

UNIVERSITE DE MONTREAL

ANALYSE DE LA DEMANDE DE TRANSPORT
A TORONTO A L'AIDE D'UN MODELE NON LINEAIRE

PAR

MOHAMED KHIRI

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

MEMOIRE PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MAITRE ES SCIENCES (M.SC.)

JUILLET 1983



TABLE DES MATIERES

	Page
Sommaire	iv
Introduction	1
Chapitre I - Les modèles non linéaires	2
Section 1 - Pourquoi les modèles non linéaires	3
A. Les formes fonctionnelles	3
B. Les problèmes posés par les formes fonctionnelles	5
C. Analyse conjointe de la partie fixe et de la partie aléatoire	6
C.1 Forme générale d'hétéroscédasticité	8
C.2 Fonction de vraisemblance pour un modèle linéaire .	10
C.3 Formulation de la fonction de vraisemblance pour un modèle non linéaire	10
C.4 Fonction de vraisemblance en présence d'hétéroscé- dasticité et d'autocorrélation d'ordre multiple ...	11
D. Problème de limites et propriétés des estimateurs	12
D.1 Problème de limites	12
D.2 Propriétés des estimateurs	13
Section 2 - Algorithme d'estimation	15
A. Fonction de vraisemblance concentrée	16
B. Procédure de maximisation	18
Chapitre II - Application à la demande de transport	21
Section 1 - Données et méthodologie	23
A. Les données	23
A.1 Variables dépendantes	23
A.2 Variables de prix et de revenu	23
A.3 Variables de confort et de service	24
A.4 Variables d'activités	25

	Page
A.5 Variables d'agrégation	26
A.6 Les variables auxiliaires	26
B. Méthodologie	26
B.1 L'équation des adultes	28
B.2 L'équation des personnes âgées	28
Section 2 - Analyse des résultats	29
A. Equation des adultes	31
A.1 Comportement de la fonction de vraisemblance	31
A.2 Correction pour l'autocorrélation et pour l'hétéroscédasticité	32
A.3 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les paramètres de la forme fonctionnelle	39
A.4 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les élasticités de la demande	40
A.5 Signe et signification des variables	43
A.6 Coefficient de corrélation multiple	48
B. Equation des personnes âgées	48
B.1 Comportement de la fonction de vraisemblance	48
B.2 Correction pour l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité	49
B.3 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les paramètres de la forme fonctionnelle	50
B.4 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les élasticités de la demande	50
B.5 Signe et signification des variables	55
B.6 Coefficient de corrélation multiple	55
Conclusion	57
Annexe	59
Bibliographie	60
Remerciements	61

TABLE DES ILLUSTRATIONS

	Page
Tableau 1 Définition des variables	27
Tableau 2 Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1979)	33
Tableau 3 Variation des élasticités entre le modèle (1) et le modèle (21)	41
Tableau 4 Demande de transport en commun par les personnes âgées à Toronto (janvier 1970 - août 1979)	51
Tableau 5 Variation des élasticités entre le modèle (1) et le modèle (10)	53

SOMMAIRE

L'objet principal de cette étude est de tester les possibilités d'application du modèle de régression non linéaire suggéré par Marc Gaudry et Marcel G. Dagenais (1978-1979) pour estimer une fonction de demande spécifique.

La procédure proposée consiste à estimer simultanément tous les paramètres dans un modèle de régression dont la variable dépendante ainsi que les variables indépendantes sont sujettes aux transformations de Box-Cox. L'intérêt de cette procédure réside en ce qu'elle permet aussi de tenir compte de l'autocorrélation et de l'hétéroscédasticité dans les erreurs résiduelles. La formulation adoptée pour la correction de l'hétéroscédasticité est une formulation très générale qui englobe plusieurs formulations courantes. L'approche utilisée permet également de considérer des schémas d'autocorrélation d'ordre multiple.

Nous avons utilisé cette procédure pour estimer la demande de transport en commun à Toronto pour le marché des adultes et celui des personnes âgées, à partir de données mensuelles couvrant la période qui va de janvier 1956 à août 1979. Les résultats obtenus montrent que la transformation simultanée de la partie fixe et de la partie aléatoire du modèle a un impact notable sur les estimations des paramètres et sur les élasticités de la demande. Ils montrent également que le choix de la forme appropriée pour le traitement de l'hétéroscédasticité dans les erreurs résiduelles revêt une importance majeure.

INTRODUCTION

Le choix de la forme fonctionnelle est une étape cruciale dans l'analyse de la régression. Box et Cox (1964) ont suggéré une famille de transformations incluant le modèle linéaire et le modèle log-linéaire comme des cas particuliers. L'expérience a montré qu'une utilisation de la procédure Box-Cox pour l'analyse de la partie fixe du modèle n'est pas sans affecter les caractéristiques de la partie aléatoire. Le modèle suggéré par Gaudry et Dagenais (1978-79) permet de modifier conjointement la spécification de la partie fixe et de la partie aléatoire du modèle tout en tenant compte de l'autocorrélation d'ordre multiple dans les erreurs résiduelles.

Dans cette étude, on se propose d'exposer, dans ses grandes lignes, cette nouvelle stratégie proposée par Gaudry et Dagenais ainsi que de l'appliquer pour estimer la demande de transport en commun à Toronto pour le marché des adultes et celui des personnes âgées à partir de données mensuelles correspondant à la période qui va de janvier 1956 à août 1979. Les résultats obtenus ont été assez satisfaisants pour les adultes et suggèrent que l'équation des personnes âgées souffre de problèmes de spécification qui ne relèvent pas principalement de la forme fonctionnelle adoptée.

CHAPITRE I

LES MODELES NON LINEAIRES

Section 1 - Pourquoi les modèles non linéaires

La théorie économique peut nous dire que la quantité demandée est une fonction du prix mais elle ne saurait nous dire par quelle forme fonctionnelle on peut représenter cette relation: par une relation linéaire du type $Y = \beta_0 + \beta_1 P$ ou par une relation log-linéaire du type $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln P$.

Tous les économètres s'accordent pour dire que cette décision relève d'un examen des observations. Cependant, même après des examens préliminaires effectués à l'aide de méthodes d'analyse descriptive, la forme ne s'impose généralement pas de façon indiscutable.

A. Les formes fonctionnelles

Theil (1971) a souligné l'importance du choix entre modèles linéaires et log-linéaires pour des fins de prévision. L'auteur illustre ce problème en donnant l'exemple d'un monopoleur produisant un seul bien et voulant s'interroger sur l'effet d'une augmentation du coût de production sur le prix qui maximise son profit lequel est donné par:

$$P = (p - c)q - c_0 \quad (1)$$

où p est le prix du bien, c le coût marginal, q les quantités produites et c_0 le coût fixe. Le prix qui maximise le profit est celui obtenu en résolvant:

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 0 \quad (2)$$

Si, dans un premier cas, la fonction de demande du bien en question a la forme linéaire suivante:

$$q = \alpha + \beta p \quad , \quad \alpha > 0, \beta < 0 \quad (3)$$

alors le prix qui maximise P est:

$$p = \frac{\alpha}{-2\beta} + \frac{1}{2} c \quad (4)$$

ce qui voudrait dire que, si le coût marginal augmente de un dollar, le prix lui n'augmentera que de la moitié de un dollar.

Si, dans un deuxième cas, la fonction de demande a la forme:

$$q = AP^\eta \quad , \quad A > 0, \eta < 0 \quad (5)$$

alors le prix qui maximisera P est:

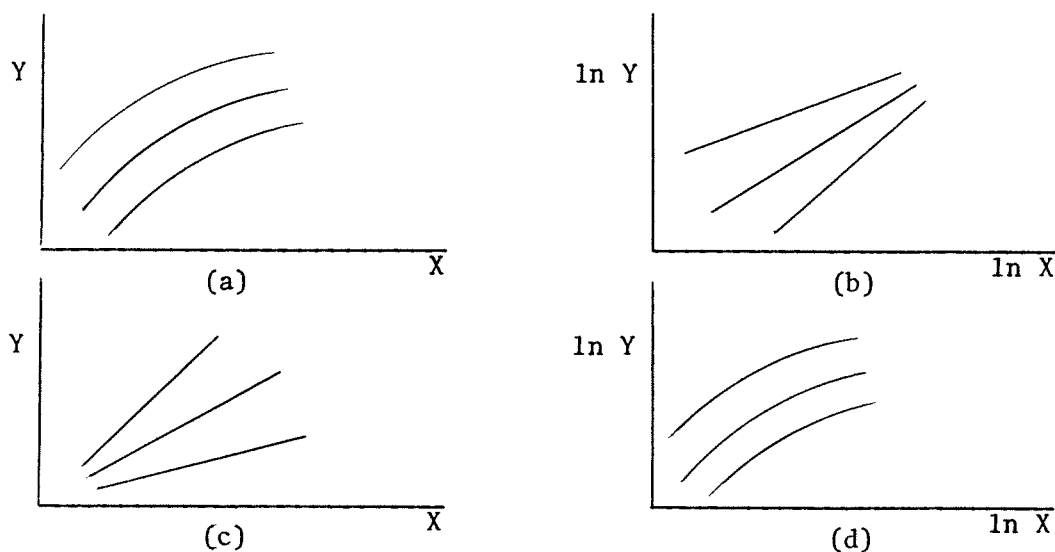
$$p = \frac{\eta}{\eta + 1} c \quad (6)$$

c'est-à-dire que, si le coût marginal augmente de un dollar, le prix augmentera de plus qu'un dollar, i.e. une augmentation deux fois plus importante que dans le cas précédent.

Cet exemple montre donc à quel point une erreur de spécification peut conduire à des prévisions erronées.

B. Les problèmes posés par les formes fonctionnelles

La pratique courante consiste à spécifier un modèle en émettant des hypothèses sur la partie fixe et la partie aléatoire du modèle, en ignorant l'interdépendance qui existe entre les deux. Par exemple, on peut utiliser pour la partie systématique du modèle une forme linéaire ou log-linéaire, mais dans le dernier cas il n'est pas clair si les transformations logarithmiques sont utilisées parce que le modèle est vraiment log-linéaire ou pour corriger l'hétéroscédasticité des erreurs et c'est dans ce sens que le dilemme (partie fixe-partie aléatoire) surgit. Ce dilemme peut être explicité davantage par les figures suivantes:



La figure (a) montre que nous avons un modèle curvilinéaire avec homoscedasticité des erreurs. Si on tente d'utiliser les transformations logarithmiques pour linéariser le modèle, on risque d'introduire de

l'hétéroscédasticité indésirable comme l'illustre la figure (b). Inversement, la figure (c) illustre un modèle linéaire avec des erreurs hétéroscédastiques où l'utilisation d'une transformation logarithmique pour corriger l'hétéroscédasticité pourrait détériorer la qualité de la représentation fonctionnelle comme le montre la figure (d).

Il s'agit donc d'un dilemme qu'on ne peut trancher que si l'on dispose d'autant d'instruments que l'on a d'objectifs. En d'autres termes, il faudrait utiliser par exemple la procédure de Box-Cox pour résoudre les problèmes de la forme fonctionnelle et d'autres formules appropriées pour corriger l'hétéroscédasticité. Cette stratégie a été suggérée par Gaudry et Dagenais (1978-1979).

C. Analyse conjointe de la partie fixe et de la partie aléatoire

Considérons le modèle¹ suivant:

$$Y_t = \sum_k \beta_k X_{kt} + u_t \quad t = 1, \dots, n \quad (7)$$

où n = nombre d'observations

ou sous sa forme matricielle:

$$Y = XB + U \quad (8)$$

où X est une matrice non stochastique de dimension (n x k), B vecteur de paramètres (k x 1) et U vecteur (n x 1) d'erreurs aléatoires

¹ Tout au long de cette étude, nous ignorons le coefficient β_0 afin de faciliter l'exposé.

avec $E(U) = 0$ et $E(UU') = \psi^2 V = \Omega$, (V définie positive).

La procédure Box-Cox consiste à spécifier le modèle (7) de la façon suivante:

$$Y_t^{(\lambda y)} = \sum_k \beta_k X_{k_t}^{(\lambda x_k)} + u_t \quad (9)$$

où les transformations de Box-Cox, d'une variable quelconque $W_t > 0$, si W_t dénote une variable dépendante Y_t ou des variables explicatives X_{k_t} ou Z_{m_t} , sont définies pour un certain paramètre λ comme:

$$W_t^{(\lambda)} = \begin{cases} (W_t^\lambda - 1)/\lambda & , \quad \lambda \neq 0 \\ \ln W_t & , \quad \lambda = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Les transformations inverses sont:

$$W_t = \begin{cases} (\lambda W_t^{(\lambda)} + 1)^{1/\lambda} \\ \exp(W_t^{(\lambda)}) \end{cases} \quad (11)$$

Les transformations directes de Box-Cox ont été utilisées dans les modèles de régression sans examiner leur impact sur la partie aléatoire du modèle. La première analyse systématique de la structure de la partie aléatoire simultanément avec celle de la partie fixe a été apparemment faite par Savin et White (1978) qui ont

¹ La transformation Box-Cox est un cas spécial de la transformation Box-Tukey laquelle est définie comme étant:

$$(W_t + \mu)^\lambda = \begin{cases} \frac{(W_t + \mu)^\lambda - 1}{\lambda} & , \quad \lambda \neq 0 & , \quad (W_t + \mu) > 0 \\ \ln (W_t + \mu) & , \quad \lambda = 0 & , \quad (W_t + \mu) > 0 \end{cases}$$

dans la transformation Box-Cox, μ est égal à zéro.

décelé une autocorrélation du premier ordre dans les erreurs résiduelles. Cette analyse a été étendue par Gaudry et Wills (1978) pour une structure d'autocorrélation d'ordre multiple.

