

Université de Montréal

**Une approche fréquentielle pratique
pour l'échantillonnage adaptatif en espace image**

par
Renaud Adrien Dubouchet

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en informatique

Août, 2014

© Renaud Adrien Dubouchet, 2014.

RÉSUMÉ

En synthèse d'images réalistes, l'intensité finale d'un pixel est calculée en estimant une intégrale de rendu multi-dimensionnelle. Une large portion de la recherche menée dans ce domaine cherche à trouver de nouvelles techniques afin de réduire le coût de calcul du rendu tout en préservant la fidélité et l'exactitude des images résultantes. En tentant de réduire les coûts de calcul afin d'approcher le rendu en temps réel, certains effets réalistes complexes sont souvent laissés de côté ou remplacés par des astuces ingénieuses mais mathématiquement incorrectes.

Afin d'accélérer le rendu, plusieurs avenues de travail ont soit adressé directement le calcul de *pixels individuels* en améliorant les routines d'intégration numérique sous-jacentes ; ou ont cherché à amortir le coût *par région* d'image en utilisant des méthodes adaptatives basées sur des modèles prédictifs du transport de la lumière.

L'objectif de ce mémoire, et de l'article résultant, est de se baser sur une méthode de ce dernier type [11], et de faire progresser la recherche dans le domaine du rendu réaliste adaptatif rapide utilisant une analyse du transport de la lumière basée sur la théorie de Fourier afin de guider et prioriser le lancer de rayons. Nous proposons une approche d'échantillonnage et de reconstruction adaptative pour le rendu de scènes animées illuminées par cartes d'environnement, permettant la reconstruction d'effets tels que les ombres et les réflexions de tous les niveaux fréquentiels, tout en préservant la cohérence temporelle.

Mots clés: Fourier, transport de la lumière, cache, échantillonnage adaptatif, reconstruction, filtrage, synthèse d'images

ABSTRACT

In realistic image synthesis, a pixel’s final intensity is computed by estimating a multi-dimensional shading integral. A large part of the research in this domain is thus aimed at finding new techniques to reduce the computational cost of rendering while preserving the fidelity and correctness of the resulting images. When trying to reduce rendering costs to approach real-time computation, complex realistic effects are often left aside or replaced by clever but mathematically incorrect tricks.

To accelerate rendering, previous directions of work have either addressed the computation of *individual* pixels by improving the underlying numerical integration routines; or have sought to amortize the computation *across regions* of an image using adaptive methods based on predictive models of light transport.

This thesis’ — and resulting paper’s — objective is to build upon the latter of the aforementioned classes of methods [11], and foray into fast adaptive rendering techniques using frequency-based light transport analysis to efficiently guide and prioritize ray tracing. We thus propose an adaptive sampling and reconstruction approach to render animated scenes lit by environment lighting and faithfully reconstruct all-frequency shading effects such as shadows and reflections while preserving temporal coherency.

Keywords: Fourier, light transport, caching, adaptive sampling, reconstruction, filtering, image synthesis

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	ii
ABSTRACT	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES ANNEXES	xi
REMERCIEMENTS	xii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 : ÉTAT DE L'ART	6
CHAPITRE 3 : CONTEXTE TECHNIQUE	19
3.1 Transport de la lumière	19
3.1.1 Estimation de la radiance	20
3.2 Analyse fréquentielle	25
3.2.1 Analyse fréquentielle du transport de la lumière	26
3.2.2 Application à l'échantillonnage et reconstruction adaptative	30
CHAPITRE 4 : A PRACTICAL FOURIER RADIANCE CACHE FOR ADAP- TIVE RENDERING OF ANIMATIONS	33
4.1 Abstract	33
4.2 Introduction	34
4.3 Previous Work	35
4.4 Overview	38

4.5	Adapting the Spherical Sampling Rate	40
4.6	A Sparse, Adaptive Radiance Cache	44
4.6.1	Adaptive Image Space Sampling	45
4.6.2	Caching and Reusing Radiance Points	48
4.6.3	Handling Temporal Occlusion Changes	51
4.7	Image Reconstruction	56
4.8	Results and Implementation	60
4.9	Conclusion and Future Work	63
	CHAPITRE 5 : CONCLUSION	65
	BIBLIOGRAPHIE	68

LISTE DES FIGURES

1.1	Principe du lancer de rayons pour l'illumination directe. Des rayons sont lancés depuis le point de vue virtuel pour chaque pixel. Dans le cas d'intersection, la contribution de radiance arrivant de la scène à ce point est calculée. L'intensité du pixel est égale à la radiance calculée. <i>Image de Henrik wann Jensen, Wikipedia.</i>	2
2.1	Flou de mouvement : comparaison de la méthode (a), (d) à deux autres méthodes concurrente (b), (c) et l'image témoin (e). <i>Image de Egan et al. [15].</i>	7
2.2	Bande-passante spatiale (a) et dans le domaine de la lentille de la caméra (b). Les taux d'échantillonnage (c) là où la radiance est estimée sont dérivés, permettant la reconstruction (d). <i>Image de Soler et al. [40].</i>	8
2.3	Présentation des centres et tailles de filtre (b), dérivés des taux d'échantillonnage estimés (c) pour une scène présentant du flou de mouvement de profondeur de champ (a). <i>Image de Belcour et al. [7].</i>	9
2.4	Comparaison de la méthode (a), (c) à un lancer de rayons en temps égal (b) et en qualité égale (d). Visualisation de leur critères d'échantillonnages et de filtrage pour l'illumination directe (f) et indirecte (g). <i>Images de Mehta et al. [27].</i>	10
2.5	Différences de forme de filtres de reconstruction entre un matériau diffus (a), angulairement très grand et spatialement petit ; et un matériau spéculaire (b), devenant plus grand spatialement et plus petit angulairement lorsque l'exposant spéculaire augmente. <i>Image de Lehtinen et al. [24].</i>	11

2.6	Dans le sens des flèches : Une passe d'échantillonnage épars est établie, d'après laquelle l'image est reconstruite par filtrage. L'erreur relative est estimée par pixel afin de guider l'échantillonnage de la passe suivante, raffinant ainsi rapidement le résultat au fil du temps. <i>Image de Rousselle et al. [35].</i>	13
2.7	(b) Les pixels les plus affectés par l'échantillonnage aléatoire de la lentille. (c) Réduction du bruit en (a) en variant adaptativement le filtre. <i>Image de Sen et al. [38].</i>	14
2.8	Comparaison de l'échantillonnage et la reconstruction d'irradiance entre le cache d'irradiance (a), (b) et la méthode de second ordre de Schwarzhaupt et al. prenant en compte l'occultation (e). <i>Images de Schwarzhaupt et al. [37].</i>	16
2.9	Développement de la technique de Bala et al. combinant un échantillonnage épars et une représentation des arêtes afin de procéder à une interpolation adaptative. <i>Images de Bala et collègues [3].</i>	17
3.1	Comparaison de contenus fréquentiels de différentes parties d'une même image. <i>Image de Belcour [5].</i>	26
3.2	À gauche : caractérisation 2D (x, θ) d'un champ de lumière. À droite : une variation angulaire au niveau du champ de lumière émetteur se transforme en variation spatiale au niveau du champ de lumière récepteur. La dimension angulaire reste inchangée. <i>Images de Durand et al. [11].</i>	27

3.3	De gauche à droite : une lumière ponctuelle est un Dirac spatialement, et une constante angulairement ; sa transformée est une constante spatialement, et un Dirac en angle ; une lumière <i>spot</i> avec une ampoule de taille finie spatialement possède une atténuation lisse en angle ; sa transformée est une <i>sinc</i> spatialement et une Gaussienne angulairement. <i>Images de Durand et al. [11]</i>	28
3.4	Étapes modifiant le contenu fréquentiel des champs de lumière le long d'un chemin depuis la source de lumière jusqu'à la caméra, dans le cas d'illumination par carte d'environnement à intensité constante. <i>Image de Durand et al. [11]</i>	29
3.5	Critère de Durand et al. prenant en compte la courbure, la bande-passante de la BRDF, la distance, l'angle d'incidence, la normale et la distance harmonique hémisphérique des objets occultants afin de dériver le schéma de placement d'échantillons. <i>Image de Durand et al. [11]</i>	31
4.1	We show stills from the DINO animation with five detailed dinosaurs bouncing off a dune, lit by environment maps of different frequency content, from higher to lower (GALILEO, MONUMENT, PISA).	33
4.2	After an initial sparse image-space sampling ((a), in blue), and (optional) cached point reprojection ((a), in red), we compute the sampling density from this first set (b) and subtract it from an estimated necessary sampling density for artifact-free reconstruction (c). We distribute samples according to this difference in density (d), and reconstruct the final shading (e) using our frequency-space oracles.	36

4.3	We precompute the distant environment light’s bandwidth for multiple footprint sizes (left), at discrete footprint directions. During rendering, we query this structure to obtain the lighting’s bandwidth within the BRDF’s footprint (right).	41
4.4	We need only consider the frequency content of the (distant) incident lighting and visibility within the view-evaluated <i>BRDF footprint</i> (in yellow), defined as a cone centered about the mean reflection direction of the BRDF slice $\boldsymbol{\mu}_\rho$ with radius equal to three standard deviations σ_ρ of the BRDF lobe. Our visibility statistics, comprised of its mean $\boldsymbol{\mu}_V$ and three standard deviations σ_V , are also accumulated exclusively within this footprint.	42
4.5	We increase the number of spherical integration samples to properly account for shading variations due to occlusion.	44
4.6	We estimate the outgoing radiance bandwidth in image space B_S towards the viewer : starting with the emitted (angular) bandwidth of the BRDF’s footprint subtended onto the environment light B_{L_∞} (a), we then apply the BRDF bandlimit B_ρ (b) and modulate according to curvature, foreshortening, and spatial transport (c). With a pinhole camera, the angular bandwidth at the aperture serves directly as the image space bandwidth estimate B_S	46
4.7	During reprojection, we test whether the new viewing direction remains inside the BRDF’s footprint and, if so, we project the sample onto the screen (plain green line) ; if not, we (optionally) discard the sample from the cache (dashed red line).	50

4.8	We merge two cache points that reproject onto the same pixel only if both their spatial and angular bandwidths overlap enough. In this example, while the two cache point's angular cones (ω_1, ω_2) align (gray), their spatial bandwidths at \mathbf{p}_1 and \mathbf{p}_2 do not overlap enough. Consequently, the two points will not be merged.	51
4.9	Traditional CBF (a) fails to capture shadow boundaries and glossy reflections; IDW (b) produces banding artifacts; FNBF (c) reduces these artifacts and is more temporally coherent (see video).	58
4.10	Stills from the KILLEROO animation with one glossy and one diffuse Killeroo rotating above a diffuse and glossy checkerboard, lit by the GALILEO environment.	60
4.11	Our method allows simple tricks for Whitted-style indirect specular effects. The TABLE scene presents a mirror reflection showing parts of the scene invisible from the camera point of view.	61
4.12	Our method reuses radiance points between frames. We visualize the number of reused radiance points (in red) and the final sampling density used to reconstruct the images. Most of the resampled radiance points (blue) are due to specular surfaces (with small cone bandwidths) for which our cache discards radiance points from previous frames according to our bandwidth prediction.	62

LISTE DES ANNEXES

1	Our adaptive sampling and reconstruction approach.	39
---	--	----

REMERCIEMENTS

Je remercie premièrement mon directeur de recherche à l'Université de Montréal, Derek Nowrouzezahrai, pour m'avoir accepté comme étudiant à la maîtrise et m'avoir guidé avec patience et optimisme pendant ces deux années de travail. Son soutien et ses encouragements m'ont donné l'assurance de continuer dans cette voie et d'apprécier la recherche. Merci à Pierre Poulin, professeur au laboratoire, pour m'avoir fait une place au LIGUM et m'avoir ouvert l'esprit en infographie avec son cours. Je remercie également Laurent Belcour, qui a supporté ma recherche et m'a corrompu à l'analyse fréquentielle pour toujours. Merci à tous les résidents du LIGUM : Aude, Chaitanya, Cynthia, Dabid, David, Etienne, Gilles-Philippe, Guofu, Jean-Philippe, Joël, Laurent, Olivier, Simon, Sonia et YangYang pour les nombreuses discussions et échanges d'idées, l'humour, les sorties, les desserts et les cours de jonglage et de toujours être aussi soudés ; sans oublier tous ceux qui ne sont malheureusement plus là au labo : Antoine, Arnaud, Dorian, Eric, Jonathan, Marc-Antoine et Nicolas. Je remercie toute ma famille pour leur soutien durant mes années de maîtrise et leur aide constante dans mon habileté à vulgariser l'objectif de mon travail. Mes parents, Jean-Michel et Laurence ; et mes frères, Pierre et Matthias. Je souhaite remercier également toute l'équipe de développement à *Microsoft Game Studios Vancouver* et particulièrement Maurice Ko pour leur accueil durant ces quatre mois en stage de recherche. Merci à Bruno Dufour, pour m'avoir fait rencontrer Derek.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le rendu d'images est un sous-domaine de l'infographie qui cherche à produire numériquement des images de synthèse depuis un modèle descriptif de scène géométrique virtuelle, y compris les luminaires et les propriétés de réflexion et réfraction de chaque objet. L'étude du transport de la lumière en rendu réaliste cherche à représenter physiquement le comportement de la lumière dans l'espace par une multitude de chemins de lumière (*light paths*) afin de pouvoir simuler avec fidélité la plupart des phénomènes d'illumination présents dans le monde physique. En simulant le comportement des chemins qu'emprunte la lumière dans l'espace par une multitude d'effets de réflexion, de réfraction et de dispersion, il est possible d'estimer la quantité de lumière incidente à n'importe quel point dans notre scène.

En connaissant la description des objets géométriques, matériaux, lumières et de la caméra dans notre scène, l'objectif est de calculer l'intensité de chaque pixel de l'image. En pratique, pour des raisons de performance, il est plus simple de calculer une simulation dépendante du point de vue, plutôt qu'une simulation complète du comportement de la lumière. Dès lors, le cheminement inverse est souvent étudié : des rayons sont lancés depuis la caméra virtuelle à travers chaque pixel pour trouver un point d'intersection dans la scène, auquel cas la couleur du pixel en question est proportionnelle à l'intensité lumineuse (la densité de photons) incidente à ce point (Figure 1.1). Le processus se rapproche conceptuellement de la photographie, où l'appareil photo devient le point de vue ; la scène physique photographiée est la scène virtuelle décrite ; et la photo elle-même est représentée par le champ de pixels résultant du rendu, visualisable sur un écran.

Une étude prenant également en compte le reste de la scène que la caméra ne voit pas peut être menée pour augmenter le réalisme et la fidélité de la simulation au prix de la performance. Une telle étude permet non seulement le calcul de l'illumination directe —

quelle est la lumière venant directement d'une source jusqu'au point d'intersection dans le pixel — mais également de calculer les différentes inter-réflexions entre les objets, simulant ainsi plusieurs rebonds inter-surfaciques entre le moment où la lumière quitte sa source et celui où elle arrive à la caméra : l'illumination indirecte. Des effets plus spécialisés peuvent également étudier comment la lumière se propage dans des milieux plus complexes afin de simuler de la fumée, de la diffusion sous la surface d'objets, etc.

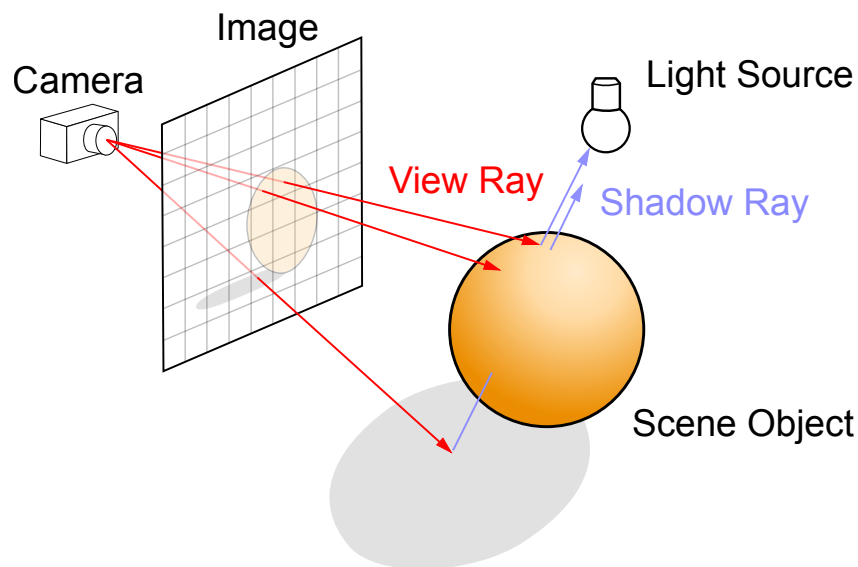


Figure 1.1 – Principe du lancer de rayons pour l'illumination directe. Des rayons sont lancés depuis le point de vue virtuel pour chaque pixel. Dans le cas d'intersection, la contribution de radiance arrivant de la scène à ce point est calculée. L'intensité du pixel est égale à la radiance calculée. *Image de Henrik wann Jensen, Wikipedia.*

Mathématiquement, ce processus se traduit en une intégrale multi-dimensionnelle en chaque point d'intersection à traiter dans la scène. Résoudre cette intégrale signifie calculer la radiance — intensité lumineuse au fil d'un chemin de lumière — arrivant à un point depuis une infinité de chemins dans toutes les directions possibles. En pratique, cela est impossible pour autre chose qu'un cas d'école et des méthodes basées sur l'échantillonnage probabiliste, comme les méthodes de Monte Carlo, sont souvent utilisées afin d'approximer l'intégrande ; le but primaire étant de réduire la variance de

cette estimation en comparaison au résultat réel. L'idée est que, comme en théorie des jeux, si l'information connue sur le système n'est pas complète, la stratégie optimale possède souvent une composante aléatoire. Les rayons de lumière sont donc sujets, à chaque point d'intersection dans la scène, à une distribution probabiliste décrivant les comportements possibles du rayon, e.g., réflexion, réfraction, dispersion ; mais aussi les directions possibles empruntées par ce rayon dans chacun de ces cas. La distribution probabiliste peut être plus ou moins aléatoire suivant la méthode et peut ou non prendre en compte l'information qui lui est disponible (e.g., le matériau de l'objet intersecté, la position, taille et intensité de la(les) source(s) de lumière, etc.) pour favoriser certaines possibilités et ainsi réduire plus rapidement la variance.

Le transport de la lumière est un vaste champ de recherche en infographie dont les objectifs majeurs sont le réalisme physique d'un côté, avec l'intention de trouver des modèles mathématiques permettant de représenter des phénomènes naturels de plus en plus complexes et réalistes ; et la rapidité de calcul de l'autre, cherchant à accélérer ces modèles mathématiques afin de permettre le rendu de scènes de plus en plus complexes et physiquement réalistes dans des temps de calcul acceptables. Ce dernier point devient important lorsque l'on parle de synthèse d'images en production : par exemple dans le domaine du jeu vidéo, où il est primordial que le jeu réponde en temps réel aux actions du joueur ; ou du film d'animation et des images de synthèse dans les films, pour lesquels la génération d'une seule image peut prendre jusqu'à plusieurs dizaines d'heures, peu acceptable lorsque des délais de production sont à respecter.

Afin d'accélérer le rendu d'images, plusieurs directions de recherche ont été étudiées, et il est possible de discerner deux grandes avenues de travail orthogonales, mais souvent complémentaires. La première, que la recherche a historiquement commencé à étudier en premier, cherche à accélérer les processus d'intégration numérique traités en chaque pixel. En effet, si chaque pixel de l'image à rendre est traité plus rapidement individuellement, la synthèse de l'image complète sera plus rapide. Souvent, ces techniques cherchent des façons de lancer les rayons plus intelligemment, permettant ainsi d'en lan-

cer un total moindre pour un gain non négligeable vis-à-vis de la vitesse de convergence du traitement des intégrales. Dans le cas d'estimateur Monte Carlo, cela revient à trouver des distributions de probabilités représentant mieux la forme de l'intégrande à résoudre.

Le second grand domaine de techniques d'accélération du rendu vise non plus à accélérer le calcul de chaque pixel individuellement, mais à trouver des méthodes permettant d'exploiter la cohérence apparente en espace image (i.e., entre plusieurs pixels d'un même voisinage) et en espace objet (i.e., entre deux points d'intersection spatialement proches) afin d'éviter les calculs redondants et de partager le plus possible les contributions calculées. Ces méthodes se basent sur des modèles prédictifs du transport de la lumière (e.g., analyses de premier ordre, analyses fréquentielles) afin de rendre l'échantillonnage adaptatif. En rendant l'échantillonnage épars, il est possible d'éviter entièrement les calculs pour certains pixels, en assurant leur reconstruction grâce à des filtres recueillant l'information nécessaire dans leur voisinage. Ces techniques d'échantillonnage adaptatif et de reconstruction ont ouvert une nouvelle voie de travail permettant de limiter la quantité de calculs longs et complexes et de n'intégrer qu'une fraction des pixels pour ensuite tirer parti de la cohérence spatio-temporelle souvent présente dans le comportement de la lumière.

