Université de Montréal

Coefficients de Clebsch-Gordan de la super-algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$

par
Geoffroy Bergeron

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Août, 2015

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Coefficients de Clebsch-Gordan de la super-algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$

présenté par:

Geoffroy Bergeron

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard Mackenzie,	président-rapporteur
Luc Vinet,	directeur de recherche
Manu Paranjape,	membre du jury

Mémoire accepté le: 16 septembre 2015

RÉSUMÉ

Les fonctions génératrices des coefficients de Clebsch Gordan pour la superalgèbre de Lie osp(1|2) sont dérivées en utilisant deux approches. Une première approche généralise une méthode proposée par Granovskii et Zhedanov pour l'appliquer dans le cas de osp(1|2), une algèbre dont le coproduit est torsadé. Une seconde approche repose sur la réalisation de osp(1|2) en tant qu'algèbre dynamique d'un oscillateur parabosonique et utilise une équivalence dans cette réalisation entre le changements de coordonnées polaires à cartésiennes et le problème de Clebsch-Gordan. Un chapitre moins formel précède ces dérivations et présente comment le problème de Clebsch-Gordan s'interprète en tant que réalisation d'une algèbre de fusion. La notion abstraite de fusion est introduite, soulignant son importance en physique, pour en venir au cas particulier du problème de Clebsch-Gordan. Un survol du cas de l'algèbre osp(1|2) et de ses utilisations en physique mathématique conclut ce chapitre.

Mots clés : Superalgèbre de Lie, Coefficients de Clebsch-Gordan, Algèbre de Hopf, Oscillateur parabosonique, Oscillateur de Dunkl, Fonctions génératrices, États cohérents, Coproduit torsadé.

ABSTRACT

The generating functions for the osp(1|2) Lie superalgebra Clebsch-Gordan coefficients are derived using two approaches. The first one consists of generalizing a method first proposed by Granovskii and Zhedanov to apply it to the case of osp(1|2), an algebra with a twisted coproduct. The second one is based on the realization of the osp(1|2) as the dynamical algebra for a parabosonic oscillator and used an equivalence in this realization between a change of basis from polar to cartesian coordinates and the Clebsch-Gordan problem. A less formal chapter precedes those derivations and present how the Clebsch-Gordan problem can be interpreted as a realization of a fusion algebra. The abstract notion of fusion is introduced, mentionning its importance in physics, and leads to the particular case of the Clebsch-Gordan problem. A brief review of the problem for the osp(1|2) algebra and its uses in mathematical physics concludes this chapter.

Keywords: Lie superalgebra, Clebsch-Gordan coefficients, Hopf algebra, Parabosonic oscillator, Dunkl oscillator, Generating functions, Coherent states, Twisted coproduct.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier mon directeur de recherche, Luc Vinet, pour son soutien dans cette démarche. Sa passion pour la recherche a été des plus inspirantes. Je souhaite également remercier Vincent X. Genest pour ses précieux conseils et son aide dans la rédaction de l'article présenté dans ce mémoire. Je remercie aussi mes parents et amis pour la relecture de mes écrits et leur soutien de ma passion pour la physique.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La codification d'un problème physique en terme de structures algébriques est une approche dans la construction de modèle qui s'est avérée fructueuse. On en comprend l'importance et la portée en considérant, par exemple, l'algèbre de Poisson qui, au travers de ses diverses réalisations, constitue la structure derrière beaucoup des systèmes dynamiques provenant aussi bien de la mécanique classique que de la mécanique quantique. En effet, cette codification en algèbres dynamiques permet souvent de faire un étude qualitative de la dynamique associée à un problème et parfois même de le solutionner complètement lorsque ce problème admet suffisamment de symétries.

Généralement, un système dynamique sera décrit par un espace indexant les différents états possibles du système et une règle d'évolution décrivant l'évolution temporelle d'un état à l'autre. Cette règle d'évolution peut être exprimée sous la forme d'un opérateur agissant sur l'espace des états. Physiquement, on ne connait d'un système que ce qui en est observable. Aussi, il devient souhaitable d'agrandir ce modèle de base avec la notion d'observables. La dynamique dans l'espace des états se reflète alors dans ces observables. Cette structure dynamique entre les observables et la loi d'évolution peut alors être encodée abstraitement sous la forme d'une algèbre, l'*algèbre dynamique* du système. En plus de la dynamique, l'algèbre dynamique d'un système peut encoder également la structure de l'espace des états. Par exemple, en mécanique classique, il est possible de reconstruire la structure de l'espace de phase. Une procédure analogue existe aussi en mécanique quantique, l'algèbre dynamique associée à un système quantique contraignant la forme de l'espace de Hilbert du système sachant que cette espace doit permettre une représentation de l'algèbre. Les états admis par une dynamique peuvent ainsi être étudiés à partir de l'algèbre dynamique.

Un système élémentaire, pour une dynamique donnée, est défini comme une représentation irréductible de l'algèbre associée à cette dynamique. Un système composite peut ensuite être construit par la juxtaposition de tels systèmes élémentaires. Il est souvent naturel, voire nécessaire, que l'algèbre dynamique ait une action sur un tel système composite. Ce système doit donc permettre également une représentation de l'algèbre. Cette notion est connue sous le nom de *fusion* dans la littérature. En mécanique quantique, la juxtaposition de systèmes s'interprète comme le produit tensoriel des représentations correspondant aux deux systèmes. Ainsi, la fusion établit une équivalence entre un tel produit tensoriel et une représentation de l'algèbre. Les deux espaces de représentation, sous une telle équivalence, sont isomorphes en tant qu'espace vectoriel et la fusion s'interprète alors comme un changement de base. Le problème de Clebsch-Gordan réside dans la détermination des coefficients de la matrice de ce changement de base.

Plusieurs approches existent dans la solution de ce problème et les solutions peuvent souvent être exprimées sous la forme de relations de récurrence ou de fonctions génératrices. Granovskii et Zhedanov ont proposé en 1993 [6] une approche algébrique permettant la dérivation des fonctions génératrices des coefficients de Clebsch-Gordan pour de nombreuses algèbres de Lie. La méthode originale fonctionne uniquement lorsque le coproduit de l'algèbre de Lie considérée est symmétrique. Ce mémoire développe, dans un premier temps, une généralisation de cette méthode permettant son utilisation dans le cas d'une super-algèbre de Lie, $\mathfrak{osp}(1|2)$, dont le coproduit n'est plus symétrique mais torsadé. Ces fonctions génératrices sont également obtenues en utilisant une concrétisation de l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$ en tant qu'algèbre dynamique.

Deux chapitres composent ce mémoire. Le premier aborde le contexte théorique du problème de Clebsch-Gordan, interprété comme une instance du concept de fusion. La notion d'algèbre dynamique et son lien avec les symétries d'un problème est brièvement présentée pour permettre d'introduire le concept abstrait de fusion et sa concrétisation en termes de systèmes physiques décrits par une algèbre dynamique. Finalement, le cas particulier de l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$ est abordé et l'intérêt de son étude est décrit. Le second chapitre est constitué d'un article en anglais constituant le coeur de l'ouvrage et présentant les résultats obtenus pour l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$. Deux dérivations des fonctions génératrices des coefficients de Clebsch-Gordan sont présentées, l'une expliquant et généralisant l'approche de Granovskii et Zhedanov, l'autre se basant sur une réalisation concrète de l'algèbre.

1.1 Contributions de l'auteur

Les travaux de l'auteur se placent dans une continuité de travaux de recherche portant sur l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$. Ces coefficients ont déjà été identifiés en 1994 [8] et plus récemment en 2013 par une méthode différente [22]. Leur fonction génératrice a également été déterminée en 2011 [17]. L'article constituant le chapitre 3 propose deux nouvelles dérivations de cette fonction génératrice. Le projet de recherche, proposé par Luc Vinet, cherchait initialement à dériver la fonction génératrice des coefficients de Clebsch-Gordan de cette algèbre en utilisant une approche décrite initialement par Granovskii et Zhedanov en 1993. Une difficulté dans l'application de cette approche, propre à l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$, est rapidement devenue évidente. En effet, la méthode ne peut s'appliquer dans une situation où le coproduit de l'algèbre n'est pas symmétrique et trivial. L'auteur a donc entrepris de construire une généralisation permettant tout de même l'utilisation de la méthode pour mener à terme la dérivation. Luc Vinet et Vincent X. Genest ont confirmé la validité de la modification apportée à la méthode originale. Vincent X. Genest a également proposé la possibilité de la seconde dérivation qui a été porté à terme par l'auteur. Le premier jet de l'article de même que les différentes révisions sont les travaux de l'auteur. Toutefois, Vincent X. Genest a fourni une aide précieuse par ses relectures et ses conseils sur la mise en page et certaines références pertinentes. Le co-auteur de l'article, Luc Vinet, a guidé le processus rédactionnel et s'est assuré de la qualité scientifique de l'ouvrage, notamment en ce qui a trait à placer l'article dans un contexte qui présente sa pertinence aux experts du domaine et à s'assurer de la précision du texte.

CHAPITRE 2

COEFFICIENTS DE CLEBSCH-GORDAN

Ce chapitre concerne la clarification du concept abstrait de fusion et sa concrétisation dans le problème de Clebsch-Gordan et la mise en contexte de la problématique traitée au chapitre suivant. Un survol de la notion d'algèbre dynamique et du concept connexe d'algèbre de symétries est présenté à la section 2.1 pour ensuite permettre de dégager le concept de fusion dans la section 2.2. Les coefficients de Clebsch-Gordan sont alors présentés comme une réalisation de la fusion abstraite à la section 2.3. Finalement, la section 2.4 et introduit le problème abordé au chapitre 3. Le but de ce chapitre est surtout de poser un contexte aux travaux du chapitre 3. Ainsi, on ne cherchera pas à élaborer une construction rigoureuse de la théorie, mais plutôt de cerner les concepts importants.

2.1 Algèbres dynamiques et symétries

Les structures algébriques se retrouvent dans bien des contextes en physique et il est de l'opinion de l'auteur que cette diversité mène facilement à une confusion dans la terminologie. De plus, la physique se laisse souvent guidée par l'intuition, ce qui porte parfois à travailler avec des structures mal définies ou qui n'existent tout simplement pas.[1] Il est donc nécessaire de clarifier ce que l'on entend par algèbre dynamique, si ce n'est que pour se doter d'un contexte sur lequel bâtir les raisonnements pour le reste du présent chapitre. Une construction rigoureuse ne sera pas entreprise dans cette section, cherchant plutôt à cerner le concept, ce qui ne serait pas possible avec parfaite rigueur vue l'étendue de la question et notre compréhension qui en est limitée. Aussi, nous suivrons une approche qui rappelle l'apparition historique des différents concepts, commençant par l'idée générale et

[1] Les résultats restent valides, mais il peut être difficile de justifier la procédure. Par exemple, le théorème de Haag [15] démontre l'inexistence du point de vue d'interaction en théorie des champs. S'il est vrai que les procédures modernes n'utilisent pas à proprement parler ce point de vue, elles sont tout de même basées sur une intuition qui provient d'un tel point de vue.

suivant ses différentes concrétisations en mécanique classique puis quantique.

L'utilisation de structures algébriques pour encoder la dynamique de systèmes physiques permet de faire abstraction du contexte particulier où cette dynamique se concrétise. On comprend rapidement l'avantage d'une telle approche en ce qu'elle nous permet de classifier les dynamiques possibles dans un cadre donné, de comparer aisément la dynamique de deux systèmes et d'isoler le rôle d'un sous-système en particulier dans la dynamique globale. On entend donc par algèbre dynamique une structure associée à un système physique encodant sa dynamique. Cette définition reste vague et pour la préciser, il sera nécessaire de se limiter, pour commencer, à la mécanique classique. Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, un système est décrit par un espace de phase paramétrisant les différents états du système et où chaque point identifie un état du système. Les quantités observables de ce système sont représentées par les fonctions continues sur cette espace de phase, englobant l'état du système lui-même au travers des fonctions linéaires. Une fonction distinguée, l'hamiltonien, encode l'évolution temporelle de ces observables par la structure supplémentaire du crochet de Poisson. Le produit et la somme de telles fonctions étant fermés, on obtient une algèbre associative de fonctions. La structure additionnelle du crochet de Poisson fait de cette algèbre de Poisson une algèbre de Lie. On remarque alors que cette algèbre encode complètement la dynamique du système et il est possible de faire abstraction de l'espace de phase. À l'inverse, étant donnée une algèbre de Poisson, il est possible, moyennant quelques hypothèses, de reconstruire l'espace de phase[2]. Un système dynamique classique est donc une réalisation concrète d'une algèbre de Poisson.

Considérons maintenant uniquement les fonctions linéaires de l'espace de phase, soit essentiellement les données nécessaires pour décrire complètement l'état d'un système, en ignorant tout autre observable. Pour un espace de phase de dimension finie, l'ensemble $\{q_i, p_i\}$ des paires de coordonnées canoniques génère complètement les fonctions linéaires. Sous la structure seule du crochet de Poisson et de l'addition

[2]Ces hypothèses concernent principalement la topologie de l'espace de phase. Les méthodes de la géométrie algébrique moderne permettent ensuite de reconstruire l'espace, voyant l'algèbre dynamique comme une algèbre de fonctions sur cette espace.

de fonctions, ces fonctions linéaires forment l'algèbre de Heisenberg. Sur les générateurs $\{q_i, p_i\}$ et C, où C est une extension centrale, le crochet de Lie est donné explicitement par

$$[q_i, p_j] = C\delta_{ij}, \quad [C, q_i] = 0, \quad [C, p_i] = 0.$$

Le principe de quantification canonique implique la recherche de représentations (projectives) unitaires et irréductibles de cette algèbre. Les systèmes quantiques ayant un analogue classique avec un espace de phase euclidien de dimension finie apparaissent ainsi naturellement comme la seule représentation de la sorte, à une transformation unitaire près. C'est là l'essence du théorème de Stone-von Neumann [14]. Cette représentation peut même être étendue à une représentation unitaire irréductible des fonctions quadratiques de l'espace de phase. De cette façon, pour un hamiltonien quadratique, la dynamique classique induit une dynamique sur le système quantique équivalent. Par contre, cette approche ne se généralise pas aux fonctions polynomiales de l'espace de phase[3]. La question de la quantification est vaste, mais ne fait pas l'objet du présent mémoire et nous n'allons donc pas élaborer cette théorie plus qu'il ne le faut. Cependant, la constatation que les observables quantiques munis des relations de commutation canoniques[4] à titre de crochet de Lie forment une algèbre demeure générale. Aussi, en incluant l'hamiltonien, on obtient une algèbre dynamique pour les systèmes quantiques. Le spin ne s'indexant pas dans un espace de phase linéaire est ici ignoré, mais apparait naturellement [2] lorsque les symétries spatio-temporelles sont imposées sur la théorie.

Le contexte adopté dans ce mémoire peut maintenant être cerné. Une algèbre dynamique est donnée par des générateurs représentant les quantités dynamiques. Le produit de l'algèbre est donné par un crochet de Lie encodant à la fois les relations de commutation canoniques et la loi d'évolution par l'identification d'un élément distingué, l'hamiltonien. Dans ce contexte minimaliste, le produit d'éléments

[3]Cette preuve découle d'un théorème de Groenewold et Van Hove [11].

[4]Les observables qui ne se déduisent pas de cette procédure héritent de telles relations s'ils s'expriment en termes de fonctions des coordonnées canoniques.

$xx = x^2$ qui n'est pas le crochet de Lie n'est pas défini. Cependant, il est possible d'interpréter les éléments quadratiques, et même polynomiaux, comme le produit des éléments linéaires. Pour ce faire, on introduit la notion d'*algèbre enveloppante universelle*. Pour une algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ sur $\mathbb{C}$ avec crochet de Lie $[.,.] : \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, on construit d'abord l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{L})$ donnée par

$$T(\mathfrak{L}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}^{\otimes n}, \qquad \mathfrak{L}^{\otimes n} = \begin{cases} \overbrace{\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{L}}^{n \text{ fois}} & n > 0 \\ \mathbb{C} & n = 0 \end{cases}$$

et fermée sous le produit tensoriel $\mathfrak{L}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{L}^{\otimes n} \mapsto \mathfrak{L}^{\otimes (m+n)}$. On définit alors l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{L})$ de $\mathfrak{L}$ par le quotient $T(\mathfrak{L})/I$ où I est l'idéal généré par l'ensemble des éléments de $T(\mathfrak{L})$ donné par $u \otimes v - v \otimes u - [u, v]$, $\forall u, v \in \mathfrak{L}$. Ainsi, la structure du crochet de Lie est préservée puisque l'idéal est identifié à l'unité additive 0 et ainsi, les relations de la forme $[u, v] = u \otimes v - v \otimes u$ sont imposées. L'algèbre $\mathfrak{L}$ est naturellement incluse dans $U(\mathfrak{L})$ et cette construction préserve la théorie des représentations [29]. Une représentation de $\mathfrak{L}$ sur V peut alors être vue comme une représentation de $U(\mathfrak{L})$ sur le même espace V ou le produit tensoriel (associatif) est interprété comme le produit matriciel dans $\mathfrak{gl}(V)$. En général, un espace V d'une représentation de $\mathfrak{L}$, induit une représentation sur $V \otimes V$ de la sous-algèbre $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ dans l'algèbre enveloppante. Exiger que V soit directement une représentation de $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$ est une modification de cette représentation naturelle et n'est pas équivalente. Pour ce faire, il est alors nécessaire de voir la représentation $\mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{L}$ comme l'algèbre de Lie issue de l'algèbre associative $End(V)$ des endomorphismes de V en définissant le crochet de Lie par $[x, y] = xy - yx$ pour $x, y \in End(V)$. Autrement, le produit matriciel n'est pas défini. Ainsi, la représentation de $U(\mathfrak{L})$ sur V induite par celle de $\mathfrak{L}$ est un homomorphisme d'algèbre associative $U(\mathfrak{L}) \to End(V)$. La mécanique quantique standard se place implicitement dans ce contexte lorsque, par exemple, on interprète p^2 comme la double application de l'opérateur p sur un état. Nous ne différencierons donc pas ces deux constructions pour le reste du mémoire et une algèbre dynamique désigne alors aussi bien sa définition stricte ou son algèbre enveloppante universelle.

