UNIVERSITE DE MONTREAL

METHODE DE STATIQUE COMPARATIVE "SILBERBERG" : UNE EVALUATION

PAR

MARIE BELLAVANCE

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

MEMOIRE PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MAITRE ES SCIENCES (M.Sc.)

AOUT 1983

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

Inspiré par Paul A. Samuelson, Eugene Silberberg (1974, 1978) construit la version "primale-duale" d'un problème général de maximisation sous contraintes. L'objectif ainsi visé : engendrer les résultats de la statique comparative au moindre coût.

Nous nous proposons dans ce mémoire d'évaluer l'efficacité de la méthode de statique comparative suggérée par Silberberg.

INTRODUCTION

L'optimum d'un programme sous contraintes dissimule, sous certaines conditions, l'existence d'un ensemble de caractéristiques qui règlent le comportement optimal des variables de décision lorsque varient les paramètres du système. La recherche de ces caractéristiques est cruciale en sciences économiques puisque la fécondité de nombreux modèles économiques, qui relèvent de la maximisation ou la minimisation contraintes d'un critère, en dépend. Il appartient à la statique comparative de résoudre ce défi d'ordre méthodologique. Des techniques de statique comparative élaborées jusqu'au début de la dernière décennie, celle dite de l'équation fondamentale a vraisemblablement dominé. Toutefois ce n'est pas sans difficulté que la technique de l'équation fondamentale permet d'épuiser la caractérisation associée à un optimum de sorte que l'innovation en statique comparative est bienvenue. C'est dans cette perspective que s'inscrit l'initiative récente de Eugene Silberberg (1974).

Ce mémoire vise essentiellement l'évaluation de l'efficacité de la technique "Silberberg". Nous y distinguerons trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous tenterons de reproduire avec fidélité l'argumentation de Silberberg. Puis, dans le second chapitre, nous procéderons à l'expérimentation de sa technique. Pour cette fin, nous avons retenu le problème néoclassique du consommateur et le problème du consommateur rationné. Enfin, à l'intérieur de la dernière section, la méthode "Silberberg" sera confrontée à la technique de l'équation fondamentale.

CHAPITRE I

Exposé de la méthode "Silberberg"

Dans un article publié en 1974 dans la revue Journal of Economic Theory, et intitulé "A Revision of Comparative Statics Methodology in Economics, or, How to Do Comparative Statics on the Back of an Envelope", Eugene Silberberg propose une démarche originale pour engendrer les résultats de la statique comparative[1]. L'astuce de son raisonnement réside essentiellement dans la reformulation du problème initial de maximisation sous contraintes.

Silberberg considère le problème général de maximisation sous contraintes dont voici l'expression :

(1.1) $$\text{Max } y = f(x, \alpha)$$

sous réserve que $g(x, \alpha) = 0$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables de décision;

$\alpha \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de paramètres;

f désigne la fonction-objectif et est différentiable;

g symbolise l'ensemble des contraintes indépendantes, également différentiables[2], du système.

[1]Silberberg a publié en 1978 un volume dans lequel la technique de statique comparative dont il est ici question est reproduite. Le lecteur en trouvera la référence exacte dans la bibliographie.

[2]Silberberg prétend que les fonctions f et g doivent être au moins trois fois différentiables pour assurer l'existence des dérivées partielles qui interviendront dans l'analyse. Cela nous semble inutilement restrictif : Bronsard et Leblanc (1979) démontrent dans le cas particulier du problème néoclassique du consommateur qu'il suffit que la fonction d'utilité soit deux fois continûment différentiable pour garantir que la fonction d'utilité indirecte soit aussi deux fois continûment différentiable.

Formellement, il s'agit donc de maximiser le lagrangien "primal" suivant :

(1.2) $$L(x; \lambda) = f(x, \alpha) + {}^T\lambda\, g(x, \alpha)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des contraintes.

En postulant que la hessienne du lagrangien est définie négative pour tout vecteur s non nul orthogonal à la jacobienne des contraintes, c'est-à-dire :

(1.3) $${}^Ts\, L_{xx}\, s < 0 \quad \text{pour} \quad s \neq 0 \quad \text{tel que} \quad g_x\, s = 0 \ ,$$

Silberberg s'assure l'existence de fonctions une fois continûment différentiables qui associent à un vecteur donné de paramètres les valeurs optimales des variables de décision[1] :

(1.4) $$x = x(\alpha)$$

(1.5) $$\lambda = \lambda(\alpha) \ .$$

La substitution de la fonction à valeur vectorielle $x = x(\alpha)$ dans la fonction-objectif $f(x, \alpha)$ l'amène à définir la fonction indirecte ou duale correspondante :

(1.6) $$\phi(\alpha) = f(x(\alpha), \alpha)$$

qui associe à un vecteur donné de paramètres la valeur maximale que la fonction f soumise aux contraintes peut emprunter.

[1]Le théorème mathématique d'existence des fonctions implicites est à l'origine de cette affirmation.

A ce stade-ci de l'analyse, Silberberg dispose de l'outillage suffisant à la construction du problème "primal-dual" qui reformule le problème initial de maximisation sous contraintes. Le lagrangien associé à cette nouvelle version se présente ainsi :

$$L^*(x,\ \alpha;\ \lambda) = \phi(\alpha) - f(x,\ \alpha) - {}^{T}\lambda\ g(x,\ \alpha)\ . \tag{1.7}$$

Silberberg prétend que minimiser le lagrangien "primal-dual" relativement aux n+m arguments $(x,\ \alpha)$ équivaut à maximiser le lagrangien "primal" par rapport aux variables de décision x[1]. La justification qu'il évoque pour étayer ses propos est de nature intuitive. Pour tout x dans le voisinage de x^*, $\phi(\alpha)$ est en vertu de sa définition strictement supérieure à $f(x,\ \alpha)$. Réduire à zéro l'écart entre d'une part, $\phi(\alpha)$ et d'autre part, le lagrangien "primal" s'impose donc si l'on souhaite maximiser $f(x,\ \alpha)$ sous contraintes : c'est là le sens du problème "primal-dual"[2].

