J'ai d'abord trouvé l'aire du petit rectangle (4 x 2x), puis celle de l'autre rectangle (4 x 3y).

Mady fait réaliser de la même manière d'autres activités et fait énoncer la règle en l'associant explicitement à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition: «*pour multiplier un polynôme, on multiplie chacun de ses monômes, c'est-à-dire chacune de ses parties*». Les élèves prennent en note la règle avec deux exemples qu'ils effectuent sans support géométrique cette fois. **Mady** amène ainsi les élèves à argumenter en référence au modèle, au contexte d'aires de surface. On trouve dans une telle situation de modélisation un potentiel de validation.

3.7 Schémas de validation

Nous trouvons, d'une part, des séquences où une validation s'appuie sur les tuiles, les formes géométriques et le matériel (feuilles de carton, paire de ciseaux, etc.) - c'est le cas de **Dane** (UGANC), de **Fadak**, **Alex**, **Pagui** et de bien d'autres formés de l'ISSEG. D'autre part, nous trouvons des séquences où une validation est prévue après la procédure et qui concerne les productions de modèles des élèves - c'est le cas de **Diak**, **Kandas**,

Kémo, **Penda**, **Samp**, **Tomy** (ISSEG) et de presque tous les sujets de l'UGANC. Dans le premier cas, la validation des modèles est implicite; dans le second cas, elle est souvent annoncée. En outre, dans le premier cas, l'objectif est clair: donner du sens aux IR; dans le second cas, l'objectif est moins clair. Le premier schéma (figure 31) montre le travail parallèle entre les deux domaines d'activités.

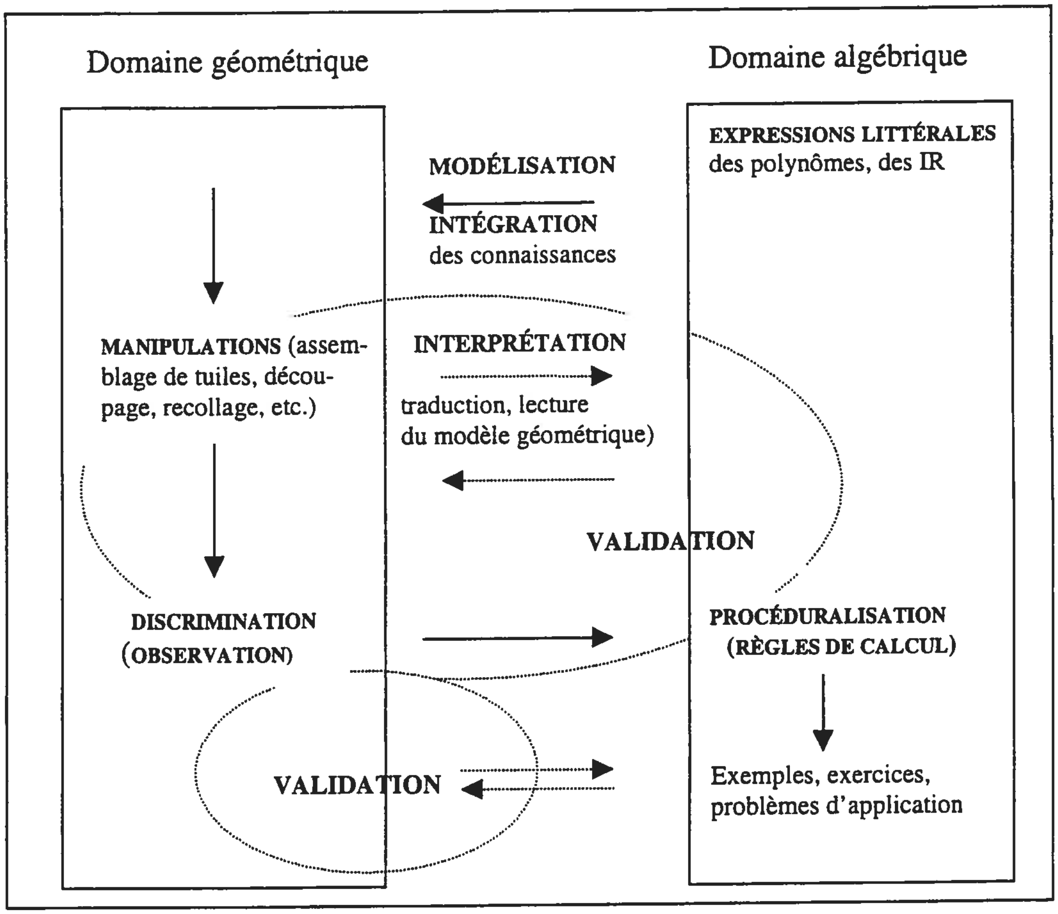


Figure 31: Schéma de validation des modèles des IR, via graphies algébriques

Certaines activités portent directement sur la construction de modèles tandis que d'autres sont réalisées indirectement sur les graphies algébriques des polynômes ou des IR. Dans les leçons de **Penda**, sont représentées les expressions littérales des polynômes et des IR; on y effectue des manipulations des tuiles et des observations à partir desquelles on déduit les procédures ou des règles de manipulation des graphies algébriques des IR. Ainsi, la validation des modèles prend entièrement place dans l'interconnexion qu'entretiennent les deux domaines d'activités. Une fois les procédures et les règles formulées, **Penda** les fait appliquer à d'autres exemples ou exercices avec ou sans recours aux tuiles ni aux formes géométriques. Ces exemples et exercices contribuent à renforcer et à raffiner la compréhension de la règle.

Dans le cas de **Frank**, la manipulation des graphies des IR se fait via la modélisation. Toutefois, les deux domaines d'activités n'entretiennent pas le même type de rapport. Dans le cas de **Penda**, la modélisation se fait en même temps que le jeu d'écritures symboliques. C'est ce que nous avons schématisé dans la figure 31 ci-dessus. Dans le cas de **Frank**, le modèle représente des mesures de longueur ou d'aire qui sont associées aux tuiles. Les deux domaines d'activités sont plus connexes, plus rapprochés. Le transfert entre la modélisation et l'activité symbolique est plus immédiat; les phases d'interprétation et de traduction sont moins nécessaires. C'est ce que nous schématisons dans la figure ci-dessous (figure 32).

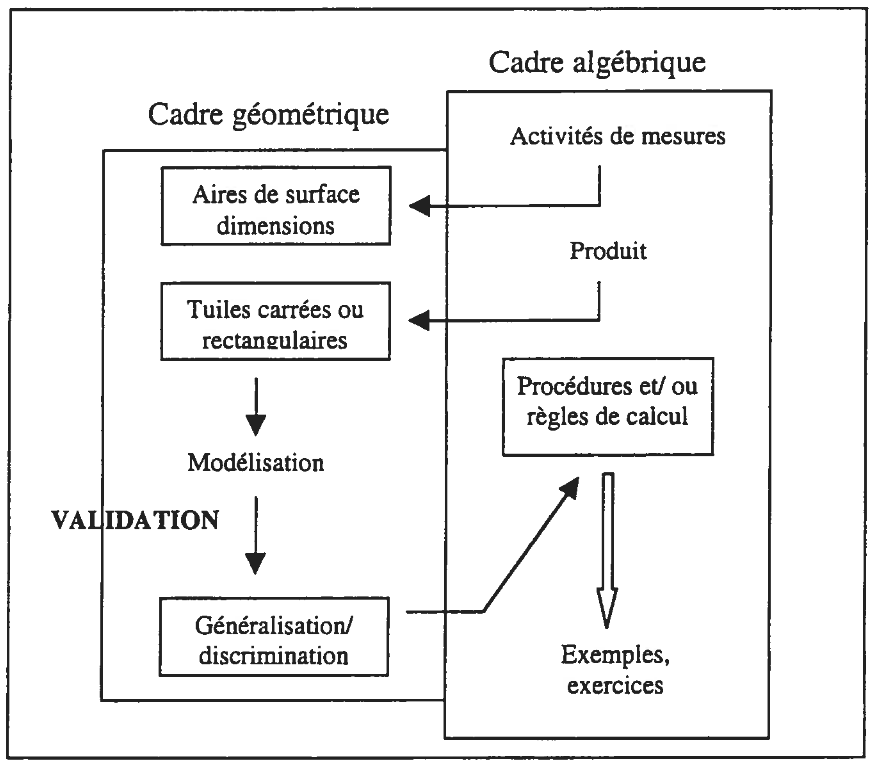


Figure 32: Schéma de validation des modèles à l'aide de tuiles et de formes géométriques

Les réalisations didactiques des formés de l'ISSEG sont de cette tendance. Le contexte géométrique n'est pas le seul registre où apparaissent des grandeurs, mais c'est le cadre que les formés de l'ISSEG ont privilégié pour faire intégrer les connaissances, même si bon nombre d'entre eux ont fait produire des modèles «à main levée» avec peu ou pas de rapport avec les grandeurs en jeu. La plupart des formés de l'UGANG ont, quant à eux, généralisé les propriétés des opérations à partir des exemples numériques, généralisation qui s'appuie sur l'expérience des nombres et des opérations acquise en 7ᵉ et 8ᵉ années.

Chez la grande majorité des formés (19 sur 27), nous retrouvons l'utilisation de contextes avec des formes géométriques et des tuiles. Ceux qui l'utilisent très peu (**Kant**, **Kémo**, **Lika**) s'en servent à la fin de la leçon comme problèmes d'application. Le contexte avec des grandeurs relatives aux tuiles et aux formes géométriques permet d'orienter l'activité en donnant, par exemple, un sens au découpage et aux décompositions algébriques (assemblage de tuiles par blocs correspondant aux termes du développement d'un carré parfait ou mise en évidence des facteurs) comme nous l'avons vu chez **Diak**, **Fadak**, **Frank** et bien d'autres formés. La règle découle plus directement du raisonnement dans le contexte, comme chez **Frank**, dans le cas de la multiplication d'un binôme par un monôme, où l'aire d'un domaine rectangulaire est déterminée par le calcul de la somme des aires de deux sous-domaines rectangulaires. Cette argumentation mène à l'écriture symbolique $4(2x + 3y) = 8x + 12y$ en lui donnant un sens.

Cette variation de contexte a conduit à une certaine généralisation/discrimination et a ainsi permis une décontextualisation. En effet, en travaillant avec les tuiles, les formés et leurs élèves ont pu se détacher du contexte «des nombres quelconques x et y» et ont enrichi la compréhension du contexte algébrique formel par un contexte géométrique flexible. Le raisonnement contextualisé a pu servir d'exemple générique. L'activité de modélisation a contribué à donner du sens aux IR lorsqu'on lui associe le travail de manipulation symbolique. De plus, l'activité cognitive a contribué au sens en permettant de déduire le modèle graphique ou la graphie algébrique par un raisonnement dans le contexte d'intégration des connaissances. Toutefois, ce sens dépend aussi de la participation des élèves aux activités de modélisation, participation qui est considérée ici comme un élément essentiel de l'intervention didactique.

3.8 Verbalisation/Objectivation

Les sujets de l'UGANC ont moins fréquemment amené leurs élèves à objectiver leurs apprentissages. En effet, le visionnement des premières séquences nous permet de voir **Ada**, **Kant** et **Mane** diriger les élèves en leur suggérant des pistes de réponse. On voit que les réponses que **Mane** obtient de l'élève (Sidi) ne reflètent pas la compréhension de ce dernier, puisque celui-ci n'a fait que reformuler ce que **Mane** lui a dit. Se fiant à la compréhension des élèves, les sujets de l'UGANC, à l'exception de **Alfa** et de **Dane**, n'ont pas fait d'objectivation. **Alfa** et **Dane** sont les seuls de l'UGANC à planifier une évaluation à la fin de leurs leçons. C'est surtout **Alfa** qui a amené ses élèves à faire le point sur leurs apprentissages à la fin de la troisième leçon. Du côté de l'ISSEG, le visionnement a montré que 15 formés sur 21 ont amené leurs élèves à objectiver leurs connaissances. Les six autres, qui ne font pas d'objectivation de fin de période, disent qu'ils préfèrent les rappels qu'ils font au début de la deuxième et de la troisième leçons aux objectivations, car comme le dit l'un d'entre eux (**Mady**), «*le décalage entre les deux séquences permet de mieux voir ce qui a été compris et ce qui n'a pas été compris par les élèves*».

3.9 Évaluation /Compréhension

Dans l'ensemble, 10 formés sur 27 ont organisé une évaluation pour vérifier la compréhension des élèves concernant les activités de modélisation. Il s'agit de ceux qui nous en ont fourni une preuve matérielle, qui nous ont montré les copies corrigées des exercices donnés en classe ou en devoir pour évaluer la compréhension des élèves. Les 4 de l'UGANC et les 13 de l'ISSEG qui n'ont pas procédé à l'évaluation formelle disent s'être contentés d'interroger au tableau ceux des élèves qui ne levaient pas la main pour répondre aux questions. Bon nombre de ces formés ont rapporté dans leur journal de bord que c'est la «justesse» des réponses aux questions qui leur fait dire que les élèves avaient bien compris. Mais le visionnement des séquences montre que **Fana**, **Mab**, **Mane** et **Moh** laissaient à peine les élèves seuls et reformulaient les questions de façon à ce que les élèves sachent quoi faire et comment faire. Ces derniers auraient-ils obtenu différents modèles des IR si leur «prof» n'était pas là pour en faciliter la construction?

Un autre groupe de formés ont évoqué l'attitude positive des élèves qui sont passés au tableau pour affirmer que ceux-ci avaient compris la leçon. Or, une réelle compréhension ne saurait se réduire à cette attitude ou au fait que les élèves ont été capables de résoudre des exercices. Les résultats obtenus par les élèves sont certes un indice de leur compréhension, mais ils ne suffisent pas à eux seuls pour faire le point sur cette compréhension. Les huit de l'ISSEG qui ont évalué la compréhension des élèves se sont donné comme moyens des exercices du manuel du Séminaire vérifiant les objectifs d'apprentissage des trois leçons, exercices qu'ils ont complétés par des activités de découpage et de recollage. Les élèves avaient accès aux feuilles de carton, à une paire de ciseaux, aux marqueurs (ou crayons de couleur) et à de la colle. Ils étaient invités à se servir des tuiles et des formes géométriques pour résoudre certains exercices sans intervention du professeur. **Fadak** nous confie, en entrevue, que «*la correction de ces travaux nous a permis de constater que la majorité des élèves avaient compris les IR à travers des modèles construits pendant les séquences d'enseignement*».

4. Analyse de quelques difficultés

Conne on s'y attendait, compte tenu du degré élevé de maîtrise nécessaire, il n'a pas été facile pour les formés de transformer l'ensemble des connaissances en jeu (ie; monômes, propriétés des opérations, démonstrations avec les tuiles) pour s'adapter aux évènements qui se sont présentés de même que pour rendre ces connaissances accessibles aux élèves. Il était difficile pour huit de ces sujets de modifier leur enseignement des IR de façon à rejoindre les capacités des élèves. Les règles de calcul sur les binômes tiennent aux propriétés des opérations, notamment de l'associativité et de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction. Les élèves de 9^e et 10^e années ont été préalablement exposés à ces propriétés en 8^e année. Bon nombre de formés (19 sur 27) les ont rappelées au début du cours et ont fait la connexion entre ces propriétés et les nouvelles règles; ils ont fait reconnaître la nécessité d'utiliser ces règles. Les propriétés sur lesquelles reposent les IR sont explicitement peu présentées par les huit autres formés pour lesquels les règles d'addition, de multiplication et de factorisation des polynômes semblent fondées bien plus sur un constat établi à partir du résultat obtenu que sur les propriétés des opérations. En effet, le travail sur ces propriétés ne semble pas faire l'objet d'une préparation pertinente dans leur planification des leçons sur les IR. Dans les planifications, la commutativité et l'associativité de l'addition ou de la multiplication sont pratiquement absentes chez ces sujets.

Dans leur planification, **Ada**, **Dane** et **Laye** de l'UGANC insistent sur la distributivité, celle-ci tenant lieu de procédure comme le montre l'extrait suivant:

<u>Extrait de Laye: multiplication d'un binôme par une constante (planification)</u>

> Je demanderai aux élèves de me dire comment ils vont effectuer la multiplication suivante: $2(3x + 4)$. Je m'attends à ce qu'ils utilisent la propriété de distributivité; je veillerai à ce qu'ils indiquent les étapes avec les flèches ou des signes comme suit: $2 \times (3x + 4)$.
> Ils pourront ensuite écrire ainsi $2 \times 3x + 2 \times 4 = 6x + 8$.

Avec une telle planification, **Laye** ne formule pas l'intention de faire découvrir des règles ou de les fonder, comme l'ont fait les formés de l'ISSEG; il donne directement la règle qui est suivie d'exemples et d'exercices. Mais dans la deuxième séquence, après avoir analysé la première leçon, il opte pour une démarche qui dérive de sa volonté de donner du sens à la distributivité. Il demande aux élèves de calculer le périmètre d'un domaine qui a la forme d'un triangle équilatéral et dont un côté mesure $2x + 3$. Mais ce changement n'a pas contribué pour autant à faire sentir la nécessité de la règle. Les élèves ont réagi de différentes façons: certains ont déterminé le périmètre du domaine en effectuant l'addition répétée $(2x + 3) + (2x + 3) + (2x + 3)$ et ont trouvé $6x + 9$; d'autres l'ont trouvé en multipliant (2x + 3) par 3. **Laye** est intervenu pour faire remarquer que 3 x (2x + 3) est bien égal à 6x + 9, mais que cela ne justifie pas le fait que 3 x (2x + 3) égale 3 x 2x + 3 x 3, égalité pour laquelle on peut construire un modèle géométrique. **Laye** a fini par utiliser ce modèle pour trouver un résultat à partir duquel il a pu faire déduire la règle, par comparaison. Nous avons observé ce comportement chez presque tous les formés de l'UGANC qui ont mis davantage l'accent sur la réponse que sur la démarche pour y arriver.

Nous en retenons que la mise en évidence des propriétés, notamment la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction, ne fait pas toujours l'objet d'une planification et qu'on en observe peu d'utilisation en classe. Les formés ne font pas transférer les propriétés des opérations sur les nombres sur les binômes et les polynômes. Le traitement des règles en est presque indépendant. La grande difficulté chez 9 des formés de notre échantillon, dont trois de l'ISSEG (**Fana**, **Kandas** et **Mab**), est que, dans la consignation d'information, le sens tient parfois de l'arbitraire. Ces formés ont donné des «consignes» à propos des formes géométriques au lieu de négocier des «conventions» d'usage de ces formes avec les élèves. Pourtant, dans l'introduction de leur plan de leçons, ils expriment leur intention de «*faire découvrir les tuiles, les formes et les règles de manipulation par les élèves*».

Le groupe de l'UGANG et cinq formés de l'ISSEG ont assumé que les propriétés sont connues des élèves, que leur objectif est d'aboutir aux règles qui fondent les IR et que cet objectif n'exige pas un travail supplémentaire sur les propriétés encore moins une intention de valider les IR à partir de ces propriétés. Selon eux, les propriétés ont déjà fait l'objet de leçons dispensées en 7e et 8e années. Les séquences qui font appel aux opérations et à leurs propriétés ne se situent donc pas dans le prolongement de l'enseignement antérieurement dispensé, mais se donnent en parallèle avec un objectif plutôt d'efficacité (en termes de sens et de compréhension). Ainsi, fait noter **Diak**, «*Nous travaillons davantage sur la distributivité parce qu'elle correspond à une action [une transformation] sur les expressions algébriques; elle ne contribue pas ainsi à plus de sens, mais à plus d'efficacité*». Certes, l'activité de modélisation permet ici de donner du sens aux règles; mais elle relève de l'intention du formé d'assurer une certaine vraisemblance et non une preuve. Les formés de ce groupe exploitent très peu le potentiel de preuve. En effet, pour favoriser l'activité de validation des modèles produits, le formé doit rompre un moment avec son objectif d'introduire à la procéduralisation, qu'il remette ce processus en question et qu'il laisse plus d'initiatives aux élèves, ce que peu de formés de ce groupe ont réussi à faire.

La deuxième grande difficulté tient à une participation réduite des élèves. Même chez certains formés de l'ISSEG, comme **Kant** et **Kémo**, nous constatons qu'il y a peu de participation active des élèves. Les activités qui conduisent à l'évidence graphique n'induisent pas les élèves à un véritable investissement. À l'exception de **Ada** et de **Dane**, les formés de l'UGANC ont eu de la difficulté à dévoluer les activités de modélisation aux élèves. Les observations vidéo nous permettent de constater que ceux des formés qui questionnent les élèves par moments ont tendance à «révéler» les réponses. Par ailleurs, l'analyse des entrevues, des verbalisations et des journaux de bord nous permet de dire que ces difficultés sont dues au fait que ces formés interprètent le contrat didactique en termes d'obligation pour l'enseignant de montrer à l'élève comment faire, à la non-prise en compte immédiate des stratégies de procéduralisation/composition des élèves et à leur inclination à guider ces derniers vers la découverte des règles le plus vite possible.

La troisième difficulté a trait à l'absence de questionnement de validation des modèles produits. En effet, l'analyse des traces écrites et des observations nous permet de constater que, aussi bien dans la planification que dans la réalisation des séquences didactiques, peu de situations sont mises à profit pour discuter de la validité des modèles, de leur plausibilité ou de leur pertinence. Bon nombre de formés de l'UGANC présentent des situations qu'ils ont conçues dans le but de mener directement les élèves à la procéduralisation/composition. Les élèves ont peu d'opportunités de questionner, voire remettre en question, les modèles proposés et les voies empruntées pour produire ces modèles. Il arrive aussi qu'ils se sentent démunis devant la gamme de situations de modélisation et qu'ils aient de la «misère» à se représenter les activités à réaliser.

Nous notons toutefois des améliorations d'une séquence à l'autre chez presque tous les formés. En effet, **Dane** passe d'une planification sans souci de validation du modèle à l'utilisation du contexte géométrique avec pour toile de fond les tuiles servant à donner du sens aux IR. De même, **Samp** passe des problèmes artificiels et peu pertinents aux IR à des problèmes de découpage et de recollage des feuilles de carton où le filet algébrique et l'outil géométrique sont également appropriés et sollicités. **Laye** et **Kandas** ont fini par comprendre que donner du sens aux IR et les faire comprendre veulent aussi dire en appeler à la nécessité mathématique sans pour autant verser dans le formalisme ésotérique. La plupart des formés, en difficulté au début de leur cours, ont fini par réaliser que l'intention de donner du sens aux IR doit rejoindre l'objectif de développer le sens des IR par des activités de modélisation dans lesquelles les élèves doivent être engagés et encouragés à intégrer leurs connaissances, et aller plus loin, au-delà du seul cadre algébrique habituel.

Les séquences didactiques du groupe de l'UGANG se caractérisent par l'enseignement des concepts constitutifs des IR, des opérations et des propriétés des opérations sur les binômes; elles comprennent une part importante d'institutionnalisation et de consolidation (exercices d'investissement). Par contre, les séquences didactiques du groupe de l'ISSEG consistent en activités de modélisation et d'intégration des connaissances valorisant les processus de généralisation/discrimination. Les deux groupes ont en commun la propension à prévaloir les processus de procéduralisation/composition. Alors que dans presque toutes les séquences du groupe de l'UGANC les élèves s'affairent à noter dans leur cahier les règles trouvées et des exercices qui illustrent les procédures, dans les séquences du groupe de l'ISSEG les élèves occupent une plus grande place dans la construction et la validation des modèles, la validation se faisant après que les élèves aient eux-mêmes construit les modèles ou énoncé les règles, et non avant.

Les difficultés ci-dessus rapportées témoignent de l'apprentissage, de la construction et de l'intégration des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2). Elles ne sauraient être interprétées comme une limitation des effets de l'ingénierie de formation; elles indiquent, au contraire, qu'un travail d'élaboration de ces savoirs est en cours. Ces difficultés donnent la mesure de l'importance de la formation des futurs enseignants à l'intégratrion des connaissances en ressortant les effets négatifs du cloisonnement des champs conceptuels et des formes d'enseignement. Certes, les formés n'arrivent pas tous là où le formateur souhaiterait les trouver après le Séminaire et l'ingénierie. Mais on ne peut en conclure à l'échec de ceux des formés qui n'y sont pas arrivés, encore moins à l'échec de leur formation. En effet, si l'on considère plus précisément d'où ils partent et où ils arrivent et si on analyse leur parcours, on trouve des progrès là où certains concluraient trop vite à des non-réussites, peut-être parce qu'ils ne s'attendaient qu'à une seule façon de construire les connaissances sur les IR et à une seule ligne d'arrivée.

Les difficultés ci-dessus évoquées constituent un signal d'alerte pour la formation de futurs enseignants à la DDM. Leur franchissement apparaît, implicitement, comme une retombée du dispositif de formation proposé. L'ampleur de ces difficultés souligne la nécessité de repenser l'enseignement, voire la formation à l'enseignement, en termes de ruptures et de mettre en œuvre des ingénieries de formation centrées sur l'analyse des erreurs et des difficultés que les futurs enseignants rencontrent dans l'intégration de leurs connaissances. Développer de nouvelles compétences professionnelles chez les futurs enseignant nécessite, non pas de leur injecter des doses de savoir S2, mais d'élaborer de véritables dispositifs de formation qui prennent en compte leurs difficultés ainsi que les obstacles à la modification de leurs pratiques d'enseignement. Il leur faut donc apprendre à gérer dans l'enseignement à la fois la stabilisation des savoirs S1 et S2 et leur déstabilisation. Comme le suggère Vergnaud (2001, p. 9), «il faut déstabiliser les élèves [mais aussi les futurs enseignants]; c'est le moyen didactique habituel pour provoquer la découverte ou la compréhension d'un concept ou d'un raisonnement nouveau».

L'objectif principal de notre dispositif consiste à réunir les conditions favorables au dépassement des difficultés ci-dessus rapportées, en proposant des activités didactiques incitant les futurs enseignants à se confronter à ces difficultés de façon à construire des savoirs S2 et S3. Dans un premier temps, le Séminaire donne aux futurs enseignants l'occasion d'amplifier le champ d'étude et d'élargir, plus que ne l'a fait le cours qu'ils ont reçu au collège, le domaine d'application des IR et, par là, d'en améliorer leur compréhension. Il ne s'agit pas d'un dispositif de remédiation, mais plutôt d'une ingénierie de formation à l'intégration des connaissances et d'une articulation des savoirs S2 et S3. Cet outil d'enseignement/apprentissage, proposant aux futurs enseignants de résoudre des problèmes dans des situations non familières et dans divers contextes, permet aux sujets d'effectuer des comparaisons et de trier des connaissances réinvestissables, ce que l'enseignement traditionnel n'a pas réussi à faire. Un des intérêts de la présente étude, c'est de montrer que, si le formé prend en compte plusieurs champs conceptuels et divers contextes qui donnent du sens aux IR, il se donne les moyens pour surmonter les difficultés ci-dessus évoquées. L'intégration des connaissances pourrait ainsi s'avérer efficace, sans «brusquer» les élèves; le futur enseignant pourrait ainsi prendre l'habitude de modifier progressivement le champ de validité de ses connaissances; il lui serait facile de changer de représentation, au lieu de se sécuriser en cherchant à confirmer ce qu'il sait déjà.

Appendice 1

Résultats du questionnaire sur les conceptions des futurs enseignants

La documentation guinéenne sur la conception des enseignants étant inexistante (Touré, 1997), nous avons décidé d'élaborer et d'administrer un questionnaire comprenant deux échelles d'attitude: l'un sur le comportement du sujet en tant que futur enseignant dans la situation réelle d'enseignement, l'autre sur son comportement en tant que futur enseignant dans la situation idéale. Dans cette dernière, le futur enseignant est supposé disposer de toutes les ressources nécessaires pour enseigner ce qu'il veut à un groupe d'élèves, tous désireux d'apprendre; il peut même décider du nombre d'élèves qu'il aimerait avoir dans sa classe. C'est ainsi que nous avons formulé des énoncés, en l'invitant à dire s'il fait telle ou telle chose, s'il pratique une méthode suggérée ou non.

Nous avons construit nos échelles d'attitude suivant la méthode de Likert en vue de répartir les réponses en groupes distincts. L'univers de contenu de ces échelles varie d'une conception des mathématiques perçues comme un système formel fixe, soumis à des règles rigides et immuables que l'élève doit «maîtriser» (mémoriser s'entend!), à une conception des mathématiques comme une science dynamique, incluant la compréhension des phénomènes mathématiques plutôt qu'une application mécanique des règles et des formules. Nous sommes bien conscient du fait que les notes chiffrées que ces échelles mettent à notre disposition ne sont que des approximations et qu'il est peut-être hasardeux de chercher à établir une relation d'ordre entre les futurs enseignants. Nous voulons plutôt connaître dans quelle proportion différents groupes sont favorables ou défavorables aux activités proposées et à leur utilisation effective.

1 L'administration et la correction du questionnaire

Le questionnaire a été administré à 39 futurs enseignants dont 16 sujets de l'UGANC le 19 janvier 2000 et 23 de l'ISSEG le 23 Février 2000. Nous avons reçu 27 réponses au questionnaire sur les 39 attendues, ce qui est une proportion convenable. Toutefois, en faisant le compte des questionnaires reçus et dûment complétés à l'UGANC, nous reconnaissons que nous n'y avons pas connu assez d'engagement, à cause probablement de la période de la rentrée universitaire qui débutait sur fond de grève. Nous pensons que le problème posé par la nature et la «complexité» de notre dispositif expérimental avec les sujets de l'UGANC qui se prêtaient pour la première fois à ce genre d'exercice, ainsi que le temps considérable requis pour participer adéquatement à toutes les phases de l'ingénierie furent les principaux facteurs qui ont engendré un aussi faible nombre de répondants.

2 Résultats du questionnaire

Nous présentons et interprétons les résultats du questionnaire en fonction de l'opinion générale des répondants ainsi que par rapport aux variables suivantes: formation mathématique, formation pédagogique, formation en didactique des mathématiques, expérience de l'enseignement des mathématiques.

2.1 Opinion générale des futurs enseignants de l'UGANC et de l'ISSEG

Comme l'indique le tableau ci-dessous (tableau 9), la moyenne obtenue pour chacune des échelles (5,95 et 5,57 sur 10 respectivement pour les échelles O et I) est suffisamment élevée pour nous permettre de dire que les répondants manifestent une opinion légèrement favorable aux activités didactiques proposées et à leur utilisation dans l'enseignement des mathématiques.

Tableau 9: Moyenne générale des futurs enseignants pour les échelles O et I, écart-type, et indice de fidélité[10] (R) pour 27 sujets.

Échelle	Moyenne	Écart-type	Indice de fidélité
O	5,95	3,1	0,88
I	5,57	4,1	0,92

L'indice de fidélité nous révèle, jusqu'à un certain point, la partie de la variance attribuable aux comportements (ou apprentissages) réels des futurs enseignants et la partie de la variance attribuable aux erreurs de mesure qui se seraient glissées dans les résultats recueillis. Notons que l'indice de fidélité est très élevé (au-dessus de 0,80), ce qui nous permet d'interpréter la fidélité comme excellente pour chacune des deux échelles. Le tableau 10 reproduit la moyenne et l'écart-type pour chaque item des échelles O et I.

Tableau 10: Distribution des moyennes et des écarts-types pour les items de l'échelle O et de l'échelle I pour27 sujets (cf. Annexe D, pp. xxxiv-xxxv).

Item	Échelle O		Item	Échelle I	
	Moyenne	Écart-type		Moyenne	Écart-type
1	4,00	0,26	13	3,07	0,50
2	7,13	0,26	21	7,07	0,26
3	7,33	0,24	15	6,00	0,49
4	5,00	0,50	23	5,27	0,47
5	6,40	0,44	17	6,13	0,32
6	6,80	0,39	22	6,67	0,26
7	6,13	0,39	20	6,13	0,41
8	5,67	0,26	19	7,20	0,36
9	7,60	0,32	18	4,87	0,50
10	7,20	0,00	16	4,87	0,48
11	1,93	0,00	14	4,00	0,50
12	6,20	0,41			

Nous avons placé en vis-à-vis, autant que faire se peut, les questions qui se correspondent au prétest et au post-tests (1-13, 2-21, 3-15, etc.).

[10] Nous avons calculé l'indice de fidélité (R) à l'aide la formule de Diederich: $\mathbf{R = 1 - [X(n - X)]/(n.S^2)}$, où X désigne la moyenne des résultats au test, n le nombre d'items dans le test et S^2 la variance des résultats obtenus au test entier. À 0,60 la fidélité est acceptable; au-dessus de 0,80 elle peut être interprétée comme excellente.

2.2 Formation mathématique

Les sujets de l'UGANC ont tous suivi les cours d'algèbre, d'analyse, de probabilités, de géométrie différentielle, de topologie, de mesure, d'analyse complexe et de programmation linéaire. Ceux de l'ISSEG ont reçu, en plus des cours susmentionnés, les cours de programmation dynamique, de processus stochastique, de calcul numérique. Certains d'entre eux ont, en outre, suivi les cours de thermodynamique, de mécanique rationnelle et de méthodes mathématiques appliquées à la physique. Le tableau ci-dessous (tableau 11) résume la comparaison entre les diverses formartions mathématiques.

Tableau 11: Comparaison entre les diverses formations mathématiques quant à la moyenne obtenue à l'échelle O.

Formation mathématique	N	Moyenne	Écart-type
Inférieure à MS (maths)	6	2,20	1,24
Maîtrise MS (Maths)	21	7,78	0,62

Notons que la formation mathématique des répondants ne semble pas influencer directement leur attitude à l'égard des mathématiques et des méthodes d'enseignement. Cependant, les chiffres du tableau ci-dessous (tableau 11) indiquent que les sujets de l'ISSEG ont une attitude légèrement plus favorable à l'égard des mathématiques que ceux de l'UGANC.

2.3 Formation pédagogique

Les sujets de l'UGANC n'ont suivi aucun cours de pédagogie; ils n'ont également reçu aucune formation en psychologie. Le tableau ci-dessous (tableau 12) montre que la plupart des sujets de l'ISSEG ont, quant à eux, reçu des cours de psychologie générale (18), de pédagogie générale (20) et de psychologie de l'enfant et de l'adulte (18). Certains d'entre eux ont même suivi un cours d'histoire et de philosophie de l'éducation (14).

Tableau 12: Comparaison entre les diverses formations en pédagogie quant à la moyenne obtenue à l'échelle O.

Institution	Formation pédagogique	N	Moyenne (%)	Écart-type
UGANC	Aucune	6/6	22	1,43
ISSEG	Pédagogie	20/21	74	0,46
	Psychologie	18/21	67	0,32
	Autres[11]	14/21	52	0,06

[11] Par «autres», il faut entendre des cours aussi divers que ceux de micro-enseignement, d'éducation à l'environnement, d'histoire et de philosophie de l'éducation, d'histoire et de l'épistémologie des mathématiques, d'évaluation, et de pratique professionnelle.

La formation pédagogique des futurs enseignants semble influencer quelque peu leur attitude à l'égard des mathématiques et des activités d'intégration. En effet, les écarts observés dans le tableau 10 ci-dessous pour la variable «formation pédagogique» sont plus accentués que ceux du tableau 9 précédent. Les sujets de l'UGANC (qui représentent 22 % de l'échantillon de futurs enseignants) n'ont reçu aucune formation pédagogique, contrairement à la presque totalité (20 sur 21) des sujets de l'ISSEG qui représentent 78 % de l'échantillon. Par ailleurs, seuls 18 des 21 sujets de l'ISSEG (soit 67 % de l'échantillon) ont suivi un cours de psychologie.

2.4 Expérience de l'enseignement

Bien que les réponses des divers groupes formés à partir des années d'expérience ne montrent aucune tendance générale, nous remarquons que les répondants de l'ISSEG qui ont plus de quatre ans d'expérience d'enseignement manifestent une attitude plus favorable que tous les autres groupes, tandis que ceux de l'UGANC (qui n'ont jamais enseigné dans un cadre formel) manifestent une attitude relativement moins favorable, comme en témoigne le tableau 13. Bien que les répondants ayant moins d'un an d'expérience soient plus nombreux, on remarque que plus de 55 % des sujets de notre échantillon ont au moins trois ans de pratique d'enseignement.

Tableau 13: Comparaison entre les groupes de répondants formés à partir de leurs années d'expérience dans l'enseignement quant à la moyenne obtenue à l'échelle O.

Expérience	N	Moyenne	Écart-type
1 an ou moins	10	3,7	0,45
2 ans	2	0,7	4,89
3 ans	3	1,1	4,08
4 ans	6	2,2	2,08
plus de 4 ans	6	2,2	2

Les deux groupes ont en commun les «cours de vacances» (l'équivalent québécois des cours d'été) et ceux de préparation aux différents examens (brevet d'études secondaires, baccalauréat 1ère et 2e parties, concours d'entrée à l'université) qu'ils ont dispensés de façon informelle aux différents candidats. Ces cours regroupent en moyenne six candidats pour une durée qui n'excède pas deux mois. Toutefois, la comparaison des réponses au questionnaire et les données du tableau 11 nous font dire que l'expérience d'enseignement ne semble pas affecter davantage l'attitude des répondants à l'égard des mathématiques et de leur enseignement.

2.5 Formation en didactique des mathématiques (DDM)

Les sujets de l'ISSEG qui ont déjà suivi au moins un cours de DDM semblent manifester une attitude trois fois plus favorable que ceux de l'UGANC qui n'en ont reçu aucun. La comparaison des moyennes de chaque groupe pour l'échelle O se trouve dans le tableau ci-dessous (tableau 14).

Tableau 14: Comparaison entre les futurs enseignants qui ont déjà suivi un cours de DDM et les autres quant à la moyenne obtenue à l'échelle O.

	Cours de DDM	
	ISSEG	UGANC
Nombre (N)	21	6
Moyenne	9,33	2,66
Écart-type	0,89	0,91

Toutefois, la différence des écarts-types des deux groupes n'est pas significative pour l'échelle O.

2.6 Intérêt pour la discussion en groupe

Le tableau 15 ci-dessous indique l'intérêt des futurs enseignants pour la discussion en petits groupes et le niveau de fréquence qu'ils déclarent utiliser à l'échelle O.

Tableau 15: Intérêt pour la discussion en petits groupes et comparaison entre les différents groupes de sujets selon cet intérêt quant à la moyenne obtenue à l'échelle O.

Futurs enseignants	«Je favorise la discussion en petits groupes». (item 2).		«J'assigne aux élèves la responsabilité de diriger les discussions» (item 4).		«J'organise les discussions dans lesquelles je m'implique activement» (item 8).	
	N	%	N	%	N	%
Presque toujours	3	11	3	10	6	22
Fréquemment	14	52	4	15	14	52
Quelque fois	8	30	8	30	5	18
Rarement	2	7	8	30	1	4
Jamais	0	0	4	15	1	4

Nous remarquons qu'une majorité (63 %) des sujets sont intéressés à la discussion en groupe. Le tableau 13 nous donne aussi une idée de la façon dont cet intérêt se traduit au niveau des attitudes des répondants. Ceux qui favorisent la discussion en petits groupes ("presque toujours" et "fréquemment") manifestent une attitude nettement favorable à son égard. Par contre, ceux qui se déclarent défavorables à la discussion en petits groupes ont une attitude indifférente, et ceux qui n'y sont pas intéressés du tout se situent au niveau de l'attitude défavorable.

Qu'en est-il dans la situation idéale d'enseignement? Les opinions des différents groupes sont très voisines de celles qui ont été émises pour l'enseignement réel, sauf que les moyennes obtenues sont légèrement supérieures à celles de l'échelle O, comme nous pouvons le constater dans le tableau ci-dessous (tableau 16).

Tableau 16: Comparaison entre les différents groupes de sujets selon leur intérêt pour la discussion en petits groupes quant à la moyenne obtenue à l'échelle I.

Futurs enseignants	"J'assigne aux élèves la responsabilité de diriger les discussions" (item 23)		"J'organise les discussions dans lesquelles je m'implique activement" (item 19)	
	N	%	N	%
Presque toujours	4	15	11	40
Fréquemment	5	19	5	19
Quelque fois	9	33	7	26
Rarement	3	11	3	11
Jamais	6	22	1	4

En comparant les positions des sujets par rapport à l'organisation des discussions dans lesquelles ils s'impliquent activement, on note un écart (de 15 %) entre leur déclaration sur leurs actions effectives (tableau 15) et ce qu'ils souhaiteraient faire dans un enseignement idéal (tableau 16). Cet écart paraît surprenant, mais rappelons que le questionnaire a été administré avant le Séminaire; on suppose qu'en le reprenant à la fin de l'ingénierie de formation, on peut constater une certaine évolution des conceptions. L'analyse des résultats globaux justifie largement cette hypothèse.

2.7 Intérêt pour les activités que les élèves réalisent eux-mêmes

Les futurs enseignants ne peuvent progresser que s'ils sont en mesure de pratiquer un travail de changement de cadre sur lequel le Séminaire a insisté (cf. Séminaire, pp. 164-179), d'expérimenter de façon personnelle les situations auxquelles ils sont confrontés et d'organiser leurs leçons autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes, comme le montre le tableau 17 ci-dessous.

Tableau 17: Pourcentage des réponses obtenues aux items relatifs aux activités que les élèves réalisent eux-mêmes.

Futurs enseignants	«J'organise la leçon autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes» (item 5).		«Je consacre une partie de l'exposé aux consignes relatives aux devoirs et aux activités que je dévolue aux élèves» (item 17).	
	N	%	N	%
Presque toujours (1)	9	33	2	7
Fréquemment (2)	8	30	11	41
Quelque fois (3)	3	11	11	41
Rarement	3	11	2	7
Jamais	4	15	1	4

Nous remarquons que 63%[12] des sujets sont intéressés à l'organisation de leurs leçons autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes, même si seulement 33%[13] d'entre eux déclarent s'y prêter presque toujours. Le tableau ci-dessous (tableau 18) montre de quelle façon les pourcentages des futurs enseignants de l'UGANC se comparent à ceux de l'ISSEG pour les réponses obtenues aux items 5 et 17.

Tableau 18: Comparaison en pourcentage entre les réponses des futurs enseignants de l'UGANC et de l'ISSEG aux items 5 et 17.

Institution	«J'organise la leçon autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes» (item 5)			«Je consacre une partie de l'exposé aux consignes relatives aux devoirs et activités que je dévolue ...» (item 17)		
	Presque toujours	Quelque fois	Jamais	Presque toujours	Quelque fois	Jamais
UGANC	0	11	11	3,7	7,4	0
ISSEG	33,3	0	3,7	3,7	33,3	3,7

Nous remarquons que 33 % des futurs enseignants de l'ISSEG sont intéressés à organiser leurs leçons autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes, contre 0 % des sujets de l'UGANC. Les chiffres du tableau 18 montrent aussi qu'un très faible pourcentage des futurs enseignants de l'ISSEG (3,7 %) ne sont pas intéressés à consacrer une partie de leurs leçons aux consignes relatives aux devoirs et aux activités qu'ils dévoluent à leurs élèves, contrairement à un pourcentage près de trois fois plus élevé pour les sujets de l'UGANC (11 %). Cet écart ne nous surprend pas, dans la mesure où, à ce stade (avant le Séminaire et l'ingénierie de formation) les sujets de l'UGANC n'ont reçu aucune formation pédagogique et n'ont que très peu d'expérience d'enseignement.

2.8 De l'organisation et de l'utilisation des activités d'intégration des connaissances algébriques et géométriques

Les items relatifs à ce sujet sont ainsi formulés:

Item 6: «J'utilise des situations d'intégration des connaissances algébriques et géométriques pour construire le sens».

Item 22: «J'organise la classe autour des activités d'intégration des connaissances algébriques et géométriques».

Le pourcentage des réponses obtenues se trouve dans le tableau 19 ci-dessous.

[12] Somme des pourcentages de (1) et de (2)
[13] Pourcentage de (1)

Tableau 19: Pourcentage des réponses relatives à l'organisation et à l'utilisation des activités d'intégration des connaissances.

Item	Presque toujours	Fréquemment	Quelque fois	Rarement	Jamais
6 22	11 % 22 %	52 % 33 %	19 % 37 %	11 % 8 %	7 % 0 %

Nous constatons que 63 % des sujets pensent à utiliser des situations d'intégration de connaissances dans leur enseignement, quand bien même seulement 55 % d'entre eux songent à organiser leur classe autour des activités qui favorisent une telle intégration. Il n'y a que 7 % de nos sujets qui disent ne jamais utiliser des situations d'intégration des connaissances, lorsqu'aucun sujet de l'échantillon ne songe à exclure l'organisation des activités permettant une telle intégration.

2.9 Méthodes jugées efficaces pour enseigner dans la situation idéale

Les résultats du choix de la méthode la plus efficace, parmi les onze suggérées aux 27 sujets, s'établissent comme suit dans le tableau ci-dessous (tableau 20).

Tableau 20: Pourcentage des résultats à propos de la méthode qui, de l'avis des répondants, est la plus efficace, parmi les onze proposées (cf. Appendice D, p. xxxv).

Méthodes suggérées	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Pourcentage	0	11	13	4	7	6	9	9	17	20	4

Notons que ce sont les méthodes J («organiser la classe autour des activités d'intégration des connaissances») et I («travail en petits groupes») qui sont les plus utilisées, suivies des méthodes C («exposé magistral avec au moins 15 minutes d'échange didactique) et B («leçon présentée avec l'aide d'un support audiovisuel»). Viennent, ensuite, dans le même ordre les méthodes G («discussions dans lesquelles l'enseignant s'implique») et H («activités de brainstorming»). Notons également que, de l'avis des répondants, l'utilisation d'une grande fraction du temps pour faire des démonstrations (méthode D) ou la dévolution aux élèves de l'organisation des discussions (méthode K) ne devraient pas être négligées. La méthode A («exposé magistral pour toute la durée de la leçon)») est ignorée de tous.

Les résultats à propos de la méthode qui, de l'avis des sujets de l'UGANC, est la plus efficace, parmi les onze suggérées, sont comparés avec ceux des répondants de l'ISSEG dans le tableau 21.

Tableau 21: Comparaison des résultats à propos de la méthode qui, de l'avis des répondants de l'UGANC et de l'ISSEG, est la plus efficace parmi les onze proposées.

UGANC			ISSEG		
Méthodes	Rang	Valeur relative	Méthodes	Rang	Valeur relative
C	1	4	J	1	11
I	2	3	I	2	6
E	3	2	B et G	3	5
B et G	4	1	H	4	4
			C	5	3

Nous constatons que la méthode C (exposé magistral avec au moins 15 minutes réservées aux questions des élèves) est le premier choix dans le groupe de l'UGANC alors que la méthode J (activités d'intégration des connaissances) est le premier choix du groupe de l'ISSEG. Les autres méthodes se répartissent un peu différemment. La convergence des opinions sur la méthode I, qui préconise de répartir les élèves en petits groupes autour de questions spécifiques, nous permet de dire que les sujets de notre échantillon semblent intéressés à recourir à la discussion en groupe.

D'une façon générale, les résultats obtenus au questionnaire montrent que les sujets manifestent une attitude favorable à l'intégration des connaissances algébriques et géométriques et à son utilisation dans l'enseignement. Quant à l'utilisation de ces activités dans les cours de mathématiques, les futurs enseignants de l'ISSEG y sont intéressés dans une proportion de 90%, alors que les sujets de l'UGANC le sont dans la proportion de 75%. Toutefois, les variables sexe et âge se sont révélées comme des facteurs n'ayant aucune importance sur les attitudes des répondants. Le fait que le questionnaire comporte des thèmes de nature didactique semble avoir influencé l'attitude des sujets de l'UGANC qui n'avaient jamais reçu un cours de didactique des mathématiques (DDM). Quant au cours de DDM suivi par près de 78% des répondants, il s'est révélé un facteur quelque peu déterminant.

Les résultats à propos de la méthode qui, de l'avis des répondants, est la plus efficace, parmi les onze qui sont suggérées, révèlent que la méthode J vient en première position avec un pourcentage relativement élevé (20 %) par rapport à la méthode I qui se classe deuxième (17 %). Puis viennent les méthode C et B avec respectivement 13 % et 11 % de faveur, suivies des méthodes G et H avec la même faveur de 9 %. En outre, on peut souligner que, de l'avis des répondants, le recours à D (utilisation de la plus grande fraction du temps pour faire des démonstrations) ou à K (assignation de la responsabilité aux élèves de diriger les discussions) ne doit pas être négligé.

La comparaison des résultats à propos de la méthode qui, de l'avis des répondants de l'ISSEG et de l'UGANC, est la plus efficace parmi les onze qui étaient suggérées, révèle une convergence d'opinion des deux groupes sur I. La convergence des opinions sur la méthode I, qui préconise de répartir les élèves en petits groupes autour de questions spécifiques, nous permet de dire que les futurs enseignants de notre échantillon semblent intéressés à recourir à la discussion en groupe. À propos des autres méthodes, elles se répartissent un peu différemment dans les deux groupes. Les méthodes B et G, qui préconisent respectivement l'utilisation d'un support audio-visuel et l'organisation des discussions dans lesquelles l'enseignant s'implique fortement, occupent le quatrième rang chez les sujets de l'UGANC, tandis qu'elles occupent le troisième rang chez les sujets de l'ISSEG.

La prise en compte des conceptions des futurs enseignants ne se réduit pas à la recherche des difficultés dont l'identification permet de définir des objectifs d'enseignement et d'apprentissage possibles; elle donne aussi au formateur la possibilité de formuler des hypothèses à partir de la confrontation des idées des futurs enseignants afin de les aider à remettre en cause leurs conceptions. Pour que ces conceptions puissent évoluer, le formateur (ici le chercheur) invite les futurs enseignants à les transformer à la fois avec le contenu du Séminaire et la dynamique de l'ingénierie didactique. Ce dispositif de formation favorise une confrontation avec le contenu du séminaire qui contredit les représentations initiales et une confrontation entre différentes conceptions des sujets. Ces confrontations devraient êtres favorables à une structuration des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2). Le champ sémantique relatif à la construction de ces savoirs fonctionne par l'intégration des éléments du Séminaire aux savoirs mathématiques (S1) déjà acquis par les sujets, ceux-ci s'ajustant, se réorganisant progressivement et permettant ainsi la construction du savoir d'expérience (S3).

Appendice 2

Richesse des sources d'informations et productivité des instruments de collecte de données

Rappelons que nous nous sommes fixé pour objectifs de vérifier l'efficacité de l'intégration des connaissances chez les futurs enseignants et d'évaluer les difficultés rencontrées par ceux-ci dans les activités de modélisation. Plusieurs objectifs spécifiques découlent de ces objectifs généraux dont, entre autres, l'exploration de l'impact d'une telle intégration pour une meilleure compréhension des IR et l'apport d'un éclairage sur les liens à tisser entre les cadres algébrique et géométrique dans la formation des futurs enseignants. Nous avons utilisé plusieurs instruments de collecte de données pour mieux ressortir la variété des stratégies rapportées ou observées pour chaque code thématique ainsi que les limites de ces instruments. Nous avons administré un prétest et un post-test aux séminaristes et avons recueilli les copies de leurs travaux; nous leur avons demandé de tenir régulièrement des journaux de bord; nous leur avons aussi demandé d'enregistrer une séance d'au moins une heure de pensée à voix haute (verbalisations). Nous avons filmé deux ou trois séquences didactiques par sujet. Nous les avons, finalement, fait participer à deux entrevues d'une heure et demie chacune. Chacune de ces sources peut être pauvre (P), moyennement pauvre (MP), moyenne (M), moyennement riche (MR) ou riche (R) pour nos futurs enseignants. Cette codification est, bien sûr, arbitraire, l'objectif étant de disposer d'un moyen pour discriminer la productivité des sources de collecte entre elles.