Une attention minime a été attribuée à la détermination conjointe de l'hétéroscédasticité et de la forme fonctionnelle de la partie fixe. La stratégie proposée par Gaudry et Dagenais permet justement la formulation d'une spécification générale de la forme d'hétéroscédasticité et montre que celle-ci peut être analysée conjointement avec la forme de la partie fixe du modèle. La stratégie permet également d'incorporer une structure d'autocorrélation d'ordre multiple.

C.1 Forme générale d'hétéroscédasticité

Supposons que la matrice variance-covariance des u_t dans un modèle linéaire est donnée par:

$$E(u_t u_t') = \psi^2 \begin{bmatrix} f(Z_1) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(Z_t) & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & f(Z_n) \end{bmatrix} = \Omega \quad (12)$$

$$\text{où } f(Z_t)^{-1} = \left\{ \lambda_u \left(\delta_0 + \sum_{m=1}^M \delta_m Z_{m_t}^{(\lambda_{z_m})} \right) + 1 \right\}^{1/\lambda_u} \quad (13)$$

les transformations de Box-Cox ont été appliquées au vecteur Z_t contenant les variables associées à la variance des erreurs. L'expression

¹ Notons que les variables Z_t peuvent être partiellement ou totalement différentes des variables X_{k_t} .

(13) contient plusieurs cas particuliers. Si on pose $\lambda_u = 1$, on aura:

$$\tilde{\omega}_{tt} = \tilde{\delta}_0 + \sum_{m=1}^M \tilde{\delta}_m Z_{m_t}^{(\lambda_{z_m})} \quad (14)$$

$$\text{où } \tilde{\delta}_0 = \psi^2 (\delta_0 + 1) \quad , \quad \tilde{\delta}_m = \psi^2 \delta_m$$

L'expression (14) inclut la forme linéaire si ($\lambda_{z_m} = 1$ pour tout m) et quelques formes non linéaires classiques: racine carrée si ($\lambda_{z_m} = \frac{1}{2}$ pour tout m) ou la puissance 2 si ($\lambda_{z_m} = 2$ pour tout m). Une autre famille de cas particuliers est obtenue en posant $\lambda_u = 0$:

$$E(u_t^2) = \tilde{\omega}_{tt} = \psi^2 \exp \left\{ \delta_0 + \sum_{m=1}^M \delta_m Z_{m_t}^{(\lambda_{z_m})} \right\} \quad (15)$$

$$= \sigma^2 \exp \left\{ \sum_{m=1}^M \delta_m Z_{m_t}^{(\lambda_{z_m})} \right\} \quad (16)$$

$$\text{où } \sigma^2 = \psi^2 \exp \{ \delta_0 \}$$

L'expression (16) inclut le modèle multiplicatif multivarié si

($\lambda_{z_m} = 0$ pour tout m) soit:

$$\hat{\omega}_{tt} = \sigma^2 \prod_{m=1}^M Z_{m_t}^{\delta_m} \quad (17)$$

où la forme multiplicative multivariée classique si ($\delta_m = 2$ pour tout m):

$$\hat{\omega}_{tt} = \sigma^2 \prod_{m=1}^M Z_{m_t}^2 \quad (18)$$

Toutefois, la forme définie par (16) est préférable à celle définie par (14) car cette dernière peut produire des éléments diagonaux négatifs dans la matrice Ω .

C.2 Fonction de vraisemblance pour un modèle linéaire

Si, dans le modèle (7), les u_t sont distribuées normalement avec $E(u_t) = 0$ et matrice variances-covariances (12) comme spécifiée par (16), la fonction de vraisemblance peut s'écrire:

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n |\tilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y - X\beta)' \tilde{\Omega}^{-1} (Y - X\beta) \right\} \quad (19)$$

ou

$$L = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{\exp(\sum_m \delta_m Z_{m_t} (\lambda_{z_m}))}} \exp \left[-\frac{(Y_t - \sum_k \beta_k X_{k_t})^2}{2\sigma^2 \exp(\sum_m \delta_m Z_{m_t} (\lambda_{z_m}))} \right] \quad (20)$$

de laquelle on peut obtenir des estimations du maximum de vraisemblance pour β_k , σ^2 , δ_m et λ_{z_m} .

C.3 Formulation de la fonction de vraisemblance pour un modèle non linéaire

Si on remplace la forme linéaire (7) par la forme générale de Box-Cox (9) mais la matrice variances-covariances des erreurs (12) demeure comme spécifiée par (16), la fonction de vraisemblance devient:

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n |\tilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y^{(\lambda_y)} - X^{(\lambda_x)_\beta})' \tilde{\Omega}^{-1} (Y^{(\lambda_y)} - X^{(\lambda_x)_\beta}) \right\} |J(\lambda_y; Y)|^1 \quad (21)$$

où $|J(\lambda_y; Y)|$ est le jacobien de passage de $Y_t^{(\lambda_y)}$ à Y_t , ou

$$|J(\lambda_y; Y)| = \left| \det \frac{\partial Y_t^{(\lambda_y)}}{\partial Y_t} \right| = \prod_{t=1}^n Y_t^{\lambda_y - 1} \quad (22)$$

L'équation (21) peut s'écrire aussi:

$$L = \prod_{t=1}^n \frac{Y_t^{\lambda_y - 1}}{\sigma \sqrt{2\pi} \sqrt{\exp(\sum_m \delta_m Z_m^{(\lambda_{z_m})})}} \exp \left[- \frac{(Y_t^{(\lambda_y)} - \sum_k \beta_k X_{k_t}^{(\lambda_{x_k})})^2}{2\sigma^2 \exp(\sum_m \delta_m Z_m^{(\lambda_{z_m})})} \right] \quad (23)$$

Ce qui ajoute les paramètres λ_y ; $\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}$ à ceux déjà présents dans l'équation (20).

C.4 Fonction de vraisemblance en présence d'hétéroscédasticité et d'autocorrélation d'ordre multiple

Pour éviter toute confusion, reformulons le problème comme suit:

$$Y_t^{(\lambda_y)} = \sum_k \beta_k X_{k_t}^{(\lambda_{x_k})} + u_t \quad (24)$$

$$u_t = f(Z_t)^{\frac{1}{2}} v_t \quad (25)$$

$$v_t = \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell v_{t-\ell} + w_t \quad (26)$$

avec $E(v_t^2) = \psi^2$, $f(Z_t) = \exp \left(\sum_m \delta_m Z_m^{(\lambda_{z_m})} \right)$

¹ Si $\lambda_y = 1$ (cas linéaire), $|J(\lambda_y; Y)| = 1$.

Le processus autorégressif défini par (26) est supposé stationnaire et $w_t \text{ iid } \sim N(0, \sigma^2 I)$. La fonction de vraisemblance¹ en présence d'hétéroscédasticité et d'autocorrélation d'ordre multiple peut donc s'écrire:

$$L = \prod_{t=1+r}^n \frac{Y_t^{\lambda y - 1}}{\sigma \sqrt{2\pi} \sqrt{f(Z_t)}} \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{u_t}{\sqrt{f(Z_t)}} - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell \frac{u_{t-\ell}}{\sqrt{f(Z_t)}} \right]^2 \right\} \quad (27)$$

où l'expression entre crochets correspond à w_t . Dans la section 2, nous verrons la procédure de maximisation du logarithme de l'équation (27) concentrée sur σ^2 et β_k .

D. Problème de limites et propriétés des estimateurs

D.1 Problème de limites

Dans de nombreuses applications économétriques, spécialement l'analyse de la demande, il est raisonnable de penser que la variable dépendante a une limite inférieure et une limite supérieure même si en réalité ces points ne sont jamais observés. Dans notre étude où la variable dépendante représente le nombre de déplacements mensuels effectués en utilisant le transport en commun, si on suppose que le tarif exact passe de 0,80 \$ à 60,00 \$, il est clair que la demande pour ce mode va se réduire à zéro. En pratique, il est préférable de considérer comme limite inférieure - au lieu de zéro - un certain ϵ légèrement supérieur à zéro car les

¹ Conditionnelle aux r premières observations.

transformations de Box-Cox ne sont valables que pour des variables strictement positives puisqu'elles incluent la transformation logarithmique quand $\lambda = 0$. Par ailleurs, si on considère que le tarif est nul ou même négatif, la demande du transport en commun aurait tendance à augmenter considérablement mais non jusqu'à l'infini. La raison en est qu'étant donné le nombre d'adultes et de personnes âgées ainsi que le nombre de véhicules de transport dans la ville de Toronto, le nombre de déplacements mensuels ne dépasserait jamais une certaine limite supérieure (théorique) notée L .

Ce problème de limites est très important pour le calcul de $E(Y_t)$. Pour plus de détails, voir Dagenais, Gaudry et Liem (décembre 1980). Les auteurs notent en particulier que si λ est négatif, $E(Y_t)$ n'existe que si la borne supérieure est finie.

D.2 Propriétés des estimateurs

Sous l'hypothèse que le vrai modèle de Y_t est un modèle Tobit avec limite inférieure et limite supérieure et que l'échantillon étudié ne contient pas d'observations égales à ces deux limites, alors les estimateurs qui maximisent l'équation (27) sont les vrais estimateurs du maximum de vraisemblance. Quelles sont alors les propriétés de ces estimateurs? Trois possibilités seront considérées.

En premier lieu, si on peut admettre que les paramètres du modèle, les conditions initiales et les distributions empiriques des variables explicatives sont tels que la probabilité que $Y_t^{(\lambda, y)}$ soit égal à sa limite inférieure ou supérieure est négligeable, alors le théorème général des grands échantillons concernant la distribution échantillonnale du maximum de vraisemblance est présumément applicable à l'équation (27). En deuxième lieu, même si on ne peut admettre que la probabilité que $Y_t^{(\lambda, y)}$ atteigne sa limite inférieure ou supérieure soit toujours négligeable, cette probabilité peut être suffisamment petite, de sorte que la probabilité d'observer des échantillons sans observations limites demeure très élevée et, dans ce cas, les estimateurs qui maximisent la fonction de vraisemblance (27) demeurent asymptotiquement normaux, convergents et efficaces. En dernier lieu, si la probabilité que $Y_t^{(\lambda, y)}$ soit égal à sa limite inférieure ou supérieure est assez grande - étant données les valeurs des variables explicatives observées dans notre échantillon - on peut alors mettre en doute la validité de notre modèle.

Section 2 - Algorithme d'estimation

Reprenons les équations (24), (25) et (26):

$$Y_t^{(\lambda_y)} = \sum_k \beta_k X_{k_t}^{(\lambda_{x_k})} + u_t, \quad (t = 1, \dots, n) \quad (28)$$

$$u_t = \sqrt{f(Z_t)} v_t \quad (29)$$

$$v_t = \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell u_{t-\ell} + w_t \quad (30)$$

avec $E(v_t^2) = \psi^2$, $f(Z_t) = \exp \left(\sum_{m=1}^M \delta_m Z_{m_t}^{(\lambda_{z_m})} \right)$

$Y_t^{(\lambda_y)}$, $X_{k_t}^{(\lambda_{x_k})}$ et $Z_{m_t}^{(\lambda_{z_m})}$ sont respectivement les transformations Box-Cox de Y_t , X_{k_t} et Z_{m_t} . Le logarithme de la fonction de vraisemblance correspondant aux équations (28), (29) et (30) est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t = \ln L = & - \frac{n-r}{2} \ln (2\pi\sigma^2) + (\lambda_y - 1) \sum_{t=1+r}^n \ln Y_t \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1+r}^n \ln f(Z_t) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1+r}^n \left(\frac{u_t}{\sqrt{f(Z_t)}} - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell \frac{u_{t-\ell}}{\sqrt{f(Z_t)}} \right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

où $u_t = Y_t^{(\lambda_y)} - \sum_k \beta_k X_{k_t}^{(\lambda_{x_k})}$

Le vecteur de tous les paramètres qu'on peut estimer à partir de l'équation (31) peut s'écrire:

$$\pi = (\lambda_y; \lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}; \rho_1, \dots, \rho_r; \delta_1, \dots, \delta_m; \lambda_{z_1}, \dots, \lambda_{z_m}; \beta_1, \dots, \beta_k; \sigma^2). \text{ Etant donné ce nombre considérable de paramètres}$$

(surtout les β_k), la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_t peut être d'abord concentrée sur σ^2 et ensuite sur β_k pour justement réduire le nombre de paramètres qui interviennent directement dans la maximisation de \mathcal{L}_t .

A. Fonction de vraisemblance concentrée

En prenant la dérivée première de l'équation (31) par rapport à σ^2 , on aura:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \sigma^2} = -\frac{n-r}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{t=1+r}^n \left(\frac{u_t}{\sqrt{f(Z_t)}} - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell \frac{u_{t-\ell}}{\sqrt{f(Z_t)}} \right)^2 \quad (32)$$

et en résolvant $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = 0$, on obtient:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{\sum_{t=1+r}^n} \left[\frac{u_t}{\sqrt{f(Z_t)}} - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell \frac{u_{t-\ell}}{\sqrt{f(Z_t)}} \right]^2 / (n-r) \quad (33)$$

En remplaçant σ^2 par sa valeur dans l'équation (31), on obtient la fonction de vraisemblance concentrée sur σ^2 :

$$\mathcal{L}_t^* = (\lambda_y - 1) \sum_{t=1+r}^n \ln Y_t - \frac{n-r}{2} \ln \hat{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1+r}^n \ln f(Z_t) + K^1 \quad (34)$$

Pour que l'expression (34) soit également concentrée sur β_k , on doit utiliser une notation matricielle pour réécrire l'expression (33).