[1] Un doute subsiste dans notre esprit quant à l'exactitude de ce raisonnement. D'abord, permettre à tous les arguments de varier nous paraît dangereux : une solution insolite pourrait résulter du problème "primal-dual". Puis, l'équivalence entre d'une part, la maximisation du lagrangien primal relativement aux variables x et d'autre part, la minimisation du lagrangien "primal-dual" par rapport aux mêmes variables nous semble plus vraisemblable.

[2] Le raisonnement présenté ici nous semble davantage approprié pour justifier la correspondance entre :

$$\text{Max } L(x;\ \lambda) = f(x,\ \alpha) + {}^{T}\lambda\ g(x,\ \alpha)$$

et

$$\text{Min } L^{**}(x;\ \lambda) = \phi(\alpha) - f(x,\ \alpha) - {}^{T}\lambda\ g(x,\ \alpha)\ .$$

L'existence d'un minimum contraint suppose une géométrie particulière pour le lagrangien "primal-dual" : il suffit que la matrice hessienne et symétrique qui lui est associée soit définie positive ou semi-définie positive sous contraintes. Formellement, cela se traduit ainsi :

$$(1.8) \qquad {}^{T}v \begin{pmatrix} L^{*}_{xx} & L^{*}_{x\alpha} \\ L^{*}_{\alpha x} & L^{*}_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} v \geq 0$$

pour tout vecteur v tel que $(g_x \quad g_\alpha)\, v = 0$.

Par ailleurs, le point minimum doit satisfaire les relations du premier ordre suivantes[1] :

$$(1.9) \qquad L^{*}_{x} = -f_x - {}^{T}g_x\, \lambda = 0$$

$$(1.10) \qquad L^{*}_{\alpha} = \phi_\alpha - f_\alpha - {}^{T}g_\alpha\, \lambda = 0$$

$$(1.11) \qquad L^{*}_{\lambda} = -g = 0 \; .$$

Voici comment Silberberg exploite cette information. D'abord, il considère un vecteur v dont les n premières composantes sont nulles, et déduit ainsi de la relation (1.8) la proposition

$$(1.12) \qquad {}^{T}w\, L^{*}_{\alpha\alpha}\, w \geq 0 \quad \text{pour tout vecteur w tel que} \quad g_\alpha\, w = 0.$$

Par ailleurs, il différencie la relation (1.3) relativement aux paramètres et obtient :

[1] Les conditions (1.9) et (1.11) reproduisent la caractérisation du premier ordre associée au problème initial de maximisation sous contraintes. La relation (1.10) constitue le théorème de l'enveloppe de Samuelson.

$$(1.13) \qquad L^*_{\alpha\alpha} = \phi_{\alpha\alpha} - f_{\alpha\alpha} - \sum_{j=1}^{r} g^j_{\alpha\alpha} \lambda^j .$$

Or à l'équilibre,

$$(1.14) \qquad \phi_\alpha = f_\alpha + {}^T g_\alpha \lambda .$$

En outre, tout équilibre vérifie cette relation, c'est-à-dire :

$$(1.15) \qquad \phi_\alpha(\alpha) \equiv f_\alpha(x(\alpha), \alpha) + {}^T g_\alpha(x(\alpha), \alpha) \lambda(\alpha)$$

de sorte que

$$(1.16) \quad \phi_{\alpha\alpha} \equiv f_{\alpha x}(\partial x/\partial\alpha) + f_{\alpha\alpha} + (\sum_{j=1}^{r} g^j_{\alpha x} \lambda^j) (\partial x/\partial\alpha) + \sum_{j=1}^{r} g^j_{\alpha\alpha} \lambda^j + {}^T g_\alpha(\partial\lambda/\partial\alpha)$$

a fortiori. Enfin Silberberg substitue l'expression (1.16) dans la relation (1.13) et dégage la proposition :

$$(1.17) \quad L^*_{\alpha\alpha} = (f_{\alpha x} + \sum_{j=1}^{r} g^j_{\alpha x} \lambda^j) (\partial x/\partial\alpha) + {}^T g_\alpha(\partial\lambda/\partial\alpha) .$$

C'est précisément en conjuguant l'expression (1.17) à la proposition (1.12) que Silberberg dégage un premier résultat de statique comparative. Le second s'obtient de la symétrie de $L^*_{\alpha\alpha}$ définie conformément à la relation (1.17).

CHAPITRE II

Expérimentation de la méthode "Silberberg"

A notre avis, pour bien saisir la portée de la méthode "Silberberg", l'exposé plutôt anonyme du chapitre précédent ne suffit pas. Aussi nous semble-t-il opportun de soumettre la technique "Silberberg" à l'épreuve. Nous avons donc retenu le problème néoclassique du consommateur et le problème du consommateur sous rationnement pour nourrir notre expérimentation.

II.1. Problème néoclassique du consommateur

Soit un consommateur qui recherche parmi les complexes de consommation physiquement accessibles celui qui lui assurera le maximum de satisfaction sous la seule réserve de respecter sa contrainte budgétaire. Cette conception néoclassique du problème du consommateur se traduit formellement par la maximisation du lagrangien suivant :

$$L(x; \lambda) = u(x) + \lambda(R - {}^{T}px) \tag{2.1.1}$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^n$;

$p > 0$;

R est tel que $X \cap \{x / {}^{T}px \leq R\} \neq \phi$.

Si la structure de la fonction d'utilité est telle que

$$u \in C^2 \quad ,$$

$$u_x \gg 0 \quad ,$$

${}^{T}\xi\ U\ \xi < 0$ pour tout vecteur $\xi \neq 0$ tel que ${}^{T}\xi\ u_x = 0$, alors il existe un optimum unique associé au système de prix et de revenu considéré. Qui plus est, il existe une fonction numérique

(2.1.2) $$\lambda = \lambda(p, R)$$

et un système de fonctions de demande

(2.1.3) $$x = x(p, R) .$$

Mais l'existence de fonctions de demande n'est pas la seule implication de la géométrie particulière de la fonction d'utilité : le comportement conceptuel du consommateur, que traduisent ces fonctions, n'est pas non plus quelconque. Suite à une perturbation dans les prix et le revenu, le consommateur réagira conformément au schéma suivant :

(2.1.4) $$dx = K\ dp + \frac{\partial x}{\partial R}\ {}^{T}p\ dx$$

où $K \equiv \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial R}\ {}^{T}x$, et $\frac{\partial x}{\partial R}$ sont tels que

(2.1.5) $$K \equiv {}^{T}K$$

(2.1.6) $$Kp \equiv 0$$

(2.1.7) $${}^{T}\zeta\ K\ \zeta < 0 \quad \text{pour tout} \quad \zeta \neq \theta p$$

(2.1.8) $${}^{T}p\ \frac{\partial x}{\partial R} \equiv 1.$$

Si la méthode "Silberberg" est complète, elle devrait permettre de dégager la caractérisation (2.1.5) à (2.1.8) qui n'est pas immédiatement intelligible. Vérifions-le.

