Université de Montréal

Optimium financier de premier et de second rang dans une économie de distribution à plusieurs biens

par

Ivan Bartolini

Département de sciences économiques
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en sciences économiques

Novembre, 1999

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Optimium financier de premier et de second rang dans une économie de distribution à plusieurs biens

présentée par
Ivan Bartolini

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Président-rapporteur	Michel POITEVIN
Directeur de recherche	Camille BRONSARD
Membre du Jury	Yves SPRUMONT
Examinateur externe	Christian GOURIÉROUX
Représentant du doyen de la FES	Éric RENAULT

Thèse acceptée le : Jeudi 20 janvier 2000

Sommaire

Lorsque le système d'actifs est incomplet, des problèmes d'existence sont reliés aux économies avec actifs réels (Hart 1974) alors que des problèmes d'indétermination réelle de l'équilibre sont reliés aux économies avec actifs financiers (Cass 1985). Dans les deux cas, l'optimum de premier rang ne peut plus être atteint, et il faut considérer des optimums au sens contraint. Les concepts d'optimum au sens contraint ont surtout été étudiés par rapport à l'équilibre concurrentiel (Diamond (1967), Grossman (1977), et pour des économies réelles (Stiglitz (1982)). Un concept général d'optimum contraint par un système de marchés concurrentiels pour les biens (OCGP) a été proposé plus récemment par Géanakoplos et Polémarchakis (1986).

Dans cette thèse on aborde le problème de l'incomplétude du système d'actifs financiers comme un modèle de second rang. On se distingue des auteurs précédents puisqu'on considère un système d'actifs financiers. Pour éviter les problèmes liés à l'indétermination de l'équilibre, on se place dans une économie de Distribution. On étend ainsi le modèle de référence de Arrow (1953) au cas des marchés incomplets et des préférences non séparables, et on obtient aussi une interprétation du modèle en terme de politique monétaire.

Dans le premier chapitre on développe une théorie généralisée du consommateur faisant face à différentes contraintes budgétaires. On y introduit les concepts dont on aura besoin pour intrerpréter l'optimum, et on propose une décomposition originale de l'effet de substitution des prix en un effet de substitution inter états et un effet de substitution intra état. Dans le second chapitre on pose le problème de l'optimum de premier rang dans l'espace des prix individuels et des revenus. On montre alors que l'incomplétude du système d'actifs financiers n'est pas suffisante en soi pour

faire dévier l'allocation du premier rang puisqu'elle ne représente qu'une contrainte nominale.

Le troisième chapitre constitue le corps de la thèse. On y introduit différents concepts d'optimum contraints, et on montre que dans chacun des cas le Distributeur se comporte comme un monopoleur de compromis qui prélève un système de taxes et de subventions en n'utilisant qu'une partie de son pouvoir de monopole. Dans la première section on présente l'optimum contraint par un système d'actifs incomplets au sens pur (Diamond), en imposant une contrainte de normalisation unique des prix conditionnels. Dans le seconde section, on impose une contrainte d'unicité des prix conditionnels, et on obtient une application du concept d'optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis pour une économie financière. Dans la dernière section on présente un concept original d'optimum contraint par un système de marchés concurrentiels pour les actifs qui peut se voir comme la réciproque du modèle précédent.

Dans le dernier chapitre, on revient à l'OCGP, et on interprète la quantité totale d'actifs émise par le Distributeur comme un instrument de politique monétaire dans la lignée de Magill et Quinzii (1992). Après avoir mis en évidence les liens entre la structure des rendements et la nature des effets de la politique monétaire, on obtient un résultat intéressant sur la structure optimale des rendements des actifs existants puisque cette dernière ne permet pas la conduite d'une politique monétaire active.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur Camille Bronsard pour sa patience et pour son enseignement philosophique, ainsi que David Servettaz pour les nombreuses discussions entourant les concepts de base. Je tiens également à remercier Yves Sprumont pour son coup de fouet du dernier mois. Enfin, je tiens à remercier Mani pour ces cinq années et pour son enseignement sur la vie.

Dédicace

A tous ceux qui n'ont pas eu la possibilité d'étudier

Introduction générale

Pour comprendre le fonctionnement d'une institution, il est utile d'évaluer son comportement dans des cas qui ne lui sont pas favorables. Ainsi, l'introduction d'un système d'actifs incomplet amène de profonds bouleversements dans les problèmes d'équilibre général en incertitude. Tout d'abord, la nature des actifs prend une importance qu'elle n'avait pas dans le cas particuliers des actifs complets. Des problèmes d'existence de l'équilibre et de domination au sens de Pareto sont associés aux économies réelles (Hart 1974) alors que des problèmes d'indétermination réelle de l'équilibre apparaissent dans les économies financières (Cass 1985). Dans chacun des cas, l'optimalité au sens de Pareto ne peut plus être atteinte, et il faut définir de nouveaux concepts d'optimalité de second rang.

La littérature s'est principalement consacrée aux problèmes associés à la nature des rendements des actifs. Du coté des actifs réels, l'accent a été mis sur l'aspect non générique des problèmes d'existence (Duffie et Shafer 1985). En ce qui concerne les actifs financiers, c'est d'abord la caractérisation de la dimensionalité du problème des indéterminations réelles (Polémarchakis et Mas Colell (1989), Balasko et Cass (1989)) qui a attiré l'attention, avant que ce problème d'indétermination ne soit réinterprété en terme des effets réels de la politique monétaire (Magill et Quinzii 1992).

Le problème de l'optimalité contrainte a suscité moins d'intérêt, et il a été abordé principalement par rapport au comportement de l'équilibre concurrentiel. Diamond (1967) s'est demandé le premier quelles contraintes il faudrait imposer sur les instruments d'un planificateur pour que les conditions de premier ordre de l'équilibre concurrentiel soient les mêmes que celles du planificateur. Dans son modèle particulier à un bien, il a montré que l'équilibre concurrentiel était un optimum contraint par l'existence d'un système d'actifs incomplet. Grossman (1977) a étendu le projet de Diamond au cas général, et il a proposé un nouveau concept d'optimalité sociale contrainte au sens de Nash pour caractériser l'équilibre concurrentiel. Stiglitz (1982) a étendu le concept de Diamond au cas général à plusieurs biens, avant que Géanakoplos et Polémarchakis (1986) ne proposent un concept général d'optimum contraint par l'existence de marchés concurrentiels pour les biens (OCGP). Ces auteurs montrent que de manière générique, l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCGP pour les économies numéraires[1].

Pour bien comprendre le comportement de l'équilibre lorsque le système d'actifs est incomplet, il est nécessaire de connaître celui de l'optimum. Entre l'optimum de premier rang et l'OCGP, il existe un espace vide qu'on se propose d'explorer dans la majeure partie de cette thèse. On adopte une approche différente de celle des auteurs précédents, puisqu'on pose le problème de l'optimum dans une économie financière, et non dans une économie réelle[2]. Vu que l'introduction d'un système d'actifs financiers peut se voir comme une contrainte sur l'allocation des revenus, on se place dans l'espace dual des prix et des revenus. Pour connaître les fonctions de réactions des individus face à un système de prix et un système de revenus donnés, on est amené à présenter une théorie généralisée du consommateur faisant face à plusieurs contraintes budgétaires. Pour éviter les problèmes d'indétermination de l'équilibre liés aux économies financières, on se place dans une économie de Distribution. On pourra réinterpréter ainsi de manière naturelle le problème d'indétermination réelle de l'équilibre en terme de politique monétaire active, et par la même occasion, on pourra généraliser le modèle de référence de Arrow (1953) aux cas d'un système

[1] Une économie numéraire est une économie dans laquelle les rendements des actifs sont exprimés en terme d'un bien de référence.

[2] Il est à noter que Géanakoplos et Polémarchakis ne posent pas le problème de l'optimum dans leur article. Ils obtiennent leur résultat par des arguments de statique comparative à partir de l'équilibre concurrentiel.

d'actifs incomplet, et au cas des préférences non séparables.

Le déroulement de cette thèse s'annonce comme suit. Dans le premier chapitre, on présente une théorie généralisée du consommateur faisant face à différentes contraintes budgétaires séparées. On se situe dans la lignée de Allard-Bronsard-Gouriéroux (1998), mais on se distingue de ces auteurs en ce sens qu'on étudie directement une structure institutionnelle totalement séparée entre les états du monde. Ceci se justifie par notre manière de poser le problème de l'optimum. Après avoir défini le système de dispositions marginales à payer individuel, on introduit le concept de compensation au premier ordre à partir duquel on construit différentes matrices de compensation de l'effet prix et de l'effet revenus qu'on retrouvera dans les conditions de premier ordre de l'optimum. On présente une décomposition originale de l'effet de substitution des prix en un effet de substitution intra état et un effet de substitution inter états. Cette décomposition est résumée dans une nouvelle matrice de substitution 'contingente' de l'effet prix, la matrice $\overline{K}$.

On passe à l'optimum financier de premier rang dans l'espace des prix individuels et des revenus. En se plaçant dans cet espace, on comprend mieux le pouvoir de décentralisation lié au système de marché à prix unique. On introduit alors un système d'actifs potentiellement incomplet qui limite l'allocation des revenus, et on montre que l'incomplétude du système d'actifs n'est pas suffisante en soi pour faire dévier l'allocation du premier rang. En effet, lorsque le Distributeur peut taxer le niveau des prix de manière individuelle, il est capable d'implanter une allocation de premier rang. Ce résultat est particuliers aux économies financières, et il est intéressant car cet optimum ne peut pas être implanté par un système de marchés concurrentiels pour les actifs.

On entre dans le second rang en posant une contrainte de normalisation unique des prix, ce qui défini l'optimum contraint par un système d'actifs incomplet au sens pur. On montre que le Distributeur se comporte comme un 'monopoleur de compromis' qui parvient à égaliser les recettes marginales de compromis individuelles. Ce terme de 'monopoleur de compromis'[3] a été introduit par Drèze (1964) pour donner une nouvelle interprétation au problème de Boiteux, et il a été étendu par la suite par ses étudiants dans différentes directions. Le système de prix relatifs, par son influence sur le coût de la vie, est utilisé ainsi comme un instrument de second rang pour réduire les distorsions inter états. Un système de prix individualisés a le désavantage de ne pas satisfaire l'optimalité au sens ex-post. Avant d'imposer l'unicité du système de prix conditionnels, on s'intéresse au choix de l'unité de compte optimale puisqu'on obtient le résultat suivant: lorsqu'il n'existe que deux individus, l'optimum contraint au sens pur est efficace au sens ex-post si le Distributeur peut choisir l'unité de compte du système.

On introduit ensuite une contrainte d'unicité des prix à la consommation et on présente l'OCGP dans le cadre d'une économie financière. On montre cette fois que le Distributeur parvient à égaliser les recettes marginales de compromis 'corrigées' par des redistributions fictives de quantité. Les dispositions marginales à payer pour les actifs restent individualisées, et on retrouve le résultat de Géanakoplos et Polémarchakis comme quoi l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCGP. Pour s'assurer de la cohérence du modèle, on présente en annexe le cas particulier du modèle à un bien, ainsi que les effets de différentes hypothèses de séparabilité tant au niveau des préférences qu'au niveau des institutions. On présente un dernier optimum contraint cette fois-ci par un système de marchés concurrentiels pour les actifs, alors que l'allocation des biens n'est pas contrainte. Cet optimum est tout à fait original, et peut se voir en quelque sorte comme la 'réciproque' de l'OCGP. On montre que

[3] Notons que le terme 'monopole' est un terme générique qui englobe celui de duopole et celui de polypole.

le Distributeur parvient à nouveau à égaliser les recettes marginales individuelles de compromis corrigées par des redistributions fictives de quantité. La boucle est bouclée quand on remarque que ces redistributions fictives de biens sont engendrées par des redistributions fictives d'actifs, ce qui est complémentaire et original. On en conclut immédiatement que l'équilibre concurrentiel n'est pas un optimum contraint par l'existence de marchés concurrentiels pour les actifs.

Dans le dernier chapitre, on utilise la nature financière des actifs pour traiter de la politique monétaire optimale dans la lignée de Magill et Quinzii (1992). On se distingue de ces auteurs sur au moins deux points: on aborde d'une part la politique monétaire dans le cas de l'OCGP et non dans le cas de l'équilibre concurrentiel, et d'autre part les instruments de politique monétaire qu'on considère sont également soumis aux contraintes imposées par l'incomplétude du système d'actifs. Après avoir mis en évidence les liens qui existent entre la structure des rendements et la nature des effets de la politique monétaire, on s'intéresse au problème de l'optimalité des rendements des actifs existants. On obtient notre dernier résultat: la structure optimale des rendements est une structure qui ne permet pas au Distributeur de mener une politique monétaire active. Avant de débuter avec la théorie généralisée du consommateur, on présente un rappel historique sur les modèles d'équilibre général en incertitude.

Rappel historique

Dans les problèmes d'allocation de ressources, on cherche d'abord à caractériser l'ensemble des allocations efficaces au sens de Pareto pour un environnement donné, puis on s'intéresse aux mécanismes susceptibles d'implanter ces allocations. Une économie est une liste décrivant d'une part la structure réelle de l'environnement, les préférences des individus et la structure de production, et d'autre part la structure institutionnelle de l'environnement, qui comprend tant le système de propriété que l'unité de compte ou les instruments d'échange. Ainsi, on distinguera les économies d'échange des économies de distribution, et les économies financières des économies réelles. Sous des conditions très générales concernant l'environnement, on sait par les deux théorèmes du bien-être qu'il y a équivalence entre les allocations efficaces et les allocations engendrées par un système de marchés concurrentiels.

L'introduction de l'incertitude met en évidence l'importance de la structure institutionnelle d'échange pour l'allocation optimale des ressources. Lorsque l'incertitude est représentée par un ensemble d'états du monde mutuellement exclusifs, dont la probabilité d'occurence est déterminée de manière exogène, l'analyse en incertitude devient formellement équivalente à l'analyse en certitude. On peut alors étendre les résultats du cas certain au problème incertain au prix d'une simple réinterprétation économique du modèle. Il s'agit d'une part de faire une distinction entre l'optimalité au sens ex-ante et l'optimalité au sens ex-post, et d'autre part de redéfinir le concept de bien.

L'incertitude amène une dimension séquentielle au problème d'allocation. Avant que l'incertitude ne soit levée, les individus ont des préférences définies sur des plans de consommation conditionnelle. On parlera d'optimalité au sens ex-ante lorsque l'optimalité est définie par rapport à ce système de préférences. Une fois l'incertitude levée, les individus ont des préférences définies sur des biens non conditionnels, et on parlera d'optimalité au sens ex-post dans ce cas. Pour assurer une certaine cohérence dans les préférences des individus, on dérivera les préférences ex-post à partir des préférences ex-ante. Le concept de bien est remplacé par celui de bien contingent, c'est-à-dire qu'il est indicé par sa date de livraison ainsi que par l'état du monde dans lequel il est livrable. La littérature a consacré le terme de bien contingent malgré le fait qu'il s'agit plus d'un droit que d'un bien en soi. Au concept de bien contingent est associé celui de marché contingent. Un marché contingent est un lieu sur lequel s'échangent aujourd'hui des droits sur des biens conditionnels. Le prix d'un bien contingent représente ainsi le prix qu'il faut payer de manière ferme pour s'assurer la livraison d'une unité de ce bien conditionnellement à la réalisation d'un certain état du monde.

Dans une économie à S états du monde et L biens par état du monde, lorsqu'il existe un système complet de LS marchés contingents, c'est-à-dire un marché pour chaque bien dans chaque état du monde, on retrouve l'équivalence entre les allocations optimales et les allocations d'équilibre concurrentiel sous les mêmes conditions que dans le cas certain[4]. C'est le premier théorème de Arrow, et le modèle de référence Arrow-Debreu des marchés contingents. Dans ce cas, l'optimalité au sens ex-ante implique l'optimalité au sens ex-post. Si la réinterprétation économique du modèle Arrow-Debreu semble inoffensive à première vue, elle se heurte à l'observation empirique sur au moins deux points. D'une part, le modèle Arrow-Debreu fait totalement abstraction de la dimension séquentielle du problème, puisque tous les échanges ont lieu avant que l'incertitude ne soit levée. D'autre part, l'existence de marchés contingents est limitée dans la pratique et l'hypothèse d'un système complet de marchés contingents devient peu réaliste.

Arrow (1953) propose alors un modèle qui permet de répondre partiellement à ces deux critiques. Si les individus connaissent les prix qui auront cours une fois l'incertitude levée, il n'est plus nécessaire qu'ils s'assurent des droits *directement* sur les biens contingents, ils n'ont plus qu'à s'assurer des droits contingents sur les ressources financières qui leur permettront d'acheter ces consommations si un certain état du monde se réalise. Arrow se place dans une économie de Distribution, et il

[4]L'hypothèse de convexité des préférences qui est nécessaire à l'obtention du second théorème du bien-être dans le cas certain prend une interprétation particulière dans le cas incertain puisqu'elle implique que les individus ont de l'aversion pour le risque.

montre que l'existence d'un système de S marchés contingents pour les monnaies et de L marchés au comptant pour les biens est suffisante pour l'implantation d'une allocation efficace. C'est le second théorème de Arrow.

Le modèle de Arrow apporte une dimension séquentielle au problème que le modèle Arrow-Debreu des marchés contingents n'avait pas. Dans un premier temps, les individus agissent sur les marchés financiers pour réallouer leur richesse entre les différents états du monde, c'est l'aspect d'assurance. Une fois l'incertitude levée, ils honorent leurs engagements pris sur les marchés financiers et agissent sur le marché des biens, c'est l'aspect allocatif. Dans le modèle Arrow-Debreu, les marchés contingents pour les biens assurent tant la fonction réallocative de la richesse que la fonction allocative des biens. Une fois l'incertitude levée, les individus ne font qu'honorer leurs engagements pris sur les marchés contingents. Le modèle est alors complètement déterminé avant que l'incertitude ne soit levée, et les marchés ne sont ouverts qu'une seule fois.

Drèze (1971) se place dans une économie d'échange et étend le modèle de Arrow dans deux directions. Il remplace d'abord la monnaie de Arrow par un numéraire qui peut être choisi de manière arbitraire entre les L biens de l'économie. Il s'attarde ensuite sur l'hypothèse d'anticipation exacte des prix implicite au modèle de Arrow, et il pose la question suivante : si les marchés d'un seul état du monde sont ouverts, comment les individus font-ils pour connaître les prix sur des marchés qui ne seront jamais ouverts ? Pour répondre à cette question, il introduit un nouveau concept de marché, celui de marché conditionnel. Un marché conditionnel est un lieu où s'échangent des promesses de livraison et des promesses de paiement qui sont conditionnelles à la réalisation d'un certain état du monde. Il montre que l'existence de $(L-1)S$ marchés conditionnels pour les biens autres que le numéraire fournit la même information sur les prix des biens que l'existence de marchés contingents pour ces biens. Drèze réinterprète le second théorème de Arrow en substituant l'existence de $S(L-1)$ marchés conditionnels pour les biens autres que le numéraire à l'hypothèse implicite de connaissance parfaite des prix du modèle de Arrow. Cette réinterprétation fait ressortir l'importance de l'hypothèse informationnelle du modèle de Arrow puisque dans ce cas, le nombre total de marchés qu'il faut ouvrir est le même que dans le modèle Arrow-Debreu des marchés contingents, seul la nature de ces marchés diffère. L'article de Drèze est passé plus ou moins inaperçu malgré le fait qu'il soit d'une profondeur peu commune.

Avec sa dimension séquentielle, le modèle de Arrow est le modèle de référence qui va servir à toute une branche de la littérature qui va accepter l'hypothèse d'anticipation exacte des prix. Arrow considère un système d'actifs particuliers puisqu'un actif ne paie que dans un seul état du monde, et que ses rendements sont exprimés en monnaie. On parlera dans ce cas d'actifs de Arrow[5]. Or la nature des actifs peut être plus large et toute structure d'actifs qui permet de réallouer la richesse des individus entre différents états du monde peut être considérée. On distingue trois types d'actifs en fonction de la nature de leur rendement: les actifs réels, les actifs numéraires, et les actifs financiers. Les rendements d'un actif réel sont exprimés en terme de biens, ceux d'un actif numéraire en terme d'un seul bien, alors que les rendements d'un actif financier sont exprimés en terme d'unité de compte (monnaie). Un système d'actif est représenté par la matrice des rendements des actifs. Pour éviter la redondance, on suppose que la matrice des rendements est de rang maximal, c'est à dire que les rendements des actifs sont linéairement indépendants. On dira que le système d'actifs est complet lorsque la matrice des rendements exprimée en unité de compte est de rang complet[6], et qu'il est incomplet dans le cas contraire.

[5] Arrow se limite à cette structure particulière d'actifs puisqu'il fait remarquer que tout rendement d'actif (financier) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'actifs de Arrow.

[6] Dans le cas des actifs financiers et des actifs numéraires, cela revient à dire qu'il existe autant d'actifs que d'états du monde.

Lorsque le système d'actifs est complet, la nature des actifs n'a pas d'importance pour l'obtention du second théorème de Arrow.

Malgré le second théorème de Arrow, l'observation empirique montre que les systèmes d'actifs restent généralement incomplets, et on est amené à développer une théorie de l'équilibre général en marchés incomplets. L'analyse des marchés incomplets ouvre des voies fort intéressantes puisque la nature des actifs joue maintenant un rôle important dans la détermination de l'équilibre. Des problèmes d'existence et de domination au sens de Pareto sont liés aux systèmes d'actifs réels incomplets alors que des problèmes d'indétermination réelle de l'équilibre sont liés aux systèmes d'actifs financiers incomplets. Radner (1972) étend le modèle des biens contingents à celui des actifs réels et propose un concept général d'équilibre séquentiel, celui de plans, de prix, et d'anticipations des prix, qui permet de tenir compte de l'incomplétude des marchés, tout en rendant explicite l'hypothèse informationnelle du modèle de Arrow. Le modèle de Radner s'étend sur plusieurs périodes et sa structure peut être représentée sous forme d'un arbre. Dans ce modèle, les ventes d'actifs à découvert sont interdites pour assurer l'existence de l'équilibre. Pour chaque couple d'évènement-temps, le total des engagements d'un individu pour la livraison d'un bien ne peut pas dépasser ses dotations de ce bien.

Autorisant les ventes à découvert, Hart (1975) a mis en évidence cependant un double problème d'existence et d'optimalité d'un équilibre de Radner. Un équilibre de Radner peut ne pas exister, et qui plus est, il peut être dominé au sens de Pareto par un autre équilibre de Radner. Le problème d'existence provient du fait que lorsque les rendements des actifs sont exprimés en termes de biens, la matrice des rendements exprimée en terme d'unité de compte devient endogène puisqu'elle est une combinaison linéaire du vecteur de prix d'équilibre. Son rang peut alors varier avec le système de prix d'équilibre lorsque le système d'actifs n'est pas complet.

Géanakoplos (1990) présente un exemple simple à deux états du monde pour illustrer le problème d'inexistence. Il se place dans un cadre où l'équilibre concurrentiel associé à un système complet de marchés contingents est unique. Il choisit des rendements d'actifs réels tels que la matrice des rendements n'est pas de rang maximal lorsque le système de prix est précisément le système de prix de l'équilibre concurrentiel, alors qu'elle est de rang maximal lorsque le système de prix est différent du système de prix de l'équilibre concurrentiel. Il obtient la contradiction suivante; si les marchés sont complets, le prix d'équilibre est p^*, mais si le prix d'équilibre est p^*, alors les marchés ne sont pas complets. Des résultats génériques d'existence d'un équilibre concurrentiel ont cependant été dérivés sous différentes hypothèses (Duffie et Shafer 1985).