La notion d'algèbre dynamique englobe également les algèbres de symétries. En effet, le théorème de Noether établit une équivalence entre les symétries continues de l'action, et donc de la dynamique, d'un système physique et les quantités conservées sous cette dynamique. Ces quantités conservées sont des observables et appartiennent alors à l'algèbre dynamique ou du moins à son algèbre enveloppante. L'évolution temporelle étant encodée par le crochet de Lie avec l'hamiltonien, les quantités conservées se démarquent dans l'algèbre dynamique comme le noyau de l'action par l'hamiltonien avec le crochet de Lie. Ces symétries continues forment naturellement des groupes de Lie et peuvent donc être encodées en terme de générateurs d'une algèbre de Lie. Ces générateurs sont précisément les éléments de l'algèbre dynamique qui représentent les quantités conservées. L'exemple classique est celui d'une système invariant sous translation pour lequel la quantité de mouvement est préservée. Or, cette quantité de mouvement est précisément le générateur des translations. Cela provient du fait que tout les éléments de l'algèbre dynamique sont des générateurs de transformations de l'espace de phase lorsqu'ils agissent par le crochet de Lie. Lorsque ces transformations sont des symétries, le générateur correspondant génère alors la symétrie. Dans cette optique, les développements ultérieurs et la notion de coefficients de Clebsch-Gordan s'appliquent également pour ces algèbres de symétries lorsque vues comme sous-algèbres de l'algèbre dynamique.

Le type de symétries discuté ici n'inclut pas nécessairement les symétries spatio-temporelles liées au principe de relativité. Or, ces symétries jouent un rôle clé dans la nécessité pour une théorie physique multiparticule du concept de fusion qui sera introduit sous peu et dans la justification derrière l'étude de systèmes tels que celui étudié au chapitre 3. De plus, il a été mentionné plus haut que les symétries spatio-temporelles, lorsqu'imposées sur la théorie, forcent l'adoption de représentations dont certains paramètres forment des degrés de liberté purement quantiques, tel le spin[5]. Cernons d'abord le rôle fondamental que jouent ces symétries dans

[5]Sous certaines réserves, le spin peut être modélisé dans une théorie classique, seulement, il ne s'exprime pas dans un espace de phase linéaire.

la structure de l'algèbre dynamique. En effet, les relations de commutations canoniques peuvent être interprétées comme une conséquence des symétries spatio-temporelles. Que le groupe de relativité adopté soit le groupe de Poincaré ou de Galilée, la conclusion est la même, ignorant quelques subtilités. Aussi, pour un système quantique, si la quantité de mouvement P_i peut être vue comme le générateur de translation, la position Q_i s'identifie au générateur d'une translation dans la quantité de mouvement. Sous la bonne normalisation, cette opération revient à un changement de référentiel ayant pour générateur[6] $K_i \propto Q_i$. Or, pour les deux groupes de relativité, on retrouve dans l'algèbre de Lie [1] un crochet de la forme suivante

$$[K_i, P_j] = im\delta_{ij} \implies [Q_i, P_j] \propto i\delta_{ij}.$$

Une particule ponctuelle sans structure interne possède deux ensembles de variables dynamiques Q_i et P_i, et les relations de commutation canoniques sont imposées par la relativité de la théorie. Évidemment, l'argument ne peut s'appliquer directement à un système multiparticule, mais c'est essentiellement cette constatation qui demande de définir le concept de fusion. De plus, les particules élémentaires constituant un système sont définies à partir de leur description comme système isolé dans le vide. Demander que les relations de commutations canoniques soient préservées dans cette généralisation ne revient alors qu'à conserver la même structure que pour la particule isolée. Ce cheminement mène à une interprétation élégante de ces relations canoniques comme des contraintes sur la dynamique pour qu'une certaine cohérence, issue de la relativité, soit préservée. Ces symétries spatio-temporelles ne sont pas équivalentes à des symétries dynamiques, leur générateurs n'étant pas tous dans le noyau de l'action hamiltonienne par le crochet de Lie. Par contre, ces générateurs sont des éléments de l'algèbre dynamique et très souvent un sous-ensemble

[6] Ceci n'est strictement vrai que à $t = 0$, cependant les relations de commutation canoniques seront préservées sous une évolution subséquente unitaire. Dans tout les cas, la charge associée aux symétries de changement de référentiel s'apparente à la position du centre de masse, ce qui permet toujours l'argument qui suit.

est dans l'algèbre de symétries, ce qui implique que la notion de fusion telle qu'exposée ici peut être développée pour ces algèbres, de même que la décomposition de Clebsch-Gordan.

2.2 Concept de fusion

L'introduction en physique des coefficients de Clebsch-Gordan reposait historiquement sur un impératif pragmatique. Il est tout a fait possible d'introduire le concept en se limitant au contexte de la mécanique quantique et de ses premières applications dans le traitement perturbatif de l'atome d'hydrogène avec spin. Cependant, il est pertinent d'assoir le concept sur une base rigoureuse qui a permis sa généralisation à des cas plus complexes et aussi pour pouvoir cerner le parallèle entre l'opération abstraite à laquelle il correspond et sa concrétisation dans le cas présent.

La nécessité de pouvoir faire agir une algèbre dynamique sur un système constitué de plusieurs représentations irréductibles a été soulignée à la section précédente. Pour ce faire, il faut pouvoir combiner ces représentations irréductibles en une seule représentation. Cette opération se concrétise par le concept de fusion. Afin de dégager la notion de fusion de systèmes physiques, on cherche à encoder algébriquement les propriétés de l'opération abstraite de fusion. Aussi, si la notion de fusion s'applique à beaucoup d'objets en mathématique, la fusion de systèmes physiques sera utilisée comme exemple sur lequel s'appuyer pour développer une intuition. Prenons donc l'exemple de tels systèmes pour cerner ces propriétés. On entend par système physique un ensemble de quantités dynamiques, couplées ou non, avec une loi d'évolution. Une paire de tels systèmes forme donc également un système. On demande que la structure de ce nouveau système ne dépende pas de l'ordre de la paire puisque la juxtaposition de deux systèmes qui forment ce nouveau système est abstraite, et ne permet pas de définir un ordre. De plus, on demande une opération qui est unique pour un ensemble donné de système. Par fusion on entend aussi une opération où la structure du système résultant est intimement liée à celles des systèmes d'origine. Naturellement, l'opération de fusion est, dans sa forme la plus simple, une opération $\star$ binaire fermée sur un ensemble. Par exemple, en considérant une famille de systèmes physiques de même algèbre dynamique, on demanderait l'opération fermée sur un ensemble des représentations de cette algèbre. Cette conception intuitive de l'opération de fusion ne permet pas de distinguer l'action à gauche de celle à droite par $\star$ d'un élément de la structure algébrique sur un autre et demande que la fusion de trois élément soit unique. Aussi, $\star$ se doit d'être commutative et, par compatibilité, associative. Il est souvent possible de définir une autre opération compatible avec $\star$, donnant au concept de fusion la structure d'une algèbre. Les systèmes physiques décrits par une algèbre ayant cette propriété, on voit donc l'opération de fusion $\star$ comme le produit abélien d'une algèbre associative, ou *algèbre de fusion*.

2.2.1 Fusion de systèmes physiques

Portons alors notre attention sur un système physique décrit par une algèbre dynamique. On considère l'opération de fusion d'une paire de tels systèmes. Sachant qu'une instance particulière de ces systèmes est une représentation de l'algèbre, la question se traduit en une opération de fusion d'une paire de représentations de cette algèbre. Une algèbre de fusion peut maintenant être définie rigoureusement [7]. Cette opération de fusion peut souvent être interprétée comme la juxtaposition de deux tels systèmes n'ayant aucun couplage entre eux. Cette juxtaposition doit être entendue comme conceptuelle au sens où l'on cherche maintenant à interpréter les deux systèmes comme les deux sous-systèmes d'un système total formé de la paire.

Pour un système quantique avec algèbre dynamique $\mathfrak{a}$, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sous l'action de la réalisation de $\mathfrak{a}$ en termes d'opérateurs est une représentation irréductible de cette algèbre. Le système global, composé d'une paire de tels systèmes quantiques juxtaposés, aura pour espace de Hilbert le produit tensoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ des deux sous-espaces. De même, on obtient une algèbre dynamique globale donnée par le produit tensoriel de l'algèbre avec elle-même $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ agissant sur l'espace globale par

$$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) = \mathfrak{a}(\mathcal{H}) \otimes \mathfrak{a}(\mathcal{H}).$$

L'opération $\star$ de l'algèbre de fusion se présente donc dans les systèmes quantiques comme le produit tensoriel de représentations irréductibles d'une algèbre dynamique. De plus, il est cohérent de poser la somme directe de représentations comme étant l'opération additive de l'algèbre. En effet, la somme directe d'espaces de Hilbert s'interprète naturellement comme l'ajout de possibilité d'état à un système existant. Par exemple, lorsqu'est construit l'espace de Fock des états en théorie des champs, les espaces de Hilbert pour des états multiparticules sont construits par le produit tensoriel de l'espace de Hilbert d'une seule particule. Aussi, puisque l'on cherche maintenant à permettre que le nombre de particules soit variable, l'espace de Hilbert complet est constitué de la somme directe de ces espaces multiparticules. Cependant, la structure d'algèbre seule d'une algèbre dynamique ne suffit pas pour réaliser complètement une algèbre de fusion. En effet, cette structure doit être fermée sous $\star$ et rien ne permet une telle conclusion sans structure supplémentaire puisque $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est une représentation de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ mais il n'est pas clair que cet espace permette une représentation de $\mathfrak{a}$. Ainsi, le produit tensoriel de représentation n'est pas suffisant pour correspondre au concept de fusion puisque la paire d'éléments initiale n'est pas identifiée à un élément du même ensemble. Il est nécessaire d'introduire des structures supplémentaires. Au nombre des structures permettant la réalisation de l'algèbre de fusion, les bialgèbres se démarquent par leur ubiquité en physique mathématique.

2.2.2 Réalisations de la fusion et bialgèbres

Soit une algèbre associative $\mathfrak{a}$ avec unité sur un corps K. On sait que $\mathfrak{a}$ possède un produit associatif $\nabla : \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ et une unité $\eta : K \to \mathfrak{a}$. La structure duale de $\mathfrak{a}$ au sens de la théorie des catégories, lorsqu'existante, est donnée par les homomorphismes $\Delta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, le coproduit, et $\epsilon : \mathfrak{a} \to K$, la counité et fait de $\mathfrak{a}$ une coalgèbre. Une telle algèbre devient une bialgèbre lorsque la compatibilité entre ces deux structures est demandée [31]. Les bialgèbres ou des structures similaires se retrouvent dans plusieurs problèmes de la physique mathématique au travers, par exemple, des algèbres de Hopf ou encore des bialgèbres de Lie, où l'associativité est remplacée par l'identité de Jacobi.

Les bialgèbres permettent de réaliser une algèbre de fusion. En effet, la réalisation est construite à partir d'une bialgèbre $\mathfrak{b}$ en prenant les représentations irréductibles de $\mathfrak{b}$ pour éléments et la somme directe de représentations comme opération d'addition, qui est naturellement fermée. Par une heuristique basée sur l'interprétation physique de l'opération de fusion d'une algèbre dynamique, l'opération $\star$ de l'algèbre de fusion a été associée au produit tensoriel de représentations. Cette réalisation de $\star$ ne garantissait pas, en général, sa fermeture dans l'algèbre de fusion. Or, dans le cas d'une bialgèbre, il est toujours possible d'interpréter le produit tensoriel de représentation comme une représentation. Reprenant les notations du paragraphe précédent, une représentation de $\mathfrak{a}$ est donnée par un homomorphisme π paramétrisé par un ensemble $\{m_i\}$ et un espace (m_i) associé de tel sorte que $\pi : \mathfrak{a} \to End((m_i))$. Tel que relevé plus haut, l'espace $(m_i) \otimes (m_j)$ est une représentation de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ par l'homomorphisme $\pi \otimes \pi$. Une bialgèbre possède un coproduit $\Delta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ qui, étant un homomorphisme, induit une représentation $\hat{\pi} : \mathfrak{a} \to End((m_i) \otimes (m_j))$ de $\mathfrak{a}$ sur $(m_i) \otimes (m_j)$ avec $\hat{\pi} = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta$. Le produit tensoriel est donc fermé et il est fondé de réaliser l'opération $\star$ par le produit tensoriel de représentations.

La réalisation de l'algèbre de fusion que forme les bialgèbres est construite à partir d'algèbres associatives, cependant, l'algèbre dynamique $\mathfrak{L}$ n'est pas associative puisque son produit est donné par un crochet de Lie qui n'est pas associatif. L'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{L})$, présentée dans la section précédente, ne correspond pas non plus à la structure désirée puisque le produit tensoriel d'éléments de l'algèbre était dans ce cas interprété comme l'action consécutive des l'éléments sur une même représentation alors que pour la fusion, on désir plutôt une interprétation comme l'action simultanée sur deux représentations différentes. Cependant, la même la structure d'algèbre enveloppante universelle peut être utilisée. En procédant à nouveau dans la construction de l'algèbre enveloppante en partant maintenant de $U(\mathfrak{L})$ on retrouve exactement la même structure d'algèbre, au sens où cette structure n'est en rien enrichie. Cependant, cela nous permet de donner une interprétation différente au produit tensoriel et ainsi d'enrichir la théorie des représentation de $U(\mathfrak{L})$. Ainsi, l'objet résultant possède deux interprétations du produit tensoriel : la première en termes d'actions consécutives sur une même représentation, la seconde en termes de l'action simultanée sur deux représentations différentes. Cette seconde interprétation suit de l'introduction du coproduit symétrique $\Delta : u \mapsto u \otimes 1 + 1 \otimes u$ sur $U(\mathfrak{L})$, en faisant automatiquement une algèbre de Hopf er donc une bialgèbre. L'algèbre de fusion se réalise donc comme une algèbre sur les représentations irréductibles de l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre dynamique avec $\star$ réalisée par le produit tensoriel $\otimes$ et l'opération additive $+$, par la somme directe $\oplus$ de représentations. Cette forme simple du coproduit est intuitive pour beaucoup de systèmes, interprétant la mesure d'une quantité sur le système global comme la somme de la mesure sur l'un et, séparement, sur l'autre système juxtaposé de ce système global.

Il est maintenant possible d'introduire les coefficients de Clebsch-Gordan dans le contexte des algèbres de Lie. Les principaux résultats de ce mémoire se situent dans une généralisation de ce contexte qui sera élaborée à la section 2.4.

2.3 Coefficients de Clebsch-Gordan

Les représentations d'une algèbre de Lie sur le produit tensoriel de ses représentations irréductibles obtenues par le biais du coproduit ne sont pas nécessairement irréductibles, mais peuvent toujours se décomposer en une somme directe de représentations irréductibles. Aussi, l'opération de fusion que représente le produit tensoriel est une juxtaposition abstraite et ne correspond donc qu'à un changement de point de vue dans la description du système. Les deux descriptions restent isomorphes et puisqu'il s'agit ici d'un isomorphisme de représentations, l'espace formé par le produit tensoriel et sa décomposition en une somme directe sont isomorphes et peuvent être identifiés. De cette façon, les deux descriptions correspondent simplement à deux bases de cette espace unique et la fusion s'apparente à un changement de base. Les coefficients de Clebsch-Gordan sont précisément les coefficients de ce changement de base. Dans le cas de systèmes physiques, cette correspondance entre les espaces liée au changement de point de vue s'interprète intuitivement : un système global est décrit soit comme un tout unique, soit comme une conjonction de sous-systèmes.

Soit un système quantique décrit par une algèbre dynamique, l'espace de Hilbert associé est une représentation irréductible de l'algèbre. Notons alors cette représentation par (g) où g est un élément de l'ensemble $\{g\}$ paramétrisant les différentes représentations irréductibles[7]. La fusion de deux tels systèmes avec paramètres $\{g_1\}$ et $\{g_2\}$ identifie l'espace de représentation $(g_1) \otimes (g_2)$ avec sa décomposition en représentations irréductibles

$$(g_1) \otimes (g_2) \simeq \bigoplus_{g_i \in g} (g_i). \tag{2.3.1}$$

Ces représentations d'algèbres dynamiques étant des espaces de Hilbert, on peut définir la base donnée par les vecteurs propres d'un élément distingué de l'algèbre, l'hamiltonien, dont le spectre forme les énergies permises. L'énergie étant bornée inférieurement par zéro et, pour un système lié, le spectre d'énergie étant discret, il est possible d'indexer le spectre par $\mathbb{N}$. Parallèlement, les vecteurs propres sont également indexés par $n \in \mathbb{N}$. En notant les vecteurs orthonormés d'une telle base $|n, g\rangle$, où les dégénérescences du spectre sont supposés inexistantes, l'isomorphisme (2.3.1) s'écrit comme un changement de base

$$|n_1, g_1\rangle \otimes |n_2, g_2\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} C^{n,g}_{n_1,n_2} |n, g\rangle. \tag{2.3.2}$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan $C^{n,g}_{n_1,n_2}$ sont donc les éléments de matrices de ce

[7]Le spectre des opérateurs de Casimir [29] donne souvent un tel ensemble, ces opérateurs étant diagonaux sur les représentations irréductibles.

changement de base. Une relation duale existe puisque le changement de base est un isomorphisme et s'exprime par la décomposition inverse qui sera utilisée dans le présent travail

$$|n, g\rangle = \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{N}} {C^{n,g}_{n_1,n_2}}^\dagger |n_1, g_1\rangle \otimes |n_2, g_2\rangle.$$

Lorsque le spectre de l'hamiltonien n'est pas discret, pour une particule libre, par exemple, les vecteurs de base ne sont pas dénombrables et il n'est pas possible de poser le problème sous la forme d'une somme. Cependant une relation équivalente se pose en terme d'une intégrale directe et les coefficients de Clebsch-Gordan s'apparentent alors à une mesure sur les vecteurs de base.