Considérons donc la version "primale-duale" du problème néoclassique du consommateur. Il s'agit de minimiser le lagrangien :

(2.1.9) $$L^*(x,\ p,\ R;\ \lambda) = v(p,\ R) - u(x) - \lambda(R - {}^{T}px)$$

où $v(p,\ R) \equiv u(x(p,\ R))$ est la fonction d'utilité indirecte.

L'existence d'un minimum contraint implique en particulier que :

(2.1.10) $${}^{T}w \begin{pmatrix} L^*_{pp} & L^*_{pR} \\ L^*_{Rp} & L^*_{RR} \end{pmatrix} w \geq 0$$

pour tout vecteur w tel que $(-{}^{T}x \quad 1)w = 0$,

et

(2.1.11) $$\begin{pmatrix} L^*_{pp} & L^*_{pR} \\ L^*_{Rp} & L^*_{RR} \end{pmatrix} \equiv {}^{T}\begin{pmatrix} L^*_{pp} & L^*_{pR} \\ L^*_{Rp} & L^*_{RR} \end{pmatrix} .$$

Or en vertu des conditions du premier ordre associées à ce minimum, soit :

(2.1.12) $$L^*_x = -u_x + \lambda p = 0$$

(2.1.13) $$L^*_p = v_p + \lambda x = 0$$

(2.1.14) $$L^*_R = v_R - \lambda = 0$$

(2.1.15) $$L^*_\lambda = -(R - {}^{T}px) = 0$$

on a que

$$(2.1.16) \qquad \begin{pmatrix} L^*_{pp} & L^*_{pR} \\ L^*_{Rp} & L^*_{RR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{pp} & v_{pR} \\ v_{Rp} & v_{RR} \end{pmatrix}$$

et

$$(2.1.17) \qquad \begin{pmatrix} v_p \\ v_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad .$$

Après substitution des fonctions de demande $x = x(p, R)$ et de la fonction $\lambda = \lambda(p, R)$, la relation (2.1.17) prend le caractère "définitionnel" suivant :

$$(2.1.18) \qquad \begin{pmatrix} v_p \\ v_R \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\lambda(p, R) \quad x(p, R) \\ \lambda(p, R) \end{pmatrix} \quad .$$

La différenciation de (2.1.18) donne

$$(2.1.19) \qquad \begin{pmatrix} v_{pp} & v_{pR} \\ v_{Rp} & v_{RR} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\lambda \dfrac{\partial x}{\partial p} - x \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} & -\lambda \dfrac{\partial x}{\partial R} - x \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix} \quad .$$

La substitution de (2.1.19) dans (2.1.16) engendre une expression particulièrement intéressante puisque

$$(2.1.20) \qquad \begin{pmatrix} L^*_{pp} & L^*_{pR} \\ L^*_{Rp} & L^*_{RR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \dfrac{\partial x}{\partial p} - x \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} & -\lambda \dfrac{\partial x}{\partial R} - x \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix}$$

fait apparaître des termes qui mesurent la sensibilité des variables de décision aux variations dans les paramètres. La substitution de (2.1.20) en (2.1.11) indique

$$(2.1.21) \qquad -\lambda \frac{\partial x}{\partial p} - x \frac{\partial \lambda}{\partial p} \equiv -\lambda \; {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) - {}^T\!\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right) {}^T x$$

$$(2.1.22) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial R} \equiv {}^T\!\left(\frac{\partial \lambda}{\partial R}\right)$$

$$(2.1.23) \qquad -\lambda \frac{\partial x}{\partial R} - x \frac{\partial \lambda}{\partial R} \equiv {}^T\!\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right) \quad .$$

En combinant (2.1.21), (2.1.22) et (2.1.23), on trouve

$$(2.1.24) \qquad -\lambda \frac{\partial x}{\partial p} + \lambda \; x \; {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) + x \frac{\partial \lambda}{\partial R} {}^T x \equiv -\lambda \; {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) + \lambda \frac{\partial x}{\partial R} {}^T x + x \frac{\partial \lambda}{\partial R} {}^T x \; .$$

Enfin de (2.1.24) on peut dégager

$$(2.1.25) \qquad - \frac{\partial x}{\partial p} + x \; {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) \equiv - {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) + \frac{\partial x}{\partial R} {}^T x$$

qui, suite à un réarrangement approprié des termes, conduit à la propriété de symétrie de la matrice des effets de substitution

$$(2.1.26) \qquad \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial R} {}^T x \equiv {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) + x \; {}^T\!\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) \; .$$

De plus, la substitution de (2.1.20) en (2.1.10) révèle un trait supplémentaire de la caractérisation de l'optimum d'un consommateur plongé dans un contexte de type néoclassique. La substitution en question indique

$$(2.1.27) \qquad {}^{T}w \begin{pmatrix} -\lambda \frac{\partial x}{\partial p} - x \frac{\partial \lambda}{\partial p} & -\lambda \frac{\partial x}{\partial R} - x \frac{\partial \lambda}{\partial R} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p} & \frac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix} w \geq 0$$

pour tout vecteur w tel que $(-{}^{T}x \quad 1)\, w = 0$.

Suite à la partition ${}^{T}w \equiv ({}^{T}\zeta \quad \theta)$, la proposition (2.1.27) s'explicite ainsi :

$$(2.1.28) \quad -\lambda\, {}^{T}\zeta \frac{\partial x}{\partial p} \zeta - {}^{T}\zeta\, x \frac{\partial \lambda}{\partial p} \zeta + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial p} \zeta - \lambda\, {}^{T}\zeta \frac{\partial x}{\partial R} \theta - {}^{T}\zeta\, x \frac{\partial \lambda}{\partial R} \theta + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial R} \theta \geq 0$$

pour tout vecteur $({}^{T}\zeta \quad \theta)$ tel que $-{}^{T}x\, \zeta + \theta = 0$.