Lorsque l'économie possède un système d'actifs financiers incomplets, Cass (1985) a montré qu'il existe un problème d'indétermination réelle de l'équilibre dans les économies d'échange. Il fait remarquer que dans ce cas, l'hypothèse de connaissance parfaite des prix conditionnels est d'autant plus délicate. Le problème de l'indétermination réelle de l'équilibre est intimement lié aux degrés d'homogénéité du modèle dans le niveau des prix. En effet, d'un coté le niveau des prix affecte le pouvoir d'achat des rendements des actifs financiers, c'est-à-dire qu'il affecte les ensembles de consommation financièrement accessibles aux consommateurs, mais d'un autre coté, le modèle ne permet pas de déterminer le niveau des prix par les lois de Walras. Pour que l'indétermination nominale du modèle se traduise en indétermination réelle de l'équilibre, il faut d'une part qu'il y ait moins d'actifs que d'états du monde, et d'autre part qu'il y ait une certaine hétérogénéité entre les agents, ce qui sera généralement satisfait lorsqu'il existe plus d'agents que d'actifs[7]. Soit J le nombre d'actifs financiers dans l'économie. Dès lors qu'il existe moins d'actifs financiers que

[7]Remarquons ici que cette hypothèse va à l'encontre des modèles avec un agent représentatif.

d'états du monde ($J < S$), et que les agents sont suffisamment hétérogènes ($H > J$), il existe au moins $S - J$ degrés d'indétermination réelle de l'équilibre, et au plus $S - 1$ degrés d'indétermination réelle de l'équilibre, en fonction de la structure de la matrice des rendements.

Lorsque la matrice des rendements est en position générale[8] Géanakoplos et Mas Colell (1989) ont montré qu'il existe $S - 1$ degrés d'indétermination de l'équilibre. Ce résultat est d'autant plus surprenant qu'il est indépendant de la déficience des marchés aussi longtemps que les hypothèses du théorème sont vérifiées. Le modèle générique d'une économie d'échange avec actifs financiers se déroulant sur deux périodes possède toujours au moins deux degrés d'homogénéité, quelque soit la structure de la matrice des rendements. L'hypothèse que la matrice des rendements est en position générale assure que le modèle ne possède pas d'autre degrés d'homogénéité. Si on considère que le prix des actifs est une donnée exogène du problème, les degrés d'indétermination réelle de l'équilibre deviennent fonction de la déficience des marchés. Balasko et Cass (1989) ont montré en effet que lorsque les prix des actifs sont donnés, il n'existe plus que $S - J$ degrés d'indétermination réelle de l'équilibre. Ils justifient leur hypothèse sur les prix des actifs par le fait que les marchés des actifs sont en équilibre dès lors que les marchés pour les biens le sont également. Comme les rendements des actifs sont donnés de manière exogène et que les marchés des actifs sont en équilibre, il n'est pas insensé de considérer que les prix des actifs sont également exogènes.

Lorsque la matrice des rendements n'est pas en position générale, Magill et Quinzii (1992) ont montré qu'il existera au moins $S-J$ degrés d'indétermination réelle puisque certaines structures de rendements permettent d'augmenter les degrés d'homogénéité du modèle. Comme les problèmes liés aux systèmes d'actifs réels proviennent des prix relatifs d'équilibre alors que les problèmes liés aux systèmes d'actifs financiers

[8] Une matrice Z est en position générale si toute sous matrice carrée de Z est de rang complet.

proviennent du niveau des prix, les systèmes d'actifs numéraires sont 'immunisés' face à ces problèmes. C'est en effet la teneur du théorème de Polémarchakis et Géanakoplos (1986) qui prouve l'existence et l'unicité locale des équilibres concurrentiels lorsqu'il existe un système d'actifs numéraire potentiellement incomplet.

Si l'optimalité de premier rang ne peut plus être atteinte lorsque le système d'actifs est incomplet, il faut introduire de nouveaux concepts d'optimalité au sens contraint. La définition d'un optimum de second rang se fait par rapport à un système de contraintes, et il existera autant de définitions d'optimum de second rang que de systèmes de contraintes différents. Comme on reviendra sur l'historique de l'optimum contraint dans le troisième chapitre, on se limite ici à parler du concept d'optimum contraint par l'existence de marchés concurrentiels pour les biens proposé par Géanakoplos et Polémarchakis. Un optimum est un OCGP s'il n'est plus possible d'apporter d'améliorations au sens de Pareto par une réallocation des actifs lorsqu'on laisse le système de prix pour les biens s'ajuster à cette nouvelle répartition des actifs[9]. Ces auteurs montrent que de manière générique, l'équilibre concurrentiel n'est pas un optimum au sens contraint lorsque les marchés sont incomplets. Dans le cas particuliers du modèle à un bien de Diamond cependant, l'équilibre concurrentiel est un optimum au sens contraint.

Magill et Quinzii (1992) réinterprètent le problème d'indétermination de l'équilibre dans les économies financières en terme de politique monétaire. En effet, si les problèmes d'indétermination de l'équilibre proviennent du fait que le modèle ne permet pas de déterminer le niveau des prix, c'est peut-être parce qu'il manque une équation au système. Ils proposent alors un modèle d'échange à deux périodes dans lequel la monnaie joue son rôle de moyen d'échange et possiblement celui de réserve de pouvoir d'achat en introduisant une contrainte de 'cash in advance'. La quantité

[9] Cet optimum contraint est également l'optimum contraint au sens de Diamond.

totale de monnaie injectée dans chaque état du monde par le planificateur détermine le niveau des prix, et l'indétermination de l'équilibre est remplacée par le problème du choix de la politique monétaire optimale.

Les auteurs considèrent deux types d'équilibres monétaires, les équilibres monétaires dans lesquels la monnaie joue un rôle de moyen d'échange uniquement (l'épargne monétaire est nulle)[10], et celui où elle joue également un rôle de réserve de pouvoir d'achat. Dans le cas où la monnaie joue uniquement un rôle de moyen d'échange, ils établissent la neutralité de la monnaie lorsque le système d'actifs est complet, et l'unicité locale de l'équilibre monétaire lorsque les marchés sont incomplets. Dans le cas où la monnaie a également une fonction de réserve de pouvoir d'achat, ils établissent la non neutralité de la politique monétaire même lorsque le système d'actifs est complet. Enfin, Magill et Quinzii(1996) s'intéressent à la politique monétaire optimale dans le cas particuliers où il n'existe qu'un bien. Dans ce cas cependant, ils montrent que le modèle est trop simple pour bien rendre compte du rôle de moyen d'échange joué par la monnaie, puisque toute politique monétaire optimale implique une quantité infinie de monnaie dans au moins un état du monde.

[10]En introduisant un actif dont le rendement est constant dans tous les états du monde, et en se limitant aux cas où le taux d'intéret qui émane de cet actif est positif, il n'est jamais optimal pour les agents de détenir de l'épargne sous forme de monnaie, et la monnaie ne joue que son rôle de moyen d'échange.

CHAPITRE 1

Théorie généralisée du consommateur faisant face à S+1 contraintes budgétaires

Introduction

Dans ce premier chapitre, on analyse le comportement du consommateur faisant face à un système de contraintes budgétaires multiples à prix et à revenus donnés. On se situe dans la lignée de Allard-Bronsard-Gouriéroux (1998) qui présentent le problème du consommateur lorsque ce dernier peut relier les différentes contraintes budgétaires à l'aide d'une structure d'actifs potentiellement incomplète. On se distingue de ces auteurs en ce sens qu'on considère une structure institutionnelle totalement séparée entre les différents états du monde dans laquelle le consommateur prend le système de prix et de revenus comme donnés. On relègue l'introduction des actifs au problème de l'optimum par un souci d'efficacité. En effet, aussi longtemps qu'on s'intéresse à des optimum dans lesquels l'allocation des actifs existant n'est pas contrainte, il n'est pas nécessaire d'analyser la demande d'actifs des individus. On pourra étudier en particulier l'optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis à l'aide de cette théorie du consommateur. Lorsqu'on s'intéresse à des optimum dans lesquels le prix des actifs est unique, on pourra toujours reconstruire la théorie manquante à l'intérieur de l'optimum.

La théorie du consommateur à contraintes budgétaires multiples est naturellement plus riche que la théorie néo classique, puisqu'elle contient cette dernière comme un cas particulier. Si on retrouve les possibilités de substitution néo classiques à l'intérieur d'une même contrainte budgétaire, on obtient également de nouvelles possibilités de substitution entre ces différentes contraintes budgétaires. Ainsi on pourra parler tant de l'effet substitution des prix que de l'effet substitution des revenus. Dans la première section, on dérive le système de demande du consommateur, dont on se servira dans le problème de l'optimum. Dans la seconde section, on définit le système de dispositions marginales à payer de l'individu pour les biens et les revenus. Bien que le système institutionnel soit totalement séparable entre les différents états du monde, le consommateur réussit néanmoins à relier mentalement les différentes contraintes budgétaires par l'intermédiaire de ses prix de Arrow. On présente en annexe le système budgétaire mental de l'individu à contrainte budgétaire unique qui est équivalent au système institutionnel. Dans la dernière section, on introduit le concept de compensation au premier ordre à partir duquel on construit différentes matrices de compensation (substitution) de l'effet-prix et de l'effet-revenus. On présente une décomposition originale de l'effet de substitution des prix en un effet de substitution intra état et un effet de substitution inter états. Cette décomposition est résumée par la matrice de compensation 'contingente' de l'effet-prix $\overline{K}$, qui permettra de synthétiser les conditions de premier ordre du problème de l'optimum.

1.1 Système de demande

On se place dans une économie en contexte d'incertitude, et on considère le problème d'un consommateur qui cherche à allouer sa consommation de manière optimale entre $S+1$ états du monde, à prix et à revenus donnés. On peut ajouter une dimension temporelle au problème en considérant l'état zéro comme la première période, les autres états représentent alors l'incertitude de seconde période. De manière générale, on peut considérer le cas où il y a L_s biens par état du monde, avec $\sum_{s=0}^{S} L_s = L$. Pour simplifier l'analyse cependant, on va se restreindre au cas où $L_s = \overline{L}$ pour chaque état du monde. Les préférences du consommateur sont définies sur un ensemble de consommation $\widetilde{X}_h \subset R^L_{++}$, et sont représentables par une fonction d'utilité $u_h(x_h)$ qui satisfait les conditions suivantes :

Condition 1. *(Hu) u_h est deux fois continûment dérivable ($u_h \in C^2$), strictement monotone ($Du_h \gg 0$), et fortement quasi-concave ($\triangle x \neq 0$ et $Du'_h(x_h) \triangle x = 0 \Rightarrow \triangle x' D^2 u_h(x_h) \triangle x < 0$).*

Le problème d'optimisation du consommateur faisant face à $S + 1$ contraintes budgétaires à prix et à revenus donnés s'écrit comme suit,

$$\underset{(x_h)}{Max} \qquad u_h(x_h) - \lambda_h^{'}(\widehat{P}' X_h - R_h)$$

où $\lambda_h^{'} = (\lambda_{h0,} \lambda_{h11,}.., \lambda_{h1s}, ..\lambda_{h1S})$, et $\widehat{P}'$ est une matrice de dimension $(S + 1) \times L$ avec comme s-ième ligne $(0, ...0_{s-1}, \widehat{p}_s^{'}, 0, ..0)$. Les conditions de premier ordre sont données par

$$Du_h^{'} - \lambda_h^{'} \widehat{P}' = 0$$
$$R_h - \widehat{P}' x_h = 0$$

Dérivons ces conditions de premier ordre par rapport à x_h, λ_h. La Jacobienne s'écrit alors comme

$$J_{x_h, \lambda_h} = \begin{pmatrix} U_{hh} & -\widehat{P} \\ -\widehat{P}' & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.1. *La Jacobienne est de rang maximal*

Pour s'en convaincre, supposons le contraire. Alors il existe des vecteurs $\phi \in R^L, \theta \in R^{S+1}$ tels que les trois conditions suivantes soient satisfaites,

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & U_{hh}\phi - \widehat{P}\theta = 0 \\ \text{(ii)} & -\widehat{P}'\phi = 0 \\ \text{(iii)} & (\phi', \theta') \neq 0 \end{array}$$

En prémultipliant (ii) par λ_h', et en se servant des conditions de premier ordre, la condition (ii) implique

$$\text{(ii)'} \qquad Du_h'\phi = 0$$

Prémultiplions la première équation par ϕ'. Par (ii), on obtient $\phi' U_{hh}\phi = 0$. Or, par (ii)', ceci contredit l'hypothèse de forte quasi-concavité de la fonction $u_h(.)$ à moins que $\phi = 0$. Mais si $\phi = 0$, la condition (i) se réduit à $-\widehat{P}\theta = 0$. Comme la matrice $\widehat{P}$ est de rang $S+1$, cela implique $\theta = 0$ et la preuve est complétée vue la contradiction avec (iii). Par le théorème des fonctions implicites, on obtient des fonctions une fois continûment dérivables,

$$x_h = x_h(\widehat{p}, R_h)$$
$$\lambda_h = \lambda_h(\widehat{p}, R_h)$$

Posons $\Lambda_h = \begin{pmatrix} \lambda_{h0} I_{L0} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{hs} I_{Ls} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{hS} I_{LS} \end{pmatrix}$. Si on substitue les fonctions ci-dessus dans les conditions de premier ordre, on obtient des identités. Comme la dérivée d'une identité est également une identité, on peut prendre la dérivée totale de ces conditions.

Par le théorème des fonctions implicites, on obtient donc l'équation fondamentale de la demande,

$$\begin{bmatrix} U_{hh} & -\widehat{P} \\ -\widehat{P}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_h}{\partial p'} & \frac{\partial x_h}{\partial R_h'} \\ \frac{\partial \lambda_h}{\partial p'} & \frac{\partial \lambda_h}{\partial R_h'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_h & 0 \\ \widehat{X}_h' & -I_{S+1} \end{bmatrix} = -J_{\widehat{p},R_h}$$

Postmultiplions par l'inverse de $J_{\widehat{p},R_h}$,

$$\begin{bmatrix} U_{hh} & -\widehat{P} \\ -\widehat{P}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_h}{\partial p'} & \frac{\partial x_h}{\partial R_h'} \\ \frac{\partial \lambda_h}{\partial p'} & \frac{\partial \lambda_h}{\partial R_h'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_h^{-1} & 0 \\ \widehat{X}_h'\Lambda_h^{-1} & -I_{S+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L & 0 \\ 0 & I_{S+1} \end{bmatrix}$$

Posons $\widehat{K}_h = \left(\frac{\partial x_h}{\partial p'} + \frac{\partial x_h}{\partial R_h'} X_h'\right)$. En réarrangeant les termes on obtient finalement,

$$\begin{bmatrix} U_{hh} & -\widehat{P} \\ -\widehat{P}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{K}_h\Lambda_h^{-1} & -\frac{\partial x_h}{\partial R_h'} \\ (\frac{\partial \lambda_h}{\partial p'} + \frac{\partial \lambda_h}{\partial R_h'}\widehat{X}_h')\Lambda_h^{-1} & -\frac{\partial \lambda^h}{\partial R_h'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L & 0 \\ 0 & I_{S+1} \end{bmatrix}$$

1.1.1 Propriétés du système de demande

A partir de l'équation ci-dessus, on obtient les prorpiétés suivantes

Propriété 1. Additivité de la matrice de Slutsky $\widehat{P}'\widehat{K}_h = 0$

En effectuant le produit de la deuxième ligne et de la première colonne on a

$$\widehat{P}'\widehat{K}_h\Lambda_h^{-1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{P}'\widehat{K}_h = 0$$

Propriété 2. Additivité de l'effet-revenus $\widehat{P}'\frac{\partial x_h}{\partial R_h'} = I_{S+1}$

On obtient cette propriété en effectuant le produit de la deuxième ligne et de la deuxième colonne.

Propriété 3. Symétrie de la matrice de Slutsky généralisée $\widetilde{K}_h = \widehat{K}_h \Lambda_h^{-1}$

Comme la Jacobienne $J_{x,\lambda}$ est symétrique, la matrice du centre l'est également. Par conséquent, chacun de ses blocs est également symétrique, et il s'en suit que la matrice de Slutsky généralisée est symétrique puisqu'elle est le bloc supérieur gauche. De plus, $\frac{\partial x_h'}{\partial R_h} = -(\frac{\partial \lambda_h}{\partial \hat{p}'} + \frac{\partial \lambda_h}{\partial R_h'} \widehat{X}_h')\Lambda_h^{-1}$.

Propriété 4. La matrice de Slutsky généralisée est de rang $L-(S+1)$

En prémultipliant la dernière équation par l'inverse de la Jacobienne $J_{x,\lambda}$, le rang de la matrice du centre est égal au rang de la matrice $[J_{x,\lambda}]^{-1}$, c'est-à-dire qu'elle est de rang $L+(S+1)$. Considérons la matrice constituée des L premières colonnes de la matrice du centre et nommons-la C1. Cette matrice est de rang maximal, c'est-à-dire de rang L, puisque la matrice du centre est de plein rang. Par la propriété d'additivité p.1), la matrice $\widehat{K}_h$ est au plus de rang $L-(S+1)$. Supposons qu'elle soit de rang inférieur à $L-(S+1)$. Alors il existe au moins $S+2$ combinaisons linéaires entre ses colonnes, et la matrice C1 sera au plus de rang $L-1$, ce qui est en contradiction avec le raisonnement précédent.

Propriété 5. Homogénéité des fonctions de demande $\widehat{K}_h \widehat{P} = 0$

Par les propriétés d'additivité et de symétrie de la matrice de Slutsky généralisée, on peut écrire

$$\widehat{K}_h \Lambda_h^{-1} \widehat{P} = \widehat{K}_h \widehat{P} \overset{\vee}{\lambda}_h = 0 \qquad \text{où } \overset{\vee}{\lambda}_h = \begin{pmatrix} 1/\lambda_{h0} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_{hs} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_{hS} \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de postmultiplier par $\widehat{\lambda}_h$ (l'inverse de $\overset{\vee}{\lambda}_h$) pour obtenir la propriété d'homogénéité $\widehat{K}_h \widehat{P} = 0$.

Remarque 1. *La propriété d'additivité de la matrice de Slutsky vient de la construction même de cette matrice. Si on compense l'individu pour la variation de son pouvoir d'achat dans chaque état du monde, cela revient à dire que l'on considère des variations de consommation telles que* $\widehat{p}_s' dx_{hs} = 0$, *pour tous les états du monde. La propriété d'additivité de l'effet-revenus provient simplement de la contrainte budgétaire. Dans chaque état du monde, la variation de la valeur de la consommation doit être égale à la variation du revenu nominal dans cet état. Ces deux propriétés généralisent en quelque sorte les propriétés usuelles de la théorie néo-classique qui ne considère qu'une seule contrainte budgétaire.*

1.2 Dispositions marginales à payer

Dès lors qu'un consommateur a des préférences définies sur un ensemble $\widetilde{X} \subset R^L_{++}$, qui sont représentables par des fonctions d'utilité une fois continûment dérivables, on peut définir, pour toute allocation $x \in \widetilde{X}$, différents vecteurs de prix individuels à partir du gradient normalisé de la fonction d'utilité. On pourra faire correspondre différents cadres institutionnels à chaque système de prix ainsi défini.

Comme on se place dans un cadre ordinal, la représentation numérique des préférences n'est définie qu'à une transformation monotone près. En définissant des systèmes de prix individuels à partir du gradient normalisé de la fonction d'utilité, on s'assure que ces derniers sont invariants par rapport au choix de la représentation numérique des préférences. Normaliser le gradient de la fonction d'utilité revient à choisir la valeur d'un panier de consommation de référence. En faisant cela, on définit implicitement l'unité de compte du système de prix. Par exemple, lorsque le panier de référence ne comporte qu'un seul bien, la normalisation revient à choisir un numéraire comme unité de compte. Comme il existe plusieurs états du monde, on peut décider de choisir une unité de compte unique ou alors une unité de compte par état du monde. Dans le premier cas, on définit un système de prix Arrow-Debreu (prix contingents), alors que dans le second cas on définit des systèmes de prix conditionnels. Pour alléger la notation, nous omettrons dans ce qui suit les indices h étant entendu que nous développons ici un système individuel de dispositions marginales à payer.

Définition 1. Les prix Arrow-Debreu individuels sont donnés par $p = \frac{Du_x}{Du'_x\omega}m$, où m représente un facteur institutionnel.

En choisissant $\omega' = (\omega'_0, 0, .., 0)$, c'est-à-dire en normalisant le gradient de la fonction d'utilité par rapport aux prix de première période, le facteur institutionnel m apparaît comme le niveau des prix de première période, $p'_0\omega_0 = m_0$[1]. Si on décide de définir une unité de compte dans chaque état du monde, c'est-à-dire d'effectuer $S+1$ normalisations, on est amené à définir un système de prix conditionnels.

Définition 2. Les prix conditionnels individuels sont donnés par $\widehat{p}_s = \frac{Du'_s}{Du'_s\omega_s}m_s$, $\forall s \in S$

Au vue des définitions ci-dessus, on peut relier les prix conditionnels aux prix contingents en définissant des dispositions marginales à payer pour les différentes unités de comptes. On en vient alors à définir les prix de Arrow,

Définition 3. Les prix de Arrow individuels sont donnés par $\mu'_s = \frac{Du'_s\omega_s}{Du'_0\omega_0}\frac{m_0}{m_s}$, $\forall s \in S$.

[1]Dans la "Théorie de la Valeur", Debreu normalise les prix contingents de telle sorte qu'ils somment à un.

Par construction, les prix de Arrow sont homogènes de degré un dans le niveau des prix et dans le revenu de première période, et homogènes de degré moins un dans le niveau des prix et dans les revenus conditionnels[2]. Les prix de Arrow ainsi définis sont fonction des paramètres institutionnels m. En postmultipliant les prix de Arrow par $\frac{\hat{m}}{m_0}$, on obtient les prix de Arrow réels, $\tilde{\mu}' = \frac{Du_x'\Omega}{Du_0'\omega_0}$[3]. En se servant des conditions de premier ordre du problème du consommateur faisant face à $S+1$ contraintes budgétaires, les prix de Arrow peuvent également s'écrire de la manière suivante,

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

Comme les multiplicateurs λ peuvent s'interpréter comme l'utilité marginale des revenus[4], les prix de Arrow apparaissent comme le prix relatif des différents revenus par rapport au revenu de première période. Ils représentent la quantité d'unité de compte de la période zéro que l'individu est prêt à échanger contre une unité de compte supplémentaire dans chaque état s. En combinant la définition des prix conditionnels avec celle des prix de Arrow, on retrouve la définition des prix contingents,

$$p' = \mu' \widehat{P}'$$

On parlera de la décomposition de Arrow pour faire référence à cette équation puisque cette décomposition des prix contingents entre prix conditionnels et prix de Arrow est au coeur du modèle de référence de Arrow. Notons ici qu'a priori il

---

[2]Notons que par construction, $\mu_0 = 1$.

[3]Cette notion de prix de Arrow réel est un peu abusive puisque les prix de Arrow sont des dispositions marginales à payer pour des unités de comptes, qui sont nominales par définition. On remarque bien que ces prix de Arrow 'réels' restent fonctions du choix de normalisation par l'intermédiaire des vecteurs de poids ω_s.