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r} ww' \quad (35)$$

¹ K est une constante.

$$\text{où } w_t = \frac{u_t}{\sqrt{f(Z_t)}} - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell \frac{u_{t-\ell}}{\sqrt{f(Z_t)}} = Y_t^{**} - \sum_k X_{k_t}^{**} \beta_k \quad (36)$$

$$\text{où: } \left. \begin{aligned} Y_t^{**} &= Y_t^* - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell Y_{t-\ell}^* \\ Y_t^* &= Y_t^{(\lambda_y)} / \sqrt{f(Z_t)} \\ X_{k_t}^{**} &= X_{k_t}^* - \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell X_{k,t-\ell}^* \\ X_{k_t}^* &= X_{k_t}^{(\lambda_{X_k})} / \sqrt{f(Z_t)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

En termes de β_k , $\hat{\sigma}^2$ peut s'écrire:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r} (Y^{**} - X^{**} \beta)' (Y^{**} - X^{**} \beta) \quad (38)$$

où Y_t^{**} est un vecteur Colonne qui contient les $(n-r)$ observations de Y_t^{**} . De même $X_{k_t}^{**}$ est une matrice $(n-r) \times q$ et β un vecteur colonne de q éléments.

Le calcul de la dérivée première de l'équation (34) par rapport à β donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t^*}{\partial \beta} &= - \frac{n-r}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \frac{\partial \hat{\sigma}^2}{\partial \beta} \\ &= - \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \left[\frac{\partial (Y^{**} - X^{**} \beta)'}{\partial \beta} \right] (Y^{**} - X^{**} \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\hat{\sigma}^2} X^{**'} (Y^{**} - X^{**} \beta) \\
&= \frac{1}{\hat{\sigma}^2} (X^{**'} Y^{**} - X^{**'} X^{**} \beta) \quad (39)
\end{aligned}$$

En posant l'expression (39) égale à zéro, on aura:

$$\hat{\beta} = (X^{**'} X^{**})^{-1} X^{**'} Y^{**} \quad (40)$$

En remplaçant β par $\hat{\beta}$ dans l'expression (38), on obtient:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r} (Y^{**} - X^{**} \hat{\beta})' (Y^{**} - X^{**} \hat{\beta}) \quad (41)$$

Finalement, le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance concentrée sur σ^2 et β_k est:

$$\mathcal{L}_t^{**} = (\lambda_y - 1) \sum_{t=1+r}^n \ln Y_t - \frac{n-r}{2} \ln \hat{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1+r}^n \ln f(Z_t) \quad (42)$$

B. Procédure de maximisation

Pour maximiser la fonction (42) par rapport à $\bar{\pi}$, où $\bar{\pi} = (\lambda_y, \lambda_{x_k}, \rho_\ell, \delta_m, \lambda_{z_m})$, le programme DSDM-L1 (Liem, 1979) fait appel à l'algorithme de Fletcher and Powell (1963) qui utilise les dérivées¹ premières de la fonction. Pour démarrer le processus d'itération, une solution initiale est exigée pour les paramètres λ_y, λ_{x_k} ,

¹ Les expressions analytiques de ces dérivées sont détaillées dans Liem (1979).

ρ_ℓ , δ_m et λ_{z_m} . En effet, en posant λ_y , λ_{x_k} et λ_{z_m} égaux à l'unité, δ_m et ρ_ℓ égaux à zéro, le modèle se réduit au cas linéaire, ce qui semble être un bon point de départ. Après une première estimation des β_k en utilisant la formule (40), une première estimation des u_t est faite à partir de l'équation (28) et la méthode Box-Jenkins est alors invoquée pour déterminer la structure autorégressive des erreurs résiduelles. Toutefois, cette structure autorégressive des erreurs peut varier d'une itération à l'autre. En pratique, le processus autorégressif est identifié lors de la première itération et de ce fait reste inchangé durant les itérations qui suivent. Une fois le maximum atteint, le processus (AR) des w_t estimés est aussi examiné. Dans le cas des adultes, toutes les expériences numériques qui ont été faites montrent que les estimations des w_t obtenues à l'itération finale se comportent comme un bruit blanc. Par contre, la majorité des expériences dans le cas des personnes âgées prouvent le contraire. Il est à noter que, si l'échantillon n'est pas assez grand, la technique de Box-Jenkins peut s'avérer inutile pour l'identification du processus (AR) et, dans ces conditions, ce dernier devra être déterminé a priori.

Pour estimer la matrice variances-covariances des estimateurs du maximum de vraisemblance de tous les éléments de π , la formule suggérée par Berndt et al (1974) est utilisée. Cette dernière requiert le calcul de la dérivée de chaque f_t défini par l'équation

(31) par rapport à chaque élément de π évalué à $\hat{\pi}$. Le gradient ainsi obtenu peut s'écrire:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} = \sum_{t=1+r}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \pi} \right)_{\pi=\hat{\pi}}$$

$$\text{où } \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \pi} = (\ln Y_t) \frac{\partial(\lambda - 1)}{\partial \pi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln f(Z_t)}{\partial \pi} - \frac{w_t}{\sigma^2} \frac{\partial w_t}{\partial \pi} \quad (44)$$

w_t correspond à l'expression (36).

La matrice variances-covariances est estimée par:

$$\text{Cov} = \left[\sum_{t=1+r}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \pi} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \pi} \right)' \right]_{\pi=\hat{\pi}}^{-1} \quad (45)$$

Le programme permet le calcul des mesures suivantes: $(\eta - \varepsilon)$, Pseudo - (E) - R^2 , Pseudo - (L) - R^2 . Les formules de ces mesures sont explicitées à l'annexe.

CHAPITRE II

APPLICATION A LA DEMANDE DE TRANSPORT

Nous avons utilisé le modèle correspondant aux équations (24), (25) et (26) pour estimer la demande de transport en commun à Toronto pour le marché des adultes et celui des personnes âgées à l'aide de données mensuelles correspondant à la période qui va de janvier 1956 à août 1979, soit 284 observations.

La demande de transport se présente généralement sous la forme:

$$Q^d = f(P_t, R_t, S_t, C_t, A_t, \text{etc.})$$

où Q est le nombre de déplacements effectués en utilisant le transport en commun, P vecteur du prix du transport par les différents modes, R le revenu, S le niveau de service, C le niveau de confort et A vecteur des différentes activités pour lesquelles les gens se déplacent.

Le modèle décrit par l'équation ci-dessus est une formulation générale de chacun des deux marchés que nous avons analysés. Ainsi chaque marché est un sous-groupe où la demande de transport pour les adultes peut être exprimée par Y^{1d} et celle des personnes âgées par Y^{2d} .

Section 1 - Données et méthodologie

A. Les données

A.1 Variables dépendantes

Dans notre étude, nous analysons la demande de transport en commun pour les adultes et les personnes âgées à partir des ventes de billets et du paiement comptant des déplacements.

A.2 Variables de prix et de revenu

Les variables de prix tiennent compte du coût de la vie et du coût du transport. Dans ce groupe, on classe l'indice des prix à la consommation (CPI) pour Toronto, ce qui nous permet de mesurer l'évolution des prix au cours de la période à partir d'une année de base (1971 = 100); de même, grâce à cet indice, on peut connaître l'importance réelle de certaines variables économiques. Ainsi, l'indice du prix réel de l'essence (RGS) a été calculé à partir du prix nominal de l'essence et l'indice des prix à la consommation:

$$\text{RGS} = \frac{\text{GAS}}{\text{CPI}} \times 100$$

On inclut également le tarif réel du transport pour chacun des deux marchés en tenant compte de leurs divers modes de paiement (billets, comptant). On a donc que ADF et SEF représentent le tarif réel respectivement pour les adultes et les personnes âgées; on a alors:

$$\text{RAF} = (\text{ADF}/\text{CPI}) \times 100 \quad \text{ADF} = \% \text{ billets} + \% \text{ comptant}$$

$$\text{REF} = (\text{SEF}/\text{CPI}) \times 100 \quad \text{SEF} = \% \text{ billets} + \% \text{ comptant}$$

Enfin, le revenu a été obtenu en calculant le salaire manufacturier par semaine à Toronto (RWW):

$$\text{RWW} = (\text{AWW}/\text{CPI}) \times 100 \quad \text{AWW} = \text{salaire moyen hebdomadaire à Toronto}$$

Parmi les régresseurs, on trouve également la variable CAR qui représente le nombre de voitures dans la région métropolitaine de Toronto et qui intervient indirectement comme variable de prix.

A.3 Variables de confort et de service

Les variables de confort font intervenir les quantités de pluie (RNF) et de neige (SNF) qui tombent par jour à Toronto. La neige peut avoir un deuxième effet sous forme de neige accumulée (CSF). Dans ce groupe, on fait appel à l'écart de température (TMP), c'est-à-dire la différence entre la température désirée (62,5°F) et la température au cours de la période étudiée; plus cet écart est grand, plus l'inconfort l'est aussi.

La qualité du service a été estimée à partir de données concernant le temps d'attente des passagers (WTT), c'est-à-dire une valeur moyenne de la fréquence entre deux autobus:

$$\text{WTT} = \text{HWT}/2$$

Quant au temps de base, celui-ci a été obtenu à partir d'un trajet représentatif de 5 milles pour une vitesse donnée (SPD):

$$BTT = 5 \text{ milles}/SPD$$

A.4 Variables d'activités

On cherche à expliquer grâce à ces variables les raisons pour lesquelles les adultes et les personnes âgées se déplacent. L'une de leurs principales activités est la présence au travail (WPR); une autre activité importante pour les adultes est leur présence à l'université (SPA). Ces deux variables ont été calculées de la façon suivante:

$$WPR = WPB \times EMP$$

$$SPA = SAA \times SDA$$

$$WPB = (WRK - VDW)/WRK$$

VDW: jours de vacances des employés

EMP: indice de l'emploi à Toronto

WRK: jours de travail par mois

SAA: fréquentation de l'école par les adultes

SDA: présence lors des jours de classe

Parmi les autres variables d'activité, on note les déplacements pour fins d'achats que l'on illustre par les ventes de détail (RRT), de même que les déplacements pour fins de loisirs où l'on calcule le nombre de personnes présentes à l'exposition canadienne nationale (EXA). Enfin, on inclut également dans ce groupe d'autres variables comme le feu de métro (FIR) et le nombre des journées de grève du transport en commun (STK).

A.5 Variables d'agrégation

Ces diverses variables permettent de faire intervenir le nombre de jours de travail dans un mois (WRK), le nombre de samedis (SAT), de dimanches (SUN) ou encore le nombre de jours fériés par mois (HOL).

A.6 Les variables auxiliaires

Il s'agit notamment des variables qui font appel aux doubles comptages qui ont pu se produire lors de la division de la ville de Toronto en plusieurs zones comme (AZ1) et (AZ2) pour la période respectivement de 6 et 2 zones dans le cas des adultes et (ZRD) pour la période de 2 zones dans le cas des personnes âgées. On cherche de plus à mesurer l'effet de l'adoption du tarif exact (EFC) et de l'extension de ce tarif aux écoliers (SCD). Le tableau 1 illustre une description complète de toutes les variables utilisées.

B. Méthodologie

Dans cette application, les transformations de Box-Cox ont été appliquées à la variable dépendante et aux variables indépendantes strictement positives. Pour des fins de clarté, nous allons considérer chacune des équations séparément.

Tableau 1
Définition des variables

Variables auxiliaires	AZ1	Période de division de la ville en 6 zones (pour les adultes)
	AZ2	Période de division de la ville en 2 zones (pour les adultes)
	ZRD	Période de division de la ville en 2 zones (pour les personnes âgées)
	EFC	Variable auxiliaire associée au tarif exact (impact du tarif exact et changements possibles dans les comptages)
	SNI	Limitation des privilèges pour les personnes âgées durant l'année 1970
	SCD	Extension du tarif des écoliers en dehors des heures d'école à partir du 16 mars 1973
Variables de prix	CAR	Nombre d'automobiles dans la région métropolitaine de Toronto
	RAF	Tarif réel du transport en commun pour les adultes
	REF	Tarif réel du transport en commun pour les personnes âgées
	RGS	Prix réel de l'essence
	CPI	Indice des prix à la consommation
Variable de revenu	RWW	Revenu réel hebdomadaire à Toronto
Variables de service	NTT	Temps d'attente
	BTT	Temps de trajet
Variables de confort	TMP	Ecart de température
	RNF	Quantité de pluie qui tombe par jour à Toronto
	SNF	Quantité de neige qui tombe par jour à Toronto
	CSF	Accumulation de la neige
Variables d'activité	WPR	Présence au travail
	RRT	Ventes de détail (ou motif magasinage)
	SPA	Présence à l'université
	EXA	Exposition canadienne nationale (ou motif loisir)
	MPT	Population métropolitaine de Toronto
	STK	Nombre de grèves du transport / mois
	FIR	Feu du métro
Variables d'agrégation	WRK	Jours de travail / mois
	SAT	Nombre de samedis / mois
	SUN	Nombre de dimanches / mois
	HOL	Jours fériés / mois
Variables saisonniers	AUG	Mois d'août
	SEP	Mois de septembre

B.1 L'équation des adultes

Cette équation contient 30 variables explicatives (constante exclue). En plus de λ_y , nous avons estimé deux λ_x : λ_{x_1} affecte le premier groupe contenant les variables de prix, de revenu et de service, soit au total 8 variables: CAR, RAF, REF, RGS, CPI, RWW, WTT, BTT; λ_{x_2} affecte le deuxième groupe contenant les variables d'activité et des variables d'agrégation, soit 4 variables: WPR, RRT, MPT, WRK; les autres variables n'ont pas été transformées. Pour la correction de l'hétéroscédasticité, nous avons utilisé la forme décrite par (16). Plusieurs expériences ont été faites tantôt avec une seule variable: Hétéro (1), tantôt avec deux variables: Hétéro (1) et Hétéro (2). Pour la correction de l'autocorrélation, nous avons retenu trois Rhos: ρ_1 , ρ_4 et ρ_{12} .