1 Traces écrites

Il s'agit des notes que les sujets ont prises lors du Séminaire, des brouillons des exercices remis au formateur et des copies des travaux du prétest et du post-test. Cette source s'est avérée moyennement pauvre pour l'analyse des processus cognitifs. Cela ne nous a pas surpris outre mesure puisque nous savions que les sujets n'avaient jamais été confrontés à de telles exigences avant de s'engager dans notre projet d'ingénierie. Dans l'ensemble, très peu d'entre eux (8 sur 27) ont pris des notes personnelles; très peu d'entre eux (7 sur 27) ont recopié les notes et les exemples que le formateur a écrits au tableau. La plupart d'entre eux (18 sur 27) n'ont traité que les exercices qui ont été donnés en devoir; peu d'entre eux (12 sur 27) les ont rédigés au propore pour les remettre au formateur; près de la moitié (13 sur 27) en ont fait le brouillon.

2 Journaux de bord

Les journaux de bord se sont avérés être une source de données moyennement riche pour l'étude des processus de planification, de consignation d'informations, du contrôle du sens et de régulation. Dans l'ensemble, ils nous ont permis de collecter des données consistantes sur les stratégies de procéduralisation/composition, de modélisation et d'élaboration/organisation. Par contre, ils nous ont peu renseigné sur les activités de validation des modèles produits, d'évaluation de la compréhension des élèves et des difficultés rencontrées; ils nous ont apporté peu d'informations sur les activités liées à la représentation et à l'environnement didactique, à la mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2). Cette source s'est avérée pauvre au sujet des stratégies de généralisation/discrimination et de prise de décisions.

Nous avons évité de donner des consignes claires sur ces éléments du modèle auxquels les formés ne sont pas familiers, de crainte de leur indiquer des pistes toutes faites. Les formés se sont accrochés à certains aspects plutôt qu'à d'autres; nous ne sommes donc pas surpris que les journaux diffèrent selon les formés. Nous qualifions globalement les journaux de bord reçus de source moyennement riche pour l'étude des processus cognitifs dans la mesure où ils nous donnent quelques informations sur ce qui se déroule dans la tête des formés en situation de planification et de réalisation des activités de modélisation et d'intégration. Dans la majorité des cas (19 sur 27), les sujets y ont consigné ce qu'ils ont cru avoir fait et qu'ils ont trouvé intéressant de noter.

3 Verbalisations

Les verbalisations se sont avérées être une source moyennement pauvre quant à l'étude des stratégies de planification, de représentation, de la gestion de l'environnement didactique, de la mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2). Elles ont été moyennement riches pour analyser les stratégies d'élaboration/organisation, de procéduralisation/composition, de régulation et du contrôle du sens. Cependant, elles ont été pauvres en ce qui concerne l'évaluation, la consignation d'information et la prise de décisions pour les formés de l'ISSEG, mais moyennes pour les formés de l'UGANC. On peut ici parler d'un effet de baisse de niveau de contraintes du contrat de formation pour le sous-groupe d'«experts de l'ISSEG; mais on peut envisager d'autres hypothèses explicatives. Cet écart peut s'expliquer par le fait que les formés de l'ISSEG, apparemment à l'aise par rapport à la tâche, ont eu moins besoin de se concentrer et d'activer ces processus. Pour ces formés, il a été plus difficile de verbaliser tout en se concentrant sur les activités de modélisation. À mesure que ces activités devenaient plus complexes, ces formés ont de moins en moins rapporté leur démarche intellectuelle.

4 Observation vidéo

L'enregistrement vidéoscopique nous a permis d'observer les formés dans le feu de l'action. Il nous a permis de reconstituer de façon dynamique et d'analyser l'essentiel des actes posés par les formés et les comportements des élèves en situation d'apprendre les IR. L'observation vidéo est une source riche en informations sur la mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2), sur la gestion de l'environnement didactique, sur les stratégies de généralisation/discrimination et de modélisation. Sans observation, la plupart de ces éléments importants pour notre étude restent cachés. Les enregisrements vidéos ont aussi comporté un enregistrement des discussions qui ont eu lieu entre les formés et les élèves dans la plupart des étapes de leur intervention. Ainsi, en exploitant ces enregistrements, notre travail a également consisté à dévoiler ce qui s'est effectivement passé en classe et à exprimer les non dits et les comportements de fuite qui faussent le développement harmonieux des relations entre les élèves et le formé. Nous avons cherché à minimiser le biais causé par des comportements farfelus de certains élèves, dû au fait qu'ils sont filmés pour la première fois dans leur vie ou qu'ils souhaitent se mettre en valeur.

5 Entrevues

Pour tous les éléments du modèle, à lexception de deux (communication/échange et évaluation de la compréhension), l'entrevue d'explicitation est la source d'informations qui est aussi riche que l'observation vidéo. Elle est moyennement riche pour les stratégies de mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2), de planification, de prise de décisions et de procéduralisation/composition. Elle est aussi intéressante en ce qui a trait à la consignation d'informations, à la représentation et à la gestion de l'environnement didactique, à la régulation et au contrôle du sens. Elle est moyenne pour ce qui concerne l'élaboration/organisation, la généralisation/discrimination et la validation. Elle est cependant moyennement pauvre quant à la communication/échange, l'évaluation de la compréhension.

La seconde entrevue s'est aussi avérée être une source riche en ce qui concerne les données recuillies par le biais des journaux de bord et des autres traces écrites, et les réflexions des formés sur leur participation à cette recherche. Bien que moyennement pauvre en informations concernant l'analyse des processus mentaux, cette source est intéressante pour étudier la consignation d'informations, la régulation, le contrôle du sens et la validation dans les activités de modélisation. Elle est surtout utile pour confirmer, sinon compléter, les données provenant d'autres sources d'information, pour mieux comprendre les stratégies (cognitives) et faciliter l'interprétation des modèles construits et validés. En comparant les résultats des deux entrevues (la première à mi-chemin, la seconde à la fin de l'ingénierie), nous avons pu suivre l'évolution du développement des habiletés des formés à concevoir, réaliser et analyser leurs activités.

Il convient de noter que poser des questions qui sollicitent des réponses n'est aisé qu'en apparence. En fait, selon notre expérience d'enseignement et selon nos observations faites au cours de cette recherche, nous trouvons que c'est le moyen le plus difficile qui soit pour interroger les adultes. D'abord, les adultes n'apprécient pas toujours qu'on leur pose des questions trop personnelles. Ensuite, lorsque le futur enseignant accepte de répondre aux questions, il s'adresse à une personne dont il sait, par expérience, ou croit savoir, qu'elle le préfère conforme et soumis (phénomène socioculturel); ce qui confère peu de fiabilité aux informations fournies. C'est pourquoi nous nous sommes efforcé de confronter les réponses orales avec celles exprimées par les actes posés et filmés. Aussi, avons-nous consacré une bonne partie de ces entrevues au visionnement de quelques morceaux des séquences enregistrées afin d'éclaircir certains comportements relevés.

Le rôle de l'interviewer apparaît ici essentiel, car c'est de lui que dépendent, en quelque sorte, à la fois la force et la faiblesse de l'entrevue, dans la mesure où c'est lui qui gère l'investigation, détermine et évalue les propos des sujets interviewés, et qui tient compte de tout ce qui survient au cours de l'entrevue pour amener le sujet à s'engager plus à fond dans l'analyse des problèmes soulevés. Pour minimiser certains biais liés à l'influence que peut avoir l'interviewer, nous nous sommes abstenu de trouver à tout prix ce que le formé croit être la réponse attendue et nous nous sommes efforcé de noter aussi fidèlement que possible ce qu'il a dit ou fait. Pour les sujets de l'UGANC qui ne sont pas familiers avec le vocabulaire des sciences de l'éducation, nous avons ajusté notre langage à leur niveau et avons adapté l'allure et le tempo de l'entrevue. Nous avons encouragé tous les sujets, qu'ils soient de l'ISSEG ou de l'UGANC, à expliquer et à justifier leurs démarches avec le plus de clarté possible.

6 Richesse des données

Les différents modes de données que nous venons de redécrire sont intéressants et pertinents à notre recherche, chacun y jouant un rôle complémentaire, chacun y apportant des informations additionnelles. Le tableau ci-dessous (tableau 22) montre la richesse des données pour l'ensemble de l'échantillon de nos formés selon les différents éléments du modèle proposé.

Tableau 22: Richesse des sources de données

Éléments du modèle	Traces	Journal	Verbal.	Observ.	Entrev 1	Entrev 2
10 Mobilisation des savoirs	**P**	**P**	**M**	**M**	**M**	**MR**
11 Prise d'informations	**P**	**MP**	**P**	**MR**	**R**	**M**
12 Consignation d'informations	**MR**	**MR**	**M**	**MR**	**MR**	**M**
20 Représentation/Environnement	**P**	**MP**	**M**	**MR**	**MP**	**MP**
30 Planification	**MP**	**M**	**MR**	**M**	**M**	**M**
40 Contrôle du sens/Régulation	**P**	**MP**	**MR**	**MR**	**M**	**M**
44 Élaboration/organisation	**MP**	**MP**	**M**	**M**	**M**	**M**
45 Généralisation/discrimination	**P**	**P**	**M**	**M**	**M**	**M**
46 Procéduralisation/composition	**P**	**P**	**M**	**M**	**R**	**MR**
50 Prise de décisions	**MP**	**M**	**MP**	**MR**	**M**	**M**
60 Formulation	**MP**	**MP**	**MR**	**M**	**M**	**M**
70 Modélisation	**M**	**M**	**M**	**R**	**MR**	**MR**
80 Intégration des connaissances	**MP**	**MP**	**MP**	**MR**	**MR**	**MR**
90 Communication/échange	**P**	**P**	**P**	**M**	**MP**	**MP**
100 Validation	**MP**	**P**	**M**	**M**	**M**	**M**
110 Évaluation/compréhensionn	**MP**	**P**	**M**	**MP**	**MR**	**MP**
pauvre	**6**	**1**	**3**	**0**	**0**	**0**
moyennement pauvre	**6**	**2**	**1**	**1**	**2**	**3**
La source est moyenne	**3**	**8**	**8**	**8**	**8**	**9**
moyennement riche	**1**	**3**	**3**	**6**	**4**	**4**
riche	**0**	**2**	**1**	**1**	**2**	**0**

Par exemple, les entrevues enrichissent et apportent une clarification des données fournies par les tests écrits. En effet, le prétest et le post-test sont axés sur la résolution de problèmes permettant de cerner les différentes stratégies que les formés ont utilisées pour des problèmes de type «modélisation/intégration de connaissances», alors que les entrevues, par leur caractère dynamique, interactif et flexible, ont permis d'expliciter ces stratégies. De même, les enregistrements (magnéto et vidéo) ont servi de matériel complémentaire auquel nous avons eu recours, en cas de besoin, pour mieux comprendre ou interpréter globalement les données recueillies par d'autres sources. L'enregistrement vidéo a fourni au formé des informations sur ce qu'il n'avait pas vu, sur ce qui s'est passé sur son dos, sur ce dont il n'a pas eu conscience depuis les regards étonnés des élèves jusqu'à certaines attitudes non verbales de sa part.

La prise en compte de ces observables a ouvert la voie à des remises en question et à la formulation de nouvelles hypothèses. De façon tout à fait complémentaire, l'entrevue d'explicitation a permis la verbalisation de la manière dont le formé traite l'information qu'il prélève dans sa classe, et rend possible, par une mise en mots, une prise de conscience (conceptualisation) qui modifiera, en retour, son action pédagogique ultérieure. Ainsi, l'observation vidéo et l'entrevue d'explicitation constituent des instruments à la fois indispensables et complémentaires du recueil d'informations sur les situations didactiques.

Tous les modes d'observation de chacune des séquences didactiques nous ont ainsi permis d'analyser les comportements des formés, mais de divers points de vue, et nous ont permis de vérifier les points soulevés par la recherche. Ils nous ont mis dans l'obligation de tenir compte des problèmes qui sont survenus et de procéder aussitôt aux ajustements nécessaires. Aussi, avons-nous trouvé important de prendre en compte toutes les observations, car c'est la confrontation de toutes les données recueillies, leur recoupement et leur contradiction qui nous ont permis d'analyser le rôle de l'intégration des connaissances dans les activités de modélisation et de voir les situations didactiques mises en place par les formés pour favoriser le développement d'habiletés. C'est l'ensemble des données recueillies lors de l'ingénierie qui nous a permis de récapituler et d'analyser les difficultés rencontrées par les formés à s'adapter au dispositif de formation. Dans le chapitre suivant (chapitre 7), nous analysons en profondeur ces données pour deux cas.

CHAPITRE 7

ÉTUDES DE CAS

CHAPITRE 7

ÉTUDES DE CAS

Dans ce chapitre, nous présentons deux études de cas pour illustrer le fonctionnement du formé au sein du dispositif. L'analyse approfondie du travail du formé a exigé que nous intégrions les données obtenues de diverses sources de collecte: extraits de protocoles, des entrevues, des verbalisations, du cahier de préparation des séquences, du journal de bord et autres traces écrites (feuilles d'élèves). Chacun des cas est étudié de façon à présenter les résultats du prétest et du post-test, donner un résumé des traces écrites, du journal de bord et du cahier de préparation des leçons. Les études de cas se réfèrent essentiellement aux extraits des verbalisations, des protocoles d'observation des formés en situation d'enseignement, et des entrevues. Le réseau des réalisations didactiques (accessible par les protocoles d'observation des séquences) est relié à celui des choix didactiques sous-jacents (accessible par les protocoles, les préparations des leçons, les entrevues et le journal de bord). Cette liaison est établie de façon à prendre en compte les mécanismes de construction des séquences didactiques, les décalages entre les choix didactiques et leur réalisation, l'évolution et les changements intervenus d'une séquence à l'autre (majoration, régression, stabilisation).

La présentation des données recueillies auprès de chaque formé est suivie de l'analyse et de l'interprétation des stratégies utilisées au cours des séquences d'enseignement et des relations entre ces stratégies. Pour chaque sujet et pour chacun des éléments du modèle, nous évaluons la richesse des différentes sources de données. Pour ce faire, nous notons le nombre et la variété des stratégies rapportées ou observées pour chaque code thématique (cf. Chapitre 4, pp. 147-154). Cette analyse diachronique des études de cas nous permet de mieux saisir la richesse et la complexité des données recueillies, de mieux percevoir les adaptations intervenues d'une séquence à l'autre et, en quelque sorte, de voir le formé au travail et en réflexion dans le cadre du dispositif. Afin d'illustrer des cheminements bien distincts, nous avons choisi d'étudier deux cas correspondant à des évolutions très différentes: le cas de Fadak qui représente une adaptation assez remarquable au dispositif et celui de Ada qui illustre un profil moyen type d'adaptation du formé à la situation et illustre bien les difficultés que peut rencontrer un futur enseignant placé dans notre dispositif de formation.

LE CAS DE FADAK

Ce cas est très intéressant à étudier pour montrer la prise en compte des analyses préalables par le formé et pour illustrer les adaptations intervenues d'une étape à l'autre.

1. Présentation générale

Nous présentons d'abord l'histoire personnelle de Fadak, les données recueillies auprès de lui et ses commentaires sur sa participation à cette étude.

1.1 Histoire personnelle

Âgé de 30 ans, Fadak est titulaire d'une maîtrise en sciences mathématiques aux termes de cinq années d'études à l'UGANC. Il revient d'un séjour de deux ans et quatre mois sur le marché du travail. Il a, en effet, enseigné au collège pendant deux ans et au lycée pendant quatre mois. Il a parallèlement dispensé des cours de vacances aux élèves du Secondaire. Il évolue présentement dans le programme du Certificat d'aptitudes professionnelles à l'enseignement secondaire (CAPES). Comme ses camarades de l'ISSEG, il possède, du moins théoriquement, une culture scientifique et un bagage mathématique importants. Estimant que cette formation académique n'est pas suffisante pour enseigner convenablement les mathématiques, il a décidé de se donner une formation professionnelle pour avoir un meilleur accès au marché du travail.

À l'ISSEG, la filière de formation initiale des enseignants du Secondaire prévoit, entre autres, les cours d'histoire et de philosophie de l'éducation (36 heures), de pédagogie générale (18 h), de psychologie de l'éducation (36 h), de didactique, de la théorie et de l'épistémologie des disciplines (104 h), de mesure et d'évaluation en éducation (36 h), de micro-enseignement et d'observation de classe (40 h), de stage pratique (128 h). Fadak se dit très motivé par sa participation au programme du CAPES. Il dit aimer tous les cours auxquels il est inscrit. Il a participé à toutes les activités du Séminaire et est l'un de ceux qui ont dispensé les trois leçons sur les identités remarquables (IR). Il se montre sûr de lui, entretient des relations harmonieuses avec ses camarades et explique sa réussite actuelle au programme du CAPES par le travail et le temps qu'il y consacre.

1.2 Présentation des données recueillies

Nous présentons d'abord les résultats du prétest et du post-test. Nous exposerons ensuite les données recueillies par les traces écrites, le journal de bord, les verbalisations, les protocoles et les entrevues.

1.2.1 Résultats du prétest et du post-test

Lors du prétest, Fadak a obtenu 56 points sur 100, une note plutôt moyenne. Il n'espérait pas obtenir plus. Il s'estime peu satisfait de cette note et plus ou moins satisfait de ses méthodes de travail. Il juge cette situation inhabituelle. En effet, le contexte d'intégration des connaissances auquel fait appel la résolution des problèmes proposés sur les IR lui semble quelque peu perturbateur. Le tableau ci-dessous (tableau 23) donne ses résultats au prétest et au post-test.

Tableau 23: Résultats de Fadak au prétest et au post-test

Dimensions	Notes	
	Prétest	Post-test
1. Dessin à main levée de $P(x) = x^2 - x$ et de $Q(x) = x^2 + 2xy + y^2$	1	3
2. Multiplication illustrée dans une figure	4	10
3. Utilisation d'aires de surface pour montrer que $a^2 + b^2 = c^2$	4	4
4. Analyse d'un modèle présentant une régularité remarquable	8	8
5. Calcul du volume d'une boîte fabriquée à l'aide d'un carton	4	4
6. Représentation d'un polynôme à l'aide de tuiles algébriques	3	5
7. Déduction d'un polynôme et ses facteurs à partir du produit géométrique	2	6
8. Calcul mental (rapide) de produits «remarquables»	4	6
9. Expression algébrique de la différence d'aires de deux carrés	4	4
10. Pourquoi la somme $a^2 + b^2$ ne peut pas être factorisée?	2	3
11. Comment calculer mentalement 45^2, 55^2, 75^2, 85^2 ?	3	5
12. Détermination d'un polynôme associé aux tuiles algébriques	5	15
13. Transformation d'un rectangle en un carré	2	5
14. Comment se servir des modèles géométriques pour expliquer les IR à un jeune ami qu ne les a pas encore étudiées?	10	17
TOTAL (sur 100 points)	**56**	**95**

Le tableau 23 montre que les performances de Fadak varient en fonction des thèmes abordés. Par exemple, les problèmes 2, 7 et 12 faisant appel à l'intégration des connaissances sont moins bien réussis que les problèmes 4, 5 et 9, lesquels mobilisent essentiellement des connaissances algébriques. De façon globale, plus les questions font appel à des situations familières (problèmes 3, 4, 5), plus on trouve de bonnes notes, même si l'explication donnée par Fadak est insuffisante. Dans les problèmes 1, 2, 6, 7, 12, 13 et 14, il n'est pas fait référence à une situation familière, à un seul contexte. Aussi, les notes de Fadak sont-ils relativement faibles. Fadak dit avoir vécu un certain stress lors du prétest. «*Au début, j'avais l'impression d'être devant un trou. Lorsque je trouvais la bonne réponse, j'en étais tout heureux, mais lorsque je ne trouvais pas la solution, je me sentais comme vaincu*», note-t-il.

Au post-test, Fadak a obtenu 95 sur 100 et c'est le résultat qu'il espérait. Le changement le plus important tel que décelé par le post-test se situe au niveau de la prise en charge des analyses préalables pour résoudre les problèmes n^{os} 2, 6, 7, 10, 12,13 et 14 (cf. Annexe C) relatifs à la modélisation et à l'intégration des connaissances. En passant de 28 à 61 points, il a plus que doublé ses résultats du prétest par rapport à ce type de problèmes. Ses attentes ont augmenté depuis deux mois de Séminaire et un mois d'ingénierie. Il s'estime plutôt satisfait de son résultat qu'il attribue à la facilité de la tâche que l'intégration des connaissances a rendue possible. Pour mieux situer Fadak parmi son groupe, on trouve les résultats de l'ensemble de l'échantillon dans le tableau 7, p. 208.

1.2.2 Traces écrites (agenda, manuel de cours, notes, brouillons d'exercices, évaluation formative)

Les documents que Fadak a utilisés sont le manuel du Séminaire, des notes de cours, quelques brouillons d'exercices et un cahier de préparation. Dans son manuel, Fadak encercle les exercices retenus; il souligne, en partie, les définitions et les remarques; il souligne les mots clés et les symboles. Ses notes de cours contiennent des listes de procédures, des notes personnelles sur la façon de calculer le carré des nombres terminés par 5 et des notes qui justifient les étapes dans les activités de découpage et de recollage. En entretien, Fadak nous dit avoir fait une partie de ces annotations pendant le cours pour mettre en relief les points importants, et une autre partie lors de la préparation des séquences didactiques. Ses brouillons montrent que les exercices sont traités de façon détaillée. Des éléments particuliers, comme la procédure de factorisation d'un polynôme à partir de sa représentation géométrique, sont entourés. Fadak utilise plusieurs signes (des flèches, des étoiles) pour souligner la nécessité de compléter un exercice laissé en suspens.

1.2.3 Journal de bord

Le journal de bord de Fadak fait état de trois séquences didactiques d'une durée de 6 heures. Fadak dit avoir choisi, organisé et contrôlé le contenu, le matériel et les autres ressources en fonction du niveau de compréhension des élèves. «*Et de là, j'ai fait intervenir de nouvelles notions que les élèves ignoraient sur les IR*». Il dit avoir planifié les activités de manière à faciliter l'apprentissage des IR. «*Ceci a permis aux élèves de bien comprendre les leçons sans difficultés majeures*», note-t-il. Parlant des facteurs qui ont exercé une certaine influence sur ses activités d'enseignement, Fadak note que «*c'est la motivation et la confiance en soi qui ont été des attitudes favorables*». Cependant, aucun événement inhabituel n'a influencé ses activités. Il dit n'avoir rencontré aucune difficulté majeure, «*sauf le fait que la classe qui a suivi ce cours a accusé un certain retard par rapport à l'autre dans l'avancement du programme officiel*». Aussi, a-t-il dû s'investir en dehors du temps imparti pour donner des cours de «rattrapage». Quant aux problèmes particuliers qu'il a rencontrés pour tenir régulièrement son journal de bord, Fadak note que «*la difficulté vient du fait qu'il faut y consigner toutes les activités, au jour le jour, quelles qu'elles soient, aussi simples qu'elles soient*».

Voici les commentaires ou suggestions concernant l'étude à laquelle Fadak a bien voulu participer: «*Ce cours m'a permis d'avoir beaucoup de notions sur les IR que j'ignorais avant. (...) Je sollicite qu'on mette ce document (manuel du Séminaire) à la portée de tous les futurs enseignants (...), car cette méthode est pratique et facile à comprendre*». Fadak a trouvé excellent le fait d'être interviewé et de travailler avec nous, car «*cela m'a donné un plus en mathématiques, en plus d'élargir ma vision des choses (enseignement/apprentissage) en mathématiques*», commente-t-il. Il dit aussi avoir aimé résoudre les problèmes que nous lui avons proposés. «*Un travail, comme ça, sera toujours le bienvenu chez moi*», écrit-il dans le journal.

1.2.4 Le cahier de préparation des leçons

Le cahier de préparation montre que, pour enseigner les IR, Fadak se donne un objectif, parfois subdivisé en sous-objectifs. Il y précise les points importants comme le contrôle des prérequis, les savoirs visés et les savoir-faire escomptés. Il y indique la place détaillée de chaque leçon: contrôle et mobilisation des savoirs antérieurs, conventions sur les formes et tuiles, consignes, types d'activités, exercices de synthèse, etc. Il identifie ce que les élèves peuvent réussir seuls et ce pour quoi ils devront recourir à son aide.

1.2.5 Verbalisations

Les verbalisations de Fadak rapportent des paroles encourageantes, des efforts pour se concentrer et des manifestations de confiance en soi. Lors ces verbalisations, Fadak lit d'abord l'énoncé; il lui arrive de le faire relire ou de le relire lui-même, entièrement ou partiellement, en cours de solution. Il écrit les données au tableau, fait identifier la question posée ou les mots clés de l'énoncé; il fait vérifier les données et activer les connaissances antérieures. Il fait parfois formuler une hypothèse que les élèves explorent et valident par rapport à l'énoncé; il les amène à se questionner sur la plausibilité du modèle construit. Lorsqu'un élève rencontre une difficulté, Fadak l'aide à identifier ce qui pose problème; il l'invite à relire la question, à comparer sa démarche avec un cas semblable ou avec une activité antérieure. Dans le cas de l'IR $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, par exemple, il fait refaire la démonstration avec une méthode différente, même si les élèves l'ont réussie la première fois, pour accroître leur compréhension. Il fait aussi revenir les élèves sur des étapes ou des activités antérieures lorsqu'un élément d'une solution peut leur rappeler quelque chose qui les a précédemment laissés insatisfaits. Il fait identifier autant l'existence d'une erreur que sa nature. Ceci montre, à nos yeux, un investissement didactique important.

Au plan affectif, les verbalisations de Fadak montrent qu'il utilise des stratégies pour agir sur des facteurs affectifs. Il taquine les élèves pour leurs erreurs et pour décrisper l'atmosphère de la classe; il leur dit des mots encourageants et les félicite. Lorsqu'il constate qu'un élève est distrait, il cherche à ramener son attention à l'activité, très souvent en le faisant passer au tableau. Au plan de la supervision, il évalue la quantité de travail fait, accélère pour atteindre les objectifs qu'il s'est fixés, change d'activité, évalue la compréhension des élèves, estime qu'il faut faire passer au tableau un autre élève parce que celui qui y est invité ne sait plus quoi faire. Il donne, bien sûr, quelques fois des indications, surtout lorsque l'élève interrogé est «au pied du mur». Il extériorise, à l'occasion, une émotion ou un sentiment, comme du plaisir devant une activité bien réussie par ses élèves.

1.2.6 Observation vidéo

Dans le cas de Fadak, trois séquences didactiques ont été filmées, alors que de façon générale, nous n'en avons pu filmer que deux par formé. Nous craignions de ne pas collecter de données suffisantes et riches avec une seule séquence. Il était difficile de filmer une troisième séance pour tous les formés de l'ISSEG, les séances se déroulant assez souvent au même moment dans des collèges très éloignés les uns des autres. La deuxième séquence apporte plus d'éléments nouveaux; ceci s'explique par la nature des tâches que Fadak a proposées aux élèves lors de cette séquence, c'est-à-dire la dévolution aux groupes constitués de la représentation géométrique des IR $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Au cours de la première séquence, Fadak contrôle les prérequis et donne des consignes avant de représenter les carrés unitaires, les bandes rectangulaires, les grands carrés et les grands rectangles. Une grande partie de ses stratégies concerne le découpage et le recollage de feuilles de carton pour établir l'IR $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. La présentation par chacun des trois groupes d'élèves de leurs modèles géométriques des IR constitue l'essentiel de la seconde séquence. Fadak utilise un bon moment au cours duquel il fait la synthèse des activités avec le groupe-classe, en reprenant les idées principales, en révisant les étapes passées de chacune des modélisations pour les compléter et en revenant sur les difficultés rencontrées. Nous le voyons, dans la troisième séquence, demander aux élèves de développer les expressions $(x - 3)^2$ et $(x - 1)^2$ et de les représenter géométriquement. Nous le voyons les encourager à poser des questions dont la discussion peut les aider à mieux comprendre. Enfin, nous le voyons donner des exemples d'application des IR dans le calcul numérique, notamment les techniques de calcul des produits remarquables du type 68×72 ou du calcul du carré des nombres terminés par 5.

1.2.7 Première entrevue

Des propos de Fadak en entrevue, nous tirons les éléments suivants: l'organisation, le déroulement et l'analyse de ses séquences didactiques.

1. 2.7.1 De l'organisation des séquences didactiques

En nous parlant des types d'activités qu'il a organisées, Fadak dit avoir situé ses leçons autour des trois formes $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, et $(a + b)(a - b)$. À cette fin, il a jugé nécessaire d'enseigner la multiplication des polynômes à l'aide des tuiles. Il a aussi présenté quelques techniques de calcul numérique comme application des IR. Il a commencé par passer le contrat didactique qui le liait aux élèves et qui, en quelque sorte, instituait les formes géométriques des monômes 1, -1, x, -x, x^2, $-x^2$, xy, -xy, etc. Il a aussi proposé des activités de découpage et de recollage pour faire établir l'IR $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Il a proposé à ses élèves une série d'exercices et de problèmes que ceux-ci ont résolus avec beaucoup d'enthousiasme et de réussite.

Pour planifier ses objectifs par rapport aux trois leçons annoncées, Fadak s'est servi de la brochure du Séminaire. «*Je me suis consacré à la préparation des séquences bien avant le jour J*», précise-t-il. Il en a fait un résumé qu'il a présenté à ses amis pour des critiques et suggestions à partir desquelles il a pris des décisions. La plus importante de ces décisions est de n'enseigner que la forme $a^2 - b^2$, laissant ainsi le soin aux élèves de faire le reste. Tout cela lui a pris trois jours. En planifiant ses leçons, Fadak s'est fixé des objectifs précis. Dans le cas de $a^2 - b^2$, il sait que les élèves en ont déjà une certaine idée, mais qu'ils ne savent pas comment replacer cette forme dans le contexte du découpage. Aussi, s'est-il fixé pour objectif, entre autres, de les amener à se servir d'une feuille de carton et d'une paire de ciseaux pour transformer $a^2 - b^2$ en $(a + b)(a - b)$.

1.2.7.2 Déroulement des séquences

Fadak a rappelé les prérequis, à partir desquels il a introduit de nouvelles activités. Il a ainsi fait développer $(x + 2)(x - 2)$ algébriquement pour s'assurer que les élèves sont capables d'un tel développement. Pour lui, le «gros problème» est de faire développer géométriquement les IR. «*J'avais pour tâche de leur venir en aide pour établir cette connexion*», précise-t-il. En expliquant la façon dont il s'y est pris, Fadak dit avoir donné des conventions sur les différentes formes géométriques. Il a, d'abord, exposé la théorie, pensant que «*pour mieux comprendre la pratique, il faut la lier à la théorie*». Ensuite, ayant trouvé les notions théoriques difficiles à enseigner, il a cherché à les relier à l'activité de découpage. Il s'est ainsi appuyé sur cette activité pour faire représenter géométriquement la forme $a^2 - b^2$. «*Faisant tour à tour appel aux notions de carré, de rectangle et des aires respectives, le dessin, le découpage et le recollage m'ont permis d'enseigner l'essentiel des notions théoriques sur les IR*», note-t-il dans son journal.

Fadak a, bien sûr, pris soin de résoudre tous les exercices à la maison avant de les proposer aux élèves. Ceux-ci ont traité les exercices dans l'ordre, du plus simple au plus compliqué. Fadak s'en justifie en affirmant que «*les élèves n'ayant pas le même niveau, il faut partir des exercices "terre-à-terre" et, au fur et à mesure qu'on évolue, proposer des exercices de plus en plus complexes*». C'est quand l'élève ne réussit pas un exercice ou un problème que Fadak l'aide. Il a relevé deux exercices que les élèves ont trouvés difficiles: pour effectuer la multiplication $(2x + 3)(2x + 4)$ à l'aide des tuiles, il rapporte que les élèves ont eu de la difficulté à représenter les dimensions du rectangle correspondant. Une autre difficulté se situe dans la représentation des multiples de x; mais, après plusieurs exemples donnés par Fadak, les élèves ont fini par surmonter cette dernière difficulté.

Quant à la façon dont il s'est servi des tuiles, Fadak dit avoir introduit les tuiles en se basant sur les formes géométriques. Selon lui, les élèves ont trouvé ces tuiles et ces formes géométriques «*(...) si intéressantes qu'après le cours, certains élèves sont venus me montrer dans la salle des profs les exercices qu'ils avaient traités et me demander s'ils les avaient réussis*». Cependant, reconnaît-il, «*l'engouement visible de certains élèves pour ces nouveaux outils ne cahe pas la difficulté de bon nombre à les utiliser pour construire des modèles des IR*». Ces témoignages nous montrent le type de travail relationnel que mène Fadak sur les différentes catégories de savoirs (S1, S2, S3) et sur leur articulation. Ce développement de liens entre les savoirs, encore embryonnaire ici, va se poursuivre au cours des séquences didactiques suivantes.

1.2.7.3 Analyse des séquences didactiques

À la question de savoir comment il sait qu'il a conçu et réalisé de bonnes séquences, Fadak répond qu'il s'est référé à l'attitude des élèves et à leur engouement pour le cours!**Erreur de syntaxe,** (: «*je m'en suis surtout rendu compte à travers les activités de résolution de problèmes que les élèves ont eux-mêmes réalisées*». Il rapporte que les élèves qui ne comprennent pas bien sont souvent venus le voir après le cours pour le consulter au sujet des parties non comprises. Il dit leur être venu en aide du mieux qu'il a pu. Après les heures régulières de classe, il a continué à donner des explications à ceux qui en manifestaient le besoin. Il rapporte que «*la majorité des élèves a fini par comprendre, en acceptant surtout de résoudre les exercices et les problèmes supplémentaires*». L'évaluation a consisté à interroger oralement les élèves qu'il faisait passer au tableau. «*Si l'élève interrogé ne trouve pas, je fais intervenir un autre; ainsi, il y a eu des interactions élève-enseignant et surtout élève-élève; j'interviens en dernier lieu pour les départager*», commente-t-il. Fadak dit avoir autrement évalué la compréhension des élèves à travers une série d'exercices. En analysant leurs résultats, il s'est rendu compte que «*les objectifs du cours étaint largement atteints*».

C'est aussi à travers les devoirs à faire à la maison que Fadak dit savoir que les élèves ont bien aimé travailler avec les tuiles et les formes géométriques. Quand les élèves sont revenus le lendemain, il aurait constaté que près de 90 % d'entre eux ont fait le travail de façon satisfaisante. Il sait que les élèves ont bien aimé travailler avec ces outils à travers surtout leurs questions pertinentes. C'est, d'ailleurs, à travers l'une de ces questions que les élèves ont eux-mêmes découvert les limites de ces modèles. En effet, Fadak rapporte qu'un élève lui a demandé comment représenter 3x/2. Il a pris quelques minutes de réflexion avant de dire que «*la représentation n'est valable que dans l'ensemble des entiers relatifs*». Bien que incomplète, cette réponse établit la limite de l'utilisation du contexte géométrique car, ajoute Fadak, «*il n'y a pas de méthode suffisante à 100 %*». Il a encouragé les élèves à lui poser des questions dans ce sens: «*c'est à travers les questions que je me rends compte que les élèves ont compris le cours ou non*», souligne-t-il.

De cette entrevue, nous retenons que Fadak vérifie ce qu'il fait et où il en est lorsqu'il enseigne. Il évalue ce que les élèves comprennent, ce qu'ils peuvent réussir seuls et ce qui leur reste obscur. Il invite ces derniers à refaire, pour eux-mêmes, les activités qui ont été réalisées en classe. Cette reconstruction personnelle des modèles lui semble très importante et nécessaire. Il invite les élèves à évaluer eux-mêmes la validité de chaque modèle d'après le sens du problème. Il accorde beaucoup d'importance aux exemples traités dans le manuel du Séminaire et s'applique à les reprendre à son compte. Fadak insiste surtout sur la nécessité de comprendre et de ne pas se contenter de reproduire syntaxiquement les procédures. Il affirme que «*c'est avec la représentation géométrique et la résolution de problèmes qui font appel à l'intégration des connaissances que les élèves peuvent comprendre*».

1.2.8 Deuxième entrevue de Fadak

Cette entrevue a porté sur l'organisation générale des séquences et sur les indices qui font dire à Fadak qu'il a bien enseigné les IR. Quant à l'organisation générale des séquences, Fadak nous dit qu'il ne peut pas aborder directement les activités de modélisation et qu'il lui faut d'abord partir de ce que les élèves savent déjà sur les IR. «*Les élèves connaissent déjà les IR dans le contexte algébrique; il me faut introduire les tuiles dont ils n'ont aucune idée, en leur donnant un certain nombre de consignes*», s'explique-t-il. Par la suite, Fadak et ses élèves se sont engagés dans la phase de résolution de problèmes. «*Une fois qu'ils passent de l'écriture algébrique à la forme géométrique, ce sont les élèves eux-mêmes qui utilisent des tuiles pour construire le modèle algébrique: c'est le passage inverse*», commente-t-il. Ce sont les élèves qui ont réalisé les activités, mais non sans difficultés. Pour aider ces derniers, «*il me faut d'abord revenir sur les "anciennes" leçons, même si ce sont des leçons très anciennes; il faut y revenir, les expliquer avant d'aborder la nouvelle leçon*», ajoute-t-il. En expliquant sa façon d'enseigner les IR, Fadak dit s'être rendu compte qu'il a bien enseigné en constatant que les élèves interrogés ont traité correctement les données théoriques et qu'ils ont donné aux activités une tournure de jeu; «*ils se sont amusés à résoudre des exercices qu'ils ont eux-mêmes "fabriqués" sur place*», ajoute-t-il.

En évaluant sa participation à cette recherche, Fadak considère que cette participation lui a fait prendre conscience de l'importance à intégrer les connaissances pour asseoir la compréhension et donner du sens aux IR. De cette recherche, il retire d'abord le sentiment qu'il utilise de bonnes méthodes d'enseignement et que cela lui donne confiance. Il trouve surtout que sa participation à cette recherche a été l'occasion pour lui de s'actualiser, de se mettre à jour, de s'enrichir tant sur le plan du savoir que sur celui du savoir-faire. «*Au début, je ne savais pas (...) comment représenter géométriquement les IR; je les enseignais (...) en utilisant la seule approche algébrique. À présent, je sais qu'on peut en construire les modèles géométriques et obtenir les mêmes résultats* ».

Fadak a déjà rapporté dans son journal de bord qu'en enseignant les IR à l'aide des tuiles et des formes géométriques, les élèves les comprenaient plus facilement. La tâche de l'enseignant devenait, elle aussi, très facile. En entrevue, il s'en justifie en disant: «*lorsque les élèves comprennent vite, l'enseignant perd moins de temps à expliquer; il utilise plutôt ce temps à faire d'autres activités, à mieux explorer d'autres aspects importants du sujet*». Étant donné la richesse des informations recueillies lors de la première entrevue, nous avons jugé inutile de prolonger indûment cette seconde entrevue. Il nous a longuement entretenu du sentiment de satisfaction qu'il ressent au sortir de cette expérience.

2. Stratégies utilisées

Dans cette section, nous mettons en relation, dans un premier temps, les stratégies utilisées par Fadak avec les éléments du modèle théorique. En second lieu, nous dégageons les relations entre ces stratégies. Nous apprécions, ensuite, la productivité des différentes sources de données auprès de Fadak.

2.1 Confrontation avec le modèle

La fiche de synthèse de Fadak (résumée dans le tableau 24, cf. Appendice , p.) permet de tirer les conclusions suivantes par rapport au modèle proposé. Dès le début, nous constatons que Fadak utilise une grande variété de stratégies appartenant à presque tous les éléments du modèle. Au plan de la *prise d'informations*, il a utilisé différents moyens. C'est surtout en observant les séquences didactiques que nous remarquons la richesse de ses stratégies. Fadak dit avoir beaucoup plus consulté le manuel du Séminaire que la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM). Concernant la *consignation d'informations*, les stratégies sont moins nombreuses, mais tout aussi variées. C'est en observant le comportement de Fadak et ses traces écrites que nous pouvons juger cet élément. Nous constatons que toutes les sources, moins les verbalisations, ressortent le fait que Fadak dispose d'un ensemble de codes personnels pour noter des informations qu'il ne veut pas oublier et qui l'aident à gérer ses leçons.

L'*observation vidéo* et la *première entrevue* nous permettent de suivre aisément les moyens que Fadak a utilisés pour se représenter les activités et la nature des tâches à réaliser. Le questionnement sur le sens des activités proposées, l'invitation des élèves à se poser des questions sur le sens des activités et les actions réalisées pour familiariser les élèves avec les graphies algébriques et les formes géométriques sont des exemples de ces moyens. Nous constatons que les stratégies rapportées sont confirmées par une autre source et cela est très important dans le cas de processus mentaux difficiles à étudier comme la représentation qu'un sujet se fait de l'activité de modélisation. Les activités cognitives observées sont riches dans la mesure où Fadak a *planifié* autant ses séquences didactiques qu'il en a assuré le *contrôle* et la *régulation*. Les stratégies de régulation «réviser les étapes passées de la construction d'un modèle», de vigilance ou de *rétroaction* pour surveiller les activités, identifier l'existence d'une difficulté, ou pour identifier la nature d'une erreur, sont aussi très utilisées. Notons tout de même que les stratégies de contrôle du sens et de régulation qui ont été rapportées dans le journal de bord et qui n'ont pas été confirmées par une autre source sont moins fiables. En effet, Fadak y a mentionné ce qu'il croit qu'il a fait. Les stratégies cognitives ne peuvent vraiment s'observer qu'en cours d'actions (Caverni, 1988; Richard et Poitrenaud, 1988; Vergnaud, 1990).

Les stratégies de *prise de décision* sont également représentées. Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse des entrevues, la plus importante décision que Fadak a prise est de n'enseigner que la forme $a^2 - b^2$ et de laisser ainsi le soin aux élèves de faire le reste. Il a décidé d'enseigner, outre les trois IR, la multiplication des polynômes en se servant des tuiles. Alors que la plupart de ses camarades ont fonctionné par paire, Fadak a préféré travailler seul; il a fait travailler les élèves individuellement et quelques fois en groupe. Il a aussi pris la décision de faire recommencer un essai de modélisation infructueux chaque fois que cela était nécessaire.

D'après les notes des journaux de bord et les conversations informelles que nous avons eues avec Fadak, nous savons qu'il a dû gérer, de façon parcimonieuse, son emploi de temps durant cette période. Il a respecté les horaires qui ont été âprement négociés avec la direction du lycée Kipé; cela apparaît dans l'analyse de sa planification. Par ailleurs, les stratégies d'*élaboration* et d'*organisation des connaissances* sont presque toujours confirmées par au moins une autre source. Selon la littérature (Brun, 1990; Brousseau, 1990), ces stratégies favorisent l'acquisition des connaissances déclaratives (faits, définitions, règles, principes, formules, etc.). Fadak a proposé des situations qui ont amené les élèves à travailler sur le sens des IR avec un vocabulaire et des concepts qui soient acceptables et qui développent vraiment leurs connaissances. C'est placés dans de telles situations que les élèves ont construit des modèles et résolu des problèmes sur les IR. Cela nous paraît nécessaire à une organisation adéquate de processus cognitifs qui facilitent l'acquisition de nouvelles connaissances.

Les stratégies de *généralisation/discrimination* ainsi que celles de *procéduralisation* ou de *composition* sont relativement bien représentées. Ceci est cohérent avec l'image que Fadak se fait du contrat didactique, image influencée par la façon dont il fait l'évaluation des apprentissages dans ce cours. Fadak attend de ses élèves qu'ils soient capables de résoudre au moins des exercices semblables à ceux qui ont été faits en classe ou en devoir. Dans un contexte traditionnel, c'est souvent ainsi que l'évaluation de l'apprentissage est conçue. L'élève doit traiter régulièrement ses exercices, car il sait qu'il sera évalué selon son habileté à résoudre des exercices. Il n'est donc pas étonnant que les stratégies d'*évaluation* soient peu nombreuses et peu variées.

S'agissant des *activités de modélisation*, Fadak a mis beaucoup d'insistance sur la façon dont les élèves doivent se servir des axes orthonormés pour utiliser des tuiles. En fait, il est l'un des rares formés qui a fait «*dessiner les calculs*» sur les trois IR et qui a fait «*calculer sur les dessins*» de ces IR. Il a notamment fait découper et recoller des feuilles de papier pour illustrer les résultats de calcul sur les IR. L'observation de son comportement autant que ses verbalisations et ses journaux de bord nous montrent que les activités de modélisation sont riches, nombreuses et variées. En invitant ses élèves à s'exercer dans cette voie nouvelle, Fadak a tenu à ce qu'ils comprennent et non qu'ils reproduisent ou qu'ils travaillent exclusivement pour l'évaluation. Ainsi, nous pouvons dire qu'il est parvenu à faire accepter par les élèves la dévolution de la tâche de modélisation.

Fadak a utilisé différents procédés pour *intégrer* les différents types de savoirs (S1, S2, S3) de manière à majorer son enseignement des IR. La présentation des savoirs sur les IR dans différents contextes, la repersonnalisation des savoirs décontextualisés via nouvelles situations et la recontextualisation des savoirs retenus pour donner plus de sens aux IR ressortent de l'analyse. Nous relevons aussi des activités de découpage et de recollage, activités d'autant plus intéressantes qu'elles fournissent un type de validation implicite fondamental et que l'activité langagière de formulation qui les accompagne en fournit un autre (Brousseau, 1998). Fadak a également fait place à l'application des IR dans le calcul numérique.

Au plan des *activités langagières*, Fadak a laissé de nombreuses traces, ce qui lui a permis de donner un contenu clair et net des situations proposées, d'user d'une terminologie scientifique et pédagogique appropriée. Par le questionnement, il a valorisé, de façon efficace, des interactions élève/élève et élève/enseignant comme partie intégrante de ce discours et de cette pratique enseignante. Au sujet de la *communication* et des *échanges*, nous notons de nombreux comportements qui appartiennent à différentes stratégies utilisées et confirmées par d'autres sources. En effet, l'analyse des protocoles et des entrevues ressort que Fadak a présenté les activités de modélisation et de résolution de problèmes de façon à engager et à mettre les élèves à l'épreuve; il a demandé à ces derniers d'expliquer davantage leur raisonnement, leurs procédures et leurs modèles. Fadak a écouté attentivement les élèves pour saisir leurs idées; il a limité son temps de parole, accroissant ainsi celui des élèves. Il a promu et géré la participation des élèves au cours en leur donnant l'occasion d'échanger leurs idées.

En somme, presque tous les éléments du modèle ressortent de l'analyse des stratégies et des comportements de Fadak pendant l'expérimentation. Le comportement de Fadak au cours de l'ingénierie est probablement tributaire de sa conception du contrat didactique. En effet, comme il a à cœur de répondre lui-même au mieux aux exigences du contrat de formation et d'obtenir de ses élèves d'être très «appliqués» en faisant de leur mieux, nous remarquons que son cours est centré sur les processus de procéduralisation/composition et de généralisation/discrimination. C'est que, pour lui, «*apprendre les maths, c'est faire des exercices et résoudre des problèmes pour comprendre ce qui a été expliqué par l'enseignant et les autres élèves*». Il se positionne lui-même en tant qu'élève-maître dans la situation d'ingénierie puisqu'il accorde autant d'importance aux attentes présumées du formateur qu'aux activités de modélisation de ses propres élèves. Nous constatons, à la suite de Portugais (1995), que la fonction «pour agréer le contrat» du travail de construction du sens montre que le formé cherche à assumer la rupture initiale du contrat introduite par le formateur. Portugais nous rappelle, d'ailleurs, qu'il est difficile d'assumer cette rupture si l'on considère que dans le contexte traditionnel de travail avec les élèves, le formé se contente de la «bonne» réponse.

2.2 Relations entre les stratégies utilisées

Nous poursuivons l'analyse et l'interprétation à partir de la transcription écrite des verbalisations, des protocoles des séquences, des entrevues, et des traces écrites que Fadak a laissées de son travail. Nous effectuons, ensuite, une analyse globale, qui sera suivie d'une analyse par épisodes, puis du résumé du cas.

2.2.1 Méthode de travail global

Pour mieux comprendre la méthode de travail de Fadak, nous utilisons la matrice et les séquences complètes des stratégies qu'il a utilisées. Les séquences ont duré chacune près de deux heures. Comme Fadak ne disposait, en tout, que de six heures, il s'est investi à passer le contrat didactique, à faire signer les conventions sur le sens et l'utilisation des formes géométriques et des tuiles, à faire des rappels sur les monômes, binômes et polynômes ainsi que sur l'utilisation des axes orthonormés. Il n'a, ensuite, enseigné que la forme $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, en se servant du découpage et du recollage, laissant ainsi le soin aux élèves de profiter des deux tiers du temps pour se familiariser aux nouveaux outils, construire des modèles des autres formes et résoudre des problèmes d'application des IR dans le calcul numérique. Fadak a lui-même résolu 14 exercices au prétest; il les a refaits au post-test. Il en a fait résoudre 30, soit un peu plus du double de ce qu'il a lui-même résolu.

Au debut, la gestion de l'*environnement didactique* a semblé plutôt marginale; mais, par la suite, avec les activités de découpage et de recollage, Fadak et ses élèves ont accordé plus d'attention à cette dimension. L'utilisation des tuiles et des formes géométriques constitue l'essentiel de notre propos à cet égard. Les processus de modélisation et d'intégration des connaissances apparaissent comme centraux par rapport aux autres éléments. En même temps qu'ils entretiennent des liens étroits entre eux, ces deux processus maintiennent aussi des relations avec les processus cognitifs: ceci confirme leur centralité par rapport aux autres processus. Nous remarquons, par exemple, que *modélisation* et *intégration* précèdent et se font suivre par la plupart des autres processus. En outre, le processus de «représentation/environnement didactique» est relié à la «mobilisation des savoirs préalables», car le fait que Fadak fasse chercher à l'élève dans ses connaissances antérieures (mobilisation) peut conduire celui-ci à une meilleure «compréhension» du problème (représentation). Inversement, l'élève que Fadak invite à s'interroger sur le sens du problème est conduit à rechercher de l'information dans ses connaissances antérieures. Il en est de même des relations symétriques «prise d'information» et «représentation/environnement didactique», «contrôle du sens» et «procéduralisation/composition» ainsi que «généralisation/discrimination» et «procéduralisation/composition».

Chez Fadak, nous remarquons peu de relations à sens unique. C'est le cas des relations «prise d'information» vers «élaboration/organisation», «mobilisation des savoirs S1 et S2» vers «procéduralisation/composition», «procéduralisation/composition» vers «évaluation» et «procéduralisation/composition» vers «élaboration/organisation». Ceci nous surprend peu, car ces relations sont cohérentes avec une conception cognitiviste de l'enseignement/apprentissage assez ancrée chez Fadak. En effet, Fadak prend de l'information pour enrichir et organiser la structure cognitive des séquences; il mobilise ses connaissances antérieures pour concevoir et réaliser des activités. Après que les élèves aient travaillé, il évalue leur compréhension. Par ailleurs, les aspects de la gestion de l'environnement didactique (apprêtage des instruments, comportements ou pensées reliés à l'utilisation du matériel) prennent assez de place dans les activités de découpage et de recollage. Ce fait s'explique par la grande concentration de Fadak et de ses élèves lorsqu'ils s'impliquent dans cette activité. Quant à la composante cognitive, elle n'est pas directement reliée à cette gestion, notamment dans l'utilisation des IR dans le calcul numérique.

2.2.2 Épisodes de travail

Le découpage des séquences nous permet de distinguer 18 épisodes en fonction du changement de tâche ou d'acteur. Comme outil d'analyse, nous avons choisi la séquence des stratégies rapportées par Fadak au cours de chaque épisode, ce qui nous a permis de suivre la progression et l'enchaînement des stratégies utilisées.