Une mise en facteur adéquate de (2.1.27) permet d'écrire

$$(2.1.29) \quad -\lambda\, {}^{T}\zeta \frac{\partial x}{\partial p} \zeta + (-{}^{T}\zeta\, x + \theta) \frac{\partial \lambda}{\partial p} \zeta - \lambda\, {}^{T}\zeta \frac{\partial x}{\partial R} \theta + (-{}^{T}\zeta\, x + \theta) \frac{\partial \lambda}{\partial R} \theta \geq 0$$

pour tout vecteur $({}^{T}\zeta \quad \theta)$ tel que $-{}^{T}x\, \zeta + \theta = 0$

qui, en définitive, se résume par la proposition

$$(2.1.30) \qquad -\lambda\, {}^{T}\zeta \frac{\partial x}{\partial p} \zeta - \lambda\, {}^{T}\zeta \frac{\partial x}{\partial R}\, {}^{T}x\, \zeta \geq 0 \; .$$

Finalement puisque, en vertu de (2.1.12) et des hypothèses relatives aux vecteurs p et u_x, $\lambda > 0$, on dégage de (2.1.30) la propriété à l'effet que la matrice des effets de substitution est semi-définie négative, soit :

$$(2.1.31) \qquad {}^T\zeta \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial R} {}^T x \right) \zeta \leq 0 \quad .$$

Donc, en résumé, l'application de la méthode "Silberberg" au problème néoclassique du consommateur ne permet de dégager que la symétrie et la semi-négativité de la matrice de Slutsky.

II.2. Problème du consommateur sous rationnement

Considérons un individu rationné dans son approvisionnement en biens x_2. Il incombe à ce consommateur de déterminer l'importance de chacune de ses consommations en biens x_1 de manière à maximiser la satisfaction qu'il retire de l'ensemble de ses consommations sous réserve que ses dépenses n'excèdent pas ses ressources financières. Ce problème peut se formaliser par la maximisation du lagrangien suivant[1] :

$$(2.2.1.) \qquad L(x_1;\ \lambda) = u(x_1,\ \bar{x}_2) + \lambda(R - {}^T p_1 x_1 - {}^T p_2 \bar{x}_2)$$

où $x_1 \in \mathcal{X}_1 \subset \mathbb{R}^n$

$\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m$.

[1]Une autre formalisation acceptable serait celle où le rationnement apparaît comme contrainte explicite :

$$L(x_1,\ x_2;\ \lambda_1,\ \lambda_2) = u(x_1,\ x_2) + \lambda_1(R - {}^T p_1 x_1 - {}^T p_2 x_2) + {}^T\lambda_2(x_2 - \bar{x}_2) \ .$$

Mais puisque l'application de la technique "Silberberg" à ce lagrangien donne lieu à un exercice foncièrement identique à celui mené pour le problème néoclassique du consommateur, nous avons opté pour la formalisation où le rationnement apparaît implicitement.

Dans la mesure où les préférences du consommateur se structurent conformément aux critères néoclassiques

$$u \varepsilon C^2 \quad ,$$

$$u_x >> 0 \quad ,$$

$$^T\xi \; U \; \xi < 0 \text{ pour tout vecteur } \xi \neq 0 \text{ tel que } ^T\xi \; u_x = 0 \; ,$$

nous pouvons dégager les fonctions régissant le comportement du consommateur rationné

(2.2.2) $$x_1 = x_1(p_1, p_2, R, \bar{x}_2)$$

(2.2.3) $$\lambda = \lambda(p_1, p_2, R, \bar{x}_2) \; .$$

De plus, par le biais de la statique comparative, on peut caractériser les fonctions demande pour les biens x_1 par la différentielle suivante[1] :

(2.2.4) $$dx_1 = S_{11} \; dp_1 + S_{12} \; dp_2 + \frac{\partial x_1}{\partial R} \; {}^T p \; dx \; + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} \, d\bar{x}_2$$

où

(2.2.5) $$S_{11} \equiv {}^T S_{11}$$

(2.2.6) $$S_{11} \; p_1 \equiv 0$$

(2.2.7) $$^T\zeta_1 \; S_{11} \; \zeta_1 < 0 \quad \text{si} \quad \zeta \neq \theta p_1$$

[1] S_{11} symbolise l'expression $\partial x_1/\partial p_1 + (\partial x_1/\partial R)^T x_1$ et S_{12}, l'expression $\partial x_1/\partial p_2 + (\partial x_1/\partial R)^T x_2$.

$$(2.2.8) \qquad {}^{T}p_1 \frac{\partial x_1}{\partial R} \equiv 1$$

$$(2.2.9) \qquad S_{12} \equiv 0$$

$$(2.2.10) \qquad {}^{T}p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_2} \equiv -{}^{T}p_2 \ .$$

Voyons plutôt comment la technique "Silberberg" se défend ici. Définissons d'abord la fonction d'utilité indirecte associée au consommateur rationné :

$$(2.2.11) \qquad v(p_1, p_2, R, \overline{x}_2) \equiv u(x_1(p_1, p_2, R, \overline{x}_2), \overline{x}_2) \ .$$

La version "primale-duale" du problème du consommateur en situation de rationnement consiste à minimiser le lagrangien suivant :

$$(2.2.12) \qquad L^*(x_1, p_1, p_2, R, \overline{x}_2; \lambda) = v(p_1, p_2, R, \overline{x}_2) - u(x_1, \overline{x}_2) - \lambda(R - {}^{T}p_1 x_1 - {}^{T}p_2 \overline{x}_2)$$