B.2 L'équation des personnes âgées

Cette équation contient 24 variables explicatives (constante exclue). En raison de certains problèmes d'estimation que nous discuterons dans la section 2, nous n'avons retenu, en plus de λ_y qu'un seul λ_x affectant des variables de prix, de revenu, de service, d'activité et d'agrégation, soit 9 variables: REF, RGS, CPI, RWW, WTT, BTT, WPR, RRT, WRK. La même forme pour la correction de l'hétéroscédasticité que dans le cas précédent a été adoptée. Pour la correction de l'autocorrélation, nous avons retenu trois Rhos également: ρ_1 , ρ_3 et ρ_6 .

Section 2 - Analyse des résultats

Au début de cette section, nous tenons à discuter de certains problèmes qu'on ne peut passer sous silence. En premier lieu, il est important de rappeler que l'équation des adultes a été estimée à partir de toutes les observations de l'échantillon, soit 284 observations alors que l'équation des personnes âgées n'a été estimée qu'à partir de 116 observations. En effet, de janvier 1956 à décembre 1969, la variable dépendante pour cette équation est nulle en raison du fait que, durant cette période, les déplacements effectués par les adultes et les personnes âgées ont été enregistrés dans une même série. Ce n'est qu'à partir de janvier 1970 que les deux catégories d'usagers ont été enregistrées séparément. Il en ressort que le nombre de déplacements effectués par les adultes se trouve à être gonflé de janvier 1956 à décembre 1969. Par ailleurs, vu le nombre d'observations plus réduit dans le cas des personnes âgées, il n'est pas surprenant que le schéma d'autocorrélation adopté pour cette équation soit moins robuste que celui utilisé dans le cas des adultes, surtout si on sait que la méthode de Box-Jenkins n'est efficace que dans le cas des grands échantillons. En deuxième lieu, il est nécessaire de mettre en relief certaines difficultés d'estimation que nous avons rencontrées et qui concernent exclusivement l'équation des personnes âgées.

Le problème le plus fréquemment rencontré est celui de l'impossibilité de l'inversion de la matrice de covariance du gradient des paramètres. Lorsque ce problème se pose, nous obtenons seulement les valeurs des paramètres impliqués dans le processus de maximisation et, par conséquent, la valeur finale de la fonction de vraisemblance. Ce problème s'est posé à chaque fois que nous avons tenté d'estimer deux $\lambda_{(x)}$. En d'autres termes, toute tentative de regrouper les variables de prix, de revenu et de service dans un seul groupe affecté de $\lambda_{(x_1)}$ et les variables d'activité dans un second groupe affecté de $\lambda_{(x_2)}$ et de laisser estimer ces deux paramètres s'est soldée par ce problème d'impossibilité d'inversion, ce qui nous a contraint de regrouper les 4 catégories de variables dans un seul groupe affecté de $\lambda_{(x)}$. Ce problème est survenu également dans tous les modèles où nous avons tenté de combiner deux variables dans le traitement de l'hétéroscédasticité. Les causes exactes de ce problème demeurent, du moins jusqu'à présent, indéterminées. Un autre type de problème rencontré est celui où certains paramètres, en particulier $\lambda_{(x)}$ et $\lambda_{(z)}$, atteignent une des bornes de la région considérée comme admissible par le logiciel: $|\lambda| < 20$. Dès lors, la propriété que se doit de posséder l'algorithme, à savoir la convergence numérique, n'est pas respectée (ou du moins pas dans la région permise).

En troisième lieu, il est raisonnable de penser que, dans un modèle en séries chronologiques, ce sont surtout les variables d'activité qui sont susceptibles d'influencer le volume du transport en commun

et, par conséquent, d'introduire de l'hétéroscédasticité; c'est le cas notamment des variables: déplacements pour motif magasinage (RRT) et niveau de l'emploi (WPR). Cette anticipation a été d'ailleurs confirmée par les résultats obtenus dans le cas des adultes. Par contre, il semble que la variable nombre de voitures (CAR) soit la plus pertinente dans le traitement de l'hétéroscédasticité dans le cas des personnes âgées.

En dernier lieu, on peut souligner que la détermination de la forme fonctionnelle peut avoir un impact considérable sur les estimations des paramètres des variables fixes et aléatoires des modèles. Il s'ensuit qu'une mauvaise spécification de la forme fonctionnelle et de l'erreur résiduelle peut conduire à l'introduction ou au rejet de certaines variables explicatives et, par conséquent, à des conclusions erronées. En pratique, une comparaison des modèles sur la base du t-student ne peut s'avérer rigoureuse puisqu'une modification des hypothèses sur la partie aléatoire du modèle entraîne une modification de la distribution des erreurs, donc de la variance et, par conséquent, du t-student.

A. Equation des adultes

A.1 Comportement de la fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance augmente au fur et à mesure que les contraintes sont libérées. Ainsi, la fonction passe de 780,98

dans la séquence (1) à 894,22 dans la séquence (21) sauf dans les séquences (10) et (11), (13) et (14) où l'on note une diminution relativement faible. Tous les paramètres associés aux transformations de Box-Cox, à l'autocorrélation et à l'hétéroscédasticité ont des valeurs raisonnables sauf dans les cas (10) et (11) où $\lambda_{(z_1)}$ a une valeur de 5.1, ce qui est difficile à interpréter. Toutefois, δ_1 est assez faible dans les deux cas, ce qui peut atténuer l'effet d'un tel exposant.

A.2 Correction pour l'autocorrélation et pour l'hétéroscédasticité

Si on sait que la statistique $\Lambda = -2(\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1)$ est distribuée comme une χ^2_q (où \mathcal{L}_0 est le logarithme de la fonction de vraisemblance contrainte, \mathcal{L}_1 le logarithme de la fonction de vraisemblance non contrainte et q le nombre de contraintes) et que les valeurs de la χ^2 tabulée sont 3,84, 4,99, 7,82 et 9,49 respectivement pour 1, 2, 3 et 4 degrés de liberté à un niveau de confiance de 95%, un examen du tableau 2 suggère les conclusions suivantes: une comparaison des séquences (1) et (2), (1) et (3), (1) et (4) révèle qu'il est intéressant d'introduire les transformations de Box-Cox puisque l'augmentation de la fonction de vraisemblance est très significative. La comparaison du modèle (1) et du modèle (5) suggère qu'il est important de tenir compte de l'autocorrélation puisque la fonction passe de 780,88 dans (1) à 867,81 dans (5), ce qui est largement significatif même à un niveau de 99%. Une comparaison de (6) et (10),

Tableau 1

Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1979)

Contraintes	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)		(6)		(7)		(8)		(9)	
	$\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(X_1) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(X_1) = 1$ Auto	t-student (n-E)	$\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ Auto	t-student (n-E)
AZ1	3.34	0.008	1.76	0.008	1.78	0.007	1.71	0.007	0.57	0.003	0.72	0.004	0.68	0.003	0.47	0.003	0.38	0.002
AZ2	4.67	0.02	2.17	0.028	2.46	0.024	2.25	0.03	8.78	0.03	3.77	0.03	3.91	0.03	4.26	0.03	4.29	0.03
EFC	-3.50	-0.09	-2.04	-0.009	-2.49	-0.009	-2.05	-0.006	-2.13	-0.006	-1.85	-0.006	-1.86	-0.007	-2.25	-0.007	-2.32	-0.008
SN1	3.99	0.002	2.12	0.002	2.36	0.001	2.29	0.002	5.49	0.002	3.41	0.002	3.47	0.001	4.13	0.002	4.02	0.002
SCD	-3.10	-0.02	-2.09	-0.022	-2.54	-0.022	-2.26	-0.024	-2.86	-0.01	-1.80	-0.01	-1.86	-0.01	-1.94	-0.01	-2.08	-0.01
CAR(1)	-1.33	-0.22	-1.09	-0.24	-1.77	-0.18	-0.80	-0.099	0.68	0.15	-0.43	-0.09	-0.01	-0.002	0.05	0.01	0.38	0.11
RAF(1)	-8.70	-0.36	-2.37	-0.36	-1.25	-0.23	-1.28	-0.27	-8.53	-0.30	-3.79	-0.30	-1.32	-0.29	-4.43	-0.31	-1.41	-0.30
REF(1)	3.51	0.07	1.83	0.072	2.26	0.047	2.11	0.063	3.72	0.07	2.58	0.07	2.10	0.05	3.12	0.07	2.42	0.07
RGS(1)	4.56	0.19	2.31	0.19	1.02	0.052	0.85	0.04	-0.42	-0.01	-0.12	-0.005	-0.09	-0.004	-0.31	-0.01	-0.35	-0.01
CPI(1)	1.15	0.06	1.01	0.72	-0.48	-0.046	-0.98	-0.09	1.19	0.16	0.80	0.06	0.48	0.04	1.02	0.10	0.98	0.14
RWK(1)	0.04	0.006	-0.034	-0.005	-2.34	-0.59	-2.29	-0.76	-1.59	-0.27	-1.21	-0.20	-1.20	-0.20	-0.74	-0.12	-0.74	-0.13
WTT(1)	-6.24	-0.56	-2.40	-0.57	-1.35	-0.42	-1.47	-0.48	-3.72	-0.59	-3.44	-0.51	-1.24	-0.54	-0.35	-0.46	-1.19	-0.46
BITT(1)	-4.89	-0.74	-2.31	-0.75	-1.94	-0.71	-1.84	-0.57	-0.65	-0.11	-0.17	-0.03	0.35	0.07	-0.22	-0.04	-0.06	-0.01
TMP	-0.44	-0.002	-0.58	-0.002	-1.15	-0.005	-1.46	-0.007	-2.08	-0.008	-2.06	-0.009	-2.11	-0.009	-1.93	-0.008	-1.97	-0.008
RNF	1.23	0.003	0.96	0.003	0.99	0.003	0.56	0.001	-0.42	-0.0008	-0.31	-0.0006	0.009	0.0004	-0.78	-0.0006	-0.18	-0.0004
SNF	-0.72	-0.001	-0.56	-0.001	-0.56	-0.001	-0.79	0.001	-1.11	-0.001	-1.33	-0.001	-1.52	-0.002	-1.21	0.001	-1.27	0.001
CSF	2.70	0.006	1.85	0.006	2.24	0.006	2.03	0.006	3.77	0.008	3.03	0.008	3.20	0.008	3.50	0.009	3.50	0.009
WPR(2)	5.57	0.12	2.42	0.125	2.70	0.12	2.39	0.17	3.73	0.08	2.98	0.07	3.03	0.06	2.79	0.05	2.79	0.05
RRT(2)	4.69	0.03	2.14	0.032	2.49	0.028	0.93	0.01	5.22	0.03	3.48	0.03	3.80	0.03	1.44	0.05	1.39	0.05
SPA	-1.59	-0.01	-1.26	-0.011	-0.79	-0.006	-1.34	-0.01	0.01	0.0001	0.33	0.002	0.52	0.003	0.97	0.005	0.99	0.006
EXA	0.84	0.001	0.60	0.001	0.50	0.001	0.60	0.001	1.41	0.002	1.25	0.001	1.14	0.001	1.34	0.002	1.29	0.002
MPT(2)	5.2	0.88	2.26	0.90	2.84	1.60	2.30	1.82	4.29	2.36	2.53	1.52	2.17	1.18	2.22	1.85	2.14	1.95
STK	-23.27	-0.003	-1.50	-0.004	-4.19	-0.004	-3.05	-0.004	-0.33	-0.003	-13.15	-0.004	-14.03	-0.004	-16.04	-0.004	-16.27	-0.004
FIR	0.36	-0.0005	0.035	-0.0005	0.016	0.00001	0.008	0.00003	-0.05	-0.000008	-0.09	-0.00001	-0.14	-0.00002	-0.07	-0.00001	-0.08	-0.00001
WRK(2)	13.22	0.81	2.50	0.81	2.99	0.85	2.31	0.84	17.07	0.79	4.34	0.79	4.70	0.79	3.52	0.77	3.47	0.77
SAT	6.41	0.12	2.39	0.12	2.89	0.12	2.56	0.13	8.65	0.11	4.24	0.11	4.56	0.12	4.71	0.11	4.78	0.11
SUN	4.18	0.08	2.11	0.088	2.39	0.76	2.15	0.07	4.37	0.06	3.62	0.07	4.00	0.08	3.94	0.07	4.04	0.07
HOL	4.12	0.01	2.25	0.011	2.08	0.007	1.96	0.006	3.89	0.008	3.39	0.009	3.67	0.009	3.52	0.009	3.56	0.009
AUG	-3.65	-0.005	-2.03	-0.005	-2.11	-0.004	-2.01	-0.005	-4.06	-0.004	-3.04	-0.004	-2.92	-0.004	-2.99	-0.004	-2.93	-0.004
SEP	-3.99	-0.003	-2.19	-0.002	-2.03	-0.002	-1.96	-0.002	-4.61	-0.003	-3.05	-0.003	-3.22	-0.003	-3.30	-0.003	-3.32	-0.003

Tableau 2

Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1979)

Contraintes	(1) $\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2)$ =1	(2) $\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ $\lambda(Y)$	(3) $\lambda(X_2) = 1$ $\lambda(Y), \lambda(X_1)$	(4) $\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$	(5) $\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2)$ =1 .Auto	(6) $\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$ $\lambda(Y)$.Auto	(7) $\lambda(X_2) = 1$ $\lambda(Y), \lambda(X_1)$.Auto	(8) $\lambda(X_1) = 1$ $\lambda(Y), \lambda(X_2)$.Auto	(9) $\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$.Auto	
Paramètres	Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student	
<u>Forme fonctionnelle</u>										
$\lambda(Y)$	-	0.41 (0.88) (-1.25)*	0.36 (0.92) (-1.60)*	0.44 (0.96) (-1.18)*	-	0.51 (1.88) (-1.77)*	0.48 (1.91) (-2.0)*	0.45 (1.99) (-2.3)*	0.45 (2.02) (-2.38)*	
$\lambda(X_1)$	-	-	-1.05 (-2.30) (-4.48)*	-0.52 (-1.31) (-3.8)*	-	-	0.11 (0.23) (-1.76)*	-	0.66 (1.35) (-0.67)*	
$\lambda(X_2)$	-	-	-	2.31 (5.9) (3.4)*	-	-	-	-0.004 (-0.01) (-3.1)*	0.05 (0.16) (-2.90)*	
<u>Autocorrélation</u>										
ρ_1	-	-	-	-	0.46 (8.2)	0.52 (9.4)	0.56 (9.9)	0.53 (9.9)	0.54 (10)	
ρ_4	-	-	-	-	0.21 (3.6)	0.20 (3.4)	0.21 (3.36)	0.24 (3.9)	0.24 (3.9)	
$\rho_{1,2}$	-	-	-	-	0.29 (5.7)	0.20 (3.6)	0.14 (2.48)	0.18 (3.68)	0.18 (3.7)	
<u>Hetero (1) : δ_1</u> $\lambda(Z_1)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
<u>Hetero (2) : δ_2</u> $\lambda(Z_2)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
Pseudo (E) - R ²	-	0.92	0.93	0.93	0.95	0.95	0.95	0.96	0.96	
Pseudo (L) - R ²	-	0.92	0.93	0.93	0.95	0.95	0.96	0.96	0.96	
Fonction de vraisemblance	780.98	783.33	804.83	811.98	867.81	870.99	871.87	875.43	875.52	

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student et le symbole * se réfère à l'hypothèse que le paramètre est égal à 1 au lieu de 0.