[4]En substituant les fonctions de demande dans la fonction d'utilité, on obtient la fonction d'utilité indirecte, $v(\widehat{p}, R)$. En prenant la dérivée de cette fonction par rapport à R, on obtient $\frac{\partial v(\widehat{p},R)}{\partial R} = \lambda$.

n'est pas impensable de définir d'autres systèmes de prix individuels. Si on décide de définir deux unités de compte par état du monde par exemple, on introduit une décomposition des prix conditionnels, et par là, une autre décomposition des prix contingents. A chacun des systèmes de prix définis ci-dessus, on peut associer un cadre institutionnel différent qui fait référence à l'un des deux modèles fondamentaux d'équilibre général qu'on retrouve dans la littérature: le modèle Arrow-Debreu des marchés contingents, et le modèle des marchés conditionnels de Arrow. Pour une allocation $\overline{x}$ donnée hors de tout contexte institutionnel, l'individu est capable de se construire mentalement un cadre institutionnel à la Arrow-Debreu ou un cadre institutionnel à la Arrow dans lequel l'allocation $\overline{x}$ fait partie de son choix de consommation optimal. On présente en annexe le système de représentation mentale de l'individu.

1.3 Compensation au premier ordre

Dans cette section on introduit le concept de compensation au premier ordre à partir duquel on construit différentes matrices de compensation de l'effet-prix et de compensation de l'effet-revenus qu'on retrouve dans les conditions de premier ordre de l'optimum financier. Sous leur forme canonique, ces matrices de compensation permettent une décomposition de l'effet-prix et une décomposition de l'effet-revenus en un effet de substitution et un effet de richesse qu'on analyse dans la section suivante.

On dira d'une différentielle de consommation qu'elle est compensée au premier ordre dès lors que la variation d'utilité qu'elle engendre, évaluée par la partie linéaire de l'approximation de Taylor, est nulle. Dans un premier temps, on construit différents types de compensation auxquels sont associées différentes possibilités de substitution qui émanent des préférences des consommateurs. Dans un second temps, on tient compte du cadre institutionnel dans lequel évolue le consommateur, et on s'intéresse aux différents instruments qui permettent d'obtenir chacune de ces compensations. Pour simplifier l'écriture, on omet à nouveau l'indice h étant entendu qu'on traite d'un consommateur donné. Prenons la différentielle de la fonction d'utilité indirecte et égalisons-la à zéro. En divisant par λ_0 pour faire apparaître les prix de Arrow, on a

$$\frac{dv}{\lambda_0} = -\mu' X' d\widehat{p} + \mu' dR = 0 \tag{0.1}$$

Considérons maintenant les différentes contraintes budgétaires. En prenant la différentielle de ces contraintes, on peut décomposer la variation du revenu nominal en variation du coût de la vie ($X'd\widehat{p}$) et en variation du pouvoir d'achat ($\widehat{P}'dx(\widehat{p}, R)$),

$$dR = X'd\widehat{p} + \widehat{P}'dx(\widehat{p}, R) \tag{0.2}$$

Pour simplifier l'écriture dans ce qui suit, on notera dx la différentielle des fonctions de demande étant entendu que cette différentielle est induite par des variations de prix ou des variations de revenu. Si on substitue maintenant cette décomposition dans (0.1), on obtient,

$$\frac{dv}{\lambda_0} = \mu' \widehat{P}' dx = 0 \tag{0.3}$$

Dans l'espace des prix et des revenus, l'individu évalue une variation de prix ou une variation de revenu par l'intermédiaire de la variation du pouvoir d'achat contingent qu'elle engendre. On dira d'une différentielle de consommation dx^c qu'elle est compensée au premier ordre dès lors qu'elle satisfait (0.3).

Au vue de l'équation ci-dessus, on peut compenser l'individu de trois manières différentes: soit directement pour sa variation de consommation[5] ($dx^c = 0$), soit pour sa variation de pouvoir d'achat conditionnel ($\widehat{P}'dx^c = 0$), soit enfin pour

[5] Il est entendu ici que la variation de consommation est en fait une différentielle de consommation.

sa variation de pouvoir d'achat contingent ($\mu' \widehat{P}' dx^c = 0$). Intuitivement, on peut associer différentes possibilités de substitution à chaque type de compensation. Dans le premier cas, on ne permet aucun type de substitution, puisqu'on compense directement l'individu en terme de biens de telle sorte que sa consommation reste inchangée. On parlera alors de substitution zéro. Dans le second cas, on permet la substitution à l'intérieur de chaque état du monde puisqu'on compense l'individu pour sa variation de pouvoir d'achat conditionnel. On procède alors à $S+1$ compensations, et on parlera de substitution à la Slutsky (substitution conditionnelle). Dans le dernier cas enfin on ne procède qu'à une compensation en terme de richesse contingente. On permet alors tant la substitution à l'intérieur de chaque état du monde que la substitution entre les états du monde. On parlera dans ce cas de substitution 'contingente'.

Notons que dès lors que l'on substitue la décomposition du revenu dans la différentielle de la fonction d'utilité indirecte, on obtient une expression analogue à celle que l'on aurait obtenu en se plaçant dans l'espace des biens. Si on considère en effet le dx non comme une différentielle mais comme une variation quelconque du panier de consommation, on aurait pu obtenir (0.3) en prenant directement la différentielle première des fonctions d'utilité définies sur les biens. Les différentes possibilités de substitution évoquées ci-dessus reflètent ainsi les possibilités de substitution qui émanent exclusivement des préférences du consommateur, et l'équation (0.3) représente les possibilités de substitution du système mental de l'individu.

Comme les fonctions de demande sont définies sur les prix et les revenus, on peut construire des matrices d'effet-prix compensés au premier ordre ainsi que des matrices d'effet-revenus compensés au premier ordre. Dans chacun des cas, on dispose de trois instruments pour compenser l'individu: soit par la variation des revenus, soit par la variation du prix d'un bien de référence, soit enfin par la variation du niveau des prix. Pour clarifier le langage, on dira qu'on cherche à compenser un individu *pour* un certain effet, et *par* un certain instrument. Si le type de compensation reflète les possibilités de substitution du système mental de l'individu, le type d'instrument est soumis aux possibilités de substitution inhérentes à la structure institutionnelle à partir de laquelle les fonctions de demandes ont été déduites. Les matrices de compensation qu'on va construire tiennent compte des deux systèmes de substitution. Au vue de ce qui précède, on peut envisager six types de compensation différentes. Comme on dispose de trois instruments dans chaque cas, on peut construire à priori dix-huit matrices de compensation. Dans ce qui suit, on se restreint à l'étude des matrices de compensation dont on a besoin pour comprendre le problème de l'optimum financier.

1.3.1 Compensation en terme de consommation $dx^c = 0$

Le traitement de la compensation en terme de consommation est présenté à des fins didactiques puisque les matrices d'effet-prix et d'effet-revenus compensés pour les variations de consommation se construisent de manière évidente. Le modèle dans lequel évolue le consommateur lui permet d'effectuer de la substitution à l'intérieur de chaque état du monde. Toute modification des prix ou des revenus qui affecte les ensembles de budget financièrement accessibles pour le consommateur induisent des réajustements de son panier de consommation optimal. Pour s'assurer que l'individu conserve le même panier optimal, on le compense de telle sorte que son ensemble de choix reste inchangé. De la manière la plus simple, on compensera l'individu en annulant la variation de prix à laquelle il fait face par une variation de prix de signe contraire[6]. On obtient alors

[6]Notons toutefois que dans le cas particuliers où la variation de prix est proportionnelle au vecteur

$$dx^c = (\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} - \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}})d\widehat{p} = 0$$

De manière analogue, on compensera l'individu pour une variation de revenu par une variation de revenu de signe contraire[7],

$$dx^c = (\frac{\partial x}{\partial R'} - \frac{\partial x}{\partial R'})dR = 0$$

La compensation pour la variation de consommation ainsi définie a l'avantage de laisser l'individu sur un niveau d'indifférence inchangé. La compensation au premier ordre se transforme à fortiori en compensation pour la variation d'utilité, c'est-à-dire en compensation à la Hicks.

1.3.2 Compensation à la Slutsky $\widehat{P}'dx^c = 0$

La compensation à la Slutsky permet d'utiliser les possibilités de substitution intra-état qui émanent des préférences du consommateur. Comme le cadre institutionnel dans lequel évolue le consommateur permet lui aussi la substitution intra-état, cette compensation apparaît comme la compensation naturelle pour le 'problème du consommateur' envisagé ici. Considérons la différentielle des contraintes budgétaires (0.2). Par définition, on obtient une compensation à la Slutsky dès lors que la variation des prix et la variation des revenus satisfont

$$dR = X'd\widehat{p} \tag{0.4}$$

On s'intéresse ici à la matrice de compensation de l'effet-prix par une variation du revenu conditionnel puisque c'est cette matrice qui apparaît tant dans les conditions

de prix, $d\widehat{p} = \gamma'\widehat{P}'$, on pourra compenser l'individu pour cette variation de prix par une variation de revenu.

[7]Notons que l'on pourrait également compenser l'individu pour une variation de revenu par une variation du niveau des prix.

de premier ordre du problème du consommateur que dans les conditions de premier ordre de l'optimum du Distributeur. Pour construire cette matrice, on prend la différentielle de la fonction de demande,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} d\widehat{p} + \frac{\partial x}{\partial R'} dR$$

Substituons la décomposition de la variation du revenu (0.2) dans l'équation précédente. En réarrangeant les termes on obtient la différentielle de la consommation compensée à la Slutsky pour une variation de prix

$$dx^c = (I - \frac{\partial x}{\partial R'} \widehat{P}')dx = (\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} + \frac{\partial x}{\partial R'} X')d\widehat{p}$$

On peut définir alors la matrice de compensation de l'effet-prix à la Slutsky par une variation de revenu conditionnel comme suit,

Définition 4. $\widehat{K} = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} |_{X' d\widehat{p} = dR} = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} + \frac{\partial x}{\partial R'} X'$

Par construction, cette matrice satisfait la propriété d'additivité $\widehat{P}'\widehat{K} = 0$. La matrice $\widehat{K}$ n'est autre que la matrice de compensation de Slutsky qui est apparue dans la théorie généralisée du consommateur. Elle possède alors toutes les propriétés développées dans la section consacrée au 'problème du consommateur'.

1.3.3 Compensation contingente $\mu' \widehat{P}' dx^c = 0$

Bien que le cadre institutionnel dans lequel évolue le consommateur ne lui permet pas d'effectuer de la substitution inter-états, il est capable néanmoins de relier mentalement les différentes contraintes budgétaires auxquelles il fait face à l'aide de ses prix de Arrow. On peut construire ainsi des matrices d'effets-prix et des matrices d'effets-revenus compensés pour la variation de pouvoir d'achat contingent.

Par définition, on obtient une compensation pour la variation de pouvoir d'achat contingent, dès lors que la variation des prix et la variation des revenus satisfont,

$$\mu' dR = \mu' X' d\widehat{p} \tag{0.5}$$

Parmi les diverses possibilités de compensation qui émanent de cette condition, on se limite à présenter ici la matrice d'effet-revenus et la matrice d'effet-prix compensés par la variation du revenu de première période. Considérons tout d'abord la matrice de compensation de l'effet-revenus. Prenons la différentielle partielle de la fonction d'utilité indirecte par rapport au revenu[8]. En réarrangeant les termes, on peut exprimer la variation de revenu de première période de la manière suivante,

$$dR_0 = \frac{dv}{\lambda_0} - \mu_1' dR_1$$

Prenons maintenant la différentielle partielle des fonctions de demande par rapport aux différents revenus. En substituant l'expression ci-dessus pour la variation du revenu de première période, on obtient

$$dx = \frac{\partial x}{\partial R_0}\frac{dv}{\lambda_0} - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu_1' dR_1 + \frac{\partial x}{\partial R_1'} dR_1$$

En réarrangeant les termes, et en se servant du fait que $\frac{dv}{\lambda_0} = \mu' \widehat{P}' dx$, on obtient la différentielle partielle des consommations par rapport aux revenus compensée pour la variation de pouvoir d'achat contingent,

$$dx^c = (I - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu' \widehat{P}')dx = (\frac{\partial x}{\partial R'} - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu')dR$$

On peut définir la matrice de compensation de l'effet-revenus par la variation du revenu de première période comme suit,

Définition 5. $C = \frac{\partial x}{\partial R'} |_{dR_0 = -\mu_1' dR_1}^{d\widehat{p}=0} = \frac{\partial x}{\partial R'} - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu'$

[8] Comme on s'intéresse à la compensation d'un effet-revenu par une variation de revenu, on ne modifie pas les prix, et l'on a dès lors $d\widehat{p} = 0$.

Par construction, la matrice C satisfait la propriété d'additivité $\mu'\widehat{P}'C = 0$. De plus, sa première colonne est nulle. Passons maintenant à la matrice de compensation de l'effet-prix. Si on décide de compenser l'individu par la variation de son revenu de première période uniquement, on pourra poser $dR_1 = 0$. En prenant la différentielle de la fonction d'utilité indirecte on peut exprimer la variation du revenu de la première période comme suit,

$$dR_0 = \frac{dv_0}{\lambda_0} + \mu' X' d\widehat{p}$$

En substituant cette expression dans la différentielle des fonctions de demande, on obtient la différentielle partielle des consommations par rapport aux prix, compensée pour la variation de richesse contingente,

$$dx^c = (I - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu'\widehat{P}')dx = (\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} + \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu' X')d\widehat{p}$$

On peut définir la matrice de compensation de l'effet-prix pour la variation de pouvoir d'achat contingent comme suit,

Définition 6. $\overline{K} = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} |_{dR_0=\mu_1' X_1' d\widehat{p}_1}^{dR_1=0} = (\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} + \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu' X')$

Par construction, $\overline{K}$ satisfait la propriété d'additivité $\mu'\widehat{P}'\overline{K} = 0$. De plus, sa première colonne est nulle. On dérivera certaines propriétés de la matrice $\overline{K}$ à la fin de ce chapitre.

Remarque 2. *Par la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, on a* $\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'}\widehat{P}\ \overset{\vee}{R} = -\frac{\partial x}{\partial R'}$. *Toute compensation par une variation de revenu peut également se faire soit par une variation du niveau des prix soit par la variation du prix d'un* *bien de référence. En particuliers, la compensation à la Slutsky par une variation de revenu est équivalente à la compensation par une variation du niveau des prix par* $\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'}(I_L - \widehat{P}\,\overset{\vee}{R}\,X') = \widehat{K}$.

1.3.4 Interprétation géométrique

Pour comprendre les différences conceptuelles qui existent entre ces diverses matrices de compensation (substitution), on peut tenter de se les représenter géométriquement. Il faut alors rester prudent car la représentation graphique déborde le cadre différentiel dans lequel ces matrices ont été construites. On ne considère plus des approximations au premier ordre, mais bien des variations finies de consommation, et par là, d'utilité. Si les trois matrices permettent de compenser le consommateur au premier ordre, elles divergent dans leurs effets du second ordre et d'ordre supérieur.

Commençons par la compensation de l'effet-prix à la Slutsky. Cette compensation est basée sur le système de prix institutionnel. Elle permet au consommateur de racheter son panier initial, ce qui lui assure d'être sur un niveau d'indifférence au moins aussi bon qu'à l'origine. En effet, lorsque les préférences du consommateur sont (strictement) convexes, il peut atteindre un niveau d'utilité (strictement) supérieur à son niveau d'utilité d'origine en utilisant les possibilités de substitution à l'intérieur de chaque état du monde. Comme la compensation à la Slutsky n'utilise pas toutes les possibilités de substitution du système mental du consommateur, elle offre en quelque sorte une sur-compensation à l'individu pour qu'il se sente indifférent au premier ordre, par rapport à une compensation à la Hicks dans laquelle la variation finie de l'utilité de l'individu est nulle[9].

[9] Dans le cas de la compensation pour la variation de consommation, $dx^c = 0$, la surcompensation implicite en terme de revenu est annulée par le fait qu'on n'authorise aucune possibilité de substitution.

Pour se représenter mentalement l'effet de la compensation engendrée par la matrice C, on peut se ramener au cas particulier où il n'existe qu'un bien dans chaque état du monde. Dans ce cas, seules les possibilités de substitution entre les différents états du monde existent. La compensation par la variation du revenu de première période ne permet pas au consommateur de racheter son panier initial lorsque les contraintes budgétaires sont séparées, puisqu'elle le force à utiliser sa 'compensation' dans l'état zéro uniquement. La matrice C offre une compensation basée sur le système de prix mental de l'individu qui n'a pas de contrepartie dans le système institutionnel. Par un raisonnement analogue à la compensation à la Slutsky, mais inverse cette fois-ci, lorsque les courbes d'indifférences sont (strictement) convexes, les effets de second ordre sont négatifs, et un déplacement fini le long de la contrainte budgétaire mentale de l'individu implique un niveau d'utilité (strictement) inférieur.

La représentation de la compensation engendrée par la matrice $\overline{K}$ suit le même raisonnement que celui de la matrice C, et les effets de second ordre sont négatifs. Pour bien saisir la différence entre les deux matrices d'effet-prix compensé $\widehat{K}$ et $\overline{K}$, on peut considérer le cas particuliers où il n'existe que trois états du monde, et un bien dans chaque état. Dans ce cas, les deux matrices s'écrivent comme suit,

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \overline{K} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial x_0}{\partial R_0} x_1 & \frac{\partial x_0}{\partial R_0} x_2 \\ 0 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \end{pmatrix}$$

Lorsqu'il n'existe qu'un bien par état du monde, il n'y a aucune possibilité de substitution à l'intérieur de chaque état du monde. La matrice de substitution $\widehat{K}$ est nulle, et la compensation à la Slutsky revient à compenser l'individu pour sa variation de consommation, $dx^c = 0$. Bien que la compensation pour la variation de pouvoir d'achat contingent tienne compte de la substitution mentale de l'individu, le cadre institutionnel force ce dernier à dépenser sa compensation de revenu sur le bien zéro uniquement. La compensation pour une variation de prix s'effectue alors le long de la tangente aux courbes d'indifférence, et les effets de second ordre sont négatifs.

Remarque 3. *Il n'y a rien de choquant dans le fait que les effets de second ordre associés à la compensation de la matrice* $\overline{K}$ *soient négatifs. En utilisant toutes les possibilités de substitution au premier ordre, la compensation requise par la matrice* $\overline{K}$ *est moindre que celle requise par la matrice* $\widehat{K}$. *Lorsqu'on réalise effectivement la compensation, la structure institutionnelle ne permettant pas la substitution inter-états, on se retrouve avec une compensation insuffisante pour maintenir le consommateur sur un niveau d'indifférence inchangé.*

1.3.5 Décomposition de l'effet prix et de l'effet revenus

En exprimant les matrices de compensation sous leur forme canonique, ces dernières apparaîssent de manière évidente comme des matrices de substitution. On peut décomposer les différents effets-prix ainsi que l'effet-revenus en un effet de substitution et un effet de richesse. Exprimée sous sa forme canonique, la matrice de Slutsky $\widehat{K}$ permet de décomposer l'effet-prix en un effet de substitution conditionnelle (substitution intra-état) et un effet de richesse conditionnelle,

$$\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} = \widehat{K} - \frac{\partial x}{\partial R'} X'$$

La matrice de compensation C quant à elle permet de décomposer l'effet-revenus en un effet de substitution inter-états et un effet de richesse contingente,

$$\frac{\partial x}{\partial R'} = C + \frac{\partial x}{\partial R_0} \mu'$$

La matrice C apparaît comme la matrice de substitution inter-états du système mental de l'individu. Enfin, la matrice de compensation de l'effet-prix $\overline{K}$ permet de décomposer l'effet-prix en un effet de substitution 'contingente' et un effet de richesse contingente,

$$\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} = \overline{K} - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu' X'$$

On pourra parler alors indifféremment de matrices de compensation ou de matrice de substitution. Intuitivement, si la matrice $\widehat{K}$ permet la substitution intra-état, alors que la matrice C permet la substitution inter-états, la matrice de substitution $\overline{K}$ devrait apparaître comme une combinaison de ces deux dernières. Au regard de ce qui précède, on peut effectivement décomposer $\overline{K}$ en deux éléments,

$$\overline{K} = \widehat{K} - CX' \tag{0.6}$$

Cette décomposition est tout à fait naturelle. Tout se passe comme si on compensait l'individu dans un premier temps en se servant uniquement de ses possibilités de substitution intra-état. Dans un second temps, on évalue les différentes compensations conditionnelles en se servant de ses possibilités de substitutions inter-états. On obtient par là une compensation qui tient compte tant des possibilités de substitution à l'intérieur de chaque état du monde que des possibilités de substitution entre les états du monde. L'effet-prix peut se décomposer en trois éléments distincts; un effet de substitution conditionnelle (intra-état), un effet de substitution inter-états, et un effet de richesse contingente,

$$\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'} = \widehat{K} - CX' - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu' X'$$

A partir de la décomposition (0.6), on peut déduire les propriétés suivantes de la matrice $\overline{K}$,

Lemme 0. La matrice $\overline{K}$ est de rang $L-1$. Son noyau gauche est donné par les prix Arrow-Debreu, alors que son noyau droit est donné par le vecteur $\begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour la démonstration de la première partie de ce lemme, on commence par écrire $\overline{K}$ sous forme d'un système d'équations,

$$\left(\widehat{K}, C\right)\begin{pmatrix} I_L \\ -X' \end{pmatrix} = \overline{K}$$

Par construction, les prix Arrow-Debreu appartiennent au noyau gauche de $\overline{K}$, et cette matrice est au plus de rang $L-1$. Pour montrer qu'elle est au moins de rang $L-1$, on suppose qu'il existe un vecteur non nul $\vartheta' \in \Re^L$ différent des prix Arrow-Debreu ($\vartheta' \neq \alpha p'$) qui satisfait le système d'équations suivant,

$$\begin{aligned} &\vartheta'\widehat{K} = 0 \\ &\vartheta' C X' = 0 \end{aligned}$$

Par la propriété d'additivité de $\widehat{K}$, la première condition implique $\vartheta' = \gamma'\widehat{P}'$, pour un $\gamma \in \Re^{S+1}$ quelconque. En substituant ceci dans la seconde condition, on a

$$\gamma'\begin{pmatrix} 0 & -\mu_1' \\ 0 & I \end{pmatrix} X' = 0$$

Comme X' est de rang $S+1$, on doit avoir $\gamma_0\mu_1' = \gamma_1'$, et par là $\gamma = \mu$. En substituant ceci dans l'expression de ϑ', on a $\vartheta' = \mu'\widehat{P}'$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Le vecteur des prix Arrow-Debreu est l'unique vecteur non nul à une constante près qui annule la matrice $\overline{K}$, et cette matrice est alors de rang $L-1$. Pour la dernière propriété, il suffit de remarquer que les L_0 premières colonnes des matrices $\widehat{K}$ et $\overline{K}$ sont identiques. Comme le vecteur des prix de première période $\begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au noyau droit de $\widehat{K}$, il appartient également au noyau droit de $\overline{K}$. Par le rang de $\overline{K}$, c'est l'unique vecteur non nul à une constante près qui annule cette matrice, et la preuve du lemme est complétée.