2.3.1 Applications

On pourrait se demander maintenant la pertinence d'introduire les coefficients de Clebsch-Gordan si ceux-ci décrivent simplement un isomorphisme entre deux espaces, voire, un automorphisme d'un seul espace. La pertinence de ces coefficients découle intuitivement de leur interprétation en terme de points de vue différents dans la modélisation d'un système physique. En effet, il est souvent plus facile de travailler un problème sous un différent point de vue que celui dans lequel le problème est décrit. Entre autres, le changement de base lié au problème de Clebsch-Gordan permet parfois de diagonaliser des opérateurs. Illustrons alors ces applications par un exemple général.

La relativité restreinte postule l'invariance des systèmes physiques isolés sous les transformations de Poincaré. Ces transformations étant des symétries forment un groupe et, ainsi, le modèle mathématique qui décrit un tel système doit former une représentation de ce groupe afin de pouvoir modéliser l'effet de ces transformations sur la description du modèle. Un exemple intéressant pour la présente exposition apparaît dans la restriction au sous-groupe $SO(3)$ des rotations du groupe de Poincaré. Les éléments de l'algèbre de Lie associée à ces symétries sont identifiés aux générateurs des rotations de l'espace et, par le théorème de Noether, correspondent à la conservation du moment angulaire. Les représentations pertinentes en physique seront projectives[8] et on peut se permettre de considérer le double recouvrement $SU(2)$. La théorie des représentations de ce groupe mène à la classification des différentes représentations et ne sera pas poursuivie ici, les représentations d'intérêt physique étant bien connues [32], ayant pour paramètre la norme du moment angulaire, un entier ou demi-entier. Chaque particule physique fondamentale dans le vide est identifiée à une représentation irréductible de ce groupe[9]. Le modèle d'un système multiparticule constitué de telles particules est construit à partir de ces représentations irréductibles. Or, ce modèle, si le système est isolé, doit lui-même être une représentation[10], puisque les symétries spatio-temporelles agissent sur tout système physique. Il s'agit là d'une des raisons principales de demander à ce que cette algèbre de symétries soit munie d'un coproduit et permette alors la réalisation de la fusion.

Supposons maintenant un système composite constitué de deux particules, chacune étant des représentation de $\mathfrak{su}(2)$ et ayant donc un moment angulaire intrinsèque, ou spin. L'hamiltonien de ce système est pris comme étant nul. Dans ce contexte, le moment angulaire total est préservé et l'une ou l'autre des descriptions du modèle est justifiée et diagonalise l'hamiltonien, c'est-à-dire la description du système comme l'état de chaque sous-système ou un état du système global. Si maintenant le système est perturbé par l'introduction d'un couplage entre les deux moments angulaires dépendant de leur produit scalaire, il n'est plus vrai que l'hamiltonien est diagonalisé par les deux choix de base. La description du système global en terme du moment angulaire total prévaut au sens où elle permet de diagonaliser l'hamiltonien. Pour connaître l'évolution de chaque sous-système, les coefficients de Clebsch-Gordan seront alors utilisés pour exprimer une solution globale en terme de solution sur les sous-systèmes ou, à l'inverse, pour exprimer une condition initiale donnée pour les sous-systèmes comme une condition initiale

[8]On considère les représentations projectives sur l'espace de Hilbert puisque les observables physiques ne seront pas affectés par une phase.

[9]On le demande en postulant l'isotropie de l'espace.

[10]Cependant, cette représentation n'est plus nécessairement irréductible.

dans la base diagonale de l'hamiltonien.

Une seconde perturbation à ce système modélisant une interaction extérieure permet également d'introduire le concept de règles de sélection. En effet, si cette intéraction est médiée par une particule ayant elle aussi un moment angulaire intrinsèque, la conservation du moment angulaire ne s'applique plus au système constitué de la paire initiale, mais bien au nouveau système formé des trois particules. Aussi, les transitions permises entre les états, en plus des contraintes issues de la préservation de l'énergie, seront contraintes par cette préservation du moment angulaire. Afin de voir comment ces transitions du système global se reflèteront sur les états des deux particules intiales, les coefficients de Clebsch-Gordan seront utilisés pour effectuer le changement de base nécessaire.

Il existe de nombreux exemples en physique atomique et moléculaire où les coefficients de Clebsch-Gordan simplifient l'obtention de solutions exactes ou de résultats qualitatifs comme les règles de sélection dans les transitions. Au nombre de ces utilisations, on dénote le théorème de Wigner-Eckart, l'utilisation des règles de sélections pour déterminer les transitions électroniques permises ou bien encore pour déterminer les sections efficaces en physique des particules. Cette section ne cherchait qu'à illustrer très sommairement leur importance dans l'utilisation de nombreux modèles de la physique. Le lecteur intéressé aux applications en mécanique quantique des coefficients de Clebsch-Gordan de $\mathfrak{su}(2)$ est référé à n'importe quel livre d'introduction à la mécanique quantique, par exemple [27] qui en explicite plusieurs.

2.3.2 Lien avec les polynômes orthogonaux

Les coefficients de Clebsch-Gordan s'expriment en pratique souvent en termes de polynômes orthogonaux. C'est le cas des coefficients traités dans ce mémoire. Les polynômes orthogonaux forme des ensembles de fonctions polynomiales qui sont orthogonales sur leurs degrés pour une certaine mesure. Dans cette optique, ils forment une base d'un espace vectoriel de fonctions muni d'un produit scalaire et se retrouvent dans les solutions exactes de nombreux modèles de la physique mathématique. Ces polynômes sont également le sujet d'une riche branche des mathématiques au-delà de leur utilisation en physique. Ainsi, plusieurs classifications ont été entreprises [25] et de nouvelles sont encore découvertes [18]. Un traitement plus large est offert dans le livre de Chihara [26]. Sans vouloir développer la théorie des polynômes orthogonaux ici, il demeure possible de souligner les raisons derrière leur émergence dans le contexte des coefficients de Clebsch-Gordan.

Soit le problème de Clebsch-Gordan défini sur des espaces de Hilbert de dimension infinie. Les coefficients de Clebsch-Gordan dépendent des paramètres indexant les vecteurs des bases et il est raisonnable de supposer qu'ils en sont des fonctions. La normalisation des vecteurs des bases et l'unitarité du changement de base contraint substantiellement la forme des coefficients de Clebsch-Gordan. Entre autres, leur valeur absolue doit décroître suffisamment rapidement lorsque l'index tend vers l'infini, pour maintenir la normalisation. En pratique, cette décroissance est souvent exponentielle. De plus, puisque le changement de base est unitaire, on a que les coefficients sont orthogonaux pour un certain produit scalaire. Ces coefficients sont donc des fonctions orthogonales sur un index des vecteurs de base. Des contraintes supplémentaires s'obtiennent par l'application des éléments de l'algèbre dynamique sur les deux membres de (2.3.2). Pour des systèmes avec suffisamment de symétries, cette dépendance sur les paramètre des vecteurs de base est réalisée par un système de polynômes orthogonaux. Par exemple, l'utilisation d'un opérateur échelle permet souvent d'extraire une relation de récurrence à trois termes, la solution de laquelle sera donnée par des polynômes orthogonaux. Les polynômes ainsi obtenus, indexés par leur degrés, sont orthogonaux sous une mesure provenant de l'orthogonalité des vecteurs de base et étant donc associée à la décroissance exponentielle. La normalisation de ces polynômes est induite directement de la normalisation de la base. Ces systèmes de polynômes orthogonaux sont, tel que mentionné, une structure présente dans de nombreux modèles de la physique mathématique, lorsque les symétries contraignent suffisamment la structure du modèle de sorte que les solutions en série des équations tronquent à une puissance finie, omettant un facteur transcendantal que l'on peut factoriser. Ils sont donc profondément reliés à la présence de symétries dans les systèmes qu'ils modélisent.

2.4 Superalgèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$

Ce chapitre débute avec la remarque que les coefficients de Clebsch-Gordan ne nécessitent pas l'introduction du concept de fusion pour être définis. Ces coefficients peuvent également être introduits pour $\mathfrak{osp}(1|2)$, l'algèbre dynamique traitée au prochain chapitre, sans mention de fusion. Cependant, le coproduit n'est plus symétrique et prend une forme différente que dans les cas triviaux, ce qui introduit une subtilité supplémentaire dans la dérivation des coefficients de Clebsch-Gordan qui y sont associés. Cette subtilité s'interprète facilement lorsque le problème est approché par le concept de fusion. Ainsi, si une description formelle de cette algèbre sera donnée, cette section cherche plus à dégager cette subtilité et la placer dans le contexte du concept de fusion. De plus, les applications théoriques de cette algèbre dynamique et son intérêt dans la physique moderne seront couverts.

La superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1|2)$ est l'algèbre orthosymplectique la plus simple permettant le mélange de relations de commutation de parité différente [3]. Elle peut être introduite comme l'algèbre générée [5] par cinq générateurs $\{J_0, J_\pm, K_\pm\}$, dont trois sont paires $\{J_0, K_\pm\}$ et deux sont impaires $\{J_\pm\}$, au sens le crochet de Lie diffère, et les relations suivantes

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad \{J_+, J_-\} = 2J_0, \quad [K_-, K_+] = 4J_0, \quad [J_0, K_\pm] = \pm 2K_\pm.$$

Cette algèbre sera traitée comme une algèbre dynamique dans le chapitre suivant et pour se faire les constructions de se chapitres doivent être appliquées. Cette algèbre n'étant pas une algèbre de Lie, mais bien une superalgèbre de Lie, les constructions sont légèrement différentes mais suivent suffisamment celles présentées qu'il n'est pas pertinent de les exposer. Entre autres, l'algèbre enveloppante universelle est construite de façon similaire. Une différence est dans la représentation de cette algèbre en tant qu'endomorphismes d'un espace. Le crochet de Lie doit tenir compte de la parité des opérateurs et être défini alors comme le commutateur ou l'anticommutateur selon la parité. En effet, le crochet ne peut être vu, à proprement parler, comme un commutateur ou un anticommutateur que si l'algèbre est réalisée par une construction partant d'une algèbre associative. Dans l'algèbre enveloppante, il est redondant d'introduire les générateurs $K_\pm$, qui sont simplement le carré des opérateurs $J_\pm$, et ne sont donc pas inclus dans la description de l'algèbre au chapitre 3.

La seconde procédure est de faire de cette algèbre enveloppante une algèbre de Hopf par l'introduction d'un coproduit compatible. Le coproduit ne peut plus être symétrique : il est nécessaire d'introduire un élément de torsion dans l'algèbre ce qui mène à un coproduit torsadé [31]. Cette déformation du coproduit peut sembler arbitraire, mais est nécessaire pour en assurer sa compatibilité tel que demandé par le principe de fusion. Les algèbres de Hopf déformées ainsi admettent une justification satisfaisante à l'introduction de cette déformation. En effet, si la réalisation de la fusion est nécessaire pour permettre l'application des symétries sur des systèmes mutiparticules, elle demeure facilement réalisable pour les algèbres de Lie. Cependant, si une théorie est construite dans un espace de la géométrie non-commutative telle qu'introduite par Alain Connes, un coproduit symétrique n'est plus un homomorphisme d'algèbres et on ne peut définir l'action de l'algèbre sur un système multiparticule qu'à travers un coproduit torsadé.

Ces algèbres de Hopf torsadées ont la propriété intéressante [28] que les représentations irréductibles ne sont pas perturbées par l'introduction de la torsion dans l'algèbre. En effet, les représentations de l'algèbre non-déformée, construites à partir d'objets covariants de Lorentz par exemple, demeurent valides. La différence n'apparaît en fait que lorsque sont considérées les propriétés des états sous l'échanges de particules pour un état multiparticule. Naturellement, ces modifications seront reflétées dans les statistiques que ces particules obéissent. Avec ces observations, il n'est pas étonnant que l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$ soit l'algèbre dynamique d'un oscillateur parabosonique [3, 16] puisqu'un paraboson est un cas particulier de particule obéissant aux parastatistiques, une généralisation des statistiques usuelles bosoniques ou fermioniques correpondant à des représentation de dimensions supérieures du groupe symétrique S_N, encodant ici l'échange de particules.

Ne voulant pas spéculer sur les possibles applications de tels modèles en gravité quantique, il demeure que ces généralisations statistiques ont un intérêt réel à de multiples problèmes physiques que la géométrie de notre espace soit abélienne ou non. Par exemple, ces algèbres torsadées se retrouvent dans l'étude de l'équation de Yang-Baxter quantique, une condition d'intégrabilité de systèmes quantiques [30]. Ce domaine de la physique mathématique est un sujet d'actualité, particulièrement la méthode de la diffusion quantique inverse [9]. Il semble que ces méthodes permettront l'étude théorique de systèmes complexes issus de la matière condensée.

La réalisation de statistiques non-standards peut paraître futile sachant que ces champs peuvent s'exprimer en trois dimensions spatiales comme des particules aux statistiques usuelles par le biais de transformations de Klein. On retrouve alors la conclusion principale du théorème de spin-statistique établissant la correspondance entre le type de statistiques permises et les moments intrinsèques permis. Or, ce théorème ne s'applique seulement qu'en trois dimensions et la topologie d'un espace bidimensionnel ne permet pas la preuve de ce théorème. Aussi, un système confiné pourrait exhiber des quasi-particules obéissant à de nouvelles statistiques. Les matériaux en deux dimensions sont justement un domaine de la matière condensée en pleine expansion, comme le démontre l'effort international dans l'étude du graphène ou encore du MoS_2. En particulier, l'effet de Hall quantique fractionnaire s'explique par des quasi-particules anyoniques, le groupe de permutations des particules étant ici le groupe de tresse. On ne peut alors que se demander quelles découvertes demanderont le développement de ces nouveaux outils de la physique mathématique.

CHAPITRE 3

GENERATING FUNCTIONS FOR THE $\mathfrak{OSP}(1|2)$ CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS

Ce chapitre est le travail de deux co-auteurs, soit de l'auteur du présent mémoire et de Luc Vinet.

Abstract

Generating functions for Clebsch-Gordan coefficients of $\mathfrak{osp}(1|2)$ are derived. These coefficients are expressed as $q \to -1$ limits of the dual q-Hahn polynomials. The generating functions are obtained using two different approaches respectively based on the coherent-state representation and the position representation of $\mathfrak{osp}(1|2)$.

3.1 Introduction

The purpose of this paper is to obtain generating functions for the Clebsch-Gordan coefficients (CGC) of the $\mathfrak{osp}(1|2)$ Lie superalgebra. This $\mathbb{Z}_2$-graded algebra, which corresponds to the dynamical algebra of a one-dimensional para-Bose oscillator [3], is generated by two odd elements $J_\pm$ and one even element J_0. The abstract $\mathbb{Z}_2$ grading of $\mathfrak{osp}(1|2)$ can be concretized by introducing a grade involution operator R ($R^2 = 1$) which commutes/anticommutes with the even/odd elements and by adding it to the set of generators. The $\mathfrak{osp}(1|2)$ algebra can thus be presented as the associative algebra with generators J_0, $J_\pm$, R and relations

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_0, R] = 0, \quad \{J_+, J_-\} = 2J_0, \quad \{J_\pm, R\} = 0, \quad R^2 = 1, \tag{3.1.1}$$

where $[a, b] = ab - ba$ is the commutator and $\{a, b\} = ab + ba$ is the anticommutator. The presentation (3.1.1) of $\mathfrak{osp}(1|2)$ has sometimes been referred to as $\mathfrak{sl}_{-1}(2)$, as it can be obtained from a $q \to -1$ limit of the quantum algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ [17]. The algebra (3.1.1) has a Casimir operator which can be written as :

$$C = (J_+ J_- - J_0 + 1/2)\, R. \tag{3.1.2}$$

The operator (3.1.2) corresponds to the sCasimir of $\mathfrak{osp}(1|2)$ multiplied by the grade involution [10]. The irreducible representations of $\mathfrak{osp}(1|2)$ used in this paper are the positive-discrete series representations. These infinite-dimensional representations are labeled by two numbers (μ, ϵ) with $\mu \geq 0$ and $\epsilon = \pm 1$. On the orthonormal basis vector $|n, \mu, \epsilon\rangle$ with $n = 0, 1, 2, \ldots$, these representations are defined by the following actions

$$\begin{aligned} J_0\, |n,\mu,\epsilon\rangle &= (n + \mu + 1/2)\, |n,\mu,\epsilon\rangle, & R|n,\mu,\epsilon\rangle &= \epsilon\, (-1)^n\, |n,\mu,\epsilon\rangle, \\ J_+\, |n,\mu,\epsilon\rangle &= \sqrt{[n+1]_\mu}\, |n+1,\mu,\epsilon\rangle, & J_-\, |n,\mu,\epsilon\rangle &= \sqrt{[n]_\mu}\, |n-1,\mu,\epsilon\rangle, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

where $[n]_\mu$ stands for the "μ-number"

$$[n]_\mu = n + \mu\, (1 - (-1)^n). \tag{3.1.4}$$

The Casimir operator is a multiple of the identity :

$$C\, |n,\mu,\epsilon\rangle = -\epsilon\, \mu |n,\mu,\epsilon\rangle.$$

The representations (μ, ϵ) defined by (3.1.3) correspond to the para-Bose oscillator model (see section 3.4). In the presentation (3.1.1), the superalgebra $\mathfrak{osp}(1|2)$ has a coproduct $\Delta : \mathfrak{osp}(1|2) \to \mathfrak{osp}(1|2) \otimes \mathfrak{osp}(1|2)$ which has the form

$$\Delta(J_0) = J_0 \otimes 1 + 1 \otimes J_0, \quad \Delta(J_\pm) = J_\pm \otimes R + 1 \otimes J_\pm, \quad \Delta(R) = R \otimes R. \tag{3.1.5}$$

