Université de Montréal

Sur une classe de structures kählériennes généralisées toriques

par

Laurence Boulanger

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques

30 avril 2015

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Sur une classe de structures kählériennes généralisées toriques

présentée par

Laurence Boulanger

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea
(président-rapporteur)

Vestislav Apostolov
(directeur de recherche)

François Lalonde
(codirecteur)

Frédéric Rochon
(membre du jury)

Marco Gualtieri
(examinateur externe)

Octav Cornea
(représentant du doyen de la FAS)

Thèse acceptée le

RÉSUMÉ

Cette thèse concerne le problème de trouver une notion naturelle de «courbure scalaire» en géométrie kählérienne généralisée. L'approche utilisée consiste à calculer l'application moment pour l'action du groupe des difféomorphismes hamiltoniens sur l'espace des structures kählériennes généralisées de type symplectique. En effet, il est bien connu que l'application moment pour la restriction de cette action aux structures kählériennes s'identifie à la courbure scalaire riemannienne. On se limite à une certaine classe de structure kählériennes généralisées sur les variétés toriques notée $DGK_{\omega}^{\mathbb{T}}(M)$ que l'on reconnaît comme étant classifiées par la donnée d'une matrice antisymétrique C et d'une fonction réelle strictement convexe τ (ayant un comportement adéquat au voisinage de la frontière du polytope moment). Ce point de vue rend évident le fait que toute structure kählérienne torique peut être déformée en un élément non kählérien de $DGK_{\omega}^{\mathbb{T}}(M)$, et on note que cette déformation à lieu le long d'une des classes que R. Goto a démontré comme étant libre d'obstruction. On identifie des conditions suffisantes sur une paire (τ, C) pour qu'elle donne lieu à un élément de $DGK_{\omega}^{\mathbb{T}}(M)$ et on montre qu'en dimension 4, ces conditions sont également nécessaires. Suivant l'adage «l'application moment est la courbure» mentionné ci-haut, des formules pour des notions de «courbure scalaire hermitienne généralisée» et de «courbure scalaire riemannienne généralisée» (en dimension 4) sont obtenues en termes de la fonction τ. Enfin, une expression de la courbure scalaire riemannienne généralisée en termes de la structure bihermitienne sous-jacente est dégagée en dimension 4. Lorsque comparée avec le résultat des physiciens Coimbra et al., notre formule suggère un choix canonique pour le dilaton de leur théorie.

Mots clés : Géométrie kählérienne généralisée, géométrie torique, courbure scalaire.

ABSTRACT

This thesis is about the problem of finding a natural notion of "scalar curvature" in generalized Kähler geometry. The approach taken here is to compute the moment map for the action of the group of hamiltonian diffeomorphisms on the space of generalized Kähler structures of symplectic type. Indeed, it is well known that the moment map for the restriction of this action to the space of ordinary Kähler structures can be naturally identified with the riemannian scalar curvature. We concern ourselves only with a certain class of generalized Kähler structures on toric manifolds which we denote by $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ and which we recognize as being classified by the data of an antisymetric matrix C and a real-valued strictly convex functions τ (exhibiting appropriate behavior on a neighborhood of the boundary of the moment polytope). This viewpoint makes obvious the fact that any toric Kähler structure can be deformed to a non-Kähler element of $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, and we note that this deformation happens along one of the classes which were shown by R. Goto to be unobstructed. We identify sufficient conditions on a pair (τ, C) for it to define an element of $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ and we show that in dimension 4, these conditions are also necessary. Following the adage "the moment map is the curvature" mentioned above, formulas for notions of "generalized Hermitian scalar curvature" and "generalized Riemannian scalar curvature" (in dimension 4) are obtained in terms of the function τ. Finally, an expression for the generalized Riemannian scalar curvature in terms of the underlying bi-Hermitian structure is found in dimension 4. When compared with the results of the physicists Coimbra et al., our formula suggests a canonical choice for the dilaton of their theory.

Key words : Generalized Kähler geometry, toric geometry, scalar curvature.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je remercie avant tout Vestislav Apostolov qui fut pour moi un directeur de thèse exceptionnel, toujours disponible et tellement généreux de son temps et de ses idées.

Je tiens également à remercier mon co-directeur François Lalonde pour son support ainsi que les gens qui travaillent au département, Anne-Marie, Émilie, Julie, Lynn, etc., qui font un si bon travail et qu'il est si agréable de cotoyer.

Merci à Paul Gauduchon pour avoir partagé avec moi certaines de ses notes personelles et merci à Octav Cornea, Frédéric Rochon et Marco Gualtieri pour avoir accepté d'être membre du jury pour cette thèse. Je suis particulièrement reconnaissant envers Marco Gualtieri pour ses commentaires ayant permis d'améliorer la présentation de cette thèse.

J'aimerais également exprimer ma gratitude envers les membres de ma famille et particulièrement Jacinthe de s'être accommodés de moi durant toutes ces années d'études.

INTRODUCTION

Pour une variété symplectique compacte (M, ω), l'espace $AK_\omega(M)$ des structures presque-complexes ω-compatibles, vu formellement comme variété de Fréchet, admet une structure symplectique naturelle. Il est connu [**19, 23**] que le groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ des difféomorphismes hamiltoniens agit de façon hamiltonienne sur $AK_\omega(M)$ avec application moment identifiée à la courbure scalaire hermitienne. On peut considérer $AK_\omega(M)$ comme sous-variété symplectique de l'espace $AGK_\omega(M)$ des structures presque-kählériennes généralisées de type symplectique, et l'action de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ sur $AK_\omega(M)$ comme la restriction d'une action sur $AGK_\omega(M)$. Le but de cette thèse est de calculer l'application moment pour cette action, le résultat pouvant être interprété comme la "courbure scalaire" d'une structure kählérienne généralisée. Pour ce faire, on se restreint aux variétés symplectiques toriques (avec l'action du groupe $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M, \omega)$ des difféomorphismes hamiltoniens qui commutent avec l'action du tore) où S. K. Donaldson montre [**20**], dans le cas presque-kähler, comment calculer l'application moment en coordonnées symplectiques. Nos calculs se résument dans les résultats suivants :

(1) Sur une variété symplectique torique $(M, \omega, \mathbb{T})$, l'espace $GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ des structures kählériennes généralisées de type symplectiques peut être identifiées à l'ensemble des structures complexes $\mathbb{T}$-invariantes qui dominent ω pour lesquelles le dual symplectique J^{*_ω} est intégrable [**22**]). On considère une sous-classe $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ de $GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ qui généralise la condition kählérienne $J = -J^{*_\omega}$ en demandant que $J\mathcal{K} = J^{*_\omega}\mathcal{K}$ pour $\mathcal{K}$ la distribution isotrope engendrée par l'action infinitésimale de $\mathbb{T}$. On montre (Théorème 3.1.1) que les éléments de $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ sont paramétrés par une fonction strictement convexe τ définie sur l'intérieur du polytope moment et une matrice antisymétrique constante C. Ceci est une généralisation directe de la notion de potentiel symplectique découverte par Guillemin [**36**], [**37**] dans le cas kählérien. On identifie des conditions nécessaires sur les données (τ, C)

pour que l'élément de $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(\mathring{M})$ correspondant admette un prolongement à M (Théorème 3.2.1) et on utilise ce résultat pour montrer comment déformer n'importe quelle structure kählérienne torique en un élément de $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)\backslash K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ (Corollaire 3.2.1). Cette correspondance peut être vue comme une version *explicite*, dans le cas spécial d'une variété kählérienne torique, d'un théorème récent de R. Goto [**30**] sur l'existence d'une déformation d'une structure kählérienne généralisée dans la direction d'une structure de Poisson holomorphe. Dans notre cas, cette dernière est identifiée à $2\sum_{i<j} C_{ij} K_i^{1,0} \wedge K_j^{1,0}$, où $K_1, \dots, K_m \in C^\infty(\mathcal{K})$ sont des générateurs de l'action holomorphe du tore. On montre qu'en dimension 4, les conditions suffisantes du Théorème 3.2.1 sont également nécéssaires (Théorème 3.3.2) et en cours de route on observe qu'à tout élément de $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ correspond naturellement un élément de $K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$.

(2) Après avoir identifié l'ensemble des structures presque-kählériennes généralisées de type symplectique avec un certain espace d'endomorphismes complexes, on utilise nos résultats dans le cas torique pour calculer, par la méthode de S. K. Donaldson [**20**], l'application moment pour l'action de $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ sur $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ en dimension 4 (Théorème 3.4.2), et pour l'action d'un sous-groupe normal pour l'action de $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ en dimension arbitraire (Théorème 3.4.1). On identifie ces applications moment à des notions de "courbure scalaire généralisée" et "courbure scalaire hermitienne généralisée" respectivement (Définition 3.4.1).

(3) Au dernier chapitre, on établit un lien entre la courbure scalaire généralisée à les différentes notions de courbure scalaire de la structure bihermitienne sous-jacente (Théorème 4.3.1). Par comparaison avec nos calculs précédant, ceci nous permet d'obtenir une expression fermée pour la courbure scalaire généralisée (Corollaire 4.3.1). Notre résultat confirme la forme de la courbure scalaire suggérée dans [**15**] et donne une valeur exacte au dilaton ϕ en termes de l'angle entre les structures complexes de la structure bihermitienne sous-jacente.

Chapitre 1

GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE GÉNÉRALISÉE

Les deux premières sections de ce chapitre se veulent un survol de certains faits et résultats de base concernant les structures complexes et kählériennes généralisées. Nous suivons essentiellement l'exposition dans [**32**]. Dans la troisième section, nous étudions un type particulier de structures kählériennes généralisées que l'on exprime en termes d'endomorphismes du fibré tangent.

Dans toute cette thèse, les notations et conventions suivantes sont en vigueur.

Notation 1.0.1. Soient M, N deux variétés lisses et $\varphi : M \to N$ un difféomorphisme. Pour tout tenseur T sur M, notons par $\varphi \cdot T$ l'action naturelle de φ sur T.

Convention 1.0.1. *Pour une application linéaire $A : V \to W$, son dual $A^* : W^* \to V^*$ agit par $A^*\xi = -\xi \circ A$. Avec cette convention, une forme bilinéaire vue comme application $\beta : V \to V^*$ est symétrique si $\beta^* = -\beta$ et antisymétrique si $\beta^* = \beta$. En particulier, pour J une structure presque-complexe sur une variété M, $\Lambda^{1,0}M$ représente le fibré en espaces propres associés à la valeur propre $-i$ de J^* et $\Lambda^{0,1}M$ représente celui correspondant à i. De même, avec cette convention, on a $d^c = JdJ^{-1}$, et pour $\psi \in \Omega^p(M)$, $J\psi = (-1)^p\psi(J\cdot, \dots, J\cdot)$.*

Soit M une variété lisse de dimension n. Le fibré $TM \oplus T^*M$ est muni de la forme quadratique naturelle $(X, \xi) \mapsto \xi(X)$ et le produit scalaire correspondant

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X))$$

est de signature (n, n).

Définition 1.1.1 ([**41**]). *Une* **structure presque-complexe généralisée** *sur M est un automorphisme $\mathcal{J}$ de $TM \oplus TM^*$ tel que $\mathcal{J}^2 = -Id$ et $\langle \mathcal{J}\cdot, \mathcal{J}\cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Ces conditions imposent que par rapport à la décomposition $TM \oplus T^*M$, une structure presque-complexe généralisée est de la forme

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & \pi \\ \beta & A^* \end{pmatrix}, \tag{1.1.1}$$

où

$$\begin{aligned} \pi^* &= \pi, \\ \beta^* &= \beta \\ A^2 + \pi\beta &= -\mathrm{Id}, \\ A\pi + \pi A^* &= 0, \\ \beta A + A^*\beta &= 0. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Les deux premières équations disent que β et π sont antisymétriques par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De plus, une structure presque-complexe généralisée ne peut exister que sur une variété de dimension paire.

Notation 1.1.1. Dans tout le reste de ce chapitre, M est une variété lisse de dimension $n = 2m$.

Exemple 1.1.1. Soit J une structure presque-complexe et ω une forme presque-symplectique sur M. Alors

$$\mathcal{J}_J := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_\omega := \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

sont des structures presque-complexes généralisées.

Il y a une notion naturelle d'intégrabilité pour ces structures qui consiste à les voir comme structures de Dirac [**16**] et appliquer la notion d'intégrabilité de T. Courant et A. Weinstein [**17**] :

Définition 1.1.2. *Une structure presque-complexe généralisée* $\mathcal{J}$ *est dite* **intégrable** *si le* $(+i)$*-sous-fibré propre* $L \subset (TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ *de sa complexification est involutif par rapport au* **crochet de Courant**

$$[X + \xi, Y + \eta]_C = [X, Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}d(\iota_X\eta - \iota_Y\xi).$$

Alternativement, la condition d'intégrabilité est équivalente à ce que le **tenseur de Nijenhuis-Courant** *de* $\mathcal{J}$

$$\mathrm{Nij}_{\mathcal{J}}(U, V) := [\mathcal{J}U, \mathcal{J}V]_C - \mathcal{J}[\mathcal{J}U, V]_C - \mathcal{J}[U, \mathcal{J}V]_C - [U, V]_C$$

s'annule pour toute section $U, V \in C^\infty(TM \oplus T^*M)$*. Dans ce cas, on parle simplement de* **structure complexe généralisée**.

Remarque 1.1.1. Le crochet de Courant vérifie l'identité suivante :

$$[U, fV]_C = df(U_{TM})V + f[U, V]_C - \langle U, V\rangle df, \quad \forall U, V \in C^\infty(TM \oplus T^*M),$$

où U_{TM} est la composante vectorielle de U.

Exemple 1.1.2. L'intégrabilité de la structure presque-complexe généralisée $\mathcal{J}_J$ de l'Exemple 1.1.1 est équivalente à l'intégrabilité de la structure presque-complexe J sous-jacente. En effet, le $(+i)$-sous-fibré propre de $\mathcal{J}_J$ est

$$L_J = T^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M.$$

Clairement, si L_J est Courant-involutif, alors $T^{1,0}M$ est Lie-involutif, ce qui équivaut à l'intégrabilité de J. Réciproquement, si J est intégrable, alors pour $X+\xi, Y+\eta \in C^\infty(T^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M)$, la formule de Cartan ainsi que $\iota_X\eta = \iota_Y\xi = 0$ permettent d'écrire

$$[X + \xi, Y + \eta]_C = [X, Y] + \iota_X d\eta - \iota_Y d\xi.$$

Mais comme J est intégrable, $d\xi, d\eta \in \Lambda^{1,1}M \oplus \Lambda^{0,2}M$, donc $\iota_X d\eta - \iota_Y d\xi \in \Lambda^{0,1}M$.

Exemple 1.1.3. L'intégrabilité de la structure presque-complexe généralisée $\mathcal{J}_\omega$ de l'Exemple 1.1.1 est équivalente à l'intégrabilité de la structure presque-symplectique ω sous-jacente (i.e. $d\omega = 0$). En effet, le $(+i)$-sous-fibré propre de $\mathcal{J}_\omega$ est

$$L_\omega = \{X - i\iota_X\omega \mid X \in TM \otimes \mathbb{C}\}.$$

On voit que L_ω est Courant-involutif si et seulement si

$$[X - i\iota_X\omega, Y - i\iota_Y\omega]_C = [X, Y] - i\iota_{[X,Y]}\omega \quad \forall X, Y \in TM \otimes \mathbb{C}.$$

On calcule

$$[X - i\iota_X\omega, Y - i\iota_Y\omega]_C = [X, Y] - i(\mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \mathcal{L}_Y\iota_X\omega - d\iota_X\iota_Y\omega).$$

Utilisant l'identité $[\mathcal{L}_X \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$ sur $\mathcal{L}_X \iota_Y \omega$, on obtient

$$[X - i\iota_X\omega, Y - i\iota_Y\omega]_C = [X,Y] - i\iota_{[X,Y]}\omega - i(\iota_Y\mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_Y\iota_X\omega - d\iota_x\iota_Y\omega).$$

Finalement, la formule de Cartan sur le dernier terme nous laisse avec

$$[X - i\iota_X\omega, Y - i\iota_Y\omega]_C = [X,Y] - i\iota_{[X,Y]}\omega - id\omega(X,Y),$$

d'où la conclusion.

Exemple 1.1.4 ([**39**], [**34**])**.** Si on prend $\beta = 0$ dans (1.1.1), les conditions (1.1.2) imposent que $\mathcal{J}$ est de la forme

$$\mathcal{J}_{J,\pi} := \begin{pmatrix} J & \pi \\ 0 & J^* \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

pour une structure presque-complexe J et un bivecteur J^*-anti-invariant $\pi \in C^\infty(\bigwedge^2 TM)$ (i.e. de type $(2,0)+(0,2)$). Posons

$$\sigma := 2\pi^{2,0}, \tag{1.1.4}$$

ou, ce qui est équivalent, $\sigma = \pi - iJ\pi$. L'intégrabilité de $\mathcal{J}_{J,\pi}$ équivaut à ce que J est intégrable et σ est une structure de Poisson holomorphe [1]. Le $(+i)$-sous-fibré propre de $\mathcal{J}_{J,\pi}$ est

$$L_{J,\pi} = \{Z - \tfrac{i}{4}\overline{\sigma}(\alpha) + \alpha \mid Z \in T^{1,0}M, \alpha \in \Lambda^{0,1}M\}.$$

Remarque 1.1.2. (1) Les structures complexes généralisées de la forme (1.1.3) jouent un rôle important dans la théorie. Par exemple, R. Goto à montré [**31**] que sur une variété kählérienne compacte (M,ω,J) admettant une structure de Poisson holomorphe $\sigma = 2\pi^{2,0}$, la structure complexe généralisée «triviale» $\mathcal{J}_\omega$ peut être déformée. Plus précisément ([**43**] Theorem 8), si on déforme la structure complexe généralisée de type complexe $\mathcal{J}_J$ en la structure de type Poisson holomorphe $\mathcal{J}_{J,t\pi}$ $(t \in \mathbb{R})$, alors il existe une déformation $\mathcal{J}^t_\omega$ de $\mathcal{J}_\omega$ telle que la paire $(\mathcal{J}^t_\omega, \mathcal{J}_{J,t\pi})$ est kählerienne généralisée (cf. Définition 1.2.1). Voir aussi la Remarque 1.1.3.

(2) De façon générale, pour toute structure complexe généralisée de la forme (1.1.1), le bivecteur π est une structure de Poisson [**34**].

Si $\mathcal{J}$ est une structure complexe généralisée et si $\Phi \in O(TM \oplus T^*M)$ (un automorphisme orthogonal par rapport au produit scalaire naturel sur $TM \oplus T^*M$)

1. Une **structure de Poisson holomorphe** sur une variété complexe est une section holomorphe σ de $\bigwedge^2(T^{1,0}M)$ telle que $[\sigma,\sigma] = 0$ pour le crochet de Schouten-Nijenhuis [**58**].

préserve le crochet de Courant, alors $\Phi\mathcal{J}\Phi^{-1}$ est également une structure complexe généralisée. Toute 2-forme $B \in \Omega^2(M)$ induit un automorphisme antisymétrique $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ de $TM \oplus T^*M$. Clairement, $B^2 = 0$, donc son image par l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{o}(TM \oplus T^*M) \to O(TM \oplus T^*M)$, appelée **transformation de type B**, est simplement $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul identique à celui fait à l'Exemple 1.1.3 révèle que

$$[e^B(X+\xi), e^B(Y+\eta)]_C = e^B[X+\xi, Y+\eta]_C + dB(X,Y),$$

avec la conclusion que e^B **préserve le crochet de Courant si et seulement si** $dB = 0$. De plus, modulo les symétries provenant d'un difféomorphisme de la base (i.e. $f_* \oplus (f^{-1})^* \in O(TM \oplus T^*M)$ pour $f \in \mathrm{Diff}(M)$), les seules symétries orthogonales du crochet de Courant sont les transformations de type B pour B fermée. Étant donnée la relation $f_* \circ e^B = e^{(f^{-1})^*B} \circ f_*\ \forall f \in C^\infty(M), \forall B \in \Omega^2(M)$, on en déduit que

$$\mathrm{Isom}(TM \oplus T^*M, \langle,\rangle, [\cdot,\cdot]) \cong \Omega^2_{cl}(M) \rtimes \mathrm{Diff}(M)$$

([**32**] Proposition 3.24). Nous appellerons **isomorphisme de Courant** les éléments de $\mathrm{Isom}(TM \oplus T^*M, \langle,\rangle, [\cdot,\cdot])$ et nous dirons que deux structures complexes généralisée qui diffèrent par conjugaison d'un isomorphisme de Courant sont **équivalentes**. Nous désignerons par $\zeta \cdot \mathcal{J} := \zeta\mathcal{J}\zeta^{-1}$ l'action par conjugaison d'un isomorphisme de Courant ζ. Pour $\mathcal{J}$ de la forme (1.1.1), on a

$$e^B \cdot \mathcal{J} = e^B \mathcal{J} e^{-B} = \begin{pmatrix} A - \pi B & \pi \\ \beta + BA - A^*B - B\pi B & A^* + B\pi \end{pmatrix}, \tag{1.1.5}$$

et $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si $e^B \cdot \mathcal{J}$ l'est.

Remarque 1.1.3. M. Bailey a montré que si une structure complexe généralisée $\mathcal{J}$ est de la forme $\mathcal{J}_J$ (type complexe) en un point $x \in M$, alors $\mathcal{J}$ est équivalente à $\mathcal{J}_{J,\pi}$ (type Poisson holomorphe) dans un voisinage de x (voir [**11**], Main Theorem). Ce théorème complète les résultats de M. Gualtieri [**32**] et Abouzaid-Boyarchenko [**1**] sur la forme normale d'une structure complexe généralisée. Pris ensembles, leurs résultats s'énoncent en disant que *toute variété complexe généralisée est localement Courant-isomorphe au produit d'une variété complexe généralisée de type symplectique et d'une de type Poisson holomorphe.*

1.2. Structures kählériennes généralisées

Soit $\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_\omega$ les structures complexes généralisées issus d'une structure complexe J et symplectique ω. On voit que la condition que $g := \omega(\cdot, J\cdot)$ soit symétrique est équivalente à $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega = \mathcal{J}_\omega\mathcal{J}_J$ et la condition $g > 0$ est équivalente à $\langle -\mathcal{J}_J\mathcal{J}_\omega\cdot, \cdot\rangle > 0$. Ces observations mènent à la définition suivante due à M. Gualtieri.

Définition 1.2.1 ([**32**])**.** *Une* **structure kählérienne généralisée** *sur M est une paire de structures complexes généralisées $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ telles que $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$ et la forme bilinéaire $\langle -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\cdot, \cdot\rangle$ est définie positive.*

Ces structures sont intimement liées à un autre type de structures que nous définissons maintenant.

Définition 1.2.2. *Une* **structure bihermitienne** *sur M est un triplet (J_1, J_2, g) tel que les paires (J_1, g) et (J_2, g) sont hermitiennes.*

Remarque 1.2.1. Ces structures ont été étudiées en profondeur en dimension 4 par M. Pontecorvo [**55**] et V. Apostolov et al. [**6, 7, 8**]. À noter que ces auteurs distinguent les structures *bihermitiennes* des structures *ambihermitiennes* selon que J_1 et J_2 induisent ou non la même orientation sur M. Aussi, selon eux, les cas dégénérés $J_1 = \pm J_2$ sont exclus de la définition. Suivant M. Gualtieri [**32**], nous ne faisons pas ces distinctions.

En effet, pour une structure presque-kählérienne généralisée $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$, la condition de commutativité implique que $\tau := -\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ est une involution et donc $TM \oplus T^*M$ est somme directe de ses (± 1)-sous-fibré propre $C_\pm$. La condition de positivité implique que la forme bilinéaire $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est définie positive sur C_+ et définie négative sur C_-. Ceci implique d'une part que $C_\pm$ sont tout deux de dimension n, et d'autre part que $C_\pm \cap TM = C_\pm \cap T^*M = 0$ (puisque TM et T^*M sont isotropes dans $TM \oplus T^*M$). Il suit que C_+ est le graphe d'une application $TM \to T^*M$ dont on note g et b les parties symétriques et antisymétriques respectivement. De même, C_- est le graphe de $b - g$ et on a des isomorphismes $\iota_\pm : TM \to C_\pm : X \mapsto (X, \iota_X(b \pm g))$. Il est facile de vérifier que les structures complexes généralisées $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ préservent $C_\pm$ et donc on peut utiliser $\iota_\pm$ pour les transférer à des structures presque-complexes sur TM :

$$J_+ := \iota_+^{-1} \circ \mathcal{J}_1 \circ \iota_+ = \iota_+^{-1} \circ \mathcal{J}_2 \circ \iota_+,$$
$$J_- := \iota_-^{-1} \circ \mathcal{J}_1 \circ \iota_- = -\iota_-^{-1} \circ \mathcal{J}_2 \circ \iota_-.$$

En fait, si on utilise ι_+ pour transporter $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{C_+}$ sur TM, on obtient précisément g. Il suit que le triplet (J_+, J_-, g) est une structure presque-bihermitienne sur M. Réciproquement, donnée (J_+, J_-, g, b) une structure presque-bihermitienne avec 2-forme b sur M, il existe un structure presque-kählérienne généralisée $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ qui lui correspond par le processus de projection décrit ci-haut. Elle est donnée explicitement par les formules

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \frac{1}{2}e^b\begin{pmatrix} J_+ + J_- & -(F_+^{-1} - F_-^{-1}) \\ F_+ - F_- & J_+^* + J_-^* \end{pmatrix} e^{-b}, \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{1}{2}e^b\begin{pmatrix} J_+ - J_- & -(F_+^{-1} + F_-^{-1}) \\ F_+ + F_- & J_+^* - J_-^* \end{pmatrix} e^{-b},\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

où $F_\pm = g(J_\pm\cdot,\cdot)$ sont les formes fondamentales des structures presque-hermitiennes.