Ce mémoire présente nos résultats dans l'établissement d'une approche adaptative de rendu de scènes animées, conduisant adaptativement l'échantillonnage en espace image et objet, ainsi que durant l'intégration numérique de chaque échantillon. Nous développons des schémas de placement épars d'échantillons et d'intégration utilisant une extension de l'analyse fréquentielle du transport de la lumière menée par Durand et al. [11]. Cette extension de l'analyse permet de plus d'introduire un système de mémoire cache permettant la réutilisation d'information d'images précédentes, améliorant ainsi la cohérence temporelle dans le cas d'animations.

En résumé, notre travail introduit les contributions suivantes :

- une analyse fréquentielle du placement et de la réutilisation d'échantillons par image et au fil des images dans le cas d'animations, diminuant la quantité de calcul nécessaire en espace image, en espace objet, ainsi qu'au fil du temps,
- un schéma d'intégration adaptatif basé sur les informations de la scène, telles que les différents matériaux, l'illumination et sur de l'information statistique concernant l'occultation,
- un schéma léger de mémoire cache qui réutilise, rejette et recalcule l'information d'occultation et de radiance au fil du temps, guidé par notre analyse fréquentielle afin de limiter les erreurs, et
- une extension du filtre bilatéral effectuant une reconstruction plus précise de l'image finale depuis nos échantillons épars en espace image.

Avant de décrire plus en détails au chapitre 4 la technique introduite ci-dessus, nous offrons au lecteur plus de précision sur le contexte technique de ce travail et la place qu'il occupe vis-à-vis des travaux de recherche que lui ont précédé. Le chapitre 2 présente un survol de l'état de l'art dans le domaine du rendu réaliste d'images de synthèse, tout particulièrement les méthodes existantes qui sont le plus en relation avec l'analyse fréquentielle de la lumière et les techniques adaptatives d'échantillonnage et de filtrage. Le chapitre 3 liste certains éléments du bagage technique nécessaire à la compréhension de l'article introduit, afin de donner au lecteur une intuition plus certaine sur le sujet et faciliter la compréhension.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART

Nous présentons dans ce chapitre un aperçu des méthodes qui ont inspiré notre travail, ainsi que des techniques récentes représentant l'état de l'art dans le domaine de l'étude du transport de la lumière, l'étude fréquentielle, l'échantillonnage adaptatif et la reconstruction par filtre. Certaines de ces techniques appartiennent à plusieurs de ces domaines, et une grande partie des travaux que nous présentons ont rapport à l'échantillonnage et la reconstruction adaptatifs guidés par des analyses du premier ou second ordre ou grâce à l'analyse fréquentielle du transport de la lumière.

Analyse fréquentielle du transport de la lumière. L'analyse fréquentielle de fonctions fût introduite par Fourier [17] dans ses séries de Fourier pour résoudre les problèmes de diffusion de chaleur. La forme que nous utilisons sont les transformées de Fourier, étendues par Plancherel et Leffler [26] pour une analyse plus générale de fonctions.

Durand et al. [11] ont proposé une analyse fréquentielle du transport de la lumière, étudiant le comportement des champs de lumière (*lightfields*) locaux, et comment le transport, les occultations et les réflexions surfaciques modifient le contenu fréquentiel du champ de lumière. Cette analyse théorique leur permet d'établir une application "preuve de concept" permettant l'échantillonnage et la reconstruction adaptatifs de champs de lumière. Dans leur travail, chaque intégrale calculée numériquement l'était jusqu'à convergence visuelle, signifiant que leur méthode d'intégration n'était pas adaptative selon le contenu fréquentiel. Le chapitre 3 offre plus d'intuition sur le travail effectué par Durand et ses collègues.

Cette analyse théorique ouvra une direction de recherche sur l'échantillonnage adaptatif et la reconstruction par filtre s'appuyant sur l'analyse fréquentielle locale, établis-

sant ainsi une base sur laquelle reposent plusieurs techniques cherchant à reproduire un vaste panel d’effets. Bagher et al. [1] utilisent le contenu fréquentiel de cartes environnementales d’illumination (*environment maps*) pour guider le rendu sans occultation d’objets aux matériaux de toutes complexités fréquentielles.

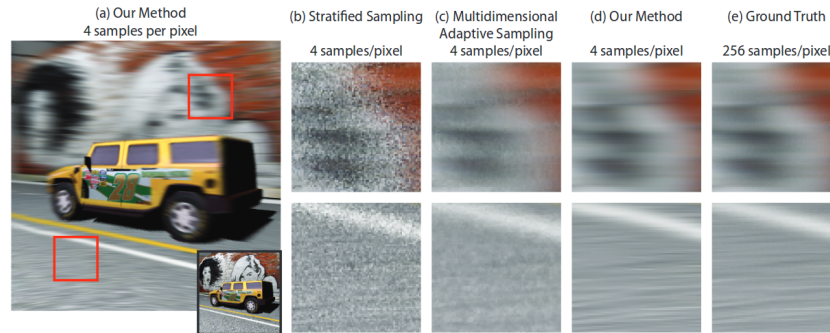


Figure 2.1 – Flou de mouvement : comparaison de la méthode (a), (d) à deux autres méthodes concurrente (b), (c) et l’image témoin (e). *Image de Egan et al. [15].*

L’effet de flou de mouvement (*motion blur*) (Figure 2.1) a reçu sa propre analyse fréquentielle par Egan et al. [15], leur permettant de dériver des taux d’échantillonnages spatio-temporels adaptatifs pour une reconstruction par filtre aligné selon la direction de premier ordre du mouvement. Soler et al. [40] (Figure 2.2) introduisent une analyse du focus et de la profondeur en espace fréquentiel pour adaptativement varier le taux d’échantillonnage et la taille des filtres de reconstruction selon le niveau de focus d’une caméra virtuelle, permettant un rendu plus rapide de la profondeur de champ (*depth of field*).

Egan et al. [13] introduisent une analyse fréquentielle de l’occultation directionnelle permettant le partage d’information d’occultation pour la reconstruction d’effets variant peu spatialement comme l’occultation ambiante (*ambient occlusion*). Par la suite, ils effectuent une analyse fréquentielle pour l’occultation complexe [14] pour dériver un filtre de cisaillement (*sheared filter*) 4D pour la reconstruction d’ombres douces venant de lumières surfaciques, réduisant ainsi les taux d’échantillonnage. Au lieu de se reposer sur le filtre de reconstruction de cisaillement, qui englobe bien le signal fréquentiel mais

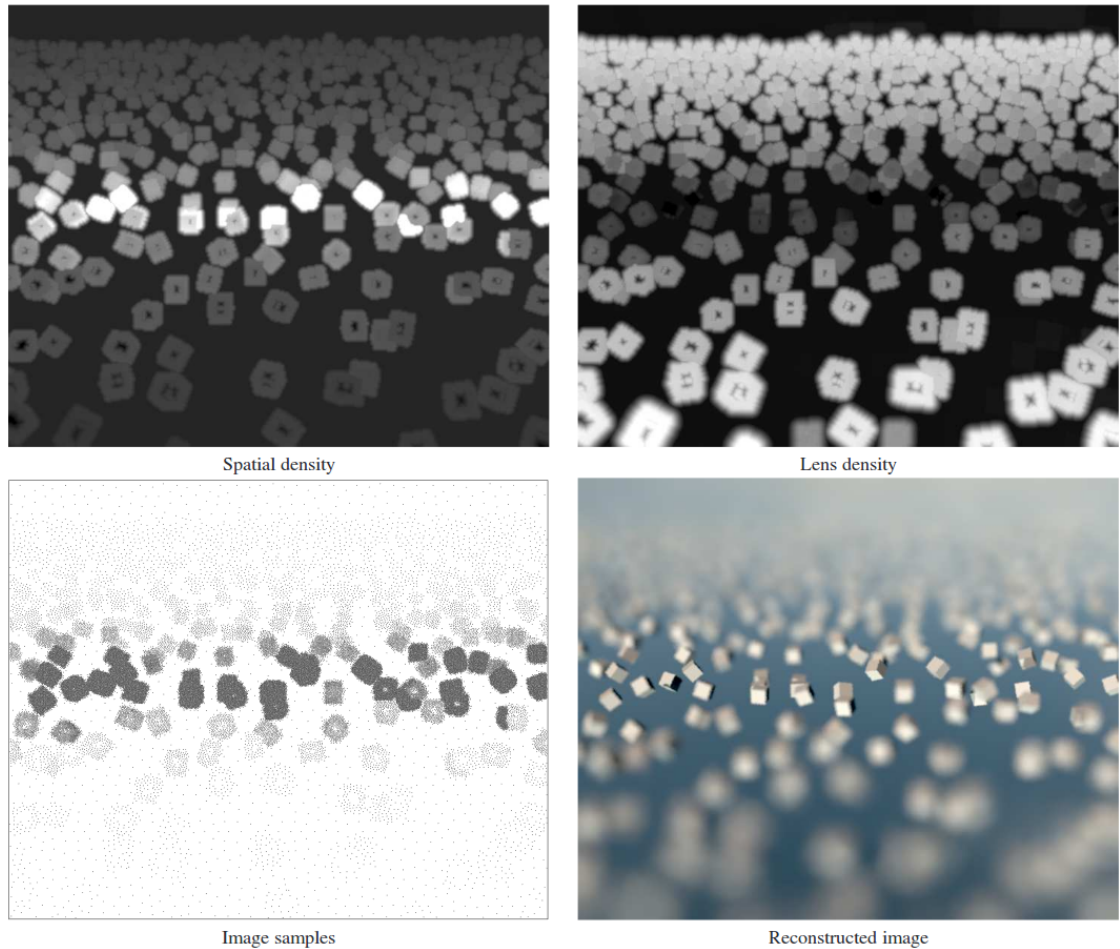


Figure 2.2 – Bande-passante spatiale (a) et dans le domaine de la lentille de la caméra (b). Les taux d'échantillonnage (c) là où la radiance est estimée sont dérivés, permettant la reconstruction (d). *Image de Soler et al. [40]*.

rend les calculs coûteux, Mehta et al. [28] dérivent un filtre aligné sur les axes (*axis-aligned filter*) pour transposer le calcul de filtrage d'une opération en espace objet à une en espace image, réduisant les temps de calcul pour le rendu d'ombres douces par lumière surfacique.

Belcour et al. [7] (Figure 2.3) effectuent une analyse fréquentielle du champ de lumière temporel 5D pour la reconstruction des effets de flou de mouvement et de profondeur de champs en même temps. Ils dérivent leur matrice de covariance 5D permettant

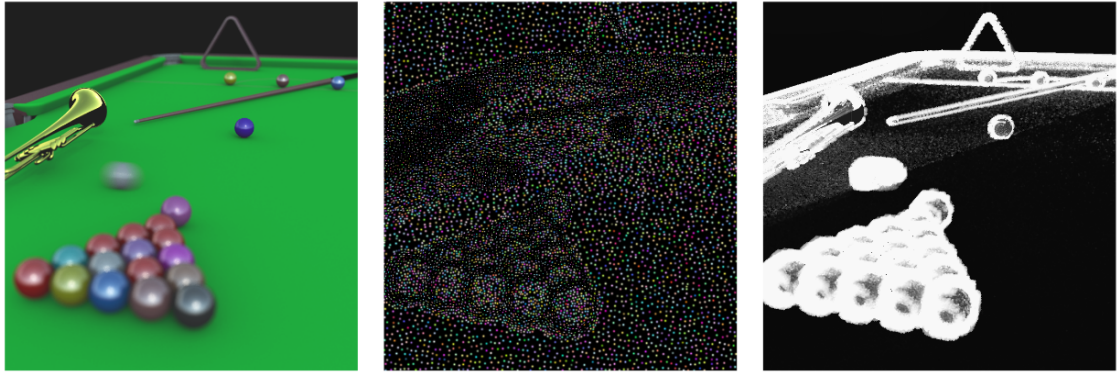


Figure 2.3 – Présentation des centres et tailles de filtre (b), dérivés des taux d'échantillonnage estimés (c) pour une scène présentant du flou de profondeur de champ (a). *Image de Belcour et al. [7].*

de généraliser son application à toutes les interactions du signal dans l'environnement. Une analyse fréquentielle du comportement indirect des champs de lumière fut conduite par Mehta et al. [29], déterminant que le signal de l'illumination indirecte était limité fréquentiellement et permit ainsi de dériver des taux d'échantillonnage et des filtres de reconstruction. Cette année, Mehta et al. [27] (Figure 2.4) proposèrent une approche basée sur une analyse fréquentielle multi-dimensionnelle des champs de lumière directs et indirects provenant de lumières surfaciques ; pour l'échantillonnage adaptatif et la reconstruction de plusieurs effets complexes simultanés : la profondeur de champ, les ombres douces et l'illumination indirecte.

L'idée récurrente de ces analyses est de rassembler de l'information sur le contenu fréquentiel du signal à intégrer pour l'effet voulu, afin de pouvoir dériver des taux d'échantillonnage et des tailles et/ou formes de filtre de reconstruction pour réutiliser le plus possible les contributions déjà calculées et éviter les calculs redondants. À ce niveau de la recherche, certaines techniques continuent à pousser l'analyse pour des effets plus complexes comme la diffusion et l'absorption de la lumière dans les milieux participatifs (*participating media*) comme la fumée, tel que l'article de Belcour et al. [6], ou encore la transluminescence (*subsurface scattering*) ; l'objectif semble aussi se tourner

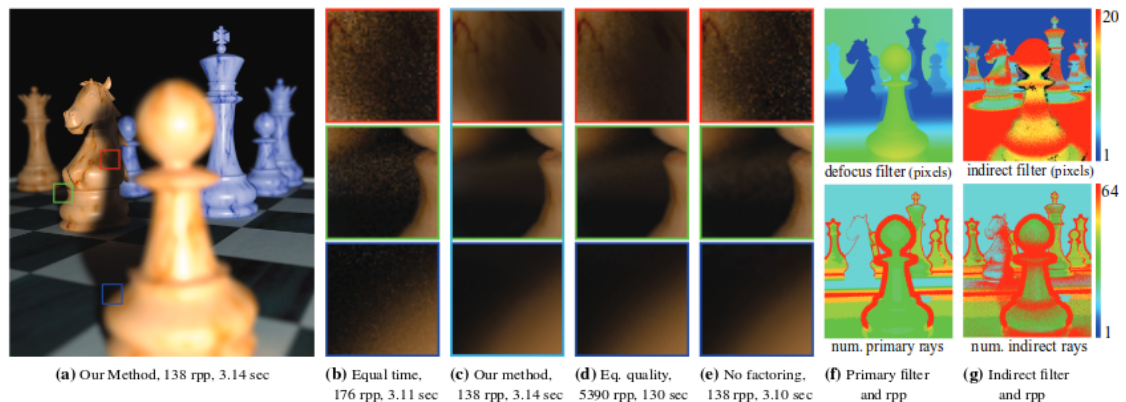


Figure 2.4 – Comparaison de la méthode (a), (c) à un lancer de rayons en temps égal (b) et en qualité égale (d). Visualisation de leur critères d’échantillonnages et de filtrage pour l’illumination directe (f) et indirecte (g). *Images de Mehta et al. [27]*.

vers la conception de techniques plus générales et pratiques, permettant le rendu de plusieurs effets d’illumination différents par le même modèle et visant une intégration dans des systèmes de rendu de production, par exemple en prenant en compte les animations. Par exemple, la méthode de Mehta et al. [27] (Figure 2.4) pour l’illumination par lumière surfacique ; ainsi que la technique que nous proposons dans l’article au chapitre 4 pour l’illumination de toutes fréquences par carte environnementale.

Reconstruction de champs de lumière. En prenant avantage de la continuité et l’anisotropie présente dans l’espace mathématique des champs de lumière, ces techniques permettent la reconstruction d’effets variant peu ou doucement pour des images statiques, telle que les ombres douces, l’illumination indirecte ou encore la profondeur de champ. Elles se basent en entrée sur un résultat d’estimation Monte Carlo pour chaque pixel, donnant une image bruitée mais contenant assez d’information sur la structure du champ de lumière pour permettre sa reconstruction et ainsi filtrer les échantillons et produire un résultat visuellement convergé. Une fois l’entrée connue, la technique dérive pour chaque échantillon un rayon d’influence anisotropique qui va distribuer la contribution d’un échantillon à la fois spatialement et angulairement. Cette distribution

va dépendre du type d'effet souhaité et de la nature de l'échantillon vis-à-vis de cet effet. Par exemple (illustré à la Figure 2.5), un échantillon de matériau diffus pourra partager les contributions de lumière venant de toutes les directions angulaires avec ses voisins de même matériau, rendant le filtre de partage angulairement grand et spatialement petit ; un échantillon de matériau plus spéculaire aura quant à lui peut-être à aller chercher plus loin spatialement pour un autre échantillon qui possède des angles similaires d'incidence de vue et de lumière, rendant son filtre plus petit en angle et plus grand spatialement.

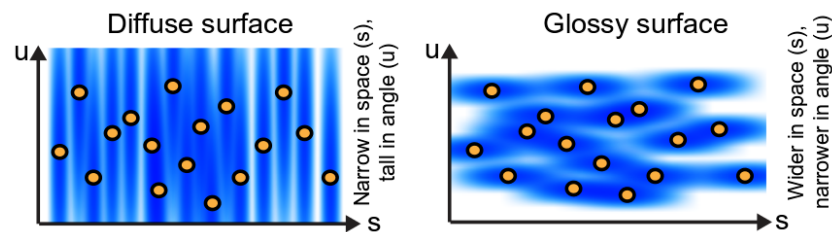


Figure 2.5 – Différences de forme de filtres de reconstruction entre un matériau diffus (a), angulairement très grand et spatialement petit ; et un matériau spéculaire (b), devenant plus grand spatialement et plus petit angulairement lorsque l'exposant spéculaire augmente. *Image de Lehtinen et al. [24].*

Lehtinen et al. mettent en pratique ce type de méthode pour le rendu de profondeur de champ, de flou de mouvement et d'ombre douces [23], ainsi que pour la reconstruction d'illumination indirecte et l'occultation ambiante [24].

Ces méthodes supposent que le champ de lumière est lisse le long de ses directions de reconstruction lors du filtrage anisotropique, ce qui rend ces techniques peu pratiques pour des rendus d'effets de haute variance fréquentielle comme de l'illumination directe toutes fréquences (e.g., ombres nettes, matériaux variant spatialement). Au niveau des performances, ces techniques nécessitent assez d'information en entrée pour pouvoir reconstruire le champ de lumière, impliquant un échantillonnage préalable suffisant. Contrairement à ces techniques de reconstruction pure, l'analyse fréquentielle permet également la dérivation de schémas d'échantillonnage adaptatif en espaces image et objet, faisant de la reconstruction d'effets de toutes fréquences une cible atteignable.

Filtrage en espace image. Ce type de méthodes applique directement des techniques de filtrage à des échantillons convergés en espace image ; ou en utilisant des métriques personnalisées dépendantes de caractéristiques calculées depuis des échantillons non convergés pour chaque pixel. Plutôt que de prendre avantage de la structure cohérente et du contenu fréquentiel du champ de lumière qui peut se calculer même en haute dimensionnalité, comme en analyse fréquentielle, ces techniques formulent le rendu final comme un problème général de reconstruction du signal.

Le filtre bilatéral, introduit par Tomasi et Manduchi [41] est un filtre non linéaire pour le lissage d'images, donnant de bons résultats pour la reconstruction d'arêtes. Durand et Dorsey [12] en développent une version rapide au vu des coûts de calcul de la technique originale. Eisemann et Durand [16] combinent plusieurs images à des niveaux fréquents différents pour réduire le bruit et augmenter les détails de hautes fréquences grâce au filtre bilatéral croisé (*cross-bilateral filter*), qui est un filtre de reconstruction versatile et couramment utilisé depuis. Nous utilisons une version du filtre bilatéral croisé standard, adapté à nos estimés de bande-passante prédite du signal. Ce type de filtre s'adapte bien au cas du filtrage de données bruitées comme le résultat d'une estimation Monte Carlo non convergée, ce qui n'est pas le cas de tous les types de filtres, car il est souvent difficile de faire la différence entre du bruit à filtrer et des détails de hautes fréquences présents dans l'image à rendre (e.g., détails géométriques, nuances rapides de couleur de réflexion, etc.). Cependant, les performances du filtre bilatéral faiblissent à mesure que la taille empruntée du filtre augmente, ce qui s'avère coûteux si aucune stratégie adaptative de la taille de filtre n'est utilisée. Pour pallier à cela, plusieurs techniques de filtrage en espace image ont été mises au point.

Dammertz et al. [10] développent un filtre de reconstruction qui s'inspire du filtre bilatéral et en tire les bénéfices afin d'améliorer les capacités de détection d'arêtes du filtre par ondelettes (*wavelets*) À-Trous, qui est rapide pour le filtrage dans le cas d'échantillons Monte Carlo.