Remarque 4. *Lorsqu'il n'y a qu'un seul état du monde, il ne peut y avoir de substitution inter-état, et les matrices* $\widehat{K}$ *et* $\overline{K}$ *se confondent. C'est le cas notamment dans la théorie néo-classique du consommateur à une contrainte budgétaire.*

Remarque 5. *Les propriétés d'additivité qui sont associées aux différentes matrices de compensation permettent une interprétation de la compensation pour la différentielle d'utilité en terme de variation de dépense. Toute compensation au premier ordre pour la variation d'utilité se confond avec une compensation pour la variation de dépense réelle.*

Remarque 6. *On aimerait bien pouvoir interpréter la matrice* $\overline{K}$ *comme la matrice de substitution des prix du système mental à contrainte budgétaire unique du consommateur. Or s'il est vrai que cette matrice permet d'utiliser les possibilités de substitution contingentes du système mental de l'individu, le type de compensation qu'elle offre reste soumis à la structure institutionnelle à contraintes budgétaires séparées dans laquelle le consommateur évolue réellement.*

CHAPITRE 2

Optimum financier de premier rang

Introduction

Dans ce chapitre, on introduit le problème de l'optimum financier pour une économie de distribution dans laquelle les préférences des individus sont non séparables. Comme l'espace des quantités est difféomorphe à l'espace des prix individualisés (normalisés) et des revenus, on peut choisir de travailler indépendamment dans l'un ou l'autre de ces deux espaces. Si on s'intéresse aux conséquences d'un système d'actifs financiers incomplet, il est naturel de se placer dans l'espace des prix et des revenus puisqu'un actif financier peut se voir comme une contrainte sur l'allocation des revenus. La théorie de l'optimum dans l'espace dual n'est cependant pas usuelle. Balasko (1979) a présenté tout de même une théorie duale de l'optimalité dans le cadre d'une contrainte budgétaire unique. Il a montré l'équivalence entre les allocations efficaces au sens de Pareto et les allocations contraintes par des ensembles de budgets à prix et à revenus donnés. Luenberger (1994) a étendu l'analyse de Balasko au cas non différentiable, et il a proposé deux théorèmes dans l'espace dual qui sont la contrepartie aux deux théorèmes du bien-être de l'espace primal des quantités.

Comme on s'intéresse au problème de l'optimum, il n'y a pas de raison à priori pour imposer un système de prix unique. On se place donc dans l'espace des *prix* *individuels* et des revenus. Tout comme la théorie généralisée du consommateur est plus riche que la théorie néo classique, la théorie de l'optimum avec des prix individuels est également plus riche que celle avec un système de prix unique. On comprend mieux par exemple les possibilités de décentralisation liées à un système de prix et de revenus. Dans une économie à H individus et L biens, une allocation dans l'espace des quantités est un vecteur de consommation x de dimension HL. Dans l'espace dual des prix individuels et des revenus, une allocation est un vecteur de prix individualisés normalisés et de revenus (p, y) de dimension HL également. Dans les cas favorables où le système de prix est unique, une allocation dans l'espace dual peut se ramener à un vecteur (p, y) de dimension $H + L$. Dans les cas où il y a au moins deux individus et deux biens, $H + L < HL$, et la dimension d'une allocation dans l'espace des prix et des revenus est strictement inférieure à la dimension d'une allocation dans l'espace des quantités. En d'autres termes, dans ces cas favorables, le Distributeur n'a qu'à prendre $H + L$ décisions dans l'espace dual par rapport à HL décisions dans l'espace primal.

L'interprétation des conditions de premier ordre dans l'espace des prix et des revenus n'est pas usuelle, et on doit se familiariser avec une nouvelle terminologie. Dans l'espace des quantités, les conditions d'optimalité s'interprètent en terme de prix, c'est-à-dire en terme d'unicité des dispositions marginales à payer. Dans l'espace des prix et des revenus, on s'attend à ce qu'elles s'interprètent en terme de variation de quantité, c'est-à-dire en terme de variation de coût à un scalaire près. Dans la première section, on présente le modèle non contraint dans lequel le Distributeur est libre d'allouer des prix individuels et des revenus. On donne une interprétation originale des conditions de premier ordre à l'aide des matrices de compensation développées dans le premier chapitre. Dans la seconde section, on introduit une contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus. Le Distributeur doit allouer les revenus par l'intermédiaire d'un système d'actifs financiers potentiellement incomplet. On en profite pour souligner le problème de cohérence entre la nature des actifs et le choix de l'unité de compte du système qui est à la base des problèmes d'indétermination réelle de l'équilibre lorsque les actifs sont des actifs financiers. Dans la dernière section on présente notre premier résultat: lorsque le système d'actifs est incomplet, le Distributeur peut implanter une allocation de premier rang par un système de taxes individuelles proportionnelles aux prix à la consommation dans chaque état du monde. Les dispositions marginales à payer pour les actifs restent cependant individualisées.

2.1 Le modèle non contraint

2.1.1 Le problème du Distributeur

Considérons le problème général d'un Distributeur qui cherche à allouer des ressources de manière efficace entre différents individus. L'économie s'étend sur deux périodes. La seconde période est composée de S états du monde mutuellement exclusifs. Il y a L_s biens dans chaque état du monde avec $\sum_{s=0}^{S} L_s = L$. Le vecteur de ressources $\overline{\omega}$ est donné et provient d'un ensemble $\widetilde{\Omega} \subseteq R^L_{++}$. On suppose que le Distributeur peut choisir des systèmes de prix conditionnels individuels et allouer des revenus à chaque individu. En d'autres termes, il alloue des ensembles de budget à chaque individu[1], c'est-à-dire des environnements institutionnels individuels. Le problème du Distributeur consiste alors à allouer une structure institutionnelle à chaque individu, de telle sorte que l'allocation des biens qui en résulte soit efficace au sens de Pareto. Pour ce faire, il maximise l'utilité d'un individu de référence sous les contraintes que les niveaux d'utilité des autres individus sont donnés, et sous les contraintes de réalisabilité. On peut poser ce problème de manière différente

[1]Un ensemble de budget est un ensemble dans l'espace des quantités paramètrisé par un système de prix et de revenus. Pour un vecteur de prix et de revenus donnés $(\widehat{p}_{hs}, R_{hs})$, l'ensemble de budget de l'individu h dans l'état s est défini comme suit:

$B(\widehat{p}_{hs}, R_{hs}) = \left\{x \in \widetilde{X} \mid \widehat{p}'_{hs}x \leq R_{hs}\right\}$

en laissant le Distributeur maximiser une somme pondérée des utilités des différents individus sous les contraintes de réalisabilité puisque les conditions de premier ordre associées à ces deux problèmes sont les mêmes. Il s'agit juste d'être prudent dans l'interprétation des poids α_h qui ne font pas référence à une fonction d'utilité sociale, mais bien à des critères d'efficacité.

Lorsqu'on se place dans l'espace dual des prix et des revenus, on dispose de deux instruments qui ont la même incidence sur les ensembles de budget. On dispose en quelque sorte d'un instrument de plus que dans l'espace des quantités. Pour que la solution soit déterminée dans l'espace dual, il faut imposer une contrainte de normalisation des prix. Pour le problème non contraint, ceci alourdit inutilement l'exposé puisque la contrainte de normalisation n'est pas effective. Dans ce qui suit, on préférera présenter l'optimum de premier rang dans l'espace des prix individuels non normalisés et des revenus étant entendu que le modèle conserve une indétermination dans le niveau des prix mais que cette indétermination est purement nominale. Formellement, le problème du Distributeur peut s'écrire comme suit[2],

$$\begin{aligned} Max\ L\ (\widehat{p}_h, R_h) = \quad & \sum_{h\in H} \alpha_h u_h(x_h(\widehat{p}_h, R_h)) \\ & -\sigma'(\sum_{h\in H} x_h(\widehat{p}_h, R_h) - \overline{\omega}) \end{aligned}$$

avec les conditions de premier ordre,

$$\begin{aligned} (\alpha_h D u_h' - \sigma')\tfrac{\partial x_h}{\partial p_h'} = 0 \\ (\alpha_h D u_h' - \sigma')\tfrac{\partial x_h}{\partial R_h'} = 0 \end{aligned}$$

A l'optimum, le bénéfice marginal individuel engendré par la dernière unité de

[2]Nous utilisons ici le terme de maximisation étant entendu qu'il s'agit en fait d'un problème de maxi min.

prix est égal au coût marginal social. Il en va de même pour la dernière unité de revenu. On dira alors que l'allocation des prix et l'allocation des revenus satisfont le principe de tarification au coût marginal physique[3]. Afin de rendre le coût marginal social indépendant d'une transformation monotone des fonctions d'utilité, on peut définir des prix sociaux à partir des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de réalisabilité physique. De manière analogue à la définition des prix individuels, on obtient en normalisant ces multiplicateurs, des prix indépendants d'une transformation monotone des fonctions d'utilité,

$$\pi' = (\sigma'/\sigma'_0\omega_0)m_0 = \sigma'/\lambda_0 \qquad (disons)$$

où m_0 représente un paramètre institutionnel à la discrétion du Distributeur. On peut transformer les conditions de premier ordre pour y faire apparaître les matrices de compensation de l'effet-prix et de compensation de l'effet-revenus présentées dans la première partie. On pourra ainsi utiliser les propriétés de ces matrices pour retrouver les interprétations usuelles de l'optimum qu'on obtient dans l'espace des biens. Décomposons l'effet-prix en un effet de substitution conditionnelle et un effet de richesse conditionnelle, et l'effet-revenus en un effet de substitution inter-états et un effet de richesse contingente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}'_h} &= \widehat{K}_h - \frac{\partial x}{\partial R'_h} X'_h \\ \frac{\partial x}{\partial R'_h} &= C_h - \frac{\partial x}{\partial R_{h0}} \mu'_h \end{aligned}$$

En substituant ces décompositions dans les conditions de premier ordre,

$$\begin{aligned} (\alpha_h D u'_h - \sigma')\widehat{K}_h &= 0 \\ (\alpha_h D u'_h - \sigma')C_h &= 0 \end{aligned}$$

[3]On parle ici de coût marginal physique puisque la seule contrainte existante est la contrainte de réalisabilité physique.

Par la théorie généralisée du consommateur, on a $Du'_h = \lambda_{h0}\mu'_h\widehat{P}'$. Substituons cette relation dans les conditions précédentes. Par les propriétés d'additivité des matrices de substitution $\widehat{K}$ et C, et en faisant apparaître les prix sociaux π, les conditions de premier ordre deviennent,

$$\pi'\widehat{K}_h = 0 \tag{0.1}$$

$$\pi' C_h = 0 \tag{0.2}$$

2.1.2 Interprétation des CPO dans l'espace dual

L'optimalité intra-état (0.1) se traduit par le fait que le coût social de la compensation de l'effet-prix à la Slutsky est nul. Pour une certaine répartition du 'bien-être', il n'est plus possible de réduire le coût social des allocations individuelles par une variation des prix conditionnels. On dira alors que l'allocation des prix minimise le coût social du panier de consommation qui permet à chaque individu d'atteindre un niveau d'utilité donné[4]. De manière analogue, l'optimalité inter-états (0.2) se traduit par le fait que le coût social de la compensation de l'effet-revenus est nul. L'allocation des revenus satisfait elle aussi le principe de minimisation de la dépense individuelle pour une certaine répartition du bien-être. Pour alléger l'exposé, lorsqu'on parlera de minimisation du coût social sans autre mention, il s'agira toujours de minimisation du coût social pour une certaine répartition des niveaux d'utilité.

Dans la structure institutionnelle qu'on considère, le Distributeur ne peut pas organiser des marchés contingents. En d'autres termes, il ne peut pas allouer

[4]En effet, les CPO (2.1) et (2.2) sont également celles du problème de minimisation de $\sigma' x$ sous réserve que $u(.) = \overline{u}(.)$.

directement les prix Arrow-Debreu individuels, mais il doit le faire par l'intermédiaire de la décomposition entre prix conditionnels et revenus. Par construction, l'allocation des prix conditionnels et l'allocation des revenus induisent une allocation implicite de prix Arrow-Debreu. En combinant les conditions d'optimalité intra-état et inter-états, on obtient la condition d'optimalité sur les prix Arrow-Debreu implicites. Postmultiplions (0.2) par X_h' et faisons la somme avec (0.1). La condition d'optimalité sur les prix Arrow-Debreu implicites est donnée par,

$$\pi'\overline{K}_h = 0 \tag{0.3}$$

Le coût social de la compensation contingente de l'effet prix est nul. A l'optimum, l'allocation implicite des prix Arrow-Debreu individuels minimise le coût social de chaque panier de consommation. Cette interprétation des conditions de premier ordre nous ramène à une interprétation en terme du problème dual de minimisation de la dépense pour un certain niveau d'utilité. Or le problème qu'on considère est de nature 'primal' puisqu'on cherche à maximiser l'utilité sous une contrainte de réalisabilité. On peut retrouver l'interprétation usuelle des conditions d'optimalité du problème primal en se ramenant dans l'espace des quantités.

2.1.3 Interprétation des CPO dans l'espace primal

On peut se ramener dans l'espace primal à partir des propriétés des diverses matrices de substitution qu'on a développées précédemment. On retrouve ainsi l'interprétation usuelle des conditions d'optimalité en terme en terme d'unicité des dispositions marginales à payer. L'allocation optimale des biens est telle que les systèmes de prix individuels sont proportionnels entre tous les individus. Commençons par la condition d'optimalité intra-état. Comme le système de prix conditionnels appartient au noyau de $\widehat{K}$, on obtient directement

$$\sigma' = \gamma_h' \widehat{P}_h' \tag{0.4}$$

Les prix conditionnels sont proportionnels entre tous les individus. En substituant cette relation dans la condition d'optimalité des revenus, on obtient que les prix de Arrow sont proportionnels aux multiplicateurs gamma, $\gamma_h' = \gamma_{h0}\mu_h'$. Il suffit alors de substituer ceci dans la condition ci-dessus pour obtenir la proportionnalité des prix Arrow-Debreu,

$$\sigma' = \gamma_{h0}\mu_h' \widehat{P}_h' = \gamma_{h0} p_h' \tag{0.5}$$

Les taux marginaux de substitution sont uniques, et on obtient une allocation (intérieure) de premier rang. Remarquons qu'on aurait pu obtenir la condition sur les prix contingents implicites directement à partir (0.3). En effet, comme p_h appartient au noyau de $\overline{K}_h$, on obtient directement que les prix Arrow-Debreu individuels sont proportionnels entre tous les individus.

La structure institutionnelle du modèle non contraint ne permet pas d'obtenir directement l'unicité des prix comme condition d'optimalité car elle possède trop de degrés de liberté $(S+1)$. En revanche, on peut imposer cette unicité sans modifier le panier de consommation optimal de chaque individu. En effet, comme les fonctions de demande sont homogènes de degré zéro dans le niveau des prix et dans les revenus, et vu que ces deux variables sont à la discrétion du Distributeur, ce dernier peut imposer un niveau de prix conditionnels unique, sans pour autant affecter l'allocation d'équilibre. Vu que les prix Arrow-Debreu individuels sont proportionnels entre tous les individus, dès lors que le niveau des prix de la première période est unique, on obtient l'unicité des prix Arrow-Debreu. Postmultiplions (0.5) par le vecteur $\omega_{0-}' = (\omega_0', 0, ...0)$. En posant $\omega_0' \widehat{p}_{h0} = \omega_0' \pi_0$, on obtient $\lambda_0 = \gamma_{h0}$. En divisant les deux cotés de (0.5) par γ_{h0} on obtient,

$$p_h = \pi \qquad \forall h \in H$$

Cette relation confirme que les prix sociaux ont été bien définis et que notre notation est cohérente. Pour simplifier l'exposé dans ce qui suit, on commettra souvent un abus de langage en parlant des prix sociaux pour faire référence aux multiplicateurs σ étant entendu que ces derniers sont proportionnels aux prix sociaux π. Comme les prix conditionnels sont également proportionnels entre tous les individus, en normalisant ces prix de manière unique on obtient l'unicité du système de prix conditionnels. En posant $\omega_s'\widehat{p}_{hs} = \omega_s'\widehat{\pi}_s$ pour tout s appartenant à S, on a

$$\widehat{p}_h = \widehat{\pi} \qquad \forall h \in H$$

Par construction enfin, en combinant les deux conditions précédentes, on obtient l'unicité des prix de Arrow,

$$\mu_h = \mu \qquad \forall h \in H$$

L'allocation de premier rang peut alors être implantée par un système de marchés concurrentiels à prix unique. Voilà qui termine la présentation du modèle non contraint. On est prêt maintenant à imposer des contraintes institutionnelles qui limitent les instruments à la disposition du Distributeur.

2.2 Contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus

Introduisons maintenant une contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus de seconde période. Cette contrainte s'exprime par le fait que le Distributeur ne peut plus allouer directement les revenus conditionnels aux individus, mais qu'il doit le faire par l'intermédiaire d'un ensemble $J \leq S$ actifs.

2.2.1 L'introduction des actifs

Un actif a_j est caractérisé par un vecteur de rendements $z_j \in \Re^S$ qui indique le rendement auquel cet actif donne droit dans chaque état du monde. On suppose ici que le rendement des actifs est donné de manière exogène, et qu'il est exprimé en unité de compte. Cette hypothèse a une grande importance, et nous y revenons plus loin. Soit Z_1 la matrice des rendements des actifs. Pour éviter la redondance, on suppose que la matrice Z_1 est de rang J. On dira que le système d'actifs est complet lorsque $J = S$, et qu'il est incomplet lorsque $J < S$. Formellement, la contrainte sur l'allocation des revenus conditionnels prend la forme suivante,

$$R_1 = Z_1 a_1$$

Comme la première période n'a pas d'incertitude, on considère le cas où l'allocation du revenu de première période n'est pas contrainte. On se donne ainsi la richesse des individus comme variable non contrainte, mais non sa décomposition entre les différents états du monde, comme l'a fait Arrow (1953). Pour illustrer ceci, on introduit un actif zéro qui offre des rendements uniquement dans la première période. La matrice des rendements inter-temporels Z prend la forme suivante,

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}, \text{ avec rang de } Z_1 = J,$$

Le problème du Distributeur consiste maintenant à allouer des systèmes de prix individuels ainsi que des portefeuilles d'actifs afin d'obtenir une allocation efficace. Ce problème est de nature hybride puisque d'un coté le Distributeur alloue des quantités d'actifs alors que de l'autre il alloue des systèmes de prix. On adopte cette structure cependant puisqu'elle permet d'obtenir comme cas particulier l'optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis. Remarquons d'ailleurs que pour toute allocation de biens, on peut toujours définir la disposition marginale individuelle à payer pour les actifs par l'intermédiaire des prix de Arrow, de sorte que la nature hybride du problème n'est pas trop gênante.

Définition 1. *La disposition marginale à payer pour les actifs est donnée par* $q'_h = \mu'_h Z$. *Si* $\mu_h = \mu$, *alors* $q_h = q$.

La disposition marginale à payer pour les actif j indique la quantité d'unités de compte de l'état 0 que l'individu est prêt à sacrifier pour recevoir les rendements de seconde période liés à une unité supplémentaire d'actif j [5].

2.2.2 Le choix de l'unité de compte

On a fait l'hypothèse que les rendements des actifs sont donnés et qu'ils sont exprimés en unité de compte. Le Distributeur est libre cependant de choisir l'unité de compte en vigueur dans son économie ainsi que la quantité totale d'actifs qu'il va allouer aux individus. En supposant que les rendements sont donnés, on fait bien sûr abstraction du problème fondamental de l'origine des actifs. On préfère néanmoins se pencher ici sur d'autres problèmes, et on considérera la structure des rendements comme une donnée exogène. Dans le dernier chapitre, on analyse tout de même la question de l'optimalité des rendements des actifs existants.

Supposer que les rendements des actifs sont exprimés en unité de compte est une hypothèse naturelle si on se rappelle que la fonction première d'un système d'actifs dans le modèle de référence de Arrow est de permettre aux consommateurs de réallouer leurs revenus *exprimés en unité de compte* entre les différents états du monde. Ainsi, si le bien un est choisi comme numéraire dans tous les états du monde,

[5] Si on désire introduire des marchés pour implanter l'allocation des actifs de manière décentralisée, le revenu de première période doit être alloué entre les dépenses de consommation présente, et l'épargne. Dans ce cas, la matrice des rendements prendra la forme, $Z = \begin{pmatrix} (z_0 - q_0) & -q'_1 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}$.

les rendements des actifs doivent également être exprimés en terme du bien un. Lorsque les rendements des actifs sont exprimés dans une unité de compte différente de celle des prix des biens, on peut faire face à un phénomène d'indétermination réelle de l'équilibre lorsque les marchés sont incomplets. Ce sera le cas notamment pour une économie d'échange avec marchés incomplets dans laquelle les rendements des actifs sont exprimés en monnaie alors que l'unité de compte du système est un numéraire. De manière générale, les problèmes d'indétermination de l'équilibre apparaissent lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites: d'une part le niveau des prix n'est pas déterminé par le système, et d'autre part, le système institutionnel ne permet pas de 'réaliser' l'homogénéité des fonctions de demande dans le niveau des prix et dans les revenus.

Pour illustrer ceci on considère deux cas, celui d'une économie d'échange et celui d'une économie de Distribution. Dans chacun des cas, on considère deux types d'unités de compte, un numéraire et une unité de compte abstraite, la monnaie. Considérons une économie d'échange, et analysons les contraintes budgétaires individuelles dans les deux cas suivants: lorsque les rendements des actifs sont exprimés en terme d'un numéraire $(r.n)$, le bien 1 par exemple, et lorsque les rendements des actifs sont exprimés en monnaie $(r.f)$,

$$\begin{array}{ll} (r.n) & x_h'\widehat{P} = \overline{\omega}_h'\widehat{P} + \widehat{p}_{1.}Za_h = R_h \\ (r.f) & x_h'\widehat{P} = \overline{\omega}_h'\widehat{P} + Za_h = R_h \end{array}$$

où $\widehat{p}_{1.}$ représente la matrice diagonale des prix du bien 1 dans tous les états du monde. En faisant la somme sur les individus, et en se servant de la contrainte de réalisabilité physique, on obtient dans les deux cas $S+1$ lois de Walras et une condition sur la somme des actifs,

$$\sum_{h \in H} (x'_h - \overline{\omega}'_h)\widehat{P} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{h \in H} a_h = 0$$

La somme des actifs est nulle, et la quantité totale d'actifs n'intervient pas dans la condition de réalisabilité agrégée en valeur. La condition sur la somme des actifs provient du fait que dans une économie d'échange, les actifs servent à RÉ-allouer le revenu entre les différents états du monde. Pour satisfaire la contrainte de réalisabilité physique, la somme des réallocations doit être nulle. De part les $S+1$ lois de Walras, le système possède $S+1$ degrés de liberté. On peut interpréter ceci en disant que le système ne permet pas de déterminer de manière univoque le niveau des prix conditionnels. Par la théorie généralisée du consommateur, on sait que les fonctions de demande sont homogènes de degré zéro dans le niveau des prix et dans les revenus. Pour que l'indétermination du niveau des prix conditionnels n'ait pas d'effets réels, il faut que le système institutionnel permette de rendre les fonctions de demande homogènes de degré zéro dans le niveau des prix.