2.2.2.1 Épisodes de la première séquence

Composée de 8 épisodes, la première séquence de Fadak porte sur la présentation des objectifs du cours, le contrôle des prérequis, l'introduction des formes géométriques et les activités de découpage. Il s'agit de notions nouvelles pour les élèves car, contrairement à l'habitude de leurs cours de mathématiques, les élèves n'ont pas les réponses à ces exercices, qui ne sont pas tirés de leur manuel, et en particulier, aux activités de modélisation dont les élèves ne connaissent pas d'avance la procédure.

L'épisode 1 est un bref épisode introductif, au cours duquel Fadak précise les points importants, à savoir les objectifs (étude des formes algébriques et géométriques des IR), les prérequis (monômes et binômes), les savoirs et les savoir-faire. Pour Fadak, les savoirs visés concernent aussi bien les connaissances, les représentations que les applications des trois IR qu'il appelle «produits remarquables». Il fait écrire au tableau les graphies algébriques de ces IR. Après avoir fait ce rappel, il suscite l'intérêt des élèves (qui ont tous déjà étudié ces IR dans le seul cadre algébrique) en leur posant la question «*comment représenter géométriquement ces IR*?». Cette question est d'autant plus essentielle que ses élèves se demandaient, après l'annonce du titre de la leçon, ce qu'ils pouvaient bien apprendre «de nouveau» d'un cours sur les IR. Quant aux savoir-faire, Fadak estime qu'après le cours, l'élève sera capable de représenter les IR en se servant des tuiles, qu'il sera capable de résoudre une gamme variée de problèmes sur les IR.

Dans l'épisode 2, consacré au contrôle des prérequis, Fadak a cherché à activer les connaissances antérieures et, à l'aide du questionnement, il a fait rappeler ce qu'est un monôme, ce qu'est un binôme. Il a écrit au tableau une série de graphies algébriques et, par le questionnement, fait distinguer les monômes des binômes. Il a fait identifier le coefficient et le degré de chacun de ces monômes. Fadak s'est assuré de la disponibilité des prérequis et du fait que les élèves se sont représenté quelques aspects de la tâche à faire. Une analyse superficielle de cet épisode peut faire croire que cette activité sert uniquement à contrôler les prérequis. Mais, en fait, Fadak s'est servi de cet a priori pour discuter avec les élèves des moyens de s'entendre sur le contenu et la philosophie du cours., Bien que court, cet épisode est assez riche à la fois au niveau du contrôle des prérequis et pour ce qu'il permet à Fadak d'analyser lui-même. Fadak n'a, d'ailleurs, pas manqué de le faire avec vigueur comme en attestent les extraits de son journal de bord.

> *Les moyens de contrôler les prérequis que j'ai surtout utilisés sont le questionnement et le contrôle du sens. Il me faut concevoir des situations pour continuer dans ce sens dans les prochaines séquences. Il est surtout important de relier la modélisation à son sens, de ne pas modéliser pour modéliser, mais construire avec les élèves le sens des opérations et des concepts qui rentrent là-dedans.*

L'épisode 3 est essentiel pour donner des «consignes», fixer le langage et négocier le sens à donner aux différentes formes géométriques, à leurs couleurs, à leur disposition par rapport au plan cartésien. Ce que Fadak appelle «consignes» n'est, en fait, qu'un ensemble de conventions qu'il propose aux élèves. Fadak leur présente d'abord des tuiles de forme carrée (carré unitaire). Il utilise un langage qui est, à la longue, susceptible de créer un certain «effet Topaze»: il parle, en effet, du carré unitaire comme d'«un petit carré de longueur 1 et de largeur 1». Il insiste, en répétant plusieurs fois, que «*lorsque c'est coloré, on a le signe +*» et que «*lorsque ce n'est pas coloré, on a le signe -* ». Ensuite, il dessine, à main levée, les bandes rectangulaires pour représenter les monômes x, -x, y et -y. Il fait noter que les signes « + » ou « - » des coefficients sont utilisés selon que «c'est coloré» ou «non coloré». Avec le même jeu de couleurs et de signes, il dessine les grands carrés représentant les monômes x^2, $-x^2$, y^2 et $-y^2$. En comparant les monômes *x*, *-x*, *y* et *-y* avec les termes du développement de $(a + b)^2$, Fadak parle de monômes de second degré (a^2, 2ab, b^2) - termes du second membre de l'IR $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nous notons, ici, la confusion que Fadak entretient passagèrement entre «équation» et «identité». Ce qui est surtout important dans cet épisode, c'est qu'en introduisant des notions nouvelles, Fadak explique ce qu'il fait, élabore et donne du sens aux concepts. Nous remarquons que la plupart de ses verbalisations sont reliées à la prise et à la consignation d'informations.

L'épisode 4 débute par une rétroaction en cours d'action. Pour avoir fait tous ses dessins à main levée, Fadak s'est rendu compte qu'il a dessiné x^2 et y^2 (respectivement $-x^2$ et $-y^2$) comme si x et y étaint égaux. Il est revenu sur les dessins en se servant cette fois-ci d'une règle et d'un compas. Il a fait remarquer *que «les côtés des deux carrés doivent avoir des dimensions différentes»* (i.e; les côtés sont tels que $x < y$ ou $x > y$, mais pas $x = y$). Il est revenu, ensuite, sur la convention des signes (±) des coefficients avec le fait que les tuiles sont colorées ou non. En motivant et en engageant les élèves dans les activités langagières, il fait noter que x^2 et $-x^2$ sont des termes opposés, de même que y^2 et $-y^2$. Par le questionnement, il fait comparer les graphies algébriques aux représentations géométriques. Les processus cognitifs de prise et de consignation d'informations et ceux de représentation/environnement didactique interviennent principalement au cours de cet épisode.

L'épisode 5 se centre sur la construction des grands rectangles pour représenter les monômes du second degré. Fadak y demande aux élèves de dire *«comment est-ce qu'on peut bien faire ça?»*. Il fait représenter les monômes xy et $-xy$ par deux bandes rectangulaires en faisant expliciter que x et y expriment respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle. Dans l'ensemble, en questionnant et en gérant la participation des élèves, Fadak est parvenu à faire passer l'essentiel des «consignes». Les verbalisations ont permis de déceler une phase d'appropriation, au cours de laquelle Fadak a amené les élèves à se faire une idée de ce qu'il faut faire pour construire les grands carrés qui représentent les termes du second degré. Ces verbalisations ont permis de déceler une autre phase, celle de procéduralisation/composition, au cours de laquelle les consignes sont utilisées pour construire différents grands rectangles.

C'est au cours de l'épisode 6 que l'activité de découpage a demandé plus de travail. On y voit Fadak disposer son matériel et vérifier la tâche de modélisation dans son cahier de préparation. Après avoir fait rappeler ce qui a été fait concernant la forme $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, il a demandé aux élèves de développer l'expression $(x + 3)(x - 3)$ et de la représenter géométriquement. Après un temps de recherche individuelle, il a demandé aux élèves de dire comment ils ont représenté cette expression à l'aide des tuiles. Ensuite, il leur a montré une feuille de carton, de forme carrée et d'aire a^2, dans laquelle est dessiné un petit carré d'aire b^2. Il a découpé ce petit carré et fait remarquer que la pièce restante a pour aire de surface $a^2 - b^2$. Il a demandé aux élèves de dire *comment découper cette pièce restante pour lui donner une forme rectangulaire.* Dans cet épisode, les activités de modélisation et d'intégration des connaissances sont interreliées, très intenses, mélangées à des processus de résolution de problèmes. Entre les processus d'élaboration/organisation, de généralisation/discrimination et de procéduralisation/composition, d'une part, et ceux de régulation et de contrôle du sens, d'autre part, Fadak fait des retours vers la prise d'informations, la représentation du problème et l'environnement didactique, et la mobilisation des connaissances antérieures. Mais, puisque les élèves ne savent pas bien comment procéder, ils ne se sont pas satisfaits de savoir ce que Fadak a fait dans l'exemple précité; ils se sont posé la question *pourquoi il (Fadak) a fait ça comme ça*?

Dans l'épisode 7, consacré au recollage, Fadak pose la question de savoir comment construire un rectangle à partir des deux soit-disant trapèzes. Comme il y a débat et que les élèves cherchent à se représenter la tâche, Fadak s'emploie par des consignes indirectes à identifier les actions à faire. Il laisse les élèves s'y essayer, puis il confronte leurs réponses. Il revient sur le modèle découpé dans une feuille de carton pour «trancher», en recollant après retournement des deux soit-disant trapèzes. Il recueille les différentes propositions sur les dimensions du rectangle ainsi construit; il parvient à faire conclure que l'aire de la feuille restante (après le découpage) et celle du rectangle formé par recollage sont égales, ce qui, symboliquement, établit l'IR $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. La réaction des élèves à cette activité nous fait croire qu'ils acceptent la dévolution de la tâche de recollage et que ce qui les motive, c'est moins de faire le travail demandé par l'enseignant que de comprendre vraiment le sens de cette activité dans leur apprentissage des IR. La séquence des stratégies utilisées permet de retracer deux phases: une phase d'appropriation du problème et une d'exploration des différentes hypothèses qui sont validées au fur et à mesure. Il s'agit d'un travail pratique de modélisation qui fait appel à l'intégration des connaissances. Dans son journal de bord, Fadak reconnaît qu'«*il est important, pour la suite, de vérifier si* *les élèves seront enclins à se servir des outils dont ils disposent. Je ne l'ai pas fait de façon régulière, mais je dois en tenir compte à partir de maintenant*».

Dans l'épisode 8, Fadak demande aux élèves de poser des questions sur les parties floues de la démarche, cela avant de découper et de recoller leurs propres feuilles. Un élève (Moussa) lui demande pourquoi la largeur du rectangle formé par recollage des deux trapèzes égale a - b. En recourant au modèle et en faisant considérer différents morceaux de carton et leurs dimensions respectives, Fadak amène Moussa à trouver lui-même la réponse. Cette difficulté peut être contournée si on prend le soin de marquer des repères, c'est-à-dire de mentionner sur les différents côtés leurs mesures respectives, cela aussi bien au recto qu'au verso. Un autre élève pose la question de savoir comment distinguer les termes à coefficient positif des termes à coefficient négatif à partir du coloriage. Fadak fait remarquer que, dans ce cas-ci, le coloriage n'est pas nécessaire, puisqu'on a affaire aux aires de surface a^2 et b^2 (qui ne peuvent être négatives). Une troisième question concerne le sens du signe (-) dans l'écriture $a^2 - b^2$. La classe a chahuté Bouba qui l'a posée, mais Fadak s'est empressé de dire qu'«*il n'y a pas de question bête, dans la mesure où celui ou celle qui la pose exprime des difficultés*».

La question posée est d'ailleurs loin d'être une question «bête», car elle exprime une confusion que bon nombre d'élèves entretiennent entre le signe «moins» indiquant «l'opposé de ... » et le signe «moins» qui désigne l'opération de soustraire, de réduire. Dans le second cas qui intéresse, il ne s'agit pas de colorer ou de ne pas colorer une aire de surface, mais plutôt de la «découper». Fadak fait bien, d'ailleurs, d'insister et de rappeler que dans le premier cas (coloriage/non-coloriage), il s'agit d'une convention qui permet de distinguer x de $-x$, x^2 de $-x^2$, xy de $-xy$, ces monômes étant deux à deux opposés. Fadak tente, en fait, de mettre en place les moyens de contrôle du sens par l'élève, comme en témoignent les éléments suivants: faire venir un élève au tableau pour expliquer aux autres le sens du signe (-) dans l'expression $a^2 - b^2$; il se refuse de le faire lui-même; inciter les élèves à échanger leurs idées avec les autres; il ne se satisfait pas de la réponse de l'élève.

En conclusion de cette première séquence didactique, nous pouvons dire que Fadak a consacré une bonne partie de ses activités d'interactions avec les élèves à un travail de construction et de contrôle du sens. Nous pouvons, en effet, dire que la prise en compte des analyses préalables est bien actualisée chez lui et qu'il y a même anticipation sur les moyens didactiques à venir pour une prochaine séquence, puisque, d'une part, sa préparation des séquences inclut un travail d'anticipation des difficultés sur les activités de modélisation conçues à cet effet et, d'autre part, qu'il exprime déjà sa volonté de changement pour les séquences à venir.

2.2.2.2 Épisodes de la deuxième séquence

Une grande étape a été franchie par Fadak qui veut, à présent, travailler au niveau de l'appropriation par les élèves des activités de modélisation et d'intégration des connaissances. C'est cet important investissement didactique que nous montrent les épisodes 9, 10, 11, 12 et 13 suivants.

C'est au cours de l'épisode 9 que Fadak fait développer l'expression $(x + 2)^2$ et la fait représenter géométriquement. Fadak commence par rappeler les devoirs donnés aux différents groupes: construire les modèles des IR $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Il demande au représentant de chaque groupe de faire le compte rendu de leur travail au tableau.

L'épisode 10 est consacré à la présentation des modèles construits par le premier groupe. Une fille de ce groupe (Anne) dessine au tableau un carré, sans grande précision. «*Je suppose que c'est un carré*», dit-elle. Elle dessine, ensuite, les autres tuiles (correspondant à ab - horizontal, à ab – vertical et à b^2) avant de revenir à ses cartons. «*Est-ce que c'est compris?*», demande-t-elle au reste de la classe. Après que les élèves aient exprimé leur désaccord avec les notations de Anne (a à la place de $a - b$), Fadak initie une discussion: «*comment savoir si c'est a ou a – b?*». Après un moment de réflexion, une élève (Jeanne) affirme que le côté initial (de mesure a) a été amputé de b unités et que ce qui en reste ne peut mesurer que $a - b$. Fadak fait venir au tableau un autre élève (Sékou) pour expliquer l'erreur relative à a^2, mise à la place de $(a - b)^2$ et cet élève se tire bien d'affaire. Fadak institutionnalise, enfin, cette procédure. Trois grands processus (modélisation, intégration des connaissances et contrôle du sens) caractérisent cet épisode.

L'épisode 11 nous montre d'abord un garçon (Aly) du second groupe dessiner un carré de côté *a* et le prolonger de *b* unités. Aly explique comment il détermine les aires des différentes tuiles (a^2, ab, b^2, ab). Ensuite, il passe au découpage du carton pour expliquer ses développements algébrique et géométrique. Bien que Aly ait mieux conçu et expliqué que Anne le modèle géométrique de l'IR $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, il reste que le découpage et le recollage opérés ne sont pas aussi évidents qu'il semble le croire. En effet, un autre élève (Issa) dit ne pas comprendre la logique de la construction, encore moins la relation entre le modèle en carton et la graphie algébrique de l'IR. Là-dessus, Fadak revient sur les différentes étapes de la construction du modèle et, en procédant par questionnement, il amène Issa à répondre lui-même à la question. L'épisode 11 est dominé par les stratégies de modélisation, d'intégration des connaissances et de procéduralisation/composition. Le contrôle du sens ne s'exerce pas sur le détail d'une procédure (découper et recoller une feuille de carton), mais globalement sur le sens des opérations. Le travail didactique est donc orienté plutôt sémantiquement que syntaxiquement. Cette décentration de la procédure pour elle-même (comme lorsque les activités de découpage et de recollage se font trop insistantes) est remarquable et met en évidence la profondeur de l'adaptation de Fadak en regard de ses propres prises de conscience lors de l'analyse a priori de la première séquence.

L'épisode 12 est un bref épisode au cours duquel un représentant du troisième groupe (Jean) procède comme celui du second groupe, mais avec plus de détails. Il s'agit d'un modèle qui est déjà élaboré en groupe que ce représentant refait. Presque tous les processus y sont sollicités, notamment ceux qui relèvent de la modélisation, de l'intégration des connaissances, de la cognition et de la résolution de problèmes.

Dans l'épisode 13, Fadak fait la synthèse avec le groupe-classe en reprenant les idées principales de la démarche de modélisation. Il explicite cette démarche par l'exemple de $(x + 2)^2$ qu'il traite lui-même, en y associant les élèves par questionnement. Dans la logique du déroulement de cet épisode, le fait que Fadak demande aux élèves des explications sur la procédure de découpage a tout de même une fonction didactique, celle de se servir des erreurs commises pour montrer l'importance du découpage. Il est, toutefois, moins sûr que cela agisse sur les procédures des élèves puisqu'il s'agit, en réalité, d'une correction par élève interposé. D'ailleurs, la suite le montre bien puisque Fadak fait travailler par une élève (Aïcha) le cas de $(2x + 2)^2$ et qu'il semble satisfait que la procédure soit cette fois-ci correctement utilisée. Aïcha dessine, en effet, un carré de côté $2x + 2$, à partir d'un carré initial de côté $2x$. Elle réussit à le représenter géométriquement, sans difficulté. «*Et si on avait $(-x + 4)^2$ à représenter géométriquement...?*», demande un autre élève (Ben). Ce dernier devra attendre l'activité suivante qui est précisément consacrée à l'IR $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ englobant ce cas. En écoutant attentivement les élèves, Fadak cherche à saisir leurs idées, à les reformuler et à les exploiter. Nous notons plusieurs liens entre les activités de contrôle de sens et de procéduralisation/composition. La séquence de stratégies se distingue des précédentes par le va-et-vient continuel entre les processus de modélisation et d'intégration plutôt que par des phases qu'on pourrait taxer l'une plus centrée sur la modélisation et l'autre axée sur l'intégration des connaissances.

En conclusion de cette seconde séquence, nous pouvons dire que Fadak a mis en place un débat sur différents systèmes de représentation des IR. Il a demandé aux élèves de les analyser pour identifier lesquels sont valides et de justifier pourquoi. Il a donné assez de place aux idées des élèves. L'intérêt des procédures de modélisation et de la façon dont elles sont menées tient dans le fait que Fadak s'est refusé à répondre lui-même et à «proposer» le modèle. Le contrôle est donc exercé par les élèves eux-mêmes; cette volonté de dévolution est confirmée dans son journal de bord. «*Ce jour, j'ai fait traiter des exercices (...) qui portent sur le découpage et le recollage des feuilles de carton pour développer les formes $(a + b)(a + b)$ et $(a - b)(a - b)$. Les élèves ont procédé eux-mêmes au découpage et au recollage. Ils ont ressorti ainsi l'importance de regarder les modèles dans leur totalité*». Nous soulignons la profonde modification de stratégies utilisées par Fadak par rapport à la première séquence: au lieu de questionner les élèves sur ce qu'ils font pour construire leurs modèles des IR, il leur demande d'entrer dans un échange de type adidactique et où ils évitent des formes de type généralisation/institutionnalisation.

2.2.2.3 Épisodes de la troisième séquence

Dans l'épisode 14, Fadak demande aux élèves de développer algébriquement $(x - 3)^2$ et $(x - 1)^2$, et de les représenter géométriquement. Bien que, à ce stade, les élèves sachent quoi faire, Fadak préfère leur faire ébaucher les grandes étapes de la modélisation;

c'est une façon d'activer leurs connaissances (nouvelles et antérieures) et d'anticiper les tâches à faire. La démarche de Fadak consiste à mettre en place un débat et c'est ce débat des élèves entre eux qui a pris en charge une évaluation des modèles construits et un moyen du contrôle du sens.

Avant de changer d'exercice dans l'épisode 15, Fadak revient sur la convention des signes en fonction de "coloré, hachuré" ou "non coloré, non hachuré". Il fait aussi des rappels sur la représentation dans un système d'axes orthonormés et sur les signes dans les différents quadrants de ce système. Il utilise la règle et le compas pour mieux représenter les axes et les tuiles. Il pose des questions sur les formes géométriques introduites lors de la première séance: «*Quelle est la forme géométrique de x?*», «*Quelle forme géométrique correrspond à 1*?». Les verbalisations sont surtout constituées de la description de ce que Fadak écrit au tableau à ce moment. Il s'agit, pour lui, d'amener les élèves à se représenter l'exercice de modélisation et de mobiliser les connaissances requises. Les liens qui existent entre les processus d'élaboration/organisation, de généralisation/discrimination et de procéduralisation/composition, d'une part, et les processus de planification, de régulation et de contrôle du sens, d'autre part, ressortent abondamment des verbalisations.

L'épisode 16 est dominé par les processus de modélisation et d'intégration des connaissances. Toujours par le questionnement, Fadak fait établir comment représenter les facteurs (x + 2) et (x - 2) respectivement sur l'axe des *x* et l'axe des *y*. Pour aider les élèves à déduire les dimensions du rectangle ainsi construit, Fadak les invite à lire sur les axes. Il invite un élève (Abdel) à vérifier s'il peut faire un lien entre les dimensions du rectangle (contexte géométrique) et les facteurs du trinôme (contexte algébrique). Nous notons plusieurs liens entre les activités de contrôle de sens et de procéduralisation/composition.

Dans l'épisode 17, Fadak encourage les élèves à poser des questions pour mieux comprendre. Une élève (Hana), qui n'avait pas compris, repose la question de comment passer d'un cadre à l'autre. Là-dessus, Fadak intervient en attirant l'attention des élèves sur le fait que si l'on doit regarder les axes pour y lire les dimensions du rectangle construit, on ne doit cependant plus prendre ces axes en compte pour écrire les termes du développement algébrique. À une autre question sur le rapport entre les facteurs et les axes, Fadak fait remarquer qu'à cause de la commutativité de la multiplication, il n'est pas obligatoire que le premier facteur soit sur l'axe des *x*. Il ne s'agit pas ici d'une activité cognitive, mais plutôt de gestion de savoirs nouveaux.

L'épisode 18 est surtout consacré à l'utilisation des IR dans le calcul numérique (calcul rapide ou mental). Fadak donne l'exemple du produit 19 x 21 qu'il détermine rapidement à l'aide de l'IR $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Après cet exemple, il demande aux élèves de dire comment calculer 58 x 62. Il fait passer une fille (Cathy) au tableau pour expliquer à ceux qui n'ont pas compris la procédure. Un garçon (Souley) vient, à son tour, calculer 68 x 72, sans difficulté. Fadak passe, ensuite, au calcul du carré des nombres terminés par 5 et fait effectuer quelques exercices. Nous remarquons une activité cognitive plus intense. Ce dernier épisode se déroule rondement. Les exercices sont quelque peu répétitifs par rapport aux précédents; même si les élèves prennent le temps de bien les faire, on sent qu'ils travaillent plus vite qu'au début; ce sont des exercices où ils savent très bien quoi faire.

2.2.3 Résumé du cas de Fadak

Quatre des épisodes analysés (1, 3, 5 et 15) sont consacrés à la prise et à la consignation d'informations. Les épisodes, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14 et 16 placent Fadak et ses élèves en réelle situation de modélisation et d'intégration des connaissances. Dans ces épisodes, nous relevons quelques similitudes dans sa façon d'enseigner. D'abord, Fadak fait une large part aux processus de généralisation/discrimination et aux stratégies de consignation d'informations. Nous observons, chez lui, une propension à enseigner par les exemples, à comparer ces exemples et les exercices, en faisant retracer à la fois leurs points d'intersection et leurs différences. D'ailleurs, ce fait est confirmé par les séquences didactiques observées où l'on voit Fadak pointer les propriétés et les définitions pour les comparer. Les propos de Fadak, en entrevue, le confirment aussi: *«Je prends les IR l'une après l'autre; je demande aux élèves de les représenter d'abord algébriquement, puis géométriquemen; enfin, je leur demande de comparer les résultats des deux approches. Les élèves peuvent ainsi apprendre en comparant les deux méthodes, en distinguant les éléments des deux méthodes».*

Ceci explique que, même en faisant résoudre les problèmes, Fadak fait utiliser largement le processus de généralisation/discrimination. Le résumé de son cas fait ressortir les réponses que cette analyse apporte à nos questions de recherche. En effet, les matrices et les stratégies utilisées par Fadak nous apprennent que:

1. l'intégration des connaissances a «*facilité d'abord la compréhension au niveau des élèves, en leur permettant de travailler avec deux méthodes qui font aboutir aux mêmes résultats*». Elle a permis de lier certaines notions théoriques à l'activité de découpage et de recollage; elle a surtout permis de représenter la multiplication des IR. Fadak souligne que la représentation géométrique est d'autant plus intéressante qu'elle nous dispense de calculer le discriminant Δ pour déterminer les valeurs x_1 et x_2 qui annulent $ax^2 + bx + c$. L'intégration a aussi permis de développer chez Fadak et ses élèves des compétences en résolution de problèmes. Dans son journal de bord, Fadak rapporte que «*les élèves ont trouvé, eux aussi, que ce n'est plus un mystère et qu'ils peuvent désormais résoudre les problèmes à l'aide des deux outils*». L'intégration des connaissances s'est aussi accompagnée des activités langagières et symboliques fort intéressantes. L'analyse du cas de Fadak montre que le recours à ces activités peut être un déclencheur pour la mise en route des processus décrits plus haut. La conception, la conduite et l'analyse de ces activités ont entraîné une prise de conscience (conceptualisation) et une prise de décision qui sont un peu plus apparentes chez Fadak que chez la plupart de nos formés.

2. Le plus difficile, pour Fadak, a été d'enseigner les notions théoriques (monômes, binômes, etc). La difficulté réside, en fait, dans la conception, la réalisation et l'analyse des activités qui permettent d'enseigner ces notions théoriques. Le poids des difficultés de la composante didactique est d'autant considérable que les questions liées à l'importance à accorder à chacun des concepts constitutifs des IR, la façon d'organiser ou de regrouper ces concepts et la façon de les planifier leur enseignement dans le temps ne sont pas entièrement résolues.

3. Par rapport à l'emploi des règles formelles qui produisent des représentations essentiellement instrumentales, l'intégration des connaissances a suscité chez Fadak une meilleure représentation de l'addition et de la multiplication des IR. L'utilisation des tuiles

lui a, en effet, permis, d'une part, de représenter la multiplication et la factorisation des polynômes, et, d'autre part, de montrer que les facteurs d'une différence de carrés ($a^2 - b^2$) sont des conjugués dont les termes (a+b) et (a–b) correspondent aux dimensions d'un certain rectangle.

4. L'intégration des connaissances a développé chez Fadak les compétences didactiques liées à sa pratique d'enseignement, notamment des compétences en résolution de problèmes. Ceci est d'autant plus important que la résolution de problèmes constitue l'une des principales difficultés de l'enseignement des mathématiques. Fadak a aussi largement profité de l'attention et de l'importance que le Séminaire a accordées à la résolution de problèmes.

5. L'intégration des connaissances a favorisé la connexion des savoirs mathématiques et didactiques. En effet, Fadak a accordé une grande importance aux situations-problèmes qui renvoient à plusieurs champs conceptuels et à de nombreuses habiletés (comprendre le problème de plusieurs façons, utiliser différentes approches, appliquer les IR dans le calcul numérique, etc.). D'autres placent les élèves dans des situations où la représentation géométrique les conduit à une représentation symbolique, celle-ci les faisant cheminer vers une formulation de règles (généralisation/discrimination) ou une recapitulation des idées essentielles relatives aux différents cas de figures (synthèse).

6. L'enseignement de Fadak s'est adapté en fonction des données et des contraintes du Séminaire. En effet, avant le Séminaire, pour Fadak, «*résoudre un problème sur les IR revient à chercher les calculs qu'il faut effectuer sur les termes de l'énoncé, ou à appliquer les règles qu'on a mémorisées*». Puis, une fois un résultat produit, l'élève attend le verdict de l'enseignant pour savoir si c'est «bon», plutôt que de chercher lui-même à vérifier ou de s'interroger sur la validité de ce résultat. Un certain nombre de causes de ces difficultés sont probablement à chercher dans des habitudes de travail mises en place dès le Primaire, en particulier, dans l'emploi assez limité des problèmes, placés le plus souvent en fin d'apprentissage, et dans la rareté de véritables situations didactiques. Fadak, qui a largement profité du Séminaire, a compris que la résolution de problèmes joue un rôle

essentiel dans l'élaboration et l'appropriation des connaissances. Les modifications qui se sont opérées chez lui se reconnaissent à travers les types de problèmes qu'il a fait résoudre.

Nous en distinguons deux séries bien différentes: un premier ensemble de 12 problèmes où il ne dévolue pas à l'élève le contrôle des résultats, et un second ensemble de 18 problèmes où la confrontation entre les résultats, les contraintes de la situation et les buts visés deviennent un objectif d'apprentissage. Dans le premier cas, les problèmes proposés sont tels que le processus de résolution n'oblige pas l'élève à vérifier ses résultats ou ses méthodes, persuadé qu'il est d'avoir choisi un moyen (l'approche algébrique formelle) lui permettant de les résoudre entièrement. Fadak, qui a largement profité du Séminaire, a compris que le contrôle des résultats par l'élève doit être explicitement dévolu par l'enseignant et que cette dévolution est une tâche supplémentaire, non exigée par la situation. Aussi, ce type de situations étant peu favorable à une prise de conscience suffisante chez l'élève de la nécessité de valider ses productions, Fadak a dû proposer une deuxième série de véritables problèmes, car l'élève ne maîtrise pas le contexte géométrique comme celui des graphies algébriques pour lequel il dispose d'un modèle de résolution qui lui a été enseigné. L'élève a certes plus de mal avec ce type de problèmes, car il doit mener en même temps des tâches de résolution (modélisation) et des tâches de contrôle (validation du modèle). La confrontation entre les modèles produits et les buts visés peut entraîner des ajustements, des réorganisations ou une mise en cause de la méthode choisie. Cette confrontation, nécessaire entre les résultats obtenus et les contraintes de la situation, peut motiver une recherche dans une nouvelle direction; elle peut devenir un objectif d'apprentissage: être capable d'évaluer le résultat de son action, être capable de valider ses modèles.

7. L'habileté de Fadak à concevoir, réaliser et analyser ses activités a varié en fonction du contexte spécifique lié à sa position duale. En effet, Fadak a été à la fois *élève* par rapport au formateur (il a appris à se servir des tuiles et des formes géométriques pour construire des modèles des IR et à intégrer ses connaissances) et *enseignant* par rapport à ses propres élèves du lycée Kipé pour les trois séquences qu'il a réalisées dans le cadre de cette recherche. Pendant qu'il était élève, Fadak a été confronté à diverses situations de modélisation, d'intégration des connaissances et de résolution de problèmes. Il a ainsi

appris à réaliser que construire un modèle n'est pas toujours facile et que cela peut prendre du temps. Il a appris à produire une solution personnelle, à construire un modèle personnel; il a appris à vérifier par lui-même ses modèles, et à les valider; il s'est exercé à justifier ses résultats, ses modèles, ses méthodes et à rédiger sa solution.

La mise en place d'un tel ensemble de compétences a permis à Fadak, une fois en position d'enseignant par rapport à ses propres élèves de Kipé, de penser ce qui lui a été dit par le formateur à partir de sa position de futur enseignant, mais sans pouvoir se soustraire aussi de sa position d'enseigné. Cela est conforme à d'autres résultats de recherche sur le fonctionnement du formé à partir de sa position anticipée dans le système didactique (Portugais, 1995). En entrevue, Fadak nous a confié que «*les tâches elles-mêmes n'étaient pas très difficiles, mais leur non-familiarité induisait quelques difficultés*», ce qui montre bien que dès la première séquence, il était conscient des contraintes spécifiquement cognitives (mathématiques) présentes dans ses tâches et qu'il savait déjà tirer un profit didactique des analyses préalables faites en Séminaire.

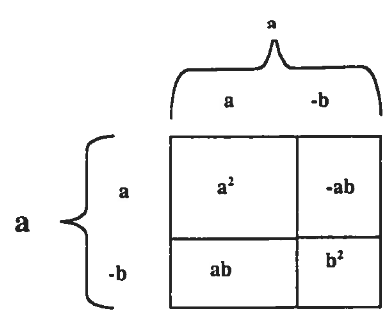
L'analyse détaillée des séquences didactiques de Fadak nous permet ainsi de constater que la tâche a été relativement facile et que le tout s'est déroulé avec une certaine satisfaction. Fadak a gardé une grande concentration tout au long de ses séquences et il a aussi montré une grande confiance en lui. Il a activé et fait activer des connaissances antérieures, notamment celles du Séminaire, et il a pris conscience des éléments à vérifier. Il a reconnu les étapes semblables d'une situation à l'autre et s'est servi de ces informations pour fonctionner en «expert» pour les activités de modélisation et d'intégration des connaissances. Que tout ceci puisse se réaliser en seulement trois mois, voilà qui est révélateur non seulement de l'efficacité du dispositif, mais aussi de la pertinence de la situation de la formation.

8. Comme effets positifs qui se sont manifestés chez Fadak, il faut citer ses intentions didactiques de départ de faire valoir l'importance de la modélisation et de l'intégration des connaissances aux yeux des élèves. Il faut également citer ses bonnes iniatives, son implication par rapport à diverses activités et sa volonté d'enseigner puisqu'il affirme en entrevue: «*je veux que les élèves soient capables d'utiliser les tuiles et les formes*

géométriques pour représenter les IR ainsi que les opérations sur les IR». Les commentaires faits sur la préparation des séquences permettent de voir comment les choix didactiques sont faits par Fadak et en fonction de quels buts ils sont faits. Pour nous, ceci indique qu'il y a même anticipation sur les moyens didactiques utilisés dans les différentes séquences, en particulier en ce qui concerne la prise en charge des analyses préalables. Malgré l'ampleur adidactique de la stratégie glogale de Fadak, nous notons la variation spontanée et adéquate des tâches selon les besoins et ce, au bon moment, ni trop tôt ni trop tard; nous notons aussi l'encouragement de ce qui s'annonce promoteur, sans pour autant «court-circuiter» une hésitation par trop de critiques ou de suggestions, l'incitation des élèves à contrôler le sens de leur travail.

Toutefois, Fadak n'a pas obtenu tout ce qu'il attendait des élèves. Il est lui-même loin de penser qu'il a fonctionné «idéalement» par rapport au dispositif. Loin de considérer cela comme un échec, nous avons plutôt cherché à approfondir avec Fadak les aspects suivants en termes de difficultés rencontrées:

9. En parlant des difficultés rencontrées dans l'intégration des connaissances, Fadak rapporte que «*les difficultés se situent à plusieurs niveaux: notation, procédure, modalité de découpage et de recollage, utilisation des instruments de travail, etc.*». L'une des difficultés rencontrées dans de nombreux cas, aussi bien chez des élèves que chez certains formés, concerne la notation et le repérage. Par exemple, dans la construction du modèle de l'IR $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, nous rencontrons assez souvent ce qui suit:



Les tuiles d'aire ab et b^2 sont toutes prises dans le grand carré de départ, celle d'aire b^2 étant prise deux fois. Ainsi, dans la figure ci-dessus, a n'est plus la mesure du côté initial et les élèves ne semblent pas du tout gênés de continuer à noter par a ce qui, du fait même du rétrécissement du côté initial de b unités, est $a - b$. De même, ce qu'on désigne par a^2 n'est, en fait, que $(a - b)^2$. La compréhension de ces difficultés rencontrées exige que l'enseignant mette l'accent sur la conception, la réalisation et l'analyse des activités de modélisation appropriées pour aider les élèves à mieux comprendre les IR. Notre recherche s'inscrit dans une telle perspective non seulement pour aider l'élève à construire des modèles significatifs des IR mais aussi pour permettre à l'enseignant d'éviter les contradictions inhérentes à la communication des savoirs, l'enseignement se nourrissant, comme l'atteste Brousseau (1988), de paradoxes qui rendent fragile cette communication. Ainsi, les situations didactiques demandent à être conçues en fonction des connaissances visées et Brousseau nous suggère de prévoir un ensemble de scénarios possibles qui permettent de les construire. Cela signifie que les situations de modélisation proposées aux élèves doivent tenir compte non seulement de leurs rapports constructifs avec les savoirs algébriques et géométriques sur les IR, et les obstacles qui interfèrent dans ces constructions, mais aussi des échanges qui ont lieu entre les élèves et avec l'enseignant, de façon à comprendre les conditions dans lesquelles les élèves abordent ces situations.

LE CAS DE ADA

Le cas de Ada est utile pour nous montrer les difficultés de parcours que peuvent produire les contraintes de la situation de formation. Il permet de montrer comment le formé remet en question son propre mode de fonctionnement et tente d'en modifier l'approche. L'analyse et l'interprétation des données recueillies auprès de Ada sont présentées en trois parties comme pour Fadak: la présentation générale, les stratégies utilisées et les relations entre ces stratégies.

1 Présentation générale

L'histoire personnelle, la présentation des données et les commentaires de Ada sur sa participation à cette recherche font l'objet de la première section.

1.1 Histoire personnelle

Ada est une étudiante de 22 ans qui a poursuivi ses études secondaires dans le profil sciences mathématiques dans la région de Conakry. Elle estime qu'elle réussissait plutôt bien en mathématiques au lycée. Elle est présentement inscrite en 3e année mathématiques à la Faculté des Sciences de l'UGANC. Elle qualifie elle-même sa réussite *d'assez bien en mathématiques* à l'université parce qu'elle y met assez d'efforts. Elle se dit très motivée par ses études, quoique l'an dernier elle se soit un peu *laissée aller*. Elle a terminé ses cours de mathématiques de la 2e année avec une moyenne de 65 %, une note inférieure de 10 % à ses notes habituelles. Elle dit aimer tous les cours auxquels elle est inscrite dans le programme de Maîtrise. Comme ses camarades de l'UGANC, elle n'a reçu aucune formation pédagogique, aucun cours en didactique des mathématiques.

De plus, Ada n'a enseigné ni dans le cadre formel ni dans celui informel. «*C'est la première fois dans ma vie que je me trouve devant les élèves en situation d'enseignement*», avoue-t-elle. Ada est l'une des deux courageuses filles d'une classe de 35 étudiants qui n'expriment aucun regret de s'être orientée en mathématiques, car elle estime que les difficultés rencontrées constituent une expérience qui, de toutes façons, l'a enrichie. Ada est aussi l'unique formée de l'UGANC à participer à presque toutes les activités du Séminaire. Elle ne s'est absentée qu'une fois pendant la recherche et elle s'est aussitôt informée des activités réalisées à son insu et des tâches à faire. Elle n'a malheureusement pas pu se présenter à la troisième séance au moment convenu. Celle-ci a été reprise en différé, mais n'a pu être filmée, le cameraman étant programmé ailleurs.

1.2 Présentation des données recueillies

Les données ont été recueillies avec les mêmes sources que pour Fadak. L'ordre de présentation de ces données selon chaque source reste le même que pour Fadak: les résultats du prétest et du post-test, les traces écrites, le journal de bord, les verbalisations, l'observation vidéo et les entrevues.

1.2.1 Résultats du prétest et du post-test

Ada a obtenu une note de 35 points sur 100 au prétest, une note certainement faible. Elle s'attendait elle-même à moins de 50 %. Pour comparer les résultats des tests de Ada à ceux de l'ensemble-échantillon, on peut consulter le tableau 7, p. 208. Ada se montre insatisfaite aussi bien de son résultat que de ses méthodes de travail. Comme elle le dira elle-même en entrevue, elle a mis beaucoup moins de temps que ses camarades à résoudre les problèmes. Elle explique, en grande partie, son faible résultat par le manque d'habileté à résoudre de tels types de problèmes auxquels elle n'est point familière. Mais, paradoxalement, elle l'explique aussi par la malchance. Le tableau ci-dessous donne ses résultats au prétest et au post-test (tableau 24).

Tableau 24: Résultats de Ada au prétest et au post-test

Dimensions	Notes	
	Prétest	Post-test
1. Dessin à main levée de $P(x) = x^2 - x$ et de $Q(x) = x^2 + 2xy + y^2$	1	3
2. Multiplication illustrée dans une figure	2	7
3. Utilisation d'aires de surface pour montrer que $a^2 + b^2 = c^2$	4	4
4. Analyse d'un modèle présentant une régularité remarquable	4	7
5. Calcul du volume d'une boîte fabriquée à l'aide d'un carton	2	4
6. Représentation d'un polynôme à l'aide de tuiles algébriques	1	3
7. Déduction d'un polynôme et ses facteurs à partir du produit géométrique	1	6
8. Calcul mental (rapide) de produits «remarquables»	3	5
9. Expression algébrique de la différence d'aires de deux carrés	4	4
10. Pourquoi la somme $a^2 + b^2$ ne peut pas être factorisée?	1	3
11. Comment calculer mentalement 45^2, 55^2, 75^2, 85^2 ?	4	5
12. Détermination d'un polynôme associé aux tuiles algébriques	2	11
13. Transformation d'un rectangle en un carré	1	3
14. Comment se servir des modèles géométriques pour expliquer les IR à un jeune ami qu ne les a pas encore étudiées?	5	10
TOTAL (sur 100 points)	**35**	**75**

Le tableau 24 montre que les problèmes 2, 6, 7 et 12 (qui font appel à l'intégration des connaissances) sont moins bien réussis que les problèmes 3, 9 et 11, lesquels mobilisent essentiellement des connaissances algébriques. Les réactions de Ada aux situations d'intégration des connaissances présentent des cas de figure suivants: 1) Ada ne donne pas de solution détaillée à certains items (Problème 7: elle écrit à peine une ligne complète: «$P(x) = (x + 1)(x + 2)$; $Q(x) = (x + 1)(x + 3)$»; 2) Ada évite la question soit en répondant par des évidences (Problème 10: «*on ne peut pas factoriser* a^2+b^2 *parce qu'elle n'est pas de la forme d'une identité remarquable*») soit en s'attachant à un seul aspect de l'énoncé (Problème 4: «*La règle qui traduit ce modèle est* $a^2 + b^2 + (a.b) = (a.b)^2 + 1$»; Ada ne fait aucune mention du plus important détail: $b = a + 1$); 3) Ada évite la question en inventant l'énoncé (Problème 1:

«*C'est la représentation graphique de P(x) et de Q(x) dans un système cartésien*); 4) Ada donne une réponse floue (Problème 2: «*Pour que le produit de deux binômes soit un binôme, il faut que le degré de l'un soit inférieur à l'autre*»; 5) Ada donne une réponse qui témoigne de la non prise en compte du contexte de modélisation et d'intégration des connaissances (Problème 13: «*Je ne serai pas d'accord avec eux [i.e; les élèves] car on n'obtient pas un carré, c'est-à-dire la figure est toujours un rectangle*»).

En entrevue, Ada dit éprouver quelques difficultés au plan du traitement en profondeur des situations rencontrées la plupart pour la première fois. «*Mon niveau de stress au prétest est très élevé*», nous confie-t-elle. Comme Fadak, elle avait l'impression qu'il y avait une barrière qu'elle ne pouvait pas franchir. Et, lorsqu'elle ne trouvait pas la solution, elle se sentait comme vaincue. Mais, à la différence de Fadak, elle n'avait pas l'impression d'être devant un trou. Toutefois, au terme du Séminaire, Ada a obtenu une note de 75 points sur 100 au post-test, alors qu'elle espérait obtenir au moins 80 sur 100. Nous constatons que ses attentes ont augmenté depuis deux mois de Séminaire. Elle s'estime quelque peu satisfaite de son résultat. Toutefois, ses réponses aux questions liées à l'intégration des connaissances dénotent une certaine insatisfaction concernant ses méthodes de travail. «*Cela découle, sans doute, de la conscience que j'ai de n'avoir pas mis assez d'efforts*», s'explique-t-elle. Ses attitudes, comportements et perceptions se sont certes modifiés depuis deux mois de séminaire et un mois d'ingénierie. Sa façon de traiter les informations au post-test s'est aussi sensiblement améliorée. Finalement, nous constatons que le stress qu'elle a vécu au post-test est moindre que celui du prétest.

1.2.2 Traces écrites (agenda, manuel du Séminaire, notes, brouillons d'exercices, évaluation formative)

Le manuel de Ada est très peu annoté; nous n'y trouvons que quelques signes et brèves remarques notés pendant le Séminaire. Elle note le travail à faire sur des feuilles volantes plutôt que dans l'un des cahiers fournis par le formateur. Peu de brouillons d'exercices sont disponibles. Elle se contente de recopier quelques définitions, formules et exemples que le formateur a notés au tableau. Ses brouillons contiennent très peu d'exercices supplémentaires. Les exercices qu'elle a remis au formateur ne sont pas tous bien identifiés et datés. Bon nombre de ses solutions sont incomplètes, son travail plus ou moins bien soigné.

1.2.3 Journal de bord

Le journal de bord de Ada est incomplet; peu de renseignements y sont consignés. Le journal rapporte deux séquences didactiques qui ont duré environ quatre heures. Concernant la préparation de ces séquences, les activités rapportées dans le journal sont les suivantes. D'abord, Ada profite du temps libre en classe; elle dit se donner cette règle de conduite pour disposer de plus de temps à consacrer à ses travaux de session. Elle cherche, ensuite, à finir le travail demandé pour le cours suivant afin d'éviter le retard. Elle dira, en entrevue, qu'elle n'étudie presque jamais la théorie, qu'elle lit l'énoncé, y retourne à l'occasion et rédige les exercices. Lorsqu'il lui arrive de se demander comment on fait pour résoudre un problème donné, elle cherche la méthode dans un exercice ou un exemple qui a été traité au cours du Séminaire. En somme, nous trouvons peu de détails dans son journal sur la façon dont elle s'y prend pour concevoir ses leçons.

Au plan affectif, nous y trouvons une indication des difficultés de concentration dues aux travaux de session, à la préparation des examens, etc. Nous constatons aussi que Ada, en plus de se dire des paroles encourageantes, prend des moyens pour se calmer lorsqu'elle s'énerve. N'oublions pas que c'est la première fois qu'elle se trouve dans une telle situation d'enseignement/apprentissage. «*Je dois dire que je n'ai jamais fait d'activités d'enseignement avant ce séminaire*», avoue-t-elle. Parlant des facteurs qui ont exercé une certaine influence sur ses activités, Ada rapporte que «*c'est la motivation que j'ai éprouvée lorsque je faisais ces travaux, car finalement, j'étais très intéressée aux activités de modélisation sur les IR*». Elle avoue avoir été angoissée au début, «*mais quand j'ai commencé les activités, j'ai ressenti une certaine confiance en moi. Je me suis dit que je peux faire le travail qu'on me demande*», note-t-elle. Quant aux difficultés rencontrées dans la réalisation de ses activités d'enseignement, Ada note qu'«*elles étaient d'ordre professionnel, car je n'avais pas la pédagogie. Je me demandais par quoi commencer la préparation et, une fois devant les élèves, comment je vais m'y prendre pour faire passer le message*».

1.2.4 Le cahier de préparation des leçons

Contrairement à ce que Fadak fait dans son cahier de préparation, Ada donne peu d'indications sur les objectifs ou sous-objectifs qu'elle se fixe pour enseigner les IR. Certes, elle prévoit une introduction de la leçon par la présentation des formes géométriques; mais elle introduit ces outils sans insister sur leur caractère conventionnel. Elle semble ignorer que les premières activités, surtout lorsqu'elles présentent les concepts intégrateurs, doivent gagner à être reliées à ce qui a été antérieurement vu par les élèves. Les concepts intégrateurs sont, ici, les énoncés de base qui annoncent les idées de carré unitaire, de bande rectangulaire, de grand carré ou de grand rectangle, concepts par lesquels elle tente de greffer de nouveaux concepts (tuiles algébriques) aux connaissances antérieures sur les IR. Dans son cahier de préparation des leçons, Ada prévoit la représentation des monômes et des polynômes à l'aide des formes géométriques à partir de quelques exemples suivis de définitions. Elle y mentionne la notion de tuiles dont elle se sert pour faire le produit de polynômes, toujours sur la base des exemples dont la plupart sont tirés du manuel du Séminaire. Le cours, tel que planifié dans le cahier de préparation, se termine par les activités de modélisation des IR. Nous y voyons peu de traces des activités de découpage et de recollage.

1.2.5 Verbalisations

Les verbalisations de Ada sont malheureusement souvent inaudibles. Au lieu d'utiliser le magnétophone de bonne qualité que nous lui avons prêté, elle s'est servie d'un appareil à microcassettes personnel. De plus, elle parlait bas et avait probablement disposé son magnétophone assez loin d'elle. De longs moments de silence nous font dire que Ada n'a pas suffisamment verbalisé ses pensées. D'ailleurs, les propos recueillis concernent plutôt la lecture d'énoncés ou la verbalisation de ce qu'elle écrit au tableau. L'analyse permet de reconnaître quelques propos liés à la gestion d'éléments cognitifs. Quelques propos orientent les élèves vers une comparaison avec leurs camarades et vers la compétition: «*Y a-t-il des garçons dans cette classe?*», dit-elle en souriant et en taquinant. D'autres propos semblent attribuer le succès aux facteurs extérieurs comme la chance et la facilité de la tâche.

Les verbalisations de Ada montrent tout de même qu'elle utilise des stratégies pour agir sur les facteurs cognitifs pour gérer ou contrôler la démarche cognitive de l'élève dans la construction d'un modèle. En effet, Ada utilise quelques fois des questions de niveau cognitif pour rappeler des connaissances simples sur les IR ou pour faire reconnaître les informations factuelles qu'elle a déjà présentées. Ces questions correspondent aux opérations de description des différentes formes géométriques, de leur reconnaissance et de leur utilisation dans la résolution de problèmes; mais elle utilise très peu de questions correspondant aux opérations d'analyse, de synthèse et d'évaluation de la compréhension des élèves. Une opération de synthèse aurait trait, par exemple, à la façon dont l'introduction des tuiles influe sur les habitudes de traitement des IR. En somme, plusieurs passages silencieux laissent croire à une réflexion, mais celle-ci ne peut être analysée.

1.2.6 Observation vidéo

Dans le cas de Ada, deux séquences didactiques ont été filmées. Des problèmes d'organisation du calendrier du chercheur, ajoutés à ceux d'organisation personnelle reliés à l'état de santé de Ada, ont empêché que la troisième leçon se déroule comme prévu et qu'elle soit filmée. Le fait que la deuxième séquence apporte plus d'éléments nouveaux que la première s'explique par les gros efforts que Ada a fournis pour remettre en question son approche pédagogique et pour s'adapter au dispositif.

La séquence commence par la disposition du matériel de base (règle, compact, etc.). Ada dessine les différentes formes représentant les monômes de façon quelque peu caricaturale. Et c'est de façon sommaire qu'elle introduit ces formes, comme si les élèves n'en faisaient qu'une redécouverte ou une révision. Ses comportements non-verbaux montrent aussi des signes d'angoisse et de nervosité en ce début de séance. Il lui arrive de regarder l'heure, de dessiner en silence à main levée, de changer de posture et de revenir sur ce qu'elle appelle «les consignes», c'est-à-dire les conventions. Ces conventions semblent presque évidentes à Ada et simples à faire passer. Pour elle, «*il s'agit de mobiliser les connaissances élémentaires sur les figures aussi familières que le carré et le rectangle*». Elle ne perçoit pas la nécessité d'offrir aux élèves des structures d'intégration (non immédiatement apparentes pour les élèves) reliées aux idées de carré unitaire, de bande rectangulaire dans leur base de connaissances ainsi qu'au matériel à intégrer.

Ce sur quoi Ada n'a pas cru devoir insister c'est, entre autres, comment différencier les termes à coefficient positif de leurs opposés. En un mot, les concepts intégrateurs ont produit chez bon nombre d'élèves des effets plutôt néfastes puisque les connaissances antérieures ont été insuffisamment activées. Par exemple, si l'élève ne sait pas se référer à un système d'axes orthonormés (comme c'est ici souvent le cas), le fait de lui relier la factorisation d'un polynôme au contexte géométrique ne peut que le confondre davantage. La séance se termine par des tentatives de définir le polynôme. Cet épisode fait ressortir la difficulté de définir les concepts nouveaux et abstraits tels que monôme et polynôme. Ada les a présentés sous forme de définitions formelles auxquelles les élèves ne sont pas parvenus à donner du sens («*Le polynôme est la somme de plusieurs monômes*»).