L'optimum sous rationnement correspondant vérifie alors le système suivant des conditions du premier ordre :

$$(2.2.13) \qquad L^*_{x_1} = -u_{x_1} + \lambda p_1 = 0$$

$$(2.2.14) \qquad L^*_{p_1} = v_{p_1} + \lambda x_1 = 0$$

$$(2.2.15) \qquad L^*_{p_2} = v_{p_2} + \lambda \overline{x}_2 = 0$$

$$(2.2.16) \qquad L^*_{R} = v_{R} - \lambda = 0$$

$$(2.2.17) \qquad L^*_{\overline{x}_2} = v_{\overline{x}_2} - u_{\overline{x}_2} + \lambda p_2 = 0$$

$$(2.2.18) \qquad L^*_\lambda = -(R - {}^Tp_1x_1 - {}^Tp_2\bar{x}_2) = 0 \ .$$

De plus, l'analyse des conditions du second ordre associées à cette version du problème du consommateur rationné révèle en particulier que

$$(2.2.19) \qquad {}^Tw \begin{pmatrix} L^*_{p_1p_1} & L^*_{p_1p_2} & L^*_{p_1R} & L^*_{p_1\bar{x}_2} \\ L^*_{p_2p_1} & L^*_{p_2p_2} & L^*_{p_2R} & L^*_{p_2\bar{x}_2} \\ L^*_{Rp_1} & L^*_{Rp_2} & L^*_{RR} & L^*_{R\bar{x}_2} \\ L^*_{\bar{x}_2p_1} & L^*_{\bar{x}_2p_2} & L^*_{\bar{x}_2R} & L^*_{\bar{x}_2\bar{x}_2} \end{pmatrix} w \geq 0$$

pour tout vecteur w tel que $(-{}^Tx_1 \quad -{}^T\bar{x}_2 \quad 1 \quad -{}^Tp_2)\ w = 0.$

En vertu des conditions du premier ordre, (2.2.19) s'écrit

$$(2.2.20) \qquad {}^Tw \begin{pmatrix} v_{p_1p_1} & v_{p_1p_2} & v_{p_1R} & v_{p_1\bar{x}_2} \\ v_{p_2p_1} & v_{p_2p_2} & v_{p_2R} & v_{p_2\bar{x}_2} + \lambda I_m \\ v_{Rp_1} & v_{Rp_2} & v_{RR} & v_{R\bar{x}_2} \\ v_{\bar{x}_2p_1} & v_{\bar{x}_2p_2} + \lambda I_m & v_{\bar{x}_2R} & v_{\bar{x}_2\bar{x}_2} - u_{\bar{x}_2\bar{x}_2} \end{pmatrix} w \geq 0$$

pour tout vecteur w tel que $(-{}^Tx_1 \quad -{}^T\bar{x}_2 \quad 1 \quad -{}^Tp_2)\ w = 0.$

La portée de ce résultat dans la recherche de la caractérisation de l'optimum du consommateur rationné n'est pas immédiate. Il faut lui conjuguer l'information qu'on tire de la substitution des fonctions $x_1 = x_1(p_1, p_2, R, \bar{x}_2)$ et $\lambda = \lambda(p_1, p_2, R, \bar{x}_2)$ dans les conditions (2.2.14), (2.2.15), (2.2.16) et (2.2.17). Ainsi la différenciation du système

$$v_{p_1} \equiv -\lambda(p_1, p_2, R, \bar{x}_2)\; x_1(p_1, p_2, R, \bar{x}_2) \tag{2.2.21}$$

$$v_{p_2} \equiv -\lambda(p_1, p_2, R, \bar{x}_2)\; \bar{x}_2 \tag{2.2.22}$$

$$v_R \equiv \lambda(p_1, p_2, R, \bar{x}_2) \tag{2.2.23}$$

$$v_{\bar{x}_2} \equiv u_{\bar{x}_2}(x_1(p_1, p_2, R, \bar{x}_2), \bar{x}_2) - \lambda(p_1, p_2, R, \bar{x}_2)\; p_2 \tag{2.2.24}$$

permet de réécrire (2.2.20) :

$$ {}^T w \begin{bmatrix} -\lambda \dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} - x_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} & -\lambda \dfrac{\partial x_1}{\partial p_2} - x_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} & -\lambda \dfrac{\partial x_1}{\partial R} - x_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} & -\lambda \dfrac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} - x_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2} \\ -\bar{x}_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} & -\bar{x}_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} & -\bar{x}_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} & -\bar{x}_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2} \\ \dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} - p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} & \dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_2} - p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} & \dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial R} - p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} & \dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} - p_2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2} \end{bmatrix} w \geq 0 \tag{2.2.25}$$

pour tout vecteur w tel que $(-{}^T x_1 \quad -{}^T \bar{x}_2 \quad 1 \quad -{}^T p_2)\, w = 0$.

Partitionnons le vecteur w de la façon suivante : ${}^T w \equiv ({}^T\zeta_1 \;\; {}^T\zeta_2 \;\; \theta \;\; {}^T\zeta_3)$ de manière à pouvoir expliciter (2.2.25) ainsi :

$$(2.2.26)\quad -\lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\zeta_1 - {}^T\zeta_1\, x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}\zeta_1 - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}\zeta_1 + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}\zeta_1$$

$$+ {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\zeta_1 - {}^T\zeta_3\, p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}\zeta_1 - \lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\zeta_2 - {}^T\zeta_1\, x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}\zeta_2$$

$$- {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}\zeta_2 + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}\zeta_2 + {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\zeta_2 - {}^T\zeta_3\, p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}\zeta_2$$

$$- \lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial R}\theta - {}^T\zeta_1\, x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial R}\theta - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 \frac{\partial \lambda}{\partial R}\theta + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial R}\theta + {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial R}\theta$$

$$- {}^T\zeta_3\, p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial R}\theta - \lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 - {}^T\zeta_1\, x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3$$

$$+ \theta \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 + {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 - {}^T\zeta_3\, p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 \geq 0$$

pour tout vecteur $({}^T\zeta_1\ {}^T\zeta_2\ \theta\ {}^T\zeta_3)$ tel que $-{}^Tx_1\,\zeta_1 - {}^T\bar{x}_2\,\zeta_2 + \theta - {}^Tp_2\,\zeta_3 = 0$.