Considérons d'abord le cas des actifs numéraires. Par construction, les revenus sont homogènes de degré un dans le niveau des prix. Il s'en suit que les fonctions de demande sont homogènes de degré zéro dans le niveau des prix, et l'indétermination du niveau des prix conditionnels n'a que des effets nominaux. Dans le cas des actifs financiers, le lien entre le niveau des prix et les revenus est moins direct puisqu'il se fait par l'intermédiaire du portefeuille d'actifs. Il faut alors distinguer le cas des marchés complets du cas des marchés incomplets. Lorsque les marchés sont complets, il existe toujours une réallocation d'actifs qui permet de rendre les revenus homogènes de degré un par rapport au niveau des prix. L'indétermination du niveau des prix conditionnels n'a alors que des effets nominaux. Lorsque les marchés sont incomplets en revanche, il n'existe pas toujours de réallocation du portefeuille pour faire face à une variation du niveau des prix conditionnels. Les revenus ne peuvent plus varier de manière proportionnelle aux prix, et le niveau des prix conditionnels peut avoir des effets réels sur l'allocation d'équilibre. Comme le système au niveau agrégé ne dit rien sur le niveau des prix, on parle dans ce cas d'indétermination réelle de l'équilibre puisque d'une part, n'importe quel niveau des prix est acceptable, et que d'autre part, à différents niveaux de prix peuvent correspondre différents équilibres.

Rappelons que lorsqu'on détermine l'unité de compte du système, cela revient en quelque sorte à normaliser le niveau des prix. Si maintenant on avait commencé par déterminer l'unité de compte du système avant d'introduire les actifs, on aurait éviter le problème de l'indétermination de l'équilibre. En définissant clairement l'unité de compte du système, il faut rajouter $S+1$ contraintes de normalisation. Le niveau des prix n'est plus indéterminé mais il se confond avec le choix de l'unité de compte. On peut alors ré-interpréter le problème de l'indétermination de l'équilibre comme un problème de politique monétaire optimale.

Considérons maintenant le cas d'une économie de Distribution. Lorsque le système de prix est unique, les contraintes budgétaires dans le cas des actifs numéraires (a.n) et dans le cas des actifs financiers (a.f) sont données par,

$$
\begin{array}{ll}
(a.n) & x_h'\widehat{P} = \widehat{p}_{1.}Za_h = R_h \\
(a.f) & x_h'\widehat{P} = Za_h = R_h
\end{array}
$$

En faisant la somme sur les individus, et en substituant les contraintes de réalisabilité physique, les $S+1$ lois de Walras sont remplacées par $S+1$ équations quantitatives de la monnaie. En posant $A = \sum\limits_{h\in H} a_h$, on obtient,

$$
\begin{array}{ll}
(a.n) & \overline{\Omega}'\widehat{p} = \widehat{p}_{1.}ZA \\
(a.f) & \overline{\Omega}'\widehat{p} = ZA
\end{array}
$$

Dans une économie de Distribution, la normalisation des prix fait partie intégrante du système. Ceci provient du fait que l'allocation des actifs ne sert pas uniquement à *ré*allouer les revenus mais également à *a*llouer les revenus puisque les individus ne possède aucune richesse privée. Choisir un bien numéraire comme unité de compte revient à normaliser directement les prix. Lorsque le système d'actifs est incomplet, le choix de certains numéraires peut être incompatible avec les données exogènes du modèle puisqu'on ne peut pas engendrer n'importe quel vecteur de dimension $S+1$ à partir de la matrice Z. Au niveau des contraintes budgétaires individuelles, on retrouve l'homogénéité du système dans le niveau des prix lorsque l'unité de compte est un bien numéraire. Lorsqu'on choisit d'introduire une unité de compte abstraite, c'est la quantité totale d'actifs émise par le Distributeur qui détermine le niveau des prix. Au niveau individuel, le modèle n'est plus homogène dans le niveau des prix lorsque le système d'actifs est incomplet. La quantité totale d'actifs émise par le Distributeur peut se voir ainsi comme un instrument de politique monétaire dans le cas où le système d'actifs est incomplet.

Dans ce qui suit, on suppose donc que le Distributeur introduit de la monnaie comme unité de compte puisque cela évite d'une part les problèmes d'incompatibilité du choix du numéraire, et cela permet d'autre part d'introduire de manière naturelle des instruments de politique monétaire. On relègue cependant l'analyse du problème de la politique monétaire dans le dernier chapitre qui lui est entièrement consacré.

2.3 Un modèle de premier rang avec un système d'actifs incomplet

2.3.1 Le problème du Distributeur

On introduit maintenant la contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus dans le problème du Distributeur. L'allocation des revenus doit satisfaire la contrainte suivante,

$$R_h = Za_h$$

où Z est une matrice de rang $J+1 \leq S+1$, représentant les rendements des différents actifs. En associant les multiplicateurs θ_h à ces contraintes, le problème du Distributeur se présente comme suit :

$$\begin{aligned} Max\ L\left(\widehat{p}_h, R_h, a_h\right) = & \sum_{h \in H} \alpha_h u_h\left(x_h(\widehat{p}_h, R_h)\right) \\ & -\sigma'\left(\sum_{h \in H} x_h(\widehat{p}_h, R_h) - \overline{\omega}\right) \\ & - \sum_{h \in H} \theta_h^{'}\left(R_h - Za_h\right) \end{aligned}$$

avec les conditions de premier ordre exprimées en terme des matrices de substitution,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \widehat{p}_h^{'}} : & \quad \sigma' \widehat{K}_h = -\theta_h' X_h' \\ \frac{\partial L}{\partial R_h^{'}} : & \quad \theta_h' - \theta_{h0}\mu_h' = -\sigma' C_h \\ \frac{\partial L}{\partial a_h^{'}} : & \quad \theta_h^{'} Z = 0 \end{aligned}$$

Par la forme particulière de la matrice des rendements Z, la condition sur les actifs donne immédiatement $\theta_{h0} = 0$. Ceci n'est pas étonnant puisqu'il n'y a aucune contrainte sur l'allocation des revenus de première période. La condition sur les revenus se réduit alors à,

$$\theta_h' = -\sigma' C_h \tag{0.6}$$

En combinant la condition sur les prix avec celle sur les revenus, on peut faire apparaître la condition d'optimalité sur l'allocation des prix Arrow-Debreu implicite par l'intermédiaire de la matrice $\overline{K}$

$$\sigma'(\widehat{K}_h - C_h X'_h) = \sigma' \overline{K}_h = 0 \tag{0.7}$$

2.3.2 Le système de taxes de premier rang

On relègue l'interprétation des conditions de premier ordre à la section suivante, puisqu'on a la proposition suivante,

Proposition 2.1. *Le Distributeur peut implanter une allocation de premier rang par l'intermédiaire d'un ensemble de taxes individuelles qui sont proportionnelles aux prix à la consommation dans chaque état du monde. Les dispositions marginales à payer pour les actifs restent cependant individualisées.*

Démonstration. Par l'additivité de la matrice $\overline{K}_h$, la condition (0.7) donne immédiatement la proportionnalité des prix Arrow-Debreu individuels, $\gamma_{h0} p_h = \sigma$. Les taux marginaux de substitution sont uniques, et on obtient une allocation (intérieure) de premier rang. En substituant ce résultat dans la condition sur les revenus, on trouve $\theta'_h = 0$. Comme le niveau des prix et les revenus de première période ne sont pas contraints, on peut imposer l'unicité des prix Arrow-Debreu comme dans le modèle non contraint. En choisissant le niveau des prix de première période de telle sorte que $p'_{h0}\omega_0 = \pi'_0\omega_0$, on retrouve l'unicité des prix Arrow-Debreu individuels, $\pi' = p'_h = \mu'_h \widehat{P}'_h$.

Si on peut imposer l'unicité des prix Arrow-Debreu, on ne peut cependant pas imposer l'unicité des prix conditionnels. Vu que l'allocation des revenus de seconde période est contrainte, le Distributeur ne peut plus modifier simultanément les revenus et les taux d'inflation de seconde période pour obtenir l'unicité des prix conditionnels, et par là, celle des prix de Arrow. Le niveau des prix conditionnels n'est plus unique, et on peut parler d'un système de taxe proportionnelle à la consommation pour chaque individu[6].

Ces taxes n'ont qu'un effet nominal et leur niveau n'est pas défini. Lorsque les prix conditionnels restent individualisés, la contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus n'est qu'une contrainte nominale. Cette contrainte n'est cependant pas assez forte pour déterminer de manière unique les taxes individuelles à la consommation. En effet, comme les prix Arrow-Debreu individuels sont homogènes de degré zéro dans les prix et dans les revenus de seconde période, toute modification du niveau des prix conditionnels accompagnée d'une variation simultanée des prix de Arrow laissera l'allocation optimale inchangée alors que le système de taxe proportionnelle, lui, sera modifié. Décomposons la condition sur l'unicité du système de prix pour y faire apparaître les prix conditionnels et les prix de Arrow. En postmultipliant par Ω, on obtient l'unicité des prix réels de Arrow,

$$\mu'\widehat{m} = \mu_h'\widehat{m}_h = \mu_R' \qquad \forall h \in H$$

Ce résultat vient confirmer l'aspect purement nominal des taxes conditionnelles à la consommation. Toute modification des taux d'inflation conditionnels est annulée par la modification des prix de Arrow nominaux. Les prix de Arrow réels et les prix contingents restent inchangés tout comme le panier de consommation optimal.

[6]Notons au passage que l'on pourrait aussi bien parler de taxe sur les revenus plutôt que de taxe proportionnelle à la consommation.

2.3.3 La condition d'optimalité sur les actifs

Considérons maintenant la condition sur l'allocation des actifs. En combinant la condition sur les revenus et celle sur les actifs, on obtient

$$\pi' C_h Z = 0$$

Comme l'allocation des actifs existants n'est pas contrainte, à l'optimum il n'est plus possible de réduire le coût social de l'allocation des biens pour une certaine répartition des niveaux d'utilité en effectuant une redistribution des actifs. On peut exprimer la condition sur les actifs de manière plus explicite en faisant apparaître les dispositions marginales individuelles à payer pour les actifs. A cette fin, on définit d'abord le taux de transformation réel du revenu entre les différents états du monde et l'état zéro qui laisse le coût social de l'allocation inchangé, comme suit,

$$\nu_h' = \frac{\pi' \partial x_h / \partial R_h'}{\pi' \partial x_h / \partial R_{h0}}$$

Ce taux de transformation du revenu est de nature similaire aux prix de Arrow. Par construction, tout déplacement local le long de la contrainte budgétaire évaluée aux prix Arrow-Debreu individuels correspond à une variation d'utilité nulle au premier ordre. Les prix de Arrow peuvent alors s'interpréter comme le taux de transformation des revenus entre les différents états du monde et l'état zéro qui laisse la dépense de l'individu inchangée lorsque cette dépense est évaluée à l'aide des prix Arrow-Debreu individuels. Lorsque l'on évalue la dépense de l'individu aux prix sociaux π, on obtient le taux marginal de transformation du revenu ν_h. En faisant apparaître les dispositions marginales à payer pour les actifs, la condition sur les actifs devient,

$$q_h' = v_h' Z$$

L'individu h est prêt à payer $q_{hj} = \mu'_h z_j$ unités de compte de première période pour recevoir un actif qui lui livre z_{js} unités de compte dans chaque état s. Au niveau social, le coût de cette transaction est donné par $\tilde{q}_{hj} = v'_h z_j$. La dernière unité d'actif allouée à chaque individu égalise le bénéfice marginal individuel au coût marginal social, et on dira que l'allocation des actifs satisfait le principe de tarification au coût marginal. Ceci ne veut pas dire pour autant que les dispositions marginales à payer pour les actifs sont uniques puisque les prix de Arrow restent individualisés.

Le niveau des prix individuels n'est déterminé que pour une allocation des revenus donnée, c'est-à-dire pour une allocation d'actifs donnée. Comme les prix de Arrow réels sont uniques, on peut se demander si la marge de manoeuvre dont dispose le Distributeur dans l'allocation des actifs est suffisante pour modifier les prix de Arrow individuels nominaux de telle sorte que les dispositions marginales à payer pour les actifs soit unique. En d'autres termes, on peut se demander si l'allocation de premier rang peut être décentralisée par un système de marchés concurrentiels pour les biens. Pour répondre à cette question, il faut introduire de manière explicite les dispositions marginales à payer pour les actifs dans le modèle. C'est ce que l'on fait dans la dernière section du chapitre suivant dans laquelle on montre que le système de dispositions marginales à payer pour les actifs reste individualisé. Notons toutefois que les prix de Arrow nominaux restent individualisés aussi longtemps que le système de taxes est non nul.

2.3.4 Distribution égalitaire des revenus

Par analogie avec le modèle non-contraint dans lequel on a obtenu l'unicité du système de prix conditionnel, on peut imposer une distribution égalitaire des revenus sans pour autant dévier de l'allocation optimale. Imposons la contrainte sur la distribution égalitaire des revenus nominaux en imposant l'unicité des portefeuilles d'actifs,

$$a_h = \overline{a}$$

En associant les multiplicateurs ϕ_h à ces contraintes, les conditions de premier ordre sur l'allocation des actifs sont modifiées comme suit,

$$\theta'_h Z = \phi_h$$
$$\sum_{h \in H} \phi_h = 0$$

Comme les autres conditions de premier ordre restent inchangées, on retrouve la proportionnalité des prix Arrow-Debreu individuels. Par la propriété d'additivité de la matrice C, on a $\theta_h = 0$, et par là $\phi_h = 0$. Dans ce cas, les taxes proportionnelles à la consommation sont déterminées de manière non équivoque puisque les revenus sont fixés. La distribution égalitaire des revenus reste une illusion nominale puisque les taxes individuelles viennent différencier les ensembles de consommation financièrement accessibles aux consommateurs.

CHAPITRE 3

Optimum financier de second rang

Introduction

Lorsque le système d'actifs est incomplet, il n'est plus possible en général d'obtenir une allocation de premier rang au sens de Pareto. On est alors amené à chercher des allocations de second rang et à définir des concepts d'optimalité contrainte[1]. Un optimum contraint se définit par rapport aux contraintes institutionnelles qu'on impose sur la structure des échanges. On est libre ensuite de se demander si telle allocation satisfait les conditions d'optimalité d'un certain optimum contraint.

Dans la littérature, l'optimum de second rang a surtout été étudié en rapport avec l'allocation d'équilibre concurrentiel. Diamond (1967) s'est intéressé le premier aux contraintes institutionnelles qu'il faudrait placer sur un Planificateur pour que les conditions de premier ordre de l'économie planifiée soient les mêmes que celles de l'équilibre concurrentiel. Diamond s'est placé dans le contexte particulier d'une économie de production avec un bien unique. Il a montré que si le Planificateur est contraint de réallouer la production des entreprises à l'aide d'un système d'actifs (réels) incomplets et que les transferts de dotations entre les individus sont contraints à se faire par l'intermédiaire d'une obligation à rendement constant, alors l'allocation concurrentielle est optimale au sens contraint.

[1]Lorsqu'on parle du problème non contraint, on entend en vérité un problème qui n'est contraint par aucune structure institutionnelle d'échange puisque ce problème reste contraint par les ressources physiques du modèle.

Le résultat de Diamond repose fortement sur l'hypothèse d'un bien unique. Grossman (1977) a étendu le modèle de Diamond à plusieurs biens, et il a montré que l'équilibre concurrentiel peut être caractérisé par un optimum social contraint au sens de Nash (OSCN). L'optimum social contraint au sens de Nash peut se voir comme l'optimum obtenu par différents planificateurs qui oeuvrent chacun dans un état du monde exclusivement et qui prennent les allocations dans les autres états du monde comme des paramètres exogènes. Dans cette définition de l'optimum contraint, 'le' planificateur est soumis au même problème de coordination que les agents dans une économie concurrentielle. Si l'OSCN caractérise l'équilibre concurrentiel, il se prête mal à une interprétation générale d'un optimum contraint par l'incomplétude du système d'actifs puisque, comme l'a fait remarqué Hart, un OSCN peut être dominé au sens de Pareto par un autre OSCN.

Stiglitz (1982) reprend le concept d'optimalité au sens contraint de Diamond, dans le cadre d'une économie de production à deux biens, dans un modèle où il existe un continuum d'états du monde. Lorsqu'il existe plusieurs biens, les prix des biens ont une double fonction: ils permettent d'une part d'allouer les biens à l'intérieur de chaque état du monde, mais également de réallouer le revenu entre les différents états du monde. Stiglitz montre que si le Planificateur est soumis aux mêmes restrictions que dans le modèle de Diamond, alors l'équilibre concurrentiel ne sera pas un optimum contraint au sens de Diamond, sauf dans les cas particuliers suivants: les consommateurs sont identiques et il n'y a pas d'échange, tous les individus ont des fonctions d'utilité homothétiques identiques, et le modèle n'a qu'un bien.

Géanakoplos et Polémarchakis (1986) proposent une définition de l'optimum contraint dans la lignée de celle proposée par Stiglitz. Un optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis (OCGP) est un optimum contraint par l'existence de marchés concurrentiels pour les biens. L'allocation des actifs quant à elle n'est soumise à aucune contrainte institutionnelle. Ces auteurs montrent que de manière générique, l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCGP. Etant donné que l'allocation des biens se fait par l'intermédiaire d'un système de marchés concurrentiels, le marché n'alloue pas les actifs de manière optimale.

Dans ce chapitre, on présente différents optimum contraints dans le cadre d'une économie financière à plusieurs biens. On se distingue ainsi des auteurs précédents qui se sont placés dans des économies réelles[2]. On commence par présenter un modèle original d'optimum contraint dans son sens le plus pur, c'est-à-dire lorsque l'optimum est contraint par un système incomplet d'actifs financiers uniquement. Pour ce faire, on rend effective la contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus en imposant une contrainte d'unicité des unités de compte. On montre que le Distributeur doit se comporter comme un 'monopoleur de compromis' qui prélève un système de taxes et de subventions individualisées. A l'optimum contraint le Distributeur parvient à réaliser l'unicité des recettes marginales de compromis. On profite de ce modèle pour évaluer les effets du choix de l'unité de compte du système. On obtient un résultat intéressant dans le cas particulier où il n'existe que deux individus, puisque le Distributeur peut implanter un optimum contraint (au sens pur) qui est efficace au sens ex-post s'il peut choisir l'unité de compte de l'économie.

On impose ensuite une contrainte d'unicité des prix conditionnels, qui peut se voir comme une contrainte d'implantation, et on obtient l'optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis dans le cadre d'une économie financière. Le Distributeur ne parvient plus à réaliser l'unicité des recettes marginales de compromis, mais il parvient à égaliser les recettes marginales de compromis 'corrigées'

[2] Géanakoplos et Polémarchakis se placent dans une économie numéraire, mais ils ne posent pas le problème de l'optimum. Ils dérivent leur résultat en faisant de la statique comparative à partir de l'équilibre concurrentiel.

par des redistributions fictives de quantité. Ces dernières sont toutes égales aux recettes marginales de compromis 'du marché'. Les dispositions marginales à payer pour les actifs sont individualisées, et on obtient immédiatement que l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCGP. Pour s'assurer de la cohérence de notre modèle, on présente en annexe le cas particulier du modèle à un bien de Diamond pour lequel l'équilibre concurrentiel est un OCGP, ainsi que les effets de différentes hypothèses de séparabilité tant au niveau des préférences qu'au niveau de la structure institutionnelle. On montre que même dans le cas où les préférences sont additivement séparables sur les états du monde, l'optimum contraint n'est pas efficace au sens ex post.

Dans la dernière section, on présente un concept original d'optimalité contrainte par l'existence de marchés concurrentiels pour les actifs (OCUA). Cet optimum contraint peut se voir comme la réciproque de l'OCGP, et il prend tout son sens par rapport à ce dernier puisque les marchés financiers sont généralement plus concurrentiels que les marchés des biens. On montre que le Distributeur égalise à nouveau les recettes marginales de compromis corrigées par des redistributions fictives de quantités, et que ces redistributions fictives de quantité sont maintenant engendrées par des redistributions fictives d'actifs. On en conclut immédiatement que l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCUA. On présente également en annexe le système de décomposition des différents effets prix et effets revenus qui permet de mieux comprendre ce chapitre.

3.1 Optimum contraint par l'unicité des normalisations

Pour continuer dans la logique de notre démarche, il est naturel de commencer par imposer une contrainte de normalisation unique des prix conditionnels. Ne pouvant plus jouer avec le niveau des prix pour atteindre l'optimalité inter–états lorsque l'allocation des revenus est contrainte, le Distributeur utilise les prix relatifs à l'intérieur de chaque état du monde comme instrument de second rang pour réduire les distorsions liées à l'allocation entre les états du monde. Le système de prix conditionnels n'est plus unique, et l'on fait face à un système de taxes individuelles sur les prix à la consommation. Le Distributeur agit comme un 'Monopoleur de compromis' qui n'hésite pas à créer des distorsions locales pour atteindre son objectif. Les distorsions liées à la contrainte sur l'allocation du revenu se propagent à l'intérieur de chaque état du monde, et le système de prix relatifs n'assure plus l'optimalité à l'intérieur de chaque état du monde. Considéré dans une approche globale cependant, cette politique est optimale puisqu'elle permet au Distributeur de réaliser le principe de Boiteux qui consiste à répartir la perte sociale afin de la diminuer.

3.1.1 Le problème du Distributeur et sa résolution

Imposons la contrainte de normalisation des prix de la manière suivante,

$$\Omega' \widehat{p}_h = m$$

où m est un paramètre institutionnel à la discrétion du Distributeur. L'unité de compte $(\overset{\vee}{m}\ \Omega')$ est définie par la relation suivante, $(\overset{\vee}{m}\ \Omega')\widehat{P}_h = I_{S+1}$. Le paramètre m détermine la grandeur de l'unité de compte pour un Ω donné, alors que les paramètres Ω définissent la nature de l'unité de compte[3]. En associant les multiplicateurs ς_h à ces contraintes, le problème de l'optimum contraint devient

[3]Si on décide d'utiliser un numéraire comme unité de compte, disons le sel, alors le paramètre m détermine si c'est le kilo de sel ou le gramme de sel qui servira d'unité de compte.

$$\begin{aligned} Max\ L(\widehat{p}_h, R_h, a_h, m) = & \sum_{h\in H} \alpha_h u_h \left(x_h(\widehat{p}_h, R_h)\right) \\ & -\sigma' \left(\sum_{h\in H} x_h(\widehat{p}_h, R_h) - \overline{\omega}\right) \\ & - \sum_{h\in H} \theta_h^{'} \left(R_h - Za_h\right) \\ & - \sum_{h\in H} \delta_h^{'} \left(\Omega' \widehat{p}_h - m\right) \end{aligned}$$

avec les conditions de premier ordre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \widehat{p}_h'} : & \quad -\alpha_h \lambda_h' X_h' - \sigma' \frac{\partial x_h}{\partial \widehat{p}_h'} - \varsigma_h^{'} \Omega' = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial R_h'} : & \quad \alpha_h \lambda_h' - \sigma' \frac{\partial x_h}{\partial R_h'} - \theta_h^{'} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_h'} : & \quad \theta_h^{'} Z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial m'} : & \quad \sum_{h\in H} \varsigma_h^{'} = 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre le modèle, on commence par transformer les conditions de premier ordre en terme des matrices de compensation de l'effet prix et de l'effet revenus. On exprime ensuite les multiplicateurs σ à partir de la condition sur les prix. En substituant cette expression dans la condition sur les revenus, on obtient une expression pour les prix de Arrow individuels. A partir de ces deux conditions, on pourra exprimer si on le désire les taxes implicites sur les prix des actifs ainsi que les taxes implicites sur les prix Arrow-Debreu. Commençons par transformer les conditions de premier ordre. Par la forme particulière de la matrice des rendements Z, on a immédiatement $\theta_{h0} = 0$ pour tous les individus. On peut postmultiplier ainsi la condition sur les revenus par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\mu_{h1}' \\ 0 & I_S \end{pmatrix}$ sans perte d'information, pour faire apparaître la matrice de compensation de l'effet revenus,

$$\sigma' C_h = -\theta_h' \tag{0.1}$$

Post multiplions la condition sur les revenus par X_h', et faisons la somme avec la condition sur les prix. On obtient la condition sur les prix conditionnels

$$\sigma' \widehat{K}_h = -\theta'_h - \varsigma'_h \Omega' \tag{0.2}$$

En combinant ces deux conditions, on obtient la condition sur les prix Arrow-Debreu implicites[4],

$$\sigma' \overline{K}_h = -\varsigma'_h \Omega' \tag{0.3}$$

Soit $C_h^m = \left(\frac{\partial x_h}{\partial m'} - \frac{\partial x_h}{\partial m_0} \mu'_h \right)$, la matrice de compensation d'une variation du niveau des prix présentée en annexe. En post multipliant (0.3) par $\widehat{P}_h \overset{\vee}{m}$, on peut isoler les multiplicateurs δ_h,

$$\sigma' C_h^m = -\delta_h \tag{0.4}$$

Afin d'exprimer les multiplicateurs σ, on a besoin d'un lemme dont on va se servir tout au long de ce chapitre.