Tableau 1 (suite)
Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1975)

Contraintes	(10) $\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$		(11) $\lambda(X_2) = 1$		(12) $\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2)$		(13) $\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$		(14) $\lambda(X_2) = 1$		(15) $\lambda(Y) = \lambda(X_1) = \lambda(X_2)$		(16) $\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$	
	$\lambda(Y)$.Hetero(MPT) t-student (n-E)	.Auto	.Hetero(MPT) t-student (n-E)	.Auto	.Hetero(MPT) t-student (n-E)	.Auto	.Hetero(MPR) t-student (n-E)	.Auto	.Hetero(WPR) t-student (n-E)	.Auto	.Hetero(WPR) t-student (n-E)	.Auto	.Hetero(RRT) t-student (n-E)
AZ1	0.64	0.003	0.54	0.002	0.23	0.001	0.95	0.005	0.95	0.005	0.82	0.004	0.30	0.001
AZ2	3.42	0.03	3.54	0.03	3.90	0.02	3.24	0.03	3.24	0.03	3.44	0.03	4.29	0.03
EFC	-1.58	-0.006	-1.57	-0.007	-2.31	-0.009	-2.66	-0.009	-2.68	-0.009	-3.00	-0.01	-2.22	-0.008
SN1	2.99	0.002	3.04	0.001	3.68	0.002	2.92	0.002	2.86	0.002	3.12	0.002	4.15	0.002
SCD	-1.59	-0.01	-1.62	-0.01	-1.77	-0.02	-1.72	-0.01	-1.75	-0.01	-1.64	-0.01	-1.75	-0.01
CAR (1)	-0.27	-0.06	0.18	0.04	0.62	0.19	-0.42	-0.08	-0.35	-0.07	-0.52	-0.13	0.98	0.26
RAF (1)	-3.43	-0.31	-1.19	-0.29	-1.57	-0.32	-3.03	-0.32	-1.34	-0.32	-1.29	-0.34	-4.39	-0.30
REF (1)	2.35	0.06	1.92	0.05	2.61	0.08	2.42	0.08	2.07	0.08	2.09	-0.08	3.07	0.07
RGS (1)	-0.07	-0.003	-0.11	-0.004	-0.86	-0.03	-0.44	-0.02	-0.44	-0.02	-0.44	-0.02	-0.14	-0.006
CPI (1)	0.75	0.06	0.44	0.04	2.18	0.56	1.04	0.07	0.98	0.07	1.28	0.10	1.88	0.37
RWV (1)	-0.68	-0.11	-0.63	-0.09	0.40	0.07	-1.34	-0.20	-1.33	-0.21	-0.29	-0.04	0.72	0.13
WTT (1)	-3.40	-0.52	-1.19	-0.54	-1.43	-0.39	-2.95	-0.40	-1.29	-0.40	-1.15	-0.41	-2.92	-0.33
BTT (1)	-0.06	-0.01	0.49	0.09	-0.16	0.32	-0.36	0.07	-0.33	-0.06	-0.32	-0.06	-0.41	-0.07
TMP	-2.06	-0.008	-2.17	-0.009	-1.66	-0.006	-2.00	-0.008	-2.00	-0.008	-1.84	-0.007	-1.65	-0.006
RNF	-0.37	-0.007	0.06	0.0001	-0.26	-0.0005	-0.35	-0.007	-0.32	-0.0006	-0.47	-0.001	-0.24	-0.0005
SNF	-1.33	-0.001	-1.51	-0.002	-0.91	-0.001	-1.18	-0.001	-1.17	-0.001	-1.00	-0.001	-0.74	-0.0009
CSF	2.82	0.008	3.02	0.008	3.51	0.01	2.67	0.008	2.66	0.008	2.88	0.009	3.63	0.009
WPR (2)	3.12	0.07	3.27	0.07	3.25	0.05	1.22	0.08	1.23	0.08	1.06	0.07	3.09	0.07
RRT (2)	3.26	0.04	3.66	0.04	1.57	0.07	3.05	0.03	3.05	0.03	1.58	0.05	-0.72	0.06
SPA	0.07	0.0004	0.21	0.001	0.77	0.004	1.31	0.01	1.31	0.01	1.58	0.01	0.73	0.004
EXA	1.58	0.002	1.46	0.002	1.99	0.002	1.87	0.003	1.86	0.003	1.90	0.003	1.30	0.001
MPT (2)	2.30	1.44	1.72	0.98	-0.69	2.28	2.93	1.59	2.88	1.58	2.55	1.51	2.76	2.20
STK	-11.69	-0.004	-12.74	-0.004	-15.51	-0.004	-10.76	-0.004	-10.78	-0.004	-11.97	-0.004	-14.59	-0.004
FIR	-0.04	-0.000007	-0.09	-0.0001	0.05	0.000009	-0.01	-0.000003	-0.02	-0.000004	0.01	-0.000002	-0.09	-0.00001
WRK(2)	4.01	0.77	4.42	0.77	3.54	0.72	3.68	0.78	3.68	0.78	3.58	0.76	5.09	0.78
SAT	3.88	0.11	4.20	0.11	4.45	0.09	3.66	0.10	3.63	0.10	3.67	0.10	4.64	0.10
SUN	3.52	0.07	3.97	0.08	3.89	0.06	3.20	0.07	3.21	0.07	3.34	0.07	3.88	0.06
HOL	3.41	0.01	3.80	0.01	3.75	0.009	3.07	0.01	3.01	0.01	3.16	0.01	3.28	0.008
AUG	-3.20	-0.005	-3.13	-0.004	-3.65	-0.005	-2.94	-0.005	-2.95	-0.005	-2.94	-0.004	-2.98	-0.004
SEP	-3.10	-0.003	-3.30	-0.003	-3.62	-0.003	-2.93	-0.003	-2.93	-0.003	-3.12	-0.003	-3.47	-0.003

Tableau 2 (suite)
 Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1979)

Contraintes	(10)		(11)		(12)		(13)		(14)		(15)		(16)	
	$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$	$\lambda(Y)$	$\lambda(X_2) = 1$	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$	$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$	$\lambda(X_1), \lambda(X_2)$	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$	$\lambda(Y), \lambda(X_1)$	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$	$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$	$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = 1$	$\lambda(Y)$
Paramètres	.Hetero(NPT) Coeff. t-student		.Hetero(NPT) Coeff. t-student		.Hetero(NPT) Coeff. t-student		.Hetero(NPT) Coeff. t-student		.Hetero(NPT) Coeff. t-student		.Hetero(NPT) Coeff. t-student		.Hetero(NPT) Coeff. t-student	
Forme fonctionnelle														
$\lambda(Y)$	0.51	(1.70) (-1.63)*	0.46	(1.71) (-1.98)*	0.42	(1.75) (-2.4)*	0.58	(1.79) (-1.25)*	0.58	(1.78) (-1.26)	0.50	(1.62) (-1.61)	0.55	(2.3) (-1.95)
$\lambda(X_1)$	-	-	-0.06	(-0.13) (-2.03)*	0.68	(1.68) (-0.77)*	-	-	0.91	(2.0) (-0.18)	1.1	(2.37) (0.37)	-	-
$\lambda(X_2)$	-	-	-	-	-0.38	(-1.24) (-4.4)*	-	-	-	-	0.21	(0.77) (-2.84)	-	-
Autocorrélation														
ρ_1	0.54	(9.7)	0.57	(10)	0.50	(9.2)	0.50	(9.2)	0.50	(9.2)	0.53	(10)	0.55	(10)
ρ_4	0.22	(3.6)	0.22	(3.6)	0.29	(4.8)	0.27	(4.2)	0.27	(4.2)	0.28	(4.3)	0.24	(3.8)
ρ_{12}	0.18	(3.3)	0.11	(2.1)	0.19	(3.4)	0.16	(3.1)	0.16	(3.1)	0.12	(2.3)	0.20	(3.6)
Hetero (1) : δ_1	0.05	(0.14)	0.06	(0.16)	2.5	(1.0)	0.95	(2.8)	0.95	(2.8)	0.96	(3.2)	0.03	(1.34)
$\lambda(Z_1)$	5.1	(0.46) (0.37)*	5.1	(0.54) (0.43)*	0.18	(0.10) (-0.46)*	0.48	(0.29) (-0.31)*	0.48	(0.29) (-0.31)	1.7	(1.1) (0.50)	0.75	(4.0) (-1.43)
Hetero (2) : δ_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\lambda(Z_2)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Pseudo (E) - R ²	0.95		0.95		0.95		0.96		0.96		0.96		0.96	
Pseudo (L) - R ²	0.96		0.96		0.96		0.96		0.96		0.96		0.96	
Fonction de vraisemblance	872.43		873.82		885.22		882.35		882.36		885.44		887.29	

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student et le symbole * se réfère à l'hypothèse que le paramètre est égal à 1 au lieu de 0

Tableau 1 (suite)
Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1975)

Contraintes	(17)		(18)		(19)		(20)		(21)	
	$\lambda(x_2)=1$ $\lambda(y), \lambda(x_1)$.Auto .Hetero(RRT)	t-student (n-ε)	$\lambda(y), \lambda(x_1), \lambda(x_2)$.Auto .Hetero(RRT)	t-student (n-ε)	$\lambda(x_1)=\lambda(x_2)=1$ $\lambda(y)$.Auto .Hetero(WPR, RRT)	t-student (n-ε)	$\lambda(x_2)=1$ $\lambda(y), \lambda(x_1)$.Auto .Hetero(WPR, RRT)	t-student (n-ε)	$\lambda(y), \lambda(x_1), \lambda(x_2)$.Auto .Hetero(WPR, RRT)	t-student (n-ε)
AZ1	0.29	0.001	0.34	0.001	0.63	0.003	0.69	0.003	0.75	0.003
AZ2	4.29	0.03	4.15	0.03	3.68	0.033	3.59	0.033	3.51	0.033
EFC	-2.23	-0.008	-2.13	-0.008	-2.46	-0.007	-2.28	-0.007	-2.22	-0.007
SN1	3.98	0.002	3.82	0.002	3.43	0.002	3.20	0.002	3.16	0.002
SCD	-1.75	-0.1	-1.80	-0.01	-2.17	-0.018	-2.02	-0.018	-2.13	-0.018
CAR(1)	0.73	0.26	0.73	0.24	0.54	0.11	0.30	0.076	0.30	0.073
RAF(1)	-1.43	-0.30	-1.48	-0.31	-3.60	-0.29	-1.17	-0.29	-1.24	-0.29
REF(1)	2.38	0.07	2.41	0.07	2.74	0.071	1.98	0.074	2.06	0.077
RGS(1)	-0.14	-0.006	-0.17	-0.007	-0.38	-0.016	-0.38	-0.016	-0.49	-0.019
CPI(1)	1.87	0.39	2.32	0.42	1.58	0.21	1.54	0.16	1.61	0.19
RNW(1)	0.76	0.13	0.80	0.14	-0.42	-0.07	-0.44	-0.071	-0.66	-0.11
WTT(1)	-1.19	-0.34	-1.23	-0.34	-2.17	-0.24	-0.98	-0.24	-1.04	-0.22
BTT(1)	-0.33	-0.06	-0.38	-0.07	-1.09	-0.24	-1.33	-0.24	-1.39	-0.24
TMP	-1.65	-0.006	-1.57	-0.006	-1.64	-0.007	-1.59	-0.006	-1.75	-0.007
RNF	-0.20	-0.0004	-0.34	-0.0007	-0.64	-0.001	-0.80	-0.001	-0.92	-0.001
SNF	-0.76	-0.0009	-0.77	-0.0009	-0.44	-0.0006	-0.35	-0.0005	-0.37	-0.0005
CSF	3.63	0.009	3.47	0.009	3.23	0.009	3.13	0.009	3.06	0.009
WPR(2)	3.09	0.07	3.04	0.08	-0.74	0.17	-0.76	0.18	-0.87	0.19
RRT(2)	-0.70	0.06	-0.81	0.06	-0.81	0.055	-0.76	0.056	-0.67	0.05
SPA	0.73	0.004	0.43	0.002	0.56	0.004	0.55	0.004	0.49	0.004
EXA	1.28	0.001	1.34	0.001	1.80	0.002	1.85	0.002	1.95	0.002
MPT(2)	2.61	2.16	1.96	2.20	2.90	2.0	2.91	2.15	2.03	2.26
STK	-14.64	-0.004	-13.96	-0.004	-11.62	-0.004	-11.23	-0.003	-10.85	-0.003
FIR	-0.10	-0.00001	-0.062	-0.00007	-0.016	-0.00002	-0.016	-0.00002	-0.061	-0.00008
WRK(2)	5.09	0.78	2.44	0.78	4.21	0.79	4.05	0.78	2.09	0.78
SAT	4.65	0.10	4.38	0.10	3.85	0.10	3.71	0.101	3.62	0.09
SUN	3.91	0.06	3.80	0.06	2.94	0.051	2.82	0.050	2.76	0.04
HOL	3.29	0.008	3.19	0.008	2.81	0.008	2.71	0.008	2.64	0.008
AUG	-2.95	-0.004	-2.98	-0.004	-2.80	-0.003	-2.78	-0.003	-2.80	-0.003
SEP	-5.48	-0.003	-5.41	-0.003	-5.13	-0.003	-5.03	-0.003	-2.97	-0.003