La deuxième séquence est essentiellement réservée à la résolution de problèmes. Pour Ada, c'est la partie «pratique» la plus intéressante de l'ingénierie. Elle y est visiblement décontractée, beaucoup plus à l'aise et plus fonctionnelle que dans la première séquence. Nous la voyons lire les énoncés, les survoler au besoin. Contrairement à ce qu'elle note dans son journal de bord, elle consulte assez souvent ses notes de cours et le manuel du Séminaire pour chercher des exemples semblables ou des éléments théoriques. La plupart des exercices et problèmes proposés par Ada sont ceux du prétest, repris au post-test. Elle survole la théorie en lien avec l'énoncé, revient en arrière (sur les conventions), analyse des exemples traités. Ada dit disposer de peu de temps pour amener les élèves à tenter plusieurs essais infructueux.

Elle termine la leçon par des exemples d'application des IR sur les calculs de produits remarquables, notamment du carré des nombres terminés par 5. Nous notons quelques arrêts, sans doute de réflexions, qui jalonnent la séquence de résolution et qui sont difficiles à analyser. Nous l'observons revenir souvent sur des étapes antérieures, sur des exercices précédents. Est-elle peu consciente de le faire ou le fait-elle davantage parce qu'elle se sait observée? Elle semble considérer la répétition comme une nécessité; c'est même une conviction chez elle: «*Il me faut répéter, répéter ... pour qu'il reste quelque chose*», argue-t-elle. Mais la répétition ne garantit pas forcément la compréhension; elle a même créé un problème: elle a, en effet, affaibli les intérêts des élèves à certains moments et a, par le fait même, diminué leur capacité d'attention volontaire. Du point de vue de l'enseignement proprement dit des IR et de l'intégration des connaissances que vise cet enseignement, c'est bien le fait pour Ada de découvrir elle-même quelques stratégies qu'elle n'entrevoyait même pas avant de participer au Séminaire qui est l'enjeu principal de ses activités. L'analyse des entrevues nous permet de comprendre les liens étroits et la dynamique entre les procédures ou stratégies que Ada a élaborées et la représentation qu'elle s'est construite progressivement, et les liens entre les connaissances du Séminaire qui lui ont servi en ingénierie et celles qui lui ont permis de comprendre l'intérêt d'utiliser le contexte géométrique.

1.2.7 Première entrevue

Des propos de Ada recueillis en entrevue, nous tirons les informations suivantes relatives à l'organisation, au déroulement et à l'analyse de ses séquences.

1.2.7.1 De l'organisation des séquences didctiques

En nous parlant des types d'activités, Ada dit avoir organisé ses activités autour des trois IR de base. «*J'ai expliqué ces IR à l'aide de figures géométriques et de tuiles algébriques. Nous avons étudié un peu les monômes et les polynômes. J'ai fait résoudre quelques exercices, après que moi-même en aie résolu à titre d'exemple*», précise-t-elle. Mais, contrairement à Fadak qui a utilisé les formes géométriques et les tuiles pour enseigner la multiplication des polynômes, elle s'est empêtrée dans des définitions formelles de monôme, binôme et polynôme. Elle a tout de même proposé quelques activités de découpage et de recollage, moins pour établir les IR que pour résoudre les problèmes qui consistent à déterminer l'aire de surface comprise tantôt entre deux carrés emboîtés, tantôt entre deux cercles concentriques. Nous avons trouvé peu de traces écrites de ces activités faisant appel au contexte géométrique. Enfin, Ada a fait traiter très peu d'applications numériques, se contentant du calcul du carré des nombres terminés par 5.

Quant à la planification de ses leçons et à la clarification de ses objectifs, Ada nous dit que c'est tout juste après le Séminaire qu'elle a commencé à préparer les leçons, *«petit à petit»*, avec Moh, un camarade de classe. Elle dit avoir consulté un cahier de 10^e année pour voir ce que les élèves de ce niveau ont fait sur les IR. Elle s'est surtout servie de la brochure du Séminaire et d'un livre dont elle n'a pas mentionné les références. C'est au cours de cette entrevue que nous avons su qu'il s'agissait du CIAM déjà mentionné par Fadak. «*En consultant ces documents, j'ai regardé ce qui concerne les IR et les polynômes. J'ai essayé de voir comment ils [les auteurs] ont expliqué ces notions*», ajoute-t-elle. Alors que Fadak a mis trois jours pour préparer ses leçons, Ada dit en avoir mis environ 6 heures, «*puisqu'on mettait deux heures environ pour préparer chaque leçon*».

1.2.7.2 Déroulement des séquences

Ada a fait construire par ses élèves des modèles géométriques des IR, car «*je me suis aperçue, à la lumière du Séminaire, qu'il est réducteur de concevoir les IR uniquement à travers des exercices sur le développement algébrique*». Ceci est l'indice que le Séminaire a contribué à développer et à élargir le champ conceptuel de Ada. Aussi, a-t-elle conçu un dispositif d'enseignement: un considérable support d'informations, mais une très courte période de recherche ou de construction de modèles par les élèves et, par conséquent, très peu de confrontation de modèles produits. Les activités d'intégration des connaissances (représentation des monômes et des polynômes à l'aide des formes géométriques) n'ont pas permis à ceux-ci de deviner l'intention de Ada. L'activation des connaissances antérieures et la négociation des conventions sur les formes et tuiles n'ont pas démarré par une phase adidactique d'action et de formulation susceptible d'engager les élèves dans la construction et la validation des modèles.

Ada nous explique comment elle s'y est prise: «*En première position, j'ai fait une introduction sur les formes géométriques. Ensuite, je suis passée à la représentation des monômes et des polynômes à l'aide de tuiles. Après quoi, j'ai fait passer au tableau deux élèves pour qu'ils s'exercent*», précise-t-elle. Concernant les parties théoriques relatives aux monômes et polynômes, Ada a constaté que «*lorsque je parle sans faire de dessins, les élèves n'arrivent pas à comprendre. J'ai donc directement enchaîné l'exposé théorique avec les représentations géométriques*». Ceci aurait permis aux élèves de bien voir ce qu'elle voulait dire. Avant de faire résoudre les exercices, Ada en fait toujours au moins un exemple, «*puisque les élèves ne savent pas de quoi il est question*», s'explique-t-elle. «*J'ai donné un second exemple pour leur permettre de mieux s'imprégner. C'est après ces deux exemples que je leur ai proposé quelques exercices*», ajoute-t-elle.

Constatant que malgré tout certains élèves avaient encore de la difficulté à construire des modèles, Ada en est venue à leur poser une série de questions pour les aider. «*Je leur ai demandé, par exemple, d'identifier les dimensions des tuiles, d'en déterminer l'aire de surface et de noter ces résultats dans les parties correspondantes du modèle*», précise-t-elle. Ada a elle-même constaté qu'un enseignement qui consiste simplement à montrer, à nommer les formes géométriques donne peu d'occasions aux élèves de prendre conscience de leurs conceptions des IR et de les faire évoluer. En entrevue, elle s'est proposée d'organiser désormais les situations didactiques de façon que cette prise de conscience se fasse autrement que par un discours explicatif.

Lorsque l'élève ne réussit pas un exercice ou un problème, Ada le traite elle-même. Elle rapporte que les difficultés sont d'ordre conceptuel: les élèves ne savent pas ce qu'est une «bande rectangulaire». À cela s'ajoute la difficulté, pour certains élèves, de se servir des tuiles pour représenter, par exemple, -3y et 3x. «*Et lorsque je leur demande de faire le produit dans le repère, ils débordent [ie; ne parviennent pas à délimiter exactement l'aire de surface correspondant au produit*]», ajoute-t-elle. Ada signale également les difficultés des élèves à comprendre les polynômes, «*parce qu'ils ne savent pas ce qu'est un monôme, ce qu'est un binôme; ils ne savent pas la différence entre monôme et binôme*», ajoute-t-elle.

En nous parlant de la façon dont elle a utilisé les tuiles, Ada dit avoir introduit les tuiles en parlant et en dessinant des carrés unitaires, des bandes rectangulaires, etc. Elle a, ensuite, demandé aux élèves de calculer les aires de ces figures. Selon elle, les élèves ont trouvé ces formes et ces tuiles très intéressantes. «*C'est surtout lorsque j'ai commencé à calculer l'aire de surface d'un assemblage de tuiles (...) que les élèves ont perçu l'importance de la représentation géométrique*». Les élèves ont utilisé leurs connaissances antérieures sur le calcul des aires des carrés et des rectangles. Ada estime que ces types d'activités sont liés au découpage et à l'assemblage de tuiles. «*En effet, c'est à partir du découpage et du recollage qu'on peut établir cette connexion*», commente-t-elle.

1.2.7.3 Analyse des séquences didactiques

À la question de savoir comment elle sait qu'elle a conçu et réalisé de bonnes séquences, Ada répond que «*Lorsque j'ai préparé la leçon sur l'IR* $(a + b)^2$, *j'ai vérifié les* *formes avec celles du Séminaire. J'ai pris une feuille de papier que j'ai découpée, j'ai vérifié si l'assemblage des morceaux [tuiles] me donne exactement la forme [le grand carré ou le grand rectangle] que je me proposais d'obtenir*». À travers les éléments de réponse qui précèdent, on peut se rendre compte que Ada ne fait même pas cas des réactions des élèves. Or la prise en charge de ces réactions est de toute première importance lorsqu'on veut favoriser non seulement le développement cognitif des élèves mais aussi les relations harmonieuses entre les «signataires» des contrats didactique et pédagogique. Par rapport à cette prise en charge des réactions et rétroactions des élèves, le problème de Ada est que la formation disciplinaire qu'elle a reçue à l'UGANC ne l'a guère aidée à percevoir ce qui se passe ou s'exprime dans sa classe. Cette formation l'a entretenue de mathématiques, mais ne lui a jamais dit que les élèves, lorsque la parole leur est rendue, ressentent parfois assez mal certaines contraintes du contrat didactique, surtout lorsque celles-ci n'ont aucun sens pour eux, et que les élèves aimeraient être reconnus comme des partenaires à part entière. Chez Ada, tout se passe comme si l'élève n'était pas le problème, l'important étant seulement ce que ce dernier apprend. En effet, son enseignement demande si peu la collaboration de l'élève que, dans un premier temps, elle a de la difficulté à l'adapter au niveau de ce dernier.

À la question de savoir ce qu'elle fait lorsque l'élève ne comprend pas, Ada repond: «*je l'amène, petit à petit, à la conclusion, à trouver lui-même la solution*». Quant à la question de savoir comment elle sait que les élèves ont bien aimé travailler avec les tuiles, Ada affirme que «*c'est à partir de leur participation au cours que je m'en rends compte. En effet, lorsque je donne un exercice et que je vois beaucoup de mains se lever pour passer au tableau, cela me fait croire que bon nombre d'élèves sont intéressés à résoudre cet exercice*», commente-t-elle. Elle note que ce sont les filles qui sont le plus motivées et qui sont nombreuses à participer activement au cours. Ce constat l'amène à poser souvent la question de savoir s'il n'y a pas de garçon dans la lasse, une façon à elle de taquiner les «gars». Elle rapporte qu'aussitôt après cette «taquinerie» se lève un bras mâle, comme pour relever le défi, surtout que dans ses commentaires, elle ajoute que «*les filles dominent largement le débat*».

Contrairement à Fadak, Ada n'a relevé aucune question difficile posée par les élèves. Elle n'a non plus mentionné aucune situation où l'occasion a été donné aux élèves de découvrir les limites de la représentation graphique des IR. Par ailleurs, et contrairement à Fadak, elle n'a pas encouragé les élèves à lui poser des questions. Or, les questions des élèves peuvent aider à construire le sens des problèmes; elles peuvent servir comme indices à l'enseignant qui a besoin de s'assurer de la compréhension des consignes, des règles, des buts etc. Elles ne signifient pas absolument que les élèves éprouvent des difficultés de compréhension mais, au contraire, qu'ils suivent le cours avec intérêt.

De cette première entrevue, nous retenons que Ada prévoit les séquences et se propose un but: faire comprendre les IR et éviter aux élèves de les bûcher. Elle dit ne pas être dérangée par le fait qu'un élève ne puisse pas tout comprendre. Elle se dit qu'elle a enseigné l'essentiel et que «*c'est avec les exercices et les problèmes que les élèves comprennent. C'est aussi lorsqu'ils traitent les exercices que je me rends compte s'ils ont compris, s'ils ont appris quelque chose ou non*». Elle dit avoir aidé certains élèves qui étaient en difficulté. «*Lorsque tu aides un élève, ça t'aide aussi. J'aime expliquer, re-expliquer aux élèves pour qu'ils comprennent encore plus*», commente-t-elle. L'analyse qui précède révèle que sa préparation des séquences correspond à certaines situations qui contiennent peu de phases adidactiques, bien que nous notions des moments où les élèves cherchent à représenter graphiquement quelques IR. En visionnant la bande vidéo, Ada s'est elle-même rendue compte que, bien souvent, «*mes consignes n'ont pas suffi à réaliser la dévolution de telles situations. En revanche, dans les situations de résolution de problèmes sur les IR, ce sont les élèves que j'ai rendus, dans un premier temps, responsables des connaissances à intégrer*». Ada s'est progressivement aperçue que la phase adidactique est ici importante. Elle est finalement présente; elle intervient au besoin, mais on la voit de moins en moins donner directement la solution. Elle s'est aperçue que des temps de découverte des tuiles ou de familiarisation avec les activités de découpage et de recollage sont souvent nécessaires.

1.2.8 Deuxième entrevue

La deuxième entrevue a essentiellement porté sur l'organisation générale des séquences didactiques et sur les raisons qui font dire à Ada qu'elle a bien enseigné les IR.

Ada commence par présenter la théorie en introduisant directement les formes géométriques. Contrairement à Fadak, elle ne croit pas devoir commencer la leçon par un survol rapide du matériel déjà vu sur les IR. Or, cette étape est d'autant importante qu'avant d'introduire du nouveau matériel, il faut s'assurer que les élèves possèdent les préréquis et qu'ils sont capables de les relier à la nouvelle information sur les IR. Ada s'est contentée d'introduire ces formes, d'en donner des exemples et de s'en servir pour représenter quelques binômes et polynômes. Elle a, ensuite, fait résoudre des exercices avant d'expliquer ce que sont un monôme, un binôme et un polynôme. «*Après tout ce que nous avons vu, passons maintenant au but de notre leçon, c'est-à-dire l'étude des trois IR, à savoir:* $(a + b)^2$, $a^2 - b^2$ *et* $(a - b)^2$», précise-t-elle. Ada a utilisé des figures géométriques (carré, rectangle), une paire de ciseaux (pour découper les feuilles de carton) et de la colle (pour racoller les morceaux). Notons que l'habillage des problèmes est légèrement différent d'une situation à l'autre, mais ce n'est pas cela qui est important. Ce sont les dimensions des modèles découpés dans les feuilles de papier qui sont ici des variables didactiques importantes. Ces dimensions sont si petites que les élèves arrivent à peine à voir, par exemple, la boîte cubique formée sans couvercle et à se figurer la hauteur de ladite boîte pour le calcul du volume.

En nous expliquant comment elle sait qu'elle a bien enseigné les IR, Ada nous dit que «*Les élèves étaient étonnés de me voir découper des feuilles de papier et les recoller pour en arriver à représenter les figures exprimant les IR. [...] J'ai fait ressortir les IR en fin de compte; les élèves ne pouvaient qu'être étonnés. C'est alors que j'ai compris que j'ai apporté un plus*». Ainsi s'explique Ada qui pense que l'intégration des connaissances a facilité la compréhension des graphies algébriques des IR par leur mise en évidence graphique. «*Si on dit à l'élève que* $(a + b)^2$, *c'est* $a^2 + 2ab + b^2$ *sans le démontrer, il est obligé de le bûcher, car si on lui demande de prouver cela, il ne pourra pas le faire. Alors qu'avec les figures géométriques, il peut le faire*», commente-t-elle.

En parlant de ce que sa participation à cette recherche lui a apporté, Ada affirme que «*La conception que j'avais avant le séminaire est celle que développent (...) presque tous nos collégiens et lycéens; la mienne a changé, bien sûr (...)* », nous confie-t-elle. En effet, poursuit-elle, «*je ne savais pas comment développer les IR autrement que par la voie* *algébrique. Maintenant, sans avoir à la bûcher, je peux établir ces IR aussi bien algébriquement que géométriquement*». Alors qu'au début du séminaire elle était très angoissée de constater qu'elle était incapable de représenter géométriquement ces IR, elle a fini par ressentir une certaine confiance en elle. «*Je peux utiliser le contexte géométrique pour les démontrer de façon simple et convaincante. Je me sens, à présent, plus apte et mieux préparée à les enseigner*». Voici ses commentaires concernant sa participation à cette recherche:

> *Ça [la participation à cette recherche] m'a aidé en tout cas. Ça m'a aidé à planifier et à prendre conscience de ma façon de procéder, (...) que je me prenais souvent à la dernière minute, par exemple. Pour moi, ça peut bien aider les élèves à comprendre les IR plus que l'ancienne méthode, car cette méthode est plus pratique. (...) Je pense que les problèmes proposés sont intéressants. Et, en plus, avec cette méthode, on peut résoudre les exercices sans être obligé de retenir toutes les formules.*

Ada a aussi trouvé intéressant le fait d'être interviewée et de travailler avec nous, car «*je sais maintenant comment résoudre les problèmes sur les IR avec les tuiles et les formes géométriques*», note-t-elle. Elle dit avoir aimé résoudre les problèmes que nous lui avons proposés. «*Oui, j'ai bien aimé résoudre ces problèmes, car ils m'ont permis de mieux réfléchir*», confirmant ainsi ce qu'elle a mentionné dans son journal. Elle déplore, toutefois, le fait de n'avoir pu y mettre autant de temps et d'énergie qu'elle l'aurait voulu.

2. Stratégies utilisées

Dans la première section de cette partie, nous confrontons la synthèse des données recueillies avec les éléments du modèle; dans la seconde, nous dégageons les relations entre les stratégies utilisées. Nous discutons, ensuite, de la productivité des différentes sources de données pour Ada.

2.1 Confrontation avec le modèle

À première vue, l'absence de données collectées par verbalisation nous fait taxer de pauvres les informations à traiter chez Ada. En plus du fait que la cassette de pensée à voix haute est en grande partie inaudible, les renseignements recueillis par les autres sources sont, en général, faiblement variés. Concernant la *prise d'informations*, nous notons tout de même quelques comportements qui relèvent de différentes stratégies utilisées et confirmées par d'autres sources. Nous observons que Ada parle plus volontiers de ce qu'elle fait (entrevue 1) qu'elle ne le rapporte dans son journal de bord, au contraire de Fadak. Au plan de la *consignation d'informations*, les stratégies sont moins nombreuses et peu variées. Ce sont essentiellement les traces laissées dans le cahier de préparation qui nous permettent de relever quelques stratégies.

Pour ce qui est de la *représentation des activités et des tâche*s à réaliser, nous pouvons tirer quelques renseignements: Ada fait identifier la question posée et anticipe une étape ultérieure. Au cours de ses verbalisations, elle montre qu'elle utilise quelques moyens pour se représenter la tâche; mais les données recueillies ne sont malheureusement pas souvent confirmées par une autre source. Précisons, toutefois, qu'une confirmation pour ce type de comportement est difficile à obtenir par la plupart des autres sources de collecte utilisées. D'après les notes d'entrevue dont nous disposons et certaines conversations informelles avec Ada (qui nous a tardivement prévenu du contretemps dans son emploi de temps), nous savons que cette formée a été influencée par l'image qu'elle a donnée d'elle-même au cours des entrevues. Cette explication nous semble réaliste.

Ada nous paraît, en effet, le type de futur enseignant qui tente de faire plaisir au formateur et qui essaie de faire de son mieux ce qu'on lui demande. Elle s'investit énormément à deviner les intentions du formateur et à les satisfaire, pas de façon toujours diligente, mais consciencieuse. «*D'habitude, le prof me dit ce que je dois faire, par quoi je dois commencer; mais avec vous [le chercheur-formateur] ... je dois réfléchir, chercher par moi-même d'abord. Vu que c'est ainsi, je veux vraiment comprendre la démarche pour arriver. D'habitude, ce n'est pas le cas*», nous confie-t-elle, en entrevue. Pourtant, au plan du contrat de formation, les formés doivent chercher à construire eux-mêmes leurs modèles, les confronter et les valider aux yeux de leurs camarades. Ainsi, à leur tour, les formés doivent dévoluer cette tâche à leurs élèves, qu'ils doivent laisser travailler tout seul. Ada affirme vouloir «*comprendre moi-même pour aider les élèves à comprendre, et non pas seulement pour résoudre les exercices*». Mais ses propos, en entrevue, nous font dire que cette conviction vient moins de ses attentes personnelles à son égard que de celles qu'elle attribue au formateur (ici, le chercheur). «*Avec vous [le chercheur], il fallait que je* *travaille seule, que je construise moi-même les modèles, bons ou mauvais. J'ai essayé de faire de mon mieux (...) Je ne voulais pas vous decevoir*», dit-elle.

Au plan des *activités langagières*, de la *communication* et des *échanges*, les données sont plutôt satisfaisantes. Il n'a pas été facile pour Ada de gérer ces activités. «*La difficulté principale est que je n'étais pas habituée à enseigner (...) Ce n'était pas facile pour moi de communiquer avec les élèves, d'autant plus que c'était la première fois que je me trouvais dans cette situation [d'enseignement]*». De nombreuses choses lui ont échappé: idées intéressantes qu'elle aurait pu exploiter, comme des affirmations équivoques («un monôme est un nombre non nul», «un polynôme est une figure à plusieurs côtés») qu'elle souhaiterait remettre en question. En effet, de l'analyse de la première séquence, il ressort que le peu d'interactions qui ont eu lieu entre les élèves d'une part et, entre Ada et ces derniers, d'autre part, n'ont pas débouché sur un débat d'idées et sur les connaissances à intégrer. Cependant, en visionnant la bande vidéo et en répondant à certaines de nos questions, Ada s'est avisée de l'importance de construire des situations au cours desquelles les élèves peuvent mettre leurs hypothèses et leurs modèles à l'épreuve des analyses préalables. Cela montre bien que le travail d'analyse de protocole permet une réflexion autonome du formé sur son fonctionnement didactique.

Le comportement général de Ada a été de chercher à faire comprendre le plus possible le contrat qui régit les rapports entre les activités de modélisation, les élèves et elle-même. En effet, nous avons observé que, d'une part, les élèves ont cherché à découvrir ses intentions et non à comprendre les problèmes qu'elle leur a posés et que, d'autre part, les élèves ont fondé leurs stratégies sur la demande (externe) de Ada. Les situations proposées ne peuvent favoriser la construction de modèles des IR et l'intégration des connaissances visées que si les problèmes que Ada souhaite voir résoudre sont bien ceux que les élèves se posent. Ada a plutôt cherché à faire réussir les élèves à tout prix dans leurs tentatives de construire des modèles. Il y a là une baisse des exigences. Tous ces effets qui traduisent un mauvais fonctionnement du contrat didactique sont liés à l'idée que Ada se fait de son rôle d'enseignante: faire en sorte que les élèves construisent des modèles des IR conformes à ceux qui sont traités dans les exercices types. Or, de tels exercices permettent d'évaluer des savoir-faire, mais n'informent pas sur la réelle appropriation des savoirs intégrés par les élèves.

2.2 Relations entre les stratégies utilisées

Dans cette partie, la transcription des verbalisations, des protocoles des séquences et des entrevues, et les traces écrites que Ada a laissées de son travail nous permettent de poursuivre en profondeur l'analyse et l'interprétation. Comme pour Fadak, nous effectuons ensuite une analyse globale, suivie d'une analyse par épisodes, puis du résumé du cas.

2.2.1 Méthode de travail global

Malgré une quantité moindre de données recueillies auprès de Ada, nous remarquons que le schéma global de travail de celle-ci est presque aussi complexe que celui de Fadak. En effet, nous trouvons des liens entre de nombreux groupes de processus. La prise d'informations semble provenir de la plupart des autres processus, mais elle conduit surtout à la consignation d'informations, à l'élaboration/organisation et à la procéduralisation/composition. Les activités de modélisation et d'intégration des connaissances constituent les éléments centraux du schéma fonctionnel de Ada. Les matrices permettent de vérifier ce constat. Les verbalisations ne permettent pas de relier la gestion de l'environnement didactique aux autres processus de la pensée. Cette gestion semble peu intervenir dans lesdits processus, Ada restant apparemment très concentrée sur les aspects notionnel et caricatural des concepts. La brièveté des séances didactiques y contribue peut-être pour une formée qui, comme Ada, enseigne pour la première fois. Toutefois, malgré le peu de relations identifiables, nous remarquons que les autres processus sont activés, à l'exception de la mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2), et de la prise de décisions. Par rapport à Fadak, nous avons décelé peu de prise de décision au cours des verbalisations.

Nous notons aussi la relative centralité du contrôle du sens et de régulation qui ont presque tous les autres éléments comme successeurs et comme prédécesseurs. En fait, ces éléments sont présents dans les activités de modélisation, plus précisément dans la multiplication et la représentation des polynômes à l'aide de tuiles. Le peu de place occupée par la mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2), la gestion de l'environnement didactique et la généralisation/discrimination est confirmée. De plus, nous notons peu de liens entre la mobilisation des savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2) et la gestion de l'environnement didactique. Cette gestion apparaît plutôt marginale. Ceci est peut-être dû au peu d'attention accordée à cette dimension par les cours de mathématiques reçus par Ada. Les activités de communication/échange et d'évaluation de la compréhension, suffisamment bien organisées par Fadak, le sont moyennement par Ada.

2.2.2 Épisodes de travail

L'analyse plus approfondie des séquences ne peut être réalisée qu'en les découpant en épisodes. Le découpage nous permet de distinguer 14 épisodes qui, malgré le nombre limité des relations analysées, apportent un certain éclairage sur la façon dont Ada fonctionne.

2.2.2.1 Épisodes de la première séquence

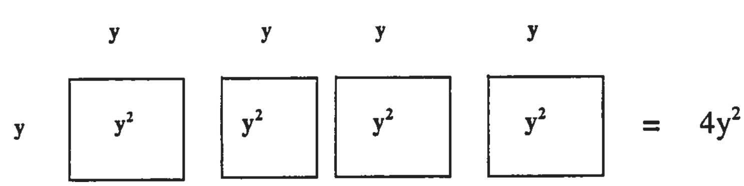
Les sept épisodes de la première séquence portent sur l'introduction des formes géométriques, les exemples d'utilisation de ces formes, la réexplication des conventions, la pratique guidée vs pratique indépendante de modélisation, le retour sur les conventions ou consignes, le questionnement de haut niveau cognitif (qui a conduit la classe vers une excursion dans les cieux!) et, enfin, le retour sur la planète terre où Ada et ses élèves cherchent à contrôler le sens des IR et à résoudre des problèmes.

Dans le premier épisode, Ada annonce qu'elle va «*partir des formes géométriques pour développer les IR et résoudre les problèmes sur les IR*». En parlant des formes géométriques, elle se propose de «*voir successivement les carrés unitaires, les bandes rectangulaires, les grands carrés et les grands rectangles*». Mais, en attendant de «faire voir» ces formes, elle s'attarde à les décrire théoriquement, sans aucune image, sinon qu'elle les schématise mentalement par les mouvements de bras. Ada semble très angoissée en ce début de leçon. C'est avec les bras croisés qu'elle annonce presque tous les concepts nouveaux, sans doute abstraits pour les élèves de 10^{e}. Elle se rend compte que malgré son insistance à répéter les mêmes explications, bon nombre d'élèves n'y comprennent toujours rien.

En entrevue, Ada précise que «*dans le calcul des aires, les élèves n'ont pas de difficulté, car ils savent déjà comment calculer l'aire d'un carré ou d'un rectangle. Seulement, c'est les figures qu'ils ne savent pas nommer ou qu'ils ne reconnaissent pas sous leur dénomination*». Ce n'est pas que Ada n'ait pas cherché à concevoir assez de situations dans lesquelles les savoirs visés et les connaissances à intégrer sur les IR constituent la stratégie optimale; elle en a fait traiter treize par ses élèves. C'est dans la mise en place de telles situations, pour que l'enjeu didactique existe pour les élèves, qu'elle n'a pas pu faire en sorte que son intention ne soit pas dévoilée. «*Ceci constitue un exercice important mais difficile pour moi*», reconnaît-elle en entrevue.

En visionnant la bande vidéo, Ada reconnaît la nécessité de souligner le caractère conventionnel des formes géométriques et l'importance de la négociation du sens avec les élèves. Ainsi, pour donner du sens à l'écriture « -x », elle la fait interpréter, en termes d'aire de surface, comme «*l'aire d'une bande rectangulaire colorée*», bien que dans le manuel du Séminaire ce soit le contraire. Nous pouvons distinguer deux phases: une première est constituée des moments où Ada lit, écrit et dessine les différentes formes géométriques représentant les monômes; au cours de la seconde phase, l'activité cognitive varie de la procéduralisation à l'intégration des connaissances, en passant par la prise et la consignation d'informations.

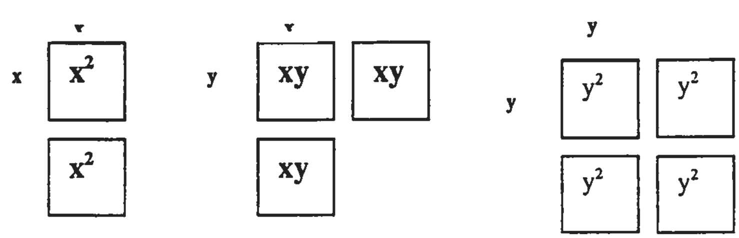
Le deuxième épisode est consacré aux exemples. Après avoir consulté son cahier de préparation, Ada représente géométriquement les monômes 2x et $4y^2$. Dès qu'elle fait lire l'énoncé, elle se réfère aux formes qu'elle vient d'introduire et anticipe les étapes avant la représentation proprement dite des deux monômes. C'est au moment de représenter $4y^2$ qu'elle se rend compte qu'en introduisant les grands carrés, elle n'avait pas fait cas du grand carré y^2 (dont la mesure du côté y est différente de celle du côté x). Ensuite, elle dessine, à main levée, quatre carrés non identiques, comme ci-dessous:



Ayant constaté que les élèves assistent passivement au cours sans y comprendre grand chose, Ada revient sur les dessins et répète ce qu'elle en a déjà dit. On en retient que pour représenter, par exemple, le monôme 2x, il suffit de représenter deux fois une bande rectangulaire, mais faut-il que ce soit la même bande qu'on reproduise! Dans cette phase, l'activité cognitive n'est pas apparente, car ce processus y semble automatisé. La gestion de l'environnement didactique intervient peu au cours de la représentatation. Les verbalisations n'ont pas permis de distinguer une phase d'appropriation au cours de laquelle les élèves auraient eu une idée de ce qu'il faut faire, et une autre de procéduralisation/composition au cours de laquelle l'exercice serait résolu.

Dans une seconde phase, Ada demande aux élèves de représenter, à leur tour, le polynôme $x^2 + 2xy + y^2$. Mais ces derniers, n'ayant pas bien compris, lui demandent de revenir sur ce qu'elle vient de faire. C'est ce que fait Ada, comme si une répétition de la même explication suffit à asseoir la compréhension. «*C'est le même carré unitaire, mais seulement accompagné du signe moins*», dit-elle, en parlant du monôme « -x ». Les processus cognitifs sont mis en branle dès que Ada fait prendre de l'information et que certains élèves se représentent la tâche de modélisation. Nous notons trois phases dans la séquence de modélisation du trinôme $x^2 + 2xy + y^2$: une phase d'appropriation, une phase cognitive (les processus cognitifs d'élaboration, de composition et de procéduralisation étant les plus fréquents dans cette phase) et une phase mixte au cours de laquelle l'activité cognitive se meut entre les processus de modélisation et d'intégration des connaissances.

Les épisodes 3 et 4 sont centrés sur la pratique guidée de représentation géométrique des polynômes. Dans l'épisode 3, Ada demande à une fille (Fifi) de représenter géométriquement $2x^2 + 3xy + 4y^2$. Celle-ci procède comme suit:



$= 2x^2 + 3xy + 4y^2$

Nous notons que toutes les formes dessinées sont presque identiques et rien n'y permet de distinguer les « x^2 » des « xy », encore moins ceux-ci des « y^2 ». Tout semble se réduire à un jeu de dessins, sans rapport avec le contenu, c'est-à-dire sans commune mesure avec les dimensions réelles des tuiles qui représentent les monômes. Dans la représentation, un rectangle quelconque doit se distinguer d'un carré, tout comme deux carrés de côtés différents (respectivement deux rectangles de dimensions différentes) doivent se distinguer l'un de l'autre. Ada n'intervient pas sur ces aspects qui sont pourtant essentiels dans la représentation géométrique des polynômes. Ada pose certes des questions, formule des hypothèses, mais elle ne fait pas en sorte que la pratique guidée se poursuive jusqu'à ce que les élèves soient confiants et capables de construire leurs propres modèles. Elle préfère ébaucher les grandes lignes de la représentation pour les faire exécuter, par la suite, par les élèves. En entrevue, elle admet pourtant que «*tout ce que les élèves apprennent est susceptible d'être oublié s'ils n'ont pas l'occasion de pratiquer jusqu'au point de s'approprier les connaissances mobilisées*». Elle aurait donc mieux fait de donner suffisamment de temps aux élèves pour la pratique indépendante, pratique au cours de laquelle ceux-ci acquièrent autonomie et assurance dans leur compréhension des concepts constitutifs des IR ainsi que dans l'utilisation des tuiles pour représenter des polynômes en vue de leur factorisation. Cet épisode est dominé par les stratégies de consignation d'informations, de formulation et de procéduralisation/composition.

Dans l'épisode 4, Ada fait construire par une autre fille (Mimi) le modèle géométrique de $3x^2 - 3xy$. Comme dans l'exercice précédent, aucune distinction n'est faite entre les carrés et les rectangles et, fait préoccupant du point de vue du sens, les « x » changent de valeur selon que Mimi représente un grand carré ou une bande rectangulaire. En outre, bien que les outils de travail se trouvent à portée de main, les élèves continuent de s'en passer. Ada n'intervient pas ici non plus lorsque Mimi produit ces erreurs. Elle demande plutôt la collaboration de la classe pour aider Mimi. Bien qu'elle se garde, cette fois-ci, de donner la voie à suivre pour représenter $3x^2 - 3xy$, elle attire l'attention de Mimi sur le sens du signe «moins». Finalement, Mimi construit un bon modèle du binôme avec l'aide de ce guidage. En visionnant la bande vidéo et en se questionnant sur l'impact de son intervention, Ada s'aperçoit que pour vérifier la compréhension de Mimi, elle aurait dû lui dévoluer une autre activité de modélisation. Ceci nous fait dire que Ada doute que le guidage effectué entraîne autre chose qu'une réussite locale pour Mimi. Cela montre bien que le travail d'analyse de protocole lui a permis de réflechir, de façon autonome, sur son fonctionnement didactique. Dans cet épisode, aucune verbalisation ne permet de déceler les activités de planification, de contrôle et de régulation. Ces activités ont probablement bien lieu, mais Ada ne les verbalise pas parce qu'elle est trop concentrée sur la tâche de représentation.

Dans l'épisode 5, Ada fait un retour (en arrière) sur les conventions. En constatant que la plupart des élèves interrogés ont suivi une «mauvaise piste», elle donne elle-même la voie à suivre en revenant sur les «consignes» du départ, plus précisément sur les idées de *carré unitaire* et de *bande rectangulaire*. Elle revient sur l'usage du signe «moins» et des couleurs pour distinguer les formes isométriques. En visionnant cette partie de la séquence, Ada explique comment elle a fait cette distinction:

> *«Pour noter les parties "négatives", j'ai mis d'abord le signe "moins" à l'intérieur [des formes], en inférant que la partie sans signe est positive. Mais cela n'est pas suffisamment clair et donne lieu à une certaine confusion. J'en suis arrivée à utiliser la craie de couleur pour dire que ce qui est coloré est négatif, ce qui n'est pas coloré est positif».*

À partir de ce commentaire, nous pouvons souligner qu'au-delà d'une rationalisation de la part de Ada (lorsqu'elle reconnaît que «*cela n'est pas suffisant*», l'analyse de son propre protocole lui a permis de remettre en question des éléments de son approche de représentation des monômes et polynômes isométriques. Ceci montre clairement qu'il lui faut envisager d'autres moyens de distinguer les monômes opposés que celui qui consiste à affecter les signes « ± », et cela parce que Ada semble reconnaître les limites des notations algébriques formelles généralement utilisées. Dans cet épisode, les stratégies cognitives d'élaboration/organisation et de procéduralisation/composition sont largement utilisées; mais Ada n'active pas assez les connaissances antérieures. Pour elle, il s'agit d'un exercice où les élèves sont censés savoir quoi faire.

L'épisode 6 est celui du questionnement de haut niveau cognitif auquel se livre Ada. Dans l'analyse qui précède, nous avons mentionné le fait que les élèves avaient besoin de beaucoup de pratiques de modélisation pour parvenir à maîtriser les contenus. La fréquence des questions que l'enseignant pose est un indice fiable qu'une telle pratique se réalise effectivement, en plus d'être une bonne situation didactique pour vérifier la compréhension des concepts constitutifs des IR chez les élèves. Cependant, comme le montre l'épisode 6, l'utilisation de questions dont le niveau cognitif est élevé n'améliore pas systématiquement le rendement des élèves dans leurs activités de modélisation. En effet, Ada en arrive à ce qui suit: «*Si je pose, par exemple, $f(x) = 1$, en me référant au carré unitaire (représentant le monôme 1), que représente cette écriture?*». Déconcertés par ce questionnement de haut niveau cognitif, les élèves sont peu nombreux à réagir; ils ont l'air de se demander à quoi Ada veut-elle en venir. Ada dévoile son intention de faire définir le polynôme: «*Qu'est-ce qu'un polynôme?*», demande-t-elle à la classe. Après un long silence, quelques bras se lèvent timidement. Voici un extrait de cet épisode:

> Pierre: (de la rangée du milieu): «*Un polynôme est une figure qui a plusieurs côtés*».
> Ada (pointant du doigt l'un des prismes qu'elle avait dessinés): «*Ça c'est un polynôme?*»
> Pierre: «*Oui*» (réponse de Pierre, appuyée par plusieurs élèves).
> Ada: (remarquant que Dine, un autre garçon, agite son bras): «*Oui, Dine, qu'en dis-tu?*»
> Dine: «*Un polynôme est une somme de monômes*».
> Ada: (reprenant cette définition): «*Très bien! Donc, un polynôme, c'est la somme algébrique de plusieurs monômes. Maintenant, qui peut me dire ce qu'est un monôme?*»

Après un long silence, Ada considère ce qui suit: «*Soit, par exemple, $f(x) = ax + b$, a et b étant des nombres réels. Est-ce un polynôme ou non?*», demande-t-elle aux élèves. Un long silence s'établit de nouveau. Hélène, une élève de la quatrième rangée, rompt le silence en disant que «*c'est la somme de deux monômes: ax et b*». Et Ada de l'encourager à poursuivre le débat: «*Alors, à partir de là, tu peux définir un monôme. J'ai d'abord une fonction de x et une constante. À partir de ça, vous [s'adressant à toute la classe] pouvez me dire ce qu'est un monôme. Qu'est-ce qu'un monôme?*». Après avoir observé un petit silence, Ada se propose de donner elle-même une définition. C'est en ce moment que Bintou, une élève d'une rangée qui ne «bouge» pas, se lève pour dire qu'«*un monôme est un nombre*». «*Bien sûr*», commente Ada. «*Mais, si l'on se limite à cette définition, alors on aurait exclu le monôme $f(x) = ax$*», fait-elle remarquer. Aussitôt se lève Lika, un garçon de la troisième rangée, pour dire qu'«*un monôme est un nombre non nul*». Ada fait remarquer que «*s'il en était ainsi, on éliminerait le nombre "zéro" qui fait pourtant partie de l'ensemble des nombres réels, ensemble dans lequel a et b prennent leurs valeurs*».

Ada et ses élèves rencontrent ainsi de grosses difficultés à définir le concept de monôme. Dans les classes régulières comme celle que Ada gère actuellement, les concepts de monôme, de binôme et de polynôme sont généralement présentés sous forme de définitions formelles auxquelles les élèves ne parviennent à donner aucun sens. Ils se contentent de les «bûcher» (pour utiliser le terme de Ada) pour les examens et ils ont vite fait de les oublier. Il leur est donc difficile de les retrouver et de les transférer dans d'autres contextes. Dans ce cas, Ada ne suscite pas non plus une meilleure compréhension de ces concepts en utilisant des questions de haut niveau cognitif, ces questions exigeant des élèves une mobilisation et une application de connaissances déjà acquises. Ada ne peut améliorer la participation des élèves au débat, car de telles questions correspondent aux opérations d'analyse, de synthèse, d'application et d'évaluation que les élèves de 9e année ne maîtrisent pas encore. Il est souhaitable que le formé tienne compte du niveau cognitif de ses élèves, de leur capacité à penser en termes abstraits et à raisonner par hypothèses.

C'est dans l'épisode 7 que Ada a fait remettre les pieds sur terre. Après avoir vécu une situation aussi difficile que celle rapportée dans l'épisode précédent, elle a changé d'activité. Elle fait résoudre, à présent, un problème qui consiste à utiliser l'aire d'un grand carré de côté a et de celle de chacune des pièces (triangles rectangles de cotés droits mesurant a et b, dont les hypoténuses c forment les côtés du petit carré inscrit) pour montrer que $a^2 + b^2 = c^2$. Cet exercice a été déjà ébauché au cours du Séminaire. Après cinq minutes de recherche individuelle, Ada fait intervenir une fille (Marie). En parcourant quelques rangées, Ada cherche à identifier les étapes que les élèves suivent et à vérifier ce qu'ils ont pu faire; mais elle dit ne pas savoir comment et à quel moment intervenir. Elle finit tout de même par intervenir par un guidage serré, «*parce que je me suis rendue compte que Marie n'est pas la seule à avoir des difficultés pendant que je circulais en classe*», se justifie-t-elle. Ces propos confirment qu'elle est concentrée sur la démarche de résolution et sur les difficultés des élèves à intégrer les connaissances requises. Rappelons qu'il s'agit, dans cet exercice, de réinvestir les acquis sur la relation de Pythagore en mettant l'accent sur la démonstration géométrique. Ces propos mettent en relief l'absence d'a priori sur l'analyse des difficultés à intégrer diverses connaissances.

En interprétant ces propos en fonction du contrat de formation et de sa rupture, nous pouvons dire que Ada, n'ayant pas eu de consignes au sujet de l'intégration des connaissances (les analyses préalables [S2] sont disponibles, mais pas le savoir d'expérience [S3]), se montre déséquilibrée par l'absence de moyen anticipé de ce travail d'intégration. Pourtant, elle a spontanément mis en place plusieurs éléments: demander aux élèves de faire une recherche individuelle, les questionner sur différentes façons d'aborder le problème, leur demander à quoi correspond l'aire comprise entre le grand carré et le petit carré, leur demander quelle relation établir entre cette aire et celle des pièces triangulaires. Ceci montre bien comment, dans l'évolution au sein du dispositif, le contrat de formation est re-négocié par le formé.

Les activités que Ada prévoit pour la deuxième séquence se révèlent une plus grande prise en charge des analyses préalables pour travailler davantage sur le sens des activités proposées. Elle affirme, en effet, que «*la prochaine fois, j'aimerais continuer à faire travailler les élèves sur l'intégration des connaissances, mais en les amenant à utiliser le découpage*». Nous verrons lors de la deuxième séquence que 5 des 7 activités proposées portent effectivement sur la construction des modèles faisant appel à l'intégration des connaissances. Son insatisfaction exprimée, en entrevue, sur le non-dévoilement des moyens de modélisation et d'intégration est suppléée par un début d'a priori pour la deuxième séquence. À la question «Qu'as-tu retenu de cette première séquence didactique?», Ada a répondu ceci:

> *Les élèves ont éprouvé des difficultés à utiliser des formes géométriques car là, il ne s'agit pas d'appliquer des trucs pour effectuer les transformations nécessaires. En regardant la bande vidéo, je vois, par exemple, Mimi représenter le binôme $3x^2$ - $3xy$ avec les tuiles, sauf que ses 'x' n'ont pas la même dimension [selon qu'elle représente $3x^2$ ou $-3xy$]. Cette difficulté est due au fait qu'elle n'utilise pas les instruments.*
>
> *Aussi, le fait que je suggère immédiatement la voie à suivre pour représenter le binôme n'aide pas réellement, car la plupart des élèves que je fais venir au tableau ne montrent pas qu'ils comprennent le sens de ce qu'ils font. Je dois les laisser se débrouiller tout seuls pour les prochaines activités. J'interviendrai seulement après qu'ils aient cherché à construire eux-mêmes les modèles. Je pense également que la méthode qui consiste à répartir les élèves en petits groupes autour des questions spécifiques est efficace, parce que les*

échanges entre eux les poussent à chercher et ne pas attendre la mienne. C'est une façon de les faire participer à la leçon.

Ce long commentaire montre que Ada veut désormais mettre plus d'accent sur le travail du sens des activités de modélisation et qu'elle va surtout insister sur l'intégration des connaissances pour faire obtenir didactiquement ce sens. Le fait qu'elle se rende compte de l'inefficacité de ses interventions intempestives et qu'elle juge nécessaire de dévoluer la tâche de construction du sens aux élèves est lié au fonctionnement même du dispositif avec ses ruptures, ses remises en questions, ses nouvelles réalisations et l'important travail d'analyse des protocoles qui amène le formé à s'adapter à la situation. L'expression «*J'interviendrai seulement après qu'ils aient cherché à construire eux-mêmes les modèles*» est l'indice d'un début de remise en question de la méthode de «révélation professorale» axée sur l'exposé magistral et le guidage, méthode qui laisse peu de place à la pratique indépendante pour les élèves.

Le travail d'analyse de protocole a ainsi permis à Ada de remettre en question sa méthode de travail et de faire de nouveaux choix didactiques pour la deuxième séquence, comme l'attestent bien les expressions «*répartir les élèves en petits groupes autour des questions spécifiques*» et «*les échanges entre eux [qui] les poussent à chercher et ne pas attendre la mienne*». Ces choix annoncés pour la deuxième séquence montrent aussi que l'analyse a priori est générée par l'analyse a posteriori. Même s'ils ne sont pas complètement actualisés, ces choix mettent en évidence que le travail d'analyse de protocole de sa propre séquence peut jouer un rôle dynamique essentiel dans le fonctionnement didactique de Ada au sein du dispositif. Ce travail d'analyse a également permis à Ada de construire de façon autonome des savoirs d'expérience (S3) à travers la confrontation des analyses a priori vs a posteriori.

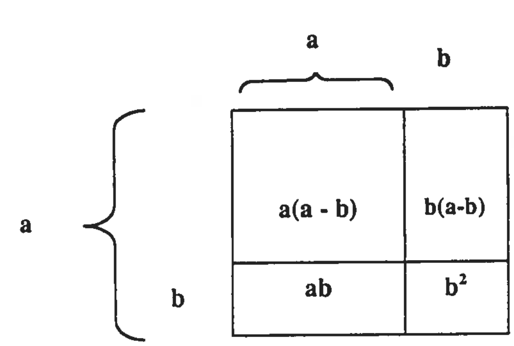
2.2.2.2 Épisodes de la deuxième séquence

Dès le début de cette séquence, Ada annonce aux élèves qu'il est important que ce soit eux qui réalisent les activités qu'elle va leur proposer. Ces activités représentent certaines difficultés rencontrées par les élèves lors de la première séquence. Il s'agit de construire des modèles de $(a + b)^2$, $(a + b)(a - b)$ et de $(a + b + c)^2$ pour accroître les possibilités de pratique indépendante et d'intégration des connaissances. L'importance accordée à la résolution de problèmes est un élément prégnant (4 épisodes sur 7).

Dans l'épisode 8, Ada fait venir une élève (Bintou) au tableau pour résoudre le problème suivant: «Dans un carré dont la mesure de côté est de *x* unités, on a construit un carré dont le côté mesure 4 unités. Détermine la graphie algébrique qui exprime l'aire comprise entre les deux carrés et factorise cette expression». Bintou hachure l'aire de la partie comprise entre les deux carrés et la note par Y. Elle écrit ensuite $x^2 = Y + 4^2$ et en déduit l'expression cherchée: $Y = x^2 - 4^2$. Bintou dit qu'on a là une IR, précisément une différence de carrés; elle écrit: $x^2 - 4^2 = (x + 2)(x - 2)$, au lieu de $(x + 4)(x - 4)$. Ce sont ses camarades eux-mêmes qui lui disent que la «base est 4 et non 2». Aussi, Bintou re-écrit-elle l'expression factorisée: $Y = (x + 4)(x - 4)$.

Ayant constaté que certains élèves continuent d'éprouver des difficultés à travailler avec les «bases» de la mise en facteurs, Ada reprend le problème et utilise le modèle découpé dans une feuille de carton. «*Je me sers de ce modèle concret pour expliquer les données du problème*», nous dit-elle, en entrevue. Dans cet épisode, Ada fait souvent des interventions ponctuelles qui permettent à Bintou de se centrer sur l'enchaînement des étapes de résolution et de comprendre le processus de modélisation. Ada commence ainsi à mettre en œuvre ses projets de façon autonome, quitte à ce qu'elle les remette en question plus tard. Nous remarquons une activité cognitive plus intense: tout en laissant Bintou travailler du mieux qu'elle peut, Ada l'invite à expliquer ce qu'elle fait, comment elle élabore et donne du sens. Le processus de régulation est ainsi utilisé lorsque Ada relit l'énoncé et recourt au modèle découpé dans une feuille de papier.

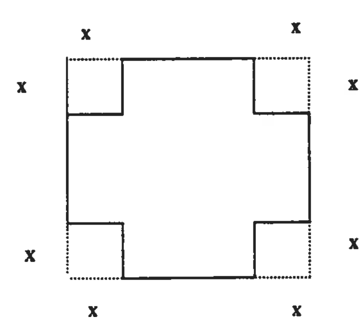
Dans l'épisode 9, Ada représente géométriquement l'IR $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:



Elle commence avec confiance, mais elle se heurte à une difficulté, celle du repérage. Il apparaît que le même *a* mesure deux dimensions différentes: dans le sens horizontal, *a* mesure effectivement le côté du grand carré; mais dans le sens vertical, il mesure plutôt $a + b$, c'est-à-dire le côté du grand carré initial prolongé de *b* unités. La tuile carrée devrait avoir pour aire de surface a^2 simplement, au lieu de $a(a - b)$. Ceci n'est pas spécifique de Ada, c'est au contraire une sérieuse difficulté rencontrée chez d'autres formés. Ada décide de calculer la surface du grand carré (qui, selon le modèle construit, est $a(a + b)$) et de la comparer à la somme des aires constitutives (soit $a(a - b)$). Elle se rend compte que cela ne la mène nulle part. Elle vérifie ses données, révise sa démarche et se rend compte que le repérage joue ici un rôle essentiel.

Les arrêts, sans doute pour mieux réfléchir, ne nous permettent pas d'accéder à tous les processus mentaux de Ada. Est-ce dû à la fatigue ou à un plus haut degré de concentration sur la tâche qui lui fait oublier de verbaliser ses pensées, ou encore est-elle influencée par des aspects affectifs comme une certaine inquiétude devant l'embarras que lui cause cette modélisation ou encore comme la manière dont les élèves et le chercheur pourraient la juger. Nous n'avons pas cherché à en savoir davantage. Ce qui est le plus important dans cet épisode, d'un point de vue théorique, c'est le fait que les réflexions, la remise en question de la démarche et la prise en compte du repérage et du mesurage dans la représentation des tuiles soient fonction du mécanisme d'équilibration majorante et intimement liées au déroulement de la situation de formation.