Lemme A La dérivée partielle des dispositions marginales à payer pour les biens par rapport aux consommations satisfait $\frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} \widehat{K}_h = (I_L - \widehat{P}_h \overset{\vee}{m} \, \Omega') = T'_h$

Pour démontrer ce lemme, on retourne à la théorie généralisée du consommateur. Par l'équation fondamentale de la demande, on a la relation suivante,

$$T'_h \frac{U^h_{xx'}}{\lambda_{h0}} \widehat{K}_h M^{-1}_{\mu_h} = T'_h$$

où M_{μ_h} représente la matrice hyper-diagonale des prix de Arrow. Par définition, les dispositions marginales à payer pour les biens sont données dans chaque état du monde par

[4]Remarquons qu'on aurait pu déduire la condition sur les prix conditionnels à partir de la condition sur les prix Arrow-Debreu implicite, puisqu'il est toujours possible de passer de l'une à l'autre une fois que l'on a la condition sur la compensation de l'effet revenus.

$$\widehat{p}'_{hs} = \frac{D'u_{hs}}{\omega'_s Du_{hs}} m_{hs}$$

Prenons la dérivée partielle des prix conditionnels par rapport aux consommations,

$$\frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} = M_{\mu_h}^{-1}(I_L - \widehat{P}_h \overset{\vee}{m}\, \Omega') \frac{U^h_{xx'}}{\lambda_{h0}}$$

En substituant cette expression dans la condition précédente et en se servant du fait que $M_{\mu_h} T'_h M_{\mu_h}^{-1} = T'_h$, on obtient le résultat désiré,

$$\frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} \widehat{K}_h = T'_h \tag{0.5}$$

Considérons maintenant la condition sur les prix conditionnels (0.2). En postmultipliant cette condition par $T'_h = (I_L - \widehat{P}_h \overset{\vee}{m}\, \Omega')$, on peut faire apparître la matrice de Slutsky du coté droit en se servant du lemme (A). En regroupant les termes du même coté, on a

$$\left(\sigma' - \theta'_h X'_h \frac{\partial \widehat{p}_x}{\partial x'_h}\right) \widehat{K}_h = 0$$

Par le chapitre 1, on sait que le noyau de $\widehat{K}_h$ est donné par $\gamma'_h \widehat{P}'_h$. On obtient ainsi une expression pour σ,

$$\sigma' = \gamma'_h \widehat{P}'_h - \theta'_h X'_h \frac{\partial \widehat{p}_x}{\partial x'_h}$$

Soit $\lambda' = \sigma' \Omega \overset{\vee}{m}$, l'utilité marginale 'officielle' des revenus. On peut se débarrasser des multiplicateurs γ_h en postmultipliant l'expression ci-dessus par $T = (I_L - \Omega' \overset{\vee}{m}\, \widehat{P}'_h)$,

$$\sigma' = \lambda' \widehat{P}'_h - \theta'_h X'_h \frac{\partial \widehat{p}_x}{\partial x'_h} T_h \tag{0.6}$$

On peut remarquer que cette expression défini le système de taxes conditionnelles individuelles. Considérons maintenant la condition sur les revenus (0.1). En substituant la valeur de σ, et en réarrangeant les termes, on obtient l'écart entre les prix de Arrow individuels et les prix de Arrow officiels,

$$\mu_h' - \mu' = \frac{1}{\lambda_0}\theta_h' \left(I_{S+1} - X_h' \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x_h'} T_h C_h \right) \tag{0.7}$$

3.1.2 Interprétation des conditions de premier ordre

Par la dualité du problème que l'on considère, on peut interpréter les conditions de premier ordre en terme des matrices de compensation ou en terme des systèmes de taxes qui y sont associés. On commence par interpréter les multiplicateurs θ_h et δ_h associés à l'optimalité inter états, puis on passe à la condition sur les prix conditionnels qui définit l'optimalité intra état.

a) L'optimalité inter états

L'optimalité inter états est affectée par l'allocation des revenus ainsi que par l'allocation du niveau des prix. Commençons par la condition sur les revenus,

$$\sigma' C_h = -\theta_h'$$

Les multiplicateurs θ_h apparaissent comme le coût social de l'effet revenus compensé. Ainsi, lorsque $\theta_h \neq 0$, l'allocation des revenus ne permet pas de minimiser le coût social de l'allocation de l'individu h pour un certain niveau d'utilité. Pour un $\theta_{hs} > 0$, il serait possible de réduire le coût social de l'allocation de l'individu h en augmentant son revenu dans cet état. Cette modification de revenu n'est cependant pas réalisable par l'intermédiaire du système d'actifs existant, et le niveau de revenu de cet individu est trop bas par rapport à son niveau non contraint. Tout se passe alors comme si le Distributeur était forcé de taxer (subventionner) les revenus des individus par rapport à une économie dans laquelle il pourrait organiser un système de marchés pour l'allocation des revenus. Ce système de taxes est donné par l'écart sur les prix de Arrow individuels (0.7),

$$\tau'_{\mu_h} = \mu'_h - \mu' = \frac{1}{\lambda_0}\theta'_h \left(I_{S+1} - X'_h \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} T_h C_h \right)$$

Lorsque la contrainte sur l'allocation des revenus n'est pas effective, les prix de Arrow sont uniques. Considérons maintenant la condition sur le niveau des prix,

$$\sigma' C_h^m = -\delta_h$$

Les multiplicateurs δ_h représentent le coût social d'une variation du niveau des prix compensée par une variation du niveau des prix de première période. Au niveau individuel, le niveau des prix ne permet pas de minimiser le coût social des allocations. Ce que le Distributeur ne peut réaliser au niveau individuel, il le réalise cependant au niveau agrégé. Par la condition sur le choix de m, on a en effet $\sum_{h \in H} \delta_h = 0$. On peut mettre en relation les deux types de coûts inter états en postmultipliant la condition sur les prix relatifs (0.2) par $\widehat{P}_h$. Par la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, on trouve

$$\theta'_h \widehat{R}_h = -\delta'_h \widehat{m} \tag{0.8}$$

On peut interpréter le terme de gauche comme les rentes de monopole associées à l'allocation des revenus alors que le terme de droite représente les rentes de monopole associées au niveau des prix. Pour voir ceci, il suffit de se rappeler que dans l'espace primal des quantités, la rente de monopole est donnée par le produit des quantités et de l'écart entre le prix au consommateur et le coût de production, $r = (p - c)x$. Dans l'espace des prix et des revenus, la rente de monopole associée aux revenus est donnée par le produit des revenus et de l'écart sur la tarification au coût marginal. Comme θ_h représente cet écart, il est naturel d'interpréter $\theta'_h \widehat{R}_h$ comme la rente de monopole associée à l'allocation des revenus. Un raisonnement analogue s'applique pour le niveau des prix. A l'optimum contraint, ces deux rentes sont égales, à un signe près. Ceci n'es pas surprenant puisque par la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, le niveau des prix et les revenus ont la même influence sur les ensembles de consommation financièrement accessibles aux consommateurs. En faisant la somme sur les individus, et en se servant de la condition d'optimalité sur le choix de m, on a

$$\sum_{h\in H} \theta'_h \widehat{R}_h = - \sum_{h\in H} \delta'_h \widehat{m} = 0 \tag{0.9}$$

Au niveau agrégé, les rentes de monopoles associées aux instruments d'allocation inter états sont nulles.

Remarque 1. *Les multiplicateurs θ_h associés à la contrainte sur l'allocation des revenus possèdent une certaine structure qui leur vient d'une part de la matrice des rendements, et d'autre part de la condition agrégée. En postmultipliant la condition sur les actifs par le portefeuille individuel, on a $\theta'_h R_h = 0$. Si le revenu de l'individu h est taxé de manière implicite dans un état du monde, il est forcément subventionné de manière implicite dans un autre état du monde.*

Au niveau agrégé, la condition $\sum_{h\in H} \theta'_h \widehat{R}_h = 0$ implique que si le revenu d'un individu est taxé de manière implicite dans un état du monde, le revenu d'un autre individu doit nécessairement être subventionné de manière implicite dans le même état du monde. Cette condition est importante puisqu'elle implique entre autre que lorsque les θ_h sont uniques, ils sont nécessairement tous nuls[5].

Passons à la condition sur l'allocation des actifs. En combinant la condition sur les revenus avec celle sur les actifs, on a

[5]Dans le cas particuliers où il n'existe que deux individus, les distorsions sur la tarification au coût marginal sont plus importantes pour l'individu dont le revenu est plus faible. Si $R_h/R_i > 1$, la condition précédente implique nécessairement $\theta_i/\theta_h > 1$.

$$\sigma' C_h Z = 0$$

A l'optimum contraint, il n'est plus possible de réduire le coût social des allocations individuelles par une redistribution des actifs. Ceci se comprend aisément puisque l'allocation des actifs existants n'est pas contrainte. On peut rendre cette condition plus explicite en faisant apparaître le taux marginal de transformation des revenus $v_h = \frac{\sigma' \partial x_h / \partial R'_h}{\sigma' \partial x_h / R_{h0}}$, introduit dans la dernière section du chapitre précédent. Rappelons que ce taux de transformation des revenus laisse inchangée la dépense de l'individu évaluée aux prix sociaux π. La condition sur les actifs devient

$$q'_h = v'_h Z$$

Bien que l'allocation des actifs satisfait le principe de tarification au coût marginal, ceci ne veut pas dire pour autant que les dispositions marginales à payer pour les actifs sont uniques. En se servant des écarts sur les prix de Arrow (0.7), on peut exprimer les taxes implicites sur les prix des actifs,

$$q'_h - q' = -\frac{1}{\lambda_0} \theta'_h X'_h \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} T_h C_h Z \tag{0.10}$$

L'allocation des actifs ne peut dès lors pas être implantée par un système de marchés concurrentiels.

b) L'optimalité intra état

Passons maintenant à la condition sur l'allocation des prix conditionnels. En substituant l'expression des multiplicateurs θ_h et δ_h dans la condition (0.2), on a,

$$\sigma' \widehat{K}_h = \sigma' C_h X'_h + \sigma' C_m \Omega'$$

Le système de prix a une double fonction. Il a d'abord une fonction allocative à l'intérieure de chaque état du monde (allocation des biens), et une fonction allocative entre les états du monde. Cet aspect inter états provient de l'effet des prix sur le coût de la vie, ainsi que sur le niveau des prix. Dès lors qu'il existe des distorsions à l'optimalité inter états, le système de prix 'relatifs', c'est-à-dire la direction du vecteur des prix à l'intérieur de chaque état du monde, est utilisé comme un instrument de second rang pour réduire les distorsions inter états. Ceci crée à son tour des distorsions à l'intérieur de chaque état du monde, mais à l'optimum contraint, le Distributeur réalise un arbitrage entre les distorsions liées à chacune des fonctions du système de prix. Considérons l'expression de sigma (0.6),

$$\sigma' = \lambda' \widehat{P}'_h - \theta'_h X'_h \frac{\partial \widehat{p}_x}{\partial x'_h} T_h \qquad \forall h \in H$$

A l'optimum de second rang, le Distributeur parvient à obtenir l'unicité des recettes marginales de compromis. Il se comporte comme un 'monopoleur de compromis' qui n'utilise que partiellement son pouvoir de monopole. Cette proportion n'est pas arbitraire, mais elle est donnée par les multiplicateurs θ_h. Le monopoleur de compromis a ceci de particulier qu'il utilise une part de son pouvoir de monopole 'dans les deux sens', c'est-à-dire qu'il taxe la consommation de certains individus ($\theta_{hs} \geq 0$) alors qu'il subventionne la consommation d'autres individus ($\theta_{hs} \leq 0$). Remarquons que pour un dx donné, la matrice T_h engendre une variation de consommation compensée dx^c_h qui satisfait $\widehat{P}'_h dx^c_h = 0$. Ainsi, le Distributeur égalise en réalité les recettes marginales de compromis compensées pour la variation de pouvoir d'achat conditionnel. En réarrangeant les termes, on obtient de manière explicite le système de taxes sur les prix conditionnels,

$$\widehat{\tau}'_h = \pi' - \mu' \widehat{P}'_h = -\frac{1}{\lambda_0} \theta'_h X'_h \frac{\partial \widehat{p}_x}{\partial x'_h} T_h$$

Bien que la direction du vecteur des prix conditionnels ne soit pas directement contrainte, le système de prix relatifs est utilisé comme un instrument de second rang pour réduire les distorsions inter états. Pour comprendre ce qui se passe, considérons le cas particuliers où il n'existe que deux biens dans chaque état du monde. Pour simplifier l'analyse, supposons également que les préférences sont additivement séparables sur les états du monde. Lorsque la contrainte sur l'allocation des revenus est effective, les prix de Arrow individuels ne sont pas uniques, et le Distributeur pourrait réduire le coût social des allocations individuelles en modifiant l'allocation des revenus.

Supposons un instant que l'individu h a un revenu trop faible par rapport à son revenu non contraint dans l'état s ($\theta_{hs} > 0$). Ceci revient à dire en quelque sorte que l'utilité qu'il retire de sa consommation conditionnelle dans cet état est trop faible. Si monsieur h a des préférences 'marquées' pour le bien 1 dans l'état s[6], il est possible d'améliorer son utilité sans modifier son revenu en augmentant le prix du bien 2 et en diminuant le prix du bien 1 de manière à ce que le niveau des prix reste inchangé. Comme on le montre dans l'annexe, une telle variation de prix relatifs est donnée en prémultipliant un $d\widehat{p}$ quelconque par la matrice $(I_L - \widehat{P}_h \overset{\vee}{m} \Omega')$. Cette variation de prix affecte le pouvoir d'achat de l'individu qui peut consommer maintenant une plus grande quantité du bien pour lequel son utilité marginale est supérieure. L'utilité qu'il retire de sa consommation conditionnelle dans l'état s augmente et son utilité marginale du revenu dans cet état du monde est réduite, tout comme son prix de Arrow pour cet état. En conséquence, les distorsions liées à l'allocation de son revenu dans l'état s sont également réduites.

Lorsque les individus ont des préférences différentes, le système des prix relatifs ne sera pas unique. Cette opération introduit des distorsions à l'intérieur de chaque état du monde puisqu'une fois que l'incertitude est levée, une modification des prix

[6]Par préférence marquée on entend simplement que pour un rapport de prix donné, l'utilité marginale du bien 1 est supérieure à l'utilité marginale du bien 2.

relatifs permet de réaliser des améliorations au sens de Pareto. Le Distributeur ne peut plus considérer son problème de manière séparée, mais il doit l'aborder dans sa globalité afin d'utiliser tous les instruments offerts par la structure institutionnelle[7]. L'utilisation de prix individualisés lui permet de mieux épouser la configuration de l'économie. Les distorsions liées aux contraintes sur l'allocation inter-états se propagent à l'intérieur de chaque état du monde, et on retrouve un principe général de Boiteux qui consiste à étendre la perte afin de la réduire. La condition sur les prix conditionnels exprime l'arbitrage que le Distributeur fait entre ces deux types de coûts. Ce résultat peut sembler étonnant de prime abord lorsque les préférences sont additivement séparables, et on y revient dans l'annexe A.3.2 lorsqu'on introduit la séparabilité des préférences de manière formelle.

En conjuguant les écarts sur les prix de Arrow avec le système de taxes sur les prix conditionnels, on obtient bien entendu le système de taxes implicite sur les prix Arrow-Debreu. Remarquons que le système de taxes que l'on vient d'établir, est une fonction linéaire des multiplicateurs θ_h. Par là, on peut montrer facilement la cohérence de notre modèle dans le cas des marchés complets. Lorsque le système d'actifs est complet, la matrice Z est de rang complet, et on obtient $\theta_h = 0$ par la condition sur les actifs. En substituant ceci dans le système de taxes, on obtient l'unicité des prix Arrow-Debreu ainsi que l'unicité des prix des actifs. L'équilibre concurrentiel permet alors d'implanter une allocation de premier rang lorsque les marchés sont complets.

Remaque sur l'utilisation de prix individuels

Le problème qu'on considère est un problème ex ante, c'est-à-dire avant que

[7]Ceci revient à rappeler l'importance d'une bonne définition de l'objectif dans tout problème d'optimalité. Une allocation peut sembler inefficace de prime à bord si on se contente d'une analyse partielle, alors qu'elle peut se révéler efficace au niveau global. Cette remarque est particulièrement vraie pour les débats politiques.

l'incertitude ne se révèle, et le système de taxes de monopole de compromis est optimal en ce sens. Si on s'intéresse également à l'optimalité au sens ex-post, ce système de prix individualisés ne satisfait pas à ce critère d'optimalité. Même si le Distributeur est doté de pouvoirs coercitifs pour faire respecter un système de prix individuels, il aura intérêt à remplacer ce système de prix par un système de prix unique une fois l'incertitude levée, si son objectif reste d'obtenir une allocation efficace.

Ceci soulève alors un problème d'engagement de la part du Distributeur puisque les choix de consommation des agents sont basés sur les prix que le Distributeur annonce à la période zéro. Pour faire face à ce problème d'engagement, on peut imposer une contrainte d'unicité des prix conditionnels dans le problème du Distributeur. L'unicité des prix apparaît ainsi comme une contrainte institutionnelle d'implantation. Notons que ce problème d'engagement ne provient pas de l'aspect général des préférences puisqu'il survient également lorsqu'on fait l'hypothèse que les préférences sont additivement séparables sur les états du monde, un cas qu'on analyse dans l'annexe A.3.2. Si l'unicité du système de prix conditionnels permet de régler le problème d'engagement du Distributeur, cette contrainte ajoute des distorsions supplémentaires à l'allocation ex-ante lorsque le système d'actifs est incomplet. C'est ce qu'on analyse dans la section suivante. Avant cela, on s'intéresse au problème du choix de l'unité de compte optimale puisque ceci permet au Distributeur d'implanter une allocation de second rang qui soit également optimale au sens ex-post dans le cas particulier où il n'existe que deux individus.

3.1.3 Les effets réels de l'unité de compte

On a vu que la contrainte de normalisation des prix conditionnels pouvait s'interpréter comme une contrainte d'unicité de l'unité de compte. Dans le modèle précédent, on a laissé au Distributeur la possibilité de choisir la grandeur de l'unité de compte (m), mais non la nature de l'unité de compte elle-même (Ω). On s'intéresse ici au cas où le Distributeur peut choisir l'unité de compte du système pour un paramètre institutionnel m donné. Avant d'analyser le problème du choix de l'unité de compte optimale, on considère deux cas particuliers: le cas où le vecteur ω se confond avec le vecteur de consommation optimale d'un individu, et le cas où l'unité de compte est un bien numéraire.

Si le vecteur de poids ω se trouve être égal au vecteur de consommation d'équilibre d'un certain individu, disons l'individu h, en substituant $\omega = x_h^*$ dans la condition sur les rentes de monopoles associées aux distorsions inter états, on obtient $\theta_h = -\varsigma_h$. En substituant ceci dans la condition sur l'allocation des prix relatifs, on obtient que les prix à la consommation de l'individu h sont proportionnels aux prix officiels, $\gamma_h' \widehat{P}_h' = \lambda_0 \pi'$. A l'optimum contraint, il n'est plus possible de réduire la dépense sociale de cet individu par une modification de ses prix relatifs. Ceci provient du fait que l'individu h satisfait spontanément la contrainte de normalisation puisque cette dernière se confond avec sa contrainte financière. En normalisant les prix officiels de la même manière que les prix à la consommation, les prix Arrow-Debreu de l'individu h sont égaux aux prix officiels, et l'allocation des prix et des revenus de cet individu satisfont le principe de tarification au coût marginal.

Si l'unité de compte est exprimée en terme d'un bien numéraire, la contrainte de normalisation revient à imposer une contrainte d'unicité sur le prix de ce bien. L'allocation des prix des autres biens n'est pas contrainte, et satisfait dès lors le principe de tarification au coût marginal. En notant $\widehat{P}_{1.}$ la matrice diagonale des prix du bien 1, la condition sur les rentes de monopoles associées aux instruments d'allocation inter états devient, $\varsigma_h' \widehat{P}_{1.} = -\theta_h' \widehat{R}_h$. Comme on le verra plus loin, cette expression sera généralisée dans le prochain modèle. Si on laisse au Distributeur la possibilité de choisir l'unité de compte, la condition de premier ordre associée aux poids ω est donnée par

$$\sum_{h\in H} \delta'_h \widehat{P}'_h = 0 \tag{0.11}$$

Les autres conditions restent quant à elles inchangées. A partir de cette condition, on a la proposition suivante,

Proposition 3.1. *Lorsque le système d'actifs est complet, le Distributeur est indifférent entre choisir le niveau de l'unité de compte ou l'unité de compte elle-même. Lorsque le système d'actifs est incomplet cependant, le choix de l'unité de compte elle-même a des effets réels.*

Le fait de pouvoir choisir l'unité de compte elle-même plutôt que son niveau uniquement donne plus de latitude au Distributeur. On peut voir ceci en remarquant que la condition d'optimalité sur le choix de ω implique la condition d'optimalité sur le choix de m. En effet, en post multipliant (0.11) par $\Omega \overset{\vee}{m}$, on retrouve la condition de premier ordre sur le choix du paramètre m, $\sum_{h\in H} \delta_h = 0$. La réciproque n'est pas vrai cependant puisque $\sum_{h\in H} \delta_h = 0$ n'implique pas $\sum_{h\in H} \delta'_h \widehat{P}'_h = 0$, à moins que les marchés soient complets ($\delta_h = 0$), ou lorsque le système de prix est unique [8].

Ce résultat suggère que certaines normalisations sont plus 'coûteuses' que d'autres, ou de manière analogue, que certaines unités de compte sont plus adéquates que d'autres. La condition d'optimalité sur le choix de l'unité de compte permet 'd'imposer' $(S+1)$ contraintes linéaires sur les prix conditionnels individuels. Dans le cas particuliers où il n'y a que deux individus ($H = 2$), on obtient un résultat intéressant,

[8] Ceci se voit de manière évidente puisqu'en chosissant ω, le Distributeur choisit tant la direction de ce vecteur que sa longueur. En choisissant sa longueur, il rend la normalisation indépendante de m.