Tableau 2 (suite)

Demande de transport en commun par les adultes à Toronto (janvier 1956 - août 1979)

Contraintes	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)
Paramètres	$\lambda(X_2)=1$ $\lambda(Y), \lambda(X_1)$.Auto .Hetero(RRT) Coeff. t-student	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$.Auto .Hetero(RRT) Coeff. t-student	$\lambda(X_1)=\lambda(X_2)=1$ $\lambda(Y)$.Auto .Hetero(WPR, RRT) Coeff. t-student	$\lambda(X_2)=1$ $\lambda(Y), \lambda(X_1)$.Auto .Hetero(WPR, RRT) Coeff. t-student	$\lambda(Y), \lambda(X_1), \lambda(X_2)$.Auto .Hetero(WPR, RRT) Coeff. t-student
<u>Forme fonctionnelle</u>					
$\lambda(Y)$	0.54 (2.3) (-1.94)*	0.55 (2.2) (-1.8)*	0.63 (2.2) (-1.29)*	0.64 (2.17) (-1.21)*	0.66 (2.1) (-1.0)*
$\lambda(X_1)$	0.90 (1.89) (-0.19)*	1.0 (2.2) (0.8)*	-	1.5 (2.6) (0.91)*	1.5 (2.9) (0.98)*
$\lambda(X_2)$	-	1.5 (3.5) (1.27)*	-	-	1.7 (3.1) (1.35)*
<u>Autocorrélation</u>					
ρ_1	0.55 (10)	0.54 (9.8)	0.49 (9.3)	0.48 (9.1)	0.46 (8.3)
ρ_4	0.24 (3.8)	0.23 (3.8)	0.20 (3.3)	0.20 (3.2)	0.20 (3.3)
ρ_{12}	0.19 (3.6)	0.21 (3.8)	0.28 (4.9)	0.28 (5.1)	0.32 (5.7)
<u>Hetero (1) : δ_1</u>	0.02 (1.41)	0.008 (1.15)	0.30 (1.84)	0.33 (1.87)	0.32 (1.93)
$\lambda(Z_1)$	0.74 (4.2) (-1.43)*	1.3 (3.4) (0.96)*	2.3 (3.2) (1.89)*	2.5 (3.3) (2.0)*	2.5 (4.2) (2.5)*
<u>Hetero (2) : δ_2</u>	-	-	0.06 (1.29)	0.06 (1.21)	0.02 (0.88)
$\lambda(Z_2)$	-	-	0.58 (2.3) (-1.69)*	0.54 (1.92) (-1.60)*	1.1 (2.3) (0.36)*
Pseudo (E) - R^2	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
Pseudo (L) - R^2	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
Fonction de vraisemblance	887.30	888.17	892.35	892.65	894.22

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student et le symbole * se réfère à l'hypothèse que le paramètre est égal à 1 au lieu de 0

(7) et (11) révèle qu'une première correction pour l'hétéroscédasticité basée sur la variable MPT s'avère non significative puisque la fonction de vraisemblance n'a augmenté que de 1,44 dans le premier cas et de 1,95 dans le second cas, ce qui est faible comparé à χ^2_2 . Par contre, si on compare (9) et (12), la fonction passe de 875,52 à 885,22, ce qui est très significatif, ce qui est probablement dû au relâchement de la contrainte $\lambda_{(x_2)} = 1$. Une autre comparaison des séquences (6) et (13), (7) et (14), (9) et (15), où la correction pour l'hétéroscédasticité¹ est basée sur la variable WPR, suggère que cette variable est pertinente pour le traitement de l'hétéroscédasticité. Une autre comparaison des modèles (6) et (16), (7) et (17), (9) et (18) suggère que la variable RRT est encore plus pertinente dans le traitement de l'hétéroscédasticité puisque la fonction de vraisemblance a enregistré une augmentation assez considérable. Finalement, si on compare (6) et (19), (7) et (20), (9) et (21), où la correction pour l'hétéroscédasticité est basée sur la combinaison de deux variables d'activité (WPR, RRT), on s'aperçoit qu'une correction double s'avère pertinente.

A.3 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les paramètres de la forme fonctionnelle

Il est intéressant d'examiner les paramètres de la forme fonctionnelle avant et après correction pour l'hétéroscédasticité. En

¹ Une correction pour l'hétéroscédasticité basée sur une seule variable permet de relâcher 2 contraintes: δ_1 et $\lambda_{(z_1)}$. Une correction basée sur deux variables équivaut à relâcher 4 contraintes: δ_1 , δ_2 ; $\lambda_{(z_1)}$ et $\lambda_{(z_2)}$.

effet, si on compare les modèles (9), (12), (15), (18) et (21), on s'aperçoit que les trois paramètres $\lambda_{(y)}$, $\lambda_{(x_1)}$ et $\lambda_{(x_2)}$ subissent un impact considérable entre les modèles (9), (12) et (15) dépendamment de la variable considérée dans le traitement de l'hétéroscédasticité. Dans ces trois modèles, il n'y a aucune tendance générale vers une forme fonctionnelle précise. Par contre, dans les séquences (18) et (21), on peut dire qu'il y a une tendance à une forme fonctionnelle linéaire.

A.4 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les élasticités de la demande

L'algorithme d'estimation utilisé permet le calcul de deux mesures d'élasticité: la première mesure $(\eta - \epsilon)$ ¹ dénote l'élasticité en terme de l'espérance mathématique de la variable dépendante, la seconde mesure $(\eta - s)$ est calculée selon la formule conventionnelle $\partial Y / \partial X \cdot Y / X$. Les deux mesures sont calculées à la moyenne échantillonale des variables conservées. Dans le tableau 2 et le tableau 4, seule la mesure $(\eta - \epsilon)$ a été retenue parce que la différence entre les deux mesures, d'après les résultats obtenus, n'excède pas ,005.

Le tableau 3 présente la variation des élasticités des variables de prix, de revenu, de service et d'activité entre le modèle (1) et le modèle (21). D'après un examen de ce tableau, on peut dire que

¹ Voir l'annexe.

Tableau 3
Variation des élasticités
entre le modèle (1) et le modèle (21)

Variabiles	Modèle (1)	Modèle (21)
CAR	-0,22 (-1,33)	0,07 (0,30)
RAF	-0,36 (-8,7)	-0,29 (-1,24)
REF	0,07 (3,5)	0,07 (2,06)
RGS	0,19 (4,5)	-0,01 (-0,49)
CPI	0,06 (1,15)	0,19 (1,61)
RWW	0,006 (0,04)	-0,11 (-0,66)
WTT	-0,56 (-6,2)	-0,22 (-1,04)
BTT	-0,74 (-4,8)	-0,24 (-1,39)
WPR	0,12 (5,5)	0,19 (-0,87)
RRT	0,03 (4,6)	0,05 (0,67)
SPA	-0,01 (1,59)	0,004 (0,49)
STK	-0,003 (-23,0)	-0,003 (-10,0)
FIR	0,00005 (0,36)	-0,00008 (-0,06)
WRK	0,81 (13,0)	0,78 (2,0)

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student.

la correction pour l'hétéroscédasticité a un impact considérable sur certaines variables et un impact minime sur d'autres, bien que certaines des variables du modèle (21) ne sont pas significatives et donc on ne peut se fier aux élasticités qui leur sont associées. Ainsi, les variables CAR, RGS, CPI, RWW, WTT et BTT ont subi un grand changement au niveau des élasticités alors que les variables RAF, REF, WPR, RRT, STK, FIR, WRK et SPA ont enregistré une variation négligeable. Comme remarque générale, on peut noter plus particulièrement que ce sont les variables de service qui ont été les plus sensibles aux différentes corrections pour l'hétéroscédasticité. Ainsi, les élasticités associées aux variables temps d'attente (WTT) et temps de trajet (BTT) ont passé respectivement de -0,56 et -0,74 dans le modèle (1) à -0,22 et -0,24 dans le modèle (21). Cependant, les deux modèles présentent une contradiction à savoir que dans le modèle (1) les adultes sont plus sensibles au temps d'attente et au temps de trajet qu'au prix du transport en commun alors que les résultats du modèle (21) suggèrent le contraire. A ce sujet, il est clair que les résultats du modèle (1) sont plus raisonnables que ceux du modèle (21). Par ailleurs, on peut constater, sur la base du concept d'élasticité, que dans chacun des modèles présentés dans le tableau 2, la variable population métropolitaine de Toronto (MPT) est celle qui a le plus d'influence sur la demande de transport suivie de la variable jours de travail par mois (WRK). En plus de ces deux variables, on peut attribuer une influence non négligeable à la variable temps d'attente ainsi qu'à la variable

tarif réel du transport en commun (RAF). D'autres variables contribuent fortement à l'explication de la demande de transport selon la spécification adoptée. C'est le cas notamment de la variable RRT dans les modèles (1), (2), (3), (4), (12), (19), (20) et (21) dont l'élasticité varie entre -0,24 dans les modèles (19), (20), (21) et -0,75 dans le modèle (2). La variable revenu ne contribue à l'explication de la demande de transport que dans deux modèles en particulier, à savoir les modèles (3) et (4) et dont le signe négatif suggère que le transport en commun est un bien inférieur. Finalement, la variable indice des prix à la consommation (CPI) n'est pas sans contribuer à l'explication de la demande, en particulier dans les modèles (2) et (12).

Comme conclusion sur l'impact de l'hétéroscédasticité sur les élasticités de la demande dans le cas des adultes, on peut dire que la forme fonctionnelle ainsi que la spécification de l'erreur résiduelle modifient grandement l'ordre de grandeur des élasticités (ou du moins certaines d'entre elles) entre les différents modèles. A ce sujet, une modification des élasticités dans les variables de prix par exemple peut être très importante au niveau de la prise des décisions en matière de politique économique, etc.

A.5 Signe et signification des variables

Une comparaison des modèles (1) et (5) nous montre que les statistiques-t des différentes variables ont été modifiées par l'introduction

de l'autocorrélation. C'est ainsi que les variables AZ_1 , CAR, RGS et BTT qui sont significatives dans (1) à un niveau égal ou supérieur à 90%, deviennent non significatives dans le modèle (5). Inversement, les variables RWW, TMP, RNF, SPA, EXA qui sont non significatives dans (1) deviennent significatives dans (5). Ce problème peut être expliqué par le fait que dans un modèle linéaire (modèle (1) dans notre cas) les tests-t sont généralement biaisés vers le haut si nous ne corrigeons pas pour l'autocorrélation des erreurs. C'est ainsi que le modèle (1) compte 24 variables significatives alors que le modèle (5) n'en compte que 20. Une comparaison des modèles (6), (10), (13), (16) et (19) suggère que les statistiques-t associées à certaines variables sont relativement stables d'un modèle à un autre. Il s'agit surtout des variables prix réel du transport en commun pour les adultes (RAF) et pour les personnes âgées (REF), le temps d'attente (WTT), exposition canadienne nationale (EXA), le nombre de grèves du transport en commun (STK) et le nombre de jours de travail par mois (WRK). Pour d'autres variables, notamment le nombre de voitures (CAR), le prix réel de l'essence (RGS), le temps de trajet en autobus (BTT) et le feu dans le métro (FIR), on peut dire que les tests-t varient avec $\lambda_{(y)}$, $\lambda_{(x_k)}$, δ_m et $\lambda_{(z_m)}$. Toutes ces variables ont le bon signe mais aucune n'est significative. La variable indice des prix à la consommation (CPI) dont le test-t est faible et stable dans les modèles (6) et (10) devient significative dans les modèles (16) et (19). De même, la variable revenu moyen hebdomadaire (RWW)

est significative dans (6) et (13) et non significative dans (10), (16) et (19). Une autre comparaison des modèles (3), (7), (11), (14), (17) et (20) nous montre que les différentes spécifications des erreurs résiduelles ont un impact important sur le niveau de signification de la plupart des variables ainsi que sur le signe de leur coefficient. C'est ainsi que les variables RAF, CPI, RWW, WTT, BTT, RRT, SPA et EXA ont subi des modifications considérables au niveau des tests-t lorsque la procédure Box-Cox est généralisée. La ou les variable(s) considérée(s) pour le traitement de l'hétéroscédasticité ont également un certain impact sur les statistiques-t des variables en question. Le cas de la variable CPI est intéressant à ce sujet puisque le test-t, associé à cette variable, passe de -0,48 dans (3) à 0,48 dans (7) où on a corrigé pour l'autocorrélation; à 0,44 dans (11) à 0,98 dans (14), à 1,87 dans (17) et finalement à 1,54 dans (20). La variable en question devient significative à un niveau de 95% dans le modèle (17) où le traitement de l'hétéroscédasticité est basé sur RRT, reste significative à 90% dans le modèle (20) où on a combiné les deux variables WPR et RRT pour correction de l'hétéroscédasticité des erreurs. Un raisonnement similaire peut être fait à propos des variables CAR, RGS, RAF, RWW, WTT, BTT, SPA et EXA. D'autres variables par contre ont des tests-t relativement stables d'un modèle à l'autre. Il s'agit en l'occurrence des variables REF, STK, FIR et WRK.