L'épisode 10 est centré sur le découpage, le pliage et le collage. Ada demande à une fille (Nanette) de résoudre le problème n° 5 du prétest (voir Annexe C, p. xxviii). Celle-ci part du modèle suivant et recourt à une feuille de carton:

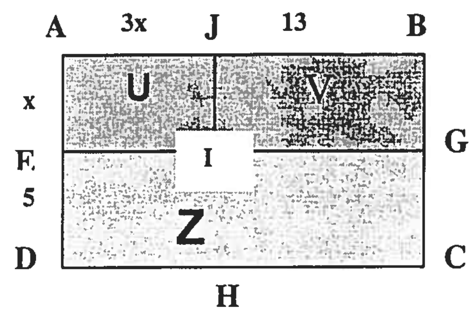


Nanette découpe aux quatre coins le petit carré de côté x. Ada lui demande de verbaliser sa procédure et de montrer à ses camarades comment elle obtient la boîte sans couvercle. Nanette procède au pliage et se sert du papier à coller pour former la boîte. Ada lui demande, ensuite, d'expliquer comment elle calcule le volume de cette boîte. Nanette spécifie les dimensions de la boîte avant de les multiplier pour obtenir le volume. Ada intervient sur la valeur de ces dimensions et la surface de base; elle demande s'il y a des questions. Il y en a deux, dont l'une porte sur le calcul de la surface de base et l'autre sur la hauteur de la boîte. Ada demande à Nanette d'y répondre.

Notons que Ada prend conscience de certains mécanismes didactiques. En effet, elle ne dévolue pas la représentation du modèle en carton en prenant tout à sa charge pour que ses intentions soient réalisées. Cette prise de conscience favorise le choix d'une position résolument adidactique, Ada étant désormais plus sensible à la nécessité de donner à l'élève la charge de contrôler le sens. Nous notons également des comportements intéressants tels que intervenir pour demander à Nanette de verbaliser la procédure pendant qu'elle se déroule, d'expliciter les dimensions de la boîte en fonction desquelles elle calcule le volume, laisser à Nanette le soin de répondre elle-même aux questions posées par ses camarades. L'intervention de Ada à la fin de l'épisode est aussi intéressante à citer pour les besoins de l'analyse: *«Est-ce que c'est aussi difficile que le problème précédent?»*.

Sur le plan épistémologique, ceci montre que Ada se positionne de façon empiriste pour parvenir à rencontrer les attentes qu'elle attribue au formateur. Pour remplir le contrat, elle semble dire dans ces propos que puisqu'il faut qu'il y ait des modèles qui font intégrer des connaissances, elle va donner d'autres problèmes qui sont riches en cela. La seconde entrevue permet de confirmer cela par la déception qu'elle a manifestée dès le début: *«Il y a peu d'activités de découpage et de recollage. Les activités pourtant (...) je m'étais arrangée pour que les élèves s'y exercent»*. La dynamique des analyses a priori/a posteriori rend donc possible une relative majoration des activités de modélisation et d'intégration des connaissances.

Dans l'épisode 11, Ada fait exprimer de quatre façons différentes l'aire totale du rectangle ABCD ci-dessous.



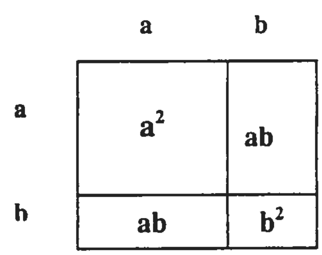
Ada relit les consignes et fait venir un garçon (Aly) au tableau. La décision de faire travailler sur les différentes façons de calculer l'aire et de vérifier par un seul algorithme est un choix didactique que Ada explique ainsi:

> *Il est important que les élèves se rendent compte qu'il y a plusieurs façons de trouver l'aire. Si on ne les y invite pas, ils ont tendance à ne faire qu'une des deux lectures de la figure (...) plutôt que d'explorer tous les passages possibles [du géométrique à l'algébrique]. Ainsi, les différentes façons permettent de faire une vérification générale. Je peux ici voir comment chacun lit dans le dessin, choisit d'effectuer ces passages et choisit de les traiter. J'interviendrai moins et laisserai du temps aux élèves pour qu'ils explicitent leur démarche au complet.*

L'a priori de Ada dépend donc de la nécessité de redonner du sens aux produits partiels associés à chaque terme de la graphie algébrique finale et du sens qu'elle donne au passage inverse, du géométrique à l'algébrique. Une fois ces sens rétablis, Ada attend des élèves qu'ils se «*tirent mieux d'affaire*» en résolvant de tels problèmes. Ses consignes indiquent qu'elle ne va pas intervenir de façon intempestive comme dans la première séquence, mais qu'elle va laisser le soin aux élèves de se «*débrouiller*». Entre autres façons de calculer l'aire demandée, Aly procède comme suit: $S = S_{(U+V)} + S_{(Z)} = x(3x + 13) + 5(3x + 13)$. Il s'arrête là. «Est-ce tout?», lui demande Ada. «Oui», répond Aly. Ada demande à la classe son avis. Mimi remarque que Aly n'a pas factorisé pour trouver la forme réduite. Soulignons que dans ses commentaires, Ada fait remarquer que cette forme réduite est connue d'avance car, «*somme toute, c'est le produit de la longueur totale par la largeur totale, soit (x + 5)(3x + 13)*». Il y a, bien sûr, différentes façons d'arriver à ce résultat final, en ne perdant pas de vue le rôle de simplification que joue la factorisation des graphies algébriques.

L'exigence du problème au regard de la factorisation ne correspond donc plus à un «problème» puisque l'élève n'est pas strictement tenu de trouver les procédés alébriques pour factoriser chaque cas, le résultat de la factorisation étant connu d'avance. Ada a quelque peu vidé le problème de son caractère problématique pour en faire un exercice de factorisation contextualisée. C'eut été une intéressante situation didactique de travailler le sens et le lien entre la multiplication et la factorisation que de ne pas préciser que «*par la factorisation la graphie algébrique finale est toujours la même*», cela indépendamment de la méthode choisie. Ainsi, le travail de l'élève aurait d'abord porté sur la façon de calculer l'aire et, ce faisant, sur le constat que «factoriser un polynôme, c'est trouver les dimensions de la forme géométrique correspondante». Ada n'a malheureusement pas eu conscience de cela. Toutefois, il est abusif de croire que ce type de «contextualisation» redonne assurément du sens à la factorisation, le contexte étant aussitôt abandonné et ne présentant plus d'intérêt didactique dans la suite du travail de l'élève. Nous remarquons là un effet de contrat de formation: Ada cherche à faire résoudre ce type de problèmes parce qu'elle a décodé lors du Séminaire que cela peut être une bonne situation-problème pour redonner du sens au passage du géométrique à l'algébrique.

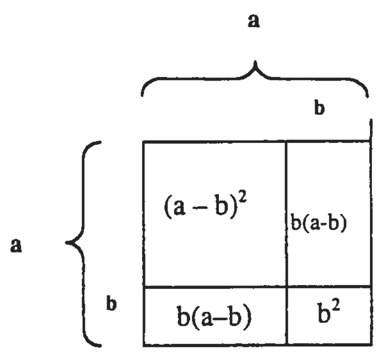
Dans l'épisode 12, Ada reprend l'IR $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dans le contexte géométrique comme suit:



$$\Leftrightarrow \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Elle demande aux élèves de procéder autant pour établir l'IR correspondant à $(a - b)^2$. Après cinq minutes de recherche individuelle, elle fait venir au tableau une élève (Marie). Mais celle-ci se retourne au banc sans tarder lorsqu'elle se rend compte qu'on lui demande plutôt de représenter géométriquement l'IR que de la développer algébriquement. Ada aurait dû garder Marie au tableau et chercher, à travers elle, à aider tous ceux qui sont en difficulté. Malheureusement, lorsqu'il n'y a pas de réponse, comme c'est ici le cas, nos formés (de l'UGANC et bon nombre de l'ISSEG) se contentent d'engager l'élève vers une solution. En effet, «*N'y a-t-il pas de garçons dans cette classe?*», se demande Ada qui constate que les filles sont majoritaires à lever leur main pour venir au tableau.

Un garçon (Michel) vient travailler sur le même modèle. Apparemment confus, Michel s'embrouille et utilise des expressions aussi ambiguës que «l'aire de a^2» (en parlant de l'aire de la tuile carrée, de côté mesurant *a* unités). Ada n'intervient pas, ce sont les élèves qui corrigent le langage de Michel et lui suggèrent d'utiliser les instruments de travail se trouvant sur la table. Miche a du mal à «*se tirer d'affaire*». Ada fait venir une fille (Matou) qui corrige l'erreur de Michel et construit le modèle ci-dessous:



$$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 = a^2 - [2b(a - b) + b^2] = \\ = a^2 - (2ab - 2b^2 + b^2) \\ = a^2 - 2ab + b^2$$

Ce type de régulation par le groupe classe semble avoir réussi puisque, dans son journal de bord, Ada commente ainsi cet épisode:

> *Au lieu d'intervenir moi-même de façon intempestive comme dans la première leçon, je laisse le soin aux élèves de débattre entre eux. J'interviens après qu'on ait indiqué l'erreur. Matou doit donc expliquer ce qu'elle fait pour montrer à ses camarades et se convaincre elle-même qu'elle saisit le sens de l'activité. Je crois qu'être capable de se tirer d'affaire et de travailler le sens de l'activité est un fait [didactique] intéressant qui permet de vérifier la compréhension.*

Ceci est aussi un indice qu'à travers ce type d'analyse, Ada prend conscience de l'importance à donner aux idées des élèves. Ce changement découle de l'analyse a posteriori de la première séquence, analyse au cours de laquelle Ada a remis en question ce qu'elle appelle ses «interventions intempestives». Les expressions «se tirer d'affaire» et «travailler le sens de l'activité» que Ada utilise montrent bien qu'elle ne relie pas ici le sens de l'activité à la tâche de modélisation mais plutôt qu'elle associe le travail du sens au contrôle conscient de l'élève sur les étapes de modélisation et de leur enchaînement.

Dans l'épisode 13, Ada demande à un élève (Ibra) de développer $(a + b + c)^2$. Ceci est un cas assez intéressant dans la mesure où il donne aux élèves l'occasion de réaliser que l'utilisation du contexte géométrique permet de résoudre plus aisément des cas que ne le permet parfois l'approche algébrique. Sur le plan algébrique, on est généralement tenu de procéder à un changement de variables (en posant, par exemple, $a + b = u$ ou $b + c = v$), de développer ensuite $(u + c)^2$ ou $(a + v)^2$, de remplacer u^2 et v^2 par leur valeur (ce qui nécessiterait un autre développement du carré d'un binôme: développer $(a + b)^2$ ou $(b + c)^2$), et remplacer u et v par leur valeur. Le choix du développement géométrique est intéressant puisqu'il est moins fastidieux et qu'il introduit une «nouveauté» (par rapport au procédé algébrique dont nous venons de faire cas). Bien sûr, quelle que soit la méthode choisie, la reconnaissance d'une situation d'IR est indispensable en premier lieu car, comme en convient Ada, «*les élèves ne sont presque jamais exposés à ce genre de situation; développer le carré d'une somme de plus de deux termes n'est pas de leur habitude de classe*». Ceci montre que Ada est à la recherche de moyens qui permettent de redonner du sens aux processus cognitifs de généralisation/discrimination et de procéduralisation/composition, comme en témoigne cet extrait du protocole d'entrevue d'explicitation.

> *Ici, j'ai donné le carré d'une somme de trois termes, car les élèves sont habitués à développer presque machinalement le carré d'un binôme. Bon nombre d'entre eux ont l'air embarrassé. Cette situation permet de montrer en quoi il est réducteur de concevoir l'IR uniquement à travers des exercices portant sur le développement du carré de binômes. Le développement de $(a + b + c)^2$ par bon nombre d'élèves (dont Ibra) selon l'approche géométrique est la conséquence de leur rapport personnel à ce type d'activité. J'ai bien sûr aidé Ibra à en construire le modèle géométrique et à expliquer le sens de l'activité à ses camarades; mais c'est [Ibra] lui-même qui a effectué spontanément le développement en écrivant dans chaque case (tuile) l'aire correspondante et en trouvant la somme des aires constitutives.*

Nous voyons bien ici le décalage entre l'intention didactique et sa réalisation lorsque Ada explique elle-même le sens de l'activité aux élèves. Nous pourrions dire qu'autant ses intentions didactiques de départ sont claires au sujet de l'aspect généralisation/discrimination, autant elle a de la difficulté à les réaliser au cours de cet épisode et autant elle se rend compte de ce qui ne «marche» pas dans son intervention avec

Ibra. C'est dire qu'il est difficile de combler l'écart entre la constitution d'un a priori didactique pertinent et sa mise en situation. Ceci confirme aussi l'importance de la dynamique de réflexion structurée par le dispositif «a priori/a posteriori» (Portugais, 1995) au niveau de la constitution de nouveaux a priori, eux-mêmes basés sur l'expérience telle que revue et analysée. Ceci montre, enfin, que Ada continue à opérer des changements qui montrent que les tentatives d'intégrer l'approche adidactique se poursuivent activement chez elle. Dans l'épisode suivant (épisode 14 qui termine cette séquence), nous voyons Ada changer d'activité et de cadre. Elle continue à faire utiliser les facteurs d'une différence de carrés et la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition; mais cette fois-ci, elle demande aux élèves de s'en servir pour effectuer de façon économique certains calculs numériques.

L'épisode 14, consacré aux applications numériques des IR, se déroule d'une façon différente des autres. Ada fait travailler l'élève Khady sur le calcul du carré des nombres 35, 45, 55 et 85, tous terminés par 5. Elle fait remarquer d'abord les caractéristiques particulières du carré des nombres 15 et 25 avant d'indiquer un procédé pratique du calcul de leur carré. Elle demande, ensuite, à Khady d'expliquer, en se servant de l'IR $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, comment on peut calculer rapidement sinon mentalement le carré de 35, 45, 55 et 85. En imitant mal les deux exemples traités, Khady écrit successivement ce qui suit: $45^2 = 4 \times 5 = 20 = 2025$; $35^2 = 3 \times 5 = 15 = 1525$. Après que Khady ait commis des erreurs de notation, Ada a laissé d'abord la classe intervenir pour déceler et corriger ces erreurs. Elle est intervenue elle-même, ensuite, pour pointer ces erreurs (mauvaise utilisation du signe d'égalité entre tous les symboles) et les désigner expressément à Khady. «*J'ai insisté pour que Khady reprenne chaque cas en utilisant une notation acceptable (avec les flèches); mais je l'ai aussi un peu guidée à corriger ses erreurs*». Cette explication après-coup met en relief son intention sous-jacente (dévoiler un procédé pratique de calcul numérique) et la prise en compte des effets de guidage provoqués par Ada elle-même.

Ada n'intervient pas sur le second cas. Comme une huitaine d'élèves ont levé le bras pour signifier qu'ils ont décelé une erreur, Ada a demandé à Khady de regarder elle-même si «*quelque chose ne marcherait pas*», puis de «*lire à haute voix ce que tu as écrit*». Il s'agit du produit 3×5 à la place de 3×4. Cette dernière intervention est fort habile car elle met en conflit le 3 x 4 (en fait, 3 par son successeur 4) et le 3 x 5 (au lieu de 3 par son successeur 4). Il s'agit d'une intervention centrée à la fois sur le numéral (le deuxième facteur est le successeur du premier) et le numérique (qui exige une notation symbolique convenable: 3 x 4 = 1225 est inacceptable; mais $35^2 \rightarrow 3 \times 4 = 12 \rightarrow 35^2 = 1225$ peut être interprété). Le plus grand intérêt en est que Ada a dévolué la fonction de ce double contrôle. Khady s'est non seulement rendue compte qu'elle doit multiplier 3 par 4 (elle écrit le produit 12), mais qu'elle doit aussi utiliser la notation $3 \times 4 = 12 \rightarrow 1225$ pour éviter ainsi d'écrire 3 x 4 = 1225.

Quant à la technique de calcul du carré des nombres terminés par 5, elle est institutionnalisée par Ada lorsque Khady a corrigé ses erreurs et trouvé les réponses correctes: «C'est *n* par *n + 1* suivi de *25*, 25 "terminant" le carré de tout nombre "terminé" par 5». En analysant son protocole, Ada s'est rendue compte qu'elle n'avait pas mis en évidence qu'outre le fait que l'égalité $(10n + 5)^2 = 100\, n\, (n + 1)$ lui permet de prouver cette affirmation, elle lui indique ce procédé très économique de calcul du carré d'un nombre terminé par 5. C'est à la fin de cette séquence que Ada parvient à gérer *adidactiquement* sa classe. Nous pouvons dire que le fait de «ne pas intervenir» joue ici une fonction didactique de type adidactique (pour voir si Khady s'aperçoit d'elle-même que sa réponse est doublement erronée) puisque faire relire la réponse à haute voix et demander d'y voir clair est une activité cognitive consistante et pertinente.

2.2.3 Résumé du cas de Ada

L'analyse approfondie des épisodes permet d'observer que sur les 7 épisodes de la première séquence trois sont consacrés à la prise et à la consignation d'informations (épisodes 1, 2, et 4). Les processus reliés à la résolution de problème et ceux de planification, de régulation et de contrôle du sens ne sont pas très utilisés dans ces épisodes, mais ils le sont moyennement dans les autres épisodes, en particulier dans les deux derniers (6e et 7e) essentiellement cognitifs. Les épisodes 3, 4 et 7 placent les élèves en situation de pratique guidée, étape qui suit immédiatement celle de démonstration. Nous constatons que la planification, la régulation et le contrôle du sens y sont peu observables par les verbalisations qui consistent malheureusement plus à dire tout haut ce que Ada écrit au tableau qu'à donner accès à sa façon de dévoluer les activités.

Dans la seconde séquence didactique, où l'essentiel des épisodes (9, 10, 11, 12 et 13) est consacré aux activités de modélisation et d'intégration des connaissances, la séquence des stratégies utilisées par Ada montre que bon nombre de processus sont tour à tour sollicités: modélisation, intégration des connaissances, procéduralisation/composition étant les processus centraux et, à un moindre degré, prise et consignation d'informations. Il existe une certaine symétrie pour quelques éléments, mais celle-ci n'est pas aussi grande que pour Fadak.

En conclusion, les matrices, les séquences par épisodes et la séquence complète des stratégies utilisées par Ada nous apprennent que:

1. L'intégration des connaissances «*facilite non seulement la compréhension des IR mais permet aussi de voir réellement de quoi il s'agit; avec les formes géométriques on peut vérifier concrètement*», reconnaît Ada. Cette intégration a révélé à Ada l'aspect dynamique de la réflexion mathématique, aspect qui est la clé de la compréhension, de la construction ou de la reconstruction du sens des concepts abordés. «*Les IR ne sont plus une affaire d'écritures et de manipulations de symboles*», commente Ada. Certes, les graphies algébriques par lesquelles se montrent les IR constituent un outil incontournable pour organiser l'enseignement et pour reconnaître qu'il s'agit bien d'un enseignement des IR. Mais le contenu, les concepts constitutifs des IR ne sont plus confondus à un ensemble de signes et l'on ne peut prendre la manipulation plus ou moins correcte de ces symboles pour la compréhension des relations qu'elles expriment.

2. Le plus difficile a été d'enseigner les notions théoriques (monôme, binôme). En effet, comme on peut s'en rendre compte dans l'épisode 7, Ada a rencontré de grosses difficultés à définir ces concepts. Le découpage que Ada a opéré sur les opérations (multiplication, exponentiation) et les propriétés de ces opérations (i.e; distributivité) n'est pas facile. Ada trouve elle-même qu'«*il est peu raisonnable d'étudier séparément les concepts (monôme, binôme, etc.), les opérations et les propriétés de ces opérations car les IR et leurs modèles rencontrés par les élèves participent de tous ces concepts*». D'où l'importance du champ conceptuel en tant qu'«espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement

implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion» (Vergnaud).

3. L'intégration des connaissances a suscité une conceptualisation qui est porteuse de sens de l'addition et de la multiplication des binômes. En effet, reconnaît Ada, «*avec ce que j'ai appris (...), il ne s'agit plus de résoudre des exercices formels mobilisant les seules connaissances [instrumentales (formules, trucs)] pour comprendre les IR, mais de résoudre des problèmes en utilisant des formes géométriques et des tuiles algébriques*». Ce qui ne peut se réaliser que si les élèves sont les sujets autonomes et responsables au sens de la connaissance (Brousseau) pour résoudre eux-mêmes ces problèmes, et non d'une action dirigée ou imposée par l'enseignant.

4. L'intégration des connaissances a développé chez Ada des compétences en résolution de problèmes. En effet, «*il n'y a plus d'obsession à mon niveau puisque je sais désormais qu'il suffit de modifier les problèmes [les situations] ou leur présentation [contextualisation] pour amener les élèves à changer leurs façons de les traiter et de les résoudre*», affirme-t-elle.

5. L'intégration des connaissances a favorisé la connexion des savoirs mathématiques et didactiques. En effet, Ada a utilisé le jeu de cadres sur lesquels se fonde la structure «Activités de modélisation - Intégration des connaissances - Validation - Pratique indépendante». Dans cette structure quadrilatérale, Ada et ses élèves ont été confrontés, dans une première phase, à un problème de modélisation pour lequel la représentation graphique de l'IR $(a + b)(a - b) = (a^2 - b^2)$ a permis d'engager une procédure de conversion. C'est au cours d'une phase d'action que Ada a implicitement mis en œuvre des outils nouveaux (tuiles algébriques) pour représenter l'IR donnée. L'intégration de ces connaissances nouvelles aux savoirs anciens (sur les monômes, binômes) s'est effectuée au cours d'une seconde phase, dans les processus de formulation et de validation. C'est au cours de la troisième étape (phase d'explicitation) que certains éléments nouveaux ont été identifiés comme objets de savoir sur les IR (découpage et recollage). À ces trois étapes qui constituent le pôle «Activités de modélisation» de la structure s'ajoutent une phase d'institutionnalisation et une phase de pratique indépendante où, pour des raisons

d'efficacité, Ada a donné aux élèves l'occasion de construire (sans être trop guidés) leurs propres modèles des IR. Nous retrouvons ici les différents actes de la construction des connaissances mis en œuvre par Brousseau: action, formulation, validation, institutionnalisation.

6. L'enseignement de Ada s'est progressivement adapté en fonction des données et des contraintes du Séminaire. En effet, dans la plupart des épisodes de la première séquence, les processus de planification, de contrôle et de régulation servent autant à gérer les aspects affectifs que la cognition. Par contre, les épisodes de la seconde séquence révèlent une plus grande prise en charge des analyses préalables pour travailler davantage sur le sens des activités proposées. Cette évolution découle de l'analyse a posteriori de la première séquence, analyse au cours de laquelle Ada a réalisé l'importance d'intégrer l'approche adidactique.

7. L'habileté de Ada à concevoir, réaliser et analyser ses activités a varié de façon significative en fonction du contexte spécifique lié à sa position duale. En effet, en tant qu'élève par rapport au formateur, elle reconnaît qu'au début du Séminaire, «*ce n'était pas facile (...) de travailler avec les formes géométriques et les tuiles, parce que moi-même ne les connaissais pas du tout*». Si bien qu'avant de lancer les activités de modélisation, «*j'avais le tract; je me demandais si j'allais pouvoir arriver*». En tant qu'enseignante, Ada a proposé des conditions de modélisation qui ont rendu nécessaires l'échange d'idées et la négociation d'un langage pour assurer l'échange à propos des conventions sur les formes géométriques.

Partie d'une position essentiellement instrumentale et interventionniste dans la première séquence, Ada est passée à une position de «facilitatrice» dont les tentatives d'intégrer l'approche adidactique se sont poursuivies tout au long de la seconde séquence. Ainsi, de façon progressive et au fur et à mesure du déroulement des séquences, elle a cherché à être de moins en moins *élève* pour devenir de plus en plus *enseignante*; elle a cherché à être de moins en moins assujettie à des contraintes du contrat de formation pour devenir de plus en plus capable d'assujettir à ses choix didactiques les activités de modélisation et d'intégration des connaissances qu'elle réalise avec ses élèves. «*Je me sens, à présent, plus apte et mieux préparée à enseigner les IR*», nous confie-t-elle.

8. Comme effets positifs qui se sont manifestés chez Ada, nous citons les retombées (didactiques) de l'analyse de son propre protocole. En effet, cette analyse lui a permis une réflexion autonome sur son fonctionnement didactique. «*J'avais prévu très peu de difficultés, je n'avais donc pas anticipé comment intervenir et à quel moment. La prochaine fois, j'aimerai prévoir plusieurs difficultés, mais j'éviterai que les élèves les affrontent toutes à la fois*», commente-t-elle. Le fait d'attribuer à son «manque d'intervention» au moment opportun une part de responsabilité des difficultés des élèves ne l'a pas empêché de remettre clairement en question ses «interventions intempestives». Cette analyse lui a également permis de remettre en question des éléments de son approche pédagogique. «*J'aurai pu inviter un autre élève à représenter graphiquement l'IR, faire comparer les modèles graphiques et laisser les élèves se prouver eux-mêmes lequel d'entre eux a produit le bon modèle*», se ravise-t-elle. Le travail d'analyse de protocole a surtout favorisé chez Ada une construction autonome des savoirs d'expérience, comme l'attestent les ajustements constatés dans la deuxième séquence où elle a mis l'accent sur les contraintes mathématiques et didactiques qui sont à l'origine des difficultés que les élèves ont rencontrées dans les activités proposées. Seconde séquence où elle a donné plus de place aux idées des élèves et où, bien que ne sachant pas trop comment, elle a tenté de travailler dans un cadre adidactique.

9. Pour un formé qui vient d'aussi loin que Ada, les résultats obtenus sont plutôt satisfaisants. Pour Ada, dont les intentions didactiques n'étaient pas très claires au sujet des activités de modélisation et qui, au début, procédait par guidage serré, les mises en relation entre sens, opérations sur les IR et procédés de représentation ne se sont pas faites sans difficultés. Aux difficultés déjà signalées dans le cas de Fadak, s'ajoutent les difficultés d'implication dans le travail d'autrui, la tentation de communiquer la «bonne» réponse (le «bon» modèle), et le piège de la non-intervention. En faisant la synthèse et la discussion des résultats que nous interprétons dans le dernier chapitre (chapitre 8), nous reviendrons, plus en détail, sur ces difficultés qui ne sont pas spécifiques de Ada, puisque nous les retrouvons chez presque tous nos sujets.

3 Synthèse des études de cas

C'est au plan *cognitif* que nous observons l'une des plus grandes différences entre Ada et Fadak; nous observons peu de stratégies de ce type. Les verbalisations, source privilégiée pour ce type de pensée, nous informent peu sur les processus mentaux en cours, sauf sur le *contrôle du sens*. Autant Ada contrôle le travail des élèves et le sien, autant elle en assure la *régulation*. La stratégie de régulation (réviser les étapes passées ou le travail effectué) semble relativement bien utilisée par Ada. Toutefois, nous observons peu de stratégies liées à la *planification*, à la *prise de décisions* et à la *mobilisation des savoirs mathématiques* (S1*) et didactiques* (S2*).* Bien qu'un certain nombre d'activités de planification et de mobilisation de connaissances soit rapportées en entrevue, elles ne sont pas souvent confirmées. La prise de décision est peut-être un point relativement faible chez Ada.

Au sujet des *processus cognitifs*, certaines stratégies sont rapportées, que nous ne pouvons pas toujours confirmer par d'autres sources, sauf celles de *procéduralisation ou de composition*. C'est la stratégie d'imitation des exemples et des exercices du Séminaire qui se dégage de la transcription des protocoles. Nous enregistrons peu de comportements d'*élaboration/organisation* des connaissances à enseigner sur les IR et un peu plus de stratégies de *généralisation/discrimination*, mais cela reste relativement bien mince. Les stratégies d'*évaluation* sont légèrement moins variées et nombreuses. Ada dit savoir lorsque le but est atteint; elle dit savoir lorsque l'élève comprend ou non, mais elle reconnaît ne pas être toujours capable d'identifier la nature des difficultés rencontrées par les élèves.

En ce qui concerne les *activités de modélisation*, les données recueillies auprès de Ada sont plutôt satisfaisantes; plusieurs stratégies sont rapportées. Ada a mis beaucoup d'insistance à nous parler de la manière dont elle s'y est prise pour amener les élèves à s'impliquer dans ces activités; mais l'observation de son comportement autant que ses verbalisations et son cahier de préparation nous montrent que ces activités sont minimes par rapport à celles de Fadak. Ada s'est surtout investie à faire travailler ses élèves sur les IR $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Mais nous relevons relativement peu d'activités de découpage et de recollage. Dans la construction des modèles des IR, les élèves ont certes mobilisé des savoirs mathématiques et didactiques; ils ont pris quelques décisions et ont utilisé des tuiles algébriques; mais ils n'ont pas été responsables, au sens de la connaissance (Brousseau), de leurs productions.

Nous observons la deuxième grande différence avec Fadak au plan *des activités d'intégration des connaissances*: peu de stratégies de ce type sont observées chez Ada. Ce sont surtout les entrevues qui en font largement cas. Que pouvons-nous en conclure? Ada rapporte-t-elle des stratégies d'intégration des connaissances qu'elle trouve utiles à l'apprentissage des IR, mais qu'elle utilise et fait utiliser peu dans son enseignement? Ou bien les autres instruments de cueillette de données, notamment l'observation vidéo, ont-ils été peu productifs dans son cas? Rappelons que nous n'avons pas pu filmer la troisième séquence de Ada, séquence qui est généralement consacrée à la récapitulation des grandes idées développées, des activités de modélisation réalisées, des exercices traités et des problèmes d'application numérique résolus.

Pour Ada, «*l'expérience s'est avérée globalement positive*». L'analyse de ses séquences nous permet de constater qu'elle intègre bien les connaissances sur les IR. Si elle a manifesté peu de lacunes au plan des habiletés mathématiques reliées aux IR, nous ne pouvons pas en dire autant de la transposition qu'elle a faite de ses connaissances mathématiques en enseignement, où nous relevons les difficultés suivantes: Premièrement, il aurait été pertinent qu'elle tire davantage partie de la connexion entre la multiplication et la factorisation des polynômes pour transposer de façon appropriée ses connaissances en enseignement. L'analyse des séquences montre pourtant qu'elle compte exploiter ce lien mais qu'elle n'utilise pas les bons moyens pour le faire. Deuxièmement, Ada ne fait pas le travail nécessaire pour intégrer ce savoir didactique en enseignement. Ainsi, dans l'activité de découpage, au lieu de laisser les élèves découvrir le sens de l'IR, elle leur enseigne plutôt ce savoir. Troisièmement, elle éprouve des difficultés à se détacher des procédures formelles pour s'adapter au niveau des élèves. Elle est, quelques fois, incapable de déroger de la préparation de ses leçons pour s'adapter à la compréhension des élèves.

Le visionnement de la première séquence lui a permis de s'apercevoir de ses erreurs dont elle a tenu compte dans la deuxième séquence. Elle a démontré une bien meilleure maîtrise des concepts constitutifs des IR que ne le laissait présager son résultat au prétest. Nous ne pouvons attribuer cette différence au seul fait qu'elle s'est bien préparée à enseigner ces notions qu'elle a eu le temps de réviser. Au plan didactique, Ada a envisagé de plus en plus le processus d'enseignement/apprentissage comme un échange de connaissances dans lequel les élèves ont joué un rôle important. Le visionnement des leçons nous permet de voir qu'elle tend vers une approche didactique qui s'apparente à la construction des connaissances par les élèves et ce, même si elle n'a pas toujours fonctionné dans cette direction. Toutefois, lorsque des impondérables surviennent (questions inattendues) et qu'elle n'a rien envisagé pour y faire face, elle devient rigide, impositive et «transmetteuse» de connaissances.

Contrairement à ceux des formés qui proposent des exercices répétitifs dans lesquels les élèves savent quoi faire pour les traiter, Fadak a présenté de véritables situations-problèmes dans lesquelles les élèves avaient à construire des modèles et à intégrer diverses connaissances. Quant à l'utilisation de ses connaissances didactiques, l'analyse a démontré que Fadak s'est efforcé de mettre en place les conditions nécessaires afin que les élèves construisent leurs connaissances à partir d'une variété de situations. Fadak s'est de moins en moins appuyé sur des trucs et sur un enseignement procédural. En effet, plusieurs exemples montrent que pour lui, il est important d'offrir des contextes significatifs aux élèves afin de favoriser leurs apprentissages et, par le fait même, leur compréhension.

Par ailleurs, les consignes relatives à la construction des modèles ont induit chez certains élèves la nécessité de faire des mesures plus ou moins précises. La question de l'adéquation des instruments aux modèles géométriques renvoie à un problème de contrat. Le décalage entre la compréhension de la tâche et celle des consignes que Fadak et Ada ont voulu faire passer est probablement l'une des causes de ces difficultés. Pourtant des épisodes entiers ont été consacrés à la négociation avec les élèves du sens de la tâche et des consignes. Fadak et Ada n'ont peut-être pas expliqué aux élèves le sens des activités en leur disant pourquoi il y avait certaines contraintes, pourquoi les procédures par tâtonnements ou au jugé pouvaient être valables dans certains cas, mais pas dans d'autres, pourquoi le sens de la tâche devait être situé du point de vue des procédures – utilisation des stratégies de modélisation – et non du point de vue du résultat – précision des figures.

La dévolution aux élèves du problème de la construction des modèles relève d'un paradoxe classique dans une situation d'enseignement (Brousseau, 1986a): l'enseignant ne peut vraiment dire aux élèves ce qu'il veut leur faire réaliser puisque cela reviendrait à leur donner la solution. Il doit donc leur annoncer un objectif autre, mais qui soit de nature à conduire les élèves vers l'apprentissage de la modélisation. Une négociation avec les élèves du sens de la tâche de construction d'un modèle et de l'usage des tuiles s'impose donc. Le cas de Fadak montre que cette négociation est possible. Mais si cette négociation est possible, il reste la question du sens de la réussite. La validité des modèles construits dépend de la convention d'usage des formes géométriques et des tuiles algébriques. Les clés de cette convention (qu'est-ce qui caractérise un modèle correct?) sont du ressort du futur enseignant, et la décision de ce dernier pour accepter ou rejeter une procédure est basée non seulement sur les règles de la communauté des mathématiciens, mais aussi sur des éclairages de la communauté des didacticiens.

CHAPITRE 8

INTERPRÉTATION ET CONCLUSION

CHAPITRE 8

INTERPRÉTATION ET CONCLUSION

Ce dernier chapitre rappelle les questions principales auxquelles l'ingénierie apporte quelques réponses. Dans la première section, nous résumons la recherche ainsi que ses principaux résultats; dans la seconde, nous dégageons les apports de la recherche tant au plan méthodologique que théorique. Les implications au plan didactique, quant à elles, se trouvent dans la troisième section. Dans la quatrième section, nous précisons les limites de la méthodologie et du modèle théorique. Dans la cinquième section, nous esquissons des perspectives de recherche futures et, enfin, le chapitre se termine par quelques remarques finales.

1. Résumé de la recherche

Dans cette section, nous rappelons brièvement la problématique, les objectifs, la méthodologie et quelques résultats de notre recherche.

1.1 Problématique et cadre théorique

L'intégration des connaissances dans la formation des futurs enseignants n'est pas très exploitée en recherche. En Guinée, la présente recherche constitue un premier travail sur la formation de futurs enseignants à cette intégration. Nous avons voulu fournir à notre contexte culturel un lieu d'intervention favorable pour participer à briser le cercle vicieux de l'échec en mathématiques, pour donner un lieu privilégié de préparation du futur enseignant à ses tâches puisqu'on attend de plus en plus de lui qu'il amène l'élève à utiliser des connaissances transversales. Nous avons cherché à comprendre la façon dont les formés de l'UGANC et de l'ISSEG conçoivent, réalisent et analysent leurs activités d'enseignement des identités remarquables (IR). Le présent travail appartient ainsi au domaine de l'ingénierie didactique. Les représentations sémiotiques (énoncé en langue natuelle, graphie algébrique, figure géométrique) ne sont pas seulement indispensables à des fins de communication, elles sont aussi nécessaires au traitement d'information, à l'objectivation et donc au développement de l'activité d'intégration elle-même. Le passage d'un système de repésentation à un autre ou la mobilisation simultanée de plusieurs systèmes de représentation au cours du traitement des IR n'ont rien d'évident, et c'est pourquoi la présente recherche s'y est intéressée en profondeur.

Un travail d'apprentissage spécifique prenant en compte la diversité des systèmes de représentation, l'utilisation de leurs possibilités propres, leur complémentarité et leurs «traductions» mutuelles l'un dans l'autre, est nécessaire pour l'intégration. L'utilisation d'un ensemble varié de situations-problèmes faisant appel aux différents concepts constitutifs des IR s'avère indispensable pour réaliser à la fois le projet de donner du sens aux IR et le projet d'asseoir la compréhension. Le langage naturel, l'écriture symbolique et les figures géométriques ne pouvant pas être traités comme formant un seul et même registre, ces deux projets consistent à diversifier les registres de représentation des IR.

Que l'expérience soit incontournable dans la formation de ces compétences n'est pas une découverte. Ce qui est nouveau, c'est l'analyse des situations didactiques où, d'une part, le traitement d'une IR s'effectue à l'intérieur d'un même registre (traitement) et, d'autre part, où une transformation fait passer une IR d'un registre à un autre (conversion). Ce qui est nouveau, c'est l'identification des formes stables de ces activités de traitement ou de conversion (les schèmes) face à une variété de situations ainsi que l'analyse des relations entre les différentes situations qu'on peut ainsi classer. Ces différentes classes de situations et le réseau des concepts qui permet de traiter les IR constituent ainsi ce que Vergnaud appelle un champ conceptuel. L'intégration des connaissances requiert la coordination des différents champs conceptuels qui s'effectue à travers des situations-problèmes. Cela dit, plusieurs questions se posent pour la formation de nos futurs enseignants à cette intégration.

1.2 Questions principales et objectifs de recherche

En amenant les formés à concevoir, à réaliser et à analyser des activités didactiques sur les IR, nous nous sommes posé les questions suivantes: quel rôle peut jouer l'intégration des connaissances algébriques et géométriques dans l'enseignement des IR? Quelle est la nature des difficultés que les futurs enseignants rencontrent en établissant de telles connexions? En particulier, quel est le poids respectif de la composante cognitive et de la composante didactique? Le principal objectif est de vérifier l'efficacité de l'intégration des connaissances dans l'enseignement des IR chez les formés. Le deuxième objectif concerne l'analyse des difficultés rencontrées par les formés dans cette intégration.

Nous présentons, à présent, notre méthodologie de recherche pour résumer ensuite notre grille d'analyse.

1.3 Méthodologie

Dans l'esprit de la théorie des situations de Brousseau, nous avons construit des situations qui ont généré chez les séminaristes des problèmes à résoudre. Nous avons monté une ingénierie didactique de formation des 27 sujets à l'intégration des connaissances pour réunir les conditions d'un fonctionnement adidactique à propos de savoirs d'expérience sur l'enseignement des IR. Le dispositif expérimental a été organisé en deux plans: il comprend un Séminaire où les séminaristes ont été placés dans une situation d'action, appelée situation de formation, au sein de laquelle la richesse du sens mathématique des IR (à recréer pour les élèves de 9^{e} ou 10^{e} année) a joué un rôle moteur considérable. À ce niveau, nous avons étudié les activités des séminaristes à partir de protocoles d'observation, d'analyse des entrevues et de journaux de bord (il s'agissait donc des savoirs didactiques S2). Le dispositif comprend aussi une ingénierie qui demandait au formé de préparer, de réaliser et d'analyser deux ou trois séquences didactiques avec les élèves de son lieu de stage (pour les sujets de l'ISSEG). Ces séquences avaient pour objet la prise en compte des difficultés à intégrer les connaissances dans l'enseignement/apprentissage des IR. L'ingénierie a alors fonctionné comme une suite de boucles avec une conception de la séquence 1, une réalisation de la séquence 1, puis une analyse a posteriori de la séquence 1. Sur cette base, le formé conçoit ensuite la séquence 2, la réalise et fait l'analyse a posteriori, et ainsi de suite, suivant ainsi le schéma de Portugais (1995).

L'idée directrice de l'organisation du dispositif consiste à placer la conception, la réalisation et l'analyse des séquences entièrement sous la responsabilité du futur enseignant. Celui-ci a dû exploiter les connaissances sur les difficultés d'intégrer les connaissances acquises dans le cadre du Séminaire pour résoudre un problème didactique: comment intervenir sur les difficultés des élèves à intégrer leurs connaissances. Le dispositif a instauré une dynamique qui, à travers les remises en question générées par l'analyse d'une séquence donnée, a permis au formé de prendre des décisions et de faire de nouveaux choix didactiques pour la séquence suivante. Tout s'est donc joué au niveau de la confrontation entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori. Il n'y a eu aucune instance d'institutionnalisation pour le savoir d'expérience, sinon la situation de formation elle-même. En effet, ce savoir d'expérience (S3) est construit par le formé sur la base de ses savoirs mathématiques (S1) et didactiques (S2) qui ont été explicités lors du Séminaire.

Il n'est pas superflu de noter qu'il y a eu, en fait, une double ingénierie didactique. En plus de celle que nous avons rapportée ici, le formateur a lui-même recouru à l'ingénierie didactique pour construire les situations-problèmes du Séminaire. Le formateur est conscient que l'ingénierie se veut une forme de travail didactique assez rigoureux et que les ajustements apportés au dispositif de formation à travers les boucles de l'ingénierie pour tenir compte de l'action et de ce qui se passe en classe ne doivent pas se faire au détriment des fondements de l'intervention. Il a gardé à l'esprit le fait que son intervention vise une construction de savoirs chez le formé dans un contexte d'intégration des connaissances et que les réajustements successifs doivent tenir compte de cet objectif.

Du cadre théorique fondé sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud et sur la théorie des situations didactiques de Brousseau, nous avons retenu comme éléments du modèle théorique pour l'analyse les codes thématiques suivants: prise d'informations, consignation d'informations, représentation/environnement didactique, planification, régulation/contrôle du sens, élaboration/organisation, généralisation/discrimination, procéduralisation/composition, prise de décision, formulation, modélisation, intégration des connaissances, communication/échange, validation et évaluation/compréhension. L'analyse s'est appuyée sur l'ensemble des données collectées lors de l'expérimentation. Nous avons aussi fait appel à des données externes (productions des formés au prétest, au post-test, au questionnaire sur leurs conceptions) pour compléter ces données. Ces données externes ont permis de situer globalement l'évolution des formés dans la construction de situations-problèmes favorisant l'intégration des connaissances. L'analyse des situations, à elle seule, n'aurait pas permis de rendre compte de cette évolution en regard de l'enseignement des IR.

1.4 Rappel des résultats

Les formés de l'ISSEG ont, en quelque sorte, réinventé les stratégies de contrôle du sens alors que les sujets de l'UGANC les ont appliquées. Le rapport au savoir didactique n'est donc pas le même pour ces deux groupes, comme le montrent les résultats suivants.

1.4.1 Rappel des résultats du groupe de l'UGANC

Les séquences du groupe de l'UGANC ont pour objectif d'introduire des tuiles algébriques et des formes géométriques pour développer les IR, multiplier ou factoriser les polynômes, ainsi que des règles de manipulations algébriques (calcul rapide). Lorsqu'il introduit ces règles, le formé de ce groupe compare la graphie algébrique d'une IR à l'image obtenue par l'utilisation du contexte géométrique et il trouve (par observation et par comparaison) comment s'effectue le passage. Dans ses séquences, la construction de modèles prend place dans une étape expérimentale à potentiel générique; la fonction de modélisation dans cette étape expérimentale se rattache à un projet d'amplification du sens (donner un sens concret à travers les activités de découpage et de recollage, associer des tuiles ou des formes géométriques aux opérations sur les monômes, aux graphies des IR). Les propriétés des opérations, notamment la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, sont peu présentes dans les activités portant sur la multiplication, la factorisation ou le développement des IR. Par ailleurs, c'est le formé qui mène complètement la séquence d'introduction aux tuiles, aux formes et aux règles, les élèves y participant peu malgré les intentions de départ dans ce sens. La validation des modèles reste près de l'élaboration/organisation qui consiste à partir d'un exemple pour montrer comment faire.

1.4.2 Rappel des résultats du groupe de l'ISSEG

Les séquences du groupe de l'ISSEG ont consisté en activités de généralisation ou de discrimination et en procéduralisation/composition. Dans ces séquences, nous avons identifié une première étape où le formé propose, au départ, une activité qui favorise la généralisation ou la discrimination, en invitant les élèves à représenter géométriquement des IR ou à écrire des graphies algébriques qui expriment une régularité (généralisation) ou une spécificité (discrimination) à partir des relations entre les grandeurs (dimensions des tuiles). Plusieurs formés, comme **Kémo** et **Pagui**, ont proposé des dessins ou une représentation matérielle des tuiles découpées dans des feuilles de carton. Le formé prend généralement assez de temps à expliquer «*pour éviter de perdre le contrôle*», comme le mentionnent **You** et **Tomy**, en entrevue. **Daf** et **Bana** disent avoir peur de perdre le contrôle parce que «*les élèves n'ont pas l'habitude de travailler sans que le prof leur indique au départ une procédure à suivre*» et parce que aussi le cours se déroule en présence du formateur-chercheur qui les évalue. Pour **Laye**, **Penda** et **Moh**, cette étape, qui consiste à faire comprendre les fondements et à faire partager cette compréhension, peut servir de validation implicite.

Une seconde étape, celle de validation explicite, consiste en calculs, vérification par la réponse ou applications répétées de la procédure. La fonction de cette étape est, d'une part, de disposer collectivement des messages, sous la direction du formé qui peut être associée à une étape d'institutionnalisation, même si les modèles produits ne sont pas des objets d'enseignement comme tels. D'autre part, l'argument de validation sert à vérifier ou à convaincre de l'efficacité de la façon de produire un «bon» modèle ou encore de l'applicabilité de la procédure en la faisant fonctionner sur différents cas particuliers. Pour **Frank**, **Pagui** et **Samp**, les explications aident l'élève à avoir une idée de la démarche de construction des modèles, mais n'ont pas un potentiel de validation. La majorité des formés (15 sur 21) ont réalisé le projet de donner du sens au symbolisme pour faire comprendre les concepts constitutifs des IR. L'étape de formulation avec les explications qui l'accompagnent et l'étape explicite de validation des modèles peuvent servir cet objectif lorsqu'elles montrent les propriétés sur lesquelles s'appuie la modélisation.

C'est à la troisième étape, celle de comparaison des modèles que le formé montre pourquoi l'image géométrique d'une IR et sa graphie algébrique sont «équivalentes» en s'appuyant sur le sens des opérations et sur leurs propriétés ou sur la façon dont les tuiles sont assemblées. Nous trouvons également des vérifications par la réponse, cas où l'utilisation de contre-exemples n'a pas servi à faire comprendre et où certaines activités qui auraient pu donner lieu à des situations de validation sont utilisées pour développer des habiletés de calcul (carré de nombres terminés par 1 ou 5).

1.4.2.1 Schéma d'organisation de l'activité de modélisation

Le schéma d'organisation de l'activité de modélisation (figure 33) caractérise l'ensemble des activités de ce type de dix-huit des formés de l'ISSEG.

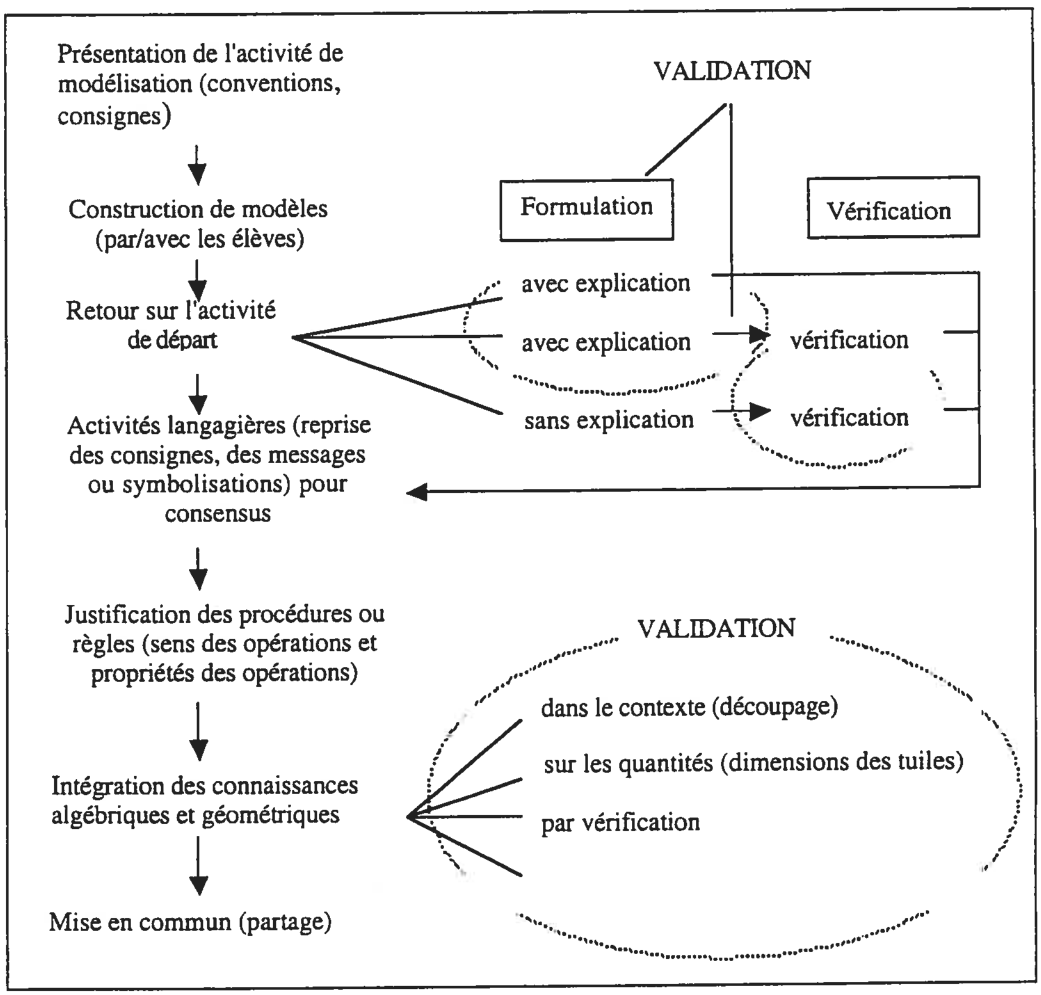


Figure 33: Schéma d'organisation de l'activité de modélisation du groupe de l'ISSEG

Le formé présente l'activité de modélisation aux élèves et leur demande de la réaliser en petits groupes; il fait verbaliser les procédures et invite les élèves à les expliciter dans leurs propres mots. Après que chaque groupe ait construit son modèle, le formé revient sur le problème de départ (graphie algébrique d'une IR ou son image géométrique); il fait interpréter la figure en fonction du modèle produit ou fait construire la figure à partir de la graphie algébrique donnée. Le retour à la figure peut se faire en même temps que l'intégration des connaissances. Dans ce processus, les élèves sont invités à valider les modèles ou les procédures soit lorsqu'ils les construisent et les expliquent soit lorsqu'ils intègrent leurs connaissances pour établir l'équivalence des modèles. La période de construction de modèles est suivie d'un retour sur les règles opératoires, mais cette période ne se déroule pas toujours de la même façon. Certains formés, comme **Fadak** et **Frank**, font expliquer les règles ou procédures par les élèves et les expliquent, parfois, à leur tour. D'autres, comme **Kant**, **Réotra** et **Lika**, ne convoquent pas les élèves dans ce sens; mais comme il arrive que ces derniers ne se contentent pas d'énoncer des règles, ils cherchent à les expliquer de façon libre, volontaire, sans y être contraints.