Proposition 3.2. *Lorsque $H = 2$, l'unité de compte optimale est telle que le système des prix conditionnels est unique.*

Cette proposition est importante même si elle s'applique à un cas très particuliers puisqu'elle permet d'obtenir l'optimalité au sens ex-post. Ainsi, une fois que l'incertitude est levée, le Distributeur n'a aucun intérêt à modifier le système de prix qu'il a annoncé à la première période puisque ce système lui permet d'implanter une allocation efficace. Cette proposition découle simplement de la condition d'optimalité sur l'unité de compte lorsque $H = 2$. Dans ce cas, pour $h = 1, 2$ on a en effet, $\widehat{p}_{1s} = -\frac{\delta_{2s}}{\delta_{1s}}\widehat{p}_{2s}$, pour $s = 0, 1...S$. Comme l'unité de compte est unique, on a

$$\widehat{p}_h = \widehat{p}$$

Si le système de prix à la consommation est unique, cela ne veut pas dire pour autant qu'il est égal au système de prix officiel $\widehat{\pi}$. L'intuition qui se cache derrière ce résultat est peut être à rechercher à partir du cas particuliers où $\omega = x_h^*$. Dans ce cas, la contrainte de normalisation de l'individu h est spontanément satisfaite et le système de prix de cet individu est égal au système de prix officiel. Le choix de l'unité de compte permet au Distributeur d'avoir un degré de liberté sur les systèmes de prix conditionnels. Lorsque $H = 2$, il utilise cette possibilité pour obtenir l'unicité du système de prix conditionnels et par là il réalise l'optimalité au sens ex-post.

3.2 Optimum contraint par l'unicité des prix conditionnels

Dans cette section on rend explicite la contrainte institutionnelle sur l'allocation des revenus en imposant l'unicité du système de prix conditionnels. On réduit par là le problème d'engagement du Distributeur à maintenir le système de prix annoncé une fois que l'incertitude est résolue, et on présente l'optimum contraint au sens de

Géanakoplos et Polémarchakis (OCGP). Cet optimum est un optimum contraint par l'existence de marchés concurrentiels pour les biens. L'allocation des actifs quant à elle n'est soumise à aucune contrainte institutionnelle et la disposition marginale à payer pour les actifs reste à priori individualisée.

On peut déjà évaluer l'optimalité de l'allocation d'équilibre concurrentielle à l'aide de ce modèle. Lorsque les conditions de premier ordre de l'OCGP sont telles que les dispositions marginales à payer pour les actifs sont différentes entre les individus, on pourra en conclure que l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCGP, puisque les conditions de premier ordre sont nécessaires.

3.2.1 Le problème du Distributeur et sa résolution

Pour soumettre le Distributeur aux contraintes de l'OCGP, on impose l'unicité du système de prix conditionnels dans notre modèle,

$$\widehat{p}_h = \widehat{p} \qquad \forall h \in H$$

En associant les multiplicateurs ξ_h aux contraintes d'unicité des prix, les conditions de premier ordre du problème du Distributeur deviennent après transformations

$$\pi'\widehat{K}_h = -\frac{1}{\lambda_0}(\ \theta'_h X'_h + \xi'_h) \tag{0.12}$$

$$\pi'\overline{K}_h = -\frac{1}{\lambda_0}\xi'_h \tag{0.13}$$

$$\pi' C_h = -\frac{1}{\lambda_0}\theta'_h \tag{0.14}$$

$$\theta_h' Z = 0 \tag{0.15}$$

$$\sum_{h \in H} \xi_h' = 0 \tag{0.16}$$

De manière analogue au modèle de la section 1, on commence par exprimer les multiplicateurs σ. On substitue cette expression dans la condition sur les revenus, et on en tire les écarts entre les prix de Arrow individuels. On peut exprimer ainsi le système de taxes implicites sur les actifs et celui sur les prix Arrow-Debreu individuels. Avant de résoudre le modèle, on a besoin d'un lemme supplémentaire.

Lemme B La matrice de Slutsky agrégée $\sum_{h \in H} \widehat{K}_h$ est de rang $(L - S - 1)$. Elle possède une inverse généralisée réflexive H qui a les propriétés d'additivité suivantes: (p.1) $\Omega' H = H\Omega = 0$, (p.2) $H \sum_{h \in H} \widehat{K}_h = \left(I_L - \hat{P} \overset{\vee}{m} \Omega'\right)$ et (p.3) $\sum_{h \in H} \widehat{K}_h H = \left(I_L - \Omega \overset{\vee}{m} \hat{P}'\right)$.

La démonstration de la première partie du lemme se fait en trois étapes. On considère d'abord la matrice bordée $B = \begin{pmatrix} \sum_{h \in H} \widehat{K}_h & \Omega \\ \Omega' & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrons que cette matrice est de rang maximal. Supposons que ceci ne soit pas le cas. Alors il existe des vecteurs $\vartheta \in R^L$, et $\varsigma \in R^{S+1}$ tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées,

(1) $\vartheta' \sum_{h \in H} \widehat{K}_h + \varsigma' \Omega' = 0$
(2) $\vartheta' \Omega = 0$

En postmultipliant la première condition par $\widehat{P}$, on obtient $\varsigma = 0$. La condition (1) devient

$$(1)' \; \vartheta' \sum_{h \in H} \widehat{K}_h = 0$$

Maintenant, tout ϑ qui satisfait (1)' doit également satisfaire (2). Or, la condition (2) doit être satisfaite pour toute matrice Ω strictement positive. Le seul vecteur qui satisfait (2) pour un Ω quelconque est le vecteur $\vartheta = 0$. Il s'en suit alors que la matrice B est de rang complet.

(b) Montrons que la matrice $B_{1'} = \left(\sum_{h \in H} \widehat{K}_h, \Omega \right)$ est de rang L. Supposons le contraire. Alors il existe un vecteur $\vartheta \neq 0 \in R^L$ tel que $\vartheta' B_{1'} = 0$. Construisons alors le vecteur $\vartheta^{*'} = (\vartheta', 0') \in R^{L+(S+1)}$. Ce vecteur annule la matrice B, mais ceci est en contradiction avec la démonstration précédente, puisque la matrice B est de rang maximal. La matrice $B_{1'}$ est alors bien de rang L.

(c) Montrons maintenant que le noyau de $B_{1'}$ est donné par $(\kappa' \widehat{P}', 0')$. Comme la matrice $B_{1'}$ est de rang L, il existe $S+1$ combinaisons linéaires de ses colonnes, c'est-à-dire $S+1$ vecteurs qui annulent la matrice $B_{1'}$ par la droite. Par l'additivité des matrices $\widehat{K}_h$, on sait que $\widehat{P}\kappa$ appartient au noyau de $\sum_{h \in H} \widehat{K}_h$. En construisant les vecteur $\delta^{*'} = (\kappa' \widehat{P}', 0')$, on connaît alors $S+1$ vecteurs linéairement indépendants qui annulent $B_{1'}$ par la droite. Il s'en suit alors que $(\kappa' \widehat{P}', 0')$ représente le noyau de la matrice $B_{1'}$, et par là que $\kappa' \widehat{P}'$ représente le noyau de $\sum_{h \in H} \widehat{K}_h$.

Pour la seconde partie du lemme, on détermine l'inverse au sens classique de la matrice B. L'inverse de B satisfait,

$$\begin{pmatrix} \sum_{h \in H} \widehat{K}_h & \Omega \\ \Omega' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & G \\ F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_L & 0 \\ 0 & I_{S+1} \end{pmatrix}$$

Ce système implique les équations suivantes,

(1) $\sum_{h\in H} \widehat{K}_h H + \Omega F = I_L$

(2) $\sum_{h\in H} \widehat{K}_h G + \Omega E = 0$

(3) $\Omega' H = 0$

(4) $\Omega' G = I_{S+1}$

Par (3), on a directement la première propriété du lemme. Pour la seconde propriété, on prémultiplie (1) par $\widehat{P}'$. Par l'additivité des matrices $\widehat{K}_h$, on a $\widehat{P}'\Omega F = \widehat{P}'$. On en tire alors $F = \overset{\vee}{m}\ \widehat{P}'$. La condition (1) devient $\sum_{h\in H} \widehat{K}_h H = I_L - \Omega\ \overset{\vee}{m}\ \widehat{P}'$, ce qui n'est autre que la seconde propriété. Pour la troisième propriété, il suffit prémultiplier la matrice B par son inverse classique au lieu de la postmultiplier par celle-ci. Ceci complète la preuve du lemme (B).

On peut passer maintenant à la résolution du modèle. Considérons la condition sur les prix conditionnels (0.12), et faisons la somme sur les individus. Par la condition d'optimalité sur le choix de $\widehat{P}$, on a

$$\sigma \sum_{h\in H} \widehat{K}_h = - \sum_{h\in H} \theta'_h X'_h$$

Par le lemme (B), en postmultipliant cette équation par l'inverse généralisée réflexive de la matrice agrégée de Slutsky H, on a

$$\sigma' - \lambda' \widehat{P}' = - \sum_{h\in H} \theta'_h X'_h H \tag{0.17}$$

En substituant cette expression dans la condition sur les revenus, on en tire l'écart sur les prix de Arrow individuels,

$$\mu'_h - \mu' = \frac{1}{\lambda_0}\left(\theta'_h - \sum_{h\in H} \theta'_h X'_h H C_h\right) \tag{0.18}$$

3.2.2 Interprétation des conditions de premier ordre

On commence par donner une interprétation des multiplicateurs ξ_h' associés à la contrainte d'unicité des prix. On interprète ensuite la condition d'optimalité sur les revenus et par la propriété d'homogénéité, celle sur le niveau des prix. En combinant ces conditions, on discute de la condition d'optimalité sur les prix relatifs.

a) L'optimalité des prix Arrow-Debreu implicites

Commençons par l'interprétation des multiplicateurs ξ_h. Par la condition sur les prix Arrow-Debreu, ces multiplicateurs apparaissent directement comme le coût social de l'effet prix compensé au sens contingent,

$$\sigma'\overline{K}_h = -\xi_h'$$

Ce coût est maintenant totalement individualisé alors que dans le modèle de la section 1, il était proportionnel entre tous les individus. Le Distributeur pourrait réduire la dépense de l'individu h en modifiant l'allocation des prix Arrow-Debreu. Le cadre institutionnel ne lui permet pas cependant d'effectuer ces ajustements, et tout se passe comme si le Distributeur était forcé de prélever un système de taxes et de subventions par rapport à une économie fictive dans laquelle il pourrait organiser des marchés pour les 'biens contingents'. Ce système de taxes implicites sur les prix Arrow-Debreu s'obtient en combinant (0.17) et (0.18),

$$p_h' - \pi' = \frac{1}{\lambda_0}\left(\theta_h'\widehat{P}' + \sum_{h\in H}\theta_h' X_h' H(I_L - C_h\widehat{P}')\right)$$

Les multiplicateurs ξ_h peuvent se voir comme des 'shadow quantities', c'est-à-dire comme des transferts virtuels de quantités. Si les conditions de premier ordre dans l'espace des quantités s'interprètent en terme d'écarts sur les dispositions marginales à payer, il est naturel que dans l'espace des prix et des revenus ces conditions s'interprètent comme des écarts sur des quantités de biens. Considérons une variation du prix du bien k dans l'état s compensée au sens contingent. Cette variation de prix entraîne une variation de quantité $dx_h^c = (\partial x_h/\partial \widehat{p}_{ks})d\widehat{p}_{ks}^c$, qui engendre à son tour une variation de coût social $\pi' dx_h^c$. Le multiplicateur $\frac{1}{\lambda_0}\xi_{hks}$ représente le transfert du bien k dans l'état s qui engendre le même coût, $\pi' dx_h^c = -\frac{1}{\lambda_0}\xi_{hks} d\widehat{p}_{ks}$. Considérons la condition agrégée,

$$\sigma' \sum_{h\in H} \overline{K}_h = \sum_{h\in H} \xi_h = 0$$

Ce que le Distributeur ne peut réaliser au niveau individuel, il le réalise à nouveau au niveau agrégé en effectuant un arbitrage entre les différentes distorsions qu'il est forcé de tolérer au niveau individuel. Du fait que les multiplicateurs ξ_h somment à zéro, on peut les interpréter dès lors comme des redistributions de quantités fictives à un facteur de conversion près.

b) L'optimalité inter-états

L'interprétation des multiplicateurs θ_h n'est pas différente de celle du modèle précédent. Par la condition sur les revenus, on a

$$\pi' C_h = -\frac{1}{\lambda_0}\theta_h'$$

Les multiplicateurs θ_h apparaîssent comme le coût social de la compensation de l'effet revenus. Ils donnent une information sur la direction dans laquelle les revenus devraient être variés pour réduire la dépense de l'individu évaluée aux prix sociaux. Si l'allocation des revenus n'est pas optimale, tout se passe comme si le Distributeur était forcé d'utiliser un certain pouvoir de monopole par rapport à une situation dans laquelle il pourrait allouer les revenus par un système de marchés. Ce système de taxes implicites sur les 'prix' des revenus est donné par (0.18),

$$\mu_h' - \mu' = \frac{1}{\lambda_0}\left(\theta_h' - \sum_{h\in H}\theta_h' X_h' HC_h\right)$$

L'allocation des actifs quant à elle satisfait toujours le principe de tarification au coût marginal puisque l'allocation des actifs existants n'est pas contrainte. Aussi longtemps que le coût marginal de la dernière unité d'actif allouée à chaque individu reste individualisé, les dispositions marginales à payer pour les actifs le seront également. En substituant l'expression ci-dessus dans la condition sur les actifs, on obtient le système de taxes implicites sur les prix des actifs. On en conclut alors immédiatement que l'équilibre concurrentiel n'est pas en général un optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis.

On peut exprimer les rentes de monopole associées à l'allocation des revenus à partir de la condition d'optimalité sur les prix conditionnels. En postmultipliant (0.12) par $\widehat{P}$, et en se servant de la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, on a

$$\xi_h'\widehat{P} = -\theta_h'\widehat{R}_h \tag{0.19}$$

Le terme de droite représente à nouveau les rentes de monopoles associées à l'allocation des revenus. Remarquons que cette condition n'est que l'extension à l'ensemble des biens du modèle de la section 1 dans le cas particuliers où l'unité de compte est un bien numéraire ($\omega_s' = (0, 0.., 1, 0, ..0)$ pour tout s appartenant à S)[9]. Au vue du modèle de la section 1, il est dès lors naturel d'interpréter le terme de gauche

[9] Il est important de noter la relation d'implication qui existe entre les multiplicateurs θ_h et ξ_h. Si un $\xi_h = 0$ implique $\theta_h = 0$, la réciproque n'est pas vraie.

comme les rentes de monopole associées au niveau des prix[10]. En sommant (0.19) sur les individus et en se servant de la condition d'optimalité sur les prix conditionnels, on retrouve la condition d'équilibre sur les rentes de monopole agrégées,

$$\sum_{h\in H} \theta'_h \widehat{R}'_h = \sum_{h\in H} \xi'_h \widehat{P} = 0$$

c) L'optimalité intra état

Considérons maintenant la condition sur les prix conditionnels,

$$\pi' \widehat{K}_h = -\frac{1}{\lambda_0}(\ \theta'_h X'_h + \xi'_h)$$

A l'optimum contraint, le coût social de la compensation de l'effet prix à la Slutsky n'est pas nul, et les prix relatifs sont utilisés à des fins d'optimalité inter états. Bien que le système de prix conditionnels soit unique, on peut néanmoins analyser son comportement par rapport aux prix officiels π. Dans la résolution du modèle, on s'est placé au niveau agrégé pour se débarrasser des multiplicateurs ξ_h. On peut obtenir une interprétation plus fine en résolvant le modèle en restant au niveau individuel. Postmultiplions la condition ci-dessus par $T' = (I_L - \widehat{P}\ \check{m}\ \Omega')$. En se servant du lemme (A), on a

$$\left(\pi' + \frac{1}{\lambda_0}(\ \theta'_h X'_h + \xi'_h)\frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h}\right) \widehat{K}_h = 0$$

Comme le noyau de $\widehat{K}_h$ est donné par $\gamma_h \widehat{P}'$, on obtient une expression pour σ terme individuels. Si on postmultiplie par T pour éliminer les multiplicateurs γ_h, on a

[10]On pourrait également interpréter (0.19) de la manière suivante. Les multiplicateurs ξ_h représentent des transferts de biens qui permettent de réduire la dépense de l'individu h. La partie gauche de (0.19) nous donne le coût monétaire de ces transferts alors que la partie droite nous donne les transferts de revenus nécessaires pour que ces transferts de biens soient financièrement accessibles aux consommateurs.

$$\sigma' = \lambda' \widehat{P}' - (\theta'_h X'_h + \xi'_h) \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} T \qquad \forall h \in H \tag{0.20}$$

Comme le système de prix conditionnel est unique, le Distributeur ne peut plus réaliser l'unicité des recettes marginales de compromis. Cependant, il réalise maintenant l'unicité des recettes marginales de compromis 'corrigées' par des redistributions fictives de quantités. Cette expression est en quelque sorte la généralisation naturelle du modèle de la section 1. Combinons cette équation avec celle des recettes marginales de compromis exprimées en terme agrégés (0.17),

$$(\theta'_h X'_h + \xi'_h) \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} T = \sum_{h \in H} \theta'_h X'_h H$$

Non seulement les recette marginales de compromis "corrigées" sont identiques entre tous les individus, mais elles sont aussi égales aux recettes marginales de compromis du marché. En effet, la matrice H peut se voir comme l'effet sur le système de prix à la consommation d'une variation de consommation agrégée compensée pour chaque individu. En posant $dx^c = \sum_{h \in H} (I_L - \Omega \overset{\vee}{m} \widehat{P}')dx_h$, on peut écrire, $H = \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x^{c\prime}} |_{dm=0}$. Ainsi, le terme de droite représente le pouvoir de monopole de compromis au niveau du marché. Par la condition sur les rentes de monopoles associées aux instruments inter états (0.19), on peut éliminer les multiplicateurs θ_h du coté gauche. En posant $\sum_{h \in H} \theta'_h X'_h = \widetilde{X}$, on a

$$\xi'_h \left(I_L - \widehat{P} \overset{\vee}{R}_h X'_h \right) \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} T = \widetilde{X} H \tag{0.21}$$

Les multiplicateurs ξ_h représentent en quelque sorte les transferts fictifs de quantités qui permettent d'égaliser les recettes marginales de compromis individuelles 'corrigées' à la recette marginale de compromis du marché. Pour s'assurer que notre modèle reste cohérent, on peut analyser le cas des marchés complets. Dans ce cas, on retrouve par la condition sur les revenus $\theta_h = 0$ pour tous les individus. En substituant ceci dans le système de taxes, on retrouve l'unicité du système de prix pour les biens ainsi que l'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs. L'équilibre concurrentiel est à nouveau un optimum de premier rang.

3.3 Optimum contraint par l'unicité des prix des actifs

Dans le modèle contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis, l'allocation des biens est contrainte par l'existence d'un système de marchés concurrentiels alors que l'allocation des actifs n'est pas contrainte. Dans cette section on présente un modèle contraint qui peut se voir comme la 'réciproque' du modèle OCGP dans lequel on contraint l'allocation des actifs à ce faire par l'existence d'un système de marchés concurrentiels alors que l'allocation des prix reste individualisée. L'intérêt principal de ce modèle réside dans le fait que l'allocation des prix conditionnels influence maintenant indirectement l'allocation des revenus par son effet sur le portefeuille optimal de chaque agent. Dans la section 3 du chapitre 2, on a présenté un modèle de premier rang lorsque le système d'actifs est incomplet. On a avancé alors que cet optimum ne pouvait pas être implanté par un système de marchés concurrentiels pour les actifs puisque les dispositions marginales à payer pour les actifs restaient individualisées. Le modèle qu'on présente ici permet de s'en convaincre de manière formelle puisque la contrainte sur l'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs est effective.

On impose donc une contrainte d'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs $q_h = \mu_h' Z = q$, alors que l'allocation des prix des biens n'est pas contrainte. On peut écrire cette contrainte de la manière suivante,

$$\mu_h' Q = 0 \qquad avec \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -q_1' \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \end{pmatrix} \tag{0.22}$$

Ecrite de cette manière, la contrainte d'unicité des prix des actifs apparaît comme la réciproque de la condition de non-arbitrage imposée généralement sur la matrice des rendements Q pour assurer l'existence d'un équilibre concurrentiel. La matrice des rendements Q satisfait la condition de non arbitrage s'il n'existe pas de portefeuille d'actifs $a \in \Re^{J+1}$ tel que $a'Q \geq 0$. Par le lemme de Farkas, cette condition est satisfaite si et seulement si il existe un vecteur μ strictement positif qui satisfait $Q\mu = 0$. Remarquons que la condition (0.22) est satisfaite si et seulement si la condition $Q\lambda_h = 0$ l'est également. Cette contrainte étant plus facile à manier, c'est elle que l'on va utiliser dans le problème du Distributeur.