Exemple 1.2.1. Dans le cas d'une structure presque-kählérienne $(\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J}_J)$, une inspection de (1.2.1) donne $J_+ = -J_- = J$, $F_+ = -F_- = \omega$ et $b = 0$. Donc *a posteriori*, $g = \omega(\cdot, J\cdot)$. Plus généralement, on a la Proposition 1.2.1 ci-bas.

Remarque 1.2.2. Intervertir l'ordre des structures complexes généralisées dans un paire kählérienne généralisée a uniquement pour effet de changer le signe de J_- au niveau de la structure bihermitienne avec 2-forme.

La relation entre l'intégrabilité d'une structure presque-kählérienne généralisée et la structure bihermitienne avec 2-forme correspondante est la suivante.

Théorème 1.2.1 ([**32**] Theorem 6.28)**.** *Une structure presque-kählérienne généralisée* $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ *est intégrable si et seulement si les structures presque-complexes* $J_\pm$ *sont intégrables et*

$$\mp J_\pm dF_\pm = db. \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.3.
(1) Les structures bihermitiennes satisfaisant la condition d'intégrabilité du Théorème 1.2.1 apparaissent dans la littérature pour la première fois dans le cadre de la théorie des champs quantiques [**25**].
(2) Il y a une notion plus générale de structure kählérienne généralisée qui consiste à affaiblir la condition d'intégrabilité à $\mp J_\pm dF_\pm = h$ pour une 3-forme fermée h appelée la **torsion**.
(3) Le fait d'agir sur une structure kählérienne généralisée par une transformation de type B correspond simplement à additionnner B à sa 2-forme b. Le Théorème 1.2.1 stipule alors que les structures kählériennes généralisées sont classifiées à transformation de type B près par les structures bihermitiennes (J_+, J_-, g) telles que $J_+dF_+ + J_-dF_- = 0$ et J_+F_+ est exacte.

Proposition 1.2.1. *Une structure kählérienne généralisée* $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ *est équivalente à une structure kählérienne* $(\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J}_J)$ *(resp.* $(\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_\omega)$*) si et seulement si* $J_+ = -J_-$ *(resp.* $J_+ = J_-$*).*

Preuve. Si $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) = (e^B \circ f_*) \cdot (\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J}_J)$, on procède comme à l'Exemple 1.2.1 pour déduire que $J_+ = -J_- = f \cdot J$. Réciproquement, si $J_+ = -J_-$, alors $\mathcal{J}_2 = e^b \cdot \mathcal{J}_{J_+}$ et $\mathcal{J}_1 = e^b \cdot \mathcal{J}_{F_+}$. La condition d'intégrabilité (1.2.2) s'écrit $-J_+ dF_+ = db = J_+ dF_+$. Il suit que F_+ est symplectique et $db = 0$. Ainsi, $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) = e^b \cdot (\mathcal{J}_{F_+}, \mathcal{J}_{J_+})$ où la paire (F_+, J_+) est kählérienne et e^b est un isomorphisme de Courant. Une application de la Remarque 1.2.2 à ce que l'on vient de prouver conclut la démonstration. □

1.3. Structures kähleriennes généralisées de type symplectique

Définition 1.3.1. *Une structure presque-kählérienne généralisée* $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ *sur* M *est dite de* **type symplectique** *si* $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_\omega$ *pour une forme symplectique* ω*. Pour une forme symplectique* ω *fixée, on note* $AGK_\omega(M)$ *(resp.* $GK_\omega(M)$*) l'ensemble des structures presque-complexes généralisées (resp. complexes généralisées)* $\mathcal{J}$ *telles que la paire* $(\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J})$ *est presque-kählérienne généralisée (resp. kählérienne généralisée).*

Remarque 1.3.1. Pour M de dimension divisible par 4, les structures complexes $J_\pm$ correspondant à une structure kählérienne généralisée de type symplectique induisent la même orientation sur M, et donc la paire de structures hermitiennes $(J_\pm, g)$ est *bihermitienne* au sens de [**6**] à condition que $J_+ \neq \pm J_-$ ([**32**] Proposition 6.8, Remark 6.14, Example 4.20). Nous verrons bientôt (Proposition 1.3.1) que pour une structure presque-kählérienne de type symplectique, $J_+ = J_-$ est impossible et $J_+ = -J_-$ correspond au cas kählérien.

Nous allons donner trois caractérisations de ces structures. La première de celles-ci figure sous une forme un peu différente comme le Théorème 6.2 de [**33**] et sous la forme reproduite ici dans [**22**] (Proposition 2.1). Pour les deux autres, nous suivons l'approche dans [**26**].

Notation 1.3.1. Étant donnée une forme symplectique ω sur M, notons $AC_+(M, \omega)$ (resp. $C_+(M, \omega)$) l'ensemble des structures presque-complexes (resp. complexes) J qui dominent ω, i.e. $\omega(\cdot, J\cdot) > 0$.

Proposition 1.3.1. *La correspondance* $AGK_\omega(M) \to AC_+(M,\omega) : \mathcal{J} \mapsto J_+$ *est une bijection. Relativement à l'identification* (1.2.1)*, l'application inverse est* $J \mapsto (J_+, J_-, g, b)$*,*

$$J_+ = J, \quad J_- = J^{*_\omega}, \quad g = -\frac{1}{2}\omega(J - J^{*_\omega}), \quad b = -\frac{1}{2}\omega(J + J^{*_\omega}),$$

où $J^{*_\omega} = -\omega^{-1}J^*\omega$ *est l'***adjoint symplectique** *de* J*. De plus,* $\mathcal{J} \in AGK_\omega(M)$ *est intégrable si et seulement si* J_+ *et* $J_+^{*_\omega}$ *sont intégrables.*

Preuve. Selon la correspondance (1.2.1), une structure presque-bihermitienne avec 2-forme (J_+, J_-, g, b) correspond à une structure presque-kählérienne généralisée de type symplectique $\mathcal{J} \in AGK_\omega(M)$ si et seulement si

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J_+ + J_- & -(F_+^{-1} - F_-^{-1}) \\ F_+ - F_- & J_+^* + J_-^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^{-1}b & -\omega^{-1} \\ b\omega^{-1}b + \omega & b\omega^{-1} \end{pmatrix}.$$

En comparant la première ligne de ces matrices, on obtient

$$b = -\frac{1}{2}\omega(J_+ + J_-), \quad g = -\frac{1}{2}\omega(J_+ - J_-). \tag{1.3.1}$$

On vérifie aisément que ces deux conditions nécessaires sont également suffisantes. Par addition et soustraction des équations (1.3.1) on obtient la paire d'équations équivalente

$$g + b = -\omega J_+, \quad g - b = \omega J_-. \tag{1.3.2}$$

Comme g est une métrique riemannienne, la première de ces équations implique que J_+ domine ω. Quant à la seconde, si on la compare à la première, elle implique que $J_- = J_+^{*_\omega}$. On voit donc comment construire l'inverse de l'application $\mathcal{J} \mapsto J_+$: donné $J \in AC_+(M,\omega)$, on pose $J_+ := J$, $J_- := J^{*_\omega}$, $g := -\frac{1}{2}\omega(J - J^{*_\omega})$, $b := -\frac{1}{2}\omega(J + J^{*_\omega})$.

Pour l'intégrabilité, il suffit par le Théorème 1.2.1 de montrer que donné $J_+ \in C_+(M,\omega)$ tel que $J_- := J_+^{*_\omega}$ est intégrable, on a $J_\pm dF_\pm = \mp db$ pour $F_\pm = gJ_\pm$ et b, g donnés par (1.3.1). Commençons par noter qu'à cause de (1.3.2), on a

$$F_\pm \pm bJ_\pm = \omega.$$

La forme ω étant fermée, on a donc

$$dF_\pm = \mp d(bJ_\pm).$$

Mais b étant $J_\pm$-anti-invariant, on a $b = b^{2,0} + b^{0,2}$, et donc $bJ_\pm = ib^{2,0} - ib^{0,2}$. Par ailleurs, $dF_\pm$ est de type (2,1) + (1,2) (du fait que $F_\pm$ est $J_\pm$-invariant et

$J_\pm$ est intégrable) donc $d(bJ_\pm)$ aussi. Ceci force $d(bJ_\pm) = i\overline{\partial} b^{2,0} - i\partial b^{0,2}$ et donc $J_\pm dF_\pm = \mp J_\pm(i\overline{\partial} b^{2,0} - i\partial b^{0,2}) = \pm(\overline{\partial} b^{2,0} + \partial b^{0,2}) = \mp db$. $\square$

Pour obtenir la seconde caractérisation, prenons $\mathcal{J} \in AGK_\omega(M)$ et écrivons

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & \pi \\ \beta & A^* \end{pmatrix}.$$

La condition de commutativité $\mathcal{J}_\omega \mathcal{J} = \mathcal{J}\mathcal{J}_\omega$ se traduit par les identités

$$\pi\omega = -\omega^{-1}\beta, \quad A^*\omega = \omega A, \tag{1.3.3}$$

alors que la condition de positivité $\langle -\mathcal{J}_\omega \mathcal{J} \cdot, \cdot \rangle > 0$ équivaut à

$$\omega(X, AX) + \omega(Y, AY) + 2\omega(BX, Y) > 0 \quad \forall X, Y \in TM, \tag{1.3.4}$$

où on a posé

$$B := \pi\omega.$$

En particulier, prenant $Y = 0$ dans la condition de positivité, on voit que la forme bilinéaire $\omega(\cdot, A\cdot)$ est définie positive, ce qui implique en particulier que A *est inversible*. On calcule

$$\tau = -\mathcal{J}_\omega \mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\pi\omega & A\omega^{-1} \\ -A^*\omega & -\omega\pi \end{pmatrix},$$

d'où il suit facilement

$$C_\pm = \{X + \xi \in TM \oplus TM^* \mid \xi = \iota_X(\omega A^{-1}(B \pm \mathrm{Id}))\}.$$

Autrement dit,

$$b \pm g = \omega A^{-1}(B \pm \mathrm{Id}), \tag{1.3.5}$$

ce qui permet d'écrire

$$g = \omega A^{-1}, \quad b = gB,$$

et aussi

$$J_\pm = -A^{-1}(B \pm \mathrm{Id}). \tag{1.3.6}$$

De plus, il est facile de vérifier que donnés deux endomorphismes A, B de TM, le système composé des équations (1.1.2) et (1.3.3) est équivalent au système

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= -\mathrm{Id}, \\ AB + BA &= 0, \\ A^{*_\omega} &= -A, \\ B^{*_\omega} &= B. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

La conclusion est que tous les éléments composants une structure presque-kählérienne généralisée de type symplectique peuvent être exprimés en termes d'une paire d'endomorphismes. C'est la deuxième caractérisation :

Proposition 1.3.2. *Étant donnée une forme symplectique ω sur M, notons $D_\omega(M)$ l'ensemble des paires (A, B) d'endomorphismes de TM satisfaisant* (1.3.4) *et* (1.3.7). *La correspondance*

$$D_\omega(M) \to AGK_\omega(M) : (A, B) \mapsto \mathcal{J} := \begin{pmatrix} A & B\omega^{-1} \\ -\omega B & A^* \end{pmatrix}$$

est une bijection.

Remarque 1.3.2. En combinant la Proposition 1.3.2 avec la Proposition 1.3.1, on obtient que la correspondance

$$D_\omega(M) \to AC_+(M, \omega) : (A, B) \mapsto J := -A^{-1}(B + \mathrm{Id}) \tag{1.3.8}$$

est une bijection. En s'aidant de (1.3.6), il est facile d'écrire son inverse :

$$A = -2(J - J^{*_\omega})^{-1}, \quad B = -(J + J^{*_\omega})(J - J^{*_\omega})^{-1}. \tag{1.3.9}$$

Les équations de (1.3.7) suggèrent une description complexe de la situation. En effet, si on définit un endomorphisme $K := A + iB$ de $T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$, alors les deux premières propriétés sont équivalentes à $K^2 = -\mathrm{Id}$ tandis que les deux dernières sont équivalentes à $K^{*_\omega} = -\overline{K}$. Pour exprimer la condition de positivité, il est naturel d'introduire la forme (antihermitienne, non dégénérée) $H(U, V) := \omega(U, \overline{V})$. En effet, on vérifie aisément que (1.3.4) est équivalent à la positivité de $H(\cdot, K\cdot)$. Ces observations constituent notre troisième caractérisation des structures presque-kählériennes généralisées de type symplectique :

Proposition 1.3.3. *Étant donnée ω une forme symplectique sur M, notons $E_\omega(M)$ l'ensemble des endomorphismes K de $T^{\mathbb{C}}M$ satisfaisant $K^2 = -\mathrm{Id}$, $K^{*_H} = -K$, et $H(\cdot, K\cdot) > 0$ pour $H(U, V) := \omega(U, \overline{V})$. La correspondance*

$$D_\omega(M) \to E_\omega(M) : (A, B) \mapsto K := A + iB$$

est une bijection.

Notation 1.3.2. Étant donné $K \in E_\omega(M)$, notons H_K la forme hermitienne définie positive $H(\cdot, K\cdot)$.

On cherche maintenant à caractériser l'intégrabilité d'une structure presque-kählérienne généralisée de type symplectique $\mathcal{J}$ en termes de sa réalisation en tant qu'endomorphisme complexe K de $T^{\mathbb{C}}M$. Pour ceci, identifions les fibrés vectoriels (réels) $TM \oplus T^*M$ et $T^{\mathbb{C}}M$ à l'aide de l'isomorphisme naturel

$$\Phi_\omega(X+\xi) := X - i\omega^{-1}(\xi).$$

En se référant à (1.3.8), on voit que relativement à cette identification, $\mathcal{J}$ correspond précisément à K ; i.e. $\Phi_\omega \cdot \mathcal{J} = K$.

Proposition 1.3.4 ([**26**]). *Les tenseurs de Nijenhuis de $\mathcal{J}$ et K sont liés par*

$$\begin{aligned} 2(\Phi_\omega \cdot \mathrm{Nij}_{\mathcal{J}})(Z_1, Z_2) = {} & \mathrm{Nij}_K(Z_1, Z_2) \\ & + \omega^{-1}(\omega(\mathrm{Nij}_{\overline{K}}(\overline{Z}_1, \cdot), Z_2) + \omega(Z_1, \mathrm{Nij}_{\overline{K}}(\overline{Z}_2, \cdot))). \quad (1.3.10) \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si $\mathrm{Nij}_K = 0$.

Il a été observé dans [**6**] en dimension 4 et par N. Hitchin [**39**] en général qu'à toute structure kählérienne généralisée (g, J_+, J_-, b) correspond une paire de structures de Poisson holomorphes $\sigma_\pm$. Le bivecteur $[J_+, J_-]g^{-1} : T^*M \to TM$ est manifestement $J_\pm$-anti-invariant et donc est de type $(2,0)+(0,2)$. Les structures de Poisson holomorphes sont

$$\sigma_\pm := \Big([J_+, J_-]g^{-1}\Big)^{2,0} = P - iJ_\pm P \qquad (1.3.11)$$

où $P = \frac{1}{2}[J_+, J_-]g^{-1}$.

La proposition suivante relie l'intégrabilité d'une structure kählérienne généralisée de type symplectique à l'holomorphie de σ_+.

Lemme 1.3.1. *Soit (M, J) une variété complexe, σ une structure de Poisson holomorphe de partie réelle π et ω une forme symplectique. Si ces trois structures sont liées par l'équation*

$$\omega J - J^*\omega - \omega\pi\omega = 0, \qquad (1.3.12)$$

alors la structre presque-complexe $J^{*\omega}$ est intégrable.

Preuve. Reprenons la notation $\mathcal{J}_{J,\pi}$ de l'Exemple 1.1.4. En utilisant l'équation (1.1.5) et le fait que ω est non dégénérée, on établit facilement que $e^\omega \mathcal{J}_{J,\pi} e^{-\omega}$ est de la forme $\mathcal{J}_{I,\pi}$ pour une structure complexe I si et seulement si $I = -J^{*\omega}$ et J est solution de (1.3.12). Par hypothèse, $\mathcal{J}_{J,\pi}$ est intégrable (voir l'Exemple 1.1.4), donc $e^\omega \mathcal{J}_{J,\pi} e^{-\omega}$ est intégrable également. Or, si (1.3.12) tient, alors $e^\omega \mathcal{J}_{J,\pi} e^{-\omega} = \mathcal{J}_{-J^{*\omega},\pi}$, donc en particulier, $J^{*\omega}$ est intégrable. $\square$

Proposition 1.3.5. *Soit $\mathcal{J} \in AGK_\omega(M)$ et $(J_\pm, g)$ la structure presque-bihermitienne associée. Si J_+ est intégrable, alors*

$$\sigma_+ \textit{ est Poisson holomorphe} \Leftrightarrow J_- \textit{ est intégrable.}$$

Preuve. Si J_- est intégrable, alors par la Proposition 1.3.1, $\mathcal{J}$ est intégrable, et donc σ_+ est Poisson holomorphes par [**39**] (Proposition 5).

Selon la Proposition 1.3.1, $J_- = J_+^{*\omega}$ et $g = -\frac{1}{2}\omega(J_+ - J_-)$. Utilisant l'identité

$$[J_+, J_-] = -(J_+ + J_-)(J_+ - J_-) \tag{1.3.13}$$

valide pour toute paire de structures presque-complexes, on vérifie aisément l'équation

$$\omega J_+ - J_+^* \omega - \omega P \omega = 0$$

du Lemme 1.3.1. Par conséquent, J_- est intégrable dès que σ_+ est Poisson holomorphe. $\square$

Chapitre 2

LA COURBURE SCALAIRE COMME APPLICATION MOMENT

Dans tout ce chapitre, à l'exception de la section 2.2, (M, ω) est une variété symplectique *compacte* de dimension $n = 2m$.

Notation 2.0.3. La **forme volume symplectique** associée à ω est notée $v_\omega := \frac{\omega^m}{m!}$.

Rappelons qu'un **champ vectoriel hamiltonien** sur (M, ω) est un champ symplectique de la forme $-\omega^{-1}df$ pour une fonction $f \in C^\infty(M)$. Le champ $-\omega^{-1}df$ s'appelle le **gradient symplectique** de f et est noté $\mathrm{grad}_\omega f$. Le groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ des **difféomorphismes hamiltoniens** est l'ensemble des groupes de difféomorphismes à 1 paramètre engendrés par les champs vectoriels de la forme $\mathrm{grad}_\omega f_t$ pour $f \in C^\infty(M \times I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle contenant 0. Un résultat de A. Banyaga [**12**] (voir aussi [**54**] Proposition 1.4.B) veut qu'à tout chemin $t \mapsto \gamma_t \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ à travers l'identité correspond une famille de fonctions $f_t \in C^\infty(M)$ telles que

$$\frac{d\gamma_t}{dt} = \mathrm{grad}_\omega f_t \quad \forall t.$$

Il en découle que l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ s'identifie aux champs vectoriels hamiltoniens sur (M, ω) :

$$\mathfrak{ham}(M, \omega) = \{\mathrm{grad}_\omega f \in C^\infty(TM) \mid f \in C^\infty(M)\}.$$

À son tour, cette algèbre de Lie est identifiable à l'espace $C_0^\infty(M)$ des fonctions lisses f normalisées par la condition $\int_M f v_\omega = 0$ (avec le crochet de Poisson). La correspondance étant

$$C_0^\infty(M) \to \mathfrak{ham}(M, \omega) : f \mapsto \mathrm{grad}_\omega f. \tag{2.0.14}$$

Il est également possible d'utiliser le produit scalaire euclidien Ad-invariant $(f,g) = \int_M fgv_\omega$ pour identifier $C_0^\infty(M)$ à une partie de $C_0^\infty(M)^*$.

C'est A. Fujiki [**23**] qui fut le premier à observer que l'espace $K_\omega(M)$ des structures kählériennes sur une variété symplectique (M,ω) admet une structure de variété de Fréchet munie d'une forme symplectique formelle et que le groupe $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ agit sur $K_\omega(M)$ de façon hamiltonienne avec application moment identifiée—à une constante additive près—à la courbure scalaire. Plus tard, S. K. Donaldson [**19**] a démontré plus généralement que l'action de $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ sur l'espace $AK_\omega(M)$ des structures presque-kählériennes a comme application moment la courbure scalaire *hermitienne*. Le but de ce chapitre est de donner une preuve de ce résultat et en même temps de développer le formalisme qui nous permettra à la section 3.4 d'obtenir une formule pour l'application moment de l'action de $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ sur $AGK_\omega(M)$. L'approche suivie est calquée sur [**26**] et [**27**].

2.1. La structure symplectique sur $AGK_\omega(M)$

Dans cette section, on identifie l'ensemble $AGK_\omega(M)$ avec l'ensemble $E_\omega(M)$ de la Proposition 1.3.3. On note $\mathrm{Aut}(T^{\mathbb{C}}M,H)$ le fibré sur M ayant pour fibre au-dessus de x le groupe de Lie des automorphismes de $T_x^{\mathbb{C}}M$ qui préservent la forme H_x, et $\mathrm{End}(T^{\mathbb{C}}M,H)$ le fibré vectoriel sur M ayant pour fibre au-dessus de x l'algèbre de Lie correspondante constituée de tous les endomorphismes H_x-antisymétriques de $T_x^{\mathbb{C}}M$. Posons aussi

$$\mathcal{G}_H := C^\infty(\mathrm{Aut}(T^{\mathbb{C}}M,H)), \quad \mathcal{L}_H := C^\infty(\mathrm{End}(T^{\mathbb{C}}M,H)).$$

On peut penser à $\mathcal{G}_H$ comme à un groupe de Lie (de dimension infinie) et à $\mathcal{L}_H$ comme à son algèbre de Lie. L'application exponentielle $\exp : \mathcal{L}_H \to \mathcal{G}_H : a \mapsto \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{k!}$ est bien définie. Comme sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_H$, l'espace tangent $T_K(AGK_\omega(M))$ de $AGK_\omega(M)$ en un point K est naturellement identifié à un sous-espace de $\mathcal{L}_H$. Si K_t ($t \in \mathbb{R}$) est un chemin lisse dans $AGK_\omega(M)$ tel que $K_0 = K$, alors en dérivant l'équation $K_t^2 = -\mathrm{Id}$, on obtient $\dot{K}K + K\dot{K} = 0$, où $\dot{K} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K_t$. Ceci permet d'écrire

$$T_K(AGK_\omega(M)) \subseteq \{\dot{K} \in \mathcal{L}_H \ \mid \dot{K}K + K\dot{K} = 0\}.$$

Nous verrons bientôt que cette inclusion est une égalité. À cette fin, considérons l'action de $\mathcal{G}_H$ sur $AGK_\omega(M)$ par conjugaison ($\gamma \cdot K := \gamma K \gamma^{-1}$). Donné $a \in \mathcal{L}_H$, on note $a^\sharp \in C^\infty(T(AGK_\omega(M)))$ le champ vectoriel qu'il induit, i.e.

$$a^\sharp{}_K = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{ta}Ke^{-ta} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{ta}K + \frac{d}{dt}\bigg|_{s=0} Ke^{-sa} = [a, K].$$

Une conséquence de cette expression est que pour $\dot{K} \in \mathcal{L}_H$ tel que $\dot{K}K + K\dot{K} = 0$ quelconque, on a $\dot{K} = a^\sharp{}_K$ pour $a := \frac{1}{2}K\dot{K}$. Ceci prouve que

$$T_K(AGK_\omega(M)) = \{\dot{K} \in \mathcal{L}_H \mid \dot{K}K + K\dot{K} = 0\} \tag{2.1.1}$$

$$= \{a^\sharp{}_K = [a, K] \mid a \in \mathcal{L}_H\}. \tag{2.1.2}$$

Remarque 2.1.1. Alternativement, on peut caractériser les éléments de $T_K(AGK_\omega(M))$ en termes de la forme hermitienne H_K :

$$T_K(AGK_\omega(M)) = \{\dot{K} \in C^\infty(T^{\mathbb{C}}M) \mid \dot{K}K + K\dot{K} = 0, \dot{K}^{*_{H_K}} = \dot{K}\}.$$

Il y a sur $AGK_\omega(M)$ une forme symplectique naturelle que nous décrivons maintenant. Commençons par noter que la multiplication par $-i$ place les formes antihermitiennes en correspondance biunivoque avec les formes hermitiennes. Cette correspondance applique la forme H sur une forme hermitienne $-iH$ de signature (m, m) : pour $K \in AGK_\omega(M)$ quelconque, $-iH$ est définie positive sur le sous-fibré de valeur propre i de K et définie négative sur celui de valeur propre $-i$. De plus, ces sous-fibrés sont $-iH$-orthogonaux et ces deux propriétés caractérisent K : tout sous-fibré complexe Θ de $T^{\mathbb{C}}M$ de rang m tel que $iH|_\Theta > 0$ détermine un unique élément $K \in AGK_\omega(M)$ par

$$K|_\Theta = i\mathrm{Id}, \quad K|_{\Theta^\perp} = -i\mathrm{Id}.$$

Or, si $\mathbb{C}^{m,m}$ désigne l'espace $\mathbb{C}^{2m}$ muni de la forme hermitienne de signature (m, m) standard, la grassmannienne des sous-espaces de $\mathbb{C}^{m,m}$ définis positifs de rang m est un espace hermitien symétrique isomorphe à $U(m, m)/U(m) \times U(m)$ [**46**]. Notre dernière caractérisation de $AGK_\omega(M)$ l'identifie donc à l'espace des sections d'un fibré en espaces hermitien symétriques contractiles[1]. On en déduit que $AGK_\omega(M)$ est contractile. Par intégration de la forme symplectique sur chaque fibre, on obtient la forme suivante sur $AGK_\omega(M)$:

$$\Omega_K(\dot{K}_1, \dot{K}_2) := \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(K\dot{K}_1\dot{K}_2)v_\omega.$$

Proposition 2.1.1. *La 2-forme Ω est une forme symplectique réelle.*

1. $U(m) \times U(m)$ est un sous-groupe compact maximal de $U(m, m)$.