The Clebsch-Gordan problem for $\mathfrak{osp}(1|2)$ can be posited as follows. Consider the tensor product representation $(\mu_1, \epsilon_1) \otimes (\mu_2, \epsilon_2)$ defined using (3.1.5). There are two natural bases for this representation space. The first one is the direct product basis with basis vectors $|n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle$. This basis, thereafter referred to as the *uncoupled basis*, corresponds to the diagonalization of the operators $J_0 \otimes 1$, $R \otimes 1$, $\Delta(J_0)$ and $\Delta(R)$. On these basis vectors, one has

$$\begin{aligned}
(J_0 \otimes 1)|n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle &= (n_1 + \mu_1 + 1/2)\; |n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle, \\
(R \otimes 1)|n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle &= \epsilon_1 (-1)^{n_1}\; |n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle, \\
\Delta(J_0)|n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle &= (n_1 + n_2 + \mu_1 + \mu_2 + 1)\; |n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle, \\
\Delta(R)|n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle &= \epsilon_1\epsilon_2 (-1)^{n_1+n_2}\; |n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle,
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

where $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. The second basis, referred to as the *coupled basis*, corresponds to the diagonalization of $\Delta(C)$, $\Delta(J_0)$ and $\Delta(R)$. On the coupled basis vectors $|n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$, one has

$$\begin{aligned}
\Delta(C)\, |n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle &= -\epsilon_{12}\mu_{12}\, |n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle, \\
\Delta(R)|n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle &= \epsilon_{12}(-1)^{n_{12}}|n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle, \\
\Delta(J_0)|n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle &= (n_{12} + \mu_{12} + 1/2)\, |n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle,
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

where $n_{12} = 0, 1, 2 \ldots$. The possible values of μ_{12} and ϵ_{12} are determined by the irreducible content of the tensor product representation $(\mu_1, \epsilon_1) \otimes (\mu_2, \epsilon_2)$. It is known that one has the decomposition [24]

$$(\mu_1, \epsilon_1) \otimes (\mu_2, \epsilon_2) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2} + j, (-1)^j \epsilon_1\epsilon_2),$$

provided that $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. As a consequence, the values of μ_{12} and ϵ_{12} are given by

$$\mu_{12} = \mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2} + j, \quad \epsilon_{12} = (-1)^j \epsilon_1\epsilon_2 \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1.8}$$

The Clebsch-Gordan problem for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ algebra consists in finding the coefficients $C^{n_1 n_2}_{n_{12}, j}$ that appear in the expansion of the coupled vectors in terms of those of the uncoupled basis

$$|n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle = \sum_{n_1,n_2} C^{n_1 n_2}_{n_{12},j} \, |n_1, \mu_1, \epsilon_1\rangle \otimes |n_2, \mu_2, \epsilon_2\rangle. \tag{3.1.9}$$

The Clebsch–Gordan coefficients $C^{n_1 n_2}_{n_{12},j}$ have already been determined in [17, 22]. They are given in terms of the dual -1 Hahn polynomials. These polynomials belong to the Bannai–Ito scheme, which comprises several families of bispectral orthogonal polynomials that correspond to $q \to -1$ limits of polynomials of the Askey scheme [19]. The dual -1 Hahn polynomials are $q \to -1$ limits of the dual q-Hahn polynomials [23] ; they can also be obtained as a special case of the Complementary Bannai-Ito polynomials [21]. The dual -1 Hahn polynomial obey a discrete orthogonality relation on a finite lattice. In addition to satisfying the mandatory three-term recurrence relation, these polynomials are also eigenfunctions of a second-order Dunkl shift operator involving reflections ; they are thus bispectral but lie outside the framework of Leonard duality.

In the present paper, we expand upon these results by deriving generating functions for these Clebsch–Gordan coefficients. We do so using two different approaches. The first approach is based on a method originally proposed by Granovskii and Zhedanov in [6]. We generalize this technique to take into account the twisted coproduct (3.1.5) of $\mathfrak{osp}(1|2)$ (see also [13]). This method relies upon the coherent-state representation of the para-Bose oscillator. The second approach is based on the two-dimensional Dunkl oscillator model, a superintegrable system which is obtained by combining two independent one-dimensional para-Bose oscillators. Here, we use the wavefunctions of the Dunkl oscillator separated in Cartesian and polar coordinates as realizations of the basis vectors of the uncoupled and coupled bases to derive the generating functions. This method relies upon the position representation of the para-Bose oscillator.

The paper is organized as follows. In Section 2, the properties of the dual -1 Hahn polynomials are recalled. The generating functions for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ CGC are derived using the first approach in section 3 and using the second method in section

4. A short conclusion follows.

3.2 Dual -1 Hahn Polynomials

This section reviews the main properties of the dual -1 Hahn polynomials. The connection between the $\mathfrak{osp}(1|2)$ Clebsch-Gordan coefficients and these polynomials is also provided.

The monic dual -1 Hahn polynomials, which involve two real parameters η, ξ and a positive integer N, will be denoted by $R_n^{(-1)}(x;\eta,\xi,N)$. They satisfy the recurrence relation

$$R_{n+1}^{(-1)}(x;\eta,\xi,N)+b_nR_n^{(-1)}(x;\eta,\xi,N)+u_nR_{n-1}^{(-1)}(x;\eta,\xi,N)=xR_n^{(-1)}(x;\eta,\xi,N),$$

where the coefficients are given by

$$u_n=4[n]_\xi[N-n+1]_\eta,\qquad b_n=2([n]_\xi+[N-n]_\eta)-2\eta-2\xi-2N-1,$$

with $[n]_\mu$ the μ-numbers as defined in (3.1.4). The dual -1 Hahn polynomials obey the orthogonality relation

$$\sum_{j=0}^{N} w_j\, R_n^{(-1)}(y_j)\, R_m^{(-1)}(y_j)=\kappa_0\; u_1u_2...u_n\delta_{nm}, \tag{3.2.1}$$

where the normalization κ_0, the grid points y_s and the weights w_{2s+q} for $s=0,1,\ldots,N$ and $q\in\{0,1\}$ have the expressions

$$\kappa_0(\eta,\xi,N)=\begin{cases}\dfrac{(-\eta-\xi-N)_{N/2}}{(1/2-\xi-N/2)_{N/2}}, & N \text{ even},\\ \dfrac{(\eta+\xi+1)_{(N+1)/2}}{(\eta+1/2)_{(N+1)/2}}, & N \text{ odd},\end{cases}$$

$$y_s(\eta,\xi,N) = \begin{cases} (-1)^s(-2\eta-2\xi-2N+2s-1), & N \text{ even},\\ (-1)^s(2\eta+2\xi+2s+1), & N \text{ odd},\end{cases}$$

$$w_{2s+q}(\eta,\xi,N) = \begin{cases} \dfrac{(-N/2)_{s+q}}{s!}\dfrac{(-1)^s(1/2-\eta-N/2)_s(-\eta-\xi-N)_s}{(1/2-\xi-N/2)_s(-\eta-\xi-N/2)_{s+q}}, & N \text{ even},\\ \dfrac{(-(N-1)/2)_s}{s!}\dfrac{(-1)^s(\xi+1/2)_{s+q}(\eta+\xi+1)_s}{(\eta+1/2)_{s+q}(\eta+\xi+N/2+3/2)_s}, & N \text{ odd},\end{cases}$$

with $(a)_n = (a)(a+1)\dots(a+n-1)$.

The dual -1 Hahn polynomials can be expressed explicitly in terms of hypergeometric functions (see [25] for the definition). When N is even,

$$R^{(-1)}_{2k}(x-1) = \gamma^{(0)}_n\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, & \delta+\frac{x}{4}, & \delta-\frac{x}{4}\\ -\frac{N}{2}, & -\frac{2\eta+N-1}{2} & \end{matrix};1\right),$$

$$R^{(-1)}_{2k+1}(x-1) = \gamma^{(1)}_n(x-2\eta-2\xi)\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, & \delta+\frac{x}{4}, & \delta-\frac{x}{4}\\ 1-\frac{N}{2}, & -\frac{2\eta+N-1}{2} & \end{matrix};1\right),$$

with $\delta = (\eta+\xi+N)/2$ and

$$\gamma^{(0)}_n = 16^n\left(\frac{-N}{2}\right)_n\left(\frac{1-2\eta-N}{2}\right)_n, \qquad \gamma^{(1)}_n = 16^n\left(\frac{1-N}{2}\right)_n\left(\frac{1-2\eta-N}{2}\right)_n,$$

while for N odd,

$$R^{(-1)}_{2k}(x-1) = \gamma^{(0)}_n\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, & \delta+\frac{x}{4}, & \delta-\frac{x}{4}\\ -\frac{N-1}{2}, & \eta+1+\frac{N}{2} & \end{matrix};1\right),$$

$$R^{(-1)}_{2k+1}(x-1) = \gamma^{(1)}_n(x+2\eta-2\xi)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, & \delta+\frac{x}{4}, & \delta-\frac{x}{4}\\ -\frac{N-1}{2}, & \eta+1+\frac{N+1}{2} & \end{matrix};1\right),$$

where $\delta = (\eta+\xi+1)/2$ and

$$\gamma^{(0)}_n = 16^n\left(\frac{1-N}{2}\right)_n\left(\frac{2\eta+1}{2}\right)_n, \qquad \gamma^{(1)}_n = 16^n\left(\frac{1-N}{2}\right)_n\left(\frac{2\eta+3}{2}\right)_n.$$

It has been shown in [22] that the $\mathfrak{osp}(1|2)$ Clebsch-Gordan coefficients given by $\langle n_1,\mu_1,\epsilon_1,n_2,\mu_2,\epsilon_2|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$, which form a unitary matrix by definition, are expressed as follows in terms of the dual -1 polynomials :

$$\langle n_1,\mu_1,\epsilon_1,n_2,\mu_2,\epsilon_2|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle = \\ 2^{-n_1}\sqrt{\frac{w_j[n_2]_{\mu_2}!}{\kappa_0[n_1]_{\mu_1}![n_1+n_2]_{\mu_2}!}}R^{(-1)}_{n_1}(y_j;\mu_2,\mu_1,n_1+n_2),$$

where the μ-factorials $[n]_\mu!$ are defined as $[n]_\mu! = [n]_\mu[n-1]_\mu[n-2]_\mu\dots[1]_\mu$ and where $w_j = w_j(\mu_2,\mu_1,n_1+n_2)$, $\kappa_0 = \kappa_0(\mu_2,\mu_1,n_1+n_2)$ and $y_j = y_j(\mu_2,\mu_1,n_1+n_2)$. The relation $n_1+n_2 = n_{12}+j$ between the basis vector labels (3.3.21) is assumed and will be explained in section 3.3.5.

3.3 Algebraic approach

We shall call algebraic the first approach to obtain the generating functions for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ CGC. It builds on the method introduced in [6]. In order to present it clearly, we shall start by illustrating how it applies in the case of $\mathfrak{su}(1,1)$ before treating the $\mathfrak{osp}(1|2)$ case in details.

3.3.1 The case of $\mathfrak{su}(1,1)$

The $\mathfrak{su}(1,1)$ algebra is given by the generators $A_\pm$ and A_0 with the relations

$$[A_0,A_\pm] = \pm A_\pm, \quad [A_+,A_-] = -2A_0$$

and conditions

$$A_0^\dagger = A_0, \quad A_\pm^\dagger = A_\mp.$$

The Casimir operator Q of this algebra is

$$Q = J_0^2 - J_+J_- - J_0.$$

The positive-discrete series representations are labeled by one positive real number l. The orthonormal basis vectors of a given representation (l) will be noted $|m,l\rangle$ with the actions of the generators and of the Casimir operator given by

$$\begin{aligned} A_0|m,l\rangle &= (l+m)|m,l\rangle, \\ A_+|m,l\rangle &= \sqrt{(m+1)(2l+m)}|m+1,l\rangle, \\ A_-|m,l\rangle &= \sqrt{m(2l+m-1)}|m-1,l\rangle, \\ Q|m,l\rangle &= l(l+1)|m,l\rangle. \end{aligned}$$

The $\mathfrak{su}(1,1)$ algebra can be endowed with a coproduct $\Delta : \mathfrak{su}(1,1) \to \mathfrak{su}(1,1) \otimes \mathfrak{su}(1,1)$ given by

$$\Delta(A_i) = A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i,$$

which defines the tensor product of the positive discrete series representations. The decomposition of the tensor product of two irreducible representations in a direct sum of irreducible representations is known to be

$$(l_1) \otimes (l_2) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (l_1 + l_2 + k).$$

There are two natural bases for the $(l_1) \otimes (l_2)$ representation space. The uncoupled one, comprises the direct product of the basis vectors of (l_1) and (l_2), written $|m_1, l_1, m_2, l_2\rangle = |m_1, l_1\rangle \otimes |m_2, l_2\rangle$, and diagonalizes the operators $A_0 \otimes 1$ and $\Delta(A_0)$:

$$A_0 \otimes 1|m_1, l_1, m_2, l_2\rangle = (m_1 + l_1)|m_1, l_1, m_2, l_2\rangle, \tag{3.3.1}$$

$$\Delta(A_0)|m_1, l_1, m_2, l_2\rangle = (m_1 + m_2 + l_1 + l_2)|m_1, l_1, m_2, l_2\rangle. \tag{3.3.2}$$

The coupled basis is the union of the standard bases of the representations (l_1+l_2+k), noted $|m_{12}, l_{12}\rangle$, where $l_{12} = l_1 + l_2 + k$, and corresponds to the diagonalization of $\Delta(A_0)$ and $\Delta(Q)$:

$$\Delta(A_0)|m_{12}, l_{12}\rangle = (m_{12} + l_{12})|m_{12}, l_{12}\rangle, \quad \Delta(Q)|m_{12}, l_{12}\rangle = l_{12}(l_{12} + 1)|m_{12}, l_{12}\rangle. \tag{3.3.3}$$

The Clebsch-Gordan problem can thus be stated as finding the expansion coefficients $\langle m_1, l_1, m_2, l_2|m_{12}, l_{12}\rangle$ of one basis in terms of the other :

$$|m_{12}, l_{12}\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2|m_{12}, l_{12}\rangle|m_1, l_1, m_2, l_2\rangle.$$

By comparing the action of $\Delta(A_0)$, given by (3.3.2) and (3.3.3), on the left and right of $\langle m_1, l_1, m_2, l_2|\Delta(A_0)|m_{12}, l_{12}\rangle$, we observe that these coefficients will be non-zero only if $m_1 + m_2 = m_{12} + k$.

The method we wish to use to find the CGC goes as follows in this case. An operator X is chosen in the algebra and a (dual) basis is constructed from its left eigenvectors $\langle x, l|$

$$\langle x, l|X = x\langle x, l|.$$

Taking $X = A_+$, the overlap given by $\langle x, l|m, l\rangle$ can be factorized in terms of the "vacuum" or ground state amplitude $\langle x, l|0, l\rangle$ and a monomial in x. Other choices for X are possible, see for example [12]. This factorization is obtained by applying X to the left and to the right :

$$\langle x, l|X|m, l\rangle = x\langle x, l|m, l\rangle = \sqrt{(m + 1)(2l + m)}\langle x, l|m + 1, l\rangle,$$

and by using this relation recursively

$$\langle x, l|m, l\rangle = \langle x, l|0, l\rangle P^l_m(x), \quad P^l_m(x) = \frac{x^m}{\sqrt{m!(2l)_m}}. \tag{3.3.4}$$

Given the coproduct $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\langle x, l_1, y, l_2| = \langle x, l_1| \otimes \langle y, l_2|$ is a left eigenvector of $\Delta(X)$ with eigenvalue $x+y$ and the factorization property holds for the tensor product, or coupling, of two representations

$$\langle x, l_1, y, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle = \langle x, l_1, y, l_2 | 0, l_{12} \rangle P^{l_{12}}_{m_{12}}(x+y). \tag{3.3.5}$$

We then observe that the overlap $\langle x, l_1, y, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle$ can be decomposed in two different ways. First, one can use the resolution of the identity in the uncoupled basis and factorize as in (3.3.4) the resulting overlaps on each subspace of the tensor product space

$$\begin{aligned}\langle x, l_1, y, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle x, l_1, y, l_2 | m_1, l_1, m_2, l_2 \rangle \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle \\ &= \langle x, l_1, y, l_2 | 0, l_1, 0, l_2 \rangle \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle P^{l_1}_{m_1}(x) P^{l_2}_{m_2}(y).\end{aligned}$$

Second, one can use the factorization property in the coupled basis (3.3.5) to find

$$\begin{aligned}\langle x, l_1, y, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle &= \langle x, l_1, y, l_2 | 0, l_{12} \rangle P^{l_{12}}_{m_{12}}(x+y) \\ &= P^{l_{12}}_{m_{12}}(x+y) \sum_{m_1, m_2} \langle x, l_1, y, l_2 | m_1, l_1, m_2, l_2 \rangle \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | 0, l_{12} \rangle \\ &= \langle x, l_1, y, l_2 | 0, l_1, 0, l_2 \rangle P^{l_{12}}_{m_{12}}(x+y) \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | 0, l_{12} \rangle P^{l_1}_{m_1}(x) P^{l_2}_{m_2}(y).\end{aligned}$$

By cancelling the uncoupled vacuum overlap $\langle x, l_1, y, l_2 | 0, l_1, 0, l_2 \rangle$ in the two different decompositions above, we obtain

$$\begin{aligned}&P^{l_{12}}_{m_{12}}(x+y) \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | 0, l_{12} \rangle P^{l_1}_{m_1}(x) P^{l_2}_{m_2}(y) \\ &\qquad = \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle P^{l_1}_{m_1}(x) P^{l_2}_{m_2}(y)\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

This is a polynomial equation involving the CGC. The generating functions are obtained by calculating the sum on the left hand side and introducing a relation between x and y so that the polynomials on the right hand side become monomials in a single variable. Recall the condition that $m_1 + m_2 = m_{12} + k$ for the CGC to be non-zero. It implies that the sums are constrained on the left hand side by $m_1 + m_2 = k$ and on the right hand side by $m_1 + m_2 = m_{12} + k$, given m_{12} and k.