Toutefois, une attention particulière doit être accordée aux variables qui ont été choisies pour la correction de l'hétéroscédasticité. En particulier, la variable présence au travail (WPR), qui est significative à un niveau de 99% entre les modèles (1) à (12), (16) à (18), devient non significative dans les modèles où elle a servi pour traitement de l'hétéroscédasticité et son coefficient a même changé de signe dans les modèles (19) à (21). De même, la variable ventes au détail (RRT), qui est significative à un niveau au moins égal à 90%, devient non significative dans les modèles (16) à (21) en plus du changement de signe de son coefficient. Cette constatation¹ nous suggère la conclusion suivante: une variable doublement affectée (d'abord par $\lambda_{(x)}$, ensuite par $\lambda_{(z)}$ subit une baisse considérable de son t-student. Le test-t de la variable MPT a passé de 2,3 dans (10) à 1,7 dans (1) et à -0,69 dans (12). On en conclut donc que la généralisation des transformations de Box-Cox a des effets considérables sur la signification des variables ainsi que sur leur signe.

En ce qui concerne les signes des coefficients, on peut dire, en se basant sur les statistiques-t, que parmi tous les modèles du tableau 2, seul le modèle (1) présente un maximum de 22 coefficients ayant le bon signe et significatifs à un niveau égal (ou souvent) supérieur à 90%. Dans ce modèle, 2 variables ont le signe anticipé

¹ Même si les 3 variables ont changé de signe dans certains modèles, leur élasticité est demeurée positive.

mais ne sont pas significatives; il s'agit de l'indice des prix à la consommation (CPI) et du revenu hebdomadaire moyen (RWW). Par contre, les variables présence à l'université (SPA) et le feu dans le métro (FIR) ont le mauvais signe avec des tests-t respectivement de -1,59 et 0,36.

Une considération de la totalité de nos modèles suggère que les variables de confort, à savoir l'écart de température (TMP) et la neige (SNF) diminuent la part modale du transport en commun. La variable pluie (RNF) présente un effet positif sur la demande dans les modèles (1) à (5). La correction de l'autocorrélation à partir du modèle (6) a fait que la pluie va dans le même sens que les deux variables précédentes. Au contraire, la variable neige accumulée (CSF) attire les clients potentiels de ce mode. Pour les variables d'agrégation, les variantes de la forme fonctionnelle et de la spécification de l'erreur n'entraînent pas de modification puisque le signe affectant les paramètres estimés est maintenu entre chacun des modèles. Les variables nombre de samedis par mois (SAT), nombre de dimanches par mois (SUN) et les jours fériés (HOL) ont des coefficients positifs, ce qui est conforme à nos attentes. Par contre, le signe négatif affectant les variables AUG et SEP suggère que la part modale pour le transport en commun baisse durant le mois d'août et le mois de septembre.

A.6 Coefficient de corrélation multiple

Dans l'annexe, nous avons deux mesures du coefficient de corrélation multiple correspondant aux expressions (47) et (48). La première mesure, $R^2_{(E)}$, qui indique le "Goodness of fit", varie entre 0,92 et 0,96, nous avons donc une très bonne qualité de l'ajustement du modèle à la réalité statistique. Il est intéressant de noter que ce $R^2_{(E)}$ a passé de 0,92 dans (2) à 0,93 dans (3) et (4) et à 0,95 dans (5) suite au relâchement de la contrainte $\rho_{\lambda} = 0$ et demeure presque inchangé dans les autres modèles. La deuxième mesure, $R^2_{(L)}$, calculée en terme de la valeur transformée de la variable dépendante, a pris les mêmes valeurs que $R^2_{(E)}$, lui est légèrement supérieure dans les modèles (7), (8), (9) et (10).

B. Equation des personnes âgées

B.1 Comportement de la fonction de vraisemblance

Bien que les augmentations enregistrées dans la fonction de vraisemblance sont parfois très faibles, on peut quand même dire que la règle selon laquelle la fonction de vraisemblance augmente à mesure que les contraintes sont libérées est vérifiée. Ainsi, la fonction passe de 217,702 dans le modèle (1) à 249,98 dans le modèle (10). Les paramètres associés aux transformations de Box-Cox, à l'autocorrélation et à l'hétéroscédasticité ont des valeurs relativement raisonnables sauf dans le cas (6) où δ_1 prend la valeur

-31,6 et le cas (9) où $\lambda_{(z_1)}$ prend la valeur 17,0. Cependant, dans ce dernier cas, δ_1 est très faible, ce qui peut atténuer l'effet d'un tel exposant.

B.2 Correction pour l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité

Si on reprend la statistique Λ , la comparaison des modèles (1) et (3) suggère qu'il est important de tenir compte de l'autocorrélation. Cependant, la structure autorégressive adoptée n'est pas robuste et elle est très sensible aux modifications de la forme fonctionnelle et de la spécification des erreurs résiduelles. Un examen des autocorrélations totales et partielles (non montrées) révèle que l'autocorrélation du 6e ordre dans les modèles (6) et (8) n'est pas totalement corrigée. Dans le modèle (9), il semble que l'autocorrélation du 9e ordre doit être corrigée. Une comparaison des modèles (4) et (6), (5) et (7) suggère que la variable RRT n'est pas pertinente dans le traitement de l'hétéroscédasticité puisque la fonction de vraisemblance n'a augmenté que de 0,62 dans le premier cas et de 0,20 dans le second cas. Une autre comparaison entre les modèles (4) et (8) montre que la variable WRK est pertinente dans le traitement de l'hétéroscédasticité mais la comparaison des modèles (5) et (9) contredit cette affirmation. Il s'ensuit que la généralisation de la procédure de Box-Cox peut compenser pour l'hétéroscédasticité. Une dernière comparaison des modèles (5) et (10) suggère que la variable nombre d'automobiles (CAR) est efficace

pour la correction de l'hétéroscédasticité puisque la fonction a enregistré une augmentation de 9,09, ce qui est significatif à 97,5%.

B.3 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les paramètres de la forme fonctionnelle

Un examen du tableau 4, en se basant sur les tests-t, révèle que l'hétéroscédasticité n'a aucun impact sur les paramètres de la forme fonctionnelle. Il est important de noter qu'étant donné les problèmes de la structure autorégressive adoptée, les tests-t sont biaisés et ces derniers s'avèrent donc inefficaces comme critère de comparaison. Dans tous les modèles, où on a corrigé pour l'hétéroscédasticité sauf dans les cas (6) et (8), $\lambda_{(y)}$ et $\lambda_{(x)}$ sont significativement différents de 0 et de 1 excepté le modèle (9) où $\lambda_{(y)}$ n'est pas significativement différent de 1. Dans les modèles (2) et (4), on s'aperçoit que $\lambda_{(y)}$ tend vers le linéaire alors que dans le modèle (6) il tend vers le log-linéaire. Cependant, on peut souligner avec intérêt que dans tous les modèles où $\lambda_{(x)}$ est estimé, ce dernier est négatif, ce qui suggère que la tendance générale de cette équation est non linéaire.

B.4 L'impact de l'hétéroscédasticité sur les élasticités de la demande

Le tableau 5 illustre la variation des élasticités associées aux variables de prix, de revenu, de service et d'activité. Un examen de ce tableau révèle, comme dans le cas des adultes, que la forme

Demande de transport en commun par les personnes âgées à Toronto (janvier 1970 - août 1979)

Contraintes Paramètres	(1) $\cdot\lambda(Y)=\lambda(X)=1$		(2) $\cdot\lambda(X)=1$ $\cdot\lambda(Y)$		(3) $\cdot\lambda(Y)=\lambda(X)=1$ $\cdot\text{Auto}$		(4) $\cdot\lambda(X)=1$ $\cdot\lambda(Y)$ $\cdot\text{Auto}$		(5) $\cdot\lambda(Y)=\lambda(X)$ $\cdot\text{Auto}$	
	student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)	
ZRD	3.53	0.045	2.12	0.046	3.56	0.053	2.84	0.048	3.57	0.04
EFC	-0.18	-0.004	-0.15	-0.005	0.18	0.006	0.41	0.013	-0.68	-0.016
CAR	2.34	2.10	1.64	2.11	2.48	2.74	2.15	2.41	2.62	2.35
REF(1)	-1.86	-0.18	-1.31	-0.18	-2.02	-0.33	-2.18	-0.39	-3.47	-0.41
RGS(1)	0.97	0.31	0.64	0.31	-0.078	-0.044	0.02	0.008	-0.15	-0.044
CPI(1)	-1.38	-0.42	-1.13	-0.42	-1.95	-0.64	-1.59	-0.53	-0.84	-0.36
RWW(1)	2.13	1.67	1.79	1.68	2.21	2.68	2.44	2.79	2.29	4.01
WTI(1)	-2.04	-1.55	-1.69	-1.55	-0.67	-0.66	-0.74	-0.65	-0.63	-1.13
BTI(1)	-0.11	-0.14	-0.09	-0.15	-0.084	-0.13	0.13	0.20	0.50	0.96
TMP	-1.15	-0.028	-1.23	-0.028	-1.26	-0.035	-1.55	-0.04	-1.43	-0.041
RNF	-0.042	-0.0006	-0.02	-0.0005	-0.21	-0.004	-0.56	-0.010	-1.36	-0.020
SNF	-0.42	-0.004	-0.43	-0.004	0.43	0.003	0.83	0.006	1.11	0.007
CSF	-3.46	-0.038	-2.69	-0.038	-4.61	-0.041	-2.78	-0.042	-2.57	-0.030
WPR(1)	0.83	0.047	0.45	0.047	0.92	0.067	1.01	0.073	0.36	0.005
RRT(1)	1.88	0.050	1.73	0.051	2.56	0.082	2.24	0.080	0.66	0.16
EXA	0.34	0.006	0.32	0.006	0.105	0.001	0.07	0.001	0.33	0.006
STK	-5.47	-0.007	-3.45	-0.008	-2.58	-0.008	-2.73	-0.006	-2.76	-0.004
FIR	0.055	.00004	.1x10 ⁻⁹	.00004	-0.06	-.00008	-0.04	-.00003	0.07	.00004
WRK(1)	1.45	0.41	1.55	0.41	1.84	0.45	1.53	0.42	0.81	0.20
SAT	0.88	0.084	0.75	0.08	0.70	0.068	0.76	0.072	-0.12	-0.010
SUN	1.60	0.18	1.36	0.18	1.11	0.12	1.08	0.10	1.69	0.14
HOL	1.79	0.026	1.55	0.02	0.77	0.012	0.49	0.008	0.56	0.007
AUG	-0.32	-0.005	-0.30	-0.005	0.05	0.0009	0.10	0.002	-0.08	-0.001
SEP	-1.34	-0.005	-1.44	-0.005	-0.91	-0.003	-1.01	-0.003	-1.73	-0.005

Contraintes Paramètres	(1) $\cdot\lambda(Y)=\lambda(X)=1$		(2) $\cdot\lambda(X)=1$ $\cdot\lambda(Y)$		(3) $\cdot\lambda(Y)=\lambda(X)=1$ $\cdot\text{Auto}$		(4) $\cdot\lambda(X)=1$ $\cdot\lambda(Y)$ $\cdot\text{Auto}$		(5) $\cdot\lambda(Y)=\lambda(X)$ $\cdot\text{Auto}$	
	Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student	
Forme fonctionnelle										
$\lambda(Y)$	-	-	0.96	(2.06) (-0.06)*	-	-	1.6	(3.32) (1.33)*	1.9	(4.44) (2.19)*
$\lambda(X)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-2.1	(-2.48) (-3.66)*
Autocorrélation										
ρ_1	-	-	-	-	0.30	(3.0)	0.27	(2.82)	0.25	(3.05)
ρ_3	-	-	-	-	-0.23	(-1.96)	-0.33	(-2.85)	-0.42	(-4.14)
ρ_6	-	-	-	-	-0.11	(-1.11)	-0.24	(-1.93)	-0.37	(-3.10)
Hétéroscédasticité										
δ_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\lambda(Z_1)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Pseudo (E) - R ²	-	-	0.80		0.84		0.84		0.86	
Pseudo (L) - R ²	-	-	0.80		0.84		0.84		0.87	
Fonction de vraisemblance	217.702		217.704		230.50		231.22		240.89	

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student et le symbole * se réfère à l'hypothèse que le paramètre est égal à 1 au lieu de 0

Demande de transport en commun par les personnes âgées à Toronto (janvier 1970 - août 1979)