Preuve. Le fait que Ω est antisymétrique découle de (2.1.1) et des propriétés de la trace. Pour voir que Ω est non dégénérée, considérons $\dot{K} \in T_K(AGK_\omega(M))$ non nul. Un tel endomorphisme est symétrique par rapport au produit scalaire hermitien $H(\cdot, K\cdot)$. Il est donc diagonalisable avec valeurs propres réelles non identiquement nulles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. De plus, on peut vérifier que $K\dot{K} \in T_K(AGK_\omega(M))$. On calcule

$$\Omega_K(\dot{K}, K\dot{K}) = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(\dot{K}^2)v_\omega = \frac{1}{2}\int_M \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right) v_\omega > 0.$$

Pour voir que Ω est fermée, on utilise (2.1.2) de sorte que

$$\Omega_K({a^\sharp}_K, {b^\sharp}_K) = \int_M \mathrm{tr}(K[a,b])v_\omega. \tag{2.1.3}$$

Par définition,

$$d\Omega(a^\sharp, b^\sharp, c^\sharp) = \sum_{\text{cycl.}} a^\sharp \cdot \Omega(b^\sharp, c^\sharp) - \sum_{\text{cycl.}} \Omega([a^\sharp, b^\sharp], c^\sharp),$$

où les sommes sont sur les permutations cycliques de $a^\sharp, b^\sharp, c^\sharp$. En utilisant (2.1.3) et le fait que $[a^\sharp, b^\sharp] = [a,b]^\sharp$ (i.e. $a \mapsto a^\sharp$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie), on voit directement que l'identité de Jacobi force l'annulation de la seconde somme cyclique. Pour voir que la première somme cyclique s'annule, fixons $K \in AGK_\omega(M)$ et posons $K_t := e^{ta}Ke^{-ta}$ de sorte que $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K_t = {a^\sharp}_K$ (par définition). On a alors

$$\begin{aligned}
a^\sharp \cdot \Omega(b^\sharp, c^\sharp)\Big|_K &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Omega_{K_t}({b^\sharp}_{K_t}, {c^\sharp}_{K_t}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_M \mathrm{tr}(K_t[b,c])v_\omega \\
&= \int_M \mathrm{tr}({a^\sharp}_K[b,c])v_\omega \\
&= \int_M \mathrm{tr}(K[[b,c],a])v_\omega,
\end{aligned}$$

d'où on voit que la première somme cyclique s'annule elle aussi par Jacobi. Pour voir que Ω est réelle, considérons une base H_K-orthonormale auxiliaire (e_i). Pour $\dot{K}_1, \dot{K}_2 \in T_K(AGK_\omega(M))$ quelconques, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(K\dot{K}_1\dot{K}_2) &= \sum_i H_K(e_i, K\dot{K}_1\dot{K}_2 e_i) \\
&= \sum_i H_K(K\dot{K}_1 e_i, \dot{K}_2 e_i) \quad (\text{car } K\dot{K}_1 \in T_K(AGK_\omega(M))) \\
&= \sum_i H_K(\dot{K}_2 K\dot{K}_1 e_i, e_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \overline{H_K(e_i, \dot{K}_2 K \dot{K}_1 e_i)} \\
&= \overline{\mathrm{tr}(\dot{K}_2 K \dot{K}_1)} \\
&= \overline{\mathrm{tr}(K \dot{K}_1 \dot{K}_2)}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.2. Pour deux endomorphismes A, B de $T^{\mathbb{C}}M$, on a $H_K(\overline{A}, B) = \mathrm{tr}(A^{*_{H_K}} B)$. Comme les vecteurs tangents à $AGK_\omega(M)$ sont symétriques par rapport à H_K, on déduit l'expression alternative suivante pour Ω :

$$\Omega_K(\dot{K}_1, \dot{K}_2) = \frac{1}{2} \int_M H_K(\overline{K\dot{K}_1}, \dot{K}_2) v_\omega. \tag{2.1.4}$$

Remarquons que l'ensemble $AK_\omega(M)$ des structures presque-complexes compatibles avec ω est naturellement identifié au sous-espace de $AGK_\omega(M)$ des endomorphismes *réels*. En effet, un élément $K \in AGK_\omega(M)$ avec $\mathfrak{Im} K = 0$ est de la forme $K = J$ pour J une structure presque-complexe compatible avec ω. Relativement à cette identification, on a

$$T_J(AK_\omega(M)) = \{\dot{J} \in \mathcal{L}_H^{\mathbb{R}} \mid \dot{J}J + J\dot{J} = 0\},$$

où $\mathcal{L}_H^{\mathbb{R}} \cong C^\infty(\mathrm{End}(TM, \omega))$ est le sous-ensemble des éléments réels de $\mathcal{L}_H$. La Proposition 1.3.4 nous permet également d'identifier les sous-ensembles des structures kählériennes généralisées de type symplectique et des structures complexes compatibles avec ω comme étant respectivement

$$GK_\omega(M) := \{K \in AGK_\omega(M) \mid [K, K] = 0\}$$

et

$$K_\omega(M) := \{J \in AK_\omega(M) \mid [J, J] = 0\}.$$

(On prend ici avantage du fait que le tenseur de Nijenhuis d'un endomorphisme A est proportionnel à $[A, A]$, le crochet de Frölicher-Nijenhuis de A avec lui-même [**47**].) Par dérivation de la condition d'intégrabilité, on obtient

$$T_K(GK_\omega(M)) = \{\dot{K} \in \mathcal{L}_H \mid \dot{K}K + K\dot{K} = 0,\ [\dot{K}, K] + [K, \dot{K}] = 0\},$$

$$T_J(K_\omega(M)) = \{\dot{J} \in \mathcal{L}_H^{\mathbb{R}} \mid \dot{J}J + J\dot{J} = 0,\ [\dot{J}, J] + [J, \dot{J}] = 0\}.$$

À noter que les ensembles $GK_\omega(M)$, $AK_\omega(M)$ et $K_\omega(M)$ sont tous des sous-variétés symplectiques de $(AGK_\omega(M), \Omega)$. En effet, dans chaque cas, on peut vérifier que si $\dot{K}$ est un vecteur tangent en K à l'une de ces sous-variétés, alors il en va de même de $K\dot{K}$ et donc $\Omega_K(\dot{K}, K\dot{K}) > 0$ comme dans la preuve de la Proposition 2.1.1.

Le groupe $\mathrm{Sp}(M,\omega)$ des symplectomorphismes de (M,ω) agit sur $AGK_\omega(M)$ par

$$\varphi \cdot K = \varphi_* K \varphi_*^{-1}.$$

Vu comme groupe de Lie de dimension infinie, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(M\omega)$ de $\mathrm{Sp}(M,\omega)$ [2] est naturellement identifiée aux champs vectoriels symplectiques sur M (voir [**51**] Proposition 3.2) :

$$\mathfrak{sp}(M,\omega) = \{V \in C^\infty(TM) \mid \mathcal{L}_V\omega = 0\}$$

(avec le crochet de Lie usuel). En particulier, l'action infinitésimale sur $AGK_\omega(M)$ correspondant à un champ vectoriel symplectique $V \in \mathfrak{sp}(M,\omega)$ est donnée par

$$V^\sharp_K = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^V \cdot K = -\mathcal{L}_V K. \tag{2.1.5}$$

2.2. Connexion de Chern et courbure scalaire hermitienne

Sur une variété complexe (M,J), le sous-fibré propre $T^{1,0}M \subset T^{\mathbb{C}}M$ associé à la valeur propre i de J admet une structure holomorphe naturelle dont l'opérateur de Cauchy-Riemann correspondant s'écrit

$$\overline{\partial}_X Z = [X^{0,1}, Z]^{1,0}, \tag{2.2.1}$$

pour $X \in C^\infty(TM)$ et $Z \in C^\infty(T^{1,0}M)$. Si J est une structure presque-complexe non intégrable, la formule (2.2.1) définit quand même un opérateur de Cauchy-Riemann sur $T^{1,0}M$. Pour toute métrique hermitienne h sur $T^{1,0}M$, il existe alors une unique connexion ∇, dite **connexion de Chern de la structure presque-hermitienne** (J,h), qui est compatible avec h et telle que $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$. Considérons $\hat{h}$ et $\hat{\nabla}$ la métrique hermitienne et la connexion hermitienne induite sur le fibré anticanonique $K^{-1} = \bigwedge^m(T^{1,0}M)$ par h et ∇ respectivement. Le tenseur de courbure de $\hat{\nabla}$ est donc de la forme

$$R^{\hat{\nabla}} = i\rho^\nabla \otimes \mathrm{Id}_{K^{-1}}$$

pour $\rho^\nabla \in \Omega^2(M,\mathbb{R})$ une 2-forme réelle appelée **forme de Ricci-Chern**. La **courbure scalaire hermitienne** est définie par

$$u := 2\Lambda\rho^\nabla,$$

2. Il existe des théories rigoureuses des groupes de Lie de dimension infinie (eg. [**53**], [**45**]) mais nous voulons seulement en utiliser les idées de façon formelle.

où Λ est l'opérateur de contraction par la **forme fondamentale** $F := h(J\cdot, \cdot)|_{TM}$.

Lemme 2.2.1. *Sur une variété presque-hermitienne de dimension $n = 2m$ et forme fondamentale F, la courbure scalaire hermitienne admet l'expression alternative*

$$u = \frac{n\rho^{\nabla} \wedge F^{m-1}}{F^m}. \tag{2.2.2}$$

PREUVE. On utilise l'identité générale

$$*\frac{F^r}{r!} = \frac{F^{m-r}}{(m-r)!}, \quad \forall r = 0, \dots, m,$$

avec $r = 1$ pour écrire

$$\begin{aligned}
\rho^{\nabla} \wedge F^{m-1} &= (m-1)!\rho^{\nabla} \wedge *F \\
&= (m-1)!\langle \rho^{\nabla}, F\rangle v_g \\
&= \frac{1}{m}\langle \rho^{\nabla}, F\rangle F^m, \\
&= \frac{1}{m}(\Lambda\rho^{\nabla})F^m, \quad (\Lambda = \langle F, \cdot\rangle \text{ sur les 2-formes}) \\
&= \frac{1}{n}uF^m.
\end{aligned}$$

□

À noter également que si J est intégrable, de sorte que $\hat{\nabla}$ est la connexion de Chern sur K^{-1} relativement à $\hat{h}$ et sa structure holomorphe naturelle, il est bien connu que la forme de Ricci-Chern admet l'expression locale [**60**]

$$\rho^{\nabla} = -\frac{1}{2}dd^c \log \sqrt{\det(g_{ij})}, \tag{2.2.3}$$

où g_{ij} sont les composantes du tenseur métrique $g := h|_{TM}$ relativement à un système de coordonnées locales holomorphes sur (M, J).

Remarque 2.2.1. Dans le cas d'une structure kählerienne, la forme de Ricci-Chern coïncide avec la forme de Ricci

$$\rho(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R_{JX,Z}Y) = \mathrm{Ric}(JX, Y)$$

et donc la courbure scalaire hermitienne coïncide avec la courbure scalaire riemannienne $s = 2\Lambda\rho$.

2.3. L'action de $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ sur $AK_\omega(M)$

Il est clair que l'action de $\mathrm{Sp}(M,\omega)$ décrite à la section 2.1 se restreint à une action sur $AK_\omega(M)$. Cette action n'est (présumément) pas hamiltonienne, mais on démontre dans cette section que sa restriction à $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ l'est, et l'application moment peut être identifiée à la courbure scalaire hermitienne.

Lemme 2.3.1. *Pour l'action de $Sp(M,\omega)$ sur $AK_\omega(M)$, l'action infinitésimale correspondant à un champ vectoriel symplectique $V \in \mathfrak{sp}(M,\omega)$ admet l'expression*

$$V_J^\sharp = -J(DV + (DV)^{*_g}), \tag{2.3.1}$$

où $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ et D est la connexion de Levi-Civita.

Preuve. Si V est symplectique, on a

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathcal{L}_V\omega)(X,Y)\\
&= (\mathcal{L}_V g)(JX,Y) + g((\mathcal{L}_V J)X,Y)\\
&= V\cdot g(JX,Y) - g(\mathcal{L}_V(JX),Y) - g(JX,\mathcal{L}_V Y) + g((\mathcal{L}_V J)X,Y)\\
&= V\cdot g(JX,Y) - g(D_V(JX),Y) + g(D_{JX}V,Y)\\
&\quad - g(JX,D_V Y) + g(JX,D_Y V) + g((\mathcal{L}_V J)X,Y) \quad \text{(car } D \text{ est sans torsion)}\\
&= g(D_{JX}V,Y) + g(JX,D_Y V) + g((\mathcal{L}_V J)X,Y) \quad (Dg=0)\\
&= g((DV + (DV)^{*_g})JX,Y) + g((\mathcal{L}_V J)X,Y).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{L}_V J = -(DV + (DV)^{*_g})J$ ou encore par (2.1.5), $V_J^\sharp = (DV + (DV)^{*_g})J$. On obtient (2.3.1) en prenant l'adjoint de cette équation et en utilisant que $V_J^\sharp$ est g-symétrique (Remarque 2.1.1) alors que J est g-antisymétrique. $\square$

Le prochain lemme est l'ingrédient clef dans le calcul de l'application moment. On y cherche une formule pour la «dérivée» de la connexion de Chern sur le fibré anticanonique par rapport à une variation de la structure presque-complexe. Plus précisément, fixons $J \in AK_\omega(M)$ et $\dot{J} \in T_J(AK_\omega(M))$ et considérons le chemin $J_t = e^{ta}Je^{-ta}$ dans $AK_\omega(M)$ de sorte que $J_0 = J$ et $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} J_t = \dot{J}$ (voir section précédente). Notons que $\gamma_t := e^{ta} : (TM,J,\omega) \to (TM,J_t,\omega)$ est un isomorphisme de fibré hermitien. Désignons par ∇^{J_t} la connexion de Chern de la paire (ω, J_t) et par $\hat{\nabla}^{J_t}$ la connexion de Chern induite sur $K_{J_t}^{-1} = \bigwedge^m(T_{J_t}^{1,0}M)$. De même, désignons par $\hat{\gamma}_t : K_J^{-1} \to K_{J_t}^{-1}$ l'isomorphisme de fibré hermitien induit par γ_t. Si ξ est une section locale de norme 1 de K_J^{-1}, alors $\xi_t := \hat{\gamma}_t\xi$ est une section locale de norme 1 de $K_{J_t}^{-1}$ et donc $\hat{\nabla}^{J_t}$ est de la forme

$$\hat{\nabla}^{J_t}\xi_t = i\alpha_t \otimes \xi_t$$

pour une certaine 1-forme locale réelle α_t (la 1-forme de connexion relative au repère local ξ_t). La forme de Chern hermitienne de (ω, J_t) est $\sigma_t = -d\alpha_t$ et la courbure scalaire hermitienne est

$$u_t = -2\Lambda d\alpha_t. \tag{2.3.2}$$

Écrivons $\hat{\gamma}_t^{-1} \cdot \hat{\nabla}^{J_t}$ pour la connexion $\hat{\gamma}_t^{-1}\hat{\nabla}^{J_t}\hat{\gamma}_t$ sur K_J^{-1}. On a alors

$$(\hat{\gamma}_t^{-1} \cdot \hat{\nabla}^{J_t})\xi = i\alpha_t \otimes \xi.$$

C'est-à-dire que α_t apparaît maintenant comme la 1-forme de connexion de $\hat{\gamma}_t^{-1} \cdot \hat{\nabla}^{J_t}$ par rapport au repère ξ. Notons également que si $\xi' = f\xi$ est une autre section locale de norme 1, alors les 1-formes de connexions sont reliées par

$$\alpha_t' = -id\log f + \alpha_t.$$

On en déduit que la 1-forme

$$\dot{\alpha} := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_t$$

est globalement définie et dépend uniquement de J et $\dot{J}$. On appelle $\dot{\alpha}$ la **première variation de la connexion de Chern du fibré anticanonique le long de** $\dot{J}$.

Lemme 2.3.2 (Formule de Mohsen [**52**])**.** *Pour tout $J \in AK_\omega(M)$, la première variation de la connexion de Chern du fibré anticanonique le long de $\dot{J}$ admet l'expression*

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2}\delta(g\dot{J}),$$

où δ est la codifférentielle relative à la métrique $g = \omega(\cdot, J\cdot)$; i.e. $\delta T = -\sum_{i=1}^m (D_{e_i}T)(e_i, \cdot, \dots, \cdot)$ pour tout tenseur covariant T, où $\{e_1, \dots, e_m\}$ est un repère orthonormé auxiliaire.

Théorème 2.3.1. *Pour toute variété symplectique compacte (M, ω), l'action de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ sur $AK_\omega(M)$ est hamiltonienne d'application moment $\mu : AK_\omega(M) \to C_0^\infty(M)^*$*

$$\mu^f(J) = -\int_M f u_J v_\omega, \tag{2.3.3}$$

où u_J est la courbure scalaire hermitienne de la paire (ω, J).

Preuve. Sur $AK_\omega(M)$, la formule (2.1.4) pour Ω devient

$$\Omega_J(\dot{J}_1, \dot{J}_2) = \frac{1}{2}\int_M g(J\dot{J}_1, \dot{J}_2)v_g = \frac{1}{2}\langle J\dot{J}_1, \dot{J}_2\rangle_g \tag{2.3.4}$$

où $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ est la métrique riemannienne de la paire (ω, J). Fixons $V \in \mathfrak{sp}(M,\omega)$ et $\dot{J} \in T_J(AK_\omega(M))$. On a

$$\begin{aligned}
\Omega_J(V^\sharp_J, \dot{J}) &= \langle DV, \dot{J}\rangle_g \quad \text{(en combinant (2.3.4), (2.3.1) et } J^{*_g} = J)\\
&= \langle g(DV), g\dot{J}\rangle_g \quad \text{(naturalité)}\\
&= \langle D(V^\flat), g\dot{J}\rangle_g \quad (g(DX) = D(X^\flat)\ \forall X \in C^\infty(TM))\\
&= \langle V^\flat, \delta(g\dot{J})\rangle_g \quad (D = \delta^*)\\
&= 2\langle V^\flat, \dot{\alpha}\rangle_g \quad \text{(Lemme 2.3.2).}
\end{aligned}$$

Maintenant si $V \in \mathfrak{ham}(M,\omega)$ avec fonction hamiltonienne $f \in C^\infty_0(M)$, on a $V = -\omega^{-1}df = J(df)^\sharp$ donc $V^\flat = d^c f$. Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\Omega_J(V^\sharp_J, \dot{J}) &= 2\langle d^c f, \dot{\alpha}\rangle_g\\
&= 2\langle f, \delta^c\dot{\alpha}\rangle_g\\
&= -2\langle f, \Lambda d\dot{\alpha}\rangle_g \quad \text{(par l'identité de Kähler } \delta^c = -[\Lambda, d])\\
&= \langle f, \dot{u}_J\rangle_g \quad \text{(en dérivant (2.3.2))}\\
&= \int_M f\dot{u}_J v_\omega.
\end{aligned}$$

Définissant μ par (2.3.3), on a bien $d\mu^f(\dot{J}) = -\Omega_J(V^\sharp_J, \dot{J})$. Il reste à vérifier l'équivariance de μ, soit la relation

$$\mu^{\mathrm{Ad}_\varphi f}(\varphi \cdot J) = \mu^f(J) \quad \forall \varphi \in \mathrm{Ham}(M,\omega),$$

où relativement à l'identification de $\mathfrak{ham}(M,\omega)$ avec $C^\infty_0(M)$, l'action adjointe se fait par $\mathrm{Ad}_\varphi f = \varphi \cdot f = f \circ \varphi^{-1}$. Naturellement, on a $u_{\varphi \cdot J} = \varphi \cdot u_J$, de sorte que

$$\mu^{\mathrm{Ad}_\varphi f}(\varphi \cdot J) = \int_M \varphi \cdot (f u_J v_\omega) = \mu^f(J).$$

□

En se restreignant aux structures intégrables, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.1. *Pour toute variété symplectique compacte* (M,ω)*, l'action de* $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ *sur* $K_\omega(M)$ *est hamiltonienne d'application moment* $\mu : K_\omega(M) \to C^\infty_0(M)^*$

$$\mu^f(J) = -\int_M f s_J v_\omega, \tag{2.3.5}$$

où s_J *est la courbure scalaire de la paire* (ω, J).

Chapitre 3

LE CAS TORIQUE

Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension $n = 2m$. Ceci signifie que le tore $\mathbb{T}$ de dimension m agit sur la variété symplectique connexe compacte (M, ω) de façon effective et hamiltonienne avec application moment $\mu : M \to \mathfrak{t}^* : x \mapsto (\mu(x) : \xi \mapsto \mu^\xi(x))$. À son tour, ceci signifie que μ est $\mathbb{T}$-invariante et pour tout $\xi \in \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(\mathbb{T})$, μ^ξ est une fonction hamiltonienne pour l'action infinitésimale $\xi^\sharp$ induite sur M par ξ. D'après M. F. Atiyah [**10**] et Guillemin-Sternberg [**38**], l'image $\Delta := \mu(M) \subset \mathfrak{t}^*$ de l'application moment est l'enveloppe convexe de l'image par μ des points fixes de l'action. Un théorème de Delzant [**18**] stipule que les variétés symplectiques toriques sont classifiées (à symplectomorphisme équivariant près) par leur polytope moment Δ. Rappelons la définition de ces polytopes classifiants, dit *polytopes de Delzant*.