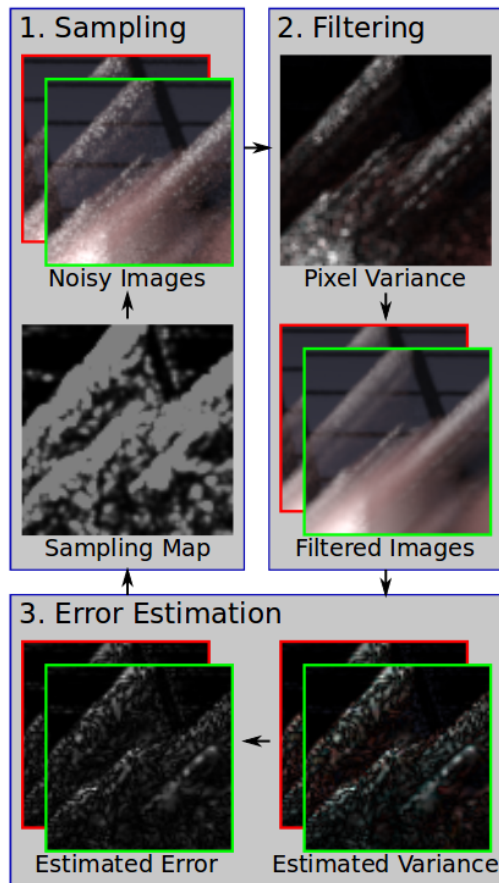


Figure 2.6 – Dans le sens des flèches : Une passe d'échantillonnage épars est établie, d'après laquelle l'image est reconstruite par filtrage. L'erreur relative est estimée par pixel afin de guider l'échantillonnage de la passe suivante, raffinant ainsi rapidement le résultat au fil du temps. *Image de Rousselle et al. [35].*

Rousselle et al. [35] (Figure 2.6) introduisent une méthode itérative de rendu qui utilise des informations sur l'erreur résiduelle par pixel d'images précédentes pour faire varier adaptativement le re-échantillonnage à l'image suivante et ainsi raffiner le résultat rapidement. Ils utilisent un filtre par moyennes non locales, qui diffère du filtre bilat/ral par le fait que leur filtre est spatialement centré entre les deux pixels à moyenner, plutôt que d'être centré seulement sur le pixel à traiter, permettant une meilleure reconstruction pour un coût supplémentaire. De même, Li et al. [25] utilisent une méthode d'estimation de l'erreur moyenne afin de dériver des taux optimaux d'échantillonnage ainsi que des

filtres adaptés, par pixel. Cependant, leur méthode d'estimation d'erreur leur permet de comparer des filtres à noyau asymétriques (tandis que Rousselle et al. ne se basaient que sur des filtres isotropiques comme des gaussiennes) et ainsi de posséder un plus grand éventail de choix selon la situation. Sen et al. [38] (Figure 2.7) appliquent le concept d'information mutuelle tirée du domaine de la théorie de l'information pour chercher des dépendances statistiques entre une contribution estimée par Monte Carlo et les variables aléatoires qui ont été utilisées pour donner cette convergence particulière. En tirant cette information statistique, ils peuvent augmenter l'importance qu'ont certaines caractéristiques (e.g., flou dû au défocus) durant le filtrage bilatéral tout en préservant les détails en limitant l'importance de ces mêmes caractéristiques lorsqu'elles ne contribuent pas statistiquement au résultat (e.g., zone en focus).

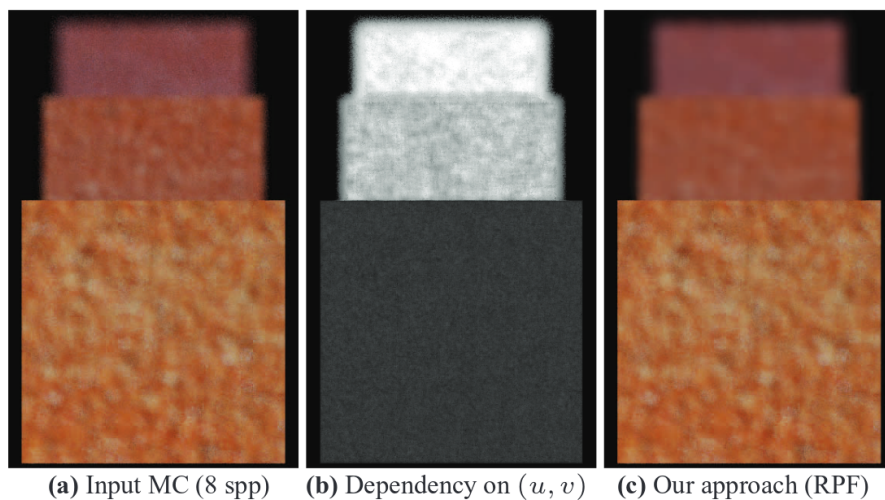


Figure 2.7 – (b) Les pixels les plus affectés par l'échantillonnage aléatoire de la lentille. (c) Réduction du bruit en (a) en variant adaptativement le filtre. *Image de Sen et al. [38].*

Ces types de techniques permettent de bien performer dans beaucoup de scénarios complexes, mais peinent pour les effets de hautes fréquences et pour garder une cohérence temporelle, en plus de leur coût souvent élevé. La méthode de Rousselle et al. possède une forme limitée de filtrage temporel, mais seulement entre images adjacentes, alors que notre système de cache adaptera le filtrage au fil d'une séquence d'animation

complète.

Mise en cache et cohérence temporelle. Dans le cas de techniques de rendu non convergées, où chaque pixel n'a pas été évalué numériquement jusqu'à une convergence visuelle indiscernable d'un résultat analytique (variance nulle), effectuer deux fois le même rendu ne produira pas le même résultat visuel (voir au chapitre 3 pour plus d'informations sur la convergence en échantillonnage Monte Carlo). Pour la production d'animations, ceci induit un problème au niveau de la cohérence temporelle où deux images successives dans l'animation montrent de grandes différences visibles, même pour un pas d'animation infinitésimal. Pour l'observateur, cela résulte en des phénomènes de clignotements (*flickering*) et d'apparitions brusques (*popping*). La mise en cache d'information pour leur réutilisation dans de futures images dans une animation permet d'atténuer ce problème et d'améliorer la cohérence temporelle.

Ward et al. introduisent le cache d'irradiance [48], qui se base sur le fait que, dans presque tous les cas, l'illumination indirecte change lentement sur une surface, donnant ainsi la possibilité d'utiliser de l'interpolation afin de réduire les coûts de calcul. Ainsi, il est possible de calculer seulement une partie de l'illumination indirecte de la scène, à la demande, et d'interpoler les contributions calculées à ces points pour remplir le reste de la surface durant le rendu. Les points où la contribution était calculée numériquement sont adaptativement placés dans la scène dépendamment du point de vue, selon une analyse du premier ordre de de la géométrie et la courbure de la géométrie afin de permettre au mieux le calcul futur de dégradés de couleurs pour chaque surface. Afin de stocker ces contributions calculées, un cache mémoire sous forme d'*octree* divise l'espace de la scène en sous-parties de différentes tailles suivant la distribution des échantillons de contribution : plus les échantillons sont proches spatialement, plus l'espace est subdivisé dans cette région. La taille locale de chaque région indique l'étendue de contribution des échantillons présents. Krivanek et al. étendent l'idée afin de pouvoir stocker la radiance au lieu de l'irradiance [22] : de l'information directionnelle plutôt que omni-

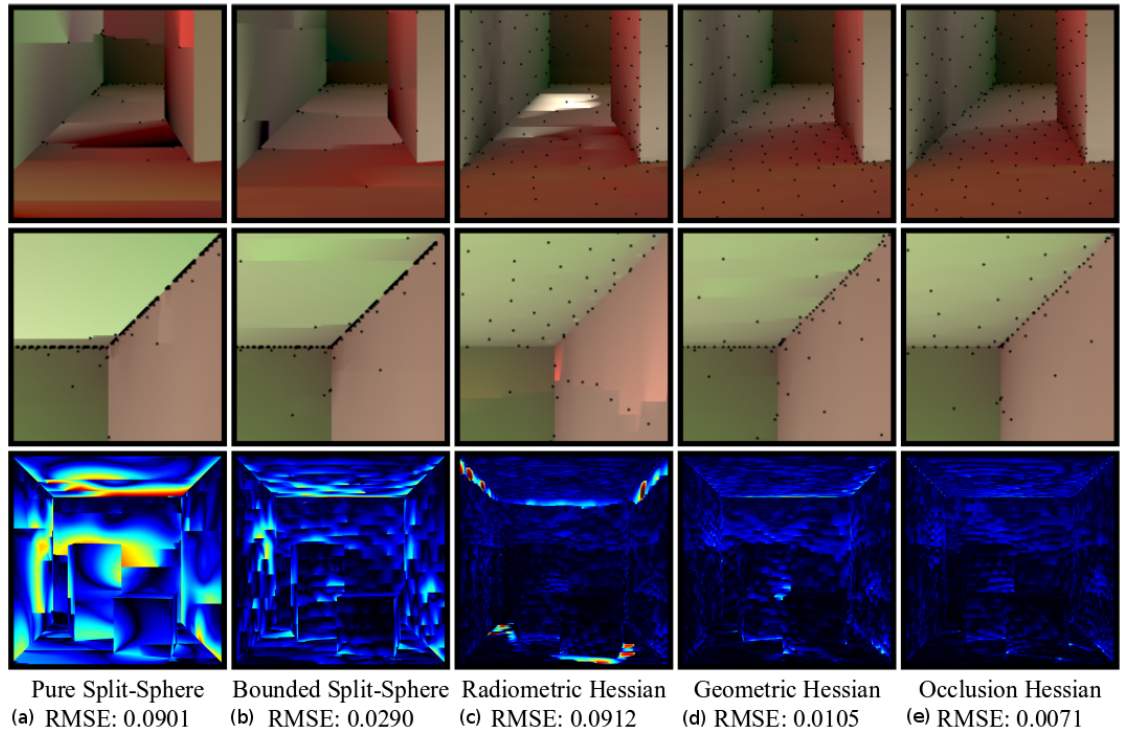


Figure 2.8 – Comparaison de l'échantillonnage et la reconstruction d'irradiance entre le cache d'irradiance (a), (b) et la méthode de second ordre de Schwarzhaupt et al. prenant en compte l'occultation (e). *Images de Schwarzhaupt et al. [37].*

directionnelle. Cette extension permet de pouvoir reconstruire l'illumination indirecte spéculaire de basses fréquences, en plus de l'illumination indirecte diffuse que Ward et al. stockaient. L'information directionnelle était stockée en harmoniques sphériques (*spherical harmonics*), permettant de limiter la taille du cache, mais limitant les réflexions traitées aux basses fréquences uniquement. Contrairement à ces deux méthodes utilisant une analyse de premier ordre pour le placement d'échantillons, Schwarzhaupt et al. [37] utilisent une métrique de second ordre en hessiens (Figure 2.8) afin d'approximer l'erreur relative de l'irradiance, améliorant grandement la précision dans les scènes géométriques plus complexes. Leur technique prend également en compte l'occultation de la scène dans l'hémisphère de calcul de chaque échantillon.

Ces techniques calculent numériquement l'intégrale du rendu indépendamment pour

chaque échantillon, sans adaptativité. De plus, la cohérence temporelle n'est pas prise en compte et l'ensemble d'échantillons possible pour un point de vue peut complètement changer si la caméra est légèrement déplacée, comme décrit précédemment.

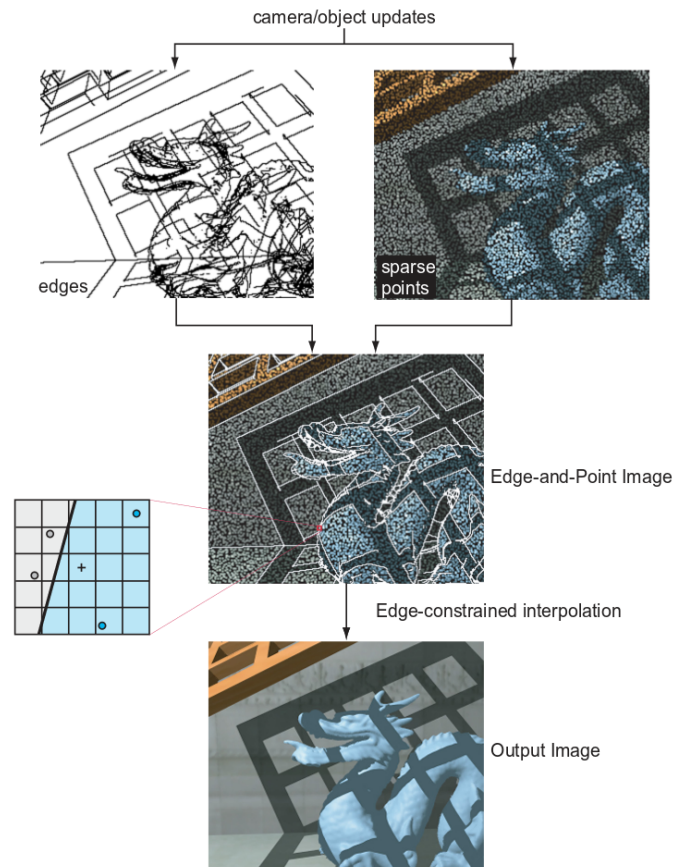


Figure 2.9 – Développement de la technique de Bala et al. combinant un échantillonnage épars et une représentation des arêtes afin de procéder à une interpolation adaptative. *Images de Bala et collègues [3].*

Pour pallier à cela et améliorer la cohérence temporelle du rendu, un autre type de méthode fût introduit par Walter et al., le *render cache* [46]. En mettant dans un cache spatial les échantillons calculés à une image à un instant t , puis en reprojétant ces échantillons depuis leur position dans l'espace jusqu'à la caméra à un instant $t+1$, en tenant en compte de l'occultation changeante entre les deux images, il est possible d'adaptativement prioriser les zones de l'image où aucun échantillon n'a pu être reprojété pour

rééchantillonner l'image et de réutiliser au plus les échantillons qui ont pu être reprojétés afin de réduire l'effet de clignotement. Cette technique permettait l'affichage interactif de scènes mais ne fonctionne que pour des effets ne variant pas angulairement comme les surfaces diffuses. Bala et al. [3] (Figure 2.9) améliorent la reconstruction avec le principe de *render cache*, en stockant à la fois les échantillons calculés et une représentation analytique des arêtes des objets dépendante du point de vue, recalculée interactivement. La méthode permettait alors une reconstruction plus propre par interpolation des échantillons, préservant les arêtes et limitant le phénomène de crênelage (*aliasing*). Nous utilisons cette idée de reprojektion d'échantillons au fil du temps dans notre travail pour améliorer la cohérence temporelle dans les animations. Cependant, nous faisons également usage de nos estimés de bande-passante fréquentielle afin de prendre en compte les variations géométriques, d'occultations (spatiales et temporelles), de réflectance et d'illumination pour assurer une reprojektion d'échantillons valides uniquement. Meyer et al. [30] reprojettent leurs échantillons spatialement et temporellement pour les effets d'illumination indirecte lisses seulement afin d'améliorer la cohérence temporelle. Notre méthode ne s'arrête pas aux effets lisses uniquement et peut traiter des caractéristiques visuelles bien plus nettes.

Dans ce chapitre, nous avons fait un survol de l'état de l'art sur le transport de la lumière et les méthodes adaptatives, en comparant les forces et les faiblesses des différentes techniques disponibles et en faisant un parallèle, où applicable, avec la méthode que nous introduisons au chapitre 4. Avant d'entrer dans le sujet de l'article, nous présentons au prochain chapitre un survol du bagage technique nécessaire à la compréhension du sujet.

CHAPITRE 3

CONTEXTE TECHNIQUE

Afin de donner une intuition mathématique sur les sujets traités et de préparer à la lecture de l'article au chapitre 4, ce chapitre présente de manière brève les différents thèmes en relation avec le sujet traité et les liens que chaque thème possède avec la technique proposée dans l'article.

3.1 Transport de la lumière

Les algorithmes de transport de la lumière cherchent à simuler le comportement de la lumière le plus réalistiquement possible. Dans le cadre de la synthèse d'images, les lois que la physique nous donne sur le comportement de la lumière permettent un niveau de réalisme assez convaincant pour la totalité des effets qu'il serait possible d'imaginer simuler. Dans notre travail, nous nous concentrons sur les propriétés de réflexion géométrique uniquement. La lumière est simulée par des particules (photons) se déplaçant en ligne droite dans l'espace et change son comportement uniquement quand elle entre en contact avec une surface. Nous évitons également de prendre en compte le phénomène de réfraction dans la surface. Ces effets, bien qu'étudiés avec l'analyse fréquentielle et simulables avec le lancer de rayons, comme démontré par les travaux antérieurs, sont trop coûteux pour notre cas, qui est l'étude toutes fréquences de réflexions surfaciques dans le cas d'animations sous illumination par carte d'environnement.

Cette première section donne une plus grande intuition sur les concepts reliés à la simulation du transport de la lumière grâce aux techniques de lancer de rayons.

3.1.1 Estimation de la radiance

Pour notre cas d'étude de réflexion géométrique, les photons se déplacent en ligne droite dans l'espace et la lumière conserve son énergie entre deux surfaces. Lors d'une intersection avec une surface, on peut estimer l'intensité qu'elle reçoit, qui est proportionnelle à la densité de rayons de photons arrivant au point.

Rendu par intégration. Kajiya [?] propose l'équation de rendu (équation 3.1), qui permet d'estimer ce phénomène :

$$L(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_{\Omega} \rho(x, \omega, \omega') L(x, \omega') (\omega' \cdot \mathbf{n}) d\omega'. \quad (3.1)$$

La valeur à calculer $L(x, \omega)$ est la radiance quittant le point x dans la direction ω . Pour le rendu d'illumination directe, ω est la direction du point x vers la caméra (i.e., $L(x, \omega)$ devient l'intensité du pixel représentant ce point de surface). L_e est le terme d'émission lumineuse de la surface ; l'équation peut donc se simplifier à une intégrale sur toutes les directions incidentes dans l'hémisphère Ω à la surface au point x de normale \mathbf{n} . $\rho(x, \omega, \omega')$ est la fonction de distribution bi-directionnelle de réflectance (*bidirectional reflectance distribution function, BRDF*), modélisant la distribution probabiliste des directions incidentes ω' possibles d'un matériau en particulier, si l'on connaît la direction sortante ω . Le facteur $L(x, \omega')$ est la radiance arrivant au point x depuis la direction incidente ω' . Finalement le terme $(\omega' \cdot \mathbf{n})$ est le factor de forme dû à l'angle incident.

Malédiction de la dimensionnalité. Pour l'illumination directe, le domaine d'intégration Ω est reparamétrisable selon différents sous-domaines possibles pour limiter le coût (i.e., s'il n'y a qu'une seule lumière ponctuelle dans la scène, le domaine d'intégration devient infiniment petit en angle : la lumière n'arrive que d'une direction incidente). L'illumination directe représente le cas d'une direction sortante unique : vers la caméra. Dans le cas du traitement de l'illumination indirecte, la direction sortante ω peut éga-

lement être la direction vers une autre surface de la scène, rendant l'évaluation de cette intégrale récursive sur le domaine de tous les chemins de lumière possibles : techniquement une infinité de dimensions. Si un phénomène de champ de profondeur veut être appliqué, deux dimensions d'intégration au niveau de la lentille de la caméra doivent également être ajoutées. D'autres effets supplémentaires ajoutent également au nombre de dimensions d'intégration à traiter, menant ainsi au phénomène de malédiction de la dimension (*curse of dimensionality*). De ce fait, les méthodes traditionnelles d'intégration, comme par quadrature gaussienne où les positions et poids d'évaluation sont prédéterminés, deviennent intraitables au fur et à mesure de l'augmentation des dimensions explorées. Des méthodes probabilistes d'échantillonnage, indépendantes du nombre de dimensions, devinrent ainsi communément employées. Kajiya établit l'équation de rendu sous forme d'intégrale, rendant possible son évaluation par échantillonnage ; ce qu'il fit en définissant le premier algorithme de transport non biaisé Monte Carlo.

Intégration Monte Carlo. Les techniques d'intégration Monte Carlo se basent sur l'échantillonnage probabiliste pour l'estimation d'intégrales définies, en choisissant des points indépendants aléatoires auxquels l'intégrande est évaluée, puis en moyennant (espérance mathématique) les contributions calculées. Ainsi, pour un nombre N de points x_1, \dots, x_N , échantillonnés indépendamment selon une fonction de densité p , on peut calculer un estimé F_N de l'intégrale f , qui dépend du nombre d'échantillons N utilisés :

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}. \quad (3.2)$$

Comme précédemment évoqué, l'avantage des techniques d'intégration Monte Carlo est leur découplage du nombre de dimensions au niveau de la convergence. Ainsi, le résultat converge vers la solution réelle à un taux en $O(N^{-1/2})$, i.e., quadrupler le nombre d'échantillons utilisés divisera l'erreur statistique par deux. De plus, ces techniques sont théoriquement simples et en pratique ne requièrent que la possibilité d'échantillonner et d'évaluer l'intégrande. Une fonction de distribution effectivement proportionnelle à l'in-

tégrande permettra aussi un échantillonnage précis et capable de trouver les singularités possiblement présentes. Plus de détails sur les fonctions de distribution sont présents dans le chapitre suivant.