To sum the left hand side of (3.3.6), we first obtain an expression for the coupled ground state CGC $\langle m_1, l_1, m_2, l_2 | 0, l_{12} \rangle$; this is done by solving the recurrence relation obtained by applying $\Delta(A_-)$ to the left and to the right and rearranging :

$$\langle m_1 + 1, l_1, m_2, l_2 | 0, l_{12} \rangle = -\sqrt{\frac{(m_2+1)(2l_2+m_2)}{(m_1+1)(2l_1+m_1)}} \langle m_1, l_1, m_2 + 1, l_2 | 0, l_{12} \rangle.$$

Using the above equation recursively and taking into account the relation on the labels by writing $m_2 = k - m_1$ leads to

$$\langle m_1, l_1, k - m_1, l_2 | 0, l_{12} \rangle = (-1)^{m_1} \sqrt{\binom{k}{m_1} \frac{(2l_2)_k}{(2l_1)_{m_1}(2l_2)_{k-m_1}}} \langle 0, l_1, k, l_2 | 0, l_{12} \rangle. \tag{3.3.7}$$

The remaining undetermined factor is obtained up to a phase by using the CGC orthogonality relation. This yields

$$|\langle 0, l_1, k, l_2 | 0, l_{12}, \rangle|^2 = \frac{(2l_1 + k - 1)!(2l_1 + 2l_2 - 2)!}{(2l_1 - 1)!(2l_{12} - 2)!}. \tag{3.3.8}$$

We now return to the sum in the left hand side of (3.3.6). Using (3.3.7) and $m_2 = k - m_1$ while omitting the term given by (3.3.8) and writing m_1 as m, one has

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \left(\binom{k}{m} \frac{(2l_2)_k}{(2l_1)_m (2l_2)_{k-m}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^m}{\sqrt{m!(2l_1)_m}} \frac{y^{k-m}}{\sqrt{(k-m)!(2l_2)_{k-m}}} \\ = \frac{y^k}{\sqrt{k!(2l_2)_k}} \sum_{m=0}^{k} \frac{(-k)_m (1-k-2l_2)_m}{(2l_1)_m} \frac{(-x/y)^m}{m!} \end{aligned}$$

One then sets $x = y^{-1}$ to recognize that

$$\sum_{m_1,m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | 0, l_{12} \rangle P_{m_1}^{l_1}(x) P_{m_2}^{l_2}(y) \\ = \frac{x^{-k}\langle 0, l_1, k, l_2 | 0, l_{12}, \rangle}{\sqrt{k!(2l_2)_k}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & 1-k-2l_2 \\ & 2l_1 \end{matrix} ; -x^2 \right). \quad (3.3.9)$$

Taking again $x = y^{-1}$ in the right hand side of (3.3.6) and using $m_2 = m_{12} + k - m_1$ while relabelling m_1 as m, one obtains

$$\sum_{m_1,m_2} \langle m_1, l_1, m_2, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle P_{m_1}^{l_1}(x) P_{m_2}^{l_2}(y) \\ = x^{-m_{12}-k} \sum_{m=0}^{m_{12}+k} \frac{\langle m, l_1, m_{12}+k-m, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle}{\sqrt{m!(2l_1)_m}\sqrt{(m_{12}+k-m)!(2l_2)_{m_{12}+k-m}}} (x^2)^m. \quad (3.3.10)$$

Using (3.3.9) and (3.3.10) in (3.3.6), substituting for $P_{m_{12}}^{l_{12}}(x + x^{-1})$ the expression given in (3.3.4) and posing $z = -x^2$, we obtain the generating function for the $\mathfrak{su}(1,1)$ CGC, which we recognize, up to normalization, as the generating function for the dual Hahn polynomials

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, & 1-k-2l_2 \\ & 2l_1 \end{matrix} ; z \right) \frac{(1-z)^{m_{12}}}{\sqrt{m_{12}!(2l_{12})_{m_{12}}}} \frac{\langle 0, l_1, k, l_2 | 0, l_{12} \rangle}{\sqrt{k!(2l_2)_k}} \\ = \sum_{m=0}^{m_{12}+k} \frac{(-1)^m \langle m, l_1, m_{12}+k-m, l_2 | m_{12}, l_{12} \rangle}{\sqrt{m!(2l_1)_m}\sqrt{(m_{12}+k-m)!(2l_2)_{m_{12}+k-m}}} z^m,$$

where $\langle 0, l_1, k, l_2 | 0, l_{12} \rangle$ is given by (3.3.8).

The method only applies to algebras with untwisted coproducts. With some modifications, it can be adapted to certain algebras with twisted coproducts. We shall consider $\mathfrak{osp}(1|2)$ where as seen from (3.1.5), the twisting occurs because of the presence of an involution in the coproduct. The procedure to derive the generating function for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ CGCs will be explained in the following sections.

3.3.2 The case of $\mathfrak{osp}(1|2)$

We now turn to $\mathfrak{osp}(1|2)$. The approach illustrated in section 3.3.1 involves two different factorizations of the overlaps between eigenvectors of an algebra element X and the coupled basis vectors. This yields an equation that allows to identify a generating function for the CGC. Different choices of X will lead to different factorizations, and thus, it is pertinent to choose X appropriately. One such choice is the creation operator J_+ that has the relevant coherent states as left eigenvectors. The overlap between the coherent states and the coupled basis vectors will factorize in terms of a simple monomial and the ground state overlap, as in (3.3.4). In light of (3.1.5), with such a choice, the coproduct of X will be twisted, the factorization of the overlaps will not be immediate and will require a resolution of the identity in terms of the left eigenstates of X.

The presentation is organized as follows. The choice of the vectors to be used in the overlap will be explained in section 3.3.3. The factorization property and its extension to the tensor product of two representations will be developed in section 3.3.4. Some required identities and conditions for the CGC to be non-zero will be worked out in sections 3.3.5 and 3.3.6. Finally, the derivation of the analog of (3.3.6) for $\mathfrak{osp}(1|2)$ will be obtained in 3.3.7 with the final results, corresponding to different parities, to be found in subsections 3.3.7.1 and 3.3.7.2.

3.3.3 Signed coherent states

Let $X = J_+$. The (dual) coherent states in the representation (μ, ϵ) of $\mathfrak{osp}(1|2)$ are the left-eigenvectors $\langle x, \mu, \epsilon|$ of X

$$\langle x, \mu, \epsilon|X = x\langle x, \mu, \epsilon|.$$

For this choice for X, the coherent states have simple monomials overlaps in the standard representation basis; however they do not admit a diagonal resolution of the identity [4]. Hence, it will be simpler to work with related vectors, referred to as the signed coherent states, which are the left-eigenvectors, of $X^2 = (J_+)^2$

$$\langle x_\pm, \mu, \epsilon | X^2 = x^2 \langle x_\pm, \mu, \epsilon |,$$

and for which there exists a diagonal resolution of the identity [4]

$$I = \int d\lambda_{x_+} | x_+, \mu, \epsilon \rangle \langle x_+, \mu, \epsilon | + \int d\lambda_{x_-} | x_-, \mu, \epsilon \rangle \langle x_-, \mu, \epsilon |, \tag{3.3.11}$$

for some measure $d\lambda_{x_\pm}$. These eigenvectors $\langle x_\pm, \mu, \epsilon|$ of X^2 are expressed in terms of those of X as follows

$$\langle x_\pm, \mu, \epsilon | = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle x, \mu, \epsilon | \pm \langle -x, \mu, \epsilon |]. \tag{3.3.12}$$

These vectors are not left-eigenvectors of the X, in fact, the left-action of R, the involution operator, and of X on these vectors is

$$\langle x_\pm, \mu, \epsilon | X = x \langle x_\mp, \mu, \epsilon |, \tag{3.3.13}$$

$$\langle x_\pm, \mu, \epsilon | R = \pm\epsilon \langle x_\pm, \mu, \epsilon |. \tag{3.3.14}$$

3.3.4 Factorization of the overlap

Consider the overlap in a representation (μ, ϵ) of $\mathfrak{osp}(1|2)$ between the vectors $\langle x_\pm, \mu, \epsilon|$ defined in (3.3.12) and the basis vectors $|n, \mu, \epsilon\rangle$ as given in (3.1.3). This overlap can be factorized in terms of a monomial in x and the ground state overlap $\langle x_+, \mu, \epsilon | 0, \mu, \epsilon \rangle$ by considering the action of $X = J_+$ to the right and left in the expression following

$$\begin{aligned}\langle x_\pm, \mu, \epsilon | X | n, \mu, \epsilon \rangle &= x \langle x_\mp, \mu, \epsilon | n, \mu, \epsilon \rangle \\ &= \sqrt{[n+1]_\mu} \langle x_\pm, \mu, \epsilon | n+1, \mu, \epsilon \rangle.\end{aligned}$$

By recurrence, we see that

$$\langle x_\pm, \mu, \epsilon | n, \mu, \epsilon \rangle = \langle x_+, \mu, \epsilon | 0, \mu, \epsilon \rangle Q_n^\mu(x), \tag{3.3.15}$$

$$Q_n^\mu(x) = \frac{x^n}{\sqrt{[n]_\mu !}}. \tag{3.3.16}$$

Notice that the overlap $\langle x_-, \mu, \epsilon | n, \mu, \epsilon \rangle = 0$ for n even and $\langle x_+, \mu, \epsilon | n, \mu, \epsilon \rangle = 0$ for n odd, as seen by the application of R to the left and right in $\langle x_\pm, \mu, \epsilon | R | n, \mu, \epsilon \rangle$ using (3.1.3) and (3.3.14).

We now wish to extend this factorization to the tensor product of two representations. Consider the irreducible content $(\mu_{12}, \epsilon_{12})$ of the representation space $(\mu_1, \epsilon_1) \otimes (\mu_2, \epsilon_2)$, with μ_{12} and ϵ_{12} given by (3.1.8). The coproduct of $X = J_+$ is given by $\Delta(J_+) = J_+ \otimes R + I \otimes J_+$. It can be shown [4] that the action of R on the coherent states is $\langle x, \mu, \epsilon | R = \epsilon \langle -x, \mu, \epsilon |$. This implies that the tensor product of coherent states $\langle x, \mu_1, \epsilon_1 | \otimes \langle y, \mu_2, \epsilon_2 | = \langle x, \mu_1, \epsilon_1, y, \mu_2, \epsilon_2 |$ are not left-eigenvectors of $\Delta(X)$. To proceed, one defines the signed coherent states, or left-eigenvectors of $\Delta(X)^2$, using the analogue of (3.3.12), that is

$$\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} | = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle z, \mu_{12}, \epsilon_{12} | \pm \langle -z, \mu_{12}, \epsilon_{12} |],$$

where $\langle z, \mu_{12}, \epsilon_{12} |$ are the coherent states of the representation $(\mu_{12}, \epsilon_{12})$, defined as the left-eigenvectors of $\Delta(X)$

$$\langle z, \mu_{12}, \epsilon_{12} | \Delta(X) = z \langle z, \mu_{12}, \epsilon_{12} |.$$

Note that the equations corresponding to (3.3.13) and (3.3.14) still hold

$$\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} | \triangle (X) = z \langle z_\mp, \mu_{12}, \epsilon_{12} |, \tag{3.3.17}$$

$$\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} | \triangle (R) = \pm \epsilon_{12} \langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} |. \tag{3.3.18}$$

It follows that the factorization property given by equation (3.3.15) will stand in the coupled representation with the same polynomials as given in (3.3.16)

$$\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle = \langle z_+, \mu_{12}, \epsilon_{12} | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z). \tag{3.3.19}$$

As per (3.3.11), the resolution of the identity in terms of the tensor product of signed coherent states $\langle x_\pm, \mu_1, \epsilon_1, y_\pm, \mu_2, \epsilon_2|$, that will be required in the following, is diagonal.

Although the expression of the coupled signed coherent states $\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12}|$ in terms of the uncoupled ones $\langle x_\pm, \mu_1, \epsilon_1, y_\pm, \mu_2, \epsilon_2|$ is not needed, we still have to establish the relation between the variables x, y and z which are not independent. This relation is easily obtained by applying $\Delta(X)^2$ to the left and right of $\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12}|\Delta(X)^2|x_\pm, \mu_1, \epsilon_1, y_\pm, \mu_2, \epsilon_2\rangle$ to find

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{3.3.20}$$

Let us stress that we use left eigenvectors $\langle z, \mu_{12}, \epsilon_{12}|$ of $\Delta(X)$ belonging to the space of the irreducible representation $(\mu_{12}, \epsilon_{12})$ instead of the direct product space associated to $(\mu_1, \epsilon_1) \otimes (\mu_2, \epsilon_2)$. Those vectors are related with the tensor products of the left eigenvectors $\langle x, \mu_1, \epsilon_1, y, \mu_2, \epsilon_2|$ of X via a resolution of the identity. As will be shown, the strength of the approach is that the explicit expression of the overlap $\langle z, \mu_{12}, \epsilon_{12}|x, \mu_1, \epsilon_1, y, \mu_2, \epsilon_2\rangle$ need not be known. It is only required that a resolution of the identity exists in terms of the vectors $\langle x, \mu_1, \epsilon_1, y, \mu_2, \epsilon_2|$. The use of the signed coherent states instead of the coherent states is only to facilitate the calculations.

3.3.5 Coupled vectors decomposition

We derive in this section explicit expressions for two subsets of the Clebsch-Gordan coefficients that are required to derive the generating function for the complete CGC. Specifically, an expression will be needed for the CGC denoted by $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2|0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$ and $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2|1, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$. The labels in non-zero CGC are not independent. In fact, one can apply $\Delta(J_0)$ to the right and left of $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | \Delta(J_0) | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$ using (3.1.6), (3.1.7) and (3.1.8) to obtain

$$n_1 + n_2 = n_{12} + j, \tag{3.3.21}$$

where j is implicit in the parameters μ_{12} and ϵ_{12}.

We now derive an expression for $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$. With $n_{12} = 0$, we have $n_1 + n_2 = j$. This implies that we can write $n_2 = j - n_1$. By applying $\Delta(J_-)$ to the left and to the right in $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | \Delta(J_-) | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$, we obtain the following relation

$$\begin{aligned}\langle n_1 + 1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle \\ = -\frac{(-1)^{n_2}}{\epsilon_2}\sqrt{\frac{[n_2+1]_{\mu_2}}{[n_1+1]_{\mu_1}}}\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2 + 1, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle.\end{aligned}$$

Using the above relation recursively while making explicit the dependence between the labels in view of (3.3.21) by relabeling n_1 as n and writing $n_2 = j - n$ leads to

$$\begin{aligned}\langle n, \mu_1, \epsilon_1, j - n, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle = \langle 0, \mu_1, \epsilon_1, j, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle \\ \times \left(\frac{-1}{\epsilon_2}\right)^n (-1)^{nj - n(n+1)/2}\sqrt{\frac{[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+1]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!}}.\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

From the orthogonality of the Clebsch-Gordan coefficients, we find

$$|\langle 0, \mu_1, \epsilon_1, j, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle|^2 = \begin{cases} \dfrac{(\frac{j}{2} + 1 + \mu_1 + \mu_2)_{j/2}}{2^{j/2}(\frac{1}{2} + \mu_1)_{j/2}} & \text{for } j \text{ even,} \\ \\ \dfrac{(\frac{j+1}{2} + \mu_1 + \mu_2)_{(j+1)/2}}{2^{(j+1)/2}(\frac{1}{2} + \mu_1)_{(j+1)/2}} & \text{for } j \text{ odd.} \end{cases} \tag{3.3.23}$$

We can similarly determine $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | 1, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$. Using (3.1.6), (3.1.7) and applying $\Delta(J_+)$ to the left and right of $\langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | \Delta(J_+) | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle$, one is led to

$$\begin{aligned}
&\sqrt{[1]_{\mu_{12}}} \langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | 1, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle = \\
&\qquad \epsilon_2 (-1)^{n_2} \sqrt{[n_1]_{\mu_1}} \langle n_1 - 1, \mu_1, \epsilon_1, n_2, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle \\
&\qquad\qquad + \sqrt{[n_2]_{\mu_2}} \langle n_1, \mu_1, \epsilon_1, n_2 - 1, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle
\end{aligned}$$

Using (3.3.21), one now writes n_1 as n and uses (3.3.22) to obtain

$$\begin{aligned}
&\langle n, \mu_1, \epsilon_1, 1 + j - n, \mu_2, \epsilon_2 | 1, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle = \\
&\qquad \left(\frac{-1}{\epsilon_2} \right)^n \frac{(-1)^{nj - n(n+1)/2}}{\sqrt{[1]_{\mu_{12}}}} \sqrt{\frac{[j]_{\mu_2} [j-1]_{\mu_2} ... [j - n + 2]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!}} \\
&\qquad\qquad \times [[n]_{\mu_1} + [1 + j - n]_{\mu_2}] \langle 0, \mu_1, \epsilon_1, j, \mu_2, \epsilon_2 | 0, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle \quad (3.3.24)
\end{aligned}$$

3.3.6 Selection rules

Let us now derive selection rules for relevant overlaps. Consider the overlap $\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle$. Applying $\Delta(R)$ to the left and right within this overlap, using (3.3.18) and simplifying, one has

$$\pm \epsilon_{12} = \epsilon_{12} (-1)^{n_{12}},$$

which implies that

$$\begin{aligned}
\langle z_-, \mu_{12}, \epsilon_{12} | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle &= 0 \quad \text{for } n_{12} \text{ even} \\
\langle z_+, \mu_{12}, \epsilon_{12} | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12} \rangle &= 0 \quad \text{for } n_{12} \text{ odd.}
\end{aligned} \qquad (3.3.25)$$

Let us examine similarly the overlap $\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12} | x_\pm, \mu_1, \epsilon_1, y_\pm, \mu_2, \epsilon_2 \rangle$. Employing $\Delta(R)$, with the help of (3.3.14) and (3.3.18), one finds the following relation

$$(\pm)_z (-1)^j = (\pm)_x (\pm)_y,$$

where $(\pm)_a$ refers to the sign of the index of the variable a. One then has the following

$$\left.\begin{aligned}\langle z_+,\mu_{12},\epsilon_{12}|x_\mp,\mu_1,\epsilon_1,y_\pm,\mu_2,\epsilon_2\rangle=0\\ \langle z_-,\mu_{12},\epsilon_{12}|x_\pm,\mu_1,\epsilon_1,y_\pm,\mu_2,\epsilon_2\rangle=0\end{aligned}\right\}\quad\text{for j even,}$$
$$\left.\begin{aligned}\langle z_+,\mu_{12},\epsilon_{12}|x_\pm,\mu_1,\epsilon_1,y_\pm,\mu_2,\epsilon_2\rangle=0\\ \langle z_-,\mu_{12},\epsilon_{12}|x_\mp,\mu_1,\epsilon_1,y_\pm,\mu_2,\epsilon_2\rangle=0\end{aligned}\right\}\quad\text{for j odd.}\tag{3.3.26}$$

These two conditions naturally lead to four cases. The reader should keep in mind, in what follows, that equation (3.3.21) is always satisfied if we restrict ourselves to the non-zero Clebsch-Gordan coefficients.