Définition 3.0.1. *Soit $\mathfrak{t}$ un espace vectoriel de dimension m. Un* **polytope de Delzant** *à d facettes dans $\mathfrak{t}^*$ est la donnée $(\Delta, \Lambda, \nu_1, \ldots, \nu_d)$ d'un ensemble $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$ qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points appelés* **sommets***, d'un réseau $\Lambda \subset \mathfrak{t}$ et de* **normales** *$\nu_1, \ldots, \nu_d \in \Lambda$ tel que*

$$\Delta = \{x \in \mathfrak{t}^* \mid L_j(x) \geq 0,\ j = 1, \ldots, d\},$$

où les L_j sont des fonctions de la forme

$$L_j(x) = \langle \nu_j, x \rangle + \lambda_j$$

pour certains nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, et tel que pour chaque sommet $x \in \Delta$, les normales ν_j pour lesquelles $L_j(x) = 0$ forment une base de Λ. Les **facettes** *de Δ sont les ensembles F_j de la forme*

$$F_j = \{x \in \Delta \mid L_j(x) = 0\}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Une **face** *de codimension k de Δ est l'intersection de k facettes. Pour une face F, on appelle* **intérieur** *de F l'ensemble $\mathring{F}$ des points de F qui ne se trouvent dans aucune face de codimension inférieure. Autrement dit, si $F = \bigcap_{j \in I}^{k} F_j$ pour un certain ensemble d'indices $I = \{j_1, \ldots, j_k\}$, alors*

$$\mathring{F} = \{x \in \Delta \mid L_j(x) = 0 \Leftrightarrow j \in I\}.$$

Comme corollaire de la preuve, Delzant obtient un raffinement du résultat d'Atiyah-Guillemin-Sternberg voulant que pour toute face $F = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_k}$ de codimension k et tout $p \in \mu^{-1}(\mathring{F})$, le stabilisateur de p dans $\mathbb{T}$ est le sous-tore $\mathbb{T}_F$ de dimension k correspondant à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{t}_F$ engendrée par les normales $\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{j_k}$. De plus, $M_F := \mu^{-1}(F)$ est une sous-variété symplectique torique de codimension $2k$ pour l'action de $\mathbb{T}/\mathbb{T}_F$. Son polytope moment est F dans le sens suivant. La face F est supportée par un sous-espace affine de la forme $x_0 + \mathfrak{t}_F^0$ où $\mathfrak{t}_F^0 \cong (\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_F)^*$ est l'annulateur de $\mathfrak{t}_F$ dans $\mathfrak{t}^*$. Une application moment pour l'action effective de $\mathbb{T}/\mathbb{T}_F$ est alors $\mu|_{M_F} - x_0$. La préimage $\mathring{M} := \mu^{-1}(\mathring{\Delta})$ de l'intérieur du polytope moment correspond à l'ensemble des points où l'action de $\mathbb{T}$ est libre, et cet ensemble est ouvert et dense dans M (cf. [**29**] Corollary B.48). Finalement, mentionnons l'observation faite dans [**50**] (Proposition 7.3) selon laquelle, par un théorème de Schwarz [**56**], *les fonctions $C^\infty(\Delta)$ (i.e. les fonctions qui sont la restriction à Δ d'une fonction de $C^\infty(\mathfrak{t}^*)$) sont précisément les fonctions f définies sur Δ telles que $f \circ \mu \in C^\infty(M)$*. Par ailleurs, les fonctions de $C^\infty(M)$ qui admettent une factorisation à travers μ sont précisément les fonctions $\mathbb{T}$-invariantes sur M (notées $C^\infty(M)^{\mathbb{T}}$). À cause de ceci, nous identifierons librement $C^\infty(M)^{\mathbb{T}}$ avec $C^\infty(\Delta)$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux structures presque-kählériennes généralisées de type symplectique sur (M, ω) qui sont invariantes sous l'action de $\mathbb{T}$. Conformément à l'identification établie à la Proposition 1.3.1, une telle structure peut être considérée comme une structure presque-complexe $\mathbb{T}$-invariante J dominant ω. Rappelons aussi qu'un tel J représente une structure presque-kählérienne généralisée intégrable si et seulement si J et J^{*_ω} sont intégrables.

Notation 3.0.1. L'ensemble des structures presque-kählériennes généralisées (resp. kählériennes généralisées) de type symplectique $\mathbb{T}$-invariantes sera noté $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ (resp. $GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$).

3.1. Le potentiel symplectique

La première proposition de cette section établie que pour chaque $J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, la condition de positivité nous assure que J envoie la distribution isotrope [1] tangente aux orbites de l'action sur une distribution transversale intégrable. Ainsi, sur $\mathring{M}$ où l'action est libre, cette paire de distributions détermine des coordonnées locales holomorphes.

Lemme 3.1.1. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et J une structure complexe dominant ω. Pour tout sous-espace isotrope $L \subset V$,*

$$L \cap JL = 0.$$

Preuve. Si $v \in L \cap JL$, alors $Jv \in L \cap JL$ et donc $\omega(v, Jv) = 0$. Mais comme J domine ω, ceci implique $v = 0$. $\square$

Proposition 3.1.1. *Étant donnée une base $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ de $\mathfrak{t}$ et $K_i := \xi_i^\sharp$ les actions infinitésimales sur M correspondantes, il existe autour de chaque point de $\mathring{M}$, des coordonnées locales J-holomorphes (u, t) telles que*

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = -JK_i, \ \frac{\partial}{\partial t^i} = K_i.$$

De plus, pour chaque tel système de coordonnées, on peut remplacer les fonctions $u^1, \dots, u^m$ par les fonctions $\mu^1, \dots, \mu^m$ (où $\mu^i := \mu^{\xi_i}$) pour obtenir des coordonnées $(\mu^1, \dots, \mu^m, t^1, \dots, t^m)$.

Preuve. Partout sur M, l'espace tangent aux orbites de l'action est engendré par les actions infinitésimales $K_1, \dots, K_m$. En particulier, sur $\mathring{M}$ où les orbites sont de dimension m, les K_i sont linéairement indépendants. Notons $\mathcal{K}$ la distribution lagrangienne sur $\mathring{M}$ engendrée par les K_i. Le Lemme 3.1.1 implique que $\mathcal{K} \oplus J\mathcal{K} = T\mathring{M}$. Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que le crochet de Lie de chaque paire d'éléments dans la base $(K_1, \dots, K_m, JK_1, \dots, JK_m)$ s'annule. La structure multiplicative sur $\mathfrak{t}$ étant triviale, on a $[K_i, K_j] = [\xi_i, \xi_j]^\sharp = 0$ $\forall i, j$. Ensuite, comme l'action de $\mathbb{T}$ préserve J, nous avons $\mathcal{L}_{K_i} J = 0$ $\forall i$, ce qui est équivalent à $[K_i, J\cdot] = J[K_i, \cdot]$. En particulier, $[K_i, JK_j] = J[K_i, K_j] = 0$. Finalement, J étant intégrable, l'égalité manquante $[JK_i, JK_j] = 0$ découle de l'annulation du tenseur de Nijenhuis $N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$.

1. Les orbites d'une action hamiltonienne par un groupe abélien sont isotropes ([**57**] p.171).

Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, on note que les 1-formes $d\mu^i$ sont ω-duales aux vecteurs $-K_i$ donc en particulier, elles forment sur $\mathring{M}$ un système de covecteurs linéairement indépendants. De plus, par $\mathbb{T}$-invariance de μ, il est clair que $K_i \in \mathrm{Ker}(d\mu^j)$ $\forall i, j$. On en déduit que $\mathrm{span}(d\mu^1, \ldots, d\mu^m) = \mathrm{span}(du^1, \ldots, du^m)$, et donc les fonctions $(\mu^1, \ldots, t^m)$ définissent un difféomorphisme local. $\square$

Pour une valeur de $(\mu^1, \ldots, \mu^m)$ fixée, les fonctions t^i définissent un système de coordonnées locales sur l'orbite (difféomorphe à $\mathbb{T}$) correspondante [2]. Pour cette raison, les fonctions t^i sont appelées **coordonnées angulaires**. Aussi, il est important de noter que même si les fonctions u^i et t^i ne sont définies que localement, les champs de coordonnées $\frac{\partial}{\partial u^i}$, $\frac{\partial}{\partial t^i}$, $\frac{\partial}{\partial \mu^i}$ (de même que les 1-formes du^i, dt^i, $d\mu^i$) sont bien définis globalement sur $\mathring{M}$ pour un choix de base (ξ_i) de $\mathfrak{t}$ fixé. *Pour la suite, on fixe une fois pour toute une base (ξ_i) de $\mathfrak{t}$ et on note (x^i) les coordonnées sur $\mathfrak{t}^*$ induites par la base duale (ξ_i^*).* Notons la relation $\mu^i = \mu^* x^i$.

Proposition 3.1.2. *Soit $J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ avec coordonnées angulaires $t^1, \ldots, t^m$ correspondantes comme à la Proposition 3.1.1. Localement sur $\mathring{M}$, J est de la forme antidiagonale*

$$\sum_{i,j=1}^m \Psi_{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^m \Psi^{ij} \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j, \tag{3.1.1}$$

où la matrice $\Psi \in C^\infty(\mathring{M}, \mathbb{R}^{m\times m})$ est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial \mu^i} = \sum_{j=1}^m \Psi_{ji} \frac{\partial}{\partial u^j}. \tag{3.1.2}$$

et où $\Psi^{ij} = (\Psi^{-1})_{ij}$. Plus généralement, pour une structure presque-complexe $\mathring{J}$ définie sur $\mathring{M}$ et $\mathcal{K}$ la distribution lagrangienne sur $\mathring{M}$ tangente aux orbites, les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathring{J}\mathcal{K} = J\mathcal{K}$;

(ii) $\mathring{J}$ définie sur $\mathring{M}$ est de la forme antidiagonale

$$\mathring{J} = \sum_{i,j=1}^m \mathring{\Psi}_{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^m \mathring{\Psi}^{ij} \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j \tag{3.1.3}$$

relativement aux coordonnées (μ^j, t^j) induites par J comme à la Proposition 3.1.1.

2. Pour chaque $y \in \Delta$, la préimage $\mu^{-1}(y)$ est composée d'une seule orbite ([**57**] Theorem 29.4)

Preuve. On a vu dans la preuve de la Proposition 3.1.1 que $\operatorname{span}(d\mu^1, \ldots, d\mu^m) = \operatorname{span}(du^1, \ldots, du^m)$. Écrivons

$$du^i = \sum_{j=1}^m \Psi_{ij} d\mu^j,$$

de sorte que $Jdt^i = \sum_{j=1}^m \Psi_{ij} d\mu^j$ (cette équation détermine entièrement J puisque $J^2 = -\mathrm{Id}$). À ceci, on applique le fait suivant :

Fait 3.1.1. *Soit (x_i), (y_i) deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie V et T un endomorphisme de V. Si*

$$x_i = \sum_j A_{ji} y_j \quad \textit{et} \quad Tx_i = \sum_j T_{ji} y_j,$$

alors les bases duales (x_i^*), (y_i^*) et l'application duale T^* sont donnés par

$$x_i^* = \sum_j A^{ij} y_j^* \quad \textit{et} \quad T^* x_i^* = -\sum_j T^{ij} y_j^*.$$

Il vient que Ψ vérifie (3.1.2) et J est déterminée par

$$J\frac{\partial}{\partial t^i} = -\sum_{j=1}^m \Psi^{ji} \frac{\partial}{\partial \mu^j},$$

ce qui est équivalent à (3.1.1).

À cause de (3.1.2), on a

$$J\mathcal{K} = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial \mu^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mu^m}\right), \tag{3.1.4}$$

et donc une structure presque-complexe $\mathring{J}$ vérifie (i) si et seulement si elle prend la forme

$$\mathring{J}\frac{\partial}{\partial t^i} = -\sum_{j=1}^m \mathring{\Psi}^{ji} \frac{\partial}{\partial \mu^j}$$

pour une certaine matrice $\mathring{\Psi}$, ce qui est équivalent à (3.1.3). □

Remarque 3.1.1. *Pour tout $a \in \mathbb{T}$ vu comme difféomorphisme de M, on a $a_* = Id$ relativement aux coordonnées (μ^j, t^j). En effet, l'action de a laisse invariante les coordonnées μ^i donc $a_* \frac{\partial}{\partial \mu^i} = \frac{\partial}{\partial \mu^i}$, et*

$$a_* \left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a \cdot \exp(t\xi_i) \cdot x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(t\xi_i) \cdot a \cdot x) = \left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_{a \cdot x}.$$

*Il suit qu'*un tenseur est $\mathbb{T}$-invariant si et seulement si ses composantes relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial \mu}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ sont indépendantes des coordonnées $t^1, \ldots, t^n$. *En particulier, la matrice $\mathring{\Psi}$ de la Proposition 3.1.2 ne dépend que des coordonnées*

*$\mu^1, \ldots, \mu^n$, et donc peut être vu comme une fonction lisse définie sur $\mathring{\Delta}$. Alternativement, la formule $\mathring{\Psi}^{ij} = -d\mu^i(JK_j)$ rend manifeste le fait que Ψ^{ij} est une fonction $\mathbb{T}$-invariante sur $\mathring{M}$. Par le théorème de Schwarz [**56**] mentioné dans l'introduction du Chapitre 3, ceci implique que Ψ ne dépend que des coodonnées μ^j.*

Notation 3.1.1. On s'intéresse aux structures complexes $J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ dont le dual symplectique J^{*_ω} est lui aussi de forme antidiagonale. Ainsi, posons

$$DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) := \{J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \mid J^{*_\omega}\mathcal{K} = J\mathcal{K}\},$$

$$ADGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) := \{J \in AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \mid J^{*_\omega}\mathcal{K} = J\mathcal{K}\}.$$

Proposition 3.1.3. *Pour $J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $J^{*_\omega}\mathcal{K} = J\mathcal{K}$.

(ii) La distribution $J\mathcal{K}$ est lagrangienne.

(iii) Les coordonnées (μ^j, t^j) sont symplectiques.

De plus, si $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ et si $\mathring{J}$ est une structure presque-complexe sur $\mathring{M}$ de forme antidiagonale

$$\mathring{J} = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Psi}_{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Psi}^{ij} \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j \tag{3.1.5}$$

par rapport à des coordonnées symplectiques (μ^j, t^j) induites par J, alors $\mathring{J}^{*_\omega}$ est automatiquement aussi antidiagonale avec

$$\mathring{J}^{*_\omega} = -\sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Psi}_{ji} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j + \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Psi}^{ji} \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j. \tag{3.1.6}$$

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: De façon générale, pour (V, ω), un espace vectoriel symplectique muni d'une structure complexe J et L un sous-espace lagrangien, le sous-espace JL est lagrangien si et seulement si $J^{*_\omega}L = JL$. En effet, on a $\omega(JL, J^{*_\omega}L) = \omega(L, L) = 0$, et donc $J^{*_\omega}L \subset (JL)^{\perp_\omega}$. Or, par définition, JL est lagrangien si et seulement si $JL = (JL)^{\perp_\omega}$. L'équivalence entre (i) et (ii) tient donc pour n'importe quelle structure presque-complexe sur $\mathring{M}$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: De façon générale, on a

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}\right) = \omega\left(K_i, K_j\right) = 0,$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial \mu^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}\right) = -\omega\left(K_j, \frac{\partial}{\partial \mu^i}\right) = d\mu^j\left(\frac{\partial}{\partial \mu^i}\right) = \delta_i^j.$$

L'équivalence de (ii) et (iii) se déduit alors immédiatement de (3.1.4).

Du fait que les coordonnées (μ^j, t^j) sont symplectiques, si $\mathring{J}$ est de la forme (3.1.5), on déduit de $\omega(\mathring{J}\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \mathring{J}^{*\omega}\cdot)$ la formule (3.1.6). □

Une structure complexe $J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ est compatible avec ω si et seulement si $J = -J^{*\omega}$. Dans ce cas, la condition $J^{*\omega}\mathcal{K} = J\mathcal{K}$ est trivialement satisfaite. L'ensemble $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ peut donc être considérés comme une classe intermédiaire entre les structures kählériennes et kählériennes généralisées :

$$K_\omega^{\mathbb{T}}(M) \subsetneq DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \subsetneq GK_\omega^{\mathbb{T}}(M).$$

Définition 3.1.1. *Nous appellerons* **coordonnées admissibles** *des coordonnées (μ^j, t^j) induites comme à la Proposition 3.1.1 par un élément $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$.*

Remarque 3.1.2. *(1) Dans ce language, les Propositions 3.1.2 et 3.1.3 impliquent que $J \in GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ appartient à $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ si et seulement s'il existe des coordonnées admissibles (μ^j, t^j) par rapport auxquelle J est de forme antidiagonale* (3.1.1)*.*

(2) Il y a un choix canonique de coordonnées admissibles correspondant à prendre la structure complexe J comme étant la structure kählérienne standard sur M issue de la construction de Delzant. (Rappelons que dans son célèbre théorème, Delzant construit une variété symplectique torique ayant un polytope moment prescrit comme quotient symplectique de $\mathbb{C}^d$ par un certain sous-tore de l'action standard de $\mathbb{T}^d$. En particulier, cette action préserve la structure complexe standard de $\mathbb{C}^d$ et donc la structure kählérienne descend au quotient (cf. par exemple [**42**]*).) Dans ce cas, V. Guillemin* [**36**] *a déterminé une forme explicite pour la matrice Ψ en termes des fonctions L_j définissant le polytope moment :*

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\mu^i\partial\mu^j}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} L_j \log L_j\right).$$

Dans son travail fondateur sur les structures kählériennes toriques [**36**], V. Guillemin à découvert que pour $J \in K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, le dual de Legendre d'un potentiel kählérien relativement aux coordonnées complexes (u, t) permet de décrire complètement la structure kählérienne (ω, J) dans les coordonnées symplectiques (μ^j, t^j). À savoir, alors qu'un potentiel kählérien $\phi = \phi(u^1, \ldots, u^m)$ détermine la forme symplectique en coordonnées complexes par son hessien, son dual de Legendre $\phi^\star = \phi^\star(\mu^1, \ldots, \mu^m)$ détermine la structure complexe en coordonnées symplectiques par son hessien (i.e. $\Psi = \mathrm{Hess}_\mu(\phi^\star)$ dans la notation de la Proposition 3.1.2). Pour cette raison, la fonction $\phi^\star$ a pris le nom de «potentiel symplectique» dans la littérature [**20**].

Dans [**3**], M. Abreu fourni une dérivation alternative du potentiel symplectique. En se basant sur le Lemme 3.1.2 ci-bas, il argumente que l'existence d'un potentiel symplectique est équivalent à l'intégrabilité de J. Cette approche peut être généralisée à notre situation et donne lieu au prochain théorème.

Lemme 3.1.2. *Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert avec $H^1_{dR}(U) = 0$. Si*

$$G(x) = (G_{ij}(x^1, \ldots, x^m)) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{m\times m})$$

est une matrice $m \times m$ symétrique définie sur U telle que $G_{ij,k} = G_{ik,j}$ $\forall i, j, k$, alors $G = \mathrm{Hess}(g)$ pour une certaine fonction $g \in C^\infty(U)$.

Preuve. Pour chaque $i = 1, \ldots, m$, considérons la 1-forme sur U

$$\alpha_i := \sum_{j=1}^m G_{ij} dx^j.$$

En vertu de $G_{ij,k} = G_{ik,j}$, ces 1-formes sont fermées. Il existe donc des fonctions $f_i \in C^\infty(U)$ telles que

$$G_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}.$$

De même, à cause de $G_{ij} = G_{ji}$, la 1-forme

$$\beta := \sum_{i=1}^m f_i dx^i$$

est fermée. Il existe donc $g \in C^\infty(U)$ telle que $\beta = dg$, ou

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}.$$

□

Théorème 3.1.1. *Soit $\mathring{J} \in ADGK^{\mathbb{T}}_\omega(\mathring{M})$ qui prend la forme antidiagonale*

$$\mathring{J} = \sum_{i,j=1}^m \mathring{\Psi}_{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^m \mathring{\Psi}^{ij} \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j \tag{3.1.7}$$

par rapport à des coordonnées admissibles (μ^j, t^j). Alors, $\mathring{J}$ est une structure presque-complexe intégrable si et seulement si $\mathring{\Psi}_{ij,k} = \mathring{\Psi}_{ik,j}$ $\forall i, j, k$, tandis que $\mathring{J}^{*\omega}$ est intégrable si et seulement si $\mathring{\Psi}_{ji,k} = \mathring{\Psi}_{ki,j}$. Si ces deux conditions sont remplies (i.e. si $\mathring{J}$ est intégrable comme structure kählérienne généralisée), alors

$\mathring{\Psi}$ *est de la forme*

$$\mathring{\Psi} = \mathrm{Hess}(\tau) + C \tag{3.1.8}$$

où $\tau \in C^\infty(\mathring{\Delta})$ *est une fonction strictement convexe*[3] *et* C *est une matrice antisymétrique* constante. *Réciproquement, donnés* $\tau \in C^\infty(\mathring{\Delta})$ *strictement convexe et* C *une matrice antisymétrique, les formules* (3.1.7) *et* (3.1.8) *définissent un élément* $\mathring{J}$ *de* $DGK^{\mathbb{T}}_\omega(\mathring{M})$.

Preuve. Au niveau des covecteurs, la structure presque-complexe (3.1.7) est donnée par

$$\mathring{J}dt^i = \sum_{j=1}^m \mathring{\Psi}_{ij} d\mu^j. \tag{3.1.9}$$

Si $\mathring{J}$ est intégrable, la Proposition 3.1.1 garantie l'existence de coordonnées $\mathring{J}$-holomorphes $(\mathring{u}, \mathring{t})$ telles que $(d\mathring{u}^i, d\mathring{t}^i)$ est la base duale de $(-\mathring{J}K_i, K_i)$. Puisque $\mathring{J}\mathcal{K} = \mathrm{span}\left(\frac{\partial}{\partial \mu^j}\right)$, on a $d\mathring{t}^i = dt^i$, et donc l'équation (3.1.9) peut s'écrire

$$d\mathring{u}^i = \sum_{j=1}^m \mathring{\Psi}_{ij} d\mu^j.$$

Prenant la dérivée extérieure de cette équation, on obtient la condition $\mathring{\Psi}_{ij,k} = \mathring{\Psi}_{ik,j}$ $\forall i, j, k$. Réciproquement, si $\mathring{\Psi}_{ij,k} = \mathring{\Psi}_{ik,j}$ $\forall i, j, k$, alors prenant la dérivée extérieure de (3.1.9), on voit que la 1-forme $\mathring{J}^* dt^i$ est fermée. Elle est donc localement exacte, ce qui fourni des coordonnées complexes pour $\mathring{J}$. On a vu à la Proposition 3.1.3 que $\mathring{J}^{*\omega}$ prend la forme (3.1.6). Le même argument que pour $\mathring{J}$ montre donc que $\mathring{J}^{*\omega}$ est intégrable si et seulement si $\mathring{\Psi}_{ji,k} = \mathring{\Psi}_{jk,i}$ $\forall i, j, k$.

Si $\mathring{J}$ et $\mathring{J}^{*\omega}$ sont intégrables, alors prenant la somme et la différence des identités différentielles $\mathring{\Psi}_{ij,k} = \mathring{\Psi}_{ik,j}$ et $\mathring{\Psi}_{ji,k} = \mathring{\Psi}_{jk,i}$ correspondantes, on obtient les identités

$$\mathring{\Psi}^s_{ij,k} = \mathring{\Psi}^s_{ik,j}, \tag{3.1.10}$$

$$\mathring{\Psi}^a_{ij,k} = \mathring{\Psi}^a_{ik,j}, \tag{3.1.11}$$

où

$$\mathring{\Psi}^s = \frac{\mathring{\Psi} + \mathring{\Psi}^T}{2}, \quad \mathring{\Psi}^a = \frac{\mathring{\Psi} - \mathring{\Psi}^T}{2}$$

sont respectivement les parties symétriques et antisymétriques de $\mathring{\Psi}$. L'équation (3.1.11) implique que la matrice $\mathring{\Psi}^a$ est constante à cause de

$$\mathring{\Psi}^a_{ij,k} = \mathring{\Psi}^a_{ik,j} = -\mathring{\Psi}^a_{ki,j} = -\mathring{\Psi}^a_{kj,i} = \mathring{\Psi}^a_{jk,i} = -\mathring{\Psi}^a_{ij,k}.$$

3. Une fonction est dite **strictement convexe** si sa matrice hessienne est définie positive.

En vertu du Lemme 3.1.2, l'équation (3.1.10) implique quant à elle $\mathring{\Psi}^s = \mathrm{Hess}(\tau)$ pour une certaine fonction $\tau \in C^\infty(\mathring{\Delta})$. Le fait que $\mathring{J}$ domine ω est équivalent à la positivité de $\mathring{\Psi}$, et comme $\mathbf{x}^T C\mathbf{x} = 0$ pour toute matrice antisymétrique C et vecteur colonne $\mathbf{x}$, on a $\mathbf{x}^T\mathring{\Psi}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathring{\Psi}^s\mathbf{x}$, d'où que τ est strictement convexe. $\square$

Définition 3.1.2. *Étant données des coordonnées admissibles* (μ^j, t^j) *et* $\mathring{J} \in DGK^{\mathbb{T}}_\omega(\mathring{M})$ *de forme antidiagonale* (3.1.7) *pour* $\mathring{\Psi} = \mathrm{Hess}(\tau) + C$ *comme dans l'énoncé du Théorème 3.1.1, la fonction* τ *est appelée le* **potentiel symplectique** *de* $\mathring{J}$*.*

3.2. Compactification et déformation

On s'intéresse maintenant à la question de la compactification d'une structure kählérienne généralisée : quand une structure presque-kählérienne généralisée $\mathring{J} \in ADGK^{\mathbb{T}}_\omega(\mathring{M})$ sur $\mathring{M}$ est-elle la restriction d'une structure presque-kählérienne généralisée définie sur M ?