L'étape de formulation, qui a pour objectif d'obtenir un consensus entre les élèves et le formé à propos de la négociation du sens, de l'appropriation des consignes, de la compréhension des messages et du symbolisme convenu, s'accompagne de l'explication que les élèves donnent de leurs procédures ou règles de calcul. Le formé amène les élèves à expliquer comment ils ont construit leurs modèles en se référant au contexte (tuiles, formes géométriques, découpage, etc.). Il organise les activités langagières afin d'introduire et d'affiner le vocabulaire technique avec les conventions d'écriture; ces activités lui permettent aussi de s'assurer que les conventions ont du sens pour tous et que les messages passent clairement. À l'image de **Fadak** et de **Penda**, le formé peut proposer d'autres cas dans lesquels les exemples s'appuient sur les propriétés généralisables de la situation de modélisation, et où l'accent n'est pas mis sur la réponse mais sur le symbolisme qui est le moyen d'y parvenir. Il peut aussi prévoir une étape de vérification des règles ou des formules, suivie d'une étape de validation qui repose sur les propriétés du contexte.

1.4.2.2 Faire progresser les élèves en même temps et leur faire partager la compréhension

L'observation vidéo nous a permis de constater que le principal interlocuteur du formé est le groupe, la formulation ou le questionnement d'un élève étant toujours suivi d'un renvoi au groupe. Cependant, lorsque l'élève, en situation, n'a pas pu se représenter la tâche, le formé a traité individuellement avec lui. Certes le fait d'avoir à travailler avec des classes à effectifs pléthoriques (plus de 100 élèves) n'a pas facilité la discussion en petits groupes. Le formé a ainsi pris le contrôle des échanges et a dû interrompre parfois les élèves en cours d'explication, ceci pour s'assurer que tous les élèves suivent et avancent ensemble, que tous sont au même point de compréhension, avant d'entreprendre autre chose. Le formé tentait ainsi de s'assurer de la compréhension de l'élève en situation, mais aussi de celle de toute la classe et de l'avancement du temps didactique.

Bien sûr, le dessin, lui-même, peut avoir une valeur générique s'il permet aux élèves de voir, par exemple, la propriété de distributivité dans le modèle particulier. Il est parfois facile de «voir» sur le dessin la procédure; il y a une certaine évidence graphique pour le formé mais pas nécessairement pour les élèves. Certains formés, comme **Lika**, **Alfa** et **Laye**, ne font pas expliciter la propriété de distributivité. Cependant, chez la majorité des formés de ce groupe (15 sur 21), les va-et-vient entre la représentation géométrique et la graphie algébrique se font à travers les échanges entre le formé et le représentant du groupe, entre ce dernier et les autres élèves. Ces échanges sont si importants que ce qui était jusque là le modèle du groupe devient le modèle de l'ensemble des élèves de la classe et du formé. Vérifier si le message fonctionne ne consiste pas ici à vérifier si le modèle «fonctionne», mais s'assurer plutôt que le raisonnement s'applique à chaque situation particulière.

L'analyse des séquences didactiques a mis en évidence des contraintes de gestion des activités de modélisation: premièrement, si dès le départ, le formé entreprend une discussion avec les élèves, ceux-ci ne pourront pas tous présenter leur modèle; deuxièmement, s'il choisit d'utiliser un contre-exemple pour faire comprendre, rien ne servira de vérifier les autres modèles. Ces contraintes font que l'étape de validation ne sert à rien d'autre qu'à corriger, voire à invalider ou clarifier certains modèles. L'étape de vérification a aussi servi à invalider les modèles qui ne «fonctionnent» pas. Nous avons observé ce phénomène chez **Mab**, **Alex** et **Kant** qui ne montrent pas ce qui ne va pas dans le modèle. Ces formés ont rejetté ou clarifié, par autorité, avec au plus un contre-exemple montrant que c'est faux. Cette façon de procéder ne satisfait pas tous les élèves, l'étape de vérification des modèles ou des formules ne dépassant guère une simple correction.

1.5 Bilan sur la construction et la validation des modèles

Le schéma général des séquences a consisté à faire résoudre un problème par les élèves, à faire formuler la procédure de modélisation et à vérifier la validité du modèle. La validation des modèles des IR s'est faite lors de la formulation des messages ou lors de l'étape de vérification ou encore au moment de la discussion de l'équivalence entre la représentation géométrique et la graphie algébrique. La validation qui a lieu lors de la formulation des consignes relatives à la construction des modèles est implicite puisque les formés ne l'identifient pas comme telle. Elle consiste en une explication des fondements, des conventions ou des consignes pouvant se particulariser à travers des exemples génériques. Les formés des deux groupes ont majoritairement utilisé les explications pour faire comprendre les élèves et l'étape de formulation des conventions ou des consignes a été l'occasion de partager cette compréhension. C'est d'ailleurs à cette fin qu'ils ont installé et négocié une bonne partie du contrat avec les élèves. Bon nombre de formés (**Fadak**, **Frank**, **Penda**) ont accordé un temps aux élèves pour s'approprier l'explication des conventions puisqu'ils leur ont demandé de les re-expliquer dans leurs mots. Les exemples ont pris une valeur générique chez les élèves, bien que certains formés, comme **Alex** et **Kémo**, se soient peu préoccupés de cet aspect. Le raisonnement sur un modèle particulier permet de passer aisément à l'interprétation (à la lecture) du modèle en opérations sur les monômes: dans ce cas, il ne s'agit plus de valider la graphie algébrique dans le sens que c'est vrai, mais de traduire en opérations une explication de l'image géométrique.

Dans le groupe des formés de l'UGANC, les modèles particuliers que **Mane**, **Alfa** et **Moh** ont fait utiliser ne valident pas en soi, mais aident à la compréhension de la stratégie de procéduralisation/composition. D'autres formés, comme **Bana**, **Samp**, **Tomy** et **You**, n'ont pas reconnu ces explications comme ayant un potentiel de validation. Il est vrai que l'explication et la validation ne visent pas les mêmes objectifs: l'explication concerne la compréhension de comment l'élève construit le modèle ou la formule, tandis que la validation concerne davantage une fonction de rassembler, de conclure, de susciter de nouvelles questions. La validation semble ainsi plus collective que l'explication, laquelle est perçue par ces formés comme individuelle. C'est comme s'ils ne pouvaient pas exploiter l'explication individuelle en classe pour la faire partager et lui conférer le caractère «social» ou collectif qui la rendrait ainsi preuve. La validation a servi bien plus la progression et la gestion des connaissances du groupe-classe que l'activité mathématique elle-même.

Pour la majorité des formés de l'ISSEG (15 sur 21), l'étape de formulation des consignes et conventions est dissociée de la validation des modèles produits, les formés voulant d'abord recevoir les modèles et les explications qui les accompagnent, que les modèles soient bons ou mauvais, avant d'en discuter. L'étape explicite de validation des modèles rassemble les élèves autour d'une même activité pour disposer collectivement de ces modèles sous la supervision du formé qui se sent, par contrat, responsable de cette partie. Cette étape de validation est associée à une étape d'institutionnalisation, même si les modèles produits ne sont pas l'objet d'un enseignement comme tel. Ce qui était le modèle individuel ou du groupe devient le modèle de la classe. Pour la vérification des modèles, les formés ont fait utiliser plusieurs exemples pouvant, chacun pris isolément, avoir une valeur générique. En effet, dans chacun de ces exemples, la vérification explicite les propriétés du contexte sur lesquelles le formé et les élèves se sont appuyés. La vérification a eu ainsi pour effet de renforcer la compréhension du modèle comme un mouvement d'induction en sens inverse.

1.6 Principaux résultats

Nous présentons les principaux résultats de la recherche en deux parties selon les deux questions de recherche découlant des objectifs présentés plus haut: l'investigation du rôle joué par l'intégration des connaissances dans l'enseignement des IR et l'analyse des difficultés rencontrées dans l'établissement de cette connexion.

1.6.1 Rôle joué par l'intégration des connaissances

L'intégration des connaissances est une stratégie de résolution de problèmes qui permet une diversification des représentations des IR. Cette intégration vise ultimement à augmenter les capacités cognitives des sujets et, par suite, leurs représentations mentales. Il s'agit donc d'une activité de résolution de problèmes à plusieurs niveaux. L'écriture alphanumérique d'une IR et sa représentation géométrique à l'aide des tuiles sont deux systèmes sémiotiques différents. La coordination entre ces représentations n'ayant rien de spontané, le futur enseignant a effectué non seulement un travail d'apprentissage spécifique axé sur la diversité de ces systèmes, mais il s'est aussi exercé à utiliser les possibilités propres à chacun de ces systèmes. La conversion des représentations des IR dépend de l'intégration des connaissances qui est une activité cognitive certes moins apparente, mais tout aussi essentielle. Cette intégration a également joué un rôle au regard des fonctions de communication, de traitement de l'information (prise et consignation d'information), d'objectivation, de prise de conscience (conceptualisation).

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous ne pouvons pas considérer la graphie algébrique d'une IR et sa représentation à l'aide de tuiles comme formant un seul et même registre; ce sont deux systèmes de représentation différents qui posent chacun des questions d'apprentissage spécifiques. Notre étude montre que l'intégration des connaissances permet aux élèves (mais aussi aux formés) d'établir des connexions entre les concepts enseignés. L'intégration permet aux uns et aux autres d'accroître leur capacité d'établir des liens signifiants entre les concepts enseignés. Elle offre à l'enseignant plus d'opportunités d'amener les élèves à apprendre les mathématiques à travers une gamme variée de situations-problèmes. Ce faisant, l'ingénierie nous a permis de récapituler trois pistes qui nous semblent intéressantes à explorer: l'intégration par les procédures, l'intégration par les ressources disponibles et les contraintes imposées, et l'intégration par les tâches.

1.6.1.1 L'intégration par les procédures

Il s'agit d'accepter, voire de valoriser, le fait que, dans la construction des modèles, chacun réponde avec son propre modèle, ses propres procédures, sans forcément établir de hiérarchie entre celles qui sont produites lors des activités. Par exemple, certains élèves, lorsqu'ils sont invités à considérer l'écriture $(x + 5)^2 = 10x + (25 + x^2)$ pour montrer que $(x+5)^2 > 10x$, peuvent recourir à la définition formelle de l'inégalité et aux propriétés des nombres ($(x + 5)^2 > 10x \Leftrightarrow (x + 5)^2 - 10x > 0$), ou encore chercher à l'établir à partir d'une représentation géométrique (figure 1, p. 20). Tous ne devraient pas songer à développer algébriquement $(x + 5)^2$ pour le comparer ensuite à 10x. Engager l'ensemble des élèves vers les procédures canoniques (que celles-ci soient algébriques ou géométriques) risque, à notre avis, de faire perdre à certains élèves le sens tellement essentiel à la construction et à la disponibilité des connaissances. Ceci risque de les amener à une résolution plus formelle que formatrice. Le rôle des moments d'échange, de débat, de mise en commun des différentes procédures, est alors essentiel et permet de faire prendre progressivement conscience de l'équivalence des procédures ou de leur complémentarité.

1.6.1.2 L'intégration par les ressources disponibles et les contraintes didactiques

La présentation des IR est basée, en partie, sur les tuiles algébriques; elle est aussi basée sur les traitements algébriques et numériques, car l'utilisation des tuiles a des limites certaines. Par exemple, la taille des nombres en jeu dans la situation de modélisation est l'une des variables sur laquelle le formé a pu jouer. Le formé a aussi pu moduler le temps disponible, de manière à permettre à ceux qui avaient effectivement besoin de plus de temps que les autres d'aller au bout de leur activité. Enfin, la disponibilité de certains outils (feuilles de carton, paire de ciseaux, règle graduée, équerre, etc.) a également favorisé la gestion des activités proposées. Ce type d'intégration, proposé individuellement ou en groupes, autorise des confrontations de solutions, de comparaison de modèles, puisque le contexte (de modélisation) et le type d'activités proposées restent les mêmes pour tous.

1.6.1.3 L'intégration par les tâches

Elle a consisté à mettre en place des activités autour de quatre situations dans lesquelles les tâches proposées ont fait appel à plus d'un cadre: la première concerne l'utilisation des formes géométriques et des tuiles dans la représentation, le regroupement, l'addition et la soustraction des monômes; la seconde traite de la multiplication des polynômes, de l'illustration de cette multiplication à l'aide de tuiles, de la factorisation et de la mise en évidence des facteurs; la troisième propose des activités de découpage/recollage d'aires de surface pour mettre en facteurs la différence de carrés; la quatrième situation est consacrée aux techniques de complétion de carré, à l'utilisation des tuiles pour construire des trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$ et des carrés parfaits. La composante numérique des activités du Séminaire fait référence au développement du sens des IR, au calcul rapide ou mental. Les séminaristes ont développé ces habiletés tout aussi importantes dans le cadre de l'utilisation des IR qu'en résolution de problèmes.

1.6.2 Des difficultés d'intégration

La présente étude a mis en évidence les difficultés que les formés ont rencontrées dans l'intégration des connaissances, difficultés qui se situent, en quelque sorte, dans des registres opposés: difficultés d'implication dans le travail d'autrui, de la tentation de communiquer la «bonne» réponse et du piège de la non-intervention.

1.6.2.1 Difficultés d'implication dans le travail d'autrui

La mise en commun des modèles produits est un moment essentiel de l'action didactique qui a été parfois vécu par les élèves comme «obligé»; les élèves n'en ont pas perçu tout l'intérêt, du moins au début. Tandis que le formé, en toute bonne conscience, se déployait à faire une revue quasi-exhaustive de ce que chacun a fait, certains élèves, eux, ne se sentant pas concernés par les productions de leurs camarades, se sont quelque peu ennuyés. Ces difficultés d'implication dans le travail d'autrui sont de plusieurs ordres: certains élèves se sont préoccupés de leur propre production de modèles dont ils ont cherché avant tout la validité; d'autres ont cherché à développer une démarche si éloignée de celles qui ont été présentées en «plénière» qu'ils n'ont pu établir de connexion entre les différentes productions. Dans ce cas, la mise en commun a été vécue comme une sorte de rituel fastidieux, plus ou moins vide de sens, et presque didactiquement pauvre.

1.6.2.2 La tentation de communiquer la «bonne» réponse

À l'inverse, après avoir donné un temps de recherche, de construction de modèles à ses élèves, le formé a cru qu'il était de son devoir de remettre au plus vite les choses en place; il a conçu la mise en commun comme l'occasion privilégiée de communiquer à l'ensemble de la classe (enfin!) la «bonne» solution, celle qu'il a prévue depuis le début de la séquence. Mais, ce faisant, il s'est substitué aux élèves dont il dénie le travail, la parole et l'effort d'explicitation. Il a distribué les critiques et les compliments, et il a, de ce fait, confondu la mise en commun avec une «correction». En «révélant» trop vite «la» solution, ou en valorisant chaleureusement une procédure particulière, le formé a court-circuité, souvent même à son insu, l'intérêt majeur d'une mise en commun mais aussi le travail d'élaboration des connaissances visées par les situations proposées. Ainsi, en communiquant directement des connaissances de façon magistrale, **Ada**, **Fana** et **Mab** ont provoqué l'imitation de procédures dans un processus d'apprentissage par «procuration» dont ils n'étaient vraiment pas conscients lors de leur première séquence. Il est certes très important que le formé apporte de temps en temps de l'information car les élèves ne peuvent pas toujours créer eux-mêmes certaines notions de façon spontanée et uniquement par une dévolution. Si par la dévolution le formé peut amener intentionnellement l'élève à reprendre à sa charge l'intégration des connaissances, cela ne signifie pas que la dévolution suffise et doive être uniformément adoptée pour tout contexte d'apprentissage. Parfois, les moments d'institutionnalisation comptent pour beaucoup aussi. Il semble même parfois nécessaire de s'abstenir de dévoluer et de montrer alors ce qu'il y a à montrer.

1.2.6.3 Le piège de la non-intervention

Averti de ces pièges, certains formés sont tombés dans un autre piège, celui de la non-intervention: c'est le cas de **Ada**, de **Bana**, de **Kandas** et de **Tomy** qui se sont interdits toute intervention de manière à ne pas interférer avec les productions des élèves. Ils se sont tus, se sont mis en retrait total de la situation et ont abandonné les élèves à eux-mêmes. Alors, dans ce cas, il est difficile d'espérer que ces derniers exposent spontanément leurs méthodes, parviennent à communiquer leurs propres procédures et deviennent capables de prendre du recul par rapport aux situations qu'ils viennent de traiter. Laisser les élèves bloqués devant la construction des modèles et l'intégration de leurs connaissances ne saurait être producteur; cela conduit au retrait pur et simple des élèves de la tâche. Portugais (1995) nous invite à penser au transfert de responsabilité non comme d'une consigne suivie d'absence d'aide de l'enseignant, mais comme une renégociation permanente entre ce transfert et les conditions qui font que l'on accepte cette responsabilité. Si la tâche paraît hors de portée, l'élève abandonne. L'enseignant doit donc faire des relances, parfois même des petites institutionnalisations pour aider l'élève à se maintenir actif dans la construction des modèles.

L'ingénierie suppose ainsi un double mouvement de transfert de responsabilité entre le formé et les élèves: les moments de dévolution et des moments d'institutionnalisation entre lesquels un équilibre subtil doit être maintenu. Le formé ne doit ni effectuer la dévolution comme si celle-ci le déchargeait complètement de ses responsabilités vis-à-vis des élèves (c'est au contraire un contrôle indirect qu'il exerce, au lieu de dire aux élèves directement ce qu'il attend d'eux et leur faire connaître ses attentes à travers les tâches qu'il leur propose); il ne doit ni mettre en place des institutionnalisations hâtives qui ont pour effet de priver les élèves d'occasion de penser mathématiquement les IR, de conceptualiser progressivement leurs modèles. La dévolution n'est pas le début de l'enseignement et l'institutionnalisation n'en est pas la fin; ces deux pôles s'entrelacent en permanence dans le déroulement des situations. Le formé doit donc adapter ce qu'il dit et ce qu'il fait pour que les élèves construisent des modèles. S'il faut refuser de répondre, il faut le faire; s'il faut, par contre, donner des éléments de réponse pour que l'élève ne soit pas bloqué, il faut le faire aussi. L'essentiel, c'est de créer et de maintenir des occasions de recherche chez les élèves.

1.6.2.4 Autres difficultés

Il a été difficile pour les formés de prendre en charge les observations. La difficulté fut de les former à l'observation tant au niveau technique (en particulier, et ce fut sans doute le plus difficile, leur apprendre à rester «neutres», c'est-à-dire à ne pas intervenir dans les activités des élèves) qu'au niveau plus fondamental: quoi observer? Comment rendre compte des observations? Comment les interpréter? Il est apparu, en effet, que les formés éprouvaient assez de difficultés à centrer leur observation sur les élèves et sur leurs activités cognitives; ils avaient tendance à poser les problèmes en termes d'évaluation de la compréhension des élèves. Une telle attitude qui nous a paru négative, dans un premier temps, s'est plutôt avérée, en fait, un élément important de la démarche qui a conduit les formés, après une période de discussions collectives et la première entrevue, à mieux expliciter les objectifs de l'observation dans la présente recherche.

Le premier aspect de l'observation, qui est de nature simplement descriptive (qu'est-ce qui s'est passé au cours de la séquence?), porte essentiellement sur les situations didactiques et sur leur réalisation (ont-elles permis d'atteindre les objectifs fixés?) et suppose qu'une telle évaluation peut être plus objective que le seul jugement porté par le formé à l'issue d'un cours («ça a bien marché!» ou bien «ils ne comprennent rien aujourd'hui»). Le second aspect, de nature explicative (pourquoi tel objectif n'a pas été atteint? Pourquoi telle erreur a-t-elle été commise?) concerne directement l'élève. La prise en compte de ces deux aspects et la participation du formé à l'observation nous sont apparues fondamentales à la fois au niveau de la recherche elle-même (en permettant que celle-ci soit liée à la pratique de l'enseignement des IR et aux problèmes relevant de cette pratique) et au niveau de la formation (en permettant au formé de participer à une démarche de recherche et de prendre ainsi du recul vis-à-vis de sa pratique).

L'analyse des difficultés rencontrées par les formés dans l'intégration des connaissances montre que l'enjeu de leur formation à cette intégration est important aussi bien du point de vue théorique que pour la pratique de l'enseignement des IR. L'ampleur des difficultés que la mobilisation simultanée de savoirs mathématiques et didactiques suscite au cours de ces passages souligne non seulement l'importance du rôle de l'intégration des connaissances dans cette formation mais aussi celle des conditions d'une différenciation entre le représentant et le représenté, entre le signifiant et le signifié ou encore entre la forme et le contenu d'une représentation. Il revient au formateur d'aider le formé à dépasser tous ces obstacles, sans trop intervenir, mais en l'aidant à se dégager d'une formulation normative des questions.

Comme le souligne Vergnaud (2001, p. 14), «la complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire». L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. Parmi les difficultés rencontrées dans l'apprentissage des IR, on peut mettre presque à égalité, d'une part, la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter et, d'autre part, la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques, notamment ceux qui ont trait à la complétion du carré. Il ne s'agit pas de s'abriter derrière un nouveau vocabulaire pour continuer à voir les IR de la même façon. Il s'agit plutôt de se poser des questions nouvelles et de voir autrement des situations habituellement vécues (dans le seul cadre algébrique), en reliant cette nouvelle formulation des problèmes à ceux que nous posons dans cette recherche: construire le sens des IR et asseoir leur compréhension. Il résulte de ces considérations que l'une des tâches du formateur consiste à aider le formé à se préparer à l'analyse des situations didactiques et des comportements observés.

2. Principaux apports de la recherche

Dans cette section, nous présentons les apports de la recherche sur le plan méthodologique et sur le plan théorique.

2.1 Aspects méthodologiques

L'ingénierie s'est réalisée à partir de notre cadre théorique et d'une grille d'analyse issue de ce cadre conceptuel. Si ce cadre reprend l'essentiel des théories de Vergnaud (champs conceptuels) et de Brousseau (situations didactiques), nous les avons exposées de façon à constituer un tout cohérent qui nous a permis de faire une analyse fine des comportements des formés. En adaptant le système de formation de Portugais (1995), nous avons aussi pu développer un cadre d'intervention didactique à partir, d'une part, d'analyses préalables (qui ont guidé le choix des situations et l'intervention), analyses fondées sur les recherches en DDM et, d'autre part, des acquis de notre propre expérience et de notre pratique d'enseignement. Nous avons pu apporter, en particulier, un éclairage au comportement du formé face aux situations d'intégration des connaissances, comportement qui est, par ailleurs, peu documenté. De plus, notre recherche a permis d'élargir la grille d'analyse construite à partir de notre cadre théorique, en lui ajoutant une liste de fonctions didactiques. Si certaines fonctions didactiques que nous avons identifiées trouvent une correspondance dans celles issues de notre cadre théorique (prise de décisions, formulation, communication, validation), d'autres sont, sinon nouvelles, valorisées par nous (gestion de l'environnement didactique, contrôle du sens, modélisation, intégration des connaissances, évaluation de la compréhension). Ces nouvelles catégories de fonctions nous ont permis d'expliquer certains phénomènes que nous avons observés en classe et pourront sans doute inspirer d'autres chercheurs.

Sur le plan méthodologique, nous relevons les apports suivants: 1) l'expérimentation d'un modèle de formation de futurs enseignants axé sur l'intégration des connaissances algébriques et géométriques, 2) l'utilisation d'une grande variété de sources de collecte de données et l'analyse de leur richesse respective pour déterminer les sources les plus fructueuses pour ce type de recherche et 3) le recours à deux types de triangulations successives pour mettre en correspondance les éléments puisés des différentes sources et des analyses faites par le formé, d'une part et, pour établir des liens de cohérence et de pertinence entre les résultats et le cadre théorique, d'autre part.

2.1.1 Modèle de formation axé sur l'intégration des connaissances

L'originalité de cette recherche tient, entre autres, à l'utilisation d'un modèle théorique de formation de futurs enseignants basé sur l'intégration des connaissances ainsi qu'à l'utilisation de ce modèle dans l'enseignement des IR. Le modèle retenu comprend des composantes provenant de la gestion de l'information, de la résolution de situations-problèmes, de la cognition et de la gestion de l'environnement didactique. L'intégration de ces différentes composantes dans un même modèle nous a permis de poursuivre l'analyse de façon plutôt globale que centrée sur quelques aspects et de percevoir plus largement la dynamique et les interconnexions entre ces composantes. En somme, le modèle que nous avons élaboré, quoique imparfait, suggère des pistes de réflexion pour intégrer les connaissances dans la formation didactique de futurs enseignants. En proposant un tel type de travail, nous constatons une modification significative dans les intentions didactiques et dans les démarches pédagogiques des formés.

2.1.2 L'intégration des connaissances, une activité didactique complexe

En dépit de la difficulté d'investiguer le rôle de l'intégration des connaissances dans le contexte de la formation de futurs enseignants et malgré la complexité des stratégies cognitives et didactiques développées par le formé pour enseigner les IR, cette étude a permis d'analyser cette compétence peu explorée. Nous avons constaté que plusieurs des éléments du modèle théorique sont utilisés par le formé lors de l'ingénierie. L'analyse des données montre qu'il existe de nombreuses relations entre ces éléments et que ce fouillis de relations rend complexe l'investigation du rôle que joue l'intégration des connaissances. Aussi, avons-nous cherché à structurer cette activité pour mieux l'analyser. Nous avons pu non seulement reconnaître les différentes phases à l'intérieur de chaque épisode d'une séquence, mais nous avons aussi pu distinguer les stratégies d'intégration des connaissances les plus sollicitées, des stratégies cognitives ou didactiques et diverses stratégies relevant de la résolution de problèmes. De plus, nous avons pu décrire les activités d'intégration non seulement par les stratégies que les formés ont utilisées, mais aussi par les relations qui existent entre les groupes de stratégies et par certaines séquences plus caractéristiques.

2.1.3 Schémas dominants

Pour chacun des groupes de formés, nous reconnaissons quelques schémas dominants de ses activités d'intégration des connaissances (cf. figures 29, 30, 31 et 32). Ces schémas montrent que, en dépit de quelques différences, les processus dominants sont semblables; c'est plutôt la façon de les planifier, de les organiser en séquences et de les réaliser (didactiquement) qui diffère d'un groupe à l'autre. Ainsi, les processus de procéduralisation/composition, de généralisation/discrimination, de prise d'information, et de mobilisation des savoirs mathématiques et didactiques ont dominé chez le formé pendant l'ingénierie. Mais ces processus se sont articulés différemment entre eux et avec les autres processus selon les formés. Chez certains (comme **Ada, Laye** et **Moh**), cette articulation s'est réalisée avec la prise d'informations, l'élaboration/organisation et la généralisation/discrimination. Chez d'autres (comme **Fadak**, **Penda** et **Samp**), ce sont l'élaboration/organisation, le contrôle du sens, la procéduralisation/composition et l'évaluation/compréhension qui transcendent.

2.1.4 Variété et richesse de sources de collecte de données

L'analyse de la richesse des sources de données nous a permis de souligner l'apport de chacune de ces sources, d'identifier les plus fructueuses, de reconnaître leurs avantages et leurs limites respectifs. Pour la grande majorité des sujets (23 sur 27), les entrevues et les observations se sont révélées les sources les plus fructueuses pour la plupart des codes thématiques analysés. L'entrevue d'explicitation a fourni des données valables pour plusieurs de ces codes; elle présente l'avantage de ne pas déranger la pensée en cours d'action, ce qui nous a permis de résoudre le problème de validité des données (Ska, 1983). Également fructueuse, l'observation nous a permis de recueillir des données sur plusieurs éléments, mais pas toujours suffisamment sur ceux qui nous ont aidé à comprendre les processus cognitifs. D'autre part, l'analyse montre l'utilité d'autres sources telles que les traces écrites et les verbalisations. Bien que peu productives, les traces écrites ont servi à confirmer des données obtenues autrement; elles constituent tout de même la meilleure source pour rapporter les stratégies de consignation d'informations. Les protocoles ont été mis en forme de façon à aller chercher le plus possible les habiletés des formés dans leur démarche d'intégration des connaissances. Des questions spécifiques suivies, au besoin, de relances de la part du chercheur, ont été introduites pour cerner la façon dont le formé s'est engagé dans les situations de modélisation et les démarches utilisées pour leur réalisation.

2.1.5 Stratégies cognitives et stratégies didactiques utilisées, et relations entre ces stratégies

Les stratégies cognitives les plus souvent utilisées par nos formés sont celles de procéduralisation/composition, suivies de celles de généralisation/discrimination. Les stratégies d'élaboration/organisation semblent peu sollicitées lorsque les formés font résoudre des problèmes. Les stratégies de planification servent à organiser la façon dont la séquence se déroule; elles font état de la structuration des séquences plutôt que de l'identification des étapes de la construction d'un modèle particulier. Les stratégies de contrôle (servant à surveiller l'activité cognitive et à travailler le sens) et de régulation (servant à ajuster l'activité mentale selon ce qui est détecté par le contrôle) sont quelque peu nombreuses et variées; l'analyse révèle qu'elles sont centrales dans les activités de modélisation et d'intégration des connaissances.

Nous avons également observé plusieurs stratégies didactiques basées sur le modèle de résolution de problèmes, notamment la prise et la consignation d'informations qui ressortent surtout dans les traces écrites. La représentation de l'environnement didactique et la mobilisation des connaissances antérieures sont moyennement apparentes dans les autres sources. Par contre, nous avons observé relativement peu de stratégies liées à la prise de décision. Cela est peut-être dû au fait que cet élément se réfère aux mêmes stratégies que la régulation. L'analyse de la contribution de chacune des sources de collecte de données à la connaissance des processus en cours lors de la construction des modèles a conduit à développer des outils qu'on peut utiliser en classe. La majorité de nos formés ont fait sentir aux élèves les avantages à utiliser ces stratégies de modélisation et d'intégration des connaissances. Plusieurs d'entre eux ont mis les élèves dans des situations qui valident ces stratégies et qui montrent qu'elles sont économiques.

Il a été aussi question de relations entre des groupes de stratégies. Les processus cognitifs s'activent beaucoup entre eux. Le lien entre la prise d'information et la procéduralisation/composition montre que ces deux processus sont assez rapprochés. Les éléments de prise d'informations, d'évaluation de la compréhension, de généralisation ou de discrimination, et de procéduralisation/composition sont des éléments réflexifs. La plupart des formés (18 sur 27) les ont utilisés comme éléments centraux. En effet, en soulignant les trois éléments qui résument l'activité cognitive de nos formés, on observe les séquences caractéristiques suivantes: certains formés ont représenté géométriquement une IR (procéduralisation ou composition); ils ont comparé cette figure à la graphie algébrique (généralisation/discrimination) et ont évalué la compréhension (évaluation). D'autres ont pris des informations (prise d'information), comparé et distingué (généralisation ou discrimination) puis ont construit le modèle (procéduralisation ou composition). Un troisième sous-groupe de formés a aussi pris des informations (prise d'information), construit le modèle (procéduralisation/composition) puis évalué le travail (évaluation).

2.1.6 Recours à deux types de triangulations

Pour assurer la validité interne de cette recherche, nous avons recouru à des triangulations successives (Huberman et Miles, 1991) lors des études de cas et pour les assignations dans les catégories du modèle théorique. Nous avons non seulement procédé à la mise en correspondance des éléments tirés des protocoles, des fiches de synthèse des entrevues, des préparations manuscrites des leçons et des analyses que le formé a faites de son propre protocole, mais nous avons aussi eu recours à un autre type de triangulation, celui-là s'exerçant dans l'établissement des liens de cohérence et de pertinence entre les résultats globaux et le cadre théorique.

2.2 Aspects théoriques

Sur le plan théorique, la recherche permet de mieux comprendre les stratégies d'intégration des connaissances utilisées dans l'enseignement des IR. Trois des résultats importants que nous retenons sont les suivants: 1) les stratégies cognitives lors de la construction des modèles et de l'intégration des connaissances sont complexes mais structurées, ce qui en facilite l'analyse; 2) ce n'est pas tant l'utilisation d'une telle ou telle stratégie d'intégration des connaissances qui permet de distinguer les formés, mais plutôt la façon dont ces derniers les conçoivent, les organisent et les réalisent en séquence; et 3) certains groupes de stratégies sont utilisés plus fréquemment que d'autres.

L'analyse des données révèle que certaines stratégies ont été moins fréquemment utilisées par les formés: c'est le cas des stratégies liées au processus de représentation ou à l'utisation de l'environnement didactique, de planification et de validation. Les raisons en sont multiples, mais ce que nous en retenons c'est la ténacité de certaines habitudes de travail développées par ces sujets pendant plus de 15 ans de scolarité. L'environnement papier-crayon (pour les élèves), tableau noir-craie blanche (pour l'enseignant), la structuration des connaissances faite par l'enseignant en classe et le type d'évaluation sommative privilégié par le système ne sont pas de nature à favoriser l'organisation des connaissances, à enrichir la structure cognitive et à rendre pertinente l'utilisation de telles stratégies.

2.3 Apport de la recherche sur le plan de la connaissance

Les activités d'intégration ont permis aux formés d'accéder à une véritable réflexion stratégique, en résolvant des problèmes de factorisation qui ne semblaient pas, à première vue, en rupture avec le contrat didactique usuel. Les élèves ont été amenés, par exemple, à opérer des choix entre deux transformations possibles, comme dans la graphie algébrique de la somme de produits de binômes $(x + 1)(x - 2) + (x - 2)(x + 3) + (x + 1)(2x - 4)$ où ils pouvaient choisir entre la mise en facteur de $x - 2$ ou de $x + 1$. Les élèves ont souvent abouti à des impasses qui les ont amenés à faire des retours en arrière. Ils ont développé un processus de factorisation visible par regroupement de termes semblables et ont utilisé *en acte* une connaissance stratégique. Les formés ont ainsi fait établir des analogies à la fois faciles et intéréssantes. En effet, en discutant des produits binomiaux, ils ont pu les illustrer par les diagrammes comme suit.

Le premier diagramme ci-dessous (figure 34a) indique la première étape du développement: $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$.

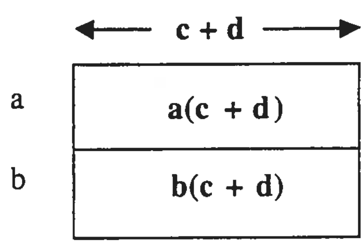


Figure 34a

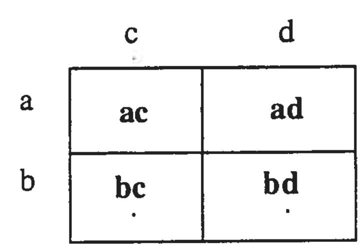


Figure 34b

Figures 34: Étapes du développement géométrique de (a + b)(c + d)

La figure de droite (figure 34b) représente le résultat final de ce développement: (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.Ceci peut fournir, dans un premier stade, un moyen de valider la factorisation d'un polynôme. Il est intéressant de voir si cette construction géométrique peut devenir, dans un second stade, un moyen pour la trouver. Bien sûr, les produits des différences sont moins simples que les produits des sommes. Si, dans la relation (a - b)y = ay - by, nous posons y = c - d, nous obtenons: (a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d) = ac - ad - bc + bd. Ceci peut être illustré ou vérifié géométriquement par le diagramme suivant (figure 35).

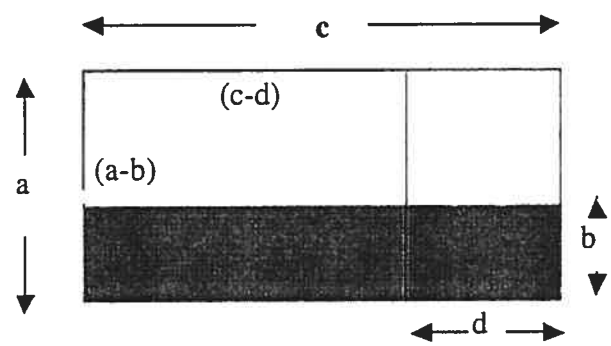


Figure 35 : Modèle géométrique du développement de (a - b)(c - d)

Cette schématisation est une forme de conceptualisation dont la source est d'abord l'action (activité de représentation graphique) et la perception, c'est-à-dire dans les schèmes (Vergnaud, 2000b, p. 12). Elle prend place d'abord et avant tout dans des situations-problèmes dans lesquelles le sujet peut et doit agir, percevoir et prévoir. En effet, les schèmes qu'on peut utiliser pour représenter (a + b)(c + d) et (a - b)(c - d) concernent tous les registres de l'activité de modélisation: les gestes, les raisonnements, le langage, les interactions didactiques et affectives. En effet, aucun diagramme, aucun symbolisme non langagier ne peut remplir sa fonction sans un accompagnement langagier, fût-il intérieur. C'est, bien entendu, des situations-problèmes et du langage naturel que les symbolismes mathématiques tirent leur sens. Mais ils apportent, du fait de leur laconisme notamment, une efficacité que n'a pas le langage naturel; cette efficacité est maximale dans l'algèbre. Le problème est que les symboles algébriques recouvrent une grande variété de sens et que l'accès à l'algèbre n'est probablement possible, pour la majorité des élèves, que s'ils passent pendant une période par des représentations pré-algébriques: les diagrammes vus plus haut en sont des exemples. Dans tous les cas, c'est grâce à des commentaires en langage naturel que ces symbolismes peuvent remplir leur rôle.

L'intérêt didactique de ces schémas est à la fois dans leur laconisme et dans leur capacité à représenter le lien entre les relations et le raisonnement nécessaire au développement des produits (a + b)(c + d) et (a - b)(c - d). Le rôle des tuiles et des formes géométriques n'est pas de provoquer une généralisation, même si certains épisodes des séquences didactiques vont dans le sens de montrer les IR. Les tuiles et les formes géométriques permettent de comprendre la théorie algébrique des IR, de concrétiser les graphies des monômes qui les composent et d'aider à les manipuler de façon significative. Même si une référence à l'aire de surface justifie au départ l'utilisation des tuiles, les tuiles et les manipulations de ces tuiles se détachent de ce contexte pour ne devenir qu'un matériel avec des codes et des conventions d'utilisation. Ainsi, les propriétés graphiques des diagrammes sont une aide à la conceptualisation, au moins pendant une période de l'apprentissage. Lorsque les relations sont bien comprises, les diagrammes deviennent inutiles. À l'inverse, il faut un minimum de conceptualisation des grandeurs et des relations en jeu pour lire et comprendre les diagrammes d'une certaine catégorie. On ne peut donc pas confondre conceptualisation et représentation symbolique, même lorsque cette dernière est pertinente. Comme nous l'enseigne Vergnaud (2001, p. 25) «la conceptualisation est un moyen de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation d'une certaine classe. Le symbolisme (la graphie algébrique) permet justement de représenter cette information et seulement celle-là».

3. Implications au plan didactique

Dans cette section, nous nous intéressons au choix des activités de modélisation et d'intégration des connaissances que les formés ont proposées, à l'approche didactique qu'ils ont utilisée, à la validation des modèles produits et à l'évaluation des apprentissages réalisés.

3.1 Choix des activités de modélisation et d'intégration des connaissances

Diverses activités de modélisation et d'intégration des connaissances ont permis de provoquer les processus cognitifs voulus: ce sont, entre autres, le regroupement des polynômes, l'assemblage de tuiles, la construction du carré parfait, le découpage et le recollage; mais ce sont aussi les activités langagières et les écritures qui ont remplacé progressivement l'assemblage de tuiles, qui ont permis aux élèves de se détacher de ce support graphique et qui ont mis en jeu les propriétés (commutativité, associativité) des opérations sur les monômes. Bon nombre de formés ont fait produire des modèles, des exemples et des contre-exemples en amenant les élèves à utiliser des stratégies qui activent les processus d'élaboration/organisation, de généralisation/discrimination et de contrôle du sens.

Nous voulons caractériser l'intégration des connaissances par sa place, ses fonctions et les situations didactiques et adidactiques utilisées pour construire des modèles. Ces fonctions, places et situations nous révèlent quatre comportements d'intégration différents. Premièrement, lorsqu'il s'agit d'introduire les tuiles, les formes géométriques et les règles d'assemblage des tuiles, le formé cherche à leur donner du sens et à les faire comprendre par des activités qui consistent souvent en des manipulations d'illustrations (dessin, représentation géométrique des monômes). Dans ce cas, la compréhension peut rester intuitive et perceptuelle pour certains élèves, l'important étant d'y arriver. Le projet du formé a consisté à se servir des tuiles et des formes géométriques comme support visuel pour assurer une certaine vraisemblance entre l'écriture alphanumérique des IR et leurs images graphiques. Deuxièmement, lorsque les formés font construire des modèles en réponse à une situation-problème donnée, notamment dans l'activité de découpage, ils s'appuient sur les propriétés de la situation pour expliquer comment, par exemple, l'IR $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ est établie à partir du découpage/recollage, ce qui constitue un argument suffisant pour intégrer les connaissances requises. Les leçons du groupe de l'UGANC sur le développement et la mise en facteurs algébriques pourraient être, elles aussi, associées à ce deuxième comportement bien que ces activités soient guidées pas à pas par le formé.

Troisièmement, une fois que la démarche de calcul de l'élève est expliquée, il faut se prononcer sur le produit de cette démarche, déterminer dans ce cas les règles justes et surtout invalider les formules fausses, montrer que les règles répondent bien à la tâche proposée, qu'elles sont efficaces et qu'elles fonctionnent, avant de passer à autre chose. L'intégration des connaissances consiste alors en calculs selon des va-et-vient entre les cadres algébrique, numérique ou géométrique. Quatrièmement, dans les exercices où des énoncés sont en jeu (i.e.; les énoncés suivants ont-ils du sens: $x + x = x^2$, $2x^2y + x^2y = 3x^2y$, $x^2 + x = x^3$?), il faut souvent invalider les énoncés faux. Les tuiles peuvent aider à montrer que, par exemple, l'énoncé $x^2 + x = x^3$ n'a pas de sens alors qu'il est vrai pour $x = 0$. On en profite pour augmenter les habiletés de calculs lorsque l'énoncé est vrai. Il est donc important qu'une discussion s'engage entre les élèves pour donner du sens, faire comprendre la démarche qui mène à la règle ou ses fondements.

Nous notons aussi les fonctions principales de l'intégration des connaissances en ce qui concerne les modèles: construire les modèles en jouant à la fois sur deux cadres, en partager la compréhension et en disposer collectivement. Dans presque tous les cas, les étapes de validation des modèles produits sont collectives et sont dirigées par le formé. Elles participent à la reconnaissance par tous des procédures comme justes, efficaces ou fonctionnelles et, comme nous l'avons mentionné à quelques occasions (cas de Fadak), à la progression de tous les élèves en même temps. Ces fonctions sont plus didactiques que strictement de validation. On peut aussi les associer à une fonction de communication des arguments ou de la preuve. Nous pouvons aussi ajouter à ces fonctions d'autres qui concernent la progression de la séquence didactique: introduire une notion (i.e.; complétion du carré), conclure pour passer à autre chose (procédé géométrique de complétion), revenir sur la tâche (complétion dans le cadre algébrique). Ces fonctions d'intégration des connaissances varient ainsi selon la place des étapes dans le déroulement de la séquence didactique, place qui est déterminée par les objectifs de la leçon. Ainsi, l'intégration qui a lieu dans la phase d'introduction à un concept (i.e.; monôme) peut davantage faire comprendre et faire partager la compréhension alors que celle qui a lieu en conclusion peut se préoccuper surtout d'efficacité. L'étape de conclusion apparaît aussi comme une étape charnière dans la progression de la séquence didactique, pour revenir sur une étape de la construction du modèle, proposer de nouvelles activités et passer à autre chose.

En somme, la plupart des formés ont réalisé un enseignement des IR qui accorde une importance aux activités de modélisation et d'intégration des connaissances. Mais chez certains d'entre eux, notamment ceux de l'UGANC, ces activités n'ont pas toujours débouché sur une argumentation voire une preuve. Chez le formé de l'UGANC, qui n'avait reçu aucune formation didactique, ce passage ne pouvait se faire sans difficulté car il lui manquait une réflexion sur la rigueur qu'il pouvait exiger dans son enseignement et parce que son projet ne prévoyait pas de faire passer l'élève à un niveau de validation autre que pragmatique. Pour bon nombre d'entre eux qui ont pris les éléments du Séminaire comme une recette, tout s'est passé comme s'ils n'avaient qu'à redonner la recette, si bien qu'ils ont peu ou pas contribué à l'enrichir. Ceci n'est pas le cas du formé de l'ISSEG qui a accordé une place importante aux élèves dans les activités de validation, en les amenant à donner du sens aux règles de manipulation pour qu'ils les comprennent mieux et pour qu'ils s'en servent correctement.

3.2 Approche didactique

Si on juge l'ensemble des préparations des formés lors de la première séquence, on constate que l'importance la plus grande a été accordée aux stratégies didactiques (cf. chapitre 4). Dans l'ensemble des préparations de la deuxième séquence, on remarque que les stratégies de régulation et de contrôle du sens ont une importance encore centrale (42 % en tout) et que les stratégies didactiques ont à peu près le même poids que lors de la première séquence (environ 45 %). Chez la majorité des formés, les stratégies d'institutionnalisation décroissent nettement de la première à la troisième planification de séquence (de 28 % à 20 %). Nous assistons à une légère, mais régulière croissance des stratégies didactiques lors des préparations des séquences par les formés de l'UGANC. C'est que la lecture du contrat de formation que font ces formés fait en sorte que la situation de formation épouse un fonctionnement bien plus didactique que adidactique. Aussi, les stratégies didactiques présentent-elles, aux yeux de ces formés, un caractère plus immédiatement accessible. Nous comprenons cela en rapport avec la faiblesse relative du travail de conceptualisation que fait le formé de l'UGANC: puisque ce dernier interprète le contrat de formation comme allant dans le sens d'utiliser beaucoup de stratégies didactiques, il en a alors planifié plus que ce qu'il était effectivement en mesure de mettre en place dans la réalisation de ses séquences. De toutes les façons, même pour les formés de l'ISSEG, les stratégies adidactiques, par nature plus complexes, ont été plus difficiles à maîtriser. C'est que ces stratégies doivent répondre à une nécessité de contrôler le sens, nécessité que doit ressentir l'élève (mais aussi le formé) aux prises avec la situation, le formé devant rechercher sans relâche des moyens de redonner à l'élève le contrôle conceptuel sur son travail.

Chez les formés de l'ISSEG, nous constatons une très nette hausse du taux de planification des stratégies adidactiques lors des trois séquences (14 %, 27 % et 35 % respectivement). Les stratégies orientées sur le contrôle du sens ont nettement augmenté lors de leurs planifications, surtout lors du passage à la planification de la seconde séquence. L'ajout d'un contexte de problème à l'activité de modélisation, le fait de demander à l'élève si le modèle produit et la procédure exécutée sont corrects, et le fait de lui demander explicitement d'établir le lien entre la graphie algébrique d'une IR et sa représentation géométrique sont des stratégies didactiques. La présence de ces stratégies indique clairement que les intentions des formés dans leurs planifications de séquences étaient nettement orientées vers le contrôle du sens.

3.3 Relations entre les stratégies planifiées et les stratégies réalisées

Dans l'ensemble, les formés ont planifié moins de stratégies orientées sur le contrôle du sens qu'ils n'en ont effectuées lors de leurs séquences. Ils ont planifié toujours davantage de stratégies orientées sur le contrôle du sens qu'ils n'ont été en mesure de le faire effectivement lors des réalisations de ces mêmes séquences. Les décalages entre la préparation et la réalisation montrent bien que les formés ont compris leur nécessité (surtout celle des stratégies didactiques), bien que le fait de les programmer soit plus simple que de les mettre en œuvre. Les stratégies didactiques ont été mises en œuvre parfois sans qu'une planification ait été faite à leur sujet, peut-être en raison d'une nécessité rencontrée dans le déroulement de la séquence. Mais il est aussi arrivé qu'une planification existe en dehors de la préparation écrite et que c'est, en partie, des décisions silencieuses qui ont motivé ces apparitions. S'agissant des stratégies adidactiques, elles ne font que de rarissimes apparitions sans planification préalable.

En passant d'une séquence à l'autre, nous constatons deux phénomènes: une décroissance des niveaux de stratégies de régulation et du contrôle des actes par une approche d'institutionnalisation primitive tant lors de la préparation que de la réalisation; une croissance des niveaux de stratégies de contrôle de sens tant lors de la préparation que de la réalisation de la séquence. Les boucles de l'ingénierie ont probablement un rapport avec ces deux phénomènes. En effet, le formé a dû constamment analyser les résultats de son action lors du travail a posteriori sur les protocoles. Cette contrainte, si importante dans le dispositif de formation a donc joué apparemment un rôle moteur en ingénierie. Si les formés de l'UGANC ont planifié beaucoup d'institutionnalisation primitive, c'est qu'ils avaient l'intention de la faire réaliser par les élèves (ceux-là qui ont fait juste et auxquels ils demandaient de pointer l'erreur à ceux qui l'ont produite et leur indiquer la procédure correcte), même si, dans le feu de l'action, ces formés avaient choisi, ensuite, de la faire eux-mêmes (en retravaillant les conventions sur les tuiles). Lors de la préparation des séquences, nous avons remarqué aussi que d'une séquence à l'autre, les formés ont surestimé de plus en plus de stratégies orientées sur le contrôle du sens. Ceci indique toute la complexité que présente la mise en place de ces stratégies, complexité qui a été déjà soulignée dans Portugais (1995).

La forte prégnance de la conceptualisation du travail d'intégration des connaissances nous a permis de comprendre les efforts du formé de l'ISSEG (Fadak) comme une recherche, de sa part, sans cesse renouvelée d'un fonctionnement adidactique avec ses élèves. Parlant des stratégies adidactiques, nous avons constaté que chez le formé de ce groupe, l'écart entre le nombre de stratégies planifiées et réalisées se rétrécit d'une séquence à l'autre. Une combinaison de différents facteurs expliquent un tel écart. Le formé ne peut anticiper que d'une manière restreinte les stratégies à mettre en place lors de la séquence car il ne contrôle pas a priori les actions et les choix de ses élèves; il ne peut donc pas prévoir toutes ses interventions. Nous ne sommes pas étonné par le fait qu'il intervienne plus que prévu, car il est appelé à prendre bon nombre de décisions qui sont déterminées par le déroulement de l'échange didactique. Une autre raison est que la préparation de la leçon que le formé consigne dans son cahier n'est qu'un canevas et que ceci est loin d'être un script scénario à jouer d'un bout à l'autre.

Nous avons, en outre, remarqué une grande différence entre le nombre de stratégies planifiées et le nombre de stratégies réalisées. La moitié des stratégies planifiées par les 27 sujets de l'étude sont effectivement réalisées. Ce résultat est intéressant car il montre qu'il est fort difficile pour le formé de mettre en place tout ce qu'il anticipe dans sa préparation. Nous interprétons ceci en regard d'une importante contrainte: ce que le formé effectue est commandé par la nature des difficultés rencontrées et non des seules difficultés anticipées. Cet écart indique que la préparation écrite explicite ne contient qu'une fraction des stratégies que les formés ont effectivement mises en œuvre par la suite. Ce résultat montre aussi que le formé prend bon nombre de décisions sur le vif et que son choix de stratégies est plutôt soumis au déroulement de la séquence et aux difficultés rencontrées qu'à un suivi strict de sa préparation.

Nous n'avons pas perdu de vue que lorsque des stratégies apparaissent à une séquence et que ces dernières n'ont pas été notées dans la préparation, nous ne pouvons en déduire que ces stratégies n'appartiennent pas à la planification de la séquence, car le formé peut les avoir en tête avant que la séquence ne commence. Sachant que l'ingénierie contraint déjà le formé à préparer par écrit ses séquences, nous ne pouvions donc, sous peine de modifier substantiellement la situation, lui proposer un moyen de rendre cette préparation plus explicite (i.e. pour le chercheur qui est ici le formateur) en regard des stratégies d'intégration des connaissances. En le faisant, nous aurions conféré un caractère hautement institutionnel à la série d'activités de modélisation et d'intégration des connaissances, ce que nous voulions éviter à tout prix. En ne le faisant pas, la charge de la mise en œuvre a été placée du côté du formé.