Une grande partie de la recherche a pour objectif d'améliorer les performances de rendu pour permettre le rendu en temps réel ou interactif, ou même pour réduire les temps de calcul à plusieurs minutes, plutôt que quelques heures. Au chapitre précédent, nous avons évoqué des méthodes utilisant des schémas d'échantillonnage épars, laissant des zones de l'image vides, ne calculant numériquement l'intégrale qu'à ces échantillons, et remplissant les zones vides par filtrage. Ce type de méthodes induit un *biais*, ne pouvant pas garantir que les valeurs reconstruites correspondent à la valeur calculée durant l'intégration hémisphérique. Mathématiquement, $F_N - f$ est l'*erreur* et son espérance $\beta(F_N) = E[F_N - f]$ est le *biais*. Un estimateur est dit *consistant* si $\lim_{N \rightarrow \infty} (F_N - f) = 0$ avec une probabilité égale à 1. Il est dit *non biaisé* si son biais est égal à 0 pour toute valeur de N . Un estimateur biaisé calculera donc la mauvaise réponse à l'intégrale en moyenne, mais convergera vers la bonne réponse en augmentant le nombre d'échantillons alloués si il est également consistant. Un estimateur non-biaisé calculera la bonne réponse en moyenne, i.e., lancer et combiner M différentes estimations de N échantillons de l'intégrale est équivalent à lancer une fois l'estimateur avec $M \times N$ échantillons.

Développer des méthodes non biaisées leur permet d'être *robustes*, mais les méthodes biaisées restent attrayantes du fait qu'elles permettent souvent une convergence plus rapide du résultat vers quelque chose de perceptuellement correct, ce qui est acceptable pour une audience humaine. Les méthodes robustes permettent la synthèse d'images dites témoin (*ground truth*), des images réalisées avec des milliers d'échantillons par une méthode non biaisée pour l'utiliser par la suite comme comparaison au niveau de l'erreur mathématique ou en qualité perceptuelle pour une technique en développement.

Les méthodes Monte Carlo sont très dépendentes du nombre d'échantillons, et des estimations manquant d'échantillons produisent du bruit haute fréquence au niveau de

l'image résultante, surtout si l'espace à intégrer et le nombre de dimensions de l'intégrale sont grands. Ce bruit est communément mesuré avec la variance (équation 3.3) de l'échantillonnage : une haute variance implique un grand bruit perceptible. Pour une méthode par échantillonnage comme Monte Carlo, la variance est également calculée statistiquement et se base sur les échantillons déjà calculés :

$$\begin{aligned}
 V(F_N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \bar{f})^2 \\
 &= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)^2 \right) - \bar{f}^2 \\
 &= E[F_N^2] - E[F_N]^2,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec $\bar{f} = (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i))$.

Techniques de réduction de la variance. Pour échantillonner l'intégrale, les techniques Monte Carlo se basent sur une fonction de densité probabiliste (*probability density function, PDF*) afin de déterminer le placement d'échantillons. Au lieu d'échantillonner l'intégrale uniformément dans son domaine d'intégration (Ω dans notre cas), l'échantillonnage par importance (*importance sampling, IS*) [19] tire les échantillons selon une fonction d'importance. Cette fonction d'importance devrait être idéalement égale ou proportionnelle à la fonction à intégrer ; dans ce cas, la variance peut être réduite. En pratique, il est impossible de trouver une telle fonction hormis pour des cas d'études simples. Il est possible d'approcher une telle fonction en déconstruisant la fonction à intégrer f et en tirant une sous-partie g de cette fonction, qui elle peut être pré-intégrée analytiquement (comme certaines BRDFs) ou reconstruite adaptativement. De ce fait, pour en revenir à l'équation du rendu, il est par exemple possible de prendre $\rho(x, \omega, \omega')$ comme PDF et ainsi d'échantillonner $L \propto \rho$. Fonctionner ainsi sera efficace dans le cas où la BRDF est relativement spéculaire : le cône spéculaire sera privilégié pour le lancer d'échantillons d'intégration et une bonne approximation de la lumière in-

cidente sera plus rapidement atteinte. Pour un matériau diffus cependant, échantillonner proportionnellement à ρ n'aura pas d'effet positif si l'illumination et la visibilité sont de hautes fréquences dans l'hémisphère au point ; résultant en une grande variance dans l'estimation et visuellement, du bruit. Néanmoins, la technique d'échantillonnage selon l'importance permet une réduction importante de la variance dans beaucoup de cas, et permet d'efficacement trouver les singularités si la fonction de densité est proportionnelle à l'intégrande. Dans le cas où cette fonction est mal conçue (e.g., l'inverse de f est prise comme PDF), l'échantillonnage selon l'importance peut au contraire porter défaut, en échantillonnant mal le domaine de la fonction et en associant des poids inadéquates à chaque contribution.

Afin d'améliorer la réduction de variance de l'équation du rendu qui est souvent complexe et de toutes fréquences, Veach et Guibas [44] introduisent l'échantillonnage selon de multiples fonctions d'importance (*multiple importance sampling, MIS*). Cette méthode échantillonne selon plusieurs PDFs puis combine les contributions avec un système de poids en fonction de la distribution utilisée. Cette technique permet d'améliorer grandement la réduction de variance si des PDFs ajustées aux différents termes de l'intégrande sont utilisés. MIS peut cependant amener à de faibles performances, inférieures à IS, si une partie des fonctions de densité utilisées représentent mal l'intégrande en tout point. Intuitivement, pour un matériau spéculaire, combiner un échantillonnage selon la BRDF et un échantillonnage uniforme avec MIS donnera dans la plupart des cas de plus faibles résultats que de l'échantillonnage selon la BRDF seulement. Néanmoins, l'échantillonnage selon plusieurs fonctions d'importance est généralement vue comme une méthode solide de réduction de la variance durant l'intégration.

Notre technique utilise MIS durant l'intégration, avec une fonction de densité selon la BRDF à la surface, résolvable analytiquement, et une fonction selon l'importance de la carte environnementale d'illumination, que nous pré-calculons par carte.

3.2 Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle permet l'étude des variations d'un signal sur un domaine donné. Du point de vue de l'analyse du signal, une fonction variant rapidement possèdera plus d'information fréquentielle qu'une variant lentement. Un signal à faibles variations serait donc théoriquement plus simple à filtrer, ouvrant la possibilité de reconstruction par des filtres plus étendus et moins nombreux. Du point de vue de l'analyse fréquentielle d'images, le domaine est spatial, composé des intensités de chaque pixel composant l'image. La transformée de Fourier (équation 3.4) permet d'exprimer le signal 2D représentant l'image en termes d'amplitude par rapport à la fréquence, plutôt que par rapport à la position :

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \exp -2i\pi\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x} d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

La transformée calcule le *spectre fréquentiel* \hat{f} de la fonction f (indexée par $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$) à une fréquence donnée $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$. Ce spectre est de nature complexe et se sépare entre la partie réelle et la partie imaginaire, où l'*amplitude* du signal décrit l'énergie de la fonction primale associée à la fréquence $\boldsymbol{\xi}$; et la *phase* associée décrit le décalage pour cette même fréquence.

Dans le cas intuitif d'étude fréquentielle d'images, le domaine est défini sur \mathbb{R}^2 . Il est possible d'étudier le contenu fréquentiel d'une image au complet, mais il est surtout intéressant de découper l'image en sous-parties afin d'étudier comment le contenu fréquentiel évolue en fonction des régions de l'image.

La figure 3.1 démontre la relation entre l'espace primal et l'espace fréquentiel de différentes parties d'une image. Le cadre brun par exemple possède beaucoup de détails fins (cheveux) en espace primal, ce qui se reflète par un vaste contenu fréquentiel difficilement catégorisable. Au contraire, le cadre rouge montre la relation entre un dégradé lent de couleurs en espace primal et son amplitude fréquentielle identifiable et compacte autour de l'origine. Notez également la possibilité de discerner la direction principale



Figure 3.1 – Comparaison de contenus fréquentiels de différentes parties d’une même image. *Image de Belcour [5]*.

de variations, par exemple pour les cadres jaunes et bleus, ce qui a une importance non-négligeable pour l’analyse. Un autre bénéfice de l’utilisation de la théorie de Fourier pour cette analyse est le théorème de convolution-multiplication associé à la transformée, qui établit qu’une convolution dans l’espace primal devient une multiplication dans l’espace fréquentiel, et vice-versa ; une caractéristique qui va être très utile par la suite.

Dès lors, l’étude fréquentielle permet d’acquérir une intuition supplémentaire sur le signal primal. Nous prenons l’exemple de l’étude fréquentielle du transport de la lumière de Durand et al. [11], sur laquelle notre technique se base, afin de montrer comment cette information sur le spectre fréquentiel de chemins de lumière dans l’espace donne la possibilité de dériver des taux d’échantillonnage précis et des tailles de filtre de reconstruction, afin d’adaptativement procéder au rendu par intégration Monte Carlo.

3.2.1 Analyse fréquentielle du transport de la lumière

La méthode de Durand et al. [11] se base sur une étude des changements qui s’effectuent sur le spectre fréquentiel de champs de lumière locaux infinitésimaux durant le transport de la lumière depuis la source jusqu’au point de vue. Leur étude est réalisée en

2D mais ils démontrent qu'elle s'étend à la 3D du fait que l'étude est faite sur les champs de lumière locaux.

Ils définissent le champ de lumière comme une coupe de la radiance établissant une ligne virtuelle du plan, orthogonal à un rayon central établissant la direction principale du champ. Chaque rayon de lumière associé au champ peut donc se réduire à une caractéristique 2D relative au rayon central (Figure 3.2(a)) : une composante spatiale pour l'origine du rayon défini comme un delta relatif à l'origine du rayon central, et une composante directionnelle sphérique pour l'orientation du rayon. Pour généraliser l'étude à la 3D, il est possible d'augmenter cette représentation à un champ de lumière en quatre dimensions : la ligne virtuelle devient un plan orienté dans l'espace par un rayon central, chaque rayon étant défini relatif au rayon central par deux composantes spatiales sur le plan, et deux composantes angulaires pour la direction.

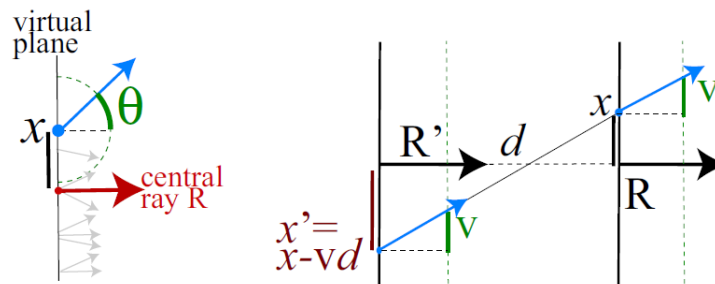


Figure 3.2 – À gauche : caractérisation 2D (x, θ) d'un champ de lumière. À droite : une variation angulaire au niveau du champ de lumière émetteur se transforme en variation spatiale au niveau du champ de lumière récepteur. La dimension angulaire reste inchangée. *Images de Durand et al. [11]*.

Ils étudient le spectre fréquentiel du champ de radiance 2D défini, permettant le calcul d'une image d'amplitude comme présenté à la figure 3.1, avec la composante spatiale en abscisse et la composante angulaire en ordonnée. La figure 3.3 donne une intuition visuelle sur l'effet de la transformée de Fourier sur deux types de signaux représentant des types d'illumination en espace primal (espace du champ de lumière 2D dans notre cas) : une lumière ponctuelle et une lumière *spot*.

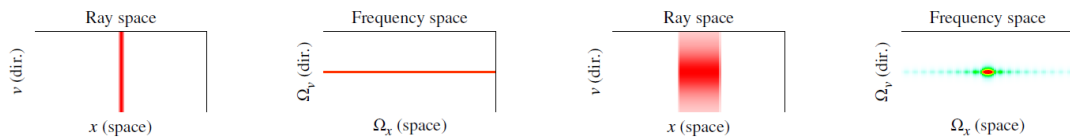


Figure 3.3 – De gauche à droite : une lumière ponctuelle est un Dirac spatialement, et une constante angulairement ; sa transformée est une constante spatialement, et un Dirac en angle ; une lumière *spot* avec une ampoule de taille finie spatialement possède une atténuation lisse en angle ; sa transformée est une *sinc* spatialement et une Gaussienne angulairement. *Images de Durand et al. [11]*.

En parallèle, pour notre travail, nous utilisons seulement de l'illumination provenant de cartes d'environnement. Ce type d'illumination possède du contenu fréquentiel pouvant avoir de très hautes fréquences sur tout le domaine angulaire, mais ne possédant aucune composante spatiale ; i.e., la radiance de deux points convergés sur un plan sans occultation, illuminé par carte d'environnement, sera la même quelque soit la distance entre les points.

Si le contenu fréquentiel de l'illumination d'où vient le chemin de lumière est connu, le reste de l'analyse étudie comment ce contenu évolue jusqu'à la caméra. Vu que les médias participatifs (e.g., fumée) ainsi que les phénomènes de dispersion et réfraction ne sont pas considérés, les phénomènes qui modifient le spectre (Figure 3.4) sont : le transport dans l'espace, l'occultation partielle du champ de lumière durant le transport et la réflexion à une surface, décomposée en plusieurs étapes vu que l'on considère des voisinages de rayons n'évoluant que dans une direction globale à la fois.

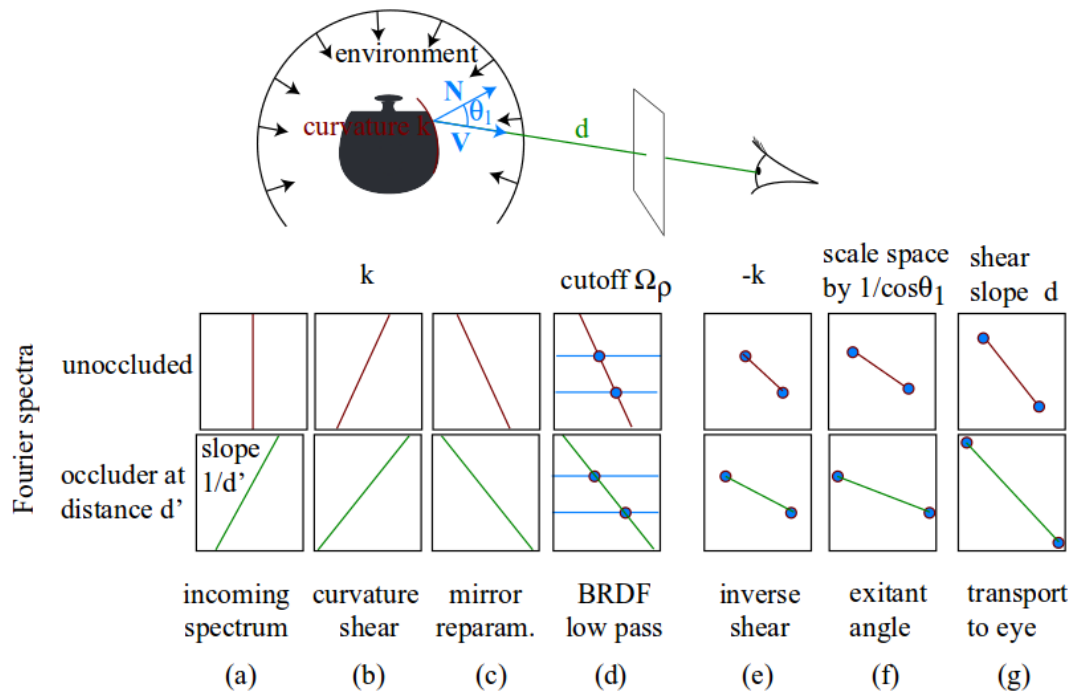


Figure 3.4 – Étapes modifiant le contenu fréquentiel des champs de lumière le long d'un chemin depuis la source de lumière jusqu'à la caméra, dans le cas d'illumination par carte d'environnement à intensité constante. *Image de Durand et al. [11].*

Pour le transport dans l'espace (Figure 3.4(a)), les variations angulaires que prennent les rayons présents dans un champ de lumière émetteur deviennent des transformations spatiales au niveau d'un champ de lumière récepteur parallèle (Figure 3.2(b)). Cela induit un cisaillement angulaire en primal, en spatial dans le spectre. Plus la distance de transport est longue, plus le cisaillement sera important.

L'occultation est plus complexe car la fréquence spatiale et l'orientation des objets occultants modifient le contenu fréquentiel, et induisent possiblement de hautes fréquences et discontinuités à la radiance. En général, la radiance est multipliée par la fonction d'occultation binaire définissant les objets occultants. En espace fréquentiel, cela revient à une convolution. Pour estimer l'effet dans leur application "preuve de concept", Durand et al. prévoient le pire cas possible et surestiment les fréquences des objets occultants, en les approximant à une distance d' par un cisaillement de $1/d'$, en se

basant sur le concept du transport (Figure 3.4(a)), évitant ainsi une coûteuse convolution.

La réflexion à la surface est une succession d'étapes prenant en compte la courbure à la surface (Figure 3.4(b,e)), la reparamétrisation (Figure 3.4(c)), la convolution par la BRDF (Figure 3.4(d)) et le facteur de forme (Figure 3.4(f)). Ici, l'étape importante qui prend avantage de la théorie de Fourier est la convolution par la BRDF, qui devient une multiplication en espace fréquentiel, permettant un traitement instantané. Cette multiplication agit comme un seuil passe-bas, coupant (*band-limiting*) le contenu fréquentiel angulaire d'autant plus que la BRDF est rugueuse. Pour un exemple à l'extrême, dans le cas d'une réflexion miroir, le signal est un Dirac angulaire en primal, mais devient un Dirac spatial en espace fréquentiel, n'effectuant ainsi aucun changement lors de la multiplication fréquentielle.

3.2.2 Application à l'échantillonnage et reconstruction adaptative

Bien que l'analyse soit effectuée dans le domaine fréquentiel, Durand et al. [11] montrent une application "preuve de concept" utilisant l'analyse pour guider l'échantillonnage adaptatif en espace image qui n'a pas besoin d'effectuer de transformées de Fourier. Leur application étudie le rendu d'illumination directe de surfaces diffuses et modérément spéculaires illuminées par carte d'environnement afin d'effectuer un échantillonnage épars, puis de reconstruire les pixels non évalués par filtrage bilatéral. Leur méthode d'intégration (MIS) est non biaisée, mais le fait d'utiliser le filtre bilatéral Gaussien rend la méthode biaisée dans son entièreté.

En réutilisant l'analyse des différentes interactions de la lumière dans la scène jusqu'à la caméra, ils dérivent une sur-approximation de la bande-passante angulaire fréquentielle de la lumière arrivant à la caméra.

$$B = d \frac{1}{\omega \cdot \mathbf{n}} \left(\frac{1}{d'} + 2k \right) \Omega_\rho \quad (3.5)$$

La bande-passante angulaire B du signal arrive à la caméra après une occultation

possible $\frac{1}{d^r}$ entre la lumière et la surface ; la réflexion à la surface, comprenant : le facteur de forme $\frac{1}{\omega \cdot \mathbf{n}}$, la courbure géométrique à l'incidence et à la sortie de la surface $2k$, et la bande-passante Ω_ρ de la BRDF, approximée depuis son exposant ; et finalement le transport d entre la surface et la caméra. Cet estimé de la bande-passante est calculable à chaque pixel simplement d'après des images d'information (*g-buffers*) [36]. Cependant, un échantillonnage de la visibilité est nécessaire afin d'estimer la distance harmonique moyenne des objets occultants $\frac{1}{d^r}$ dans l'hémisphère de l'échantillon à évaluer. Pour ce faire, ils procèdent à un échantillonnage uniforme avec un nombre d'échantillons fixe en espace image, auxquels points l'occultation est estimée, puis reconstruisent l'occultation par filtrage en espace image également ; ceci pour chaque image.

En connaissant la bande-passante par pixel, ils peuvent l'utiliser comme critère (importance) d'échantillonnage adaptatif en espace image (Figure 3.5), distribuant ainsi proportionnellement plus d'échantillons là où le critère est plus élevé.