Une mise en facteur est possible à partir de (2.2.26) :

$$(2.2.27)\quad -\lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\zeta_1 + (-{}^T\zeta_1\, x_1 - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 + \theta - {}^T\zeta_3\, p_2) \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}\zeta_1$$

$$+ {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\zeta_1 - \lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\zeta_2 + (-{}^T\zeta_1\, x_1 - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 + \theta - {}^T\zeta_3\, p_2) \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}\zeta_2$$

$$+ {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\zeta_2 - \lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial R}\theta + (-{}^T\zeta_1\, x_1 - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 + \theta - {}^T\zeta_3\, p_2) \frac{\partial \lambda}{\partial R}\theta$$

$$+ {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial R}\theta - \lambda\, {}^T\zeta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 + (-{}^T\zeta_1\, x_1 - {}^T\zeta_2\, \bar{x}_2 + \theta - {}^T\zeta_3\, p_2) \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3$$

$$+ {}^T\zeta_3 \frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\zeta_3 \geq 0$$

pour tout vecteur $({}^T\zeta_1 \quad {}^T\zeta_2 \quad \theta \quad {}^T\zeta_3)$ tel que $-{}^Tx_1\,\zeta_1 - {}^T\bar{x}_2\,\zeta_2 + \theta - {}^Tp_2\,\zeta_3 = 0$.

Or dire que la proposition (2.2.27) est vraie pour tout vecteur $({}^T\zeta_1 \quad {}^T\zeta_2 \quad \theta \quad {}^T\zeta_3)$ tel que $-{}^T\zeta_1\,x_1 - {}^T\zeta_2\,\bar{x}_2 + \theta - {}^T\zeta_3\,p_2 = 0$ ou tel que $-{}^Tx_1\,\zeta_1 - {}^T\bar{x}_2\,\zeta_2 + \theta - {}^Tp_2\,\zeta_3 = 0$, c'est dire

$$
\begin{aligned}
(2.2.28)\quad & -\lambda\,{}^T\zeta_1\,\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\,\zeta_1 + {}^T\zeta_3\,\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\,\zeta_1 - \lambda\,{}^T\zeta_1\,\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\,\zeta_2 + {}^T\zeta_3\,\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\,\zeta_2 \\
& - \lambda\,{}^T\zeta_1\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^Tx_1\,\zeta_1 - \lambda\,{}^T\zeta_1\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^T\bar{x}_2\,\zeta_2 - \lambda\,{}^T\zeta_1\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^Tp_2\,\zeta_3 \\
& + {}^T\zeta_3\,\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^Tx_1\,\zeta_1 + {}^T\zeta_3\,\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^T\bar{x}_2\,\zeta_2 + {}^T\zeta_3\,\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^Tp_2\,\zeta_3 \\
& - \lambda\,{}^T\zeta_1\,\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\,\zeta_3 + {}^T\zeta_3\,\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\,\zeta_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

pour tout vecteur $({}^T\zeta_1 \quad {}^T\zeta_2 \quad {}^T\zeta_3)$,

ou, sous forme matricielle

$$
(2.2.29)\quad -\lambda\left[{}^T\zeta_1 \;\; {}^T\zeta_2 \;\; {}^T\zeta_3\right]
\begin{bmatrix}
S_{11} & S_{12} & \dfrac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^Tp_2 + \dfrac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} \\
0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,S_{11} & -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,S_{12} & -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\left[\dfrac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^Tp_2 + \dfrac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\right]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3\end{bmatrix} \geq 0
$$

pour tout vecteur $[{}^T\zeta_1 \quad {}^T\zeta_2 \quad {}^T\zeta_3]$.

Puisque $\lambda > 0$, on déduit de (2.2.29) :

(2.2.30)

$$\begin{bmatrix} {}^T\zeta_1 & {}^T\zeta_2 & {}^T\zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \frac{\partial x_1}{\partial R}\, {}^Tp_2 + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1} S_{11} & -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1} S_{12} & -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\left[\frac{\partial x_1}{\partial R}\, {}^Tp_2 + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \leq 0 \,.$$

Si l'on pose $\zeta_2 \equiv 0$ et $\zeta_3 \equiv 0$, alors on conclut de (2.2.30)

$$(2.2.31) \qquad {}^T\zeta_1\, S_{11}\, \zeta_1 \leq 0 \,.$$

Enfin la symétrie de la matrice

$$\begin{pmatrix} L^*_{p_1p_1} & L^*_{p_1p_2} & L^*_{p_1R} & L^*_{p_1\bar{x}_2} \\ L^*_{p_2p_1} & L^*_{p_2p_2} & L^*_{p_2R} & L^*_{p_2\bar{x}_2} \\ L^*_{Rp_1} & L^*_{Rp_2} & L^*_{RR} & L^*_{R\bar{x}_2} \\ L^*_{\bar{x}_2p_1} & L^*_{\bar{x}_2p_2} & L^*_{\bar{x}_2R} & L^*_{\bar{x}_2\bar{x}_2} \end{pmatrix}$$

implique

$$(2.2.32) \qquad -\lambda \frac{\partial x_1}{\partial p_1} - x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \equiv -\lambda\, {}^T\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) - {}^T\!\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}\right) {}^Tx_1$$

$$(2.2.33) \qquad -\bar{x}_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \equiv -\, {}^T\!\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_2}\right) {}^T\bar{x}_2$$

(2.2.34) $$\frac{\partial\lambda}{\partial R} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial R}\right)$$

(2.2.35) $$\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} - p_2\,\frac{\partial\lambda}{\partial \bar{x}_2} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}\right)\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\right) - {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial \bar{x}_2}\right)\,{}^{T}p_2$$

(2.2.36) $$-\lambda\,\frac{\partial x_1}{\partial p_2} - x_1\,\frac{\partial\lambda}{\partial p_2} \equiv -\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\right)\,{}^{T}\bar{x}_2$$

(2.2.37) $$-\lambda\,\frac{\partial x_1}{\partial R} - x_1\,\frac{\partial\lambda}{\partial R} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\right)$$

(2.2.38) $$-\lambda\,\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} - x_1\,\frac{\partial\lambda}{\partial \bar{x}_2} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\right) - {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\right)\,{}^{T}p_2$$

(2.2.39) $$-\bar{x}_2\,\frac{\partial\lambda}{\partial R} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_2}\right)$$

(2.2.40) $$-\bar{x}_2\,\frac{\partial\lambda}{\partial \bar{x}_2} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\right) - {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{p_2}\right)\,{}^{T}p_2$$

(2.2.41) $$\frac{\partial\lambda}{\partial \bar{x}_2} \equiv {}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial R}\right)\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial u_{\bar{x}_2}}{\partial x_1}\right) - {}^{T}\!\left(\frac{\partial\lambda}{\partial R}\right)\,{}^{T}p_2 \;.$$