La généralisation/discrimination s'est faite par répétition d'exemples et a été renforcée par l'énoncé de règles telles que: «*L'important, c'est de prolonger le coté du carré du même nombre d'unités et de déterminer l'aire de chacune des tuiles constitutives du nouveau carré* .... ». Les situations de départ ont servi d'exemple de référence; des exercices de renforcement et de pratique ont suivi. Les activités de modélisation et d'intégration des connaissances se sont réalisées dans l'interaction du formé avec ses élèves: les questions posées, ce qui a été accepté ou refusé comme arguments, les renforcements face au peu d'intérêt accordé à une réponse et la part des discussions ont contribué à la construction de ces règles et d'une attitude face à la validation des modèles. Les réactions des élèves lors d'une étape de validation nous ont renseigné sur l'effet de cette validation et, par conséquent, sur sa fonction effective. De plus, l'analyse du questionnement dans les planifications détaillées aussi bien que dans les réalisations des séquences didactiques nous ont donné une idée de l'importance accordée à la validation des modèles produits.

3.4 Évaluation des apprentissages réalisés

L'évaluation des apprentissages réalisés a été construite en fonction du développement des stratégies de modélisation et d'intégration des connaissances. Les formés se sont rendu compte que les élèves construisent les modèles des IR et tirent profit des activités lorsqu'ils perçoivent le lien avec l'évaluation de leurs apprentissages. Le choix des situations didactiques, plutôt orienté par le développement de stratégies de modélisation et d'intégration des connaissances que par l'acquisition de connaissances spécifiques, a favorisé l'évaluation des apprentissages cohérente avec cette approche plus constructiviste de la DDM. L'entrevue administrée lors de la post-expérimentation a révélé que huit des onze formés (soit 73%) que nous avons pu interviewer trouvent la pratique de l'intégration des connaissances comme tout à fait utile et intéressante. Mais si, à ce stade, un peu plus de la moitié des répondants (54 %) estime que cette pratique est très simple et facile, 36 % de ces répondants pensent le contraire. De l'avis de ces derniers, la pratique d'intégration des connaissances en classe s'avère difficile et sujette à de nombreux problèmes. 27 % des répondants trouvent que cette pratique n'est pas du tout simple, mais au contraire complexe. Les difficultés présenties par les formés et les conditions à remplir pour mettre en pratique l'intégration des connaissances seraient les suivantes.

Les formés estiment que son utilisation dans leur enseignement se heurte à un certain nombre de difficultés. Au nombre de ces difficultés figurent l'inadéquation de la formation initiale des enseignants, le peu de temps dont les enseignants des différents niveaux disposent pour travailler en équipe, la rigidité des programmes d'études et leur cloisonnement, la formation didactique insuffisante des enseignants (sinon l'absence de cette formation), la rareté des ressources didactiques et la résistance du formateur de futurs enseignants et, parfois, de l'institution elle- même, au changement. Plutôt que de prendre des risques en modifiant leurs façons de faire, certains (5 %) préfèrent s'en tenir à leurs pratiques pédagogiques habituelles, aux traditions curriculaires et psychopédagogiques solidement ancrées dans les écoles. Ces difficultés renvoient aux conditions de travail qu'évoquent la plupart des formés pour se prêter à l'intégration des connaissances.

Ces conditions sont, entre autres, l'instrumentalité de l'intégration qui suppose que l'intégration leur montre clairement ce qu'ils doivent faire en termes d'objectifs, de contenus et de démarches; la congruence qui a trait à la capacité de l'intégration de répondre à un besoin pédagogique réel et d'intéresser les élèves en améliorant leurs apprentissages; le coût qui se rapporte à tous les efforts consentis par les sujets dans la mise en pratique de cette intégration, efforts qui les ont affecté personnellement en temps, en énergie, qualification nouvelle, perfectionnement, etc.) et les autres supports requis (conditions de travail, matériel pédagogique, matériel didactique, appui institutionnel, etc.). En dépit de ces difficultés, les participants estiment que le Séminaire et l'ingénierie leur en ont donné quelques idées; ils trouvent l'approche d'intégration des connaissances congruente avec, d'une part, leur développement personnel et professionnel et, d'autre part, avec les besoins d'apprentissage des élèves.

Nous pouvons dire de nos formés, à la suite de Portugais (1995) et de Vergnaud (2000 a), que leur propre savoir d'expérience et leurs apprentissages des activités d'intégration des connaissances sont adaptation. Ce qui s'adapte, ce sont des schèmes, et ces schèmes s'adaptent aux différentes situations de factorisation, du développement ou de la réduction des expressions polynomiales. Même lorsque le formé a un sentiment d'automatisme pour certaines de ses conduites, on peut considérer que l'activité cognitive sous-jacente est truffée d'inférences. Les parties véritablement automatisées de ses conduites, dans lesquelles n'interviennent ni inférences ni contrôles, sont intégrées dans l'organisation intelligente qu'est le schème. Le schème, nous dit Vergnaud, est conceptualisation ou il n'est pas. Les règles ont cette fonction théorique d'exprimer le caractère génératif du schème. Ce sont les règles qui permettent de saisir la manière dont les activités de modélisation et d'intégration des connaissances sont engendrées au fur et à mesure. Ce ne sont pas seulement les actions de transformation du réel (i.e; découpage/recollage d'une feuille de carton) qui sont ainsi engendrées (ou la suite des graphies algébriques), mais aussi la prise d'information et le contrôle du sens qui permettent l'infléchissement de la conduite en situation, y compris un possible retour en arrière.

4. Critiques et limites de la recherche

Dans cette section, nous rapportons les principales limites de cette recherche. Certaines de ces limites sont dues aux choix que nous avons faits, d'autres au fait que la recherche sur le rôle de l'intégration des connaissances dans la formation de futurs enseignants est à peine amorcée.

4.1 Aspects méthodologiques

Nous présentons d'abord les limites dues au choix des sujets, des sources de données, du découpage des séquences en épisodes et du codage; nous abordons, ensuite, les limites liées aux caractéristiques des situations de modélisation comme activité de résolution de problème à double niveau. Notre recherche comporte quelques limites qui se situent au niveau de la taille de l'échantillon des futurs enseignants. Les données proviennent d'un petit échantillon (27 sujets) loin d'être représentatif de la population de nos futurs enseignants; c'est pourquoi il faut se garder d'une généralisation des résultats de cette recherche à l'ensemble des futurs enseignants du Secondaire. Puis, comme 21 de ces formés ont réalisé leurs activités dans le cadre de leur stage, nous ne pouvions contrôler les diverses variables qui ont influencé leurs choix didactiques. En outre, la recherche a été menée auprès de futurs enseignants dont la formation est plutôt disciplinaire que professionnelle. La recherche a eu lieu dans des classes à effectifs pléthoriques (avec plus de 100 élèves), peu porteuses de projets pédagogiques particuliers et innovateurs.

4.1.1 Séquences observées et découpage en épisodes

Les formés ont eux-mêmes analysé leurs séquences en précisant le contexte d'intégration des connaissances dans lequel ils les ont réalisées. Mais puisqu'ils n'ont pas travaillé sur des contenus uniformes, il ne nous pas été facile de faire des comparaisons entre eux. Des observations répétées seraient peut-être souhaitables. Nous avons choisi de découper les épisodes selon le contenu, c'est-à-dire en fonction de chaque activité de modélisation, à partir de chaque exercice de conversion proposé. Cela n'a pas été facile quand on sait que le formé était parfois tenu de revenir en arrière sur une activité déjà réalisée tout en cherchant à la relier à celle qui était en train de se dérouler. Ces va-et-vient se sont produits chez **Fadak** et chez plusieurs autres formés. En choisissant de découper les épisodes selon l'unité de contenu, nous choisissons de répertorier les stratégies utilisées pour intégrer les connaissances selon leur fréquence et non selon leur durée.

Face à un travail aussi fastidieux que le codage, nous avons adopté la voie suggérée par Huberman et Miles (1991) comme un bon compromis, c'est-à-dire utiliser le service de deux personnes jusqu'à ce que celles-ci parviennent à un degré d'accord suffisant. Il n'est pas facile d'éliminer tout risque de subjectivité lorsqu'on infère plusieurs stratégies à partir du comportement observé ou de ce qui est dit en entrevue. Par exemple, lorsque le formé survole les éléments du Séminaire, le fait-il pour chercher un élément particulier, pour mémoriser des éléments théoriques essentiels ou pour évaluer l'état de ses connaissances? Lorsqu'il refait un calcul, est-ce pour s'exercer ou pour le contrôler ou encore pour déceler une erreur? Dans chaque cas, il s'agit d'un comportement différent; mais les stratégies correspondantes sont toutes codées sous le thème «mobilisation des savoirs mathématiques et didactiques» ou «contrôle du sens et régulation». Ce sont là autant de questions difficiles qui nous ont amené à trianguler de deux façons les données recueillies avec l'interprétation du formé lui-même. Un premier moyen de contourner cette difficulté a été de faire visionner des morceaux de bande vidéo, de questionner le formé sur certains passages, de lui demander de confirmer (à haute voix) ses déclarations et de les compléter au besoin. Un autre moyen a consisté à demander au formé de lire et de commenter notre analyse des observations filmées et des traces écrites. Ces choix sont, bien entendu, exposés aux difficultés de la rationnalisation «après-coup».

Nous avons travaillé dans un cadre théorique qui nous a permis de caractériser la construction du sens et la compréhension des concepts constitutifs des IR. Les éléments de ce cadre théorique proviennent des recherches sur les stratégies d'apprentissage, sur la cognition ainsi que des travaux sur la résolution de problèmes. Certains de ces éléments semblent se chevaucher: c'est le cas du contrôle du sens (cognition) et de l'évaluation/compréhension (résolution de problèmes), ainsi que pour la prise de décision (résolution de problèmes) et la régulation (cognition). Une réflexion mérite d'être poursuivie pour établir des liens entre les différents domaines de recherche considérés et pour préciser les nuances entre des termes tels que «planification» et «contrôle», «contrôle» et «régulation» qui, pour certains chercheurs, réfèrent aux mêmes construits et font partie de la métacognition. Dans l'état de notre travail, ces notions n'ont pas été approfondies.

C'est en utilisant toutes les sources que nous avons pu trianguler les données recueillies et affiner l'analyse que nous en avons effectuée. Toutefois, une autre limite reliée au codage subsiste: nous ne savons pas trop jusqu'à quel point les comparaisons faites entre les données (qui ne sont pas du même type) sont-elles valides. Lesquelles de ces données sont les plus fiables? Nous avons rapporté que les entrevues et les observations filmées se sont avérées les sources les plus fructueuses; mais cela ne nous permet pas de dire que les données obtenues par ces sources sont plus fiables que celles qui sont recueillies autrement. Il y a lieu de poursuivre la réflexion au double plan conceptuel et empirique pour reculer cette limite que partagent plusieurs recherches.

4.1.2 Critique des outils d'investigation

Dans cette section, nous posons un regard critique sur nos instruments de cueillette de données, à savoir le journal de bord, l'enregistrement vidéoscopique et les entrevues individuelles. Le journal de bord nous a permis de connaître et de suivre la préparation des leçons de chacun des sujets. Notre choix de ne pas influencer les sujets dans leur préparation des séquences nous a permis d'apprécier les caractéristiques propres à chaque sujet. Le journal de bord nous a aussi fourni des indications sur la qualité de réflexion et d'analyse des protocoles de chacun des sujets. Chez les sujets de l'UGANC et huit autres de l'ISSEG, les retours sur les activités réalisées tenaient en quelques lignes et ne touchaient pas tous les aspects. En fait, seulement 13 formés ont vraiment considéré tous les aspects soulevés: une analyse des choix, de l'organisation et du contrôle du contenu enseigné et du matériel utilisé, une réflexion sur les moyens que le formé a pris pour vérifier ses actions et évaluer leur efficacité, pour poursuivre, modifier ou abandonner ce qu'il fait, les difficultés rencontrées dans les activités et les problèmes particuliers, etc.

L'enregistrement vidéoscopique nous a permis de recueillir des informations sur la façon dont les formés ont utilisé leurs connaissances mathématiques et didactiques dans leurs séquences d'enseignement. Il nous a permis d'observer chacun des formés dans le feu de l'action. À côté de ces avantages, il nous faut reconnaître que ce procédé a tout de même limité les sujets dans leurs déplacements, car ceux-ci devaient rester dans le champ de la caméra. Aussi, le procédé de transcription des protocoles des séquences est long et fastidieux.

Les entrevues individuelles se sont avérées indispensables pour apprécier le niveau d'analyse et de réflexion des formés sur leurs séquences et pour saisir leur capacité de rétroaction. Toutefois, les commentaires faits par la plupart des formés étaient à saveur pédagogique, les sujets ne parvenant toujours pas à faire une distinction entre le pédagogique et le didactique. Il était important pour nous de ne pas influencer les formés dans la formulation de leurs commentaires, de laisser libre cours à leurs commentaires pour ne pas biaiser les données, de faire attention à notre communication non verbale et de faire preuve d'objectivité face à ces commentaires et questionnements.

En dépit des difficultés ci-dessus mentionnées, nous sommes globalement satisfait du rendement de ces outils qui nous ont permis de collecter des données riches et pertinentes pour répondre à nos questions de recherche. Malgré ces limites, les dispositions méthodologiques que nous avons prises au cours de cette recherche nous ont permis d'objectiver au mieux les données recueillies et de conférer plus de crédibilité aux résultats obtenus. Ces dispositions constituent en elles-mêmes des points forts de la recherche. La première force de la recherche réside dans la collecte des données aussi riches que possible. L'étude a touché plusieurs aspects de la problématique de la formation des futurs enseignants à l'intégration des connaissances en élaborant et en utilisant un instrument qui a permis de «balayer large». La seconde force de l'étude est d'en assurer la validité interne en recourant à des triangulations successives (Huberman et Miles). Nous avons mis en correspondance, chaque fois que cela était nécessaire, les éléments tirés des protocoles, des fiches de synthèse des entrevues, des préparations manuscrites des séquences didactiques et des analyses faites par le formé de son propre protocole. En combinant les données tirées de diverses sources de collecte, nous avons approfondi certains aspects de la formation à l'intégration des connaissances, nous avons relativisé d'autres et apporté des nuances qui ont éclairé davantage l'ensemble des éléments investigués. Nous avons cherché à réduire ainsi les biais inhérents à chacune des techniques lorsqu'elle est utilisée de façon exhaustive. Mais nous avons aussi recouru à un autre type de triangulation, celui qui s'exerce dans l'élaboration de liens de cohérence et de pertinence entre les résultats et le cadre théorique.

Nous avons aussi ajouté une nouvelle dimension au modèle en tant que support d'expression des IR: le mouvement ou plus précisément le découpage/recollage. Ceci rejoint l'idée de la représentation comme processus dynamique qui permet la simulation et qui, comme le note Vergnaud (2000b, p. 20) «organise l'action, la conduite et, plus généralement, l'activité, tout en étant elle-même le produit de l'action et de l'activité». De la même façon que la représentation géométrique procède d'une abstraction des objets de l'espace physique qui nous entoure, l'activité de découpage/recollage est ici intégrée dans la modélisation. Mais comme dans tout processus de modélisation, c'est un mouvement construit, un mouvement conçu en fonction de la théorie et contrôlée par elle. Établir les IR par le procédé du découpage/recollage fait prendre à la démonstration mathématique (dont on connaît les difficultés d'enseignement) une autre dimension: ce n'est pas seulement, comme c'est trop souvent le cas dans l'enseignement traditionnel, une preuve qui vient après la connaissance mais qui, en fait, ne l'établit pas, c'est une preuve qui explique l'IR.

4.2 À propos du dispositif de formation à l'intégration des connaissances

Les résultats positifs de l'ingénierie sont à rechercher autant dans les acquis cognitifs et comportements didactiques du formé que dans le changement de ses attitudes: remise en cause de son horizon routinier, de ses connaissances fragmentées, de ses méthodes psychopédagogiques rigides, de ses intentions didactiques de départ obscures. Nous devons adjoindre à ce changement d'attitude, celui même du mathématicien chargé de dispenser un cours tout préparé, ce qui était le cas de presque tous les formés au début de cette recherche. La nature dynamique de l'ingénierie a permis au formé de moduler ses choix et d'opérer d'incessants retours sur l'action (a priori, séquence didactique, a posteriori, et ainsi de suite). L'ingénierie didactique a marqué l'importance de la «réalisation didactique» en classe comme pratique de recherche. Un autre point fort de cette recherche - certainement l'un des pus importants - a trait à sa pertinence tant au niveau de la formation mathématique que de la formation didactique de nos futurs enseignants. Nous établissons, à la section suivante, cette pertinence en identifiant la contribution théorique des résultats obtenus à la recherche en DDM ainsi qu'à la formation didactique de futurs enseignants.

5. Perspectives pour de futures recherches

Dans cette section, nous proposons quelques pistes pour des recherches futures, pistes qui visent, d'une part, à perfectionner la méthodologie et le modèle théorique et, d'autre part, à pointer quelques nouveaux aspects à investiguer.

5.1 Articulation entre formation de futurs enseignants et recherche en DDM

L'analyse qui précède montre que la recherche en DDM peut influencer la pratique si on y prévoit l'articulation entre les méthodes pédagogiques qui ont fait leurs preuves et les résultats de l'ingénierie didactique qui sont ici expérimentés. Le moment et le lieu de cette articulation peuvent être trouvés lors de la formation initiale des enseignants. La formation essentiellement disciplinaire que reçoit le futur enseignant de Guinée est loin de lui permettre une réflexion didactique et critique sur sa pratique. Si le principe est facile à retenir, les modalités d'application sont plus difficiles à définir. Le futur enseignant s'attend souvent à recevoir un savoir applicable, déduit des résultats des recherches, alors que ceux-ci peuvent soulever plus de questions qu'apporter des solutions toutes faites. Il est important de mettre ces résultats en rapport avec la pratique pédagogique, sinon ils risquent d'apparaître comme des connaissances à placer sur un autre champ que celui de la pratique enseignante.

Si nous voulons que les connaissances résultant de la recherche en DDM permettent d'énoncer des hypothèses d'action pédagogique ou didactique qui tiennent compte des situations rencontrées dans les classes, il nous faut les confronter, les analyser, les replacer dans les conditions de la recherche ou de la situation scolaire; il nous faut les relativiser; il nous faut surtout obtenir la collaboration des enseignants à la recherche en DDM.

5.1.1 Collaboration des enseignants à la recherche en DDM

Il est souhaitable que s'instaure la collaboration des enseignants à la recherche en DDM dès la phase de formation initiale. La maîtrise par le futur enseignant de diverses stratégies d'enseignement/apprentissage passe par une initiation à l'ingénierie didactique. Malheureusement, la presque totalité de nos établissements ne sont pas encore équipés en ressources humaines compétentes et en matériels didactiques pertinents pour développer des activités d'ingénierie qui soient réellement formatrices à la fois pour le personnel formateur et pour les futurs enseignants. La présente thèse invite les formateurs à susciter, auprès de futurs enseignants, la participation à la recherche en DDM, sous la forme, par exemple, de projets d'ingénierie didactique. Toutefois, en associant la recherche en DDM à la formation initiale, il nous faut éviter la formation au «modèle», celle fondée sur les leçons-types; nous favorisons plutôt la formation axée sur la conception, la réalisation, l'analyse et l'évaluation des activités didactiques par le futur enseignant. L'initiation de ce dernier à la recherche en DDM n'est pas destinée à former le chercheur professionnel, mais à l'amener à comprendre les résultats des recherches dont il peut avoir connaissance, à les analyser de façon critique, à les évaluer et à voir ce qui, dans ces recherches, a trait à ses propres pratiques.

5.1.2 Structures de liaison

L'absence de relations entre les différentes institutions de formation et de recherche et leur cloisonnement accentuent la hiérarchie de valeurs des enseignants, des chercheurs et des rôles correspondants. Les enseignants du Primaire ont souffert de cet isolement. Ajoutons d'ailleurs que les autres enseignants en ont également souffert. Les structures de liaison peuvent aller de la simple coordination à l'intégration des institutions de formation concernées. Il s'agit, par exemple, de relier les sections Mathématiques des Écoles Normales d'Instituteurs (ÉNI) et de l'ISSEG au Département de Mathématiques de l'UGANC. Pour que l'UGANC cesse d'être un lieu de recherche isolé, il doit avoir une structure de liaison avec les enseignants de mathématiques en exercice et les établissements de formation (ÉNI, INRAP, ISSEG). La participation des enseignants du Primaire à des équipes de recherche en DDM ne leur permettra pas seulement de sortir de leur isolement; elle leur donnera aussi l'occasion de faire reconnaître la difficulté de leur tâche et la valeur de leurs services. À ce décloisonnement social s'ajouteront à la fois un décloisonnement des disciplines et un décloisonnement des ordres d'enseignement dont l'intérêt pédagogique est encore plus grand et dont on sait à quel point ils sont aujourd'hui nécessaires.

Les départements de recherche, qui seront dirigés par des spécialistes en DDM, de niveau universitaire, peuvent être rattachés à l'ISSEG et aux ÉNI. Les chercheurs pourraient ainsi vaincre leur résistance à s'occuper des aspects pratiques de la formation professionnelle, et les formateurs de futurs enseignants pourraient chercher à dépasser leur méfiance à l'égard des chercheurs. Ainsi, non seulement les formateurs pourront utiliser les résultats de la recherche, mais la formation de futurs enseignants sera elle-même recherche, en ce qu'elle sera liée au changement et qu'elle cherchera à communiquer les résultats de ses propres expériences, surtout dans le domaine de la DDM. Notre dispositif de formation invite les futurs enseignants à s'interroger sur leurs pratiques, sur le sens de leurs activités, et à chercher des réponses à leurs interrogations. La présente recherche montre que si le dispositif de formation leur ouvre l'accès à l'ingénierie didactique qu'ils entreprennent selon leurs besoins et avec le concours de l'enseignant-formateur, leurs comportements didactiques peuvent évoluer. La formation peut devenir le moyen d'exercer une fonction critique si le formateur favorise le dialogue permanent avec les formés à propos de cadres théoriques, de conditions de déroulement de l'ingénierie, de l'évolution constatée, etc.

5.2 Modifications d'attitudes pédagogiques et de comportements didactiques

Les enseignants de mathématiques, notamment ceux de Guinée, ont généralement une réputation de conservatisme. Et, outre le fait qu'on ne peut vouloir le changement à tout prix et qu'il ne faut pas hésiter à conserver ce qu'il y a de bon dans un enseignement traditionnel, ils ne sont pas sans excuses. L'absence ou l'insuffisance de formation didactique les incline à une certaine routine. On comprend qu'il ne soit pas facile de renoncer à cette routine. La formation doit éviter de reproduire et de perpétuer cette image traditionnelle. Cela peut se faire par la prise de conscience de cette image, par l'analyse de ses origines et de sa signification, par la démonstration de son inadéquation et de sa désuétude. Mais cette prise de conscience intellectuelle, cette analyse théorique, cette démonstration formelle ne suffisent pas à elles seules, et il ne suffit pas non plus d'élaborer et de proposer un nouveau modèle, de faire reconnaître et accepter ce modèle par l'enseignant, pour que les comportements de ce dernier soient fondamentalement transformés.

Les attitudes du futur enseignant au sein du dispositif de formation jouent un rôle essentiel. Le savoir didactique (S2) et le savoir d'expérience (S3) ne peuvent se conjuguer et trouver leur efficacité maximale que si le futur enseignant possède certaines attitudes positives. Nous notons quelques changements qui résultent de l'impact du Séminaire. En effet, au début, les sujets avaient tendance à penser que les symboles suffisaient pour enseigner les IR, que l'enseignement et l'apprentissage des IR reposaient sur un ensemble de définitions et de règles formelles qu'il suffisait de connaître voire mémoriser. Mais, à la fin du Séminaire, ils ont presque tous changé d'idée; ils ont mis moins d'accent sur l'apprentissage des règles et d'algorithmes mais davantage sur le sens, la compréhension des élèves et sur la participation de ces derniers; ils ont presque tous reconnu une plus grande valeur aux tuiles, aux activités de modélisation et d'intégration des connaissances. Ils ont donné une plus grande place aux activités de découpage/recollage et ont envisagé différentes façons de voir et de traiter les IR. À la faveur de situations didactiques et adidactiques proposées, le dispositif de formation a conduit à une plus grande activité mathématique des formés, sans excès de formalisme, et à une plus grande disponibilité des connaissances pour résoudre des problèmes.

L'ingénierie didactique n'est qu'un instrument au service des recherches sur la formation de futurs enseignants; elle n'a aucune prétention à l'exhaustivité. Elle permet de mettre en relief certaines régularités, certaines constances et d'analyser sur quels points les futurs enseignants peuvent changer. Notre recherche a permis de montrer les effets différentiels de différentes approches (algébriques et géométriques); c'est en ce sens que ses premiers résultats sont prometteurs. Nous avons vu se dégager chez le formé le désir de changement et chez le formateur le désir de voir la recherche avoir prise sur le réel. Nous avons vu chez le premier (le formé) les efforts de prise et de consignation d'informations, de mise à jour de ses connaissances et la diversité des exigences de chacun en fonction de sa propre formation antérieure. Autant de constatations qui renvoient à des contraintes à l'égard du second (le formateur) qui a pouvoir au niveau des initiatives à prendre, des orientations à donner et dont l'action globale a une retombée au niveau de la formation initiale.

5.3 La recherche en DDM comme moyen de connaissance

Il nous est apparu que la recherche en DDM comme moyen de connaissance peut servir les objectifs du formateur lui-même pour son enrichissement personnel, élargir son propre champ de connaissances, sa compétence, et intégrer ces informations dans le processus de formation qu'il met en œuvre auprès du formé. La recherche en didactique des mathématiques (DDM) peut également servir les objectifs du formateur dans le but de favoriser chez le formé l'acquisition des savoirs d'expérience (S3). Le formé pourrait ainsi intégrer les données nouvelles dans son action pédagogique et dans son comportement didactique auprès des élèves; il aurait ainsi la possibilité d'infléchir son action pour l'améliorer.

Pour donner une formation didactique efficace, il ne suffit pas que le formateur de futurs enseignants ait bien pris conscience du nouveau modèle, soit capable de le représenter et d'en montrer le rapport à la DDM. Il faut encore, et c'est le plus difficile, qu'il soit capable de provoquer chez le futur enseignant un comportement didactique en accord avec ce modèle. Car l'adhésion intellectuelle à des modèles représentés ne garantit nullement que les comportements effectifs s'y conformeront. Notons d'ailleurs que le formateur de futurs enseignants n'a aucune chance de mener à bien sa tâche si, pour lui-même et dans son enseignement, il n'a pas opéré une telle conversion. Or, cette conversion est d'autant plus ardue que les individus sont davantage formés: ils règlent alors leurs comportements selon des images d'autant plus tenaces qu'elles sont pratiquées depuis longtemps. C'est pourquoi la formation didactique des enseignants de mathématiques qui sont déjà formés et qui sont depuis plus longtemps en fonction est la plus difficile.

6. Remarques finales

Les effets du dispositif de formation que nous attribuons au modèle théorique proposé sont les résultats des activités de modélisation que les élèves réalisent par rapport aux IR. Il importe donc de considérer non pas les seuls modèles graphiques et leur valeur informative, mais les situations didactiques qui s'inscrivent dans un processus d'enseignement/apprentissage et qui comprennent la tâche et les supports imagés, ce qu'il y a à voir et ce qu'il y a à faire. Mettre le futur enseignant et ses élèves en activité de modélisation est nécessaire d'un point de vue méthodologique: il s'agit, en effet, pour nous, non seulement de recueillir des effets d'apprentissage attribuables au dispositif, mais aussi d'observer comment les formés dévoluent les activités de modélisation et de quelle façon interviennent différentes variables liées aux structures de représentation, aux conditions de l'activité, aux modalités de réponse demandées, aux connaissances antérieures des élèves, etc.

La notion de «situation de modélisation» que nous avons introduite propose justement de réconcilier «modèle» et «activité». Apprendre les IR par leur représentation géométrique ne veut pas dire seulement prendre l'information que contient l'image géométrique, mais aussi et plus essentiellement apprendre par l'activité que l'image rend possible. Apprendre les IR par leur représentation géométrique, c'est réassumer ce que nous appelons volontiers la «valeur opérative» du modèle graphique. De ce point de vue, proposer une activité de modélisation revient à placer les élèves en situation d'apprendre par le modèle, c'est-à-dire de faire ou de refaire, par la médiation de la représentation géométrique, le travail de manipulation et de construction du sens des IR que la représentation imagée rend possible.

6.1 Travail du modèle et parcours cognitif

Les activités de modélisation qu'impliquent les situations proposées aux élèves, qu'il s'agisse de compréhension, de production ou d'utilisation des modèles, sont des activités au travers desquelles sont visés des apprentissages tant sur le plan des élaborations conceptuelles que sur celui des schèmes et des procédures de traitement. Ces modèles, autant par leurs contenus d'information que par leurs modes de construction, sont pour les élèves des moyens d'accéder à des réseaux de concepts, notamment ceux qui constituent les IR. Toutes les situations de lecture, de modification ou de construction de modèles peuvent être ainsi considérées comme des situations d'évaluation dans la mesure où l'activité de l'élève donne lieu à des conduites et à des productions observables. Elles peuvent toutes, également, être considérées comme des situations d'apprentissage, à différents degrés, en fonction précisément du degré de nouveauté qu'elles présentent pour l'élève, du point de vue des connaissances en jeu, des types de modèles à comprendre ou à produire, des types d'activités requises, des contraintes à respecter.

L'analyse des résultats montre qu'il est important de préciser si le modèle offre un exemple, un détail, une métaphore ou une image graphique et de quel point de vue. Les modèles constituent des chaînes de représentations en ce sens que ce que l'on y voit représenté peut encore être représentant d'autre chose. Il y a tout un parcours cognitif à faire de l'identification à l'interprétation d'un modèle, du contenu référentiel au contenu notionnel qu'on peut lui associer dans la tâche proposée, et nombreuses sont les opérations de pensée nécessaires pour parcourir le chemin. Un des rôles de l'intégration des connaissances consiste à orienter et à guider ces opérations, de façon à relier le modèle aux concepts en jeu, à l'insérer dans le champ des significations notionnelles pertinentes. Si les schèmes et cadres conceptuels déjà construits par l'élève lui permettent de donner du sens aux modèles des IR, il y a lieu, en retour, de penser que les activités de modélisation contribuent non seulement à les contextualiser, mais aussi à les structurer.

Par leurs contenus divers, les modèles permettent d'associer aux concepts des traits figuratifs et des ancrages contextuels qui les enrichissent en compréhension et leur ouvrent de nouveaux champs d'application. Par les configurations structurales, qui les distinguent à la fois de la perception directe et du langage verbal, les modèles graphiques font apparaître de nouvelles relations, de nouvelles «formes» qui peuvent induire des organisations ou réorganisations conceptuelles: le concept de carré parfait n'est pas séparable, à un certain stade de sa formation, de la vue en assemblage qui en relie figuralement les tuiles constitutives. Ainsi, les modèles graphiques permettent-ils d'élaborer des représentations au sein desquelles se tisse un ensemble de liens associatifs entre les figures et les concepts, entre les aspects figuratifs et les aspects déclaratifs de la connaissance sur les IR. De ce point de vue, les modèles graphiques participent à la référenciation des connaissances apprises.

Les modèles géométriques n'ont, cependant, pas pour seul rôle cognitif d'évoquer ou d'instancier les concepts constitutifs des IR sous de multiples visages; ils ne se limitent pas à en donner une pluralité d'équivalences concrètes; ils participent aussi à leur construction par le fait même qu'ils leur fournissent des espaces de représentation qui permettent de mettre en rapport des connaissances algébriques et géométriques, de les rassembler et de les intégrer dans des champs conceptuels. Les tâches d'appariement de données ou d'organisation figurale, celles de coordination ou de comparaison sont des exemples typiques où l'articulation des données s'effectue non pas dans l'abstrait, mais sur le plan même de la perception et de la manipulation des tuiles. L'espace figural des tuiles algébriques et des formes géométriques leur confère un pouvoir intégrateur dont le rôle est essentiel dans l'élaboration des représentations conceptuelles des IR.

Les tuiles constituent un mode de représentation spécifique: la façon dont l'information y est codée les distingue nettement, par exemple, des représentations linguistiques. Il importe donc de s'interroger sur leur fonctionnalité sémiotique, c'est-à-dire en quoi les images construites à l'aide des tuiles, en tant que constructions sémiotiques spécifiques, peuvent-elles favoriser l'élaboration et l'organisation de procédures de traitement des IR. C'est là, à notre avis, l'un des aspects essentiels du rôle que l'intégration des connaissances peut jouer dans l'enseignement et dans l'apprentissage des mathématiques, en général, et des IR, en particulier.

La reconnaissance d'une parenté des formes permet d'appliquer à de nouvelles situations les schèmes de traitement et de résolution construits au travers d'expériences antérieures et de situations nouvelles rencontrées. La perception visuelle des tuiles constitue, sans nul doute, le lieu d'élaboration première de ces schèmes d'action. Mais les modèles graphiques eux-mêmes, en vertu de leurs propriétés analogiques, contribuent à tisser tout un ensemble de correspondances qui assurent la généralisation autant que la discrimination progressive des structures de traitement des IR. En se rappelant le propos de Vergnaud sur la notion d'homomorphisme, on peut dire que l'analogie est le fondement essentiel des invariants opératoires par lesquels la pensée a prise sur le réel. La présente recherche a contribué à déterminer dans quelle mesure les élèves peuvent s'approprier les schèmes de représentation et de traitement, de sorte que le travail du modèle soit authentiquement un travail de conceptualisation.

6.2 Difficultés de la tâche d'intégration

Les situations d'intégration de connaissances sont des dispositifs de médiation permettant à l'élève d'agir sur les IR par le moyen symbolique des tuiles ou des formes géométriques. Elles comportent pour les élèves une certaine complexité cognitive qui tient, en partie, à la nature des modèles graphiques qu'il leur est demandé de lire, de modifier ou de construire, en partie à la nature des tâches dont ces modèles font l'objet. Le premier niveau de cette complexité des situations de modélisation est leur dimension sémiotique, c'est-à-dire l'activité de codage-décodage qu'elles impliquent de la part des élèves. Mais les règles de représentation des IR recouvrent un niveau plus profond, qui est celui-là même des structures de représentation par lesquelles les modèles construisent les réalités ou propriétés qu'ils représentent: les schèmes d'organisation des formes géométriques et des tuiles, les relations au travers desquelles ils donnent à penser les IR. Là réside la dimension épistémique des modèles graphiques. S'il est une raison pouvant justifier la place des modèles dans les apprentissages mathématiques, c'est bien de permettre aux élèves de s'approprier ces schèmes organisateurs dont ils sont porteurs, et qui les amènent à percevoir et à structurer les concepts constitutifs des IR d'une tout autre façon que ne peut le faire la perception «algébriste» ordinaire. Mais cette appropriation ne saurait se réaliser qu'au travers d'un travail de conceptualisation.

Ceci nous amène à déterminer les compétences requises par une activité de modélisation et à montrer qu'on ne peut raisonner indépendamment des objets (i.e; des concepts constitutifs des IR) sur lesquels on raisonne. Nous savons l'importance qu'accorde Vergnaud aux contenus et contextes, sources de décalages horizontaux. Une tâche de sériation de tuiles n'est évidemment pas équivalente à une sériation de bâtonnets: que range-t-on lorsqu'on assemble les tuiles? On voit à quel point la difficulté de la tâche dépend du type d'image que l'élève est amené à traiter. De la tâche prescrite à l'activité réelle que déploie l'élève, il y a tout un ensemble de décalages possibles. Un élève peut, en effet, accomplir une tout autre tâche que celle qu'on lui demande; cela s'observe souvent, par exemple, lorsque l'élève se méprend sur le niveau de réponse qui lui est demandé (cas de Ada), qu'il s'agisse d'une production verbale ou graphique: décrire au lieu d'expliquer, faire un schéma du calcul lorsqu'il est question de «calculer sur le dessin» d'une IR. Par ailleurs, pour une même tâche, des élèves peuvent procéder de plusieurs manières; une même image peut être comprise de façons très différentes. Les consignes exercent certes une influence sur la façon de traiter l'image.

La complexité d'une situation de modélisation tient principalement, comme nous l'avons souligné, aux schèmes opératoires que sollicitent les tâches proposées. La notion d'échelle implique des schèmes de proportionnalité dont on sait qu'ils ne sont guère acquis avant la fin du Primaire. Les situations de modélisation peuvent ainsi se distribuer selon des progressions qui, pour un concept constitutif donné, prennent en compte non seulement la difficulté formelle des tâches demandées aux élèves mais aussi et surtout ce que nous appellons les «niveaux épistémiques» des images, c'est-à-dire les niveaux de traitement cognitif du réel que les représentations géométriques impliquent, aussi bien en compréhension qu'en production. Bien que les règles de codage soient, en elles-mêmes, sources possibles de certaines difficultés, la difficulté d'une image provient essentiellement de la complexité des propriétés et relations qui se trouvent, par son intermédiaire, devoir être appréhendées et manipulées. On peut alors considérer que le niveau «image géométrique» est l'une des dimensions susceptibles d'avoir une importance dans la construction d'une démarche d'intégration des connaissances. Il paraît naturel, en effet, de commencer l'étude d'un domaine tel que celui des IR par des images proches des apparences perceptives pour progresser dans le sens de graphies algébriques plus abstraites qui impliquent, par le biais de langages spécifiques, le maniement de structures conceptuelles plus difficiles d'accès.

6.3 Liens entre l'intégration des connaissances par les élèves et la coordination des savoirs S1, S2 et S3 par le formé

Les situations d'intégration et de modélisation devraient permettre à l'élève de réaliser que certaines connaissances acquises en géométrie sont utiles en algèbre, et inversement. Si les cloisons entre l'algèbre et la géométrie sont étanches, le formé ne pourra pas aider l'élève à réaliser cela. Le morcellement des savoirs mathématiques (S1), didactiques (S2) et d'expérience (S3) conduit le formé à aborder les concepts constitutifs des IR de façon additive et linéaire plutôt que dans leurs interconnexions au sein d'un champ conceptuel plus large qui leur donne du sens. Les savoirs S1, S2 et S3 ne sont pas dissociables des compétences, celles-ci n'étant pas indépendantes des situations didactiques. Les savoirs S1, S2 et S3 ne peuvent se développer en dehors des situations didactiques dans lesquelles ils s'appliquent et se coordonnent.

Les savoirs d'expérience (S3) ne partent pas de rien; ils s'appuient substantiellement sur les savoirs S1 et S2 qui se développent à travers leur mobilisation et leur utilisation dans des contextes variés. Pour le formé, développer les savoirs S3 consiste à apprendre à mieux gérer la mobilisation, la coordination et l'utilisation qu'il fait des savoirs S1 et S2. Développer les savoirs S3, c'est aussi, pour le formé, apprendre à découvrir de nouvelles façons d'utiliser ce qu'il sait déjà sur les plans disciplinaire et didactique. Ceci requiert que le formé amène l'élève à reconnaître les contextes et les conditions dans lesquels certaines connaissances s'avèrent utiles, qu'il se préoccupe de la possibilité de mobiliser les connaissances qu'il enseigne dans d'autres contextes, et qu'il développe les compétences transversales (langage, lecture, modélisation, etc.). En effet, la plupart des apprentissages mathématiques passent par les activités langagières, l'écriture et requiert, de ce fait, que l'élève mobilise ses compétences reliées à la lecture (figure 36).

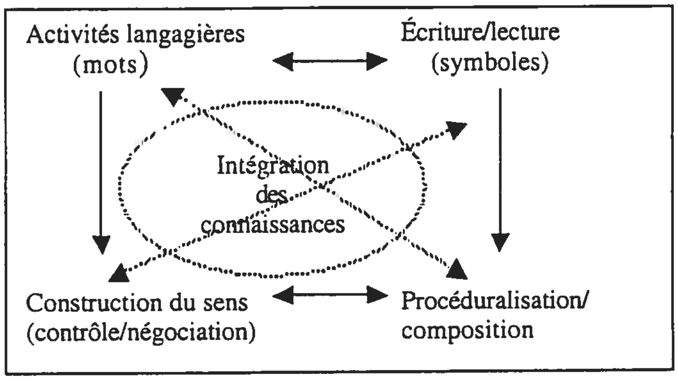


Figure 36: Langage, écriture, lecture, procéduralisation et négociation du sens

La facilité de tourner autour de ce diagramme, tout en ajustant les interprétations de chaque élément jusqu'à ce qu'il y ait une confortable intégration de connaissances, est l'indice que l'élève développe sa compréhension des opérations mathématiques et des propriétés de ces opérations. L'élève a besoin de développer la flexibilité dans son interprétation des mots et des symboles et d'associer à ces mots et symboles différentes significations et procédures en vue de résoudre des problèmes. Dans cette perspective, pour prouver, par exemple, que la somme $S(n)$ des n premiers entiers est égale à $n(n + 1)/2$, on peut envisager plusieurs arguments dont voici deux:

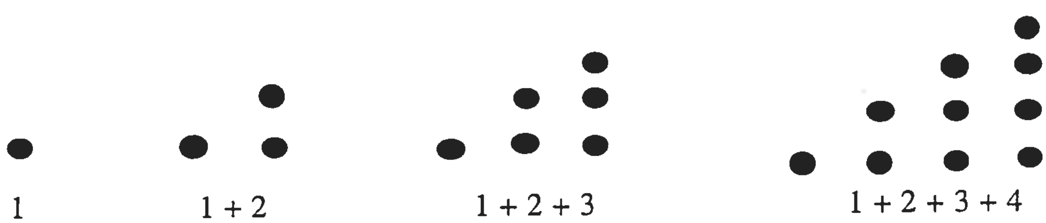
<u>Argument 1</u>: Étant donné $S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 2) + (n - 1) + n$, on peut reécrire cette somme en inversant l'ordre des termes: $S(n) = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 3 + 2 + 1$. En faisant la somme de ces deux rangs, on obtient:

$$2S(n) = (1 + n) + [2 + (n - 1)] + [3 + (n - 2)] + ... + [(n - 1) + 2] +(n + 1)$$

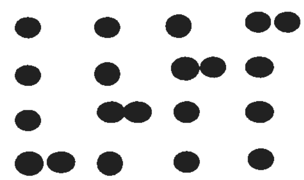
$$2S(n) = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + ... + (n + 1) + (n + 1) \qquad n \text{ termes}$$

$$2S(n) = n(n + 1); \text{ par conséquent, } S(n) = n(n + 1)/2.$$

<u>Argument 2</u>: On peut représenter la somme des n premiers entiers positifs sous forme de nombres triangulaires.



Les points forment des triangles rectangles isocèles avec le n-ième triangle qui contient: $S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$ points. En superposant les seconds triangles rectangles isocèles de même taille de manière que leurs diagonales coïncident, on produit un carré qui contient n^2 points plus n points supplémentaires résultant de la superposition des diagonales. On peut illustrer cette proceduralisation/composition comme ci-dessous:



Ainsi, en considérant le n-ième triangle, le nombre de points produits par la superposition des deux triangles est $2(Sn) = n^2 + n$, donc $S(n) = (n^2 + n)/2 = n(n + 1)/2$.

L'articulation des savoirs S1, S2 et S3 peut ainsi être envisagée comme une façon d'enrichir le répertoire des ressources en autant que l'élève en perçoit l'utilité et qu'il est capable de relier les connaissances à leur usage. L'idée de compétence suppose que le formé est capable de mobiliser les savoirs S1, S2 et S3 en les reliant les uns aux autres et en les combinant à d'autres ressources didactiques. Il ne s'agit pas de reléguer les savoirs mathématiques (S1) au second plan; bien au contraire, au lieu de les envisager en fonction de leur valeur intrinsèque et, de ce fait, indépendamment de leurs usages variés, le formé les présente dans divers contextes d'apprentissage qu'ils contribuent à enrichir. Il est important que le formé prenne appui sur ses connaissances mathématiques. C'est en exploitant ces connaissances qu'il pourra développer des savoirs didactiques. La compétence ne réside pas dans la somme, mais dans l'articulation dynamique des savoirs S1, S2 et S3. L'intégration des savoirs S1, S2 et S3 ne peut se réduire à un enchaînement linéaire de connaissances morcelées. Elle est une articulation de l'ensemble des connaissances algébriques et géométriques, des savoirs mathématiques et didactiques en vue de transformer le métier de l'élève en qualifiant la profession enseignante.

6.4 Des tuiles pour figurer, schématiser, modéliser

Les tuiles ne sont pas des modèles, mais elles nous permettent de structurer les IR et de les rendre lisibles. Les images que l'on peut construire à l'aide des tuiles comportent une triple puissance de figuration, de schématisation et de modélisation. Elles assument une triple visée: rendre visible, rendre lisible, rendre prévisible. On peut dès lors apercevoir les possibilités qu'elles ouvrent de conceptualiser les IR et de les manipuler par l'interposition de représentations symboliques qui sont des médiations de connaissance. Dans le travail d'intégration des connaissances, le rôle de l'image est d'abord de convocation et de mise en évidence des concepts constitutifs des IR. Un modèle graphique est opératoire en ce qu'il constitue un instrument dont la fonction n'est plus seulement de représenter géométriquement une IR, mais d'en simuler certains aspects et donc d'en générer, par manipulation symbolique, de multiples représentations possibles.

Les trois directions de l'intégration des connaissances que nous venons de signaler - figurer, schématiser, modéliser - peuvent être vues comme des indications d'étapes dans la construction des savoirs sur les IR par les élèves. Les niveaux de traitement cognitif du réel, qu'impliquent les modèles graphiques des IR, ne doivent pas être confondus avec des étapes pédagogiques: celles-ci peuvent, cependant, dans leur progression, les prendre en compte, comme cela se voit d'ailleurs dans les manuels scolaires que nous avons passés en revue. Les incursions dans chacune des directions peuvent être plus ou moins poussées. Ainsi, selon le concept constitutif d'une IR abordé, il est possible que le travail d'observation soit réduit au profit d'un travail plus important de structuration ou qu'il représente, au contraire, l'essentiel des activités didactiques proposées aux élèves. Quant aux démarches de modélisation, peu de domaines s'y prêtent encore au Primaire, en raison des difficultés de l'approche ou du manque de supports appropriés, et surtout du manque de préparation des futurs enseignants à la pratique de modélisation.

Ainsi, le parcours de connaissance que suggèrent les différentes représentations des IR, de par les actes cognitifs qu'elles supposent, est loin d'être linéaire et à sens unique. Ce parcours de connaissance implique justement, dans sa logique, de constants va-et-vient entre la représentation géométrique et la graphie algébrique d'une IR. Par ces va-et-vient, l'intégration des connaissances tisse des liens entre différents niveaux et différents registres de représentation. Du point de vue de la construction des connaissances sur les IR, la signification de l'intégration des connaissances ne réside pas tant dans les informations qu'elle livre que dans les trajets cognitifs qu'elle rend possibles. Les différentes progressions d'apprentissage, qui ont été expérimentées dans les classes de Conakry et de Coya (Guinée), mettent bien en évidence ce va-et-vient constant entre l'écriture alphanumérique d'une IR et sa représentation géométrique: l'analogie ne fonctionne pas seulement entre une image et son référent, mais d'une image à l'autre; son rôle est de propager des schèmes d'intelligibilité. Une situation de modélisation n'est que l'un de ces moments privilégiés, parmi d'autres, où des représentations entrent en résonance, l'activité de l'élève consistant essentiellement en une activation de représentations significatives.

Modéliser, ici, c'est donner à comprendre les IR par le moyen d'une analogie (voir les IR comme ...); mais c'est aussi relier les concepts constitutifs des IR en une vue d'ensemble, les rassembler en un réseau de concepts (voir les concepts constitutifs des IR ensemble). L'analyse des activités qu'impliquent les situations de modélisation et d'intégration des connaissances fait clairement apparaître cette double dimension, qui consiste à circuler dans le champ des représentations en reliant les éléments selon un principe de ressemblance ou selon un principe de connectivité. Demander à l'élève un rappel graphique d'une IR, ce n'est pas seulement l'inviter à restituer une équivalence figurative, c'est l'amener à faire un travail de réagencement interne des concepts constitutifs qui sont rappelés. De même, une tâche de conversion figurale implique, à travers le réarrangement des tuiles, la conservation d'invariants. Ce qui est surtout important, c'est que d'une image à l'autre, entre images géométriques et graphies algébriques des IR, ces mises en relation ne sont pas à constater, mais à construire.

Nous résumons la thèse que nous avons défendue tout au long de ce travail en disant qu'il est illusoire de croire en un lien direct entre modélisation et acquisition des connaissances sur les IR: ce lien ne s'établit que par l'intermédiaire des activités didactiques significatives et des démarches de pensée que l'intégration des connaissances rend possibles. La différence entre regarder des images des IR sans plus et une tâche de construction des modèles des IR est que celle-ci provoque l'acquisition et la mise à l'épreuve des liens et des schèmes au travers desquels les élèves se représentent les IR en leur donnant du sens. De ce point de vue, les modèles ne sont pas des moyens pour communiquer des connaissances sur les IR, mais pour les élaborer au travers d'activités qui ont pour effet de solliciter et de remettre en cause les images mentales déjà construites. Évoquons à grands traits, pour conclure, quelques unes de leurs fonctions élaboratives. La fonction première des modèles est de servir de points d'application, de mise en relation et de construction de sens, dont le propre est justement d'activer des représentations. Une autre fonction est de permettre aux élèves de manipuler des entités abstraites par le biais des figurations qui leur correspondent: les formes géométriques et les tuiles algébriques sont bien, en ce sens, des supports qui permettent d'objectiver, de mettre en visibilité, de placer sur le terrain de la perception et de la manipulation le jeu interne des représentations.

Les activités d'intégration des connaissances ont pour signification, comme nous l'avons amplement souligné, de permettre aux élèves de construire tout un répertoire diversifié de schèmes de représentation. Grâce à ces instruments, les élèves peuvent non seulement imaginer les IR allant bien au-delà de ce qu'en donne à saisir la perception, mais aussi les organiser en pensée, les concevoir, les relier de plusieurs façons, les anticiper, les recombiner. Ces activités visent surtout à leur permettre de s'approprier les images des IR; ils pourraient ainsi s'en servir comme de véritables langages opératifs de la pensée, comme des instruments de manipulation et d'intégration des connaissances. Ce que le modèle et la modélisation apportent de nouveau dans une situation d'apprentissage des IR, ce sont des instruments pour les penser sur d'autres modes que celui que le seul traitement algébrique autorise, ce sont des modes de traitement, d'analyse et de calcul que leurs structures de représentation rendent possibles.

La pluralité des représentations des IR est un moyen de soumettre leurs concepts constitutifs à une pluralité de traitements possibles. Ainsi, la modélisation est-elle une action possible sur les tuiles: elle les rend manipulables. Les tuiles ne sont pas d'emblée des instruments de connaissance, elles ne le deviennent qu'à proportion des activités qu'il est possible de développer à leur égard. Dans les situations où les modèles sont à lire ou à modifier, les tuiles ne sont pas nécessairement les seules données proposées: informations verbales, en rapport ou non avec les images graphiques, données comportant ou non des valeurs numériques sont autant de données diverses pouvant accompagner les images et constituer des supports d'activité dont les éléments peuvent soit constituer des ensembles organisés d'informations, soit être présentés à l'élève comme devant faire l'objet de mise en relation. À ces données, il faut ajouter toutes les informations qui ne sont pas fournies à l'élève mais que celui-ci doit tirer de sa propre mémoire ou de ses connaissances antérieures pour «dessiner» les calculs sur les IR ou «calculer» sur les dessins des IR.