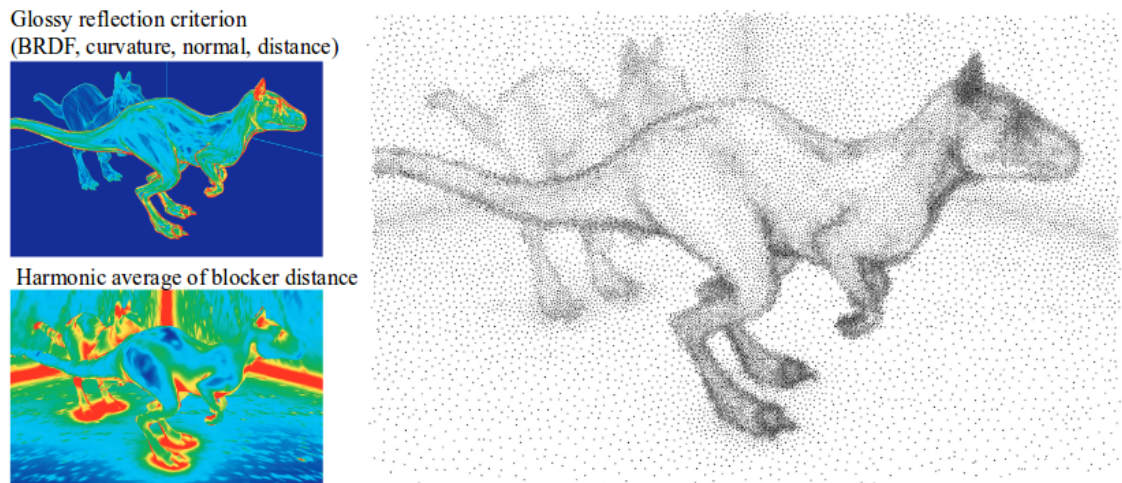


Figure 3.5 – Critère de Durand et al. prenant en compte la courbure, la bande-passante de la BRDF, la distance, l'angle d'incidence, la normale et la distance harmonique hémisphérique des objets occultants afin de dériver le schéma de placement d'échantillons. *Image de Durand et al. [11].*

En suivant le même principe que pour l'échantillonnage adaptatif, le critère peut aussi être utilisé pour guider la taille des filtres utilisés pour la reconstruction. Ainsi, une valeur de critère importante spécifie une taille de filtre plus étroite. Intuitivement, une région moyennement spéculaire avec une haute courbure géométrique sera grandement échantillonnée spatialement et les filtres de reconstruction seront choisis relativement petits ; résultant en une estimation plus complète et une reconstruction plus fine, préservant les détails géométriques et de réflectance. Au contraire, la technique permet un gain important de performance de calcul là où les détails de géométrie et de réflectance varient lentement spatialement : un échantillonnage très épars réutilisera cette information dans une grande région.

L'analyse fréquentielle du transport de la lumière de Durand et al. [11] ouvre de nouveaux horizons pour de nouvelles techniques adaptatives en effectuant une étude théorique capitale au domaine de la synthèse d'images réalistes. Cependant, comme ils le précisent eux-mêmes, la "preuve de concept" développée est loin de pouvoir rivaliser en terme de qualité avec ses techniques contemporaines.

La technique que nous proposons au chapitre suivant a pour objectif la résolution de certaines des lacunes présentes afin de permettre une mise en pratique plus efficace de l'analyse théorique présentée. Parmi les voies d'amélioration que nous visons : la prise en compte de l'illumination dans le prédicat pour une meilleure approximation de l'occultation, une amélioration de la cohérence temporelle pour le rendu d'animations se basant sur un système de mise en cache temporel d'échantillons à la manière du *render cache* [46], la possibilité d'utiliser des matériaux et une illumination toutes fréquences et non de se limiter aux effets de réflectance variant peu spatialement, et une technique de filtrage bilatéral moins biaisée et plus précise reposant davantage sur l'étude fréquentielle.

CHAPITRE 4

A PRACTICAL FOURIER RADIANCE CACHE FOR ADAPTIVE RENDERING OF ANIMATIONS

Ce chapitre expose notre article dans la langue originale de publication. Les auteurs sont Renaud Adrien Dubouchet, Laurent Belcour et Derek Nowrouzezahrai. L'article est en prévision de soumission et certains résultats ne sont pas encore disponibles.

4.1 Abstract



Figure 4.1 – We show stills from the DINO animation with five detailed dinosaurs bouncing off a dune, lit by environment maps of different frequency content, from higher to lower (GALILEO, MONUMENT, PISA).

Physically-based rendering algorithms often compute pixel intensities independently, failing to leverage the coherence of shading in image (and object) space, leading to redundant computation. We propose a simple and practical approach to rendering images and animation sequences that only shades a fraction of the pixels at any time. Our approach is the first to separately treat (and couple) sample placement and reuse in the *spatial* domain, *directional* integration sample placement, and final image reconstruction. We extend frequency-based analyses of light transport to determine shading and image sampling densities, deriving new frequency bandwidths that properly account for the complexity of incident light, visibility and occlusion, BRDF, local geometric variation, and temporal coherence during animation. We apply a more robust reconstruction

formulation when rendering our final images from sparse sets of shading points placed according to our frequency-based oracles (often $< 25\%$ of the pixels, per frame). Animations are treated as a first-class citizen, exploiting a lightweight caching scheme that is also driven by our frequency-based oracles, seamlessly handling occlusion and reflectance changes from camera and object motion.

4.2 Introduction

In realistic image synthesis, a pixel’s final intensity is computed by estimating a multi-dimensional shading integral. To accelerate rendering, previous directions of work have either addressed the computation of *individual* pixels, by improving the underlying numerical integration routines (e.g., path-integral and density-estimation approaches [18, 20] and importance sampling [44]), or have sought to amortize the computation *across regions* of an image using adaptive methods based on predictive models of light transport (e.g., interpolants and filters derived from frequency-space [11] or first-order [34] analyses).

We propose an adaptive approach to render animations lit by environment lighting, conducting adaptive sampling in *both* image/object space, as well as during numerical integration at each image sample. We devise a simple and lightweight caching scheme, for temporally coherent rendering, that explicitly treats occlusion and reflectance changes caused by object, camera, and lighting motions. Unlike previous work, we can faithfully reconstruct complex all-frequency shading effects, including shadows and reflections under motion, without maintaining a heavyweight ray-space cache ; our approach integrates seamlessly into standard rendering pipelines.

We develop new sample placement and integration oracles using an extension of frequency-based light transport analysis [11], and we additionally leverage these oracles during final image reconstruction. We are able to render images using very few ($< 25\%$) image samples, clearly reconstructing complex reflections from glossy surfaces. Our

frequency-analysis extends previous work to additionally treat spherical lighting integration and temporally-varying occlusion changes, to support animation sequences using a lightweight caching scheme, and to conduct a more robust and detail-preserving final image reconstruction.

We significantly reduce the computation necessary for generating high-quality images and temporally coherent animations, reproducing all-frequency direct illumination effects from environment lighting by applying three simple concepts :

1. we render using a carefully chosen *sparse* set of shaded pixels,
2. when we do shade a point, we adapt its spherical sampling rate according to variations in lighting, BRDF, and occlusion, and
3. for animations, we further reduce both the image and spherical integration sampling rates by carefully reusing information from previous frames according to our frequency analysis, properly accounting for shading and occlusion variations over time.

Specifically, our work consists of the following contributions :

- a frequency analysis of sample placement and reuse, within and across frames, that amortizes shading computations over space, time, and integration domains,
- an adaptive integration scheme based on material, lighting, and visibility statistics devised from our new frequency-analysis,
- a practical lightweight caching scheme that reuses, discards, and recomputes shading and occlusion information over time, according to our frequency-analysis, in order to control error, and
- an extension to cross-bilateral filtering to more accurately reconstruct final images from our sparse image samples.

4.3 Previous Work

Frequency Analysis of Light Transport. Durand et al. [11] proposed a frequency-analysis of local surface lightfields, applying it to a proof-of-concept adaptive image

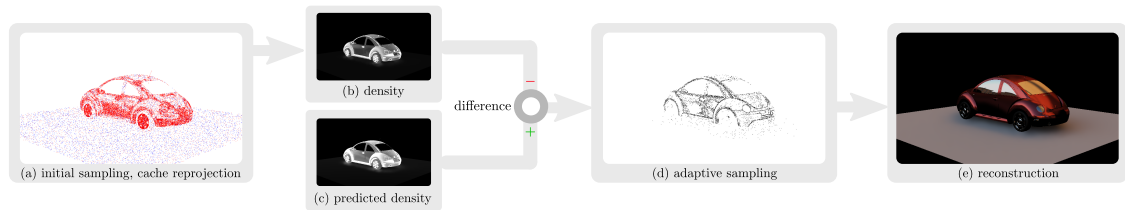


Figure 4.2 – After an initial sparse image-space sampling ((a), in blue), and (optional) cached point reprojection ((a), in red), we compute the sampling density from this first set (b) and subtract it from an estimated necessary sampling density for artifact-free reconstruction (c). We distribute samples according to this difference in density (d), and reconstruct the final shading (e) using our frequency-space oracles.

sampling and *lightfield* reconstruction application, where the numerical integration of the shading integral at each sample location had already been computed to (visual) convergence. This seminal work has promoted significant work on adaptive sampling and filtering techniques that rely on local frequency analysis for rendering various effects including unshadowed environmental shading [1], distribution effects [7, 15, 27, 40], soft shadows from geometric sources and ambient occlusion [13, 14, 28], and diffuse indirect illumination [29]. We are also motivated by this seminal work however, unlike previous approaches, we combine adaptive sample placement, integration, and reconstruction, all while treating animations as a first-class citizen.

Lightfield Reconstruction. Lehtinen et al. [23, 24] reconstruct smooth shading for static images from sparse, noisy lightfield samples, leveraging the structure of continuous lightfield space. These methods assume smoothness along reconstruction directions in the lightfield, whereas we determine adequate sampling rates, and as such are not suited for higher-frequency variations due to, e.g., all-frequency direct illumination.

Deep Image Filtering. A related set of techniques [10, 25, 35, 38] apply filters either directly to (deep) image-space samples, or custom feature-space metrics, computed from unconverged path-traced images. Instead of leveraging structure in the high-dimensional lightfield, these approaches formulate final rendering as a signal reconstruction problem

ignoring, for the most part, higher-order structures, coherence or frequency-content of the shading. Still, they perform well in many complex scenarios, however they struggle with the types of high-frequency shading effects and temporal coherence we target. In certain cases, a limited form of temporal filtering is supported, but only between adjacent frames ; our caching scheme adapts over an entire animation sequence.

Caching and Temporal Coherence. Irradiance and radiance caching [22, 47] model local variations in indirect lighting to place sparse cache samples in a scene, and then compute smooth shading from the samples using first- or second-order [37] interpolants. Again, here the shading integral is computed independently at each sample (without any adaptivity), and temporal coherence is not handled. Bala et al. [2] devise radiance interpolants and cache re-use oracles based on error-estimate bounds on (potentially reusable) shading samples. The *render cache* system [3, 45, 46] reprojects previous shading samples for interactive preview. We also reproject cache samples for temporally coherent animations, but instead leverage frequency-bandwidth estimates that take local geometry variations, spatial and temporal (spherical and camera) occlusion variations, and reflectance and lighting changes into account. Meyer and Anderson [30] use a smooth basis to reproject stochastic samples both in space and time for smooth indirect illumination effects ; our approach instead treats much sharper features not amenable to smooth, generalized basis-space techniques.

4.4 Overview

Our goal is to render still images and animated sequences, with all-frequency shadows and reflections from direct environmental illumination, without dense sampling of pixels nor of spherical integration samples for the *outgoing radiance at each pixel* (a “*radiance point*”). To do so, we leverage frequency analysis to adapt the sampling in both of these spaces. For animations, we also build a lightweight cache of radiance points on-the-fly in object space in order to further reduce sampling cost. We maintain a sampling density, locally in the object-space and globally in the spherical domain, necessary for artifact-free reconstruction of the final image or animation shading using only a fraction of the computation of typical direct illumination approaches, all with a modest memory overhead. Our approach is readily integratable into standard rendering pipelines and works in four steps (see Figure 4.2 and Algorithm 1) :

1. we perform an initial, sparse screen-space sampling of radiance points to estimate the frequency-bandwidth metrics we will use to drive our final sampling rates (Figure 4.2(a)) ;
2. (optional) for animated sequences, we reproject radiance points stored in a lightweight cache, according to their spatial, angular, and occlusion-aware temporal frequency bandwidths, to further prime our adaptive sampling scheme (Figure 4.2(a)) ;
3. using the information gathered in step 1 and (optionally in) step 2, we adaptively sample screen space (Figure 4.2(e)) according to conservative sampling densities determined using our frequency analysis (Figure 4.2(d)), placing radiance points at these pixels that are computed using our spherical integration approach that also adapts samples using our frequency analysis ; and,
4. finally, we reconstruct the final image(s) using a novel filtering approach (Figure 4.2(e)).

We distinguish ourselves from previous techniques by :

- tightly coupling adaptive image/object space sampling (Section 4.6), spherical sampling (Section 4.5), and final image reconstruction, using oracles devised from our frequency analysis (Section 4.7),
- accounting for shading variations due to camera, and object motions in our frequency-bandwidth computation to, e.g., adaptively sample all-frequency shadows and account for complex occlusion and reflectance changes in animation sequences (Section 4.6),
- exploiting coherence in the spatio-angular outgoing radiance with a lightweight cache of frequency-space metrics (Section 4.6), and
- benchmarking classical edge-aware filtering with our cross-bilateral filter using a novel inverse-distance feature-space selection criterion (Section 4.7).

Algorithm 1: Our adaptive sampling and reconstruction approach.

```

input : Empty deep image img ; Current cache cache ; Viewpoint v
output: Reconstructed image buffer img
1 // Uniformly sample screen space (Section 4.6)
2 pts = SPARSEPIXELSAMPLING(v)
3 // Compute radiance with adaptive integration at these positions
4 // and accumulate visibility statistics  $\{\mu_v, \sigma_v\}$  (Section 4.5)
5 COMPUTEPOINTSADIANCE(pts, v)
6 // Save points for cache insertion after image generation
7 SAVEPOINTSINCACHE(cache, pts)
8 // Cache point verification and reprojection (Section 4.6)
9 for c in cache do
10 |   if ISVALIDENTRY(c, v) do pts.add(c)
11 |   else cache.discard(c)
12 end
13 // For each pixel, reconstruct occlusion statistics and estimate
14 // the required sampling density (Section 4.5)
15 n = COMPUTESAMPLINGDENSITY(pts, v)
16 npts = SAMPLEIMAGEFROMDISTRIBUTION(n, nmax)
17 // Compute the radiance at sampled positions and accumulate
18 // visibility statistics (Section 4.5)
19 COMPUTEPOINTSADIANCE(npts, v)
20 // Reconstruct final image (Section 4.7)
21 img = UPSAMPLE(npts, v)

```

4.5 Adapting the Spherical Sampling Rate

Our approach adaptively places *radiance points* in a scene (and across animation frames) and, for each one of these points we use a spherical integration scheme that adapts the sampling rate when computing the outgoing radiance estimate.

A *radiance point* corresponds to the outgoing radiance towards a viewing direction $\boldsymbol{\omega}_v$, at a 3D position \mathbf{p} , based on the reflection equation [21] :

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v) = \int_{\mathcal{H}^2} L_\infty(\boldsymbol{\omega}_l) V(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_l) \rho(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, \boldsymbol{\omega}_l) (\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}_l, \quad (4.1)$$

computed using a Monte Carlo estimator (see details below). Here, we restrict ourselves to direct illumination from distant environment/area sources, where ρ is the BRDF, V is the binary visibility function, L_∞ is the (distant) incident radiance, and Ω is the hemisphere of unit directions at \mathbf{p} about the surface normal \mathbf{n} .

One of our goals is to accurately compute radiance points, with minimum computation, by adapting the hemispherical sampling rate to the complexity of the integrand. We remark that the integral in Equation 4.1 can be interpreted as a windowing of the incident lighting by a filter comprised of the product of the BRDF and cosine term [32]. Consequently, the incident lighting and visibility frequencies outside of this window will not contribute to the integrand and, as such, should not be considered when determining the spherical sampling rate.

BRDF Bandwidth. When computing Equation 4.1 we first estimate the view-evaluated BRDF’s directional footprint using its (isotropic) standard deviation σ_ρ , centered about its mean reflection direction $\boldsymbol{\mu}_\rho$ (see Figure 4.4). For rough microfacet-based BRDFs, a good approximation for $\boldsymbol{\mu}_\rho$ and σ_ρ is the mirror reflection of the view direction $\boldsymbol{\omega}_v$ and the surface roughness [4, 42].

It is reasonable to treat any BRDF variation within the cone as negligible compared to that of the incident light (see Figure 4.4), and so we must estimate the incident light’s

frequency content *within* the directional cone footprint in order to adapt the spherical sampling of our Monte-Carlo estimator of Equation 4.1.

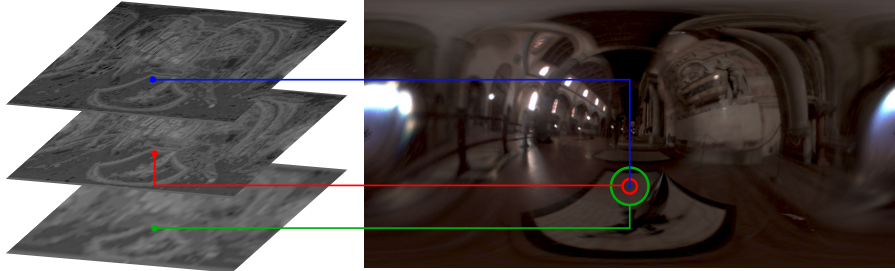


Figure 4.3 – We precompute the distant environment light’s bandwidth for multiple footprint sizes (left), at discrete footprint directions. During rendering, we query this structure to obtain the lighting’s bandwidth within the BRDF’s footprint (right).

Incident Lighting Bandwidth. To estimate the lighting bandwidth within the BRDF’s cone, we precompute the environment light’s local bandwidth for several discrete cone (window) sizes σ_ρ and for several discrete cone directions $\boldsymbol{\mu}_\rho$: this data is stored in a mip-like hierarchy of spherical textures (see Figure 4.3). We use cosine-windowed Fourier transforms to estimate the bandwidth since they most closely match our BRDF-windowed integration footprint profile. For different levels in the hierarchy, each cosine window corresponds to a Phong lobe with a shininess proportional to the window size, and computing this must only be done once for each environment map. During spherical integration, we query this structure based on the BRDF footprint direction $\boldsymbol{\mu}_\rho$ and size $3\sigma_\rho$ in order to obtain the lighting bandwidth within the footprint B_{L_∞} .

Given a bandwidth estimate B for our integrand, we apply Shannon’s sampling theorem to determine the spherical sampling rate $N_\Omega = 4B^2$ used for Monte-Carlo integration¹. While we could proceed with $B = B_{L_\infty}$, accounting for the bandwidths of the BRDF and lighting, similarly to previous work [1, 32, 33], we will additionally account for occlusion in our bandwidth estimate.

¹We square the 1D bandwidth to obtain a conservative 2D sampling rate.

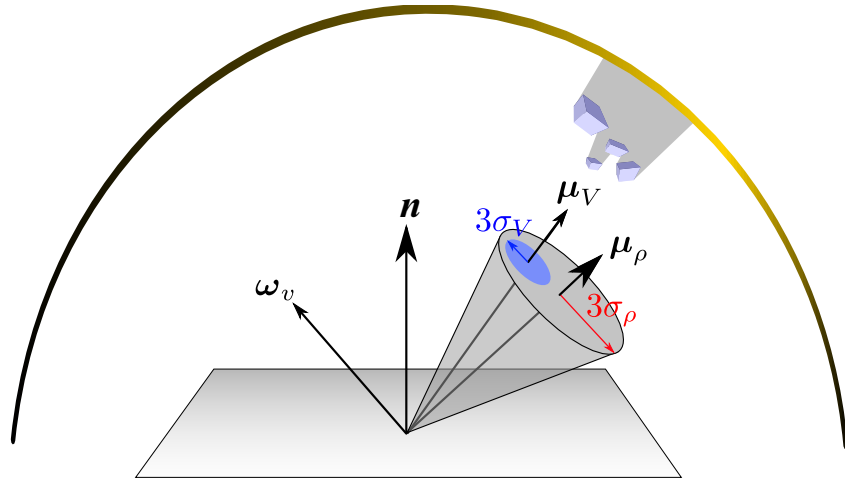


Figure 4.4 – We need only consider the frequency content of the (distant) incident lighting and visibility within the view-evaluated *BRDF footprint* (in yellow), defined as a cone centered about the mean reflection direction of the BRDF slice μ_ρ with radius equal to three standard deviations σ_ρ of the BRDF lobe. Our visibility statistics, comprised of its mean μ_V and three standard deviations σ_V , are also accumulated exclusively within this footprint.

Accounting for Visibility. It is impractical to *directly* incorporate the visibility’s bandwidth into the integrand’s bandwidth estimate B , since piecewise constant (binary) functions in the primal (i.e., spherical) domain have infinite frequency bandwidth.