Soit (μ^j, t^j) des coordonnées admissibles sur M et $J \in DGK^{\mathbb{T}}_\omega(M)$ (défini globalement) de la forme

$$J = \sum_{i,j=1}^m \Psi_{ij}\frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^m \Psi^{ij}\frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j. \tag{3.2.1}$$

Soit aussi $\mathring{J} \in ADGK^{\mathbb{T}}_\omega(\mathring{M})$ (définie sur $\mathring{M}$) qui prend la forme

$$\mathring{J} = \sum_{i,j=1}^m \mathring{\Psi}_{ij}\frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^m \mathring{\Psi}^{ij}\frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j. \tag{3.2.2}$$

Posons

$$\beta := \omega(\cdot, J\cdot), \quad \mathring{\beta} := \omega(\cdot, \mathring{J}\cdot).$$

Il est possible d'argumenter comme dans la situation presque-kählérienne traitée en [**5**] pour obtenir des conditions suffisantes à la compactification d'un tel $\mathring{J}$. En effet, à cause de

$$Jdt^i = -\sum_{i,j=1}^m \Psi_{ij}d\mu^j, \tag{3.2.3}$$

on peut écrire

$$\mathring{\beta} - \beta = \sum_{i,j=1}^m (\mathring{\Psi} - \Psi)_{ij}d\mu^i \otimes d\mu^j + \sum_{i,j,k,l=1}^m (\mathring{\Psi}^{-1} - \Psi^{-1})_{ij}(\Psi_{ik}Jd\mu^k) \otimes (\Psi_{jl}Jd\mu^l)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} (\mathring{\Psi} - \Psi)_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + \sum_{k,l=1}^{m} (\Psi^T \mathring{\Psi}^{-1} \Psi - \Psi^T)_{kl} (Jd\mu^k) \otimes (Jd\mu^l). \tag{3.2.4}$$

Et ici, à condition que $\mathring{\Psi} - \Psi$ et $\Psi^T \mathring{\Psi}^{-1} \Psi - \Psi^T$ admettent une extension lisse sur Δ, le membre de droite de (3.2.4) définit une forme bilinéaire $\mathbb{T}$-invariante lisse définie *sur tout* M. Il suit que $\mathring{\beta}$ (alternativement, $\mathring{J}$) admet une extension lisse à M. Par densité de $\mathring{M}$ dans M, cette extension de $\mathring{J}$ vérifie $\mathring{J}^2 = -\mathrm{Id}$ sur tout M et est intégrable si $\mathring{J}$ l'est. Par contre, un argument de continuité permet seulement de dire que $\mathring{\beta}$ est définie *semi*-positive sur M. Pour que la compactification de $\mathring{J}$ domine ω, il faut donc s'assurer que la forme bilinéaire

$$\beta + \sum_{i,j=1}^{m} (\mathring{\Psi} - \Psi)_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + (\Psi^T \mathring{\Psi}^{-1} \Psi - \Psi^T)_{ij} (Jd\mu^i) \otimes (Jd\mu^j)$$

est définie positive sur $M \backslash \mathring{M}$. On vient de prouver le

Théorème 3.2.1. *Soit* $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ *une variété symplectique torique,* $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ *de la forme* (3.2.1)*, et* $\mathring{J} \in ADGK_\omega^{\mathbb{T}}(\mathring{M})$ *(resp.* $\mathring{J} \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(\mathring{M})$*) de la forme* (3.2.2)*. Si la matrice* $\mathring{\Psi}$ *associée à* $\mathring{J}$ *vérifie les trois conditions*

(C1) $\mathring{\Psi} - \Psi$ *admet une extension lisse sur* Δ *;*

(C2) $\Psi^T \mathring{\Psi}^{-1} \Psi - \Psi^T$ *admet une extension lisse sur* Δ *;*

(C3) $\beta + \sum_{i,j=1}^{m} (\mathring{\Psi} - \Psi)_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + (\Psi^T \mathring{\Psi}^{-1} \Psi - \Psi^T)_{ij} (Jd\mu^i) \otimes (Jd\mu^j)$ *est définie positive sur* $M \backslash \mathring{M}$ *;*

alors $\mathring{J}$ *est la restriction d'un élément de* $ADGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ *(resp. de* $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$*).*

Comme en [**5**] (cf. Remark 4), les conditions (C1), (C2) peuvent être reformulées :

Lemme 3.2.1. *La paire de conditions (C1), (C2) est équivalente à la paire*

(C1) $\mathring{\Psi} - \Psi$ *admet une extension lisse sur* Δ*,*

(C2') l'extension lisse de $\Psi^{-1} \mathring{\Psi}$ *sur* Δ *est inversible.*

Preuve. Puisque $\Psi_{ij}^{-1} = \beta(K_i, K_j) \in C^\infty(M)$, il suit que Ψ^{-1} admet une extension lisse à Δ. Multipliant (C1) par Ψ^{-1}, on voit que $\Psi^{-1}\Psi$ admet une extension lisse à Δ. Étant donné (C1), la condition (C2') à donc du sens. Supposons que (C2') tient. Alors $(\Psi^{-1}\mathring{\Psi})^{-1} = \mathring{\Psi}^{-1}\Psi$ est lisse sur Δ. Multipliant (C1) à droite par $\mathring{\Psi}^{-1}\Psi$, on obtient (C2). Réciproquement, si (C2) tient, multipliant (C2) à gauche par $(\Psi^T)^{-1}$, on obtient que $\mathring{\Psi}^{-1}\Psi$ admet une extensions lisse sur Δ. Or, par continuité, cette extension de $\mathring{\Psi}^{-1}\Psi$ doit être l'inverse de l'extension de $\Psi^{-1}\mathring{\Psi}$, ce qui montre que (C2') tient. $\square$

Comme conséquence immédiate de ces conditions suffisantes à la compactification, on obtient une manière simple de déformer une structure kählérienne torique en une structure kählérienne torique généralisée.

Corollaire 3.2.1. *Soit* (μ^j, t^j) *des coordonnées admissibles sur* M *et soit* $J_0 \in K^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ *une structure complexe* ω*-compatible de la forme*

$$J_0 = \sum_{i,j=1}^{m} S_{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^{m} S^{ij} \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j$$

pour une certaine matrice symétrique et définie positive S. *Soit aussi* C *une matrice antisymétrique quelconque et la famille de structures complexes* $\mathring{J}_t \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(\mathring{M})$ $(t \in \mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathring{J}_t = \sum_{i,j=1}^{m} \Psi_{ij}(t) \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes d\mu^j - \sum_{i,j=1}^{m} \Psi^{ij}(t) \frac{\partial}{\partial \mu^i} \otimes dt^j,$$

où

$$\Psi(t) = S + tC.$$

Pour $|t|$ *suffisamment petit, la famille* $\mathring{J}_t$ *est la restriction à* $\mathring{M}$ *d'une famille* $J_t \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$.

Preuve. Par les travaux d'Apostolov et al. sur la compactification des structures kählériennes (voir Proposition 3.3.2 ci-bas), on sait que les conditions (C1), (C2') et (C3) sont vérifiées par la matrice $\Psi(0) = S$. Il suffit de constater que pour $|t|$ suffisamment petit, $\Psi(t)$ continue de vérifier les conditions (C1), (C2'), (C3). $\square$

Selon un théorème de R. Goto [**30, 31**] (voir aussi [**43**]), sur une variété kählérienne compacte (M, ω, J) avec structure de Poisson holomorphe $\sigma \neq 0$, la structure kahlérienne généralisée triviale $(\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J}_J)$ peut être déformée dans la direction de $[\sigma\omega] \in H^{0,1}(M, T^{1,0})$ [4] en une structure kählérienne généralisée non triviale $(\mathcal{J}_1(t), \mathcal{J}_2(t))$. Plus précisément, les structures complexes $J_\pm(t)$ de la structure bihermitienne sous-jacente dépendent de façon analytique de t et si $z^1, \ldots, z^m$ sont des coordonnées locales holomorphes pour $J_+(0)$ par rapport auxquelles on a

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_+(t) \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{\overline{j}k} \frac{\partial}{\partial z^k} + \beta_{\overline{j}\overline{k}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}^k},$$

4. Si on voit $\sigma = \sum_{k,\ell} \sigma^{k\ell} \frac{\partial}{\partial z^k} \otimes \frac{\partial}{\partial z^\ell}$ et $\omega = \sum_{k,\ell} \omega_{k\overline{\ell}} dz^k \otimes d\overline{z}^\ell$ comme des applications de fibré $\Lambda^{1,0} \to T^{1,0}$ et $T^{0,1} \to \Lambda^{1,0}$ respectivement, alors la classe $[\sigma\omega]$ est représentée par $\sigma \circ \omega = \sum_{j,k,\ell} \omega_{\ell\overline{j}} \sigma^{\ell k} d\overline{z}^j \otimes \frac{\partial}{\partial z^k} \in \Omega^{0,1}(M, T^{1,0})$.

alors la classe de Kodaira-Spencer de la déformation $J_+(t)$ est représentée localement par le tenseur $\sum_{j,k=1}^m \alpha_{\bar{j}k} d\bar{z}^j \otimes \frac{\partial}{\partial z^k}$ avec

$$\alpha_{\bar{j}k} = \sum_{\ell=1}^m \omega_{\ell\bar{j}} \sigma^{\ell k}.$$

La première variation de $J_-(t)$ donne quant à elle la classe inverse.

Proposition 3.2.1. *La classe de Kodaira-Spencer de la déformation J_t du Corollaire 3.2.1 est $[\sigma\omega]$ où σ est la structure de Poisson holomorphe donnée par*

$$\sigma = 2 \sum_{j,k=1}^m C_{jk} K_j^{1,0} \otimes K_k^{1,0}.$$

Preuve. Soit $z^j = u^j + it^j$ les coordonnées complexes définies par J_0 au sens de la Proposition 3.1.1. Conformément à (3.1.2), on peut écrire

$$J_t = \sum_{k,\ell,p=1}^m \Psi_{k\ell}(t) S^{\ell p} \frac{\partial}{\partial t^k} \otimes du^p - \Psi^{k\ell}(t) S_{pk} \frac{\partial}{\partial u^p} \otimes dt^\ell.$$

En utilisant les relations $du^p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \frac{1}{2}\delta_{pj}$ et $dt^\ell\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \frac{i}{2}\delta_{\ell j}$ et aussi $(\Psi^{-1})'(0) = -S^{-1}CS^{-1}$, on obtient

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_t \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \sum_{k=1}^m i(CS^{-1})_{kj} \frac{\partial}{\partial z^k}; \tag{3.2.5}$$

i.e. $\alpha_{\bar{j}k} = i(CS^{-1})_{kj}$. Maintenant, calculons le cocycle $\sigma\omega$. D'une part, on a

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k,\ell=1}^m S^{k\ell} dz^k \otimes d\bar{z}^\ell,$$

et utilisant la relation $\frac{\partial}{\partial z^j} = -iK_j^{1,0}$, on peut écrire localement

$$\sigma = -2 \sum_{k,\ell=1}^m C_{k\ell} \frac{\partial}{\partial z^k} \otimes \frac{\partial}{\partial z^\ell}.$$

De ceci, il apparaît clairement que σ est une structure de Poisson holomorphe, et on a

$$\sum_{\ell=1}^m \omega_{\ell\bar{j}} \sigma^{\ell k} = i(CS^{-1})_{kj}.$$

$\square$

Remarque 3.2.1. *(1) La structure de Poisson holomorphe σ_t associée à J_t au sens de l'équation* (1.3.11) *est*

$$\sigma_t = -4 \sum_{j,k=1}^m \Big(tC + tS(\Psi(t)^T)^{-1} CS^{-1} \Psi(t)^T\Big)_{jk} \frac{\partial}{\partial z^j} \otimes \frac{\partial}{\partial z^k}.$$

Il n'est pas difficile de voir qu'en dimension 4, ceci se réduit à $\sigma_t = 4t\sigma$, *tandis qu'en général, on a* $\sigma_t = 4t\sigma + O(t^2)$.

(2) Dans l'esprit de [**40, 33**], *une autre façon de produire un élément de* $GK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ *par déformation d'une structure kählérienne torique* J_0 *à partir d'un champ vectoriel* $\mathbb{T}$*-invariant* X *est de considérer la famille de 2-formes*

$$\omega_t := \frac{1}{t}\int_0^t (\varphi_s^X)^*\omega ds,$$

où φ_s^X *est le flot de* X. *On a* $\omega_0 = \omega$ *et pour tout* $t > 0$, ω_t *est une 2-forme fermée, dominée par* J_0 *pour* t *suffisament petit. En fait, si* X *est holomorphe de sorte que* $(\varphi_s^X)_*$ *commute avec* J, *alors la forme* ω_t *est symplectique pour tout* $t > 0$. *Par exemple, si* X *est de la forme* $X = \sum_{j=1}^m X^j K_j$, *alors son flot est de la forme*

$$\varphi_s^X(\mu^1, \ldots, \mu^m, t^1, \ldots, t^m) = \left(\mu^1, \ldots, \mu^m, t^1 + sX^1, \ldots, t^m + sX^m\right),$$

d'où on calcule

$$\omega_t = \omega + \frac{t}{2}\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial X^j}{\partial \mu^k} d\mu^j \wedge d\mu^k.$$

(3) Alors que le procéssus de déformation du Corollaire 3.2.1 est valide sur toute variété symplectique torique, il y a plusieurs résultats dans la littérature concernant la déformation de structures kählériennes torique le long d'une structure kählérienne généralisée de type symplectique. Par exemple, Y. Lin and S. Tolman [**48**] *ont développés une notion de réduction symplectique pour les structure kählériennes généralisées (voir aussi* [**44, 35**]*). Ils montrent ensuite que sous certaines conditions sur le polytope moment* Δ, *il existe une déformation de structure kählérienne généralisée* $(\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J}_\epsilon)$ *(au sens introduit par M. Gualtieri* [**32**]*) de la structure kählérienne standard* (ω, J) *sur* $\mathbb{C}^d$ *qui descend au quotient symplectique sur une structure kählérienne généralisée* $(\mathcal{J}_{\omega_{\rm red}}, \hat{\mathcal{J}}_J)$, *où* $\omega_{\rm red}$ *est la forme symplectique réduite. Par exemple, ceci s'applique aux surfaces de Hirzebruch. Par un procéssus similaire, les auteurs de* [**35**] *obtiennent des déformations explicites de la structure kählérienne standard* (ω_{FS}, J) *sur* $\mathbb{C}P^2$ *en une structure kählérienne généralisées de type symplectique* $(\mathcal{J}_{\omega_{FS}}, \hat{\mathcal{J}}_\epsilon)$. *Les résultats dans*

3.3. Compactification en dimension 4

Sauf mention contraire, on suppose dans cette section que M est de dimension 4 (i.e. $m=2$). Nous montrons que dans ce cas, la condition (C3) est automatiquement vérifiée et les conditions (C1), (C2) sont nécessaires et suffisantes à la compactification d'un élément de $DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(\mathring{M})$. Avant de démontrer ceci, notons certaines identités valides en dimension 4. Soit $\mathring{J} \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(\mathring{M})$ qui prend la forme (3.1.1) par rapport à des coordonnées admissibles (μ^j, t^j). Selon le Théorème 3.1.1, la décomposition $\mathring{\Psi} = \mathring{\Psi}^s + \mathring{\Psi}^a$ de $\mathring{\Psi}$ en sa partie symétrique et antisymétrique est de la forme $\mathring{\Psi}^s = S$, $\mathring{\Psi}^a = C$ pour une matrice symétrique définie positive S et une matrice antisymétrique constante $C = c\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. La décomposition $\mathring{\Psi}^{-1} = (\mathring{\Psi}^{-1})^s + (\mathring{\Psi}^{-1})^a$ vérifie

$$(\mathring{\Psi}^{-1})^s = \frac{\det S}{\det \mathring{\Psi}} S^{-1}, \quad (\mathring{\Psi}^{-1})^a = -\frac{1}{\det \mathring{\Psi}} C.$$

La métrique riemannienne $\mathring{g} = \omega(\cdot, \mathring{\Psi}\cdot)^s$ et la 2-forme $\mathring{b} = -\omega(\cdot, \mathring{\Psi}\cdot)^a$ prennent quant à eux la forme

$$\mathring{g} = \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + \frac{\det S}{\det \mathring{\Psi}} S^{ij} dt^i \otimes dt^j, \tag{3.3.1}$$

$$\mathring{b} = -c d\mu^1 \wedge d\mu^2 + \frac{c}{\det \mathring{\Psi}} dt^1 \wedge dt^2. \tag{3.3.2}$$

La fonction d'angle $\mathring{p} = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathring{J}\mathring{J}^{*_\omega})$ (voir Lemme 4.1.1) est

$$\mathring{p} = \frac{c^2 - \det S}{\det \mathring{\Psi}}. \tag{3.3.3}$$

En particulier,

$$\frac{1-\mathring{p}}{2} = \frac{\det S}{\det \mathring{\Psi}}, \quad \frac{1+\mathring{p}}{2} = \frac{c^2}{\det \mathring{\Psi}}. \tag{3.3.4}$$

Enfin, les déterminants sont reliés par la formule

$$\det \mathring{\Psi} = \det S + c^2. \tag{3.3.5}$$

Théorème 3.3.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension 4, $J \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ de la forme* (3.2.1) *et $\mathring{J} \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(\mathring{M})$ de la forme* (3.2.2) *par rapport à des coordonnées admissibles (μ^j, t^j). Si $\mathring{J}$ vérifie les conditions (C1) et (C2) du Théorème 3.2.1 relativement à J, alors $\mathring{J}$ est la restriction d'un élément de $DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$.*

Preuve. Comme les conditions (C1) et (C2) sont vérifiées, la discussion de la section 3.2 garantie que $\mathring{J}$ est la restriction d'une structure presque-complexe $\mathring{J}_c$

sur M. Par continuité, cette compactification de $\mathring{J}$ est intégrable. Il s'agit de montrer que $\mathring{J}_c$ domine ω ; i.e. que la forme bilinéaire (non dégénérée) $\mathring{\beta}_c := \omega(\cdot, \mathring{J}_c \cdot)$ est définie positive sur $M \backslash \mathring{M}$. Par continuité on sait que $\mathring{\beta}_c$ y est définie semi-positive. Par conséquent, $\mathring{\beta}_c$ sera définie positive si la partie antisymétrique $-\mathring{b}_c$ de $\mathring{\beta}_c$ s'annule sur $M \backslash \mathring{M}$. Utilisant (3.2.3), l'équation (3.3.2) peut aussi s'écrire

$$\mathring{b} = -c \left(\mathrm{Id} - \frac{\det \Psi}{\det \mathring{\Psi}} J^* \right) d\mu^1 \wedge d\mu^2.$$

Par continuité, cette formule décrit tout aussi bien $\mathring{b}_c$. En effet, les 1-formes $d\mu^i$ sont définies globalement ainsi que le quotient $\frac{\det \Psi}{\det \mathring{\Psi}}$ (par la condition (C2') du Lemme 3.2.1). Or, $d\mu^1 \wedge d\mu^2$ s'annule sur $M \backslash \mathring{M}$, puisque $d\mu^i$ est ω-dual à K_i et les K_i sont linéairement dépendants sur $M \backslash \mathring{M}$. On conclut que $\mathring{b}_c$ s'annule sur $M \backslash \mathring{M}$. □

Proposition 3.3.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension 4, et $J \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M) \backslash K^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$. Alors*

$$\begin{aligned} M \backslash \mathring{M} &= \{x \in M \mid J(x) \text{ est compatible avec } \omega(x)\} \\ &= \{x \in M \mid J(x) = -J^{*_\omega}(x)\}, \\ &= \{x \in M \mid p(x) = -1\}, \end{aligned}$$

où $p = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(J J^{*_\omega})$.

Preuve. On suppose que J prend la forme (3.2.1) relativement à des coordonnées admissibles. En combinant (3.3.4) et (3.3.5), on obtient la formule

$$\frac{1-p}{2} = \frac{\det S}{\det S + c^2}, \tag{3.3.6}$$

d'où il vient $p(x) > -1 \ \forall x \in \mathring{M}$. De plus, comme $\beta = \omega(\cdot, J\cdot)$ prend la forme

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{2} \Psi_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + \Psi^{ij} dt^i \otimes dt^j,$$

on peut écrire $\Psi^{ij} = \beta(K_i, K_j)$, où $\beta(K_i, K_j)$ est une fonction lisse et définie sur tout M. Il suit que $\Psi^{-1} \in C^\infty(\Delta)$. De plus, $\det(\Psi^{-1}) = 0$ sur $\partial\Delta$ puisque les champs K_i, $i = 1, 2$ sont linéairement dépendants sur $M \backslash \mathring{M}$. Par (3.3.5), ceci implique que $\det S \to +\infty$ lorsque $x \to \partial\Delta$. Par passage à la limite dans (3.3.6), ceci implique à son tour que $\frac{1-p}{2} = 1$ sur $M \backslash \mathring{M}$; i.e. $p(x) = -1 \ \forall x \in M \backslash \mathring{M}$. L'équivalence entre les différentes expressions de $M \backslash \mathring{M}$ correspond au fait démontré au Lemme 4.1.1 que $p(x) = -1$ si et seulement si $J = -J^{*_\omega}$. □

Corollaire 3.3.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension 4, $J \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ et $g = \omega(\cdot, J\cdot)^s$. La métrique*

$$g_{AK} := \sqrt{\frac{1-p}{2}}g$$

est lisse, $\mathbb{T}$-invariante et ω-compatible.

Preuve. Ainsi définie, la métrique g_{AK} est lisse puisque la fonction $1-p$ ne s'annule jamais sur M. Ceci est dû au fait que $p(x) = 1$ si et seulement si $J(x) = J^{*_\omega}(x)$ (voir Lemme 4.1.1), ce qui ne se produit en aucun point de M puisque J domine ω. En utilisant (3.3.4), il est trivial de vérifier que g_{AK} est ω-compatible sur $\mathring{M}$, et donc sur M par continuité. □

En terme de coordonnées admissibles (μ^j, t^j) sur $\mathring{M}$, on a

$$g_{AK} = \sum_{i,j=1}^{2} \sqrt{\frac{1-p}{2}} S_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + \left(\sqrt{\frac{1-p}{2}}\right)^{-1} S^{ij} dt^i \otimes dt^j.$$

Plus généralement, il est facile de voir que pour toute fonction positive $f \in C^\infty(\mathring{M})$, la métrique définie sur $\mathring{M}$ par

$$\mathring{g}_f := \sum_{i,j=1}^{2} f S_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + f^{-1} S^{ij} dt^i \otimes dt^j, \tag{3.3.7}$$

est compatible avec ω. En particulier, pour $f \equiv 1$, la métrique résultante est intégrable (Théorème 3.1.1). Pour cette raison, on introduit la notation suivante.

Notation 3.3.1. On note $\mathring{g}_K$ la métrique kählérienne torique sur $\mathring{M}$ correspondant à la fonction $f \equiv 1$. Autrement dit,

$$\mathring{g}_K = \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + S^{ij} dt^i \otimes dt^j. \tag{3.3.8}$$

Lemme 3.3.1. *Soit $f \in C^\infty(M)^{\mathbb{T}}$ une fonction $\mathbb{T}$-invariante positive telle que $f|_{M\setminus\mathring{M}} \equiv 1$. Alors, $\mathring{g}_f$ est la restriction à $\mathring{M}$ d'une métrique presque-kählérienne torique définie sur M si et seulement si $\mathring{g}_K$ est la restriction à $\mathring{M}$ d'une métrique kählérienne torique définie sur M.*

Remarque 3.3.1. (1) En particulier, puisque $\mathring{g}_{AK} = \mathring{g}_{f_{AK}}$ (pour $f_{AK} = \sqrt{\frac{1-p}{2}}$) admet une compactification à M (Corollaire 3.3.1) et $f_{AK}|_{M\setminus\mathring{M}} \equiv 1$ (Proposition 3.3.1), il suit de ce lemme que $\mathring{g}_f$ admet une compactification g_f à M pour toute fonction f vérifiant les hypothèses du Lemme 3.3.1. De cette famille de métriques presque-kählériennes toriques, g_{AK} se distingue comme étant l'unique métrique *conforme* à g qui est compatible avec ω.