Nous souhaitons que tous les enseignants soient à la fois désireux et capables d'appliquer, de façon appropriée à leur enseignement des IR, les résultats de la présente recherche. Cela implique une formation préalable que nous considérons sous deux aspects: d'abord créer cette disposition d'esprit et cette bonne volonté grâce auxquelles l'enseignant s'emploiera avec conviction, voire enthousiasme, à utiliser les ressources nouvelles qui lui sont offertes. Cet aspect de la formation appelle un nécessaire complément: l'enseignant doit être capable de lire et d'interpréter ces résultats en termes didactiques, d'en voir les effets possibles au niveau de son enseignement, de sa classe et de ses élèves. Il faut lui donner la formation didactique minimale qui lui permettra de lire les résultats de la recherche elle-même dans ses démarches et dans son langage. Les nouveaux moyens dont la pratique pédagogique a besoin seront d'autant mieux accueillis et intégrés à la pratique de l'enseignement des mathématiques, qu'ils auront d'abord été attendus et recherchés. Par «moyens nouveaux» nous entendons des connaissances nouvelles (i.e; techniques de calcul du carré des nombres terminés par 1 ou par 5, complétion géométrique de carré) et des connaissances directement en rapport avec ces techniques (i.e; le découpage/recollage). On peut, bien sûr, s'en servir dans le cadre de la pédagogie connue et au service de méthodes éprouvées. Mais la recherche en DDM doit s'appliquer à déterminer dans quelle mesure et de quelle façon ces moyens pourront être utilisés de manière que, grâce à leurs propriétés spécifiques, ils soient à l'origine de nouvelles manières efficaces d'enseigner les mathématiques.

Comprendre la recherche en DDM, ses démarches et ses fins, s'y exercer par des projets d'ingénierie et y prendre goût, c'est faire de l'enseignement le champ d'une prospection et l'horizon d'une prospective et, par là même, ne plus se laisser paralyser par le passé et la tradition, éviter la sclérose, secouer les routines. En ce sens, nous pouvons dire qu'une formation à la recherche en DDM prévient l'engourdissement de l'enseignant, garantit, en partie au moins, la liberté de ses choix didactiques, le met en état de conserver longtemps à ses actes didactiques leur vitalité et leur dynamisme. C'est ce qui nous fait mettre en garde ceux des futurs enseignants qui pourraient être tentés d'appliquer dans leur enseignement tous les résultats de cette recherche, comme si ceux-ci étaient la description de ce que devrait faire tout «bon» enseignant. Il leur faut plutôt résister à cette idée. Nos résultats n'ont pas la prétention de donner un portrait complet du futur enseignant en situation d'intégration des connaissances. Ils donnent tout au plus l'occasion de réfléchir sur ce qu'on fait lorsqu'on conçoit, réalise et analyse des activités pour enseigner de façon significative les IR. Dans l'optique de la professionnalisation, le futur enseignant n'a donc pas à reproduire servilement les résultats de recherche mais plutôt les utiliser pour nourrir sa réflexion, s'ouvrir à de nouvelles pistes d'activités didactiques, se conforter dans certaines de ses pratiques actuelles, se confronter à sa suffisance de n'avoir rien à apprendre sur les IR, amorcer avec ses collègues l'échange sur les idées reçues et les incertitudes.

Nous avons limité notre étude aux IR qui font appel à plusieurs champs conceptuels. Ce faisant, nous avons choisi d'analyser quelques concepts constitutifs des IR (monôme, binôme, distributivité) avec des situations qui sont loin de tenir de l'évidence chez nos formés. Certes, dans certaines manipulations algébriques via tuiles, la propriété de distributivité peut être mise en relief implicitement. Plusieurs formés ont basé leur argumentation sur la comparaison de l'écriture alphanumérique et la représentation graphique de l'IR pour déduire, selon toute vraisemblance, ce qui s'est passé. Mais l'évidence graphique est telle que le formé peut ne pas voir la pertinence d'expliciter davantage puisqu'il assume que l'élève «comprend». Il faut se demander si les comportements observés chez les formés de l'ISSEG (qui avaient un bagage mathématique impressionnant et une certaine expérience d'enseignement) sont liés aux situations quelque peu élémentaires sur certains aspects ou à leur façon d'intégrer les connaissances pour des situations de modélisation plus complexes. Il nous apparaît aussi important de poursuivre l'étude au lycée et pour d'autres concepts comme celui de «fonction».

Rappelons que les résultats de cette recherche ne se prêtent pas à la généralisation; les différences individuelles entre les formés nous amènent à observer la prudence à cet égard et à solliciter la poursuite de ce type de recherche. Pour disposer de plus d'informations, il nous semble intéressant de mener l'étude avec un plus grand nombre de futurs enseignants. Il nous apparaît également intéressant de vérifier jusqu'à quel point l'intégration des connaissances dépend des activités proposées aux élèves et jusqu'à quel point elle dépend du comportement didactique de l'enseignant. On pourrait aussi vérifier jusqu'à quel point la perception du contrat de formation influe sur la prestation du formé en matière d'intégration des connaissances. On pourrait voir si la perception de ce contrat (implicite ou explicite) par le formé influence les stratégies utilisées et les relations entre celles-ci. On pourrait aussi faire des comparaisons entre les formés et ceux des futurs enseignants qui n'ont pas suivi de formation à l'intégration des connaissances et qui évoluent dans un cadre traditionnel d'enseignement. Il serait intéressant de vérifier, par exemple, jusqu'à quel point les représentations des uns et des autres influenceraient le type d'activités proposées aux élèves.

Rappelons aussi que l'expérimentation s'est déroulée en pleine année académique pour les sujets de l'UGANC et entre les derniers cours de formation théorique et le stage pratique pour ceux de l'ISSEG. Il s'agit là d'une particularité dont il faut tenir compte, car la pratique d'un stagiaire en situation d'évaluation est strictement différente de celle d'un enseignant (de plein pied), même si ce dernier est un débutant. Aussi, avons-nous trouvé opportun de faire l'expérimentation à ce moment précis pour limiter des facteurs, comme le fait de rester inactif pendant une assez longue période, ce qui pourrait influencer l'état et la disponibilité des connaissances mathématiques et didactiques des sujets. Dans l'analyse des données, nous avons tenu compte du fait que les formés étaient alors en situation d'évaluation puisque la réussite de leur stage en milieu scolaire est essentielle à l'obtention de leur diplôme. Force nous est donc de supposer qu'ils pouvaient se comporter différemment s'ils avaient leur propre classe à gérer sans aucune supervision. Leur situation de «stagiaire» a plutôt joué à notre avantage car, par le fait que les formés se trouvaient en situation d'évaluation par les institutions de formation, nous étions pour le moins assuré que leur implication à cette phase de la recherche était la plus vigoureuse possible. Ainsi, toujours au plan des prolongements, une étude semblable pourrait être entreprise avec des enseignants en exercice, de façon à explorer jusqu'à quel point les pratiques d'intégration des connaissances sont effectivement importantes pour construire le sens et asseoir la compréhension.

BIBLIOGRAPHIE

Ansart, P. (1990). Pluralisation des savoirs et formation scientifique. In G. Racette et L. Forest (dir.), Pluralité des enseignements en sciences humaines à l'université, pp. 21-29. Montréal: Éditions Noir sur blanc.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In Hard, G. and Dubinsky (Eds.), The Concept Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MMA Notes vol. 25, p. 114.

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en 1er cycle universitaire, *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques*, IMAG-LSD, Grenoble.

Artigue, M. (1988). L'ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol. 9, n° 3, pp. 281-308.

Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques, Thèse d'État (première partie), Université Paris 7.

Assouline, J., Buzaglo, C., et Buzaglo, G. (1995). *Mathématiques 2000, secondaire 3*, mathématiques 314.

Assouline, J., Buzaglo, C., et Buzaglo G. (1995). *Mathématiques 2000.* Maths 314. Exercices, activités et résumés, résolution de problèmes. Montréal, Québec.

Audibert, G. (1994). Contribution de l'apprentissage de la géométrie à la formation scientifique. In D.F. Robitaille, D.H. Wheeler et C. Kieran (Eds.), *Choix de Conférences du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, pp. 1-17.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreuren mathématiques.* Éditions du Seuil, Paris, 307p.

Bass S. W (1905). The historical argument for teaching arithmetic, geometry and algebra together in the first year of the high school. *School Science and Mathematics*, vol. 5, p. 716.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Révue des sciences de l'éducation*, Numéro thématique: Constructivisme et éducation, vol. XX, N° 1, Montréal, Québec.

Bauersfeld, H. (1978).

Beane, J.A. (1993). Turning the floor over: Reflections on a middle school curriculum. In T. Dickinson (dir.), *Reading in middle school curriculum: A continuing conversation* (p. 193-204). Columbus, OH: National Middle School Association.

Bell, A. W. (1993). Purpose in School Algebra, Plenary paper for the Algebra Working Group of the International Congress on Mathematical Education, Québec.

Bertalanffy, (1977).

Biggs, J. (1993). «What do inventories of students' learning process really measure? A theoretical review and clarification», dans *British Journal of Educational Psychology*, 63, p. 3-19.

Biggs, J. (1987). Student Approaches to Learning and Studying, Hawthorne, Victoria: *Australian Council for Educational Research.*

Blouin, Y. (1985). La «bosse des maths»: une notion dangereuse, Montréal, pp. 43-51.

Bolibaugh, J.B. (1972). Educational Development in Guinea, Mali, Senegal and Ivory Coast. Washington, US Governemnt Printing Office.

Booth, L.R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors, Nfer-Nelson.

Breton, G. et Morand, J-C. (1996). *Carroussel mathématique 3*, troisième secondaire/ Tome 2. Centre éducatif et culturel Inc. Montréal, Québec.

Breton, G. et al. (1996). *Réflexions Mathématiques* 436, Manuel de l'élève, tome 1. Les Éditions CEC Inc., Montréal, Québec.

Breton, G. et Morand, J-C. (1995). *Carroussel mathématique 3*, troisième secondaire/ Tome 1. Centre éducatif et culturel Inc. Montréal, Québec.

Brun, J. (1996). Didactique des mathématiques, Delachaux et Niestlé, coll. «Textes de base en pégagogie».

Brun, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R, Gras, C. Laborde, P. Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, pp. 67-83.

Brun, J. (1992). À propos de la notion de synthèse de G. RICCO: Psychologie cognitive et Didactique. Constitution d'une nouvelle approche théorique concernant l'appropriation des connaissances scolaires. Inédit.

Brun, J., et Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation er Recherche*, 3, 261-286.

Brousseau, G. (1998). Téorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990), *Recherches en didactique des mathématiques*, in Balacheff, N. (Dir.), La Pensée Sauvage, Éditions.

Brousseau, G. (1991). Glossaire de didactique. Inédit transmis à la 6e école d'été de didactique des mathématiques, 3p.

Brousseau, G. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11/2.3, pp. 167-210.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, pp. 309-36.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, conférence prononcée à l'UQÀM.

Brousseau, G. (1986). *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), (p. 33-115).

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(1), p. 11-58.

Brousseau, G. L'enjeu dans une situation didactique. Actes du Colloque de Cahors pour la formation de professeurs d'école: COPIRELEM, IREM de Paris 7.

Buekenhout, F. (1992). La spirale des dérivées. Université Libre de Bruxelles. Département de Mathématiques.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. (2e édition avec un exemple de transposition didactique par Y. Chevallard et M.-A. Joshua). Grenoble: Editions de la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). «Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation», *Petit x*, n° 19, IREM d'Aix-Marseille, pp. 43-72.

Chevallard, Y. (1988). Sur l'analyse didactique. Deux études sur la notion de contrat et de situation. *Publication de l'IREM d'Aix-Marseille*, Faculté des sciences de Luminy.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: Editions de la Pensée sauvage.

Collection Inter-Africaine de Mathématiques – CIAM (1997), 4e secondaire, EDICEF.

Conne, F. (1993). Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques. In P. Jonnaert et Y. Lenoir (Eds.), *Sens des didactiques et didactique du sens* (p. 205-261). Sherbrooke: Editions du CRP, Faculté d'éducation.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(2-3), 221-270.

Conne, F., et Brun, J. (1991). Analyse de brouillons de calcul d'élèves confrontés à des items de divisions écrites. *Proceedings of PME XV.* International group for the psychology of mathematics education, Assisi, Italy, 1, 239-246.

Conne, F. (1989). Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(1). 71-115.

Conne, F. (1981). La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.

Conseil Supérieur de l'Éducation. (1991). *La profession enseignante: vers un renouvellement du contrat social* (Rapport annuel 1990-1991 sur l'état et les besoins de l'éducation. Québec: Les Publications du Québec.

De Champlain, D. et al. (1996). *Lexique Mathématique*, Enseignement Secondaire, Deuxième édition, revue et corrigée, les Éditions du Triangle d'Or inc.

Dienes, Z.P. (1967). *Les six étapes de l'apprentissage en mathématiques.* OCDL, Paris. 217 p.

Douady, R. (1987). L'ingénierie didactique, un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe, Actes du Congrès PME XI, Montréal, Juillet 1987, pp. 222-228, Ed J-C Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran.

Douady, R. (1986). «Jeux de cadres et dialectique outil-objet». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7-2, pp. 5-31.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire, Thèse d'État, Université Paris 7.

Durand, M. (1996). *L'enseignement en milieu scolaire*, Paris, Presses universitaires de France.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang.

Elliot, M. (1992). L'art d'intégrer sa recherche sur l'enseignement dans sa pratique pédagogique. Dans Holburn, P. (dir). *Devenir enseignant: D'une expérience de survie à la maîtrise d'une pratique professionnelle*. Montréal, Québec: Les éditions LOGIQUES, p. 151-164.

Feathers, K.M., et White, J.H. (1987). «Learning to learn: Case Studies of the Process», dans *Reading Research and Instruction*, vol. 26, n° 4, p. 264-274.

Filloy, E., Rojano T. (1984). «From an arithmetical to an algebraic thought (a clinical study with 12-13 year old», in *Proceedings of the 6th annual meeting of Psychology of Mathematics Education* (North American Chapter). Madison, pp. 51-56.

Filloy, E., Rojano T. (1985). «Obstructions to the acquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies», in *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Noordwijkout, pp. 154-58.

Freire, P. (1977). *Pédagogie des opprimés suivie de conscientisation et révolution*. Paris: François Maspéro. 202 p.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep blue sea. *Education studies in mathematics* (Dordrecht; Boston, Mas.), Vol. 3, N° 3/4, juin, p. 413-35.

Henderson, W.D. (1995).

Huberman, A.M., Miles, M.B. (1991). Analyse des données qualitatives, Recueil de nouvells méthodes, Bruxelles: De Bœck-Wesmaël, 480 p.

Hutchison, N.L, (1992). Former les maîtres à la résolution de problèmes: une histoire de cannibales? Dans Holburn et al. (dir.) *Devenir enseignant: À la conquête de l'identité professionnelle*. Montréal, Québec: les éditions LOGIQUES, p. 213-230.

Institut National de Recherche et d'Action Pédagogique – INRAP (1997). Commentaires des programmes de mathématiques pour le collège, in CAPL (Éd.), Octobre 1997, Conakry, Guinée.

Jacobs, H.H. (1991). Integrating the curriculum: Planning for curriculum integration. *Educational Leadership*, 49(2), 27-28.

Jovenet, G. (1996). Différences de pédagogie ou différence de schèmes? Révue Française de Pédagogie, n° 122, pp. 41-50. Julien, M. (1989-90). «Le calcul algébrique au collège – Étude d'un exemple», *Petit x*, n° 24, IREM de Grenoble, pp. 73-77.

Julien, M. (1989-90). «Le calcul algébrique au collège – Étude d'un exemple», *Petit x*, n° 24, IREM de Grenoble, pp. 73-77.

Kieran, C. (1991). *A Procedural-Structural Prescriptive on Algebra Research*, in Actes de la conférence Psychology of Mathematics Education, Furinghetti F (eds), Assise, Italie.

Kieran, C. (1983). Relationships between novice's views of algebraic letters and their use of symetric and assymetric equation-solving procedures. In J.C. Bergerson et N. Hersscovics (Eds.), *Proceedings of the Fifth Annual Meting of PME-NA*, vol. 1, pp. 161-168. Montréal, Canada: Université de Montréal.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, (pp. 317-326).

Klein, J.T. (1998). L'éducation primaire, secondaire et postsecondaire aux États-Unis: vers l'unification du discours sur l'interdisciplinarité. *Revue des Sciences de l'Éducation*: Interdisciplinarité et formation à l'enseignement primaire et secondaire. Numéro thématique, vol. xxiv, N° 1.

Kolman, B., et Shapiro, A. (1980). *Algebra for College Students.* Academic Press Inc., New York.

Kourouma, M. (1997). Une démarche de développement professionnel d'enseignants-chercheurs à l'Institut Supérieur des Sciences de l'Éducation de Guinée. Thèse de doctorat, Université de Montréal.

Kücheman, D. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), Children's Understanding of Mathematics: 11-16 (pp. 102 119). London: John Murray.

Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. In C.Gaulin, B.R. Hodgson, D.H. Wheeler et J.C. Egsgard (Eds.), *Actes du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, pp. 47-75.

Laborde, C. (1990). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), pp. 337-363.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse, Université de Grenoble.

Lacroix, B. (1970). *L'enseignement en République de Guinée.* Études Africaines du CRISP N° 116-117, Bruxelles.

Lallez, R. (1986). Amélioration de l'enseignement primaire et secondaire. Conakry, Guinée. Rapport inédit, MESRS, 65 pages.

Lemoyne, G. (2000). La formation à l'enseignement des mathématiques: quelques considérations. *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, in Blouin, P. et Gattuso, L. (Dir.), Québec.

Lemoyne, G. (1993). La quête du sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In Ph. Jonnaert et Y. Lenoir (Éds.), *Sens des didactiques et didactique du sens* (p. 263-287). Sherbrooke: Éditions du CRP, Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.

Lessard, C. (1994). La formation des enseignants en France. In «*Pour les sciences de l'éducation: Approche franco-québécoise*», Centre de coopération inter-universitaire franco-québécoise, Revue des sciences de l'éducation et INRP, pp. 159-177.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. et Boutin, G. (1990). Recherche qualitative: fondements et pratiques, Montréal, Éditions Agence d'ARC Inc.

Lewin, A. (1984). La Guinée. Paris, P.U.F (Que sais-je?)

Mercier, A. (1995). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(1), 97-142.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, n° 846, 701 p.

Merriam, S. (1988). Case study research in education, San Francisco: Jossey-Bass Publishers, 226 p.

Mialaret, G. (1987). *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, UNESCO – Delachaux & Nestlé, Lausane 1-2, 13-22.

Ministère de l'Éducation. (2001). La formation à l'enseignement – Les orientations – Les compétences professionnelles, Québec, Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique de Guinée: Direction Nationale de l'Enseignement Supérieur (1988-1992). Textes sur la restructuration de l'enseignement supérieur. Conakry, Guinée. Documents d'archives non publiés.

Ministère de l'Éducation Nationale de Guinée (1984). Réforme de l'enseignement en Guinée, Actes de la conférence nationale de l'éducation, Conakry, Mai-Juin, 1984, 321 p.

Ministère de l'Éducation Nationale de Guinée (1991). Déclaration de politique éducative, Conakry, Septembre 1991, 20 p.

Piaget, J. (1973). Introduction à l'épistémologie génétique: la pensée mathématique, 2e édition. Paris: Presses Universitaires de France.

Portugais, J. (1999). «L'intentionnalité et le cognitif», dans *Le Cognitif en didactique des mathématiques*, G. Lemoyne et F. Conne (Dir.), Montréal, Presses de l'Université de Montréal, p. 71-102.

Portugais, J. (1998). «Esquisse d'un modèle des intentions didactiques» in *Méthodes d'étude du travail de l'enseignant*, Actes des deuxièmes journées de didactique de La Fouly, Genève.

Portugais, J. et J. Brun (1998). La rupture entre la didactique et la psychopédagogie des mathématiques: une perspective historique. Communication au colloque ACFAS, Enseignement de la matière dans le contexte du travail pédagogique en classe: l'articulation didactique comme enjeu de formation, Québec. À paraître dans un collectif sous la direction de Y. Lenoir, Presses de l'Université Laval.

Portugais, J. (1996). Formation des maîtres: des conditions nécessaires et suffisantes à la théorisation des phénomènes de formation. Repères-IREM, n° 23, 109-117.

Portugais, J. (1995). Didactique des mathématiques et formation des enseignants. Berne: Lang, 312 pages.

Pressiat, A. (1996). Passage de l'arithmétique à l'algèbre ou modélisation algébrique? In Combier, Guillaume et Pressiat (Eds.) Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre. INRP, IUMFM d'Orléans-Tours.

Présidence de la République de Guinée (1991). Statut de l'Institut Supérieur des Sciences de l'Éducation de Guinée (ISSEG), Décret n° 91/147/PRG/SGG, Conakry, 16 p.

Puchalska, E et Semadeni, Z. (1998). A structural categorization of verbal problems with missing, surplus or contradictory data. In Journal für Matematik-Didaktik, vol 9-1, pp. 3-30.

Rapport Parent (1963). Rapport de la Commission Royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec: Gouvernement du Québec.

René de Cotret, S. (1995). Étude de l'influence des variables *indice de propotionnalité du thème et nombre de couples de données* sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de propotionnalité chez les élèves de 13-14 ans. Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier-Grenoble I.

Ska, B. (1983). «Quelques précisions sur l'entrevue clinique pour fin de diagnostic», dans la Revue des sciences de l'éducation, vol. IX, n° 2, pp. 267-277.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, n° 77.

Soulière, M., Thibodeau, J.-G. (1993). *Mathématiques 1re secondaire. Scénarios I.* Les Éditions HRW Ltée. Laval, Québec.

Thom, R. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. In *Pourquoi la Mathématique?* (pp. 48-59), Paris: Éditions 10/18.

Tonnelle, J. (1979). Le monde clos de la factorisation. Rapport de DEA. Université de Marseille.

Tounkara, M. (1990). Mise à l'essai d'un laboratoire de formation à L'ÉNS de Conakry. Thèse de doctorat, Université Laval.

Tounkara, M. (1984). Perspectives d'innovations pédagogiques et stratégies d'enseignement au niveau supérieur en République de Guinée. Mémoire de maîtrise, Université Laval.

Touré, M.L. (1997). *Teachers' Understanding of the Fraction and Ratio Concepts in Additive Situations: A Study with Cornell and Conakry Preservice Teachers*. Master of Science Thesis, Department of Education, Cornell University, Ithaca, New York.

Touré, M.L. (1990). Analyse de quelques erreurs rencontrées dans l'addition des fractions chez les élèves de 6e et 7e années. Diplôme de Second Cycle d'Intégration de la Recherche à la Pratique Éducative (DIRPÉ), UQÀM.

Vance, E. P. (1967). *Modern algebra and geometry*. In Addison-Wesley Series in mathematics, Massachusetts, USA.

Van der Maren, J-M. (1990). Méthodes de recherche en éducation, Montréal: Librairie de l'Université de Montréal, 455 p.

Vergnaud, G. (2000a). De Revault d'Allones à une théorie du schème aujourd'hui. Psychologie Française, 45, n° 1 (numéro spécial La Société française de psychologie a cent ans).

Vergnaud, G. (2000b). Constructivisme et psychologie des mathématiques. Colloque Constructivisme, Genève, septembre 2000.

Vergnaud, G. (1996). «Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation», in R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Fernand, Clermont-Fernand, p. 174-185.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and why? In G. Harel and J.Confrey (ed.). The Development of Multiplicative Reasoning. In th*e Learning of Mathematics*, pp. 41-59.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2-3). pp. 138-170.

Vergnaud, G (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In Kilpatrick, G. & Nesher, P. (Eds.). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*, ICMI Study series, Cambridge: Cambridge University Press, 14-30.

Vergnaud, G. (1988). Long et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, pp. 189-99, Éditions La Pensée sauvage.

Vergnaud, G. (1985). «Understanding Mathematics at the secondary level», in Bell A., Low B., Kilpatrick J., *Theory, Research and Practice in Mathematics Education*, ICME 5, Nottingham Schell Center for Mathematical Education.

Vergnaud, G. (1984). Problem Solving and Symbolism in the Development of Mathematical Concepts, *Proceedings of the eight International Conference for the Psychology of Mthematics Education*, pp. 27-38.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education. In: *For the Learning of Mathematics*, 3, n° 2, pp. 31-41.

Vergnaud, G. (1981a). Quelques orientations méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 2(2), 215-232.

Vergnaud, G. (1981b). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne: Lang.

Vergnaud, G. (1977). Activité et connaissance opératoire. Bulletin de l'APM, 307, 2, 52-65.

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation*, Paris: ESF Éditeur, 182 p.

Vygotski, L.S. (1934/1985). *Pensée et langage*. Paris, Éditions Sociales.

Walliser, B. (1977).

Zay, D. (1994). La formation des enseignants en France. In «*Pour les sciences de l'éducation: Approche franco-québécoise*», Centre de coopération inter-universitaire franco-québécoise, Revue des sciences de l'éducation et INRP, pp. 179-203.

ANNEXES

ANNEXE A

Protocole d'engagement volontaire de confidentialité des sujets

Conakry, le ... Janvier 2000

Bonjour

Dans le cadre des études de doctorat en Didactique que je poursuis à la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal, je me propose d'étudier le processus d'enseignement qui permet une lecture facile, une interprétation constructive et une utilisation significative des identités remarquables (IR). Pour pouvoir examiner un tel processus chez les futurs enseignants, je sollicite aujourd'hui ta collaboration.

Dans un premier temps, cette collaboration consistera à répondre au prétest suivi d'un questionnaire (environ 2 heures). Ce même questionnaire, qui est utilisé au début et à la fin du Séminaire, me permettra de me faire une idée de tes conceptions sur l'enseignement des IR. Dans une seconde période, ta collaboration consistera non seulement à participer au Séminaire (4 à 6 semaines), mais aussi à concevoir, réaliser et analyser des séquences d'enseignement des IR dans une classe de 9ᵉ ou 10ᵉ année. Ensuite, en acceptant de m'accorder deux entrevues (environ 1 heure chacune) et de tenir régulièrement un journal de bord (pendant environ 4 semaines), tu m'aideras à mieux comprendre tes méthodes de travail et tes commentaires concernant mon dispositif expérimental.

Ta participation te permettra de mieux connaître tes difficultés et tes forces, en ce qui concerne ta méthode d'enseignement des IR. Tout en te familiarisant avec les tuiles algébriques et les formes géométriques sur lesquelles reposent les activités de modélisation que le Séminaire te propose, cette participation te donnera l'occasion d'intégrer tes connaissances algébriques et géométriques dans un contexte de résolution de problèmes; elle te permettra aussi d'améliorer ta manière de procéder et favorisera ainsi ton développement professionnel.

Il va sans dire que les informations recueillies au cours de cette recherche sont confidentielles et qu'elles ne seront diffusées que sous forme globale et anonyme, si nécessaire.

J'ai reçu toute l'information nécessaire concernant cette recherche et j'accepte de participer:

	Oui	Non
• au prétest, suivi du questionnaire sur mes conceptions de l'enseignement des mathématiques en tant que futur enseignant	☐	☐
• au Séminaire sur l'enseignement des IR (tout en tenant régulièrement à jour mon journal de bord)	☐	☐
• aux deux entrevues sur mes séquences d'enseignement sur les IR	☐	☐
• au post-test, suivi du questionnaire sur mes conceptions des IR et de leur enseignement	☐	☐

Je sais que je pourrai me retirer de cette recherche à n'importe quel moment.

Signature	Matricule	Date

Je m'engage à respecter le caractère volontaire et confidentiel de la participation des personnes à cette recherche.

Le chercheur

ANNEXE B

Informations générales

J'aimerai tout d'abord te poser quelques questions sur toi-même (sur ta personne).

1.Quelle est ta spécialité (matière principale)?

2.Quel dilpôme (programme) es-tu en train de préparer?
1.Licence
2.Maîtrise
3.Autre (À spécifier) ....

3.Ton âge .... ans

4.Ton genre (Encercle le nombre)
1.Masculin
2.Féminin

5.Es-tu un(e) citoyen(ne) de la Guinée? (Encercle le nombre).
1.Non
2.Oui

6.Quelles langues nationales parles-tu? ....

7.Quelles langues étrangères parles-tu? ....

8.Combien de cours universitaires en mathématiques as-tu pris? (Encercle le nombre).
1.Trois ou plus (À spécifier)..
2.Quatre ou plus (À spécifier) ....
3.Cinq ou plus (À spécifier) ....

9.Quelle formation pédagogique as-tu reçue dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques? (Encercle le nombre).
1.Aucune formation pédagogique
2.Deux ou plusieurs cours (À spécifier) ....
3.Un ou plusieurs ateliers/séminaires (À spécifier) ....

10.As-tu déjà suivi des cours de didactique des mathématiques? (Encercle le nombre).
1.Non
2.Oui (À spécifier) ....

11.As-tu déjà enseigné dans un cadre formel, comme à l'école, au collège, au lycée ou à la faculté? (Encercle le nombre).
1.Non
2.Oui (À spécifier) ....

12.As-tu déjà enseigné dans un cadre informel, comme un cours d'alphabétisation pour adultes, un cours de vacances, ou un programme recréationnel? (Encercle le nombre).
1.Non
2.Oui (À spécifier) ....

13.Es-tu présentement chargé de cours pour collégiens ou lycéens; chargé de travaux pratiques (résolution de problèmes); dans le cadre du stage pratique; ou autre activité au collège, au lycée? (Encercle le nombre).
1.Non
2.Oui (À spécifier) ....

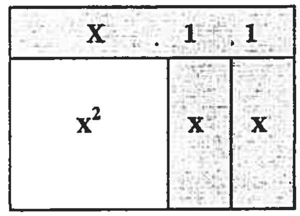
ANNEXE C

Prétest/Post-test

(Résolution de problèmes)

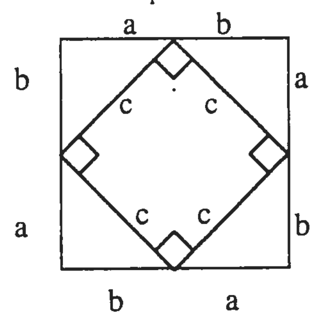
1.Dessine à main levée la forme géometrique que l'on peut faire correspondre aux polynômes suivants:
a) $P(x) = 2x^2 - x$ b) $Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

2.Donne la multiplication illustrée dans la figure ci-dessous:



a) Le produit de deux binômes peut-il être un monôme?
b) À quelles conditions le produit de deux binômes est-il un binôme?
c) À quelles conditions le produit de deux binômes est-il un quadrinôme

3.En utilisant l'aire du grand carré et celle de chacune des pièces ci-dessous, montre que $a^2 + b^2 = c^2$.

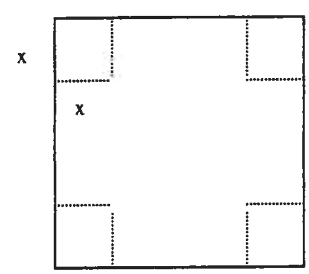


4.Voici un modèle présentant une régularité remarquable :

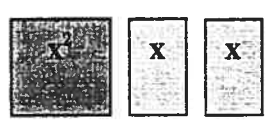
$$3^2 + 4^2 + (3 \times 4)^2 = 13^2$$
$$4^2 + 5^2 + (4 \times 5)^2 = 21^2$$
$$5^2 + 6^2 + (5 \times 6)^2 = 31^2$$

a) Ajoute deux lignes à ce modèle numérique.
b) Donne la règle qui traduit bien ce modèle.
c) Détermine trois nombres dont la somme des carrés est égale à 91^2.

5.On dispose d'un carton carré de 20 cm de côté. En enlevant des carrés aux quatres coins et en pliant le carton, on peut former une boîte sans couvercle. Quelle expression représente le volume de la boîte que l'on peut fabriquer en coupant un carré de x cm de côté à chaque coin?



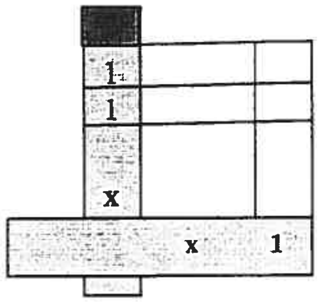
6.Voici la représentation d'un polynôme:



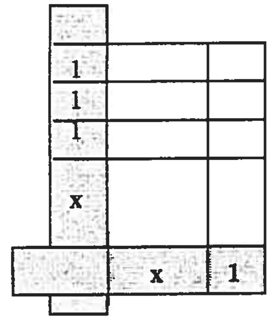
a) Quel est ce polynôme?
b) Quelles graphies algébriques représentent les dimensions du rectangle que l'on peut construire avec ces formes géométriques?

7.Dans chaque cas, donne le polynôme et ses facteurs:

a)

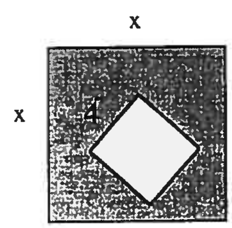


b)



8.Dans chaque cas, calcule mentalement le produit et explique comment tu t'y prends:
a) 33 x 27 b) 54 x 46 c) 68 x 72 d) 98 x 102

9.Dans un carré dont la mesure du côté est de x unités, on a construit un carré dont la mesure du côté est de 4 unités.
Détermine la graphie algébrique qui correspond à l'aire de la partie comprise entre les deux carrés (partie ombrée) et factorise cette expression.



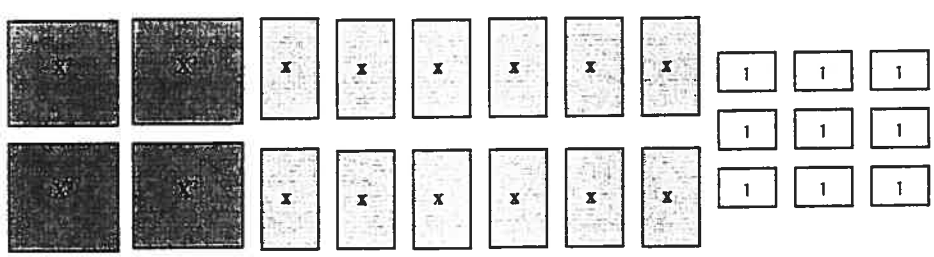
10.Pourquoi la somme de deux carrés telle que $a^2 + b^2$ ne peut-elle pas être factorisée? Quelle propriété aurait cette somme s'il était possible de la factoriser?

11.Sachant que

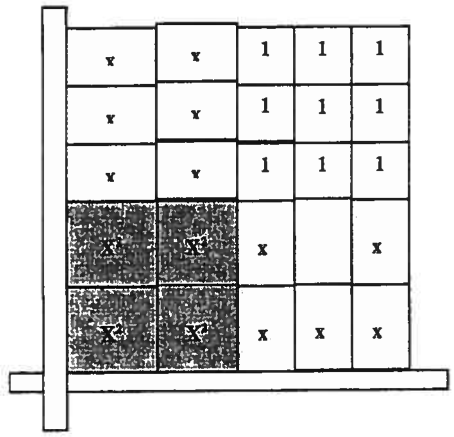
15^2	1 x 2 = 2	225
25^2	2 x 3 = 6	625
35^2	3 x 4 = 12	1225

explique comment on peut calculer rapidement (sinon mentalement) les carrés suivants:
a) 45^2 b) 55^2 c) 75^2 d) 85^2

12.Quel est le polynôme associé aux tuiles algébriques ci-dessous?



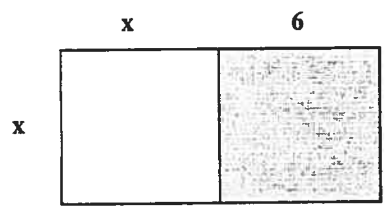
a)Quelle est la caractéristique du premier et du dernier terme de ce polynôme?
b)Quelles sont les dimensions du rectangle illustré ci-dessous?



c)Quelle est la particularité de ce rectangle?

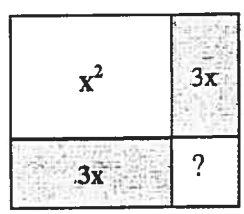
d)Quels sont les facteurs de ce polynôme?

13.Tu veux que tes élèves transforment le rectangle ci-dessous en un carré.



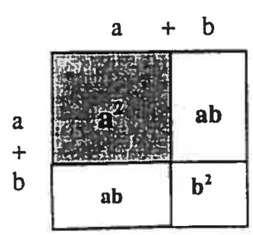
a) Comment aimerais-tu que tes élèves procèdent?

b) Dans une seconde étape, tu leur suggères d'utiliser un carton et une paire de ciseaux pour procéder au découpage du rectangle donné. En suivant cette suggestion, certains élèves en arrivent à ceci:



c)Quelle est l'aire de la partie manquante?

14.Suppose que dans le village où tu passes tes grandes vacances tu te fais un(e) ami(e) qui n'a pas encore étudié les identités remarquables, mais qui peut comprendre que la figure suivante correspond à la graphie de $(a + b)(a +b)$ ou $(a + b)^2$.



a)En procédant de cette manière, dessine les modèles géométriques qui correspondent aux expressions suivantes:

(i) $(a - b)(a - b)$ (ii) $(a + b)(a - b)$ (iii) $(a + b + c)^2$

b)Explique en des termes accessibles à ce jeune ou à cette jeune amie comment, par exemple, a-t-on, de cette façon, l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

c)Que lui dirais-tu au sujet de l'intérêt qu'il y a d'apprendre les IR? (Quels exemples d'utilisation des IR dans les activités de tous les jours peux-tu lui donner?)

d)En quoi la connaissance des IR peut-elle aider ton ami(e) dans l'apprentissage des mathématiques?

À présent, dis-moi ce que tu éprouves face aux problèmes que tu viens de résoudre. Encercle la catégorie qui reflète le mieux ton opinion.

	Très Vrai (TV)	Vrai (V)	Ne sais pas (NSP)	Pas Vrai (PV)	Pas du tout vrai (PDTV)
1.J'avais l'impression qu'il y avait une barrière que je ne pouvais pas franchir	TV	V	NSP	PV	PDTV
2.Au début, j'avais l'impression d'être devant un trou.	TV	V	NSP	PV	PDTV
3.Quand je trouvais la (bonne) solution, j'en étais tout heureux.	TV	V	NSP	PV	PDTV
4.Lorsque je ne trouvais pas la solution, je me sentais comme vaincu.	TV	V	NSP	PV	PDTV

À présent, dis-moi ce que tu penses des mathématiques. Encercle la catégorie qui décrit le mieux ton opinion.

Pour moi, faire des mathématiques ...

5.c'est important;	TV	V	NSP	PV	PDTV
6.cela ne représente rien, c'est un casse-tête;	TV	V	NSP	PV	PDTV
7.c'est faire quelque chose qu'on te ditde faire et qu'on fait presque automatiquement si l'on connaît les formules;	TV	V	NSP	PV	PDTV
8.c'est faire quelque chose qui paraît "infaisable";	TV	V	NSP	PV	PDTV
9.c'est une façon de discipliner mon esprit	TV	V	NSP	PV	PDTV

ANNEXE D

Ce que je pense de l'enseignement des mathématiques en tant que futur enseignant

Cette section du questionnaire a trait à ton comportement, en tant que futur enseignant. En répondant à chacun des énoncés suivants, encercle la réponse qui reflète le mieux ton vrai comportement.

	Jamais (J)	Rarement (R)	Quelques fois (QF)	Fréquemment (F)	Presque toujours (PT)
1.Je fais l'exposé magistral pendant tout le temps alloué au cours.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
2.Je favorise la discussion en petits groupes.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
3.Je réserve au moins 15 minutes du cours aux questions des élèves.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
4.J'assigne aux élèves la responsabilité de diriger les discussions.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
5.J'organise la leçon autour des activités que les élèves réalisent eux-mêmes.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
6.J'utilise des situations d'intégration des connaissances (algébriques et géométriques) pour construire le sens.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
7.J'utilise des activités basées sur le brainstorming (remue-méninge).	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
8.J'organise les discussions dans lesquelles je m' implique activement.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
9.Je partage le temps du cours entre mon exposé et les questions des élèves.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
10.Je fais des démonstrations (formelles) pour illustrer les concepts.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
11.Je dispense le cours avec un support audio-visuel, mais sans discussion en classe.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
12.Je fais jouer des rôles aux élèves pour illustrer le cours et encourager la discussion.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)

À présent, je veux que tu imagines ce que tu considères comme un enseignement idéal (parfait). Cela signifie que tu disposes de toutes les ressources nécessaires pour enseigner ce que tu veux à un groupe d'élèves, tous désireux d'apprendre (tu peux même décider du nombre d'élèves que tu aimerais avoir dans ta classe). Encercle la catégorie qui réflète le mieux tes idées sur une telle situation idéale.

13. Fais un exposé (magistral) pour toute la durée de la leçon.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
14. Présente la leçon à l'aide d'un support audio-visuel (diapositives, rétroprojecteur), mais sans discussion.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
15. Fais un exposé (magistral) en réservant au moins 15 minutes aux questions posées par les élèves.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
16. Utilise la plus grande fraction du temps pour faire des démonstrations.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
17. Consacre une partie de l'exposé à l'information relative aux devoirs et activités que je dévolue aux élèves.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
18. Divise le temps de la leçon en deux moitiés: l'une pour l'exposé, l'autre pour lesquestions des élèves.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
19. Organise des discussions dans lesquelles je m'implique fortement.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
20. Organise des activités de brainstorming.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
21. Répartis les élèves en petits groupes autour de questions spécifiques.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
22. Organise la classe autour des activités d'intégration des connaissances (algébriques et géométriques).	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)
23. Assigne aux élèves la responsabilité de diriger les discussions.	(J)	(R)	(QF)	(F)	(PT)

Laquelle des méthodes ci-dessus (13 - 23) serait plus importante pour toi, dans ta situation idéale d'enseignement? (Place le numéro de l'item dans la ligne appropriée).

24.__________ est la plus efficace.
25.__________ est vraiment efficace.
26.__________ est efficace.

J'aimerai, enfin, connaître ton opinion sur les questions suivantes. Tu peux utiliser l'espace prévu et ajouter des pages supplémentaires, en cas de besoin.

1.Comment as-tu trouvé le fait d'être interviewé et de travailler avec moi?

2.As-tu trouvé le questionnaire facile ou difficile à comprendre? Y a-t-il eu des questions qui ont été particulièrement difficiles ou déroutantes (À spécifier)?

3.As-tu aimé résoudre ces problèmes? Aimerais-tu travailler de cette façon une autre fois?

4.Quelles suggestions aimerais-tu faire sur l'ensemble des problèmes proposés? Ajoute tout autre commentaire que tu juges utile.

ANNEXE E

Journal de bord

Enseignement des identités remarquables (IR):
mes activités pédagogiques et didactiques

Le but de cette recherche est d'explorer la façon dont les futurs enseignants conçoivent, réalisent et analysent des séquences d'enseignement des identités remarquables (IR). Toutes les informations que tu me fournis sont bonnes, pourvu qu'elles soient fidèles à la réalité. Je ne porte aucun jugement sur la qualité de ce que tu écris dans le journal de bord; il est donc inutile de s'auto-censurer.

Guide pour compléter le Journal de bord

En tenant régulièrement ce journal, tu m'aides à mieux comprendre ta façon personnelle de concevoir et de conduire tes activités d'enseignement des IR. Ce qui m'intéresse réellement, ce sont tes comportements habituels - que tu n'as pas besoin de changer - qui m'aideront à mieux comprendre comment les futurs enseignants, comme toi, s'y prennent en situation d'enseignement dans un contexte d'intégration de leurs connaissances. Je tiens à te rappeler que toutes les informations que tu me fourniras sont confidentielles.

Consignes:

- Remplir le journal de bord pour toute la durée de l'étude.
- Remplir au moins une page du journal de bord, à chaque fois que tu fais un travail (conception, activités, analyse, prise de décision, etc.), même s'il ne s'agit que d'une très courte période d'activité.
- Continuer sur la page suivante au cas où tu manques de place pour une rubrique donnée. (N'hésite surtout pas à utiliser autant de pages qu'il t'en faut).
- Si les explications sur les renseignements à fournir ne sont pas assez claires, ou pour toute autre information, ne te gêne pas de communiquer avec moi à l'ISSEG (.....................) ou à l'UGANC (....................), sans attendre.

Le but de cette recherche est d'explorer la façon dont les futurs enseignants conçoivent, réalisent et analysent des séquences d'enseignement des identités remarquables (IR). Toutes les informations que tu me fournis sont bonnes, pourvu qu'elles soient fidèles à la réalité. Je ne porte aucun jugement sur la qualité de ce que tu écris dans le journal de bord; il est donc inutile de s'auto-censurer.

1.Comment t'y es-tu pris ou prise pour concevoir les activités d'enseignement des identités remarquables (IR), c'est-à-dire toutes idées ou actions que tu utilises pour choisir, organiser et contrôler le contenu, le matériel (tous les objets si petits soient-ils) et les autre ressources?

2.En cours de route, quels moyens prends-tu pour vérifier ou évaluer tes actions et leur efficacité; pour poursuivre, modifier ou abandonner ce que tu fais?

3.Quelles activités d'enseignement as-tu réalisées? Il s'agit des leçons que tu as dispensées, des devoirs que tu as fait effectuer par des élèves, et des activités que tu as planifiées pour faciliter l'apprentissage des IR.

Note : Cette page et les suivantes se répètent dix fois dans le cahier fourni aux sujets pour ce journal de bord.

4.Comment (de quelle manière) as-tu réalisé ces activités? Quelles stratégies, c'est-à-dire quels moyens as-tu pris pour conduire ces activités?

5.Quels facteurs ou pensées ont exercé une influence sur tes activités d'enseignement (motivation, confiance en soi, ou toute attitude favorable ou défavorable à ta concentration et à ta persistance lors de ces activités)?

6.S'est-il produit des évènements inhabituels qui ont influencé tes activités d'enseignement?

7.Quelles sont les difficultés que tu as rencontrées en réalisant tes activités d'enseignement?

8.Quels sont les problèmes particuliers que tu as rencontrés en tenant régulièrement ce journal de bord?

9.As-tu d'autres commentaires ou suggestions concernant l'étude à laquelle tu as bien voulu participer?

Appendice F

Protocole des entrevues

Enseignement des identités remarquables (IR): dispositif de formation de futurs enseignants - protocole des entrevues

1. Préambule

- Expliquer le but de l'entrevue: étudier la façon dont le formé conçoit, réalise et analyse des séquences d'enseignement des IR. Souligner l'importance des réponses sincères et exactes.
- Rassurer le formé du caractère confidentiel de l'entrevue et du traitement anonyme des renseignements fournis ainsi que de la diffusion des résultats.
- Expliquer comment se déroule l'entrevue.

2. L'entrevue proprement dite

Avant de commencer l'entrevue, faire un survol du journal de bord et entamer l'entrevue à partir de ce qui y est consigné. Poursuivre le questionnement et le centrer de façon à faire revivre la séquence ou l'activité par le formé.

A. Organisation de la séquence d'enseignement

- Quel type d'activités d'enseignement des IR as-tu fait?
- Comment as-tu organisé tes activités ou tes séquences d'enseignement des IR?
- Quand as-tu commencé à les organiser: tout de suite après le Séminaire? Au jour le jour? Quelques jours avant ton tour d'enseigner?
- Dans quelles conditions as-tu organisé tes séquences? Seul ou avec d'autres?
- Combien de temps cela t'a pris? As-tu travaillé pendant les périodes courtes et fréquentes, ou plutôt rares mais longues?
- As-tu planifié d'avance tes activités? As-tu revu la leçon avant de commencer? Quel objectif précis t'es-tu fixé à chaque période de préparation ou d'enseignement?

Synthèse: Faire une synthèse de tout ce que le formé a dit, lui demander de confirmer (à haute voix) ses déclarations et de les compléter.

B. Déroulement de la séquence

- Après avoir choisi quoi enseigner sur les IR et après avoir décidé comment faire pendant une séquence, comment t'y es-tu pris?
- Par quoi as-tu commencé? As-tu exposé la théorie ou t'es-tu limité à faire résoudre des exercices seulement?
- Comment as-tu enseigné les notions plus théoriques sur les IR?
- Quelles activités as-tu proposé et comment as-tu procédé pour intégrer les connaissances (algébriques et géométriques)?
- Comment as-tu procédé pour faire résoudre les exercices et problèmes?
- Comment t'es-tu servi de tes documents? As-tu fait construire des modèles géométriques? Qu'as-tu fait lorsque les élèves ne réussissaient pas un exercice ou un problème? Leur as-tu demandé d'apprendre des choses par cœur?
- Leur as-tu fait prendre des notes de cours? Leur en as-tu fait prendre pour les devoirs? Comment les as-tu amenés à s'en servir?
- As-tu fait résoudre tous les exercices? Dans quel ordre? Sur quoi t'es-tu basé pour faire un choix? As-tu d'avance essayé de résoudre ces exercices?
- As-tu pris en note les exercices et problèmes que les élèves n'ont pas réussi? Y es-tu revenu?
- Comment t'es-tu servi des modèles géométriques pour enseigner les IR? Comment les as-tu introduits? En quoi les élèves les ont-ils trouvé intéressants? Quelles difficultés as-tu noté dans leur utilisation par les élèves?

Synthèse: Faire une synthèse de tout ce que le formé a dit, lui demader de confirmer ses déclarations (à haute voix) et de les compléter.

C. Analyse de la séquence

- Comment as-tu su que tu avais conçu et réalisé une assez bonne séquence d'enseignement des IR? Comment as-tu évalué la compréhension chez tes élèves?
- As-tu fait résoudre des exercices et problèmes supplémentaires?
- Qu'as-tu fait lorsqu'un élève ne comprenait pas? As-tu posé à cet élève une série de questions ou lui as-tu proposé une série d'activités qui l'ont amené à trouver lui-même la solution? L'as-tu fait venir au tableau pour s'y exercer? Comment as-tu encouragé

tes élèves à te poser souvent des questions? Comment tu t'y es pris avec les questions difficiles?

- Comment as-tu évalué la capacité des élèves à intégrer leurs connaissances sur les IR?
- Comment savais-tu que les élèves avaient bien aimé travailler avec les modèles géométriques et qu'ils avaient eux-mêmes découvert les limites de ces modèles?

Synthèse: Faire une synthèse de tout ce que le formé a dit, lui demander de confirmer (à haute voix) ses déclarations et de les compléter.

D. Évaluation et préparation des items

- Comment t'es-tu pris pour évaluer les apprentissages? Sur quoi porte essentiellement cette évaluation? Sur quoi t'es-tu basé pour élaborer les items?
- As-tu réservé du temps pour faire réviser les élèves avant le test d'évaluation? Combien? Quand?
- Leur as-tu posé des questions semblables à celles du test? Qu'as-tu fait réviser: tous les exercices? le résumé de la théorie? Ou as-tu répondu aux différentes questions posées sur les parties non comprises?
- Après l'évaluation, étais-tu intéressé à savoir comment (avec quelles difficultés) les élèves avaient abordé les problèmes qu'ils n'avaient pas réussi? As-tu fait expliquer ces problèmes par ceux qui les avaient réussi? Ou les as-tu refait toi-même?

Synthèse: Faire une synthèse de tout ce que le formé a dit, lui demander de confirmer (à haute voix) ses déclarations et de les compléter.

3. Clôture

- Faire un retour sur le déroulement de l'entrevue elle-même. Demander au formé comment il a vecu l'entrevue. Le remercier de sa collaboration.
- Rappeler la suite de la recherche. Prendre et noter les rendez-vous. Expliquer encore ce qui doit être consigné dans le journal de bord. Faire un rappel des critères de sincérité et d'exactitude des réponses. Assurer de nouveau le formé du caractère confidentiel de l'entrevue et du traitement anonyme des données.
- Au besoin, répondre aux questions du formé sur les notions mathématiques.