Instead, we motivate our solution by considering two spherical regions of integration, one that is largely occluded and another one that is not : we note that the spherical sampling rate should not be modified in the unoccluded region since the sample rate already accounts for the frequency of the integrand, and these regions will contribute the most to the integral ; we do, however, want to increase the sampling rate in occluded regions within the footprint, since any occlusions will likely increase frequency bandwidth. As such, we opt to modulate the sampling rate determined by B_{L_∞} by a factor f_V that accounts for the amount of occlusion in the solid angle subtended by the cone of integration, as follows :

$$N_\Omega = f_V + 4B_{L_\infty}^2. \quad (4.2)$$

To determine the amount of occlusion, we accumulate a statistical representation of vi-

sibility during a first Monte-Carlo estimation of Equation 4.1, which we compute using multiple importance sampling (MIS) [43] and $N_L = 4B_{L_\infty}^2$ spherical samples. Our MIS implementation distributes samples evenly according to the PDFs of the environment light $p_L(\boldsymbol{\omega}) \propto L_\infty(\boldsymbol{\omega})$ and the view-evaluated BRDF $p_\rho(\boldsymbol{\omega}) \propto \rho(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, \boldsymbol{\omega})$. During this integration, we progressively accumulate the mean visibility direction $\boldsymbol{\mu}_V$ and the 2×2 visibility covariance matrix $\boldsymbol{\sigma}_V^2$ within BRDF's footprint,

$$\boldsymbol{\mu}_V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\omega}_i p_i v_i \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\sigma}_V^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{\omega}_i (p_i v_i)^2 - \boldsymbol{\mu}_V^T \boldsymbol{\mu}_V, \quad (4.3)$$

which we will use to adapt our spherical sampling rate. Here, $\boldsymbol{\omega}_i$ is the i^{th} Monte Carlo (2D spherical) integration sample direction (expressed in the local coordinate frame about the BRDF cone's central direction $\boldsymbol{\mu}_\rho$), $v_i = V(\boldsymbol{\omega}_i)$ is the binary visibility evaluated at $\boldsymbol{\omega}_i$, and we weigh the value by the view-evaluated BRDF's PDF evaluated in the sampling direction $p_i = p_\rho(\boldsymbol{\omega}_i)$ to avoid considering visibility samples in regions outside the BRDF footprint (i.e., regions of little contribution to the final integral).

The visibility's standard deviation σ_V corresponds roughly to an occlusion coverage measure *within* the BRDF's footprint (see Figure 4.4), and we use the ratio of this coverage to the size of the BRDF footprint to estimate how many more samples are needed as $f_V = f(\sigma_V/\sigma_\rho)$. We experimented with different types of "easing" functions and found that a Gaussian profile, $f(x) = (N_{\max}^\Omega - N_\Omega) e^{-1/2(x-1/2)^2}$ yields good results, where N_{\max}^Ω is our maximum spherical sampling budget (Figure 4.5). We use this remaining number of integration samples to improve our Monte Carlo estimate of Equation 4.1 (with the same MIS estimator). Note that we do not directly use $\boldsymbol{\mu}_v$, but we need it to compute σ_V .

We consider the frequency content of the BRDF and lighting, as well as occlusion statistics, to adapt the spherical integration cost of each radiance point. To further reduce the total rendering cost, we will both reuse information from radiance points computed in previous frames (Section 4.6), as well as reconstructing the final image using only a sparse set of radiance points distributed in image space (Section 4.7). Our lightweight

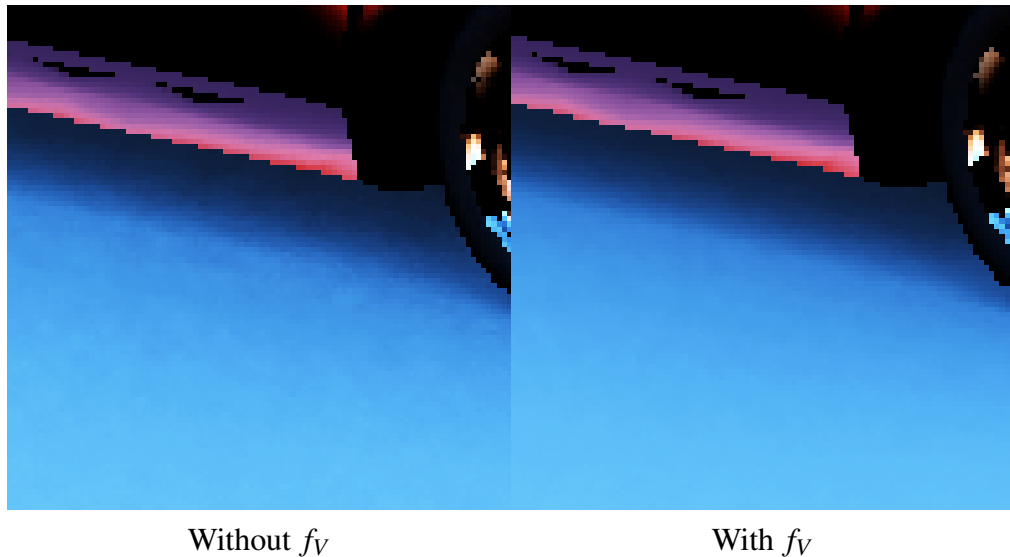


Figure 4.5 – We increase the number of spherical integration samples to properly account for shading variations due to occlusion.

caching scheme (Section 4.6) reuses, invalidates, and introduces new radiance points according to *spatial* and *angular* frequency content ; it is robust to reflection and occlusion changes caused by camera and/or object motions.

4.6 A Sparse, Adaptive Radiance Cache

For a single image, we first uniformly distribute a small number of radiance points in image space in order to compute an optimal sampling density for artifact-free image reconstruction : we estimate the outgoing radiance’s spatio-angular frequency bandwidth in image space and adaptively distribute the remainder of our sampling budget according to it (Section 4.6.1). In animation sequences, we wish to further reduce rendering time without sacrificing image quality nor introducing temporal artifacts during animation. To do so, we reuse radiance points from previous frames, leveraging a lightweight object-space cache (Section 4.6.2). Shading variations caused by camera and/or object motions can invalidate radiance points stored in the cache, and so we yet again leverage our frequency analysis to appropriately handle cache sample invalidation, resampling, and

reuse (Section 4.6.3) in a manner that maintains image fidelity and temporal coherence.

4.6.1 Adaptive Image Space Sampling

The spatio-angular bandwidth of the outgoing radiance in image space will be used to determine the (image space) density of radiance points required for artifact-free image reconstruction (discussed in Section 4.7). To compute this bandwidth we proceed similarly to previous work [1, 11] : beginning with the bandwidth emitted within the solid angle of the (distant) light subtended by the BRDF’s footprint B_{L_∞} (Figure 4.6(a)), the \mathbf{C}_L operator accounts for the local curvature and cosine factor between \mathbf{n} and the mean BRDF direction $\boldsymbol{\mu}_\rho$, a reflection operator \mathbf{B}_ρ transforms the bandwidth according to the view-evaluated BRDF (Figure 4.6(b)), the \mathbf{C}_v operator accounts for the curvature and cosine foreshortening between the shaded point and the viewpoint, and the $\mathbf{T}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}}$ operator transports the bandwidth from the shaded point to the camera (Figure 4.6(c)).

Frequency-analysis methods typically operate either on the bandwidth B or the variance σ^2 of the spectrum : we interchange between these two measures in our discussion using three standard deviations (corresponding to the 99th percentile of a Gaussian) as the bandwidth of the spectrum from its variance σ^2 : $B \approx 3\sqrt{\sigma^2}$. We use a compact 2D variance representation [7] for our spatio-angular bandwidths, $\sigma^2 = \{\sigma_x^2, \sigma_\theta^2\}$, where σ_x and σ_θ are the spatial and (isotropic) angular bandwidths of the outgoing radiance field, and each of the four operators above are simply 2×2 matrices [7, Eqs. 12, 15, 17, and 18].

Since we employ distant environmental illumination, we need not apply any transport operator from the light to \mathbf{p} as it only has non-zero angular variance σ_L at emission. When accounting for occlusion, an additional transport operator $\mathbf{T}_{V \rightarrow \mathbf{x}}$ warps the spatio-angular occlusion bandwidth according to the *minimum occluder distance* between the shaded point and the light [11, 13]. While accumulating the mean occlusion direction $\boldsymbol{\mu}_v$ and variance σ_v during radiance point integration (Section 4.5), we also compute the *mean* occluder distance, similarly to Equation 4.3 but substituting $\boldsymbol{\omega}_i$ by the occlusion in-

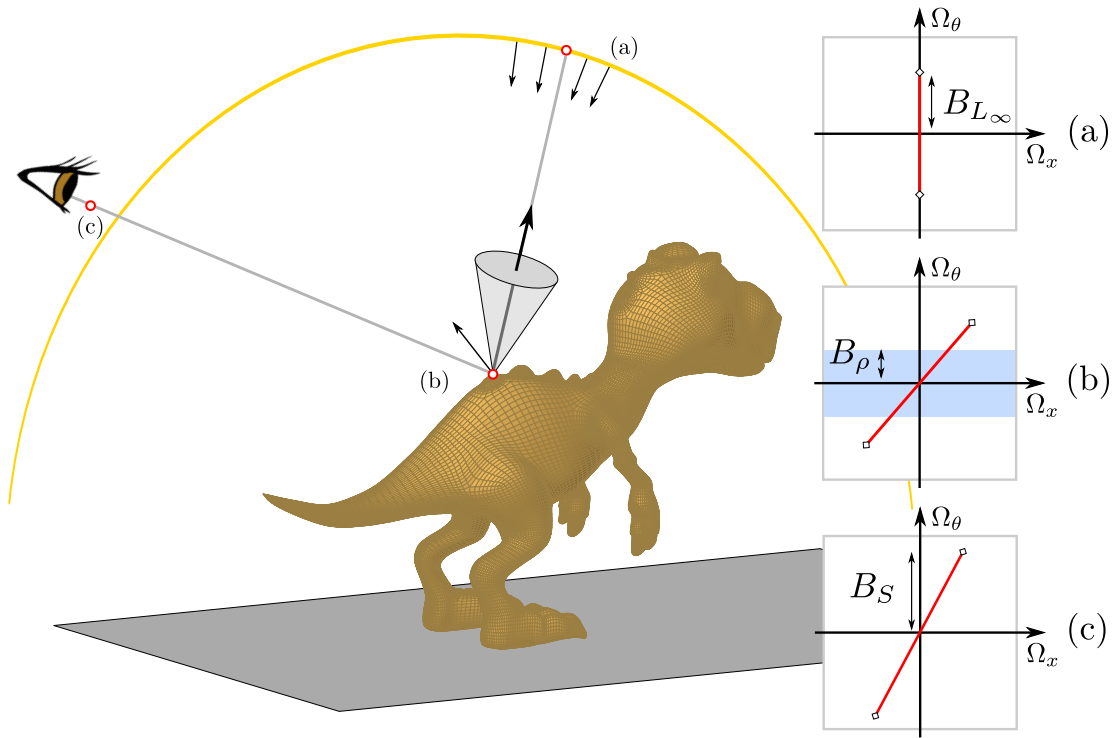


Figure 4.6 – We estimate the outgoing radiance bandwidth in image space B_S towards the viewer : starting with the emitted (angular) bandwidth of the BRDF’s footprint subtended onto the environment light B_{L_∞} (a), we then apply the BRDF bandlimit B_ρ (b) and modulate according to curvature, foreshortening, and spatial transport (c). With a pinhole camera, the angular bandwidth at the aperture serves directly as the image space bandwidth estimate B_S .

tersection distance d_i along direction ω_i ; however, to approximate the *minimum* distance to occluders we use the mean distance minus three times its standard deviation.

Moreover, we assume a pinhole camera which simplifies the final bandwidth computation but also allows us to better evaluate the quality of our high-frequency direct illumination effects, without potentially “masking” artifacts with any additional image space blur from, e.g., depth-of-field effect; with this camera model, the bandwidth incident on the aperture (after $\mathbf{T}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}}$ ’s application) is equal to the image space bandwidth that we use for sampling. And so, the image space angular variance is computed as

$$\sigma_{S,\theta}^2 = \mathbf{T}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}}(\mathbf{C}_v \circ \mathbf{B}_\rho \circ \mathbf{C}_L)(\sigma_{L_\infty}^2 + \mathbf{T}_{V \rightarrow \mathbf{x}}(\sigma_V^2)) , \quad (4.4)$$

and the image-space bandwidth is estimated from the variance as

$$B_S \approx 3\sqrt{\sigma_{S,\theta}^2}, \quad (4.5)$$

where $\sigma_{L_\infty}^2$ is estimated using the bandwidth queried from our hierarchical structure (again, in direction $\boldsymbol{\mu}_\rho$ and with width σ_ρ ; see Figure 4.6(a)).

Sampling Density and Radiance Point Placement. We first uniformly (but sparsely) subsample pixels in the image plane, compute their visibility statistics, and apply a simple depth- and normal-aware bilateral upsampling filter [39] to “fill” the remaining pixels with bandwidth and visibility statistic values, μ_v, σ_v . We use these values to compute the screen-space bandwidth B_S using Equations 4.4 and 4.5, and determine the final pixel sampling densities $N = 4B_S$ according to Shannon’s theorem.²

We subtract the (small) initial sampling density from N to yield our required resampling density M and then distribute the remaining screen-space samples according to the *density distribution* function, defined by normalizing the pixel density values over the image $M/\Sigma M$, by importance sampling the inverse CDF of this distribution. The number of image space samples we distribute is the minimum of ΣM and a user-controllable maximum sampling budget N_{\max} .

As detailed below in Section 4.6.2, we can further reduce the rendering cost by only generating new radiance points in image space where reprojected (valid) radiance point samples from our cache do not satisfy our pixel sampling density requirement. When introducing a new radiance point, we always perform spherical integration using the approach described in Section 4.5.

²We omit pixel indices for brevity in $\sigma_{S,\theta}^2, \mu_v, \sigma_v^2$ and N ; as such, summation of these values is understood to be over image pixels.

4.6.2 Caching and Reusing Radiance Points

During animation, the number of new radiance points computed for each frame can be significantly reduced if we carefully reuse radiance points from previous frames. As such, we propose a lightweight object-space cache to store, update, invalidate, and reuse (when suitable) radiance points across frames of an animation. Each cache entry consists of a tuple comprising an object ID, 3D position, 2D viewing direction, surface normal, radiance value, spatial bandwidth B_x , angular bandwidth B_θ , its visibility statistics μ_v and σ_v , and a temporal bandwidth B_t that will be used to model occluder and camera motions (see Section 4.6.3). The spatial, angular, and temporal bandwidths (B_x, B_θ, B_t) are used to define a circular surface patch, a cone of directions (see Figure 4.7, inset), and a time interval within which the sample’s radiance value is known to remain close to the correct value. A single render-time parameter q_ϵ is used (see below) to control the accuracy of our method.

After our initial sampling, but before computing the current pixel sampling density, we update (based on object motion) and reproject radiance points stored in our cache onto the image plane. We only use these points for final image reconstruction if :

1. they pass a z-buffer camera visibility test, and
2. their radiance value remains *valid* after reprojection.

The *validity* of reprojected radiance points is determined according to spatial, angular, and temporal bandwidth tests in order to control the bias introduced in the final rendering (as detailed below and in Figure 4.7). Reprojected radiance points that do not pass these tests are not considered for reprojection nor reconstruction, and they are (optionally) discarded from the cache based on a simple least-recently-used (LRU) scheme. Namely, object motion can affect the validity of cache points in four ways :

1. camera and object motions can lead to failed z-buffer (i.e., camera visibility) tests during reprojection,
2. object motion can influence the validity of cached radiance points that lie *on the*

surface of the moving object,

3. temporal changes of distant lighting affects the product of the light and BRDF during integration, and
4. object motion can influence the accuracy of radiance points due to changes in the spherical visibility *on all other objects*.

We develop the case of object motion influence on the radiance point values in Section 4.6.3 and discuss here the remaining issues.

Validating Reprojected Cache Points. We use the spatial and angular bandwidths to define a circular surface patch and directional cone with radii $r_x = 2\pi\varepsilon/B_x$ and $r_\theta = 2\pi\varepsilon/B_\theta$, where the directional cone is centered along ω_v (at the time of the radiance point’s insertion into the cache), $\varepsilon = \text{acos}(1 - q_\varepsilon)$ is based on a quality threshold q_ε corresponding to the maximum relative error a cached point can cause during reprojection. Validating a reprojected radiance point corresponds to z-buffer testing the pixel onto which it projects (for camera occlusion) and ensuring that the view vector is inside its directional cone (Figure 4.7).

To treat temporal changes in the radiance value due to lighting and occlusion motion, we add a temporal validity period to each cache point based on temporal bandwidth $\Delta t = 2\pi\varepsilon/B_t$. We apply Egan et al. [15]’s bandwidth estimate to treat variations in lighting rotation, and we derive temporal bandwidths for changes in radiance due to occlusion motion in Section 4.6.3. The final temporal bandwidth B_t is the maximum of these two bandwidths.

Image Resampling and Cache Updates. We proceed similarly to the single-image case in Section 4.6.1, and compute the pixel sampling density and upsampled statistics now using the union of the initial sparse uniform sampling density *and* the density of the (successfully) reprojected radiance points; $\{\mu_v, \sigma_v^2\}$ are again used to compute the image space bandwidth B_S using Equations 4.4 and 4.5, and the pixel sampling density

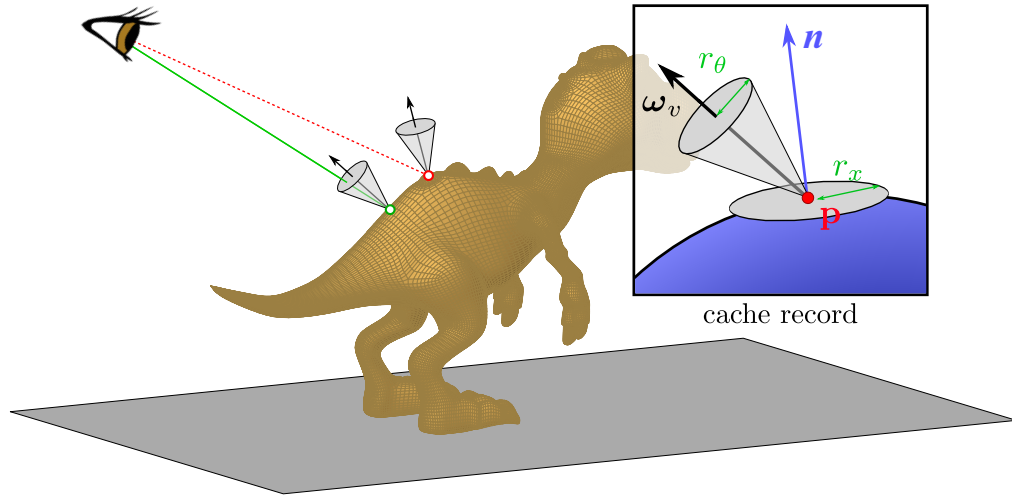


Figure 4.7 – During reprojection, we test whether the new viewing direction remains inside the BRDF’s footprint and, if so, we project the sample onto the screen (plain green line); if not, we (optionally) discard the sample from the cache (dashed red line).

is computed as $N = 4B_S$.

Unlike the empty cache case (Section 4.6.1) the density removed from N due to the existing points is larger and *non-uniform*. This density, M , is used to compute the image space inverse CDF used to distribute samples from our sampling budget, $\min(M, N_{\max})$. Given the increased start-up density due to cache reprojection, we are more likely to introduce samples in areas that are not covered by the initial sparse sampling nor the reprojected sampling.

Cache Point Discard and Merging. Each newly generated radiance point is added to the cache and uses the spherical sampling scheme of Section 4.5, and we continue to discard cache points according to a simple LRU scheme. If two cached radiance points reproject onto the same pixel they may be merged if their object IDs are identical and if their spatial and angular bandwidths agree with the angular and spatial distances between them (Figure 4.8). If a radiance point reprojects outside the view frustum, it is also flagged for discard in our LRU scheme.

4.6.3 Handling Temporal Occlusion Changes

Handling the effects of object motion on the visibility in the scene is challenging. Starting from a time-dependent visibility formulation of the reflection equation (Equation 4.1), we perform a frequency analysis on the change in the final outgoing radiance due to changes in this binary visibility. We show that the temporal bandwidth B_t of the change *in the final shading* can be modeled using only the projected angular velocity of occluders and the distant lighting bandwidth. We associate this bandwidth B_t to each cached radiance point, and will discuss how to use it during reprojection and resampling to validate (or discard) cached radiance points, accounting for changes in spherical occlusion. Unlike previous frequency-based approaches for environmental shadowing [13, 14], our approach is computed in a single pass and does not require a heavyweight ray-space cache.