(2) Il est connu depuis [**4**] (Corollary 1) que toute variété de dimension 4 admettant une structure kählérienne généralisée est kählérienne. Notre construction associe de façon canonique une structure kählérienne (la métrique g_K) à un élément de $DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$.

La preuve du Lemme 3.3.1 repose sur le critère de compactification pour les métriques presque-kählériennes toriques de Apostolov-Calderbank-Gauduchon-Tønnesen-Friedman [**5**] que nous reproduisons ici sous une forme adaptée à nos desseins.

Définition 3.3.1. *Soit* $(\Delta, \Lambda, \nu_1, \dots, \nu_d)$ *un polytope de Delzant et soit* x_0 *un point appartenant à l'intérieur d'une face* F *de dimension* k *de* Δ*. On choisit un sommet* v *de* F *quelconque. En réordonnant au besoin les normales* $\nu_1, \dots, \nu_d$*, on peut supposer que* v *est caractérisé par l'annulation de* $L_1, \dots, L_m$ *et que* F *est caractérisé par l'annulation de* $L_1, \dots, L_{m-k}$*. Comme* Δ *est un polytope de Delzant, l'application*

$$\mathfrak{t}^* \to \mathbb{R}^m : x \mapsto (L_1(x), \dots, L_m(x))$$

est un isomorphisme affine. Les coordonnées $y = (y^i)$ *définies par* $y^i = L_i(x) - L_i(x_0)$ *pour* $i = 1 \dots, m$ *s'appellent* **coordonnées adaptées à** F *(centrées en* x_0*).*

Proposition 3.3.2 ([**5**], Proposition 1)**.** *Soit* $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ *une variété symplectique torique de dimension* $n = 2m$*. Une structure presque-kählérienne torique* $\mathring{J} \in AK^{\mathbb{T}}_{\omega}(\mathring{M})$ *définie sur* $\mathring{M}$ *est la restriction d'un élément de* $AK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ *si et seulement si pour chaque face* F *de dimension* k *de* Δ *avec coordonnées adaptées* (y^i)*, la matrice* H_{ij}*, définie sur* $\mathring{\Delta}$ *comme la matrice dont l'inverse est* $H^{ij}(\mu(p)) = \mathring{g}_p(X_{\nu_i}, X_{\nu_j})$ $(1 \leq i, j \leq m)$*, vérifie les conditions suivantes :*

(i) H_{ij} *admet une extension lisse à* Δ *;*

(ii) sur chaque facette F_i *contenant* F*,*

$$H_{ij}(y) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_{ii}}{\partial y^i} = 2;$$

(iii) la sous-matrice $(H_{ij})^m_{i,j=m-k+1}$ *est définie positive sur* $\mathring{F}$ $(k > 0)$*.*

Alternativement, $\mathring{J}$ *est la restriction d'un élément de* $AK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ *si et seulement si les conditions (C1), (C2') du Lemme 3.2.1 sont vérifiées.*

Preuve du Lemme 3.3.1. Si H_{ij} est la matrice correspondant à $\mathring{g}_K$ comme dans l'énoncé de la Proposition 3.3.2, alors fH_{ij} est celle correspondant à $\mathring{g}_f$. Il s'agit alors de constater que les conditions (i)-(iii) sont vérifiées par H_{ij} si et seulement si fH_{ij} les vérifient. Pour (i) et (iii), c'est trivial, alors que pour (ii), on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial(fH_{ii})}{\partial y^i}(y) &= \frac{\partial f}{\partial y^i}(y)H_{ii}(y) + f(y)\frac{\partial H_{ii}}{\partial y^i}(y)\\ &= \frac{\partial H_{ii}}{\partial y^i}(y),\end{aligned}$$

en utilisant (i) et l'hypothèse $f(y) = 1$ pour $y \in \partial\Delta$. $\square$

Finalement, on peut démontrer le résultat annoncé en début de section.

Théorème 3.3.2. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension 4 et $\mathring{J} \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(\mathring{M})$ de la forme (3.1.1) relativement à des coordonnées admissibles, où $\mathring{\Psi} = S + C$. Soit aussi la métrique riemannienne $\mathring{g} = \omega(\cdot, \mathring{J}\cdot)^s$ et $\mathring{g}_K$ la métrique presque-kählérienne torique sur $\mathring{M}$ définie par l'équation (3.3.8). Alors, $\mathring{J}$ est la restriction d'un élément de $DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ si et seulement si $\mathring{g}_K$ est la restriction à $\mathring{M}$ d'une métrique kählérienne torique ω-compatible sur M. En particulier, cette condition est équivalente aux conditions suivantes pour la matrice H_{ij}, définie sur $\mathring{\Delta}$ comme la matrice dont l'inverse est $H^{ij}(\mu(p)) = \mathring{g}_K|_p(X_{\nu_i}, X_{\nu_j})$ $(1 \leq i, j \leq 2)$: Pour chaque face F de dimension k de Δ avec coordonnées adaptées (y^i),*

(i) H_{ij} admet une extension lisse à Δ ;

(ii) sur chaque facette F_i contenant F,

$$H_{ij}(y) = H_{ji}(y) = 0, \quad \forall j = 1, 2 \quad et \quad \frac{\partial H_{ii}}{\partial y^i} = 2;$$

(iii) la sous-matrice $(H_{ij})^m_{i,j=m-k+1}$ est définie positive sur $\mathring{F}$ $(k > 0)$.

Alternativement, $\mathring{J}$ est la restriction d'un élément de $DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ si et seulement si les conditions (C1), (C2') du Lemme 3.2.1 sont vérifiées.

Preuve. Par la Proposition 3.3.2, les conditions (i)-(iii) sont équivalentes à la compactification de $\mathring{g_K}$.

Si $\mathring{J}$ est la restriction à $\mathring{M}$ d'un élément de $DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$, alors par la Remarque 3.3.1 (1), $\mathring{g}_K$ est la restriction à $\mathring{M}$ d'une métrique kählérienne torique sur M.

Supposons ensuite que les conditions (i)-(iii) sont vérifiées, et montrons que ceci implique les conditions (C1), (C2') du Lemme 3.2.1. Ceci prouvera que les conditions (i)-(iii) sont suffisantes à la compactification et aussi que les conditions suffisantes (C1), (C2') sont nécessaires. Par la Proposition 3.3.2, (C1) est vérifiée pour $\mathring{g}_K$, i.e. $S - \Psi$ admet une extension lisse sur Δ, où Ψ provient d'un élément de $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$. Comme la fonction matricielle C est constante, elle admet une extension lisse sur Δ et donc $\mathring{\Psi} - \Psi$ admet une extension lisse sur Δ, i.e. (C1) est vérifiée pour $\mathring{J}$. Pour (C2'), il s'agit de montrer que pour un point $x_0 \in \partial\Delta$ quelconque, on a

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{\det \mathring{\Psi}}{\det \Psi} \neq 0.$$

Soit F la face de Δ dans l'intérieur de laquelle se trouve x_0. Il est montré dans la preuve de la Proposition 3.3.2 que par rapport aux coordonnées $y = (y^i)$ adaptées à F centrées en x_0, on a

$$(\det S(y))^{-1} = 2^{m-k} y^1 \dots y^{m-k} \mathring{P}(y),$$

$$(\det \Psi(y))^{-1} = 2^{m-k} y^1 \dots y^{m-k} P(y),$$

où k est la dimension de F et où $P, \mathring{P} \in C^\infty(\Delta)$ sont des fonctions positives en $y = 0$. Il suit que

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{\det \mathring{\Psi}}{\det \Psi} = \lim_{y \mapsto 0} \left(\frac{\det S(y)}{\det \Psi(y)} + \frac{c^2}{\det \Psi(y)} \right) = \frac{P(0)}{\mathring{P}(0)} > 0.$$

□

Remarque 3.3.2. Nous ne disposons pas pour le moment d'un argument complet pour établir ce résultat en dimensions supérieures.

3.4. L'application moment

Dans cette section, on considère l'ensemble $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ des structures presque-kählériennes généralisées de type symplectique invariantes sous l'action du tore comme un sous-ensemble de l'espace $E_\omega(M)$ de la Proposition 1.3.3. Selon ce point de vue, on a

$$AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) = \{K \in \mathrm{Aut}(T^{\mathbb{C}}M, H) \mid K^2 = -\mathrm{id},\ H_K > 0,\ a \cdot K = K\ \forall a \in \mathbb{T}\},$$

$$T_K(AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)) = \{\dot{K} \in \mathrm{End}(T^{\mathbb{C}}M, H) \mid K\dot{K} + \dot{K}K = 0,\ a \cdot \dot{K} = \dot{K}\ \forall a \in \mathbb{T}\},$$

avec forme symplectique

$$\Omega_K(\dot{K}_1, \dot{K}_2) = \frac{1}{2} \int_M \mathrm{tr}(K\dot{K}_1\dot{K}_2) v_\omega.$$

L'action du plein groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ ne préserve pas $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$. Pour ceci, il faut se restreindre au sous-groupe $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M, \omega)$ des difféomorphismes hamiltoniens $\mathbb{T}$-invariants (i.e. le centralisateur de $\mathbb{T}$).

Lemme 3.4.1. *L'algèbre de Lie de* $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ *est l'espace* $\mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ *des champs vectoriels hamiltoniens* $\mathbb{T}$*-invariants. Vu comme sous-espace de* $C_0^\infty(M)$ *au moyen de la correspondance* (2.0.14), $\mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ *correspond à l'ensemble* $C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}}$ *des fonctions* $\mathbb{T}$*-invariantes.*

Preuve. Si $X \in \mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ est un champ vectoriel hamiltonien $\mathbb{T}$-invariant alors son flot φ_t^X est $\mathbb{T}$-invariant également, ce qui montre que $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega))$. Pour l'inclusion inverse, on considère $Y \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega))$. Ceci signifie qu'il existe un chemin γ_t à travers l'identité dans $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ tel que $\frac{d\gamma_t}{dt}\Big|_{t=0} = Y$. Par un théorème de A. Banyaga (voir par exemple [**54**] Proposition 1.4.B), il existe une famille de fonctions $f_t \in C^\infty(M)$ telles que

$$\frac{d\gamma_t}{dt} = \mathrm{grad}_\omega f_t \quad \forall t.$$

Il est clair que chacun des champs hamiltoniens $\mathrm{grad}_\omega f_t$ est $\mathbb{T}$-invariant. En particulier, $Y = \mathrm{grad}_\omega f_0 \in \mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$.

Une fonction $\mathbb{T}$-invariante donne lieu à un champ hamiltonien $\mathbb{T}$-invariant. Inversement, si $X = \mathrm{grad}_\omega f \in \mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$, on a

$$df = -\omega(X,\cdot) = -\omega(a_*X,\cdot) = -\omega(X, a_*^{-1}\cdot) = -df(a_*^{-1}\cdot) = -d(f\circ a^{-1})$$

pour tout $a \in \mathbb{T} \subset \mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$, donc $f = f\circ a^{-1} + cst$. Mais il est clair que $f\circ a^{-1}$ est, comme f, d'intégrale nulle. Donc $cst = 0$. $\square$

Rappelons que l'action infinitésimale sur $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ correspondant à $V \in \mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ est donnée par la formule

$$V_K^\sharp = -\mathcal{L}_V K. \tag{3.4.1}$$

Lemme 3.4.2. *Relativement à des coordonnées admissibles* (μ^j, t^j)*, le champ vectoriel* $V^\sharp$ *issu de* $V = \mathrm{grad}_\omega h$*,* $h \in C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}}$ *admet la représentation*

$$V_K^\sharp = \sum_{j=1}^m (dh_{,j}\circ K)\otimes\frac{\partial}{\partial t^j} - dh_{,j}\otimes K\frac{\partial}{\partial t^j}. \tag{3.4.2}$$

Preuve. Puisque h ne dépend que des coordonnées μ^j, on déduit aisément la formule

$$V = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h}{\partial\mu^j}\frac{\partial}{\partial t^j}.$$

La famille à un paramètre de difféomorphismes hamiltoniens induite par V est manifestement

$$\varphi_t^V(\mu^1, \dots, t^m) = \left(\mu^1, \dots, \mu^m, t^1 + t\frac{\partial h}{\partial \mu^1}, \dots, t^m + t\frac{\partial h}{\partial \mu^m}\right).$$

On voit que la dérivée admet la représentation matricielle

$$(\varphi_t^V)_* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ tH & I \end{pmatrix},$$

où $H_{ij} = h_{,ij}$ est le hessien de h (vue comme fonction sur $\mathring{\Delta}$). Si la représentation matricielle de $K \in AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ (relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial \mu}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ de $T^{\mathbb{C}}M$) est

$$K = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

on obtient alors

$$\varphi_t^V \cdot K = \begin{pmatrix} -tQH + P & Q + R \\ -t^2 HQH + t(HP - SH) + R & tHQ \end{pmatrix}$$

et donc

$$-\mathcal{L}_V K = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_t^V \cdot K = \begin{pmatrix} -QH & 0 \\ HP - SH & HQ \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que cette formule est en accord avec (3.4.2). □

Remarque 3.4.1. Alternativement, on peut dériver la formule (3.4.2) en calculant $(\mathcal{L}_V K)(X) = K([V, X]) - [V, K(X)]$ à partir de la formule en coordonnées pour le crochet de Lie. Dans ce cas, on tombe directement sur (3.4.2) mais les calculs sont plus fastidieux.

Soit $C_{c,0}^\infty(M)^{\mathbb{T}} \subset C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}}$ l'idéal des fonctions à support dans $\mathring{M}$ et $\mathrm{Ham}_c^{\mathbb{T}}(M, \omega) \trianglelefteq \mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M, \omega)$ le sous-groupe connexe correspondant.

Théorème 3.4.1. *L'action de $\mathrm{Ham}_c^{\mathbb{T}}(M, \omega)$ sur $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ est hamiltonienne d'application moment $\nu : AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \to (C_{c,0}^\infty(M)^{\mathbb{T}})^*$ donnée par*

$$\nu^f(K) = -\int_{\mathring{M}} f \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial \mu^i \partial \mu^j}\right) v_\omega,$$

où $Q_{ij} = \omega(KK_i, K_j)$. Pour $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, on a l'expression alternative

$$\nu^f(J) = \int_{\mathring{M}} f \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 S^{ij}}{\partial \mu^i \partial \mu^j}\right) v_\omega, \tag{3.4.3}$$

où $S_{ij} = \tau_{,ij}$ pour $\tau \in C^\infty(\mathring{\Delta})$ le potentiel symplectique de J et $S^{ij} = (S^{-1})_{ij}$.

Preuve. Soit $f \in C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}}$, $V = \mathrm{grad}_\omega f \in \mathfrak{ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ et $V^\sharp$ le champ vectoriel sur $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ correspondant. La formule (3.4.2) ainsi que le fait que $M \backslash \mathring{M} = \mu^{-1}(\partial\Delta)$ est de mesure nulle implique

$$\begin{aligned}
\Omega_K(V^\sharp_K, \dot{K}) &= \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(K \circ V^\sharp_K \circ \dot{K}) v_\omega \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{\mathring{M}} \mathrm{tr}\left((df_{,j} \circ \dot{K}) \otimes \frac{\partial}{\partial t^j} \right) v_\omega \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{\mathring{M}} df_{,j}\left(\dot{K}\frac{\partial}{\partial t^j}\right) v_\omega .
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{T}$ agit librement sur $\mathring{M}$ avec $\mathring{\Delta}$ identifié à l'espace des orbites, la restriction $\mu| : \mathring{M} \to \mathring{\Delta}$ définie un fibré principal en tores qui est trivial : $\mathring{M} \cong \mathring{\Delta} \times \mathbb{T}$. On a $v_\omega = (-1)^{m-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \wedge dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$ donc si on pose $C_m := \int_{\mathbb{T}} (-1)^{m-1} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$, on peut écrire

$$\Omega_K(V^\sharp_K, \dot{K}) = C_m \sum_{j=1}^m \int_{\mathring{\Delta}} df_{,j}\left(\dot{K}\frac{\partial}{\partial t^j}\right) v_0, \tag{3.4.4}$$

où $v_0 = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$. Si la représentation matricielle de K relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial\mu}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ de $T^{\mathbb{C}}\mathring{M}$ est

$$K = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

alors

$$\dot{K}\frac{\partial}{\partial t^j} = \sum_{k=1}^m \dot{Q}_{kj}\frac{\partial}{\partial \mu^k} + \dot{S}_{kj}\frac{\partial}{\partial t^k}$$

et (3.4.4) prend la forme,

$$\Omega_K(V^\sharp_K, \dot{K}) = C_m \sum_{i,j=1}^m \int_{\mathring{\Delta}} f_{,ij}\dot{Q}_{ij} v_0. \tag{3.4.5}$$

Ce calcul suggère que l'application moment est

$$\nu^f(K) = -C_m \sum_{i,j=1}^m \int_{\mathring{\Delta}} f_{,ij} Q_{ij} v_0. \tag{3.4.6}$$

Ici, on note que les fonctions Q_{ij} sont définies et lisses sur Δ puisque l'on peut écrire $Q_{ij} = \omega(KK_j, K_i)$ qui est une fonction lisse sur M. Par conséquent, si f est à support dans $\mathring{\Delta}$, une double intégration par parties [5] nous permet de transférer

5. La formule d'intégration par parties pour un domaine borné $U \subset \mathbb{R}^m$ à frontière C^1 par morceaux est un cas particulier du théorème de flux-divergence $\int_U \nabla \cdot \mathbf{F} dV_m = \int_{\partial U} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{m-1}$ (où $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur normal à ∂U pointant vers l'extérieur). Prenant $\mathbf{F} = (0, \ldots, uv, \ldots, 0)$, on obtient $\int_U uv_{,i} dV_m = \int_{\partial U} uv\nu_i dS_{m-1} - \int_U u_{,i} v dV_m$.

les dérivées à Q_{ij} et ainsi écrire

$$\begin{aligned}\nu^f(K) &= -C_m \sum_{i,j=1}^{m} \int_{\mathring{\Delta}} f Q_{ij,ij} v_0 \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m} \int_{\mathring{M}} f Q_{ij,ij} v_\omega.\end{aligned}$$

Il reste à vérifier l'équivariance de ν, soit la relation $\nu^{\varphi\cdot f}(\varphi \cdot K) = \nu^f(K)$ pour $\varphi \in \mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$. Supposons que φ est l'application "temps 1" du flot hamiltonien de $\mathrm{grad}_\omega h$ pour $h \in C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}}$. Comme dans la preuve du Lemme 3.4.2, on déduit que

$$\varphi_* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (h_{,ij}) & I \end{pmatrix},$$

donc en particulier, φ préserve les champs K_i. Il suit que l'action de φ sur K a comme effet de changer Q_{ij} en $\omega(\varphi_* K \varphi_*^{-1} K_j, K_i) = Q_{ij} \circ \varphi^{-1} = \varphi \cdot Q_{ij}$. Ensuite, utilisant la naturalité de la dérivée de Lie sur $(\varphi \cdot Q_{ij})_{,ij} = \mathcal{L}_{\partial/\partial\mu^i} \mathcal{L}_{\partial/\partial\mu^j} (\varphi \cdot Q_{ij})$, on obtient

$$(\varphi \cdot Q_{ij})_{,ij} = \varphi \cdot \mathcal{L}_{\varphi_*^{-1}\partial/\partial\mu^i} \mathcal{L}_{\varphi_*^{-1}\partial/\partial\mu^j} Q_{ij},$$

où

$$\varphi_*^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu^i} = \frac{\partial}{\partial \mu^i} - \sum_{k=1}^{m} h_{,ki} \frac{\partial}{\partial t^k}.$$

Mais les fonctions Q_{ij} sont $\mathbb{T}$-invariantes, donc $\mathcal{L}_{\partial/\partial t^k} Q_{ij} = 0$ et on reste avec

$$(\varphi \cdot Q_{ij})_{,ij} = \varphi \cdot (Q_{ij,ij}).$$

Comme φ préserve la forme volume symplectique v_ω, ceci permet d'écrire

$$\nu^{\varphi\cdot f}(\varphi \cdot K) = -\sum_{i,j=1}^{m} \int_{\mathring{M}} \varphi \cdot (f Q_{ij,ij} v_\omega) = \nu^f(K).$$

Pour obtenir (3.4.3), commençons par noter que l'expression $\sum_{i,j=1}^m Q_{ij,ij}$ est *réelle*. Ceci est dû au fait que la partie imaginaire de K est ω-autoduale (cf. (1.3.7)), et donc la partie imaginaire de $Q_{ij} = \omega(KK_j, K_i)$ est antisymétrique. Alternativement, on peut obtenir la même conclusion en considérant le fait que la forme symplectique Ω est elle-même réelle (Proposition 2.1.1). On peut donc écrire

$$\nu^f(K) = -\sum_{i,j=1}^{m} \int_{\mathring{M}} f \,\mathfrak{Re} Q_{ij,ij} v_\omega$$

Ensuite, on fait appel à l'équation (1.3.9) pour obtenir l'expression $\mathfrak{Re} Q_{ij} = -\omega((J^a)^{-1} K_j, K_i)$. En terme de la décomposition $K \sim (S, C)$ du Théorème 3.1.1, ceci devient $\mathfrak{Re} Q_{ij} = -S^{ij}$. $\square$

Remarque 3.4.2. *L'ensemble* $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ *est stable sous l'action de* $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$ *mais n'est pas une sous-variété symplectique de* $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$.

En dimension 4, on peut utiliser le Théorème 3.3.2 pour élargir la validité de (3.4.3) au cas de l'action du plein groupe $\mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M,\omega)$:

Théorème 3.4.2. *Soit* $(M,\omega,\mathbb{T})$ *une variété symplectique torique de dimension 4 et la fonction* $\nu : DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \to (C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}})^*$ *donnée par la formule* (3.4.3). *Pour tout* $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ *et* $f \in C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}}$, *on a*

$$d(\nu^f)_J(\dot{J}) = -\Omega_J(V_J^\sharp, \dot{J}),$$

où $V = \mathrm{grad}_\omega f$ *et* $V^\sharp$ *est le champ vectoriel sur* $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ *correspondant donné par* (3.4.1).