Contraintes	(6)		(7)		(8)		(9)		(10)	
	$\cdot\lambda(X_1)=1$	$\cdot\lambda(Y)$	$\cdot\lambda(Y)\cdot\lambda(X_1)$.Auto	$\cdot\lambda(X_1)=1$	$\cdot\lambda(Y)$	$\cdot\lambda(Y)\cdot\lambda(X_1)$.Auto	$\cdot\lambda(Y)\cdot\lambda(X_1)$.Auto
Paramètres	.Hetero(RRT)		.Hetero(RRT)		.Hetero(WRK)		.Hetero(WRK)		.Hetero(CAR)	
	student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)		student-t ($\eta-\epsilon$)	
ZRD	2.52	0.05	3.47	0.044	2.77	0.05	3.43	0.044	6.18	0.041
EFC	0.47	0.01	-0.62	-0.014	0.85	0.03	-0.25	-0.006	-0.36	-0.001
CAR	1.90	2.81	2.53	2.37	1.98	2.50	2.48	2.35	3.70	2.21
REF(1)	-1.46	-0.28	-3.48	-0.42	-1.10	-0.17	-3.20	-0.44	-4.31	-0.42
RGS(1)	-0.09	-0.05	-0.26	-0.07	0.05	0.02	-0.40	-0.12	0.18	0.061
CPI(1)	-1.78	-0.77	-0.80	-0.35	-2.31	-0.84	-0.96	-0.42	-1.20	-0.43
RWW(1)	1.40	1.87	2.16	4.00	0.86	1.00	2.17	3.99	2.76	3.81
WTI(1)	-0.55	-0.53	-0.59	-1.16	-0.73	-0.65	-0.65	-1.03	-0.76	-0.98
BTI(1)	-0.54	-0.84	0.53	1.05	-0.87	-1.35	0.40	0.73	0.18	0.27
TMP	-0.74	-0.018	-1.32	-0.038	-0.68	-0.014	-1.16	-0.035	-1.14	-0.032
KNF	-0.31	-0.006	-1.33	-0.019	0.60	0.010	-0.99	-0.016	-0.34	-0.004
SNF	0.54	0.004	0.98	0.006	0.30	0.002	1.15	0.008	1.69	0.012
CSF	-3.33	0.050	-2.37	-0.030	-2.94	-0.046	-2.24	-0.034	-1.98	-0.027
WPR(1)	1.03	0.09	0.37	0.005	1.04	0.078	0.45	0.006	0.14	0.002
RRT(1)	1.25	0.045	0.62	0.16	1.60	0.048	0.66	0.16	0.79	0.14
EXA	0.13	0.001	0.36	0.006	0.39	0.005	0.33	0.005	1.23	0.014
STK	-2.58	-0.011	-2.59	-0.004	-2.65	-0.012	-3.22	-0.004	-4.3	-0.005
FIR	-0.03	-0.00005	0.09	.00005	0.05	.00007	0.16	.00009	0.56	0.0004
WRK(1)	1.66	0.58	0.73	0.18	2.20	0.63	0.84	0.23	0.68	0.23
SAT	0.63	0.075	-0.20	-0.01	1.00	0.08	-0.16	-0.012	0.71	0.05
SUN	1.11	0.13	1.70	0.14	1.42	0.14	1.73	0.14	1.10	0.10
HOL	0.82	0.013	0.73	0.009	1.00	0.01	0.49	0.006	0.30	0.003
AUG	-0.06	-0.007	-0.12	-0.002	-0.25	-0.002	-0.03	-0.0004	-0.66	-0.006
SEP	-0.77	-0.002	-1.71	-0.006	-0.76	-0.002	-1.52	-0.004	-1.49	-0.004

Contraintes	(6)		(7)		(8)		(9)		(10)	
	$\cdot\lambda(X_1)=1$	$\cdot\lambda(Y)$	$\cdot\lambda(Y)\cdot\lambda(X_1)$.Auto	$\cdot\lambda(X_1)=1$	$\cdot\lambda(Y)$	$\cdot\lambda(Y)\cdot\lambda(X_1)$.Auto	$\cdot\lambda(Y)\cdot\lambda(X_1)$.Auto
Paramètres	.Hetero(RRT)		.Hetero(RRT)		.Hetero(WRK)		.Hetero(WRK)		.Hetero(CAR)	
	Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student		Coeff. t-student	
Forme fonctionnelle										
$\lambda(Y)$	0.40	(0.94)	2.0	(4.4)	2.55	(0.60)	1.9	(3.7)	2.29	(5.98)
$\lambda(X)$	-	-	-2.1	(-2.4)	-	-	-1.9	(-2.4)	-1.75	(-2.44)
Autocorrélation										
ρ_1	0.28	(2.6)	0.25	(2.8)	0.35	(3.2)	0.27	(3.0)	0.07	(0.75)
ρ_3	-0.14	(-1.45)	-0.41	(-1.6)	-0.11	(-1.2)	-0.38	(-3.5)	-0.36	(-4.0)
ρ_6	-0.02	(-0.34)	-0.36	(-2.8)	0.01	(0.15)	-0.34	(-2.8)	-0.47	(-4.6)
Hétéroscédasticité										
δ_1	-31.6	-0.21	-0.01	(-0.09)	.000002	(0.07)	.000006	(0.02)	3.11	(0.087)
$\lambda(Z_1)$	-1.7	(-0.67)	1.6	(0.36)	2.00	(1.17)	17.0	(0.37)	0.61	(0.11)
Pseudo (E) - R ²	0.84		0.86		0.85		0.87		0.83	
Pseudo (L) - R ²	0.85		0.87		0.86		0.87		0.89	
Fonction de vraisemblance	231.84		241.19		237.24		242.24		249.98	

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student et le symbole * se réfère à l'hypothèse que le paramètre est égal à 1 au lieu de 0

Tableau 5
Variation des élasticités
entre le modèle (1) et le modèle (10)

Variables	Modèle (1)	(Modèle (10))
CAR	2,10 (2,34)	2,21 (3,70)
REF	-0,18 (-1,86)	-0,42 (-4,31)
RGS	0,31 (0,97)	0,061 (0,18)
CPI	-0,42 (-1,38)	-0,43 (-1,20)
RWW	1,67 (2,13)	3,81 (2,76)
WTT	-1,55 (-2,04)	-0,98 (-0,76)
BTT	-0,14 (-0,11)	0,27 (0,18)
WPR	0,047 (0,83)	0,002 (0,14)
RRT	0,050 (1,88)	0,14 (0,79)
EXA	0,006 (0,34)	0,014 (1,23)
STK	-0,007 (-5,47)	-0,005 (-4,3)
FIR	0,00004 (0,055)	0,0004 (0,56)
WRK	0,41 (1,45)	0,23 (0,68)

Les valeurs entre parenthèses sont les tests asymptotiques du t-student.

fonctionnelle et la spécification de l'erreur ont un impact considérable sur les élasticités de la demande. Plus précisément, ce sont les variables RWW et WTT qui ont accusé la plus grande variation puisque leur élasticité respective passe de 1,67 et -1,55 à 3,81 et -0,98. Contrairement à l'équation des adultes, on s'aperçoit que les personnes âgées sont plus sensibles au facteur temps qu'au facteur argent, et ce, dans les deux modèles. Par ailleurs, on peut dire que, dans cette équation, ce sont les variables RWW, CAR et WTT qui contribuent le plus à l'explication de la demande. En effet, l'élasticité associée à la variable RWW varie entre 1,00 dans (8) et 4,01 dans (5) tandis que l'élasticité associée à la variable CAR varie entre 2,10 dans (1) et 2,81 dans (6). Quant à la variable WTT, son élasticité passe de -0,53 dans le modèle (6) à -1,55 dans les modèles (1) et (2). Au sujet de l'ordre de grandeur des élasticités de ces trois variables, il faut dire qu'elles sont loin d'être raisonnables dans la plupart des modèles, exception faite toutefois de la variable WTT dans les modèles (3), (5) et (6). A titre d'exemple, dans le modèle (7), une augmentation de 10% dans le revenu des personnes âgées provoquerait une augmentation de 40% de la demande de transport en commun, ce qui est inacceptable. En résumé, les trois variables mentionnées ont des élasticités très fortes dans tous les modèles, ce qui rend difficile l'adoption de la spécification et de la forme fonctionnelle actuelles de cette équation sur la base du concept d'élasticité.

B.5 Signe et signification des variables

Comme on l'a déjà mentionné dans le cas des adultes, la généralisation des transformations de Box-Cox atténue le niveau de signification des variables. C'est ainsi que dans le modèle le plus contraint, on compte 13 coefficients significatifs à un niveau supérieur ou égal à 90% alors que le modèle le plus général n'en compte plus que 8. En ce qui concerne les signes des coefficients, une attention particulière doit être attribuée aux variables CAR et RWW. Dans tous les modèles, les deux coefficients ont maintenant leur signe positif accompagné d'un test-t assez élevé sauf pour la variable RWW dans le modèle (8) dont le test-t est faible. Le signe positif du coefficient de la variable CAR ne peut être acceptable puisque selon ce signe une augmentation dans le nombre de voitures engendrerait une augmentation de la part modale du transport en commun, ce qui enlève l'aspect concurrentiel entre les différents modes. Le signe positif du coefficient de la variable RWW est assez surprenant puisque d'après ce signe le transport en commun est un bien supérieur contrairement à ce qui a été conclu dans le cas des adultes.

B.6 Coefficient de corrélation multiple

L'analyse du coefficient de corrélation multiple nous indique que la qualité d'ajustement dans le cas des personnes âgées est moins bonne que celle obtenue dans le cas des adultes. Ainsi, la

première mesure, $R^2_{(E)}$, varie entre 0,80 dans le modèle (2) et 0,87 dans le modèle (9); par contre $R^2_{(L)}$ varie entre 0,80 dans (2) et 0,89 dans (10). Dans tous les cas, $R^2_{(L)}$ est égal ou supérieur à $R^2_{(E)}$ et ce possiblement à cause que $R^2_{(L)}$ tient compte de la correction de l'hétéroscédasticité.

CONCLUSION

Tout au long de cette étude, nous nous sommes confrontés à plusieurs problèmes concernant la non-linéarité et auxquels il est parfois difficile d'apporter les explications nécessaires. Néanmoins, les résultats obtenus dans le cas des adultes ont été très satisfaisants et suggèrent que l'analyse conjointe de la partie fixe et de la partie stochastique du modèle est prometteuse en particulier si l'on réussit à éliminer certaines difficultés numériques au niveau de l'estimation. Par contre, les résultats obtenus pour l'équation des personnes âgées révèlent que celle-ci souffre de problèmes de spécification qui apparemment sont indépendants de la forme fonctionnelle préconisée.

Dans les deux équations, les résultats obtenus montrent que la procédure Box-Cox appliquée à la partie fixe peut modifier grandement la distribution des erreurs et par conséquent le caractère hétéroscédastique des résidus.

Les résultats montrent également que l'estimation de la forme fonctionnelle, conjointement avec les autres paramètres du modèle, affecte grandement les élasticités de la demande, les tests statistiques ainsi que les signes des coefficients.

En résumé, les difficultés que nous avons rencontrées dans l'estimation des personnes âgées nous ont amené à nous demander

si l'addition des transformations de Box-Cox ne favorise pas la collinéarité? On peut aussi se demander si l'on n'essaie pas de tirer d'un modèle plus d'informations qu'il en renferme?

ANNEXEMesure d'élasticité en terme de $E(Y_t)$

$$(\eta - \varepsilon) = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_{k_t}} \frac{X_{k_t}}{E(Y_t)} \quad (46)$$

Pseudo - (E) - R^2 ou $R^2_{(E)}$

$$R^2_{(E)} = 1 - \frac{\sum_{t=1+r}^n [Y_t - E(Y_t)]^2}{\sum_{t=1+r}^n [Y_t - \bar{Y}]^2} \quad (47)$$

Pseudo - (L) - R^2 ou $R^2_{(L)}$

$$R^2_{(L)} = 1 - \frac{\sum_{t=1+r}^n (Y_t^{**} - \hat{Y}_t^{**})^2}{\sum_{t=1+r}^n (Y_t - \bar{Y})^2} \left[\prod_{t=1+r}^n \left(Y_t^{\lambda_y - 1} / \sqrt{f(Z_t)} \right) \right]^{-\frac{2}{n-r}} \quad (48)$$

BIBLIOGRAPHIE

- Dagenais, Marcel G. et Marc J.I. Gaudry, The Use of Box-Cox Transformations in Regression Models with Heteroskedastic Autoregressive Residuals, Cahier no 7814, Département de sciences économiques, Université de Montréal, août 1978, révisé en avril 1979
- Dagenais, Marcel G., Marc J.I. Gaudry et T.C. Liem, Multiple Regression Analysis with Box-Cox Transformations and Nonspherical Residual Errors: A Transportation Application, Cahier no 8011, Département de sciences économiques, Université de Montréal, mai 1980
- Gaudry, Marc J.I., An Aggregate Time-Series Analysis of Urban Transit Demand: The Montreal Case, Cahier 7410, Département de sciences économiques, Université de Montréal, août 1974
- Gaudry, Marc J.I., Seemingly Unrelated Static and Dynamic Urban Travel Demands, Cahier no 7701, Département de sciences économiques, Université de Montréal, février 1977, révisé en décembre 1977
- Gaudry, Marc J.I. et Michael J. Wills, Estimating the Functional Form of Travel Demand Models, Cahier no 7702, Département de sciences économiques, Université de Montréal, juin 1977
- Lecomte, Louis-Philippe, Trois modèles de demande de transport en commun pour les jeunes à Toronto, mémoire de maîtrise dirigé par Marc Gaudry, Département de sciences économiques, Université de Montréal, publication #255, novembre 1981
- Liem, Tran Cong, DSDM-L1, A Program for Box-Cox Transformations in Regression Models with Heteroskedastic and Autoregressive Residuals, Cahier no 7934, Département de sciences économiques, Université de Montréal, juin 1979, révisé en septembre 1979
- Theil, Henri, Principles of Econometrics, John Wiley, New York, 1971
- The Demand for Public Transport, Report of the International Collaborative Study of the Factors Affecting Public Transport Patronage publié par le Royaume Uni: Transport and Road Research Laboratory, 1980

REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma gratitude envers le professeur Marcel Dagenais pour sa direction constante et ses conseils judicieux dans l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier aussi le professeur Marc Gaudry pour sa participation à l'élaboration ainsi qu'à la correction de ce mémoire.

Mes remerciements vont également au professeur Claude Montmarquette qui a bien voulu agir en tant que troisième lecteur et à Tran Cong Liem pour son assistance technique.