We consider the *relative* motion of occluders at a shaded point in our time-dependent reflection equation (below ; Equation 4.6), and assume that only the spherical visibility

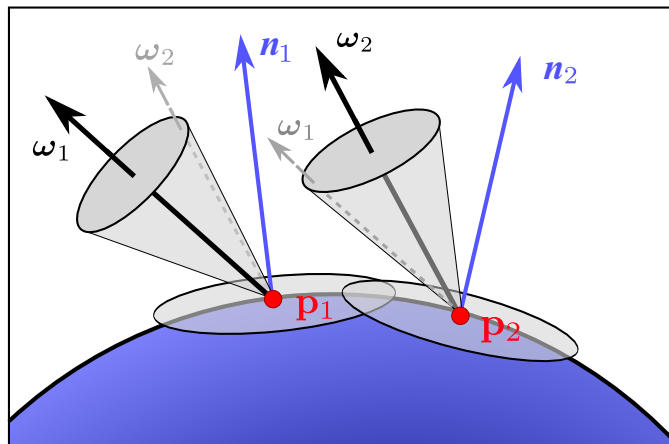


Figure 4.8 – We merge two cache points that reproject onto the same pixel only if both their spatial and angular bandwidths overlap enough. In this example, while the two cache point’s angular cones (ω_1 , ω_2) align (gray), their spatial bandwidths at p_1 and p_2 do not overlap enough. Consequently, the two points will not be merged.

changes over time, but not the lighting nor reflectance :

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, t) = \int_{\mathcal{H}^2} L_\infty(\boldsymbol{\omega}_l) V(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_l, t) \rho(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, \boldsymbol{\omega}_l) (\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}_l. \quad (4.6)$$

Concurrently treating temporal variations in lighting and reflectance is a more challenging problem that we leave to future work.

Next, we model the *change* in outgoing radiance ΔL due to the motion $V(t)$ of a single, small moving occluder patch³; we will later generalize this model to large occluders. The outgoing radiance “removed” due to the (potentially moving) occluder at time t is

$$\Delta L(t) = \int_{\mathcal{V}_t} L_\infty(\boldsymbol{\omega}_l) \rho(\boldsymbol{\omega}_l) (\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}_l, \quad (4.7)$$

where we denote the set of all occluded directions at time t as $\mathcal{V}_t = \{\boldsymbol{\omega}_l \mid V(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_l, t) = 0\}$. We can rewrite the outgoing radiance at any moment of time as the sum of a temporally constant (unoccluded) component, and the change in outgoing radiance that does vary with time :

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, t) = \underbrace{[L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, 0) - \Delta L(0)]}_{\text{constant w.r.t. time } t} + \Delta L(t). \quad (4.8)$$

Here, $\Delta L(t)$ can be thought of as time-dependent antiradiance [9]. We perform a frequency analysis of this formulation in order to reason about the temporal bandwidth of changes to the outgoing radiance at a shaded point and, given this segmentation, the Fourier transform of the outgoing radiance is equal to the Fourier transform of the *change* in the outgoing radiance, $\widehat{L}(\Omega_t) = \widehat{\Delta L}(\Omega_t)$, as :

$$\begin{aligned} \widehat{L}(\Omega_t) &= \mathcal{F}[L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, t)] \\ &= \mathcal{F}\left[[L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, 0) - \Delta L(0)] + \Delta L(t) \right] \\ &= A\delta(\Omega_t) + \mathcal{F}[\Delta L(t)], \end{aligned} \quad (4.9)$$

³We occasionally omit location \mathbf{p} and view $\boldsymbol{\omega}_v$ parameters for brevity.

where A is a constant offset we can ignore since it has a bandwidth equal to zero ; as such, we only need consider the last term in our bandwidth derivation :

$$\mathcal{F}[\Delta L(t)] = \widehat{\Delta L}(\Omega_t) = \mathcal{F} \left[\int_{\mathcal{V}_t} L_\infty(\boldsymbol{\omega}_l) \rho(\boldsymbol{\omega}_l) (\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}_l \right].$$

We will directly relate the Fourier transform of the outgoing radiance to the Fourier transform of the distant lighting, by assuming that the projected (spherical) area of the moving occluder $V(t)$ does not change w.r.t. time t and that the cosine-weighted BRDF is constant over the projected occluder patch ; this is reasonable given our small occluder and small motion assumptions, and similar to reflectance-constancy assumptions used in previous work [13, 15, 31]. We additionally model the spherical angular motion of the occluder as a motion relative to the distant illumination, allowing us to rewrite the Fourier transform in Equation 4.9 as an integration of the occluding patch in its *original configuration* at $V(0)$, but now lit under the distant lighting rotated according to the appropriate inverse (angular) rotation of the occluder motion :

$$\widehat{\Delta L}(\Omega_t) \approx \mathcal{F} \left[\rho_n \int_{\mathcal{V}_0} L_\infty(\boldsymbol{\omega}_l + t\dot{\mathbf{v}}) d\boldsymbol{\omega}_l \right], \quad (4.10)$$

where $\dot{\mathbf{v}}$ is the angular velocity of the occluder patch. We introduce a notational abuse of the $+$ operator to denote angular rotation of the lighting direction $\boldsymbol{\omega}_l$ for simplicity, and

$$\rho_n = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v, \boldsymbol{\omega}_l) (\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}_l \quad (4.11)$$

is the average cosine-weighted BRDF value over the occluder.

We can interchange the order of the integral and Fourier transform (due to linearity) in Equation 4.10, allowing us to express the Fourier transform of the outgoing radiance as the product of the Fourier transform of the lighting, the ratio of the average cosine-

weighted BRDF and the angular occluder motion magnitude, and a phase term :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta L}(\Omega_t) &\approx \rho_n \int_{\gamma_0} \frac{e^{i\Omega_t(\boldsymbol{\omega}_l[\theta] + \boldsymbol{\omega}_l[\phi])}}{|\dot{\mathbf{v}}|} \widehat{L}_\infty(|\dot{\mathbf{v}}|\Omega_t) d\boldsymbol{\omega}_l \\ &= \frac{\rho_n}{|\dot{\mathbf{v}}|} \widehat{L}_\infty(|\dot{\mathbf{v}}|\Omega_t) \left[\int_{\gamma_0} e^{i\Omega_t(\boldsymbol{\omega}_l[\theta] + \boldsymbol{\omega}_l[\phi])} d\boldsymbol{\omega}_l \right],\end{aligned}\quad (4.12)$$

where the bracketed term is the phase component of the Fourier transform which we conservatively bound below.

We can bound the **bandwidth** of $\widehat{\Delta L}(\Omega_t)$ by analyzing the spectrum's amplitude, where the amplitude is $|\cdot| = \sqrt{\text{Re}(\cdot)^2 + \text{Im}(\cdot)^2}$; we first bound the amplitude of the phase term as the projected solid angle of the occluder V_Ω ,

$$\left| \int_{\gamma_0} e^{i\Omega_t(\boldsymbol{\omega}_l[\theta] + \boldsymbol{\omega}_l[\phi])} d\boldsymbol{\omega}_l \right| \leq \underbrace{\int_{\gamma_0} d\boldsymbol{\omega}_l}_{V_\Omega}, \quad (4.13)$$

since $|e^{ix}| \leq 1$, and we can then bound the amplitude of $\widehat{\Delta L}(\Omega_t)$ in Equation 4.12 as

$$\left| \widehat{\Delta L}(\Omega_t) \right| \leq \frac{V_\Omega \rho_n}{|\dot{\mathbf{v}}|} \left| \widehat{L}_\infty(|\dot{\mathbf{v}}|\Omega_t) \right|. \quad (4.14)$$

Given this bound on the *amplitude* we can conservatively bound the *bandwidth* $B_{t,\text{single}}$ of the (change in) outgoing radiance due to a small occluding patch : since the temporal rotation (i.e., shift) in the primal domain of L_∞ in Equation 4.10 results in a scaling of the spectrum \widehat{L}_∞ by a factor of $|\dot{\mathbf{v}}|$ in Equation 4.12, the lighting's original bandwidth B_{L_∞} is similarly scaled to $|\dot{\mathbf{v}}|B_{L_\infty}$ under the occluder's relative motion. Thus, the bandwidth $B_{t,\text{single}}$ of $\widehat{\Delta L}$ is bounded as

$$B_{t,\text{single}} \leq |\dot{\mathbf{v}}|B_{L_\infty}. \quad (4.15)$$

Our analysis above considers the motion of only a single small occluding patch, and we conceptually estimate the bandwidth due to the motion of *all* the occluders by taking the maximum bandwidth across all small occluding patches : during spherical radiance point

integration (Section 4.5), we compute (and cache ; Section 4.6.1) the mean angular velocity of occluding samples times the light bandwidth (estimated using our hierarchical structure ; Section 4.5) $\mu[|\dot{\mathbf{v}}|B_{L_\infty}]$ and its variance $\sigma[|\dot{\mathbf{v}}|B_{L_\infty}]$, in a manner similar to the accumulation of the visibility statistics in Equation 4.3. We then approximate the final temporal bandwidth, and thus the *maximum* bandwidth across all occluding patches, as the mean plus three times the standard deviation,

$$B_t = \mu[|\dot{\mathbf{v}}|B_{L_\infty}] + 3\sigma[|\dot{\mathbf{v}}|B_{L_\infty}]. \quad (4.16)$$

This conservative bandwidth estimate models the change in outgoing radiance that a radiance point will undergo in time due to occluder motion ; while it uses a conservative bound on the amplitude of the integrated phase term, we need not explicitly account for the phase term during its calculation. This bandwidth can be interpreted as associating a *lifespan* to radiance points in the cache, and we simply extend our cache validity checks to accept reprojected cache samples only if they are “young” enough ; if not, we discard them.

While our bandwidth estimate is far from accurate, it significantly improves the quality of all-frequency shadowed regions, does not require a two-pass strategy nor the heavyweight ray-space caching proposed by previous approaches [13, 14], and it behaves consistently and reasonably : without occluder motion, cached samples will have infinite lifespan and only be discarded if their spatial or angular bandwidth tests are not satisfied, as expected ; if there is occluder motion but the occluded light does not vary much during the motion, the cached radiance point will remain unaffected (over small time steps) ; and, if the motion *does* affect a change in the outgoing radiance for the radiance point, the radiance point will only be reprojected if the change is small.

4.7 Image Reconstruction

We generate the final image(s) with a reconstruction using all our (sparse) screen-space samples. We apply texture maps after shading reconstruction to avoid having to account for their potentially high-frequency content in our frequency analysis.

The reconstructed shading L_p at a pixel p is a weighted sum of the radiance points’ values $L_{p'}$ (where p' denotes a projected pixel position) in its local neighborhood \mathcal{N}_p , where we only consider radiance points that reside on the same object as p :

$$L_p = T_p \sum_{p' \in \mathcal{N}_p} W_{p' \rightarrow p} L_{p'}, \quad (4.17)$$

where T_p is the texture value for pixel p . Individual reconstruction approaches differ only in how they define \mathcal{N}_p and $W_{p' \rightarrow p}$. The adaptive sampling density dictated by our frequency analysis, coupled with adaptive reconstruction, is capable of reconstructing both hard and “soft” discontinuities in image space caused by all-frequency shadows, all-frequency reflections, and view-dependent object silhouettes.

We use standard cross-bilateral filters, as in previous shading reconstruction and denoising work [10, 11, 25, 38], tailored to our predicted bandwidth estimates ; we subsequently combine this *reconstruction* approach with an inverse distance metric applied to a feature vector normalization strategy, and show that this combined technique can better reconstruct high-quality all-frequency shading effects.

Bandwidth-driven Bilateral Filtering. Cross-bilateral filtering (CBF) methods perform *edge-aware* Gaussian filtering, where edge discontinuities are computed in image space according to (potentially high-dimensional) application-dependent feature vectors. Our CBF implementation defines the weights in Equation 4.17 as

$$W_{p' \rightarrow p} = \exp \left[- \sum_{\mathbf{f}} \frac{1}{2\sigma_{\mathbf{f}}^2} \|\mathbf{f}_p - \mathbf{f}_{p'}\|^2 \right], \quad (4.18)$$

where $\mathbf{f}_p = \{\mathbf{p}, \mathbf{n}, L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_v), B_x, B_\theta, \mu_v, \sigma_v\}$ is our feature vector, so that the reconstruction will not combine values that differ much along any of the axes in this vector, and σ_f is a standard deviation parameter that affects the sensitivity of the Gaussian blur to differences between feature vectors within the neighborhood.

Inverse Feature Distance. Since CBF is a *filtering* method, and not an *interpolating* method, it cannot guarantee that the reconstructed value at a radiance point's location will match its originally estimated radiance value computed during spherical integration. The bias introduced by CBF is due, in part, to the Gaussian blur it applies. Our formulation assumes that each radiance point carries an estimate of the *exact* radiance (our integrator is unbiased), and so an *interpolating* scheme is more appropriate for our final image reconstruction. We have experimented with an inverse distance weight (IDW) interpolation method, with reconstruction weights given by :

$$W_{p' \rightarrow p} = \|\mathbf{f}_p - \mathbf{f}_{p'}\|^{-2}, \quad (4.19)$$

and, while this weighting maintains radiance values at radiance point locations, it does not yield better reconstruction results than standard CBF (see Figure 4.9). We however propose an alternative to CBF and IDW, that combines the benefits of both approaches and results in higher-quality final images.

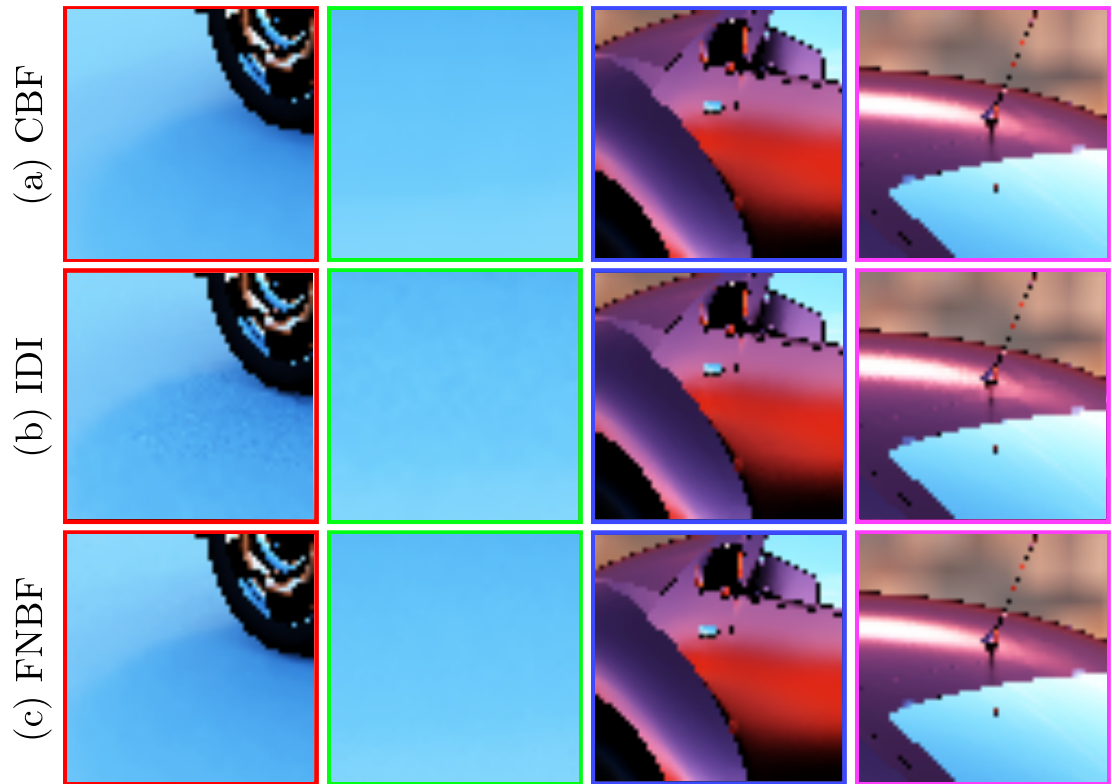
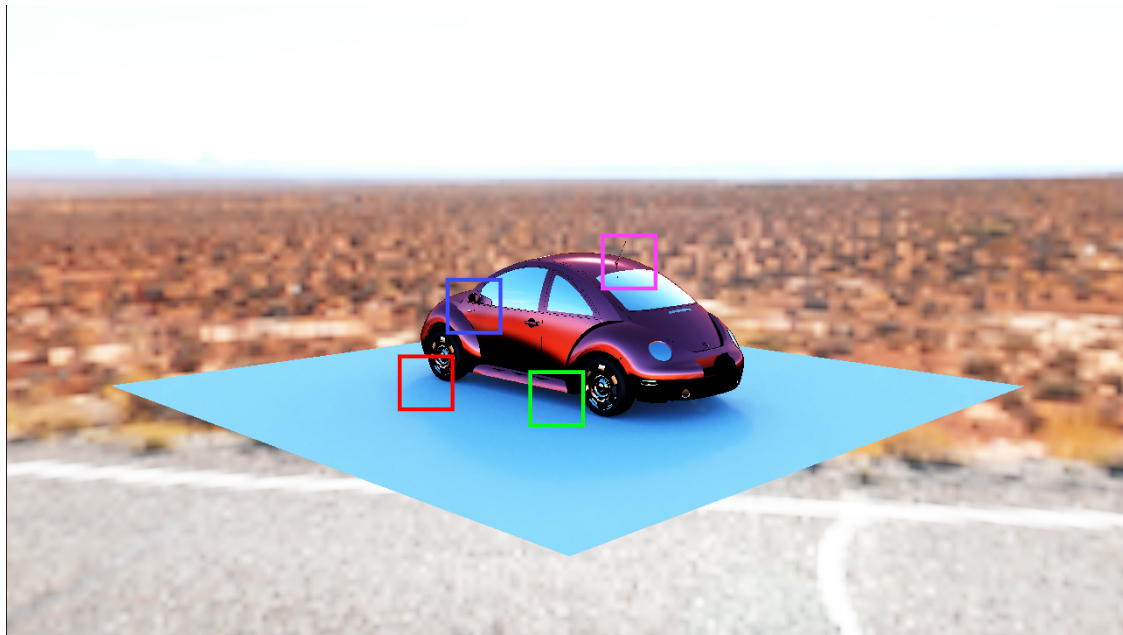


Figure 4.9 – Traditional CBF (a) fails to capture shadow boundaries and glossy reflections ; IDW (b) produces banding artifacts ; FNBF (c) reduces these artifacts and is more temporally coherent (see video).

Dual Weighting with Feature-space Normalization. CBF and IDW produce artifacts such as shading bleeding (incorrectly) over edges, poorly reconstructed shadows (both hard and soft), and low-frequency noise in shadows and reflections caused, in part, by the filter not reconstructing according to the radiance point density. We propose a simple extension to CBF that uses IDW to reduce these artifacts, called feature-normalized bilateral filtering (FNBF).

FNBF operates as follows : prior to reconstruction at p , we first gather statistics on the feature vectors in p 's gathering neighborhood \mathcal{N}_p in order to avoid weighting any particular feature more than the others. Instead of using the raw feature vectors for CBF, we form “normalized” feature vectors $\tilde{\mathbf{f}}_x$ at each pixel in \mathcal{N}_p by subtracting a vector composed of the element-wise mean of each feature vector component and then dividing by the element-wise variances of the feature vector components. Our new FNBF weighting scheme is :

$$W_{p' \rightarrow p} = \prod_{\mathbf{f}} \frac{1}{(\tilde{\mathbf{f}}_p - \tilde{\mathbf{f}}_{p'})^2} \exp \left[- \frac{1}{2\sigma_{\mathbf{f}}^2} \|\tilde{\mathbf{f}}_p - \tilde{\mathbf{f}}_{p'}\|^2 \right]. \quad (4.20)$$

FNBF more accurately reconstructs the shape of all-frequency shadows and glossy reflections, avoiding the over blurring artifacts present in CBF and IDW reconstructions. This works due to two complimentary processes : the normalization prevents any one feature from overly impeding the reconstruction, and the inverse distance metric quickly down-weights features that are too distant (in feature-space, which includes positional distance) that would otherwise introduce significant bias in the reconstruction.

4.8 Results and Implementation

Our implementation is built directly atop Intel’s Embree raytracing engine and operates completely on the CPU, although it is readily parallelizable on the GPU. We used the same screen-space curvature estimator as Durand et al. [11] when computing an object’s curvature at camera-ray intersection points. Our MIS estimator of Equation 4.1 (Section 4.5) uses the balance heuristic [44] and evenly distributes samples between the light and BRDF PDFs.

To construct the environment map’s bandwidth hierarchy (Section 4.5), we use a 2D fast-Fourier transform [8] and, for footprints smaller than 16×16 pixels, we return the maximum possible frequency (one sample per texel). The bandwidth is computed by taking the 95th percentile of the 2D spectrum. If the footprint spans several pixels at the target resolution, we conservatively take the maximum value over the resulting pixels.

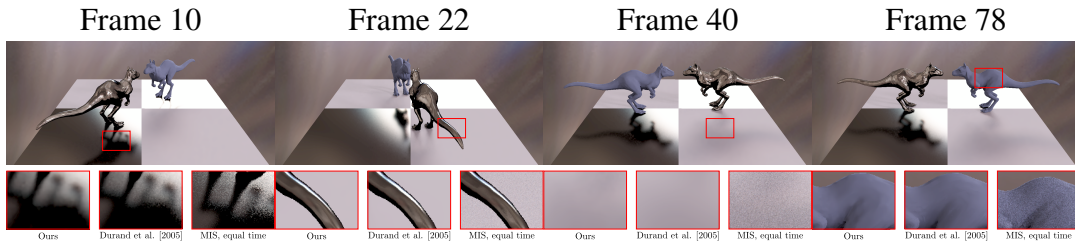


Figure 4.10 – Stills from the KILLEROO animation with one glossy and one diffuse Killeeroo rotating above a diffuse and glossy checkerboard, lit by the GALILEO environment.