3.3.7 Generating function

With these preliminaries, we are now ready to derive an equation playing, for $\mathfrak{osp}(1|2)$, the same role as (3.3.6) in the $\mathfrak{su}(1,1)$ case. We will then bring this equation to a closed form and introduce a relation between the variables to obtain the CGC generating function.

To that end, we consider the overlap $\langle z_\pm,\mu_{12},\epsilon_{12}|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ between the coupled basis vector $|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ and the signed coherent states (3.3.12) of the representation (μ_{12},ϵ_{12}). For ease of notation, we will take it as understood that the representation space is that of $(\mu_1,\epsilon_1)\otimes(\mu_2,\epsilon_2)$, with μ_{12} and ϵ_{12} functions of j as per (3.1.8). Accordingly, we will write $|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ as $|n_{12},j\rangle$ and $|n_1,\mu_1,\epsilon_1,n_2,\mu_2,\epsilon_2\rangle$, the decoupled basis vectors (3.1.6), as $|n_1,n_2\rangle$. Similarly, since both vectors in the overlap are defined on the same representation (μ_{12},ϵ_{12}), we will write $\langle z_\pm,\mu_{12},\epsilon_{12}|$ as simply $\langle z_\pm,j|$.

First, one can decompose the vector $|n_{12},j\rangle$ on the decoupled basis $|n_1,n_2\rangle$ using the Clebsch-Gordan decomposition. The overlap can then be expressed as

$$\langle z_\pm,j|n_{12},j\rangle=\sum_{n=0}^{n_{12}+j}\langle z_\pm,j|n,n_{12}+j-n\rangle\langle n,n_{12}+j-n|n_{12},j\rangle,$$

where we have made use of (3.3.21). One then calls upon the resolution of the identity on the representation space $(\mu_1, \epsilon_1) \otimes (\mu_2, \epsilon_2)$, given in (3.3.11), to obtain

$$\langle z_\pm, j | n_{12}, j\rangle = \iint d\lambda_{x_\pm} d\lambda_{y_\pm} \langle z_\pm, j | x_\pm y_\pm\rangle \times \sum_{n=0}^{n_{12}+j} \langle x_\pm | n\rangle \langle y_\pm | n_{12} + j - n\rangle \langle n, n_{12} + j - n | n_{12}, j\rangle, \quad (3.3.27)$$

where, again, the parameters μ_1, μ_2, ϵ_1 and ϵ_2 of the decoupled representation space are implicitly understood, justifying the notation $|x_\pm\rangle$ for the signed coherent states $|x_\pm, \mu, \epsilon\rangle$.

Secondly, the overlap can also be decomposed by applying first the coupled factorization (3.3.19) and then applying the same process as above. Let

$$\langle z_\pm, j | n_{12}, j\rangle = \begin{cases} Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \langle z_+, j | 0, j\rangle & \text{for } n_{12} \text{ even}, \\ \\ Q^{\mu_{12}}_{n_{12}-1}(z) \langle z_-, j | 1, j\rangle & \text{for } n_{12} \text{ odd}, \end{cases} \quad (3.3.28)$$

where the conditions (3.3.25) were used. We can now use the resolution of the identity in terms of the uncoupled basis on the remaining overlap above

$$\langle z_\pm, j | n_{12}, j\rangle = \begin{cases} Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \sum_{n=0}^{j} \langle z_+, j | n, j - n\rangle \langle n, j - n | 0, j\rangle & \text{for } n_{12} \text{ even}, \\ \\ Q^{\mu_{12}}_{n_{12}-1}(z) \sum_{n=0}^{j+1} \langle z_-, j | n, 1 + j - n\rangle \langle n, 1 + j - n | 1, j\rangle & \text{for } n_{12} \text{ odd}, \end{cases}$$

and finally, use the resolution of the identity (3.3.11) as before on the above, taking into account the conditions (3.3.25), to obtain, for n_{12} even

$$\langle z_+, j | n_{12}, j\rangle = Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \iint d\lambda_{x_\pm} d\lambda_{y_\pm} \langle z_+, j | x_\pm y_\pm\rangle \sum_{n=0}^{j} \langle x_\pm y_\pm | n, j - n\rangle \langle n, j - n | 0, j\rangle, \quad (3.3.29)$$

and for n_{12} odd

$$\langle z_-, j | n_{12}, j\rangle = Q^{\mu_{12}}_{n_{12}-1}(z) \iint d\lambda_{x_\pm} d\lambda_{y_\pm} \langle z_-, j | x_\pm y_\pm\rangle \times \sum_{n=0}^{j+1} \langle x_\pm y_\pm | n, 1+j-n\rangle \langle n, 1+j-n | 1, j\rangle. \quad (3.3.30)$$

We now wish to compare the integrands of both decompositions of the overlap $\langle z_\pm, j|n_{12}, j\rangle$, given that those equations must stand for any $z_\pm$ or n_{12} and any representation parameters and that the parts of the integrand we wish to compare are polynomials of finite degrees. To do so, one must use the conditions given in (3.3.25) and (3.3.26) to determine, for each of the parity combinations of n_{12} and j, the sign indices $(\pm)_i$, with $i = x, y, z$, of the coupled and decoupled signed coherent states for which the overlap $\langle z_\pm, \mu_{12}, \epsilon_{12}|x_\pm, \mu_1, \epsilon_1, y_\pm, \mu_2, \epsilon_2\rangle$ is non-zero. The remaining non-zero terms can then be equated. One then separates the sums in even and odd n and factorizes the overlaps as in section 3.3.4 in terms of the decoupled signed coherent states $\langle x_\pm y_\pm|$ to obtain polynomial expressions in the sums in (3.3.27), (3.3.29) and (3.3.30). We can now equate the sums coming from the first decomposition scheme (3.3.27) to the sums coming from the second one given by (3.3.29) and (3.3.30) by comparing the terms that are not summed in the integrands of these equations, requiring the factorization as applied in (3.3.28). This comparison leads to equalities for the sums themselves. Furthermore, one can combine the sums on even and odd n on both side of the equalities to obtain a single equality for each of the parity combination of n_{12} and j.

Let us clarify this process through an example with n_{12} and j even. With n_{12} even, one can deduce, using (3.3.25), that it is suffices to consider the overlap with $\langle z_+, j|$ in (3.3.27). Equating with (3.3.29) yields

$$\iint d\lambda_{x_\pm} d\lambda_{y_\pm} \langle z_+, j|x_\pm y_\pm\rangle \sum_{n=0}^{n_{12}+j} \langle x_\pm|n\rangle \langle y_\pm|n_{12}+j-n\rangle \langle n, n_{12}+j-n|n_{12}, j\rangle = Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \iint d\lambda_{x_\pm} d\lambda_{y_\pm} \langle z_+, j|x_\pm y_\pm\rangle \sum_{n=0}^{j} \langle x_\pm y_\pm|n, j-n\rangle \langle n, j-n|0, j\rangle.$$

In view of (3.3.26), with j even, we know that the sign indices of $x_\pm$ and $y_\pm$ must be the same. Incidentally, as noted in section 3.3.4, when the sign index is $+$, only the terms with n even in both sums of the above equation will be non-zero, whereas when the sign is $-$, only the terms with n odd will contribute. The above equation is valid when restricted to the terms with n even, or respectively, odd. For n even, this leads to

$$\iint d\lambda_{x_+} d\lambda_{y_+} \langle z_+, j | x_+ y_+ \rangle \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{n_{12}+j} \langle x_+ | n \rangle \langle y_+ | n_{12} + j - n \rangle \langle n, n_{12} + j - n | n_{12}, j \rangle =$$
$$Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \iint d\lambda_{x_+} d\lambda_{y_+} \langle z_+, j | x_+ y_+ \rangle \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{j} \langle x_+ y_+ | n, j-n \rangle \langle n, j-n | 0, j \rangle, \quad (3.3.31)$$

It is now possible to apply the factorization of section 3.3.4 to the uncoupled signed coherent states overlaps. For n even, one obtains, from (3.3.31)

$$\iint d\lambda_{x_+} d\lambda_{y_+} \langle z_+, j | x_+ y_+ \rangle \langle x_+ | 0 \rangle \langle y_+ | 0 \rangle$$
$$\times \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{n_{12}+j} Q^{\mu_1}_n(x) Q^{\mu_2}_{n_{12}+j-n}(y) \langle n, n_{12} + j - n | n_{12}, j \rangle =$$
$$\iint d\lambda_{x_+} d\lambda_{y_+} \langle z_+, j | x_+ y_+ \rangle \langle x_+ | 0 \rangle \langle y_+ | 0 \rangle Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{j} Q^{\mu_1}_n(x) Q^{\mu_2}_{j-n}(y) \langle n, j-n | 0, j \rangle.$$

As explained before, we can now equate the integrands, leading to

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{n_{12}+j} Q^{\mu_1}_n(x) Q^{\mu_2}_{n_{12}+j-n}(y) \langle n, n_{12} + j - n | n_{12}, j \rangle =$$
$$Q^{\mu_{12}}_{n_{12}}(z) \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{j} Q^{\mu_1}_n(x) Q^{\mu_2}_{j-n}(y) \langle n, j-n | 0, j \rangle$$

For n odd, instead of (3.3.31), one gets

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{n_{12}+j-1} Q_n^{\mu_1}(x) Q_{n_{12}+j-n}^{\mu_2}(y) \langle n, n_{12}+j-n | n_{12}, j \rangle =$$
$$Q_{n_{12}}^{\mu_{12}}(z) \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{j-1} Q_n^{\mu_1}(x) Q_{j-n}^{\mu_2}(y) \langle n, j-n | 0, j \rangle.$$

The two equations above can be combined to give

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j} Q_n^{\mu_1}(x) Q_{n_{12}+j-n}^{\mu_2}(y) \langle n, n_{12}+j-n | n_{12}, j \rangle =$$
$$Q_{n_{12}}^{\mu_{12}}(z) \sum_{n=0}^{j} Q_n^{\mu_1}(x) Q_{j-n}^{\mu_2}(y) \langle n, j-n | 0, j \rangle. \quad (3.3.32)$$

Equations analogous to (3.3.32) are similarly obtained for each parity combination for n_{12} and j. In order to obtain generating functions, we wish to bring the right hand side of (3.3.32), or its equivalent in other parity cases, to a closed form while introducing a relation between the variables x and y to transform the left hand side sum in a power series of a single variable. This work is best done treating the two parities of n_{12} separately and those of j in parallel.

3.3.7.1 Cases with n_{12} even

We have derived above (3.3.32) an equation playing for $\mathfrak{osp}(1|2)$ the same role that (3.3.6) plays in the case of $\mathfrak{su}(1,1)$. This equation is valid for n_{12} and j even. It can easily be shown that the same expression is obtained when one considers the case with n_{12} even and j odd. We will thus construct the generating function for both parities of j in parallel. Using (3.3.16) and (3.3.22) in (3.3.32) and simplifying, we obtain

$$y^{n_{12}}\sum_{n=0}^{n_{12}+j}\frac{(x/y)^n}{\sqrt{[n]_{\mu_1}!}}\frac{\langle n,n_{12}+j-n|n_{12},j\rangle}{\sqrt{[n_{12}+j-n]_{\mu_2}!}}=$$
$$\sum_{n=0}^{j}\left(\frac{-x}{\epsilon_2 y}\right)^n(-1)^{nj-n(n+1)/2}\frac{[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+1]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!}$$
$$\times\frac{z^{n_{12}}}{\sqrt{[n_{12}]_{\mu_{12}}![j]_{\mu_2}!}}\langle 0,j|0,j\rangle, \quad (3.3.33)$$

where $\langle 0,j|0,j\rangle=\langle 0,\mu_1,\epsilon_1,j,\mu_2,\epsilon_2|0,\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ is given by (3.3.23) and where we made use of the following identity

$$\frac{1}{[j-n]_\mu!}=\frac{[j]_\mu[j-1]_\mu...[j-n+1]_\mu}{[j]_\mu!}. \quad (3.3.34)$$

We now want to reduce the left hand side of (3.3.33) to the form of a generating function by writing it as a power series of a single variable. Setting $y=x^{-1}$ leads to

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j}\frac{x^{2n}}{\sqrt{[n]_{\mu_1}!}}\frac{\langle n,n_{12}+j-n|n_{12},j\rangle}{\sqrt{[n_{12}+j-n]_{\mu_2}!}}=$$
$$\sum_{n=0}^{j}\left(\frac{-x^2}{\epsilon_2}\right)^n(-1)^{nj-n(n+1)/2}\frac{[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+1]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!}$$
$$\times\frac{(xz)^{n_{12}}}{\sqrt{[n_{12}]_{\mu_{12}}![j]_{\mu_2}!}}\langle 0,j|0,j\rangle. \quad (3.3.35)$$

In order to express the right hand side of (3.3.35) in a closed form, one needs to split the terms with even and odd n. This separation enables one to write the μ-factorials in terms of Pochhammer symbols. We will need the following identities

$$[n]_\mu!=\begin{cases}2^n k!(\frac{1}{2}+\mu)_k & \text{for } n \text{ even, } n=2k,\\ 2^n k!(\frac{3}{2}+\mu)_k(\frac{1}{2}+\mu) & \text{for } n \text{ odd, } n=2k+1,\end{cases} \quad (3.3.36)$$

$$[j]_\mu[j-1]_\mu...[j-n+1]_\mu = \begin{cases} 2^n(-\frac{j}{2})_k(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu)_k & \text{for } n, j \text{ even,} \\ 2^n(1-\frac{j}{2})_k(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu)_k(\frac{j}{2}) & \text{for } n \text{ odd and } j \text{ even,} \\ 2^n(\frac{1}{2}-\frac{j}{2})_k(-\frac{j}{2}-\mu)_k & \text{for } n \text{ even and } j \text{ odd,} \\ 2^n(1-\frac{j}{2}-\mu)_k(\frac{1}{2}-\frac{j}{2})_k & \text{for } n, j \text{ odd,} \end{cases} \tag{3.3.37}$$

where $n = 2k$ for n even and $n = 2k+1$ for n odd,

$$(-1)^{nj-n(n+1)/2} = \begin{cases} (-1)^k & \text{for } n \text{ even, } n = 2k, \\ (-1)^{j+k+1} & \text{for } n \text{ odd, } n = 2k+1. \end{cases} \tag{3.3.38}$$

We can now derive the final result. Separating the sums in even and odd n in the right hand side of (3.3.35), using (3.3.36), (3.3.37) and (3.3.38) while changing the variable to $s = x^2$, one obtains that the sum on the right hand side of (3.3.35) can be written in terms of hypergeometric functions. That is,

$$\sum_{n=0}^{j}\left(\frac{-x^2}{\epsilon_2}\right)^n(-1)^{nj-n(n+1)/2}\frac{[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+1]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!}$$
$$= \begin{cases} {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, \quad \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right) + \dfrac{js}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\frac{j}{2}, \quad \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right), \\ \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{j}{2}, \quad -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right) - s\dfrac{(j+2\mu_2)}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\frac{j}{2}-\mu_2, \quad \frac{1}{2}-\frac{j}{2} \\ \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right), \end{cases} \tag{3.3.39}$$

for j respectively even and odd.

The remaining term in (3.3.35) is still expressed as a function of z and not s.

Using (3.3.20), and $y = x^{-1}$, one easily finds

$$\frac{(xz)^{n_{12}}}{\sqrt{[n_{12}]_{\mu_{12}}![j]_{\mu_2}!}}\langle 0,j|0,j\rangle = \frac{(s^2+1)^{n_{12}/2}}{\sqrt{[j]_{\mu_2}![n_{12}]_{\mu_{12}}!}}\langle 0,j|0,j\rangle. \tag{3.3.40}$$

When n_{12} is even, using (3.3.39) and (3.3.40) in (3.3.35) with $s = x^2$, the generating function for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ Clebsch-Gordan coefficients is found to be :

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j} \frac{s^n}{\sqrt{[n]_{\mu_1}!}}\frac{\langle n, n_{12}+j-n|n_{12},j\rangle}{\sqrt{[n_{12}+j-n]_{\mu_2}!}} = \frac{(s^2+1)^{n_{12}/2}}{\sqrt{[j]_{\mu_2}![n_{12}]_{\mu_{12}}!}}\langle 0,j|0,j\rangle$$

$$\times\begin{cases} \text{when } j \text{ is even :} \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{j}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1 \end{matrix}; -s^2\right) + \dfrac{js}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-\frac{j}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1 \end{matrix}; -s^2\right), \\ \text{while for } j \text{ odd :} \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{j-1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1 \end{matrix}; -s^2\right) - s\dfrac{(j+2\mu_2)}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{j-1}{2}, & 1-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1 \end{matrix}; -s^2\right), \end{cases}$$

where again, $\langle 0,j|0,j\rangle = \langle 0,\mu_1,\epsilon_1,j,\mu_2,\epsilon_2|0,\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ is given by (3.3.23).