D'une part, de (2.2.32), (2.2.34), (2.2.37) on obtient

(2.2.42) $$-\lambda\,\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \lambda\,x_1\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial R}\right) + x_1\,\frac{\partial\lambda}{\partial R}\,{}^{T}x_1 \equiv -\lambda\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) + \lambda\,\frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^{T}x_1 + x_1\,\frac{\partial\lambda}{\partial R}\,{}^{T}x_1$$

qui s'écrit plus simplement

(2.2.43) $$-\,\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial R}\right) \equiv -\,{}^{T}\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^{T}x_1 \;.$$

On réarrange les termes de (2.2.43) pour obtenir

$$(2.2.44) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^T x_1 \equiv {}^T\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) + x_1\,{}^T\!\left(\frac{\partial x_1}{\partial R}\right)$$

qui précise que la matrice des effets de substitution pour les bienx x_1 est symétrique. D'autre part, (2.2.36), (2.2.37) et (2.2.39) nous informent que

$$(2.2.45) \qquad -\lambda \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial R}\,{}^T\bar{x}_2 \equiv \lambda \frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^T\bar{x}_2 + x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial R}\,{}^T\bar{x}_2$$

et en dernière analyse,

$$(2.2.46) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1}{\partial R}\,{}^T\bar{x}_2 \equiv 0\,.$$

Bref la technique "Silberberg" permet de dégager les propriétés de symétrie et de semi-négativité de S_{11}, et révèle que S_{12} est identiquement nulle.

Une partie de la caractérisation de l'optimum du consommateur échappe systématiquement à la méthode "Silberberg". Suite à cet exercice, force est donc de reconnaître le caractère fragmentaire de celle-ci.

CHAPITRE III

Méthode "Silberberg"

vs

Méthode de l'équation fondamentale

Nous nous proposons dans cette section de compléter l'évaluation de la méthode "Silberberg" en confrontant celle-ci à la technique de statique comparative dite de l'équation fondamentale.

Considérons le problème néoclassique du consommateur formulé dans sa version "primale". Sous l'hypothèse que la fonction d'utilité est différenciable, il s'agit de maximiser le lagrangien suivant :

$$L(x;\ \lambda) = u(x) + \lambda(R - {}^{T}px) \tag{3.1}$$

Admettons encore que la fonction d'utilité ait une structure néoclassique. Alors la jacobienne du système des conditions du premier ordre associées à l'optimum,

$$\begin{pmatrix} U & -p \\ -{}^{T}p & 0 \end{pmatrix},$$

est de rang maximal et les fonctions de demande $x = x(p,\ R)$ ainsi que la fonction numérique $\lambda = \lambda(p,\ R)$ existent[1].

La technique de statique comparative de l'équation fondamentale consiste essentiellement à substituer les fonctions $x = x(p,\ R)$ et $\lambda = \lambda(p,\ R)$ dans le système des conditions du premier ordre pour en dégager

[1]Le théorème d'existence des fonctions implicites justifie cette proposition.

après différenciation une proposition qui caractérise les fonctions de demande. La substitution suggérée conduit au système

$$(3.2) \qquad u_x(x(p,\ R)) - \lambda(p,\ R)\ p \equiv 0$$

$$(3.3) \qquad R - {}^{T}p\ x(p,\ R) \equiv 0$$

dont la différenciation mène à l'équation dite "équation fondamentale" :

$$(3.4) \qquad \begin{pmatrix} U & -p \\ -{}^{T}p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial R} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p} & \frac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ {}^{T}x & -1 \end{pmatrix} .$$

Par inspection, il existe une inverse à droite de $\begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ {}^{T}x & -1 \end{pmatrix}$. Post-multiplions le système (3.4) par cette inverse. On trouve

$$(3.5) \qquad \begin{pmatrix} U & -p \\ -{}^{T}p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial R} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p} & \frac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\ I & 0 \\ \frac{1}{\lambda}\ {}^{T}x & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou écrit autrement

$$(3.6) \qquad \begin{pmatrix} U & -p \\ -{}^{T}p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\ K & -\frac{\partial x}{\partial R} \\ \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial R}\ {}^{T}x \right) & -\frac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Puisque $\begin{pmatrix} U & -p \\ -{}^{T}p & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique et que, en vertu d'un théorème mathématique, l'inverse d'une matrice symétrique est elle-même symétrique, alors on peut conclure de l'équation fondamentale transformée (3.6) que

(3.7) $$K \equiv {}^{T}K \; .$$

De plus, de (3.6), la propriété relative aux effets-revenu

(3.8) $${}^{T}p \, \frac{\partial x}{\partial R} \equiv 1$$

est immédiate. Nous pouvons encore retracer de (3.6) la propriété d'additivité

(3.9) $${}^{T}p \; K \equiv 0$$

qui, combinée avec (3.7), engendre la propriété d'homogénéité de degré 0 dans les prix et le revenu des fonctions de demande, soit :

(3.10) $$K \, p \equiv 0 \; .$$

Puis, parce que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} K & - \frac{\partial x}{\partial R} \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial R} \, {}^{T}x \right) & - \frac{\partial \lambda}{\partial R} \end{pmatrix}$$

est de rang maximal soit n+1 alors, a fortiori, $((1/\lambda) K \quad -\partial x/\partial R)$ est de rang n et K est au moins de rang n-1. Finalement, puisque le vecteur de prix p est orthogonal à K, comme en témoigne la relation (3.10), la matrice des effets de substitution ne peut non plus excéder le rang n-1. Enfin, de la relation (3.6) nous pouvons extraire la proposition

(3.11) $$\frac{1}{\lambda} UK - \frac{1}{\lambda} \, p \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial R} \, {}^{T}x \right) \equiv I$$

qui, en raison de la symétrie de l'inverse de $\begin{pmatrix} U & -p \\ -{}^{T}p & 0 \end{pmatrix}$, se formule de façon équivalente :

$$(3.12) \qquad \frac{1}{\lambda}\, UK + p\; {}^{T}\!\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) \equiv I \;.$$