Results. We have tested our method on four non-didactic scenes : KILLEROO (Figure 4.10) combines diffuse and glossy BRDFs with meshes that exhibit high curvature, and so are particularly challenging for resolving reflections ; TABLE (Figure 4.11) illustrates our technique’s ability to deal with simple Whitted-style indirect specular effects ; DINO (Figure 4.1) illustrates our technique’s ability to handle more complex scenes with detailed desert ground and animated diffuse, glossy, and mirror dinosaurs ; and CAR (Figure 4.9) used to validate camera motion on a scene with complex glossy objects and projected shadows. All results are generated on an Intel i7 930 CPU @2.80GHz at a resolution of 1280×720 , with the following parameter settings $N_{\max}^{\Omega} = 512$, $N_{\max} = 250,000$, and $q_{\varepsilon} = 0.005$.



Figure 4.11 – Our method allows simple tricks for Whitted-style indirect specular effects. The TABLE scene presents a mirror reflection showing parts of the scene invisible from the camera point of view.

Our method consistently reconstructs image sequences using only a fraction of the pixels, and our results are temporally coherent (see video ; Figure 4.12) : we typically reuse between 5 and 25% of the pixels to render any given frame of an animation. Our cache size ranges from 50,000 to 1,000,000 radiance points, corresponding to a maxi-

mum conservative size of 250MB.

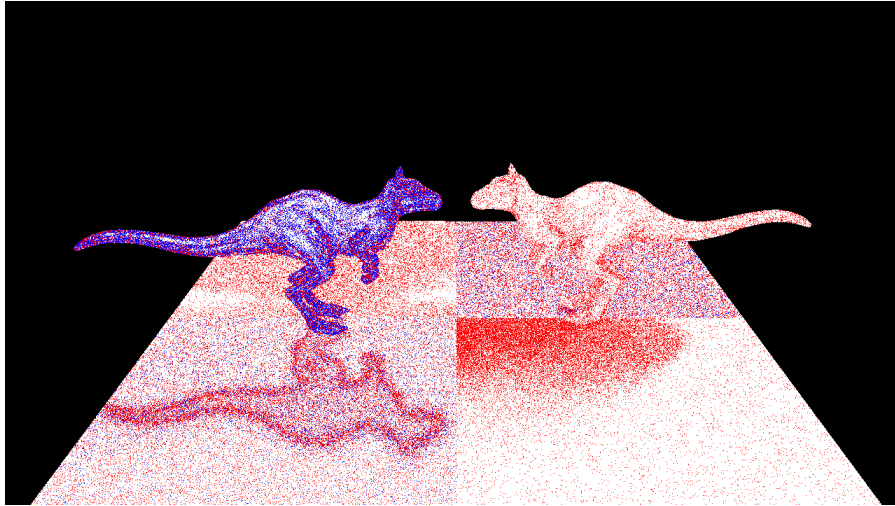


Figure 4.12 – Our method reuses radiance points between frames. We visualize the number of reused radiance points (in red) and the final sampling density used to reconstruct the images. Most of the resampled radiance points (blue) are due to specular surfaces (with small cone bandwidths) for which our cache discards radiance points from previous frames according to our bandwidth prediction.

4.9 Conclusion and Future Work

We presented an adaptive sampling, signal-tailored integration and reconstruction technique for all-frequency direct illumination, rendering images and animations using a fraction of the cost of standard techniques. We develop new frequency-bandwidth estimates to appropriately sample occlusion, reflectance, and lighting variations. In the case of animation sequences, we further amortize rendering cost with a lightweight caching scheme that also exploits our frequency analysis.

Discussion. Our temporal bandwidth derivation for moving occluders assumes that the projected size of a small occluding patch does not change over time ; this only holds for purely rotational occluder motion (from the shaded point’s perspective), but still provides a good approximation in the case of small motions. Alleviating this constraint could further improve our visibility bandwidth, and we would like to investigate coupling the effects of temporal changes in the reflectance and lighting together with the occlusion. Similarly, we only consider linear object motion, as is common in many rendering approaches, so modeling shading variations due to *rotational* motion could be an interesting avenue of future work.

We do not model the temporally varying depth complexity of occluders, which could lead to shading variations when occluders subtend the same spherical region at certain moments in time during their motion ; in the case where one moving occluder completely blocks another, this may lead to temporal bandwidth underestimation in our current approach, however, we have not noticed a case where this results in any artifacts during our investigation.

Another more subtle issue arises when trying to simply multiply the reconstructed shading by a texture value after the fact (Equation 4.17) : this only holds when the texture value at a pixel does not vary over time ; this is clearly not the case for objects under relative motion w.r.t. the camera. The correct solution would be to project the texture,

masked by the pixel’s spatial footprint, across time and onto our other filters in order to model its maximum bandwidth using a similar approximation as the other cases, taking the mean plus three times its standard deviation. We can then weigh the spatially-varying texture by the shading variation over the same time period. There are likely many challenging details that would make pursuing a solution to this problem a fruitful direction of future work.

While our caching scheme and bandwidth estimates can readily be integrated into other frequency-based shading approaches to account for distribution effects such as defocus [7, 40] or motion blur [7, 15], our algorithm and analysis are currently restricted to single-bounce direct illumination (and Whitted-style recursive effects, e.g. mirror reflections). Extensions to global illumination are not trivial, but one direction would be to formulate a progressively-accumulated bandwidth estimate to deal with multiple bounces in, e.g., a path-tracing estimator.

Lastly, while one of the benefits of our cache system is that it is very lightweight, we do not currently share or reuse integration samples across radiance points ; previous approaches [13, 14] have treated similar problems using a heavyweight ray-space cache. We find our proposed solution to be a reasonable middle-ground solution, using higher-order statistics to *compare* and reason about nearby radiance points, but we never *share* this information *across* radiance points to influence the integration process. Doing so is left to future work and could further improve the efficiency of a technique like ours.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

L'article de ce mémoire s'inscrit dans une démarche de compréhension du principe d'analyse fréquentielle théorique du transport de la lumière, ainsi que des atouts et limites des algorithmes utilisés à l'heure actuelle qui en prennent avantage. Pour concrétiser ces connaissances, nous proposons une nouvelle méthode d'accélération du rendu étendant théoriquement et mettant en pratique l'application de l'analyse fréquentielle à la synthèse d'images réalistes, cherchant ainsi à traiter certaines de ces limites.

L'analyse fréquentielle du transport de la lumière de Durand et al. [11] offre une étude théorique en profondeur d'importance capitale, ouvrant les portes à une myriade de méthodes de réduction de variance et de temps de calcul prenant avantage de l'intuition donnée par la connaissance du spectre fréquentiel d'un signal sur les variations de ce signal dans son domaine. Leur analyse n'est pas complète et ne traite pas des effets d'illumination globale décuplant le nombre de dimensions d'intégration à étudier, et donne peu de pointeurs sur la mise en pratique de ce type de techniques à destination de systèmes de rendu tout intégrés utilisés en production.

Plusieurs algorithmes et études subséquentes ont poussé l'analyse fréquentielle pour lui permettre de décrire des effets venant de l'illumination globale. Nous présentons au chapitre 2 un nombre de travaux antérieurs poussant de l'avant l'étude fréquentielle de la lumière. Ainsi, des effets d'intégration complexes ont été analysés et accélérés algorithmiquement, comme la profondeur de champ [40] [7], le flou de mouvement [15] [7], les phénomènes d'occultation ambiante directionnelle [13], des ombres projetées d'objets occultants de toutes fréquences [14] [28], l'illumination indirecte venant de lumières surfaciques [29], et les médias participatifs [6].

La méthode que nous présentons dans l'article s'inscrit dans le contexte de mise en pratique de ces techniques dans un cadre plus général et intégré. Mehta et al. [27] ont présenté une méthode avançant dans cette direction, permettant de traiter la profondeur de champ, les ombres douces et l'illumination indirecte, dans le cas d'illumination de scènes animées par lumières surfaciques. Notre technique, *A Practical Fourier Radiance Cache for Adaptive Rendering of Animations*, prend également cette direction. Nous proposons une méthode de réduction de variance dans le cas d'illumination directe par carte d'environnement seulement, pour des géométries, matériaux et illumination toutes fréquences de scènes animées.

Notre méthode étend l'analyse fréquentielle pour une meilleure estimation de la bande-passante pour échantillonner adaptivement de manière appropriée (dans le domaine spatial, temporel et d'intégration) l'occultation, la réflectance et les variations lumineuses. Elle offre ainsi la possibilité au rendu d'images et d'animations de n'utiliser qu'une fraction du coût de techniques standard. Notre algorithme traite avec importance le rendu d'animations en offrant un schéma léger de mise en cache d'échantillons intégrés pour une réutilisation future adaptative basée fréquentiellement, au fil complet d'une animation. Ces atouts lui permet ainsi une meilleure cohérence temporelle et une réduction des temps de calcul de séquences animées. Nous étendons finalement le filtre bilatéral pour le rendre plus précis dans la reconstruction fréquentielle en se basant sur une normalisation dans l'espace des caractéristiques à la surface.

La méthode proposée n'est cependant pas adaptée au traitement d'effets de plus haute dimension comme la profondeur de champ ou l'illumination indirecte. D'autres limitations dans le domaine de la technique ne lui permettent pas de performer dans tous les cas de figure. Plus particulièrement, nous n'étudions que le cas de l'éclairage venant de cartes d'environnement, limitant les possibilités du point de vue de la complexité de l'illumination dans les scènes. Tandis que nous traitons le mouvement d'objets dans nos schémas de mise en cache et d'échantillonnage, nous nous limitons à des mouvements linéaires par objet. Étendre la technique afin de la rendre applicable au rendu d'anima-

tions plus complexes, comme les animations par squelette, permettrait de la rendre plus à jour vis-à-vis des méthodes de rendu utilisées en production.

Les points de discussion terminant l'article du chapitre 3 évoquent différentes voies de travaux futurs au vu des limitations évoquées. Nous sommes particulièrement intéressés à l'extension de l'analyse présentée afin de procéder sans discrimination à l'illumination directe et indirecte de scènes, ne reposant pas sur un type de luminaire en particulier, mais permettant plusieurs types d'éclairages différents. Cette extension démontrera ainsi l'utilité et la praticabilité de l'analyse fréquentielle à traiter les effets de toutes fréquences dans un cadre de travail unifié. Pour ce faire, nous pensons étudier l'idée d'une méthode de mise en cache d'un critère fréquentiel directionnel raffiné adaptativement temporellement afin de découpler la bande-passante calculée du type d'illumination et du phénomène de rebond unique entre la lumière et la caméra présent dans l'illumination directe, et se diriger vers un critère fréquentiel accumulé progressivement sur plusieurs rebonds à la manière du tracé de chemin (*path-tracing*). Nous sommes également intéressés à l'accélération matérielle de ces techniques d'échantillonnage et de reconstruction afin de possiblement amener certains des concepts dérivés de l'analyse fréquentielle dans le domaine de la synthèse d'images interactive ou en temps réel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Mahdi Mohammad Bagher, Cyril Soler, Kartic Subr, Laurent Belcour, and Nicolas Holzschuch. Interactive Rendering of Acquired Materials on Dynamic Geometry using Frequency Analysis. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 19(5) :749–761, 2013.
- [2] Kavita Bala, Julie Dorsey, and Seth Teller. Radiance Interpolants for Accelerated Bounded-Error Ray Tracing. *ACM Transactions on Graphics*, 18(3) :213–256, 1999.
- [3] Kavita Bala, Bruce Walter, and Donald Greenberg. Combining Edges and Points for Interactive High-Quality Rendering. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3) :631–640, 2003.
- [4] Petr Beckmann and Andre Spizzichino. *Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*. Artech House, 1987.
- [5] Laurent Belcour. *Frequency Analysis of Light Transport : from theory to implementation*. PhD thesis, Grenoble Université, 2012.
- [6] Laurent Belcour, Kavita Bala, and Cyril Soler. A Local Frequency Analysis of Light Scattering and Absorption. *ACM Transactions on Graphics*, 33(5) :163, 2014.
- [7] Laurent Belcour, Cyril Soler, Kartic Subr, Nicolas Holzschuch, and Frédo Durand. 5D Covariance Tracing for Efficient Defocus and Motion Blur. *ACM Transactions on Graphics*, 32(3) :31 :1–31 :18, 2013.
- [8] James W. Cooley and John W. Tukey. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19(90) :297–297, May 1965.

- [9] Carsten Dachsbacher, Marc Stamminger, George Drettakis, and Frédo Durand. Implicit Visibility and Antiradiance for Interactive Global Illumination. *ACM Transactions on Graphics*, 26(3) :61, 2007.
- [10] Holger Dammertz, Daniel Sewtz, Johannes Hanika, and Hendrik P. A. Lensch. Edge-Avoiding $\tilde{\Delta}$ -Trous Wavelet Transform for Fast Global Illumination Filtering. In *Proceedings of High Performance Graphics*, pages 67–75. Eurographics, June 2010.
- [11] Frédo Durand, Nicolas Holzschuch, Cyril Soler, Eric Chan, and François X. Sillion. A Frequency Analysis of Light Transport. *ACM Transactions on Graphics*, 24(3) :1115–1126, 2005.
- [12] Frédo Durand and Julie Dorsey. Fast Bilateral Filtering for the Display of High-Dynamic-Range Images. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3) :257–266, 2002.
- [13] Kevin Egan, Frédo Durand, and Ravi Ramamoorthi. Practical Filtering for Efficient Ray-traced Directional Occlusion. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH Asia)*, 30(6) :180, December 2011.
- [14] Kevin Egan, Florian Hecht, Frédo Durand, and Ravi Ramamoorthi. Frequency Analysis and Sheared Filtering for Shadow Light Fields of Complex Occluders. *ACM Transactions on Graphics*, 30(2) :9 :1–13, April 2011.
- [15] Kevin Egan, Yu-Ting Tseng, Nicolas Holzschuch, Frédo Durand, and Ravi Ramamoorthi. Frequency Analysis and Sheared Reconstruction for Rendering Motion Blur. *ACM Transactions on Graphics*, 28(3) :93 :1–93 :13, 2009.
- [16] Elmar Eisemann and Frédo Durand. Flash Photography Enhancement via Intrinsic Relighting. 23(3) :673–678, 2004.
- [17] Jean Baptiste Joseph Fourier. *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, volume IV. 1824.

- [18] Iliyan Georgiev, Krivanek Jaroslav, Davidovic Tomas, and Philipp Slusallek. Bidirectional Light Transport with Vertex Connection and Merging. In *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of SIGGRAPH Asia)*, volume 31, page 192, 2012.
- [19] Kahn H. and Marshall A. W. Methods of Reducing Sample Size in Monte Carlo Computations. *Journal of the Operations Research Society of America*, 1(5) :263–278, 1953.
- [20] Toshiya Hachisuka, Jacopo Pantaleoni, and Henrik Wann Jensen. A Path Space Extension for Robust Light Transport Simulation. Technical report, NVIDIA Technical Report NVR-2012-001, 2012.
- [21] James T. Kajiya. The Rendering Equation. In *Proceedings of SIGGRAPH '86*, volume 20, pages 143–150. ACM Press, August 1986.
- [22] Jaroslav Krivánek, Pascal Gautron, Sumanta Pattanaik, and Kadi Bouatouch. Radiance Caching for Efficient Global Illumination Computation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11(5) :550–561, January 2005.
- [23] Jaakko Lehtinen, Timo Aila, Jiawen Chen, Samuli Laine, and Frédo Durand. Temporal Light Field Reconstruction for Rendering Distribution Effects. *ACM Transactions on Graphics*, 30(4) :55, July 2011.
- [24] Jaakko Lehtinen, Timo Aila, Samuli Laine, and Frédo Durand. Reconstructing the Indirect Light Field for Global Illumination. *ACM Transactions on Graphics*, 31(4) :51 :1–10, July 2012.
- [25] Tzu-Mao Li, Yu-Ting Wu, and Yung-Yu Chuang. SURE-based Optimization for Adaptive Sampling and Reconstruction. *ACM Transactions on Graphics*, 31(6) :194, November 2012.
- [26] Plancherel M. and Leffler M. Contribution à l'étude de la représentation d'une

fonction arbitraire par des intégrales définies. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 30 :289–335, 1910.

- [27] Soham Mehta, Jiaxian Yao, Ravi Ramamoorthi, and Frédo Durand. Factored Axis-Aligned Filtering for Rendering Multiple Distribution Effects. *ACM Transactions on Graphics*, 33(4) :57, 2014.
- [28] Soham Uday Mehta, Brandon Wang, and Ravi Ramamoorthi. Axis-aligned Filtering for Interactive Sampled Soft Shadows. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH Asia)*, 31(6) :163, November 2012.
- [29] Soham Uday Mehta, Brandon Wang, Ravi Ramamoorthi, and Frédo Durand. Axis-Aligned Filtering for Interactive Physically-Based Diffuse Indirect Lighting. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4) :96, July 2013.
- [30] Mark Meyer and John Anderson. Statistical Acceleration for Animated Global Illumination. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3) :1075–1080, July 2006.
- [31] Ravi Ramamoorthi, John Anderson, Mark Meyer, and Derek Nowrouzezahrai. A Theory of Monte Carlo Visibility Sampling. *ACM Transactions on Graphics*, 31(5) :121, 2012.
- [32] Ravi Ramamoorthi and Pat Hanrahan. An Efficient Representation for Irradiance Environment Maps. In *SIGGRAPH*, pages 497–500, NY, 2001. ACM.
- [33] Ravi Ramamoorthi and Pat Hanrahan. Frequency Space Environment Map Rendering. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3) :517–526, July 2002.
- [34] Ravi Ramamoorthi, Dhruv Mahajan, and Peter Belhumeur. A First-Order Analysis of Lighting, Shading, and Shadows. *ACM Transactions on Graphics*, 26(1) :2, 2007.

- [35] Fabrice Rousselle, Claude Knaus, and Matthias Zwicker. Adaptive Sampling and Reconstruction using Greedy Error Minimization. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH Asia)*, 30(6) :159 :1–12, 2011.
- [36] Takafumi Saito and Tokiishiro Takahashi. Comprehensible Rendering of 3-D Shapes. In *SIGGRAPH '90*, pages 197–206, New York, NY, USA, 1990.
- [37] Jorge Schwarzhaupt, Henrik Wann Jensen, and Wojciech Jarosz. Practical Hessian-based Error Control for Irradiance Caching. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH Asia)*, 31(6) :193 :1–10, 2012.
- [38] Pradeep Sen and Soheil Darabi. On Filtering the Noise from the Random Parameters in Monte Carlo Rendering. *ACM Transactions on Graphics*, 31(3) :18 :1–15, May 2011.
- [39] Peter-Pike Sloan, Naga K. Govindaraju, Derek Nowrouzezahrai, and John Snyder. Image-Based Proxy Accumulation for Real-Time Soft Global Illumination. *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, pages 97–105, January 2007.
- [40] Cyril Soler, Kartic Subr, Frédo Durand, Nicolas Holzschuch, and François X. Sillion. Fourier Depth of Field. *ACM Transactions on Graphics*, 28(2) :18 :1–18 :12, 2009.
- [41] Tomasi and Manduchi. Bilateral Filtering for Gray and Color Images. In *ICCV 1998*, pages 839–839, Washington, DC, USA, 1998.
- [42] Kenneth Torrance and Emmett Sparrow. Theory for Off-Specular Reflection from Roughened Surfaces. *Journal of the Optical Society of America*, 57(9) :1105–1114, 1967.
- [43] Eric Veach. *Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation*. PhD thesis, Stanford University, 1997.

- [44] Eric Veach and Leonidas J. Guibas. Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering. In *SIGGRAPH 1995*, pages 419–428. ACM Press, 1995.
- [45] Edgar Velázquez-Armendáriz, Eugene Lee, Kavita Bala, and Bruce Walter. Implementing the Render Cache and the Edge-and-Point Image on Graphics Hardware. In *Proceedings of Graphics Interface*, pages 211–217, June 2006.
- [46] Bruce Walter, George Drettakis, and Steven Parker. Interactive Rendering Using the Render Cache. *Eurographics Association Aire-la-Ville*, pages 19–30, June 1999.
- [47] Gregory J. Ward and Paul S. Heckbert. Irradiance Gradients. In *Eurographics Workshop on Rendering*, pages 17–20, 1992.
- [48] Gregory J. Ward, Francis M. Rubinstein, and Robert D. Clear. A Ray Tracing Solution for Diffuse Interreflection. *ACM Computer Graphics*, 22(4) :85–92, August 1988.