Preuve. Reprenant l'équation (3.4.6) avec $\sum_{i,j=1}^m Q_{ij} = -\sum_{i,j=1}^m S^{ij}$, on peut écrire

$$\nu^f(J) = C_m \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Delta f_{,ij} S^{ij} v_0.$$

Ici, on utilise l'identité

$$\sum_{i,j=1}^{2} f_{,ij} S^{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} f S^{ij}_{\ ,ij} - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^j} V_j(f),$$

où

$$V_j(f) = \sum_{i=1}^{2} (f S^{ij}_{\ ,i} - f_{,i} S^{ij}),$$

pour séparer l'intégrale. Mais notons que

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial V_j(f)}{\partial x^j} v_0 = d(\iota_{V(f)} v_0),$$

où on a posé $V(f) = \sum_{j=1}^2 V_j(f) \frac{\partial}{\partial x^j}$. Donc, par Stokes, on peut écrire

$$\nu^f(J) = C_m \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Delta f S^{ij}_{\ ,ij} v_0 - C_m \int_{\partial\Delta} \iota_{V(f)} v_0.$$

Pour chaque facette F_r de Δ, on peut voir son vecteur normal $\nu_r \in \mathfrak{t}$ comme une 1-forme sur $\mathfrak{t}^*$. Soit alors ψ_r la $(n-1)$-forme telle que $v_0 = \nu_r \wedge \psi_r$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} \iota_{V(f)} v_0 &= \sum_{r=1}^{d} \int_{F_r} \langle \nu_r, V(f) \rangle \psi_r \\
&= \sum_{r=1}^{d} \int_{F_r} \sum_{i,j=1}^{2} \langle \nu_r, \xi_j^* \rangle (f S^{ij}_{\ ,i} - f_{,i} S^{ij}) \psi_r.
\end{aligned}$$

Considérons la face $F = F_1$ et $y = (y^i)$ des coordonnées adaptées à F centrées en x_0. Ceci signie que les normales ont été réarrangées de sorte que ν_1, ν_2 forment une base de $\mathfrak{t}$. Écrivons

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{2} A^{ji}\nu_j, \quad \xi_i^* = \sum_{j=1}^{2} A_{ij}\nu_j^*.$$

En terme de la métrique g_K définie à la section 3.3, on a $S^{ij} = g_K(K_i, K_j)$. Par conséquent, si $H_{ij} = g_K(X_{\nu_i}, X_{\nu_j})$, on a alors $S^{ij} = \sum_{k,l} A^{ki}A^{lj}H_{kl}$, et

$$\sum_{i,j=1}^{2} \langle \nu_1, \xi_j^* \rangle f_{,i}S^{ij} = \sum_{i,k=1}^{2} A^{ki} f_{,i} H_{k1}$$

qui s'annule partout sur F_1 par le Théorème 3.3.2. Par ailleurs, les coordonnées (x^i) et (y^i) sont reliés par $y^j = \sum_{i=1}^{2} x^i A_{ij} - \langle \nu_j, x_0 \rangle$, donc en particulier,

$$\frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i} = \sum_{k,l,m=1}^{2} A_{ik}A^{li}A^{mj}\frac{\partial H_{lm}}{\partial y^k}.$$

Ainsi,

$$\sum_{i,j=1}^{2} \langle \nu_1, \xi_j^* \rangle S^{ij}_{\ \ ,i} = \sum_{k=1}^{2} \frac{H_{k1}}{\partial y^k}$$

qui vaut identiquement 2 sur F_1 par le Théorème 3.3.2. En effet, on sait que $\frac{H_{11}}{\partial y^1} = 2$ tandis que si $k \neq 1$, $H_{k1}|_{F_1} \equiv 0$ avec $F_1 = \{y \in \Delta \mid y^1 = 0\}$, donc $\frac{H_{k1}}{\partial y^k} = 0$ dans ce cas. Tout ceci nous permet enfin d'écrire

$$\nu^f(J) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathring{M}} f S^{ij}_{\ \ ,ij} v_\omega - C_m \sum_{r=1}^{2} \int_{F_r} 2f\psi_r. \tag{3.4.7}$$

Le premier terme est manifestement équivariant par un argument identique à celui présenté dans la preuve du Théorème 3.4.1. Quant à lui, le second terme ne dépend pas de J ; c'est un élément constant et Ad-invariant de $(C_0^\infty(M)^{\mathbb{T}})^*$. Pour voir ceci, soit $M_r = \mu^{-1}(F_r)$ et $\omega_r := \omega|_{M_r}$. Soit aussi η une $(m-1)$-forme sur $\mathbb{T}/\mathbb{T}_{F_r}$ telle que $v_{\omega_r} = \mu^*\psi_r \wedge \eta$. Relativement à l'identification $\mathring{M}_r \cong \mathring{F}_r \times \mathbb{T}/\mathbb{T}_{F_r}$, posons $C := \int_{\mathbb{T}/\mathbb{T}_{F_r}} \eta$. Alors, $\forall \varphi \in \mathrm{Ham}^{\mathbb{T}}(M, \omega)$,

$$\int_{F_r} (\varphi \cdot f)\psi_r = C^{-1} \int_{M_r} (\varphi \cdot f) v_{\omega_r} = C^{-1} \int_{M_r} f v_{\omega_r} = \int_{F_r} f\psi_r.$$

On peut donc soustraire le second terme de (3.4.7) et on reste avec une application moment. $\square$

Remarque 3.4.3. Si les conditions (i)-(iii) du Théorème 3.3.2 sont aussi nécessaires à la compactification en dimension supérieure à 4, alors la conclusion du Théorème 3.4.2 tient dans ce cas également.

En comparant les résultats des Théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 avec le Théorème 2.3.1 et son Corollaire, on est donc naturellement mené aux définitions suivantes.

Définition 3.4.1. *La* **courbure scalaire hermitienne généralisée** *de* $K \in AGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ *est*

$$u_{GK}(K) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{3.4.8}$$

où $Q_{ij} = \omega(KK_i, K_j)$. *La* **courbure scalaire généralisée** *de* $J \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ *correspondant à la matrice* $\Psi = S + C$ *est*

$$s_{GK}(J) = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 S^{ij}}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{3.4.9}$$

Remarque 3.4.4. (1) La fonction $u_{GK}(K)$ est bien définie globalement puisque $Q_{ij} = \omega(KK_i, K_j) \in C^\infty(M)^{\mathbb{T}} \cong C^\infty(\Delta)$. Par contre, on ne peut garantir que $S^{ij} = g_K(K_i, K_j)$ définit un élément de $C^\infty(M)^{\mathbb{T}}$ qu'en dimension 4 où l'on sait que g_K est définie globalement.

(2) Lorsque $J \in K^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$, la formule (3.4.9) se réduit à la formule trouvée par M. Abreu [**2**] pour la courbure scalaire riemannienne. De même, lorsque $K \in AK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$, la formule (3.4.8) se réduit à la formule trouvée par S. K. Donaldson [**20**] et plus généralement, par M. Lejmi [**49**] pour la courbure scalaire hermitienne.

3.5. Structures extrémales

Il est clair que l'on peut remplacer l'application moment du Corollaire 2.3.1 par $\mu^f(J) = -\int_M f(s_J - \overline{s}_J)v_\omega$ (où $\overline{s}_J = \int_M s_J v_\omega$) de sorte que, relativement au plongement de $C^\infty_0(M)$ dans $C^\infty_0(M)^*$ induit par le produit scalaire $(f, g) = \int_M fgv_\omega$ (voir la discussions au début du Chapitre 2), on peut voir μ comme la fonction $J \mapsto -s_J + \overline{s}_J \in C^\infty_0(M)$. Un calcul simple révèle que les points critiques de $\|\mu\|^2 : K_\omega(M) \to \mathbb{R}$ sont précisément les métriques qui sont extrémales au sens de E. Calabi [**13**] (cf. [**49**]). En effet, on a

$$d(\|\mu\|^2)_J(\dot{J}) = 2(\mu(J), d\mu_J(\dot{J})) = 2\Omega_J((\mathrm{grad}_\omega s_J)^\sharp, \dot{J}) = -2\Omega_J(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_J} J, \dot{J}).$$

Donc, J est un point critique si et seulement si $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_J} J = 0$. Comme J est compatible avec ω, ceci est équivalent à dire que $\mathrm{grad}_\omega s_J$ est un champ de Killing pour la métrique riemannienne $g = \omega(\cdot, J\cdot)$. Or, il est bien connu [**13**] que pour une structure complexe J et une classe $a \in H^2_{dR}(M)$ fixées, les métriques kählériennes dans a qui annulent la première variation de la fonctionnelle de Calabi

$g \mapsto \int_M s_g^2 v_g$ sont précisément celles dont le gradient symplectique de la courbure scalaire est Killing. Le même calcul tient pour l'action de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ sur $AK_\omega(M)$, ce qui donne lieu aux métriques presques kählériennes extrémales considérées par M. Lejmi [**49**] et définies comme celles dont le gradient symplectique de la courbure scalaire hermitienne est Killing (i.e. $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega u_J} J = 0$). Plus généralement, le calcul tient sur $AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ à condition de remplacer μ par l'application moment du Théorème 3.4.1, et donc la définition suivante est naturelle.

Définition 3.5.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique. Un élément $K \in AGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ est* **extrémal** *si c'est un point critique de la fonctionnelle $K \mapsto \int_M (u_{GK}(K) - \overline{u_{GK}}(K))^2 v_\omega$, où $\overline{u_{GK}}(K) = \int_M u_{GK}(K) v_\omega$. Une condition équivalente est*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega u_{GK}(K)} K = 0.$$

M. Abreu a observé [**2**] que sur une variété symplectique torique, les métriques kählériennes toriques qui sont extrémales sont précisément celles dont la courbure scalaire dépend de façon affine des coordonnées moments. Cette caractérisation admet une extension naturelle à $DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$:

Proposition 3.5.1. *Pour $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, les énoncés suivants sont équivalents.*

(1) J est extrémale.

(2) $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)} J = 0$.

(3) $\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)$ est Killing pour $g = \omega(\cdot, J\cdot)^s$ et préserve aussi la 2-forme $b = -\omega(\cdot, J\cdot)^a$.

(4) $s_{GK}(J)$ est une fonction affine en $(\mu^1, \dots, \mu^m)$.

Preuve. Soit $K = A + iB$ l'endomorphisme de $T^{\mathbb{C}}M$ correspondant à J et X un champ vectoriel quelconque sur M. L'équation $\mathcal{L}_X K = 0$ est équivalente à $\mathcal{L}_X A = \mathcal{L}_X B = 0$. Selon (1.3.9), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X A = 0 &\Leftrightarrow (J - J^{*_\omega})^{-1}(\mathcal{L}_X J - (\mathcal{L}_X J)^{*_\omega})(J - J^{*_\omega})^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_X J = (\mathcal{L}_X J)^{*_\omega}, \end{aligned}$$

et comme $B = \frac{1}{2}(J + J^{*_\omega})A$, on voit que sous l'hypothèse $\mathcal{L}_X A = 0$, on a

$$\mathcal{L}_X B = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_X J = -(\mathcal{L}_X J)^{*_\omega}.$$

Ainsi, $\mathcal{L}_X K = 0$ équivaut à $\mathcal{L}_X J = 0$. Prenant la dérivée de Lie de l'équation $\omega(\cdot, J\cdot) = g - b$, on obtient $\mathcal{L}_X \omega(\cdot, J\cdot) + \omega(\cdot, \mathcal{L}_X J\cdot) = \mathcal{L}_X g - \mathcal{L}_X b$. Si $X = \mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)$, le premier terme s'annule et on voit que

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)} J = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)} g = \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)} b = 0.$$

Ceci prouve l'équivalence de (1) avec (2). Les énoncés (2) et (3) s'équivalent car $\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J)$ préserve ω. Supposons que (4) tient, de sorte que $s_{GK}(J) = \sum_{j=1}^m a_j\mu^j + b$ pour certains nombres $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}$. Alors, $ds_{GK}(J) = \sum_{j=1}^m a_j d\mu^j$ et donc $\mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J) = \sum_{j=1}^m a_j K_j$. Comme J est $\mathbb{T}$-invariante, on a $\mathcal{L}_{K_j} J = 0$ $\forall j$, d'où on voit que (2) tient. Montrons enfin que (3) implique (4). Posons

$$V := \mathrm{grad}_\omega s_{GK}(J) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_{GK}(J)}{\partial \mu^j} K_j.$$

Le fait que V est Killing signifie que le tenseur

$$DV^\flat = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 s_{GK}(J)}{\partial\mu^j\partial\mu^k} d\mu^k \otimes K_j^\flat + \sum_j \frac{\partial s_{GK}(J)}{\partial\mu^j} DK_j^\flat$$

est antisymétrique. Comme les champs K_j sont eux-même Killing, ceci revient à dire que le premier terme du membre de droit est antisymétrique. Or, on a $K_j^\flat = \sum_{\ell=1}^m (\Psi^{-1})^s{}_{j\ell} dt^\ell$, donc

$$\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 s_{GK}(J)}{\partial\mu^j\partial\mu^k} d\mu^k \otimes K_j^\flat = \sum_{k,\ell=1}^m (\mathrm{Hess}(s_{GK}(J))^T (\Psi^{-1})^s)_{k\ell} d\mu^k \otimes dt^\ell,$$

ce qui implique $\mathrm{Hess}(s_{GK}(J)) = 0$. □

Corollaire 3.5.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique. S'il existe un élément extrémal $J_0 \in K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, alors il existe des éléments extrémaux $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \backslash K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$. Si M est de dimension 4, la réciproque est vraie également.*

Preuve. Selon un résulat de M. Abreu ([**3**] Theorem 4.1), $J_0 \in K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ est extrémal si et seulement si s_{J_0} est une fonction affine de $\mu^1, \dots \mu^m$. Soit J_t la déformation de J_0 du Corollaire 3.2.1 associée à une matrice antisymétrique C non nulle quelconque. Pour $|t|$ suffisamment petit, $J_t \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \backslash K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$, et $s_{GK}(J_t) = s_{J_0}$. On obtient la conclusion en combinant la caractérisation d'Abreu à notre Proposition 3.5.1. La réciproque en dimension 4 s'obtient de façon similaire en considérant la structures kählérienne g_K associée à un élément extrémal $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M) \backslash K_\omega^{\mathbb{T}}(M)$ (cf. Théorème 3.3.2). □

Remarque 3.5.1. (1) Selon un théorème de E. Calabi [**14**], toute métrique kählérienne extrémale dans une classe $a \in H^2_{dR}(M)$ sur une variété complexe (M, J) est invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal de la composante connexe du groupe d'automorphismes holomorphes. Par conséquent, si J est invariante sous l'action effective d'un tore $\mathbb{T}$ de dimension m, alors toute métrique kählérienne extrémale est $\mathbb{T}$-invariante aussi (remarque dûe à M. Abreu [**3**]). Ainsi, si par exemple $H^1_{dR}(M) = 0$

et ω est une métrique kählérienne extrémale sur (M, J), alors $J \in K^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ (ɪ.e. l'action du tore est hamiltonienne sur (M, ω)).

(2) Dans une série d'articles (voir eg. [**20, 21**]), S. K. Donaldson a développé un programme général visant à caractériser les variétés toriques compactes admettant des métriques kählériennes extrémales en terme de notions de stabilité appropriées pour le polytope moment.

Chapitre 4

LES COURBURES SCALAIRES DANS LE CAS TORIQUE DE DIMENSION 4

Puisque dans le cas kählérien $J = -J^{*\omega}$, le membre de droite dans l'équation (3.4.9) correspond à la courbure scalaire de la métrique riemannienne associée, il est naturel de tenter de relier $s_{GK}(J)$ aux courbures scalaires de la structure bihermitienne $(J, J^{*\omega}, g)$. Nous ferons ceci dans le cas torique de dimension 4 pour J dans la classe $DGK_{\omega}^{\mathbb{T}}(M)$.

4.1. Géométrie kählérienne généralisée en dimension 4

Une identité cruciale en géométrie bihermitienne de dimension 4 est la formule suivante pour l'anticommutateur des structures complexes.

Lemme 4.1.1. *Pour une variété presque-bihermitienne de dimension 4 (M, J_1, J_2, g) telle que J_1, J_2 induisent la même orientation, on a*

$$J_1J_2 + J_2J_1 = -2p\mathrm{Id}, \tag{4.1.1}$$

où $p = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(J_1J_2) \in [-1, 1]$ est appelée la **fonction d'angle** [1] *dans* [**6**]. *De plus, $p(x) = \pm 1$ si et seulement si $J_1(x) = \pm J_2(x)$.*

Preuve. Il suffit de prouver l'identité dans le cas d'un espace vectoriel V muni d'une structure bihermitienne linéaire (J_1, J_2, g). Le choix d'une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de V détermine un isomorphisme $e_1 \mapsto 1$, $e_2 \mapsto i$, $e_3 \mapsto j$, $e_4 \mapsto k$ avec les

1. Ceci est parce qu'on peut écrire

$$p = \frac{\langle J_1, J_2\rangle_g}{|J_1|_g|J_2|_g}.$$

quaternions $\mathbb{H}$. Les opérateurs de multiplication par i, j, k dans $\mathbb{H}$ correspondent sur V à trois structures complexes I, J, K déterminées par

$$Ie_1 = e_2, Ie_3 = e_4$$
$$Je_1 = e_3, Je_2 = -e_4$$
$$Ke_1 = e_4, Ke_2 = e_3$$

et satisfaisant $IJK = -\mathrm{Id}$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, $\{I, J\} = \{I, K\} = \{J, K\} = 0$. Si les e_i sont orthonormaux, alors les formes bilinéaires correspondantes $Fsubset_I = g(I\cdot, \cdot)$, $F_J = g(J\cdot, \cdot)$, $F_K = g(K\cdot, \cdot)$ sont données par

$$F_I = e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4,$$
$$F_J = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4,$$
$$F_K = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3,$$

et forment une base orthogonale de norme $\sqrt{2}$ de l'espace $\bigwedge^2_+ V^*$ des formes bilinéaires antisymétriques autoduales relativement à l'opérateur de Hodge induit par g et l'orientation (commune) de J_1, J_2. Or, l'application $\mathrm{End}(V) \to \bigwedge^2 V^*$: $A \mapsto g(A\cdot, \cdot)$ détermine une bijection entre le soi-disant espace des twisteurs Z des structures complexes g-orthogonales orientées positivement et la sphère des éléments de $\bigwedge^2_+ V^*$ de norme $\sqrt{2}$. Il en découle que J_1, J_2 s'écrivent de manière unique sous la forme

$$J_i = a_i I + b_i J + c_i K,$$

où $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$. Les relations quaternioniques impliquent alors

$$\{J_1, J_2\} = -2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)\mathrm{Id}.$$

On pose $p := a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$. Prenant la trace de l'équation (4.1.1), on obtient la formule $p = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(J_1J_2)$. Mais comme J_1 est un endomorphisme g-antisymétrique, on peut également écrire $p = \frac{1}{4}\langle J_1, J_2\rangle_g$ où $\langle A, B\rangle_g = \mathrm{tr}(A^{*_g}B)$ est le produit scalaire euclidien sur $V \otimes V^*$ induit par g. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors $|p| \leq 1$ (puisque J_1, J_2 sont de norme 2) et $p(x) = \pm 1$ si et seulement si $J_1(x) = \pm J_2(x)$. $\square$

Remarque 4.1.1. *Le fait que la structure bihermitienne provenant d'une structure kählérienne généralisée de type symplectique vérifie les hypothèse du Lemme 4.1.1 a été relevé à la Remarque 1.3.1.*

Définition 4.1.1. *La* **forme de Lee** *d'une variété presque-hermitienne (M, g, J) de dimension $2m$ et de forme fondamentale $F = g(J\cdot, \cdot)$ est la 1-forme $\theta := J\delta F$,* *aussi caractérisée comme l'unique 1-forme telle que* $dF^{m-1} = \theta \wedge F^{m-1}$. *Une métrique hermitienne est dite* **Gauduchon** [**28**], *si* $\delta\theta = 0$.

Lemme 4.1.2. *Soit* M *une variété de dimension 4 et* (J_+, J_-, g, b) *une structure bihermitienne avec 2-forme correspondant à une structure kählérienne généralisée. Alors, la métrique* g *est Gauduchon par rapport à* J_+ *et* J_- *et les formes de Lee sont reliées par*

$$\theta_+ \pm \theta_- = 0, \quad \theta_+ = *db$$

selon que $J_\pm$ *induisent ou non la même orientation sur* M. *Ici,* $*$ *est l'opérateur de dualité de Hodge relativement à* g *et l'orientation induite par* J_+.

Preuve. Supposons d'abord que $J_\pm$ induisent la même orientation. En dimension 4, les formes fondamentales $F_\pm$ sont autoduales, donc dualisant la condition d'intégrabilité $\mp J_+ d\omega_\pm = db$ du Théorème 1.2.1 et utilisant le fait que $J_\pm$ commute avec $*$, on obtient

$$J_\pm \delta F_\pm = \pm * db.$$

En particulier, utilisant $\delta = - * d*$,

$$\delta\theta_\pm = \pm\delta * db = \mp * d^2 b = 0.$$

Si $J_\pm$ induisent une orientation contraire, alors l'opérateur de Hodge relatifs à J_- est simplement $-*$, de sorte que F_- est $*$-antiautodual, et on a plutôt $J_\pm \delta F_\pm = \mp * db$. □

Selon la Remarque 1.3.1, les structures complexes $J_\pm$ issuent d'une structure kählérienne généralisée de type symplectique en dimension 4 induisent la même orientation. Le prochain théorème montre que sur une variété compacte, c'est là la seule obstruction à ce qu'une structure kählérienne généralisée soit équivalente à une de type symplectique.

Théorème 4.1.1. *Sur une variété compacte de dimension 4, une structure kählérienne généralisée* $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ *est équivalente à une structure kählérienne généralisée de type symplectique*[2] *si et seulement si les structures complexes* $J_\pm$ *de la structure bihermitienne correspondante induisent la même orientation sur* M.

Preuve. On a montré à la Proposition 1.2.1 que les structures kählériennes généralisées équivalentes à une structure kählérienne sont précisément celles dont la structure bihermitienne sous-jacente satisfait $J_+ = \pm J_-$. Ainsi, sans perdre

2. Par ceci, on entend que $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \sim (\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J})$ *ou* $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \sim (\mathcal{J}, \mathcal{J}_\omega)$ pour une forme symplectique ω et $\mathcal{J} \in GK_\omega(M)$.

de généralité, supposons que $J_+ \neq \pm J_-$. Dans ce cas, selon [**4**] (Corollaire 1), le premier nombre de Betti de M est pair et [**6**] (Proposition 4) implique l'alternative suivante :

(I) $J_+(x) \neq J_-(x)\ \forall x \in M$,

(II) $J_+(x) \neq -J_-(x)\ \forall x \in M$.

Supposons que (I) tient de sorte que $p(x) < 1\ \forall x \in M$ où p est la fonction d'angle du Lemme 4.1.1. Écrivons $F_\pm = gJ_\pm$ pour les formes fondamentales de la structure bihermitienne et considérons la 2-forme autoduale

$$\omega := F_+ - \frac{1}{2(1-p)} g[J_+, J_-]J_+.$$

Cette forme est globalement définie sur M et sa codifférentielle a été calculée dans la preuve de la Proposition 4 de [**6**] comme étant $\delta\omega = -\frac{1}{2}\omega(\theta_+ + \theta_-)^\sharp$. Or, le Lemme 4.1.2 veut que $\theta_+ + \theta_- = 0$ de sorte que ω est co-fermée. À cause de $d = - * \delta *$ en dimension 4, on voit que ω est fermée. La partie symétrique de $\omega(\cdot, J_+\cdot)$ étant g, il suit que ω est non dégénérée et donc symplectique. Pour conclure, il suffit de vérifier que $g = -\frac{1}{2}\omega(J_+ - J_-)$. En effet, il suivra de la caractérisation des structures kählériennes généralisées de type symplectique établie à la Proposition 1.3.1 que pour $b_\omega := -\frac{1}{2}\omega(J_+ + J_-)$, la structure kählérienne généralisée correspondant à (J_+, J_-, g, b_ω) est de la forme $(\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J})$. En particulier,

$$e^{b_\omega - b} \cdot (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) = (\mathcal{J}_\omega, \mathcal{J}),$$

ce qui montre que $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ est de type symplectique à une transformation de type B près. On a

$$\omega(J_+ - J_-) = -g - gJ_+J_- - \frac{1}{2(1-p)} g[J_+, J_-]J_+(J_+ - J_-).$$

Mais la forme bilinéaire $g([J_+, J_-]\cdot, \cdot)$ étant J_+-anti-invariante, on a

$$g([J_+, J_-]J_+(J_+ - J_-)\cdot, \cdot) = g([J_+, J_-](J_+ - J_-)\cdot, J_+\cdot).$$

On peut ensuite utiliser l'identité (1.3.13) et l'identité

$$(J_+ - J_-)^2 = -2(1-p)\mathrm{Id}$$

(qui s'obtient directement de (4.1.1)) pour écrire

$$\begin{aligned} g([J_+, J_-](J_+ - J_-)\cdot, J_+\cdot) &= 2(1-p)g(J_+ + J_-)\cdot, J_+\cdot) \\ &= 2(1-p)(g - g(J_+J_-\cdot, \cdot)). \end{aligned}$$

On voit alors que $\omega(J_+ - J_-) = -2g$.

Finalement, si c'est la clause (II) de l'alternative qui tient, on considère $J'_- := -J_-$ de sorte que (J_+, J'_-) vérifie (I) et donc par ce qui précède et la Remarque 1.3.1, $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ est équivalent à $(\mathcal{J}, \mathcal{J}_\omega)$. $\square$

4.2. Les courbures scalaires d'une structure hermitienne

Il y a plusieurs notions naturelles de courbure scalaire pour une variété hermitienne (M, J, g), que nous rappelons présentement. À noter que chacune d'elles se réduit à la courbure scalaire riemannienne dans la situation kählérienne. Notons $F = gJ$ la forme fondamentale, θ la forme de Lee, D la connexion de Levi-Civita de g et ∇ la connexion de Chern relative à la métrique hermitienne $h(Z_1, Z_2) = g(Z_1, \overline{Z_2})$ sur $T^{1,0}M$ mais vu comme connexion sur TM au moyen de l'isomorphisme $TM \to T^{1,0}M : X \mapsto X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX)$.