3.3.7.2 Cases with n_{12} odd

Starting from (3.3.27) but using now (3.3.30) as factorization, one can derive an equation equivalent to (3.3.32) in the case with n_{12} odd. Again, this equation has the same expression for both parities of j. The analogue of (3.3.6) in the case of $\mathfrak{osp}(1|2)$ with n_{12} odd is thus

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j} Q_n^{\mu_1}(x)Q_{n_{12}+j-n}^{\mu_2}(y)\langle n, n_{12}+j-n|n_{12},j\rangle =$$
$$\sum_{n=0}^{j+1} Q_n^{\mu_1}(x)Q_{1+j-n}^{\mu_2}(y)\langle n, 1+j-n|1,j\rangle Q_{n_{12}-1}^{\mu_{12}}(z)$$

Using (3.3.16), (3.3.20), (3.3.24) and (3.3.34) in the above, simplifying and introducing the relation $y = x^{-1}$ on the variables leads to

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j} \frac{x^{2n}}{\sqrt{[n]_{\mu_1}!}} \frac{\langle n, n_{12}+j-n | n_{12}, j\rangle}{\sqrt{[n_{12}+j-n]_{\mu_2}!}} = \\ \sum_{n=0}^{j+1} \left(\frac{-x^2}{\epsilon_2}\right)^n (-1)^{nj-n(n+1)/2} \frac{[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+2]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!} \\ \times [[n]_{\mu_1} + [1+j-n]_{\mu_2}] \frac{(x^4+1)^{(n_{12}-1)/2}}{\sqrt{[n_{12}-1]_{\mu_{12}}![1]_{\mu_{12}}}} \frac{\langle 0, j|0, j\rangle}{\sqrt{[j]_{\mu_2}!}} \tag{3.3.41}$$

To express the right hand side of (3.3.41) in a closed form, the following identity are needed

$$([n]_{\mu_1} + [1+j-n]_{\mu_2})[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+2]_{\mu_2} \\ = \begin{cases} 2^n(-\frac{j}{2})_k(-\frac{j+1}{2}-\mu_2)_k & \text{for } n, j \text{ even,} \\ 2^n(-\frac{j}{2})_k(-\frac{j-1}{2}-\mu_2)_k(j+1+2\mu_1)/2 & \text{for } n \text{ odd and } j \text{ even,} \\ 2^n(-\frac{j+1}{2})_k(-\frac{j}{2}-\mu_2)_k & \text{for } n \text{ even and } j \text{ odd,} \\ 2^n(-\frac{j-1}{2})_k(-\frac{j}{2}-\mu_2)_k(1+j+2\mu_1+2\mu_2)/2 & \text{for } n, j \text{ odd,} \end{cases}$$

where $n = 2k$ for n even and $n = 2k+1$ for n odd. Using these, (3.3.36) and (3.3.38) when splitting the right hand side of (3.3.41) in two sums on the even and odd n leads to an expression in terms of hypergeometric series. Taking $s = x^2$, this expression is given by

$$\sum_{n=0}^{j+1}\left(\frac{-x^2}{\epsilon_2}\right)^n(-1)^{nj-n(n+1)/2}\frac{[j]_{\mu_2}[j-1]_{\mu_2}...[j-n+2]_{\mu_2}}{[n]_{\mu_1}!}[[n]_{\mu_1}+[1+j-n]_{\mu_2}]$$

$$=\begin{cases} {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & -\frac{j+1}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right)+s\frac{(j+1+2\mu_1)}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & -\frac{j-1}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right), \\ \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j+1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right)-\frac{s}{\epsilon_2}\left(1+\frac{j+2\mu_2}{1+2\mu_1}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j-1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right),\end{cases} \tag{3.3.42}$$

where j is respectively even and odd.

One can then use (3.3.42) in (3.3.41) with $s=x^2$, to obtain the generating function for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ Clebsch-Gordan coefficients when n_{12} is odd

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j}\frac{s^n}{\sqrt{[n]_{\mu_1}!}}\frac{\langle n,n_{12}+j-n|n_{12},j\rangle}{\sqrt{[n_{12}+j-n]_{\mu_2}!}}=\frac{(s^2+1)^{(n_{12}-1)/2}}{\sqrt{[n_{12}-1]_{\mu_{12}}![1]_{\mu_{12}}}}\frac{\langle 0,j|0,j\rangle}{\sqrt{[j]_{\mu_2}!}}$$

$$\times\begin{cases} \text{when } j \text{ is even :} \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & -\frac{j+1}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right)+s\frac{(j+1+2\mu_1)}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & -\frac{j-1}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right), \\ \text{while for } j \text{ odd :} \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j+1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right)-s\frac{(1+j+2\mu_1+2\mu_2)}{(1+2\mu_1)\epsilon_2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j-1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-s^2\right),\end{cases}$$

where we still have that $\langle 0,j|0,j\rangle=\langle 0,\mu_1,\epsilon_1,j,\mu_2,\epsilon_2|0,\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ is given by (3.3.23).

3.4 Wavefunction Approach

It is known that the $\mathfrak{osp}(1|2)$ algebra is the dynamical algebra of a parabosonic oscillator [17] and that it admits a realization in terms of differential-difference operators acting on wavefunctions of this system. Consider then two independent parabosonic oscillators in the variables x and y. One can identify these variables as the Cartesian coordinates in the plane. The Schrödinger equation for this two-dimensional system separates naturally in these Cartesian coordinates, but also in polar coordinates. The associated two sets of wavefunctions each constitute a basis of the Hilbert space associated with the problem. This implies that they can be expanded one in term of the other. The coefficients of this expansion will be shown to be the Clebsch-Gordan coefficients of $\mathfrak{osp}(1|2)$. The generating functions of the CGC can also be derived in this framework. We will assume, in what follows, that $\epsilon = 1$ and shall omit this parameter in the notation from now on and work with $(\mu, 1)$ representations.

The realization of the presentation (3.1.1) of $\mathfrak{osp}(1|2)$ as a dynamical algebra goes as follows. Let $\mathfrak{D}_x$ be the Dunkl derivative defined by

$$\mathfrak{D}_x = \partial_x + \frac{\mu}{x}(1 - P_x),$$

where the parity operator P_x acts on functions according to $P_x f(x) = f(-x)$. It is straightforward to verify that the operators

$$J_0 = -\frac{1}{2}\mathfrak{D}_x^2 + \frac{1}{2}x^2, \quad J_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \mp \mathfrak{D}_x), \quad R = P_x,$$

realize the $\mathfrak{osp}(1|2)$ superalgebra. The operator J_0 is then identified as the parabose Hamiltonian H. Thus, the associated Hilbert space is spanned by $\mathfrak{osp}(1|2)$ representation basis vectors $|n, \mu\rangle$ given in (3.1.3), viewed as solutions to the eigenvalue equation $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ with $E = n+\mu+1/2$. One can identify the position operator as

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_+ + J_-), \quad \langle x|X = x\langle x|.$$

The wavefunctions are the overlaps between the left-eigenvectors of X and the basis vectors $|n,\mu\rangle$, explicitly

$$\psi_n^\mu(x) = \langle x|n,\mu\rangle, \quad H\psi_n^\mu(x) = (n+\mu+1/2)\psi_n^\mu(x). \tag{3.4.1}$$

Consider now two independent one-dimensional parabosonic oscillators in the variables x and y and let their respective Hamiltonian be H_x and H_y. By identifying these variables as Cartesian coordinates in the plane we can construct a two-dimensional problem with Hamiltonian $H_{xy} = H_x + H_y$ acting on the tensor product of two $\mathfrak{osp}(1|2)$ representations $(\mu_1, 1)\otimes(\mu_2, 1)$. The product of the respective wavefunctions form a basis of the Hilbert space of the two-dimensional problem as solutions of the eigenvalue equation for the total Hamiltonian H_{xy} :

$$H_{xy}\psi_{n_1}^{\mu_1}(x)\psi_{n_2}^{\mu_2}(y) = (n_1+n_2+\mu_1+\mu_2+1)\psi_{n_1}^{\mu_1}(x)\psi_{n_2}^{\mu_2}(y).$$

These bivariate wavefunctions also diagonalize H_x, H_y and the realizations C_x and C_y of the Casimir operators (3.1.2) and we will refer to them as the *uncoupled wavefunctions.*

The basis vectors $|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle$ given in (3.1.7) also diagonalize the Hamiltonian H_{xy} of the two-dimensional problem since $H_{xy} = J_0\otimes 1 + 1\otimes J_0 = \Delta(J_0)$. One can thus build wavefunctions by considering the overlap between the tensor product $\langle x,y| = \langle x|\otimes\langle y|$ of two left-eigenvectors of X and the coupled basis vectors

$$\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12},\epsilon_{12}}(x,y) = \langle x,y|n_{12},\mu_{12},\epsilon_{12}\rangle, \tag{3.4.2}$$

$$H_{xy}\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12},\epsilon_{12}}(x,y) = (n_{12}+\mu_{12}+1/2)\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12},\epsilon_{12}}(x,y). \tag{3.4.3}$$

These wavefunctions also diagonalize the realization of the Casimir operator C_{xy} of (μ_{12},ϵ_{12}) given by

$$C_{xy} = (y\mathfrak{D}_x - x\mathfrak{D}_y)P_x - \mu_1 P_y - \mu_2 P_x - (1/2)P_xP_y, \tag{3.4.4}$$

and will thus be called the *coupled wavefunctions*. Since the union of the vectors

$|n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle$ for each irreducible $(\mu_{12}, \epsilon_{12})$ contained in the tensor product $(\mu_1, 1) \otimes (\mu_2, 1)$ is a basis of the total tensor product space, the wavefunctions thus obtained form a complete basis of the two-dimensional Hilbert space.

One can relate these coupled wavefunctions to the separation in polar coordinates since the Casimir operator (3.4.4) they diagonalize is the generalized Dunkl angular momentum associated with this separation (see [24]). Using $x = \rho \cos \phi$ and $y = \rho \sin \phi$, we will thus write the coupled wavefunctions as

$$\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12}, \epsilon_{12}}(\rho, \phi) = P_{n_{12}}^{\mu_{12}}(\rho) F_j^{\mu_1, \mu_2}(\phi),$$

where j is implicitly given by (3.1.8) and where the representation parameters μ_1 and μ_2 are considered fixed for two given parabosonic oscillators associated with the representation space $(\mu_1, 1) \otimes (\mu_2, 1)$.

The coupled and uncoupled wavefunctions being a base of the same Hilbert space, they must decompose onto each other. Consider the eigenspace spanned by $\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12}, \epsilon_{12}}(\rho, \phi)$ associated to the eigenvalue $n_{12}+\mu_{12}+1/2$ of H_{xy}. The same eigenspace is spanned by a linear combination of the uncoupled wavefunctions with eigenvalues $n_1 + n_2 + \mu_1 + \mu_2 + 1$. It is easy to see that the coefficients in this combination will be the CGC :

$$\langle x, y | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle = \sum_{n1,n2} \langle x | n_1, \mu_1\rangle \langle y | n_2, \mu_2\rangle \langle n_1, n_2, \mu_1, \mu_2 | n_{12}, \mu_{12}, \epsilon_{12}\rangle.$$

By comparing the eigenvalues of H_{xy} on both the coupled and uncoupled wavefunctions, one can see, that the uncoupled wavefunctions will only overlap the eigenspace spanned by $\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12}, \epsilon_{12}}(\rho, \phi)$ if $n_{12} + j = n_1 + n_2$, as expected. These observations allow one to derive the $\mathfrak{osp}(1|2)$ Clebsch-Gordan coefficients generating function from analytical manipulations on the functional relations obtained in this context.

3.4.1 Decoupled Wavefunctions

The eigenfunctions of the one-dimensional parabose oscillator Hamiltonian, see [20], are

$$\psi_n^\mu(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n^\mu(x), \tag{3.4.5}$$

where $H_n^\mu(x)$ are the generalized Hermite polynomials

$$H_{2k+p}^\mu(x) = (-1)^k \sqrt{\frac{k!}{\Gamma(k+p+\mu+1/2)}} x^p L_k^{\mu-1/2+p}(x^2), \tag{3.4.6}$$

with $p \in \{0,1\}$ and $k = 0,1,2,...$ and where $L_n^\alpha(x)$ are Laguerre polynomials. The decoupled wavefunctions for the two-dimensional system are then given by $\psi_{n_1}^{\mu_1}(x)\psi_{n_2}^{\mu_2}(y)$, with eigenvalue $n_1 + n_2 + \mu_1 + \mu_2 + 1$.

3.4.2 Coupled Wavefunctions

Solving the simultaneous eigenvalue equations for the Hamiltonian H_{xy} and the total Casimir C_{xy}, one obtains [24]

$$\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12},\epsilon_{12}}(\rho,\phi) = P_{n_{12}}^{\mu_{12}}(\rho) F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi), \tag{3.4.7}$$

where the radial wavefunctions are given by the following

$$P_{n_{12}}^{\mu_{12}}(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\frac{n_{12}}{2}!}{\Gamma(\frac{n_{12}}{2}+j+\mu_1+\mu_2+1)}} e^{-\rho^2/2}\rho^j L_{\frac{n_{12}}{2}}^{j+\mu_1+\mu_2}(\rho^2) & n_{12} \text{ even}, \\ \sqrt{\dfrac{2\frac{n_{12}-1}{2}!}{\Gamma(\frac{n_{12}-1}{2}+j+\mu_1+\mu_2+2)}} e^{-\rho^2/2}\rho^{j+1} L_{\frac{n_{12}-1}{2}}^{j+1+\mu_1+\mu_2}(\rho^2) & n_{12} \text{ odd}, \end{cases}$$

and the angular wavefunctions, by

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) = \xi_j^+ \Big[P_{\frac{j}{2}}^{(\mu_2-1/2,\mu_1-1/2)}(\cos 2\phi) \\ - \cos(\phi)\sin(\phi) P_{\frac{j}{2}-1}^{(\mu_2+1/2,\mu_1+1/2)}(\cos 2\phi) \Big],$$

when n_{12} and j are even,

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) = \xi_j^+ \left[\sqrt{\frac{\frac{j-1}{2}+1}{\frac{j-1}{2}+\mu_1+\mu_2+1}} P_{\frac{j+1}{2}}^{(\mu_2-1/2,\mu_1-1/2)}(\cos 2\phi) \\ + \sqrt{\frac{\frac{j-1}{2}+\mu_1+\mu_2+1}{\frac{j-1}{2}+1}} \cos(\phi)\sin(\phi) P_{\frac{j-1}{2}}^{(\mu_2+1/2,\mu_1+1/2)}(\cos 2\phi) \right]$$

when n_{12} and j are odd,

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) = \xi_j^- \Big[\sin(\phi) P_{\frac{j}{2}}^{(\mu_2+1/2,\mu_1-1/2)}(\cos 2\phi) \\ + \cos(\phi) P_{\frac{j}{2}}^{(\mu_2-1/2,\mu_1+1/2)}(\cos 2\phi) \Big]$$

when n_{12} is odd and j is even and

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) = \xi_j^- \left[\sqrt{\frac{\frac{j-1}{2}+\mu_1+1/2}{\frac{j-1}{2}+\mu_2+1/2}} \sin(\phi) P_{\frac{j-1}{2}}^{(\mu_2+1/2,\mu_1-1/2)}(\cos 2\phi) \\ - \sqrt{\frac{\frac{j-1}{2}+\mu_2+1/2}{\frac{j-1}{2}+\mu_1+1/2}} \cos(\phi) P_{\frac{j-1}{2}}^{(\mu_2-1/2,\mu_1+1/2)}(\cos 2\phi) \right]$$

when n_{12} is even and j is odd, where in all the above $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ are the Jacobi polynomials and the normalizations are

$$\xi_j^+ = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(\frac{j}{2})!\Gamma(\frac{j}{2}+\mu_1+\mu_2+1)}{2\Gamma(\frac{j}{2}+\mu_1+1/2)\Gamma(\frac{j}{2}+\mu_2+1/2)}} & \text{for } j \text{ even,} \\ \sqrt{\dfrac{(\frac{j+1}{2})!\Gamma(\frac{j+1}{2}+\mu_1+\mu_2+1)}{2\Gamma(\frac{j+1}{2}+\mu_1+1/2)\Gamma(\frac{j+1}{2}+\mu_2+1/2)}} & \text{for } j \text{ odd,} \end{cases}$$

$$\xi_j^- = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(\frac{j}{2})!\Gamma(\frac{j}{2}+\mu_1+\mu_2+1)}{2\Gamma(\frac{j}{2}+\mu_1+1/2)\Gamma(\frac{j}{2}+\mu_2+1/2)}} & \text{for } j \text{ even,} \\ \sqrt{\dfrac{(\frac{j-1}{2})!\Gamma(\frac{j-1}{2}+\mu_1+\mu_2+1)}{2\Gamma(\frac{j-1}{2}+\mu_1+1/2)\Gamma(\frac{j-1}{2}+\mu_2+1/2)}} & \text{for } j \text{ odd.} \end{cases}$$

3.4.3 Generating function

We remind the reader that the coupled and uncoupled wavefunctions decompose into each other with the CGC as coefficients. Writing the x and y variables in polar coordinates, this decomposition is given by

$$\Psi_{n_{12}}^{\mu_{12},\epsilon_{12}}(\rho,\phi) = \sum_{n1,n2} C_{n_{12}j}^{n_1 n_2} \psi_{n_1}^{\mu_1}(\rho\cos\phi)\psi_{n_2}^{\mu_2}(\rho\sin\phi). \tag{3.4.8}$$

To bring (3.4.8) in the form of a generating relation for the CGC, one needs to transform the polynomials on the right hand side into monomials of a single variable. This can be accomplished by considering the asymptotic expansion when $\rho \to \infty$ of (3.4.8). We will first derive the asymptotic expansion of the left hand side and then proceed to treat the right hand side.