Prémultiplions (3.12) par ${}^{T}K$. Nous obtenons :

$$(3.13) \qquad \frac{1}{\lambda}\, {}^{T}KUK + {}^{T}Kp\; {}^{T}\!\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) \equiv {}^{T}K \;.$$

La relation (3.13) peut se réduire à

$$(3.14) \qquad \frac{1}{\lambda}\, {}^{T}KUK \equiv K$$

puisque $K \equiv {}^{T}K$ et $Kp \equiv 0$. Maintenant si l'on pré- et post-multiplie (3.14) par ${}^{T}\zeta$ et ζ respectivement, on a :

$$(3.15) \qquad \frac{1}{\lambda}\, {}^{T}\zeta\; {}^{T}KUK\, \zeta \equiv {}^{T}\zeta\, K\, \zeta \;.$$

Définissons $\xi \equiv K\,\zeta$. Alors (3.15) s'écrit

$$(3.16) \qquad \frac{1}{\lambda}\, {}^{T}\xi\, U\, \xi \equiv {}^{T}\zeta\, K\, \zeta \;.$$

Or nous savons, conformément aux hypothèses néoclassiques relatives à la fonction d'utilité, que la hessienne de $u(x)$ est définie négative pour tout vecteur non nul orthogonal au vecteur des utilités marginales. En conséquence,

$$(3.17) \qquad {}^{T}\xi\, U\, \xi < 0 \qquad \text{pour tout vecteur } \xi \neq 0$$

puisque, par construction, ξ est orthogonal au vecteur des prix et donc au vecteur correspondant des utilités marginales.

De même,

(3.18) $$\frac{1}{\lambda}\,{}^{T}\xi \; U \; \xi < 0 \quad \text{pour tout vecteur } \xi \neq 0$$

puisque λ est strictement positif. Des relations (3.16), (3.18), nous déduisons

(3.19) $${}^{T}\zeta \; K \; \zeta < 0$$

pour tout vecteur $\xi \neq 0$.

Enfin nous concluons que

(3.20) $${}^{T}\zeta \; K \; \zeta < 0 \quad \text{pour tout vecteur } \zeta \neq \theta p$$

puisque $\xi \equiv K\zeta$, K est de rang n-1 et que son noyau est engendré par tout vecteur colinéaire au vecteur des prix.

L'exercice précédent suffit pour constater que la technique "Silberberg" est moins puissante que la méthode de l'équation fondamentale. En effet, tandis que la technique de l'équation fondamentale épuise la caractérisation des fonctions de demande néoclassiques, la méthode "Silberberg" ne dégage que la symétrie et la semi-négativité de la matrice des effets de substitution.

Par ailleurs, un examen plus attentif des deux méthodes révèle que la méthode "Silberberg" complique la recherche de la symétrie de la matrice des effets de substitution. Ce résultat, qui est directement intelligible de l'équation fondamentale transformée nécessite avec la technique

"Silberberg" la manipulation de certains des éléments de la matrice hessienne associée au lagrangien "primal-dual".

La méthode "Silberberg" présente cependant l'avantage de déduire la semi-négativité de la matrice des effets de substitution avec une relative spontanéité. Alors que pour extraire la propriété de semi-négativité de K la méthode de l'équation fondamentale requiert la mise en oeuvre d'une intuition pour le moins judicieuse[1], la méthode "Silberberg" s'affranchit de cette tâche de façon purement mécanique.

Mais ce qui rend la méthode "Silberberg" particulièrement intéressante, c'est qu'elle dégage les résultats de symétrie et de semi-négativité de K en évitant l'inversion de matrices liée à la technique de l'équation fondamentale. Cela constitue un avantage appréciable puisque l'inversion de matrices devient aisément fastidieuse dès qu'on s'éloigne du contexte néoclassique.

[1]Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le raisonnement qui est élaboré à partir de la relation (3.12).

CONCLUSION

Bien qu'elle présente l'intérêt de dégager la semi-négativité et la symétrie de la matrice des effets de substitution tout en ignorant l'inversion de matrices, la méthodologie proposée par Silberberg déçoit puisqu'elle rate l'objectif ultime de la statique comparative, celui d'épuiser toute la caractérisation liée à un optimum.

En outre, toute tentative de racheter l'effort de Silberberg semble vaine. Ainsi même en greffant à la méthode "Silberberg" le principe de la substitution des fonctions de demande dans les contraintes, le rang de la matrice des effets de substitution reste énigmatique.

Puisque le critère de l'efficacité doit éclairer prioritairement le choix de la méthode si l'on veut connaître les limites des modèles théoriques, il faut décliner la méthode "Silberberg". La technique de l'équation fondamentale, parce qu'elle est exhaustive, reste donc la méthode de statique comparative de prédilection.

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord exprimer ma gratitude à mon directeur de recherche, M. Camille Bronsard. Je salue en lui le principal artisan de mon apprentissage de la théorie économique au niveau gradué.

Je voudrais aussi remercier vivement M. Maurice Bouchard et Mme Lise Salvas-Bronsard qui ont consenti à agir respectivement comme deuxième et troisième lecteurs.

Merci à mes camarades du séminaire 6090 pour les encouragements qu'ils m'ont manifestés.

Enfin je m'en voudrais de taire le précieux travail de Mme Suzanne Larouche-Sidoti qui a assumé la dactylographie de ce mémoire. Je l'en remercie.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

BRONSARD, C. et LEBLANC, D., "Théorie générale du consommateur et applications", Cahier de recherche 7905, Département de sciences économiques et du Centre de recherche en développement économique, Université de Montréal, 1979.

SAMUELSON, P.A., Les fondements de l'analyse économique, Tome 1, Dunod, 1971.

SAMUELSON, P.A., "Structure of a Minimum Equilibrium System", dans The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson, Vol. 1, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1966, pp. 651-686.

SAMUELSON, P.A., "Using Full Duality to Show that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand", dans Econometrica, Vol. 33, no 4, octobre 1965, pp. 781-796.

SILBERBERG, E., "A Revision of Comparative Statics Methodology in Economics, or, How to Do Comparative Statics on the Back of an Envelope", dans Journal of Economic Theory, Vol. VII, février 1974, pp. 159-172.

SILBERBERG, E., The Structure of Economics : A Mathematical Analysis, McGraw-Hill Inc., 1978, pp. 263-299.