Si le tenseur de courbure riemannien est

$$R_{X,Y}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z,$$

la **courbure scalaire riemannienne** peut s'écrire

$$s = 2\mathrm{tr}(R),$$

où R est vu comme endomorphisme de $\bigwedge^2(T^*M)$ au moyen de la métrique g ; i.e. $R(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = g(R_{\alpha^\sharp,\beta^\sharp}X, Y)$. La **courbure scalaire de Chern** v est alors définie comme

$$v = 2\mathrm{tr}(R^\nabla).$$

De façon similaire, la **courbure scalaire conforme** est la courbure scalaire de la structure de Weyl canoniquement associée à une structure hermitienne par la forme de Lee [**59**], [**28**], soit

$$\kappa = 2\mathrm{tr}(R^{D^\theta}),$$

où

$$D^\theta_X Y = D_X Y + \frac{1}{2(m-1)}(\theta(X)Y - \theta(Y)X - g(X,Y)\theta^\sharp)$$

est caractérisée comme l'unique connexion sans torsion telle que $D^\theta g = \frac{1}{m-1}\theta \otimes g$. Dans la situation kählérienne, la forme de Ricci (définie à la Remarque 2.2.1) coïncide avec l'image $R(F)$ de la forme fondamentale par l'endomorphisme de courbure. En général, ce n'est pas le cas et sa trace relativement à F,

$$s^* = 2\Lambda R(F),$$

est appelée la **courbure scalaire** $*$. Finalement, on note que la forme de Ricci-Chern définie à la section 2.2 coïncide avec l'image de la forme fondamentale par l'endomorphisme de courbure de la connnection de Chern, ce qui permet d'écrire la courbure scalaire hermitienne comme

$$u = 2\Lambda R^{\nabla}(F).$$

Si M est de dimension 4 et g est Gauduchon, la tâche du calcul de ces courbures scalaires est grandement simplifié par le fait qu'elles sont toutes égales les une aux autres à l'addition d'un multiple de $|\theta|^2$ près. En effet, selon [**28**] (équ. (35), (35bis), (38)), on a

$$s = u - \frac{1}{2}|\theta|^2, \quad v = u - |\theta|^2, \quad \kappa = u - 2|\theta|^2. \tag{4.2.1}$$

De plus, en dimension 4, l'action de l'opérateur de Hodge par conjugaison sur l'endomorphisme de courbure riemannien induit la **décomposition de Singer-Thorpe**

$$R = \frac{s}{12}\mathrm{Id}_{\bigwedge^2(T^*M)} + W + R_0, \tag{4.2.2}$$

où R_0 est la partie $*$-anti-invariante et le **tenseur de Weyl** W est la partie sans trace de la partie $*$-invariante. L'opérateur de Hodge agit également à gauche sur le tenseur de Weyl par $* \cdot W = W*^{-1} = W*$ ce qui induit un scindement de W en sa partie $*$-invariante W^+ et $*$-anti-invariante W^-. Il se trouve que la courbure scalaire conforme se déduit de W^+ par la formule ([**9**] Lemme 1)

$$\kappa = 3\langle W^+(F), F\rangle.$$

À noter que, par définition, $R_0 : \bigwedge^2(T^*M) \to \bigwedge^2(T^*M)$ permute les facteurs dans la décomposition (orthogonale) $\bigwedge^2(T^*M) = \bigwedge^+ \oplus \bigwedge^-$ en forme autoduales et antiautoduales, et W^- s'annule sur $\bigwedge^+$. Comme la forme fondamentale F est autoduale, lorsqu'on prend le produit scalaire de la décomposition (4.2.2) avec F, on reste avec

$$\frac{s^*}{2} = \frac{s}{6} + \frac{\kappa}{3} \Leftrightarrow \kappa = \frac{3s^* - s}{2}.$$

En combinant cette formule avec les relations (4.2.1), on obtient

$$s^* = u - \frac{3}{2}|\theta|^2.$$

4.3. Calcul des courbures scalaires dans le cas torique de dimension 4

Dans cette section, on considère une variété symplectique torique de $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ de dimension 4 ainsi que $J \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$ qui prend la forme (3.1.1) par rapport à des coordonnées admissibles (μ^j, t^j) sur $\mathring{M}$. Par soucis d'accessibilité, reproduisons ici les identités sur $\Psi = S + C$ dérivées à la section 3.3 :

$$(\Psi^{-1})^s = \frac{\det S}{\det \Psi} S^{-1}, \quad (\Psi^{-1})^a = -\frac{1}{\det \Psi} C.$$

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij} d\mu^i \otimes d\mu^j + \frac{\det S}{\det \Psi} S^{ij} dt^i \otimes dt^j, \tag{4.3.1}$$

$$b = -c d\mu^1 \wedge d\mu^2 + \frac{c}{\det \Psi} dt^1 \wedge dt^2, \tag{4.3.2}$$

$$p = \frac{c^2 - \det S}{\det \Psi}.$$

$$\frac{1-p}{2} = \frac{\det S}{\det \Psi}, \quad \frac{1+p}{2} = \frac{c^2}{\det \Psi}.$$

$$\det \Psi = \det S + c^2.$$

À ces identités s'ajoute la relation

$$v_g = \frac{\det S}{\det \Psi} v_\omega \tag{4.3.3}$$

entre les formes volumes induites par g et ω respectivement. Nous aurons besoin des lemmes suivants dans le calcul de la courbure scalaire hermitienne.

Lemme 4.3.1. *La matrice S satisfait l'identité*

$$\sum_{i=1}^{2} (\det S) S^{ij}_{\ ,i} = -\sum_{i=1}^{2} (\det S)_{,i} S^{ij}, \quad j = 1, 2.$$

Preuve. Il suffit de dériver l'identité $(\det S) S^{-1} = CSC^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} ((\det S) S^{ij})_{,i} &= \sum_{i=1}^{2} (CSC^{-1})_{ij,i} \\
&= \sum_{i,\alpha,\beta=1}^{2} C_{i\alpha} S_{\alpha\beta,i} C^{\beta j} \\
&= \sum_{i,\alpha,\beta=1}^{2} C_{i\alpha} S_{\alpha i,\beta} C^{\beta j} \\
&= \sum_{\beta=1}^{2} \mathrm{tr}(CS_{,\beta}) C^{\beta j}.
\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{tr}(CS_{,\beta}) = 0$ puisque C est antisymétrique et $S_{,\beta}$ est symétrique.

$\square$

Lemme 4.3.2. *On a les formules suivantes pour la fonction d'angle* $p = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(JJ^{*\omega})$ *et la forme de Lee* θ *de la paire hermitienne* (ω, J) *:*

$$\Delta p = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{2c^2}{(\det \Psi)^2} \left((\det S)_{,ij} - \frac{3}{\det \Psi} (\det S)_{,i} (\det S)_{,j} \right) S^{ij},$$

$$|\theta|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{c^2 (\det S)_{,i} (\det S)_{,j}}{(\det \Psi)^2 \det S} S^{ij}.$$

Preuve. En utilisant l'identité $\det \Psi = \det S + c^2$, on calcule

$$dp = \frac{-2c^2}{(\det \Psi)^2} \sum_{i=1}^{2} (\det S)_{,i} d\mu^i.$$

Par définition, $\Delta p = \delta dp = - * d * dp$. On a

$$\begin{aligned} *d\mu^i =& S^{1i} \frac{\det S}{\det \Psi} dt^1 \wedge d\mu^2 \wedge dt^2 + S^{2i} \frac{\det S}{\det \Psi} d\mu^1 \wedge dt^1 \wedge dt^2 \\ &+ S_{1i} d\mu^1 \wedge d\mu^2 \wedge dt^2 + S_{2i} d\mu^1 \wedge dt^1 \wedge d\mu^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d * dp &= d \left(\sum_{i,j=1}^{2} p_{,i} * d\mu^i \right) \\ &= d \left(\frac{\det S}{\det \Psi} \sum_{i,j=1}^{2} p_{,i} (S^{1i} dt^1 \wedge d\mu^2 \wedge dt^2 + S^{2i} d\mu^1 \wedge dt^1 \wedge dt^2) \right) \\ &= \frac{-2c^2}{(\det \Psi)^2} \sum_{i,j=1}^{2} \left((\det S)_{,ij} - \frac{3}{\det \Psi} (\det S)_{,i} (\det S)_{,j} S^{ij} \right) \frac{\det S}{\det \Psi} v_\omega. \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité, on utilise l'identité du Lemme 4.3.1. La formule annoncée est alors une conséquence de (4.3.3).

Pour le calcul de $|\theta|^2$, on utilise le résultat de [**6**] (Lemme 7) voulant que

$$dp = \frac{1}{2} [J, J^{*\omega}]^* \theta.$$

En s'aidant de (4.1.1), on montre aisément que

$$[J, J^{*\omega}]^2 = 4(p^2 - 1)\mathrm{Id},$$

ce qui permet d'isoler θ dans la précédente formule :

$$\theta = \frac{1}{2(p^2-1)}[J, J^{*_\omega}]^* dp. \tag{4.3.4}$$

En utilisant le fait que $[J, J^{*_\omega}]$ est g-antisymétrique, on calcule

$$\begin{aligned} |\theta|^2 &= \frac{1}{4(p^2-1)^2}\langle dp, -4(p^2-1)dp\rangle \\ &= \frac{(\det \Psi)^2}{4c^2 \det S}\langle dp, dp\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{c^2}{(\det\Psi)^2 \det S}(\det S)_{,i}(\det S)_{,j} S^{ij}. \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 4.3.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension 4 et $J \in DGK_\omega^{\mathbb{T}}(M)$. La forme de Ricci hermitienne de la structure hermitienne (g, J) correspondante s'écrit sur $\mathring{M}$*

$$\rho^\nabla = -\frac{1}{2}dd^c \log\det S + dd^c \log \det \Psi,$$

et la courbure scalaire hermitienne (égale à la courbure scalaire hermitienne de (g, J^{*_ω})) s'écrit

$$u_J = -\sum_{i,j=1}^{2} S^{ij}_{\ \ ,ij} + \frac{4-2p}{1-p}|\theta|^2 - \frac{2\langle [J, J^{*_\omega}], d\theta\rangle}{1-p}, \tag{4.3.5}$$

où $[J, J^{*_\omega}]$ est vu comme 2-forme au moyen de la métrique g.

Preuve. Nous allons calculer la courbure scalaire hermitienne à partir de la formule (2.2.2) et la forme de Ricci hermitienne ρ^∇ à l'aide de (2.2.3). Relativement aux coordonnées locales holomorphes (u, t), on a

$$g = \sum_{i,j=1}^{2}((\Psi^{-1})^T S \Psi^{-1})_{ij} du^i \otimes du^j + \frac{\det S}{\det \Psi}\sum_{i,j=1}^{2} S^{ij} dt^i \otimes dt^j,$$

d'où

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \frac{\det S}{(\det \Psi)^2}.$$

On a donc

$$\rho^\nabla = -\frac{1}{2}dd^c \log\det S + dd^c \log \det \Psi, \tag{4.3.6}$$

et

$$u_J = \frac{4\rho^\nabla \wedge F}{F\wedge F} = \frac{4dd^c \log \det \Psi \wedge F}{F \wedge F} - \frac{2dd^c \log\det S \wedge F}{F\wedge F}.$$

Pour le premier terme, utilisons la formule générale

$$\frac{d\det A}{dt} = (\det A)\mathrm{tr}\left(A^{-1}\frac{dA}{dt}\right)$$

pour la dérivée du déterminant d'une matrice inversible $A = A(t)$. En particulier,

$$(\log\det\Psi)_{,i} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Psi^{\alpha\beta}\Psi_{\beta\alpha,i},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
dd^c\log\det\Psi &= \sum_{i,j,k=1}^{2}\Big((\log\det\Psi)_{,i}\Psi^{ij}\Big)_{,k}\,d\mu^k\wedge dt^j \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha,\beta=1}^{2}\Big(\Psi^{\beta\alpha}\Psi_{\alpha\beta,i}\Psi^{ij}\Big)_{,k}\,d\mu^k\wedge dt^j \\
&= -\sum_{i,j,k,\alpha,\beta=1}^{2}\Big(\Psi^{\beta\alpha}\Psi_{\alpha i}\Psi^{ij}{}_{,\beta}\Big)_{,k}\,d\mu^k\wedge dt^j \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{2}\Psi^{ij}{}_{,ik}d\mu^k\wedge dt^j
\end{aligned}$$

Pour la seconde égalité, nous avons utilisé le fait que $\Psi_{\alpha\beta,i} = S_{\alpha\beta,i} = S_{\alpha i,\beta} = \Psi_{\alpha i,\beta}$ (puisque S est un hessien), et aussi le fait que si on dérive l'équation

$$\sum_{i=1}^{2}\Psi_{\alpha i}\Psi^{ij} = \delta_\alpha^j$$

par rapport à μ^β, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2}\Psi_{\alpha i,\beta}\Psi^{ij} = -\sum_{i=1}^{2}\Psi_{\alpha i}\Psi^{ij}{}_{,\beta}.$$

Ensuite, notons que F est la partie de type $(1,1)$ de ω par rapport à J. Et comme $\bigwedge^{3,1} = \bigwedge^{1,3} = 0$ en dimension 4, on a

$$dd^c\log\det\Psi\wedge F = dd^c\log\det\Psi\wedge\omega = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\det S}{\det\Psi}S^{ij}\right)_{,ij}\omega\wedge\omega.$$

Invoquant $F\wedge F = \frac{\det S}{\det\Psi}\omega\wedge\omega$, on obtient

$$\frac{4dd^c\log\det\Psi\wedge F}{F\wedge F} = -2\frac{\det\Psi}{\det S}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\det S}{\det\Psi}S^{ij}\right)_{,ij}.$$

Pour le second terme, on procède comme suit,

$$dd^c \log \det S = \sum_{i,j,k=1}^{2} \left(\frac{(\det S)_{,i}}{\det S} \Psi^{ij} \right)_{,k} d\mu^k \wedge dt^j,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{-2dd^c \log \det S \wedge F}{F \wedge F} &= \frac{\det \Psi}{\det S} \left(\frac{-2dd^c \log \det S \wedge \omega}{\omega \wedge \omega} \right) \\ &= -\frac{\det \Psi}{\det S} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{(\det S)_{,i}}{\det S} \Psi^{ij} \right)_{,j}. \end{aligned}$$

Mais on a $\Psi^{ij} = \frac{\det S}{\det \Psi} S^{ij} - \frac{1}{\det \Psi} C_{ij}$ avec

$$\sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{(\det S)_{,i}}{\det S} C^{ij} \right)_{,j} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{(\det S)_{,ij}}{\det S} C_{ij} - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{(\det S)_{,i} (\det S)_{,j}}{(\det S)^2} C_{ij} = 0,$$

donc utilisant l'identité du Lemme 4.3.1,

$$\begin{aligned} \frac{-2dd^c \log \det S \wedge F}{F \wedge F} &= -\frac{\det \Psi}{\det S} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{(\det S)_{,i}}{\det \Psi} S^{ij} \right)_{,j} \\ &= \frac{\det \Psi}{\det S} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\det S}{\det \Psi} S^{ij}{}_{,i} \right)_{,j}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} u_J &= \frac{\det \Psi}{\det S} \sum_{i,j=1}^{2} \left(-2 \left(\frac{\det S}{\det \Psi} S^{ij} \right)_{,ij} + \left(\frac{\det S}{\det \Psi} S^{ij}{}_{,i} \right)_{,j} \right) \\ &= \frac{\det \Psi}{\det S} \sum_{i,j=1}^{2} \left(- \left(\frac{\det S}{\det \Psi} \right) S^{ij}{}_{,ij} - 3 \left(\frac{\det S}{\det \Psi} \right)_{,i} S^{ij}{}_{,j} - 2 \left(\frac{\det S}{\det \Psi} \right)_{,ij} S^{ij} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} -S^{ij}{}_{,ij} - \frac{2\Delta p}{1-p} + \frac{4+2p}{1-p} |\theta|^2, \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

en utilisant le Lemme 4.3.1 sur le terme du milieu de la deuxième expression. Ensuite, on invoque la formule (26) de [**6**] voulant que

$$\Delta p = 2p|\theta|^2 + \langle [J, J^{*\omega}], d\theta \rangle,$$

et on tombe sur le résultat annoncé. □

Corollaire 4.3.1. *Soit $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ une variété symplectique torique de dimension 4 et $J \in DGK^{\mathbb{T}}_{\omega}(M)$. La courbure scalaire généralisée de J admet l'expression suivante (ne dépendant que de J et ω)*

$$s_{GK}(J) = u_J - \frac{4-2p}{1-p} |\theta|^2 + \frac{2\langle [J, J^{*\omega}], d\theta \rangle}{1-p}.$$

Alternativement, on peut écrire

$$s_{GK}(J) = s_g + \frac{2\Delta p}{1-p} - \frac{1}{1-p^2}\left(\frac{4+2p}{1-p} - \frac{1}{2}\right)|dp|^2, \tag{4.3.8}$$

où s_g est la courbure scalaire de la métrique riemannienne associée $g = \omega(\cdot, J\cdot)^s$.

Preuve. La première expression s'obtient trivialement par comparaison de la formule (4.3.5) avec la définition de $s_{GK}(J)$. La seconde expression s'obtient similairement de (4.3.7) en utilisant (4.2.1) et l'identité

$$|\theta|^2 = \frac{1}{1-p^2}|dp|^2 \tag{4.3.9}$$

qui se déduit de (4.3.4). □

Remarque 4.3.1. Dans [**15**] une notion de «courbure scalaire généralisée» dépendant d'une fonction arbitraire $\phi \in C^\infty(M)$ et valide en toute dimension est dégagée. Cette expression prend la forme suivante ([**24**] p.22) :

$$GS^\phi(J) = s_J + 4\Delta\phi - 4|d\phi|^2 - \frac{1}{2}|db|^2.$$

En dimension 4, nous avons montré au Lemme 4.1.2 que $db = *\theta$ et donc $|db|^2 = |\theta|^2 = (1-p^2)^{-1}|dp|^2$ (par (4.3.9)). En comparant avec (4.3.8), on conclut que $GS^\phi(J) = s_{GK}(J)$ si et seulement si la fonction ϕ satisfait

$$4\Delta\phi - 4|d\phi|^2 = \frac{2\Delta p}{1-p} - \frac{3|dp|^2}{(1-p)^2}.$$

On vérifie aisément que $\phi = -\frac{1}{2}\log(1-p)$, ce qui suggère un choix préférentiel pour la fonction ϕ de [**24**].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Abouzaid, M. Boyarchenko, *Local structure of generalized complex manifolds*, J. Symplectic Geom., **4** (2006), iss. 1, 43-62.

[2] M. Abreu, *Kähler Geometry of Toric Varieties and Exremal Metrics*, Internat. J. Math., **9** (1998), 641-651.

[3] M. Abreu, *Kähler Geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, in 'Symplectic and Contact Topology : Interactions and Perspectives' (eds. Y. Eliashberg, B. Khesin and F. Lalonde), Fields Institute Communications **35**, American Mathematical Society, 2003.

[4] V. Apostolov, M. Gualtieri, *Generalized Kaehler manifolds, commuting complex structures, and split tangent bundles*, Comm. Math. Phys. **271** (2007), 561-575.

[5] V. Apostolov, D. Calderbank, P. Gauduchon, C. Tønnesen-Friedman, *Hamiltonian 2-forms in Kaehler Geometry II : Global Classification*, J. Differential Geom. **68** (2004), 277-345.

[6] V. Apostolov, P. Gauduchon, G. Grantcharov, *Bihermitian structures on complex surfaces*, Proc. London Math. Soc. **79** (1999), 414-429 + Erratum.

[7] V. Apostolov, *Bihermitian surfaces with odd first Betti number*, Math. Z. **238** (2001), 555-568.

[8] V. Apostolov, G. Dloussky, *Bihermitian metrics on Hopf surfaces*, Math. Res. Lett. 15 (2008), 827-839.

[9] V. Apostolov, P. Gauduchon, *The Riemannian Goldberg-Sachs Theorem*, Internat. J. Math. **8** (1997), 421-439.

[10] M. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1-15.

[11] M. Bailey, *Local classification of generalized complex structures*, J. Differential Geom. **95** no. 1 (2013), 1-37.

[12] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv. **53** (1978), 174-227.

[13] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, Seminar of Differerential Geometry, ed. S.T. Yau, Annals of Mathematics Studies **102**, Princeton University Press (1982), 259-290.

[14] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics II*, Differential Geometry and Complex Analysis, Springer-Verlag Berlin (1985), 95-114.

[15] C. Coimbra, C. Strickland-Constable, D. Waldran, *Supergravity as Generalized Geometry I : Type II Theories*, Jour. High Energy Phys. **91** (2011)

[16] T. Courant, A. Weinstein, *Beyond Poisson structures*, Action hamiltonienne de groupes. troisième théorème de Lie (Lyon, 1986), volume 27 of *Travaux en Cours*, 39-49. Hermann, Paris, 1988.

[17] T. Courant, *Dirac manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **319** (1990), 631-661.

[18] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1998), 315-339.

[19] S. K. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology*, Fields Medallists' lectures, 384-403, World Sci. Ser. 20th Century Math., 5, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997.

[20] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002), 289-349.

[21] S. K. Donaldson, *Constant scalar curvature metrics on toric surfaces*, GAFA, Geom. func. anal. **19** (2009), 83-136.

[22] N. Enrietti, A. Fino, G. Grantcharov, *Tamed symplectic forms and generalized geometry*, J. Geom. Phys. **71** (2013), 103-116.

[23] A. Fujiki, *Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics*, [translation of Sugaku 42, no. 3 (1990), 231-243], Sugaku Expositions 5, no. 2 (1992), 173-191.

[24] M. Garcia-Fernandez, *Torsion-free generalized connections and heterotic supergravity*, Comm. Math. Phys. **332** (2014) iss. 1, 89-115.

[25] Jr. S. Gates, C. Hull, M. Roček, *Twisted multiplets and new supersymetric nonlinear sigma models*, Nuclear Phys. B, **248**(1) (1984), 157-186.

[26] P. Gauduchon, *Structures bihermitiennes en dimension 4*, notes non publiées.

[27] P. Gauduchon, *Calabi's extremal Kähler metrics : An elementary introduction.* En préparation.

[28] P. Gauduchon, *La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte*, Math. Ann. **267** (1984), 495-518.

[29] L. Ginzburg, V. Guillemin, Y. Karshon, *Moment maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*, Mathematical Surveys and Monographs **98** (2002).

[30] R. Goto, *Deformations of generalized complex and generalized Kähler structures*, J. Differential Geom. **84** (2010), 525-560.

[31] R. Goto, *Poisson structures and generalized Kahler structures*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009) no. 1, 107-132.

[32] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, DPhil thesis, Oxford University, 2004.

[33] M. Gualtieri, *Branes on Poisson Varieties*, The many facets of geometry, 368-394, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.

[34] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, Princeton Annals of Mathematics, **174** (2011) iss.1, 75-123.

[35] H. Bursztyn, G. R. Cavalcanti, and M. Gualtieri, *Reduction of Courant algebroids and generalized complex structures*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 726-765.

[36] V. Guillemin, *Kähler structures on toric varieties*, J. Differential Geom. **40** (1994), 285-309.

[37] V. Guillemin, *Moment maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, Progress in Mathematics **122**, Birkäuser, Boston, 1994.

[38] V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping I*, Invent. Math. **67** (1982), 491-513.

[39] N. J. Hitchin, *Instantons, Poisson structures and generalized Kähler geometry*, Comm. Math. Phys. **265** (2006), 131-164.

[40] N. J. Hitchin, *Bihermitian metrics on Del Pezzo surfaces*, J. Symplectic Geom. **5** (2007), 1-7.

[41] N. Hitchin, *Generalized Calabi-Yau manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **54** (2003), 281-308.

[42] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, *Hyperkahler Metrics and Supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535-589.

[43] N. J. Hitchin, *Lectures on generalized geometry*, arXiv :1008.0973

[44] S. Hu, *Hamiltonian symmetries and reduction in generalized geometry*, Houston J. Math, 35 (3) (2009), 787-811.

[45] V. Kac, *Infinite Dimensional Groups with Applications*, Springer New York, 2012.

[46] S. Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, II, Interscience Publishers, 1963.

[47] I. Kolár, P. Michor, J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[48] Y. Lin, S. Tolman, *Symmetries in Generalized Kähler Geometry*, arXiv :math/0509069v1.

[49] M. Lejmi, *Extremal almost-Kähler metrics*, Int. J. Math. **21** (2010), no. 12, 1639-1662.

[50] E. Lerman, S. Tolman, *Hamiltonian torus action on symplectic orbifolds and toric varieties*, Trans. Amer. Math., **184** (1997), 4201-4230.

[51] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Second edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1998.

[52] O. Mohsen, *Symplectomorphismes hamiltoniens et métriques kählériennes*, 22 mai 2003 (Mémoire de DEA, Univ. Paris 7).

[53] H. Omori, *Infinite-dimensional Lie Groups*, American Mathematical Soc., 1997.

[54] L. Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms*, ETH Lectures in Mathematics, Birkhauser, 2001.

[55] M. Pontecorvo, *Complex structures on Riemannian four-manifolds*, Math. Ann. **309** (1997), no. 1, 159-177.

[56] G. Schwarz, *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*, Topology **14** (1975), 63-68.

[57] A. C. da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics **1764**, Springer-Verlag, 2008.

[58] I. Vaisman, *Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics **118**, Birkhauser, 1994.

[59] I. Vaisman, *On locally conformal almost Kähler manifolds*, Israel J. Math. **24** (1976), 338-351.

[60] R. O. Wells, Jr., *Differential analysis on complex manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1980.