From (3.4.7), we have that the coupled wavefunctions can be written as the product of a radial and angular wavefunctions. The asymptotic expansion for $\rho \to \infty$ will thus only be applied to the radial wavefunctions. The leading term of a Laguerre polynomial is given by

$$L_n^{\alpha}(x) \longrightarrow \frac{(-1)^n}{n!}x^n. \tag{3.4.9}$$

Using the above, one obtains the following asymptotic expression for the radial wavefunctions

$$P_{n_{12}}^{\mu_{12}}(\rho) \longrightarrow e^{-\rho^2/2}\Lambda_{n_{12}}^{\mu_{12}}\rho^{n_{12}+j}, \tag{3.4.10}$$

where $\Lambda_{n_{12}}^{\mu_{12}}$ is given by

$$\Lambda_n^\mu = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+\mu)(\frac{n}{2})!}}(-1)^{n/2} & \text{for } n \text{ even,} \\ \sqrt{\dfrac{2}{\Gamma(\frac{n}{2}+\mu+1)(\frac{n-1}{2})!}}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{for } n \text{ odd.} \end{cases}$$

Consider now the right hand side of (3.4.8) which can be written explicitly, using (3.4.5), as

$$\sum_{n1,n2} C_{n_{12}j}^{n_1 n_2} \psi_{n_1}^{\mu_1}(\rho\cos\phi)\psi_{n_2}^{\mu_2}(\rho\sin\phi) = \\ e^{-\rho^2/2} \sum_{n=0}^{n_{12}+j} C_{n_{12},j}^{n_1,n_2} H_n^{\mu_1}(\rho\cos\phi) H_{n_{12}+j-n}^{\mu_2}(\rho\sin\phi), \quad (3.4.11)$$

where (3.3.21) has been used. We will not mind the exponential factor in the asymptotic expansion since it will be cancelled by the same factor on the left hand side of (3.4.8). One then only needs to evaluate the leading term for the two generalized Hermite polynomials in the above sum. Knowing the leading term for Laguerre polynomials (3.4.9) and using (3.4.6), we obtain for the leading term

$$H_n^\mu(x) \longrightarrow N_n^\mu x^n, \quad (3.4.12)$$

where the normalization N_n^μ is given by

$$N_\mu(n) = \begin{cases} \left[\Gamma(\frac{n}{2}+\mu+1/2)(\frac{n}{2})!\right]^{-1/2} & n \text{ even,} \\ \left[\Gamma(\frac{n+1}{2}+\mu+1/2)(\frac{n-1}{2})!\right]^{-1/2} & n \text{ odd.} \end{cases}$$

Using the above expression for the leading term of the generalized Hermite polynomials, one can obtain the asymptotic expansion of (3.4.11), omitting the exponential factor,

$$\sum_{n=0}^{n_{12}+j} C_{n_{12},j}^{n_1,n_2} H_n^{\mu_1}(\rho\cos\phi) H_{n_{12}+j-n}^{\mu_2}(\rho\sin\phi)$$
$$\longrightarrow (\rho\sin\phi)^{n_{12}+j} \sum_{n=0}^{n_{12}+j} C_{n_{12},j}^{n_1,n_2} N_{\mu_1}(n) N_{\mu_2}(n_{12}+j-n)\cot^n\phi. \quad (3.4.13)$$

Using (3.4.7) and (3.4.10) on the left hand side of (3.4.8) while combining (3.4.11) and (3.4.13) to express the right hand side, we are lead to the asymptotic expression for (3.4.8) when $\rho \to \infty$. Simplifying, this expression becomes

$$\Lambda_{n_{12}}^{\mu_{12}} F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi)(\csc\phi)^{n_{12}+j} = \sum_{n=0}^{n_{12}+j} C_{n_{12},j}^{n_1,n_2} N_{\mu_1}(n) N_{\mu_2}(n_{12}+j-n)\cot^n\phi$$

The right hand side is a power series of a single variable z if we take $z = \cot\phi$. The left hand side, when expressed as a function of z is thus a generating function for the $\mathfrak{osp}(1|2)$ algebra CGC. Let us connect the form of the generating function we just obtained to the form found in the preceeding section. We want to express

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi)(\csc\phi)^{n_{12}+j}$$

as a hypergeometric series in $z = \cot\phi$. Note that

$$(\csc\phi)^{n_{12}+j} = (1+z^2)^{\frac{n_{12}+j}{2}}.$$

The angular wavefunctiond need to be treated separately for each parity combination of n_{12} and j.

3.4.3.1 Case with n_{12} and j even

The angular wavefunction in this case is given by

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) = \xi_j^+ \left[P_{\frac{j}{2}}^{(\mu_2-1/2,\mu_1-1/2)}(\cos 2\phi) - \cos(\phi)\sin(\phi) P_{\frac{j}{2}-1}^{(\mu_2+1/2,\mu_1+1/2)}(\cos 2\phi) \right].$$

One first exchanges the parameters of the Jacobi polynomials using

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-z)$$

to obtain

$$\begin{aligned} F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) &= \xi_j^+(-1)^{j/2} \\ &\times \left[P_{\frac{j}{2}}^{(\mu_1-1/2,\mu_2-1/2)}(-\cos 2\phi) + \cos(\phi)\sin(\phi) P_{\frac{j}{2}-1}^{(\mu_1+1/2,\mu_2+1/2)}(-\cos 2\phi) \right]. \end{aligned}$$

Using the definition of the Jacobi polynomials in terms of hypergeometric series, we can write the above as

$$\begin{aligned} F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi) = \xi_j^+(-1)^{\frac{j}{2}} \Bigg[& \frac{(\mu_1+1/2)_{j/2}}{(j/2)!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{j}{2}, & \mu_1+\mu_2+\frac{j}{2} \\ & \mu_1+1/2 \end{matrix} ; \frac{1+\cos 2\phi}{2} \right) \\ & + \cos\phi \sin\phi \frac{(\mu_1+3/2)_{\frac{j}{2}-1}}{(\frac{j}{2}-1)!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-\frac{j}{2}, & \mu_1+\mu_2+\frac{j}{2}+1 \\ & \mu_1+3/2 \end{matrix} ; \frac{1+\cos 2\phi}{2} \right) \Bigg], \end{aligned}$$

which, with the help of the following identity for ${}_2F_1$ hypergeometric series

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} ; \frac{x}{x-1} \right) = (1-x)^a {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & c-b \\ & c \end{matrix} ; x \right),$$

and with $z = \cot\phi$, can be expressed as

$$\begin{aligned} F_j(z) = \xi_j^+(-1)^{\frac{j}{2}}(1+z^2)^{-\frac{j}{2}} \Bigg[& \frac{(\mu_1+1/2)_{j/2}}{(j/2)!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{j}{2}, & -\mu_2-\frac{j}{2}+1/2 \\ & \mu_1+1/2 \end{matrix} ; -z^2 \right) \\ & + z \frac{(\mu_1+3/2)_{\frac{j}{2}-1}}{(\frac{j}{2}-1)!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-\frac{j}{2}, & -\mu_2-\frac{j}{2}+1/2 \\ & \mu_1+3/2 \end{matrix} ; -z^2 \right) \Bigg]. \end{aligned}$$

By factoring the common factors of both hypergeometric series, we recover the generating function

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi)(\csc\phi)^{n_{12}+j} = \xi_j^+(-1)^{\frac{j}{2}}\frac{(\mu_1+1/2)_{j/2}}{(j/2)!}\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{jz}{2\mu_1+1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\frac{j}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right](1+z^2)^{\frac{n_{12}}{2}}.$$

3.4.3.2 Other cases of parity of n_{12} and j

The calculations to connect the generating function to the known expressions in the other cases are very similar. We will thus only list the results with their respective normalizations for reference.

For n_{12} even and j odd, one obtains

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi)(\csc\phi)^{n_{12}+j} = \xi_j^-\frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{(\frac{j-1}{2})!}\sqrt{\frac{\frac{j-1}{2}+\mu_1+1/2}{\frac{j-1}{2}+\mu_2+1/2}}(\mu_1+1/2)_{\frac{j-1}{2}}(1+z^2)^{\frac{n_{12}}{2}}$$
$$\times\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j-1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)-z\left(\frac{j+2\mu_2}{2\mu_1+1}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j-1}{2}, & 1-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right],$$

while for n_{12} odd and j even, we have

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi)(\csc\phi)^{n_{12}+j} = \xi_j^-\frac{(-1)^{\frac{j}{2}}}{(\frac{j}{2})!}(\mu_1+1/2)_{\frac{j}{2}}\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2-\frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right.$$
$$\left.+z\left(\frac{j+2\mu_1+1}{2\mu_1+1}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right](1+z^2)^{\frac{n_{12}-1}{2}}$$

and finally, for n_{12} and j odd, one has

$$F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi)(\csc\phi)^{n_{12}+j} = \xi_j^+ \frac{(-1)^{\frac{j+1}{2}}}{(\frac{j+1}{2})!}\sqrt{\frac{\frac{j-1}{2}+1}{\frac{j-1}{2}+\mu_1+\mu_2+1}}(\mu_1+1/2)_{\frac{j+1}{2}}$$
$$\times (1+z^2)^{\frac{n_{12}-1}{2}}\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j+1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{1}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right.$$
$$\left. - z\left(\frac{j+2\mu_1+2\mu_2+1}{2\mu_1+1}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{j-1}{2}, & -\frac{j}{2}-\mu_2 \\ & \frac{3}{2}+\mu_1\end{matrix};-z^2\right)\right],$$

where in all cases, we have, as shown in section 3.4.3, that

$$\Lambda_{n_{12}}^{\mu_{12}} F_j^{\mu_1,\mu_2}(\phi(z))(\csc\phi(z))^{n_{12}+j} = \sum_{n=0}^{n_{12}+j} C_{n_{12},j}^{n_1,n_2} N_{\mu_1}(n) N_{\mu_2}(n_{12}+j-n) z^n,$$

with $\phi(z) = \cot^{-1} z$.

3.5 Conclusion

We have shown that the approach first introduced in [6] to calculate Clebsch-Gordan coefficients admits a generalization to algebras with a twisted coproduct. It required the relation (3.3.20) between the eigenvalues of the coupled and uncoupled coherent states which is quadratic because the twisted element in the coproduct involves an involution. This suggest that our extension might be applicable to a variety of algebras with that property. The connection between $\mathfrak{osp}(1|2)$ and the dynamical algebra of a parabosonic oscillator has also been exploited to derive the generating function by analytical manipulations of the wavefunction realizations of this algebra. The results of this paper suggest it may be possible to derive generating functions for higher order coupling coefficients, such as the Racah coefficients. The Racah coefficients of $\mathfrak{osp}(1|2)$ are known to be the Bannai-Ito polynomials, for which a generating function has not yet been derived. With the existence of several multivariable generalizations of orthogonal polynomials, it would also be of interest to explore the applicability of the approach to the multivariate cases.

Acknowledgments

The authors would like to thank Vincent X. Genest for stimulating discussions. The research of Geoffroy Bergeron was supported through scholarships of the Natural Science and Engineering Research of Canada (NSERC) and of the Fond de Recherche du Québec - Nature et Technologies (FRQNT). The research of Luc Vinet is supported in part by the Natural Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

CHAPITRE 4

CONCLUSION

Ce mémoire porte principalement sur la dérivation de fonctions génératrices pour les coefficients de Clebsch-Gordan de l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$. Dans une première approche, une généralisation de la méthode proposée par Zhedanov et Granovskii est développée, permettant alors de l'appliquer à l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$ pour laquelle le coproduit est torsadé. La méthode repose sur des factorisations de l'amplitude d'un état cohérent dans la base d'une représentation. Cette factorisation utilise la décomposition de Clebsch-Gordan et permet ainsi de dégager les fonctions génératrices. La seconde approche exposée repose sur la réalisation de l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$ en termes d'opérateurs différentiels agissant sur des fonctions d'onde. Cette réalisation est issue de l'interprétation de l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$ comme l'algèbre dynamique d'un oscillateur parabosonique. La dérivation exploite alors une correspondance entre le changement de base d'un système de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires et le problème de Clebsch-Gordan pour obtenir les fonctions génératrices.

Il a aussi été question dans ce mémoire de cerner le contexte théorique dans lequel se place le problème de Clebsch-Gordan. Ce problème s'identifie au concept de fusion de systèmes physiques. Dans cette optique, il est naturel et attendu que les algèbres de symétrie admettent un coproduit, permettant l'action du générateur d'une symétrie sur un état à plusieurs particules, les particules élémentaires s'identifiant à des représentations irréductibles de cette algèbre. La décomposition de Clebsch-Gordan permet alors le passage entre cette description en termes de particules élémentaires ou comme représentation de l'algèbre de symétrie.

4.1 Perspectives

Un problème connexe est donné par le problème de Racah de l'algèbre $\mathfrak{osp}(1|2)$, encodant le couplage pour trois représentations. La solution est connue et s'exprime en termes des polynômes de Bannai-Ito. La méthode présentée ici semble pouvoir se généraliser aux coefficients de Racah et permettre la dérivation d'une fonction génératrice pour ces polynômes qui, jusqu'à ce jour, demeure inconnue. Aussi, il serait intéressant de voir comment la méthode se généralise pour d'autres algèbres de Hopf déformées avec un coproduit torsadé, particulièrement lorsque l'élément de torsion est d'ordre fini.

L'algèbre ici étudiée étant l'algèbre dynamique d'un oscillateur parabosonique, elle décrit une particule n'obéissant pas à une statistique usuelle, se plaçant plutôt dans le cadre des parastatistiques. Cependant, ces parastatistiques peuvent toujours être ramenées à des statistiques bosoniques ou fermioniques en trois dimensions spatiales. Leur utilisation implique donc, en général, une extension à la physique connue, par exemple avec l'introduction de la supersymétrie. Par contre, cette redéfinition en terme de statistiques usuelles n'est plus possible en deux dimensions. Or, l'étude des systèmes quantiques confinés en deux dimensions est un domaine de la matière condensée en pleine effervescence. En effet, des quasi-particules n'obéissant pas aux statistiques standards sont nécessaires pour expliquer l'effet de Hall quantique fractionnaire. Les algèbres modélisant ces nouvelles statistiques n'auront en général plus un coproduit symétrique. Il est donc pertinent de développer la théorie derrière ces généralisations et l'approche présentée dans ce mémoire est une généralisation permettant l'étude d'un tel système.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Bargmann. On unitary ray representations of continuous groups. *Annals of Mathematics*, 59(1) :1–46, 1954.

[2] J.-M. Lévy-Leblond. Nonrelativistic particles and wave equations. *Commun. math. Phys.*, 6 :286–311, 1967.

[3] A. Ch. Ganchev and T. D. Palev. A Lie superalgebraic interpretation of the para-Bose statistics. *Journal of Mathematical Physics*, 21 :797, 1980.

[4] J. K. Sharma, C. L. Mehta, N. Mukunda, and E. C. G. Sudarshan. Representation and properties of paraBose oscillator operators. II. Coherent states and the minimum uncertainty states. *Journal of Mathematical Physics*, 22 :78, 1981.

[5] T.D. Palev. Para-bose and para-fermi operators as generators of orthosymplectic lie superalgebras. *Journal of Mathematical Physics*, 23 :1100, 1982.

[6] Ya. I. Granovskii and A. Zhedanov. New construction of 3nj-symbols. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26 :4339–4344, 1993.

[7] J. Fuchs. Fusion rules in conformal field theory. *Progress of Physics*, 42 :1–48, 1994.

[8] P. Minnaert and M. Mozrzymas. Regge symmetry of $osp(1/2)$ and $u_q(osp(1/2))$ clebsch-gordan coefficients. *Europhys. Lett.*, 28(5) :299–303, 1994.

[9] L. Faddeev. Instructive history of the quantum inverse scattering method. *Acta Applicandae Mathematicae*, 39(1) :69–84, 1995.

[10] A. Lesniewski. A remark on the Casimir elements of Lie superalgebras and quantized Lie superalgebras. *Journal of Mathematical Physics*, 36(3) :1457–1461, March 1995.

[11] M.J. Gotay, H.B. Grundling, and G.M. Tuyman. Obstruction results in quantization theory. *Journal of Nonlinear Science*, 6 :469–498, 1996.

[12] J. Van der Jeugt. Coupling coefficients for Lie algebra representations and addition formulas for special functions. *Journal of Mathematical Physics*, 38 :2728, 1997.

[13] E. Koelink and J. Van der Jeugt. Convolutions for orthogonal polynomials from Lie and quantum algebra representations. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 29 :794–822, 1998.

[14] J. Rosenberg. A selective history of the stone-von neumann theorem. In *Operator Algebras, Quantization, and Noncommutative Geometry*, volume 365. American Mathematical Society, 2004.

[15] D. L. Fraser. *Haag's theorem and the interpretation of quantum field theories with interactions*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 2006.

[16] S. Lievens, N. I. Stoilov, and J. Van der Jeugt. The paraboson fock space and unitary irreducible representations of the lie superalgebra osp(1|2n). *Communications in Mathematical Physics*, 281(3) :805–826, 2008.

[17] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov. From $\mathrm{sl}_q(2)$ to a Parabosonic Hopf Algebra. *SIGMA*, 7 :93–106, 2011.

[18] L. Vinet and A. Zhedanov. A 'missing' family of classical orthogonal polynomials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44 :085201, 2011.

[19] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov. Dunkl shift operators and Bannai–Ito polynomials. *Advances in Mathematics*, 229(4) :2123–2158, March 2012.

[20] V. X. Genest, M. Ismail, L. Vinet, and A. Zhedanov. The Dunkl oscillator in the plane I : superintegrability, separated wavefunctions and overlap coefficients. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 46, 2013.

[21] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. Bispectrality of the Complementary Bannai–Ito polynomials. *SIGMA*, 9 :18, March 2013.

[22] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. The algebra of dual -1 Hahn polynomials and the Clebsch-Gordan problem of $sl_{-1}(2)$. *Journal of Mathematical Physics*, 54 :023506, 2013.

[23] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov. Dual -1 Hahn Polynomials : "Classical" Polynomials Beyond the Leonard Duality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141 :959–970, 2013.

[24] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. A Laplace-Dunkl equation on S^2 and the Bannai-Ito algebra. *Communications in Mathematical Physics*, 336 :243–259, 2015.

[25] G. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2001.

[26] T. S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, 1978.

[27] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique*, volume 2. Hermann, 1998.

[28] J. Fuchs. *Noncommutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics*, volume 391 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 2004.

[29] A. W. Knapp. *Lie Groups : Beyond an Introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, second edition edition, 2005.

[30] Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, and K. M. Tamizhmani. *Integrability of Nonlinear Systems*. Springer, 2004.

[31] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory.* Cambridge University Press, 2000.

[32] M. E. Rose. *Elementary Theory of Angular Momentum.* Dover Publications, 2011.