3.3.1 Analyse locale des prix de Arrow

Avant d'écrire le problème du Distributeur, il faut analyser le comportement local des prix de Arrow. Rappelons que les prix de Arrow individuels sont définis comme suit,

$$\mu_h = \frac{\lambda_h}{\lambda_{h0}}$$

En prenant la différentielle de cette équation, on obtient,

$$d\mu_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu_{h1} & I_S \end{pmatrix} \frac{d\lambda_h}{\lambda_{h0}} \tag{0.23}$$

Par les conditions de premier ordre du problème du consommateur, l'utilité marginale des revenus est donnée par

$$\lambda_h = \overset{\vee}{m} \, \Omega' D u_h$$

Une variation de prix affecte l'utilité marginale des revenus de deux manières: par son effet sur la consommation, et par son effet sur la grandeur de l'unité de compte (m_h). La dérivée totale de l'utilité marginale des revenus s'écrit comme suit,

$$d\lambda_h = \left(\frac{\partial \lambda_h}{\partial x'_h} \frac{\partial x_h}{\partial \widehat{p}'_h} - \widehat{\lambda}_h \overset{\vee}{m} \Omega' \right) d\widehat{p}_h + \frac{\partial \lambda_h}{\partial R'_h} dR_h \tag{0.24}$$

où on a substitué $\frac{\partial \lambda_h}{\partial m'} = -\widehat{\lambda}_h \overset{\vee}{m}$. En conjuguant (0.23) et (0.24), on obtient la différentielle des prix de Arrow par rapport aux prix et aux revenus. Considérons maintenant la dérivée partielle des prix de Arrow par rapport aux revenus. En compensant l'effet revenus, on peut faire apparaître la matrice d'Antonelli A_h,

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{h11} \end{pmatrix} = \lambda_{h0} \frac{\partial \mu_h}{\partial R'_h} \begin{pmatrix} 0 & -\mu'_{h1} \\ 0 & I_S \end{pmatrix} \tag{0.25}$$

La matrice A_{h11} possède les propriétés suivantes: elle est symétrique, définie négative et donc de rang maximal. Remarquons que la matrice Q peut s'exprimer de la manière suivante,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\mu'_{h1} \\ 0 & I_S \end{pmatrix} Z \tag{0.26}$$

Ainsi, lorsqu'on dérivera la condition d'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs, on pourra le faire indifféremment en terme de la dérivée des utilités marginales des revenus ou des prix de Arrow,

$$Q' d\lambda_h = \lambda_{h0} Z' d\mu_h$$

3.3.2 Le problème du Distributeur et sa résolution

Ayant exposé ces préliminaires, on est prêt maintenant à passer au problème du Distributeur. En associant les multiplicateurs ρ_h aux contraintes sur l'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs, le problème du Distributeur se présente comme suit:

$$
\begin{aligned}
Max\ L(\widehat{p}_h, R_h, a_h, q) \quad & = \sum_{h \in H} \alpha_h u_h(x_h(\widehat{p}_h, R_h)) \\
& -\sigma' \sum_{h \in H} (x_h(\widehat{p}_h, R_h) - \overline{\omega}) \\
& - \sum_{h \in H} \theta'_h (R_h - Z a_h) \\
& - \sum_{h \in H} \rho_h Q' \lambda_h
\end{aligned}
$$

Avec les conditions de premier ordre transformées en terme des matrices de compensation,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \widehat{p}'_h} &: \quad \sigma' \widehat{K}_h = -\theta_h X'_h - \rho'_h Q' \left(\frac{\partial \lambda_h}{\partial \widehat{p}'_h} + \frac{\partial \lambda_h}{\partial R'_h} X'_h\right) \\
\frac{\partial L}{\partial R'_h} &: \quad \sigma' C_h = -\theta'_h - \lambda_{h0} \rho'_h Z A_h \\
\frac{\partial L}{\partial a'_h} &: \quad \theta'_h Z = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial q'} &: \quad \sum_{h \in H} \lambda_{h0} \rho_h = 0
\end{aligned}
$$

Pour résoudre le modèle, on peut procéder de manière analogue aux deux modèles précédents. Après avoir obtenu une expression pour les multiplicateurs σ, on obtient l'écart sur les prix de Arrow en substituant cette expression dans la condition sur les revenus. Par la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, on peut résoudre le modèle soit en terme des multiplicateurs θ_h, soit en terme des multiplicateurs ρ_h. Dans ce qui suit on adopte la seconde position. Par la théorie généralisée du consommateur, on a la relation suivante,

$$-\left(\frac{\partial\lambda_h}{\partial\widehat{p}'_h}+\frac{\partial\lambda_h}{\partial R'_h}X'_h\right)=\left(\frac{\partial x_h}{\partial R'_h}\right)^T\Lambda_h \tag{0.27}$$

Pour éliminer les multiplicateurs θ_h, on postmultiplie la condition sur les prix conditionnels par $\widehat{P}_h$. En substituant la relation ci-dessus, et en se servant du fait que $\frac{\partial\lambda_h}{\partial m'_h}=-\widehat{\lambda}_h\overset{\vee}{m}_h$,on obtient

$$\theta'_h\widehat{R}_h=\lambda_{h0}\rho'_hZ'\frac{\partial\mu_h}{\partial m'_h}\widehat{m}_h \tag{0.28}$$

En substituant ceci dans la condition sur les prix conditionnels, on a

$$\sigma'\widehat{K}_h=-\lambda_{h0}\rho'_hZ'\frac{\partial\mu_h}{\partial\widehat{p}'_h}\left(I_L-\widehat{P}_h\overset{\vee}{R}_h X'_h\right) \tag{0.29}$$

Pour simplifier la notation, notons $\frac{\partial\mu_h}{\partial\widehat{p}'^c_h}=\frac{\partial\mu_h}{\partial\widehat{p}'_h}\left(I_L-\widehat{P}_h\overset{\vee}{R}_h X'_h\right)$. Postmultiplions la condition ci-dessus par $(I_L-\widehat{P}_h\overset{\vee}{m}_h\,\Omega')$. Par le lemme (A), et par le noyau de $\widehat{K}_h$, on obtient,

$$\sigma'-\gamma'_h\widehat{P}'_h=-\lambda_{h0}\rho'_hZ'\frac{\partial\mu_h}{\partial\widehat{p}'^c_h}\frac{\partial\widehat{p}_h}{\partial x'_h}$$

Postmultiplions par T_h pour éliminer les multiplicateurs γ_h,

$$\sigma'-\lambda'\widehat{P}'_h=-\lambda_{h0}\rho'_hZ'\frac{\partial\mu_h}{\partial\widehat{p}'^c_h}\frac{\partial\widehat{p}_h}{\partial x'_h}T_h \tag{0.30}$$

En substituant cette expression dans la condition sur les revenus, on obtient l'écart sur les prix de Arrow,

$$\mu'_h-\mu'=\lambda_{h0}\rho'_hZ'\left(A_h+\frac{\partial\mu_h}{\partial m'_h}\widehat{m}_h\overset{\vee}{R}_h-\frac{\partial\mu_h}{\partial\widehat{p}'^c_h}\frac{\partial\widehat{p}_h}{\partial x'_h}T_hC_h\right) \tag{0.31}$$

3.3.3 Interprétation des conditions de premier ordre

On commence par isoler les multiplicateurs ρ_h pour leur donner une interprétation à partir de la condition sur les actifs. On peut interpréter ainsi les multiplicateurs θ_h à partir de la condition sur les revenus. Ayant parlé des deux multiplicateurs, on passe à la condition sur les prix. On regarde d'abord les prix conditionnels puis on passe aux prix Arrow-Debreu implicites.

a) Les conditions d'optimalité inter états

La condition sur les actifs

Bien que les dispositions marginales à payer pour les actifs soient uniques, cela ne signifie pas pour autant que l'allocation des actifs satisfait le principe de tarification au coût marginal. En combinant la condition sur les revenus avec celle sur les actifs, on a

$$\sigma' C_h Z = -\lambda_{h0} \rho_h' Z' A_h Z$$

Remarquons que par la forme particulière des matrices C_h et A_h, cette équation peut s'écrire sous la forme,

$$(0, \sigma' C_{h1} Z_1) = -\left(0, \lambda_{h0} \rho_{h1}' Z_1' A_{h1} Z_1\right)$$

En éliminant la première colonne de zéros et en inversant la matrice de droite, on obtient une expression pour les multiplicateurs ρ_h,

$$\sigma' C_{h1} Z_1 (Z_1' A_{h1} Z_1)^{-1} = -\lambda_{h0} \rho_{h1}' \tag{0.32}$$

Les multiplicateurs ρ_{h1} s'interprètent comme le coût social de la compensation de l'effet revenus engendré par une variation infinitésimale du prix des actifs. Il serait bien aisé d'interpréter la matrice $(Z_1' A_{h1} Z_1)^{-1}$ comme la matrice des dérivées partielles de la demande d'actifs par rapport aux prix des actifs, $\frac{\partial a_{h1}}{\partial q_1'}$. Par Allard-Bronsard-Gouriéroux (1998), on sait que cette expression représente effectivement la demande compensée d'actifs à la Slutsky. Pour un dq_1 donné, on a

$$\sigma' C_{h1} Z_1 \frac{\partial a_{h1}}{\partial q_1^{c'}} dq_1 = \sigma' C_{h1} dR_{h1} = -\lambda_{h0} \rho_{h1}' dq_1$$

Une variation du prix des actifs engendre une réallocation du portefeuille optimal $da_h = \frac{\partial a_{h1}}{\partial q_1^{c'}} dq_1$, et par là une réallocation des revenus $dR_h = Z_1 da_h$. Le terme de gauche représente le coût social de la compensation de cet effet revenus, qui est résumé par $\rho_h dq$. En faisant la somme sur les individus et en se servant de la condition d'optimalité sur le prix des actifs, on a

$$\sigma' \sum_{h \in H} C_{h1} Z_1 (Z_1' A_{h1} Z_1)^{-1} = \sum_{h \in H} \lambda_{h0} \rho_{h1}' = 0 \tag{0.33}$$

Ce que le Distributeur ne peut réaliser au niveau individuel il le réalise une nouvelle fois au niveau agrégé. A l'optimum contraint, il n'est plus possible de réduire le coût social de l'allocation agrégée par une modification du prix des actifs. Comme on le verra plus loin, de manière analogue au modèle précédent, dans lequel on a interprété les multiplicateurs ξ_h comme des redistributions fictives de quantité de biens à une dimension près, on peut interpréter $\frac{\lambda_{h0}}{\lambda_0} \rho_h$ comme des redistributions fictives d'actifs. La condition ci-dessus va en effet dans ce sens puisque la somme des redistributions d'actifs est nulle. On peut décomposer le vecteur $\sigma' C_{h1}$ pour faire apparaître l'écart entre le prix des actifs et leur coût marginal [11],

[11] Rappelons ici que $v_h = \frac{\sigma' \partial x / \partial R'}{\sigma' \partial x / \partial R_0}$ représente le taux marginal de transformation du revenu qui laisse le coût social de l'allocation de monsieur h inchangé.

$$q_1 - v'_{h1} Z_1 = -\lambda_{h0} \rho'_{h1} Z'_1 A_{h1} Z_1$$

Bien que tous les individus aient la même disposition marginale à payer pour les actifs, l'allocation de certains actifs est subventionnée par la société, alors que celle d'autres actifs est taxée. Lorsque $q_j > v'_h z_j$ pour un actif j quelconque, la dernière unité d'actif j allouée à l'individu h lui 'rapporte plus d'utilité' qu'elle ne coûte à la société. La quantité d'actif j allouée à l'individu h est alors 'rationnée' en quelque sorte par rapport à la quantité optimale.

La condition sur l'allocation des revenus

Rappelons que la condition sur l'allocation des revenus est une condition implicite, puisque le Distributeur n'alloue pas directement les revenus, mais qu'il le fait par l'intermédiaire des actifs. Cette condition doit s'interpréter par rapport à une économie fictive dans laquelle le Distributeur pourrait allouer directement les revenus. Ceci étant dit, considérons la condition sur l'allocation des revenus,

$$\sigma' C_h = -\theta'_h - \lambda_{h0} \rho'_h Z' A_h$$

Les multiplicateurs θ_h n'apparaîssent plus directement comme le coût social de la compensation de l'effet revenus. En substituant l'expression de ρ_h trouvée en (0.32), on obtient

$$\sigma' C_h \left(I_L - Q_1 (Z'_1 A_{h1} Z_1)^{-1} Q'_1 A_h \right) = -\theta'_h$$

ou de manière plus explicite,

$$\sigma' C_h \left(I_L - \frac{\partial R_h}{\partial a'_h} \frac{\partial a_h}{\partial q'_h} \frac{\partial q_h}{\partial \mu'_h} \frac{\partial \mu_h}{\partial R'^c_h} \right) = -\theta'_h \tag{0.34}$$

Une variation de revenu a maintenant un effet direct et un effet indirect. L'effet indirect provient de la réallocation de portefeuille qui est associée à toute variation de revenu implicite. Les multiplicateurs θ_h apparaîssent ainsi comme le coût social de l'effet revenus *net* compensé. Au coût social de la compensation de l'effet revenu net, on peut associer un système de taxes implicites sur les prix de Arrow. Ce système de taxes est donné la condition (0.31) de la résolution du modèle.

Les rentes de monopoles

Par la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, en postmultipliant la condition sur les prix conditionnels par $\widehat{P}_h$, on a

$$\theta_h' \widehat{R}_h = \lambda_{h0} \rho_h' Z' \frac{\partial \mu_h}{\partial m_h'} \widehat{m}_h$$

Cette expression est analogue aux expressions trouvées dans les deux modèles précédents. Le terme de gauche représente les rentes de monopole associées à l'allocation des revenus, alors que le terme de droite représente les rentes de monopoles associées au niveau des prix. Bien que le niveau des prix m_h ne soit pas directement contraint, il l'est indirectement par la contrainte d'unicité des prix des actifs[12]. A l'optimum de second rang, les rentes associées à l'allocation des revenus sont égales aux rentes associées au niveau des prix.

b) L'optimalité intra-état

Considérons la condition sur les prix conditionnels exprimée en fonction des multiplicateurs ${\rho_h}^{13}$,

[12] Notons l'analogie avec le modèle contraint par l'unicité des normalisations, $\theta_h \widehat{R}_h = -\delta_h \widehat{m}$.

[13] Notons qu'il ne faut pas confondre la matrice $\frac{\partial \mu}{\partial p}(I - \widehat{P} \overset{\vee}{R} X')$ avec la matrice de l'effet prix compensé $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} + \frac{\partial \mu}{\partial R} X'\right)$. En effet, on peut exprimer cette dernière d'une façon alternative, $\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p}(I - \widehat{P} \overset{\vee}{R} X') + \frac{\partial \mu}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial p}$. En comparant ces deux matrices on s'aperçoit qu'elles ne sont pas les mêmes.

$$\sigma'\widehat{K}_h = -\lambda_{h0}\rho_h' Z' \frac{\partial \mu_h}{\partial \widehat{p}_h'} \left(I_L - \widehat{P}_h \overset{\vee}{R}_h X_h' \right)$$

Bien que l'allocation des prix conditionnels ne soit pas directement contrainte, le coût social de la compensation à la Slutsky n'est pas nul. Ceci s'explique par le fait que l'allocation des prix relatifs est indirectement contrainte par la condition d'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs. Remarquons que par la forme particulière de Z, ρ_{h0} n'intervient que dans la première colonne de $\rho_h' Z'$. De plus, comme $\mu_{h0} = 1$ par définition, la première ligne de la matrice $\frac{\partial \mu_h}{\partial \widehat{p}_h'}$ est nulle. En combinant ces deux remarques, on a la relation suivante,

$$\rho_h' Z' \frac{\partial \mu_h}{\partial (.)} = \rho_{h1}' Z_1' \frac{\partial \mu_{h1}}{\partial (.)}$$

En substituant l'expression des multiplicateurs ρ_{h_1} trouvée en (0.32), dans la condition sur les prix (0.29) on peut représenter cette condition de manière plus explicite,

$$\sigma' \left(\frac{\partial x_h}{\partial \widehat{p}_h'} - C_{h1} Z_1 (Z_1' A_{h1} Z_1)^{-1} Z' \frac{\partial \mu_h}{\partial \widehat{p}_h'} \right) \left(I_L - \widehat{P}_h \overset{\vee}{R}_h X_h' \right) = 0 \qquad (0.35)$$

Une variation de prix qui laisse le coût de la vie de l'individu inchangé affecte maintenant son revenu par l'intermédiaire de la réallocation de son portefeuille d'actifs. Pour une variation de prix donnée, on a

$$\sigma' \frac{\partial x_h}{\partial \widehat{p}_h'} d\widehat{p}^c = \sigma' C_{h1} \frac{\partial R_h}{\partial a_h'} \frac{\partial a_h}{\partial q'} \frac{\partial q}{\partial \mu_h'} \frac{\partial \mu_h}{\partial \widehat{p}_h'} d\widehat{p}^c = C_{h1} \frac{\partial R_h}{\partial \widehat{p}_h'} d\widehat{p}^c$$

Considérons le terme de droite. Une variation de prix compensée induit une variation des prix de Arrow individuels $\frac{\partial \mu_h}{\partial \widehat{p}_h'} d\widehat{p}^c$ qui engendre à son tour une variation des dispositions marginales à payer pour les actifs, $dq_h = Z_1' d\mu_h$. La demande 'implicite' d'actifs est modifiée $da_h = (Z_1' A_{h1} Z_1)^{-1} dq_h$, ce qui donne une variation de revenu $dR_h = Z_1 da_h$. Du coté droit, on a le coût social de la compensation d'une telle variation de revenu alors que du coté gauche on a le coût social d'une compensation de l'effet-prix à la Slutsky. Ainsi, la condition (0.35) apparaît comme une condition d'arbitrage entre ces deux distorsions.

Considérons maintenant l'expression des multiplicateurs σ (0.30). Si on substitue (0.27) pour faire apparaître la transposée de l'effet revenus, et que l'on réintroduit les multiplicateurs θ_h, on obtient

$$\sigma' - \lambda' \widehat{P}'_h = - \left(\theta'_h X'_h - \lambda_{h0} \rho'_h Z' \left(\frac{\partial x_h}{\partial R'_h} \right)^T \Lambda_h \right) \frac{\partial \widehat{p}_h}{\partial x'_h} T_h \tag{0.36}$$

Le Distributeur agit à nouveau comme un monopoleur de compromis qui n'utilise pas pleinement son pouvoir de monopole. A l'optimum contraint, il parvient à égaliser les recettes marginales de compromis 'corrigées' par des redistributions fictives de quantité. Ce résultat est analogue au modèle précédent, à la différence que les redistributions de quantité fictives sont maintenant engendrées par des redistributions fictives de quantité d'actifs. En effet, considérons la matrice $Z' \left(\frac{\partial x_h}{\partial R'_h} \right)^T$. Cette matrice de dimension JxL donne la variation de consommation de chaque bien induite par une unité supplémentaire de chacun des actifs. Il est alors naturel de considérer ρ_h comme une variation d'actifs puisque le second terme de droite apparaît ainsi comme une redistribution fictive de quantité induite par une redistribution fictive d'actifs. De manière analogue au modèle OCGP, on peut considérer les multiplicateurs ρ_h comme les réallocations fictives d'actifs qui permettent au Distributeur d'égaliser les recettes marginales de compromis. Notons en terminant que la condition ci-dessus définit bien entendu le système de taxes individuelles sur les prix conditionnels. En combinant cette condition avec la condition sur les écarts entre les prix de Arrow individuels, on obtient la condition sur les prix Arrow-Debreu implicites.

Le cas des marchés complets

Pour s'assurer de la cohérence de notre modèle, on considère le cas des marchés complets. Lorsque les marchés sont complets, la condition d'unicité des prix des actifs implique l'unicité des prix de Arrow, et on obtient directement $\theta_h = 0$ par la condition sur les actifs. Bien que le système de taxes ne soit pas exprimé en fonction des multiplicateurs θ_h, on peut se servir de la condition sur les rentes de monopoles associées aux distorsions inter états pour montrer que les multiplicateurs ρ_h sont nuls. En substituant $\theta_h = 0$ dans la condition sur les rentes (0.28), on a $\rho_h' Q' = 0$. Par la forme particulière de Q, cette condition implique $\rho_{h1}' Z_1' = 0$. Comme la matrice des rendements Z_1 est de rang complet, on a tout de suite $\rho_{h1}' = 0$. Le système de taxes est nul, et on obtient une allocation de premier rang implantable par un système de marchés concurrentiels.

CHAPITRE 4

Politique monétaire et structure optimale des rendements

Introduction

Lorsque les rendements des actifs sont exprimés en unité de compte, l'incomplétude du système d'actifs ne pose pas de problème d'existence de l'équilibre (Werner 1985). En revanche, des problèmes d'indétermination réelle de l'équilibre surviennent dans les économies d'échange lorsque le système d'actifs est incomplet (Cass 1985). Ces problèmes d'indétermination proviennent essentiellement du fait que le niveau des prix n'est pas déterminé dans le modèle à cause des lois de Walras, alors qu'il affecte les ensembles de budget financièrement accessibles aux consommateurs par son effet sur le pouvoir d'achat des actifs.

En introduisant la monnaie de manière explicite dans le modèle, Magill et Quinzii (1992) ré interprètent le problème d'indétermination réelle de l'équilibre en terme de politique monétaire. Ils proposent un modèle d'échange à deux périodes dans lequel la monnaie joue son rôle de moyen d'échange et possiblement celui de réserve de pouvoir d'achat, en introduisant une contrainte de 'cash in advance'. Chaque période est subdivisée en trois sous-périodes. Dans un premier temps, les individus sont contraints de vendre leur dotation au planificateur central. Une fois qu'ils ont monétisés leurs dotations, ils organisent eux-mêmes des marchés pour les actifs existants afin de réallouer leurs revenus conditionnels. Dans la dernière phase ils décident de la répartition de leur revenu net de première pédriode entre consommation et épargne monétaire. Dans la seconde période, les individus commencent par monétiser leur dotations. Ils honorent alors leurs engagements pris sur les marchés financiers, et allouent enfin leur revenu net à la consommation des biens. La quantité totale de monnaie injectée dans l'économie à chaque période détermine le niveau des prix, et l'équilibre est bien déterminé.

Les auteurs considèrent deux types d'équilibre monétaire, les équilibres monétaires dans lesquels la monnaie joue un rôle de moyen d'échange uniquement (l'épargne monétaire est nulle[1]), et celui où elle a également un rôle de réserve de pouvoir d'achat. Comme leur modèle possède au moins un degré d'homogénéité, ils se concentrent sur des vecteurs de politique monétaire normalisés. Dans le cas où la monnaie a uniquement une fonction de moyen d'échange, ils établissent la neutralité de la monnaie lorsque le système d'actif est complet, et l'unicité locale de l'équilibre monétaire lorsque les marchés sont incomplets. Dans le cas où la monnaie a également une fonction de réserve de pouvoir d'achat, ils établissent la non neutralité de la politique monétaire même dans le cas où le système d'actifs est complet. Enfin, Magill et Quinzii (1996) s'intéressent à la politique monétaire optimale dans le cas particuliers où il n'existe qu'un bien. Dans ce cas cependant, ils montrent que le modèle est trop simple pour bien rendre compte du rôle de moyen d'échange joué par la monnaie, puisque toute politique monétaire optimale implique une quantité infinie de monnaie dans au moins un état du monde.

Dans ce chapitre on interprète la normalisation du système de prix comme un

[1] En introduisant un actif dont le rendement est constant dans tous les états du monde, et en se limitant aux cas où le taux d'intéret qui émane de cet actif est positif, il n'est jamais optimal pour les agents de détenir de l'épargne sous forme de monnaie, et la monnaie ne joue que son rôle de moyen d'échange.

instrument de politique monétaire dans la lignée de Magill et Quinzii. Notre modèle se distingue de celui de ces auteurs sur au moins deux points. Premièrement, on ne considère pas un modèle d'équilibre concurrentiel, mais on se place dans le cadre d'un modèle contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis[2]. Deuxièmement, comme on se place dans une économie de Distribution, la quantité totale d'actifs mise en circulation n'est pas nulle comme dans les économies d'échange, et c'est elle qui va déterminer le niveau des prix. Les instruments de politique monétaire qu'on considère sont alors eux-mêmes soumis aux contraintes provenant de l'incomplétude du système d'actifs.

Dans la première section, on s'intéresse aux effets de la politique monétaire dans le cadre de l'OCGP, et on met en évidence la relation qui existe entre la nature de ces effets (réelle ou nominale) et la structure des rendements des actifs. Dans la deuxième section, on aborde le problème original de la structure de rendement optimale. Dans la littérature, on considère généralement que la structure des rendements est une donnée exogène du problème lorsqu'on se place dans des économies sans production. On obtient ainsi des résultats génériques dans les rendements, mais ces résultats ne permettent pas de comparer différentes structures de rendements. On présente alors un résultat intéressant; la structure optimale des rendements est telle que la politique monétaire n'a pas d'effets réels.

4.1 La politique monétaire

On a supposé dans notre modèle que le Distributeur prend la matrice des rendements comme une donnée exogène mais qu'il a le choix de la quantité totale de chaque actif qu'il désire allouer aux individus. Si on considère un actif comme

[2] On ne peut pas aborder le problème de la politique monétaire optimale dans les autres modèles puisque l'équation quantitative de la monnaie n'est vérifiée que dans le cas d'un système de prix unique.

une technologie de transferts des unités de compte entre les différents états du monde, cette hypothèse revient à supposer que la technologie est donnée et que son coût d'opération est nul. L'émission d'un actif ou d'un nombre quelconque d'actifs n'engendre aucun coût, et on peut simplement laisser au Distributeur le choix de la quantité totale d'actif qu'il va émettre. Comme la matrice des rendements est exprimée en unité de compte, le Distributeur doit définir l'unité de compte qui sera en vigueur dans son système. On a déjà vu dans le chapitre 2 consacré à l'optimum de premier rang, que lorsque les prix conditionnels sont uniques, les lois de Walras sont remplacées dans une économie de Distribution par des équations quantitatives qui relient le niveau général des prix à la quantité totale d'actifs émise par le Distributeur,

$$\widehat{P}' \sum_{h \in H} X_h = ZA = m$$

Si le Distributeur choisit un numéraire comme unité de compte, cela revient à normaliser directement les prix conditionnels, et la quantité totale d'actifs mise en circulation est déterminée alors par le choix du numéraire. Lorsque le système d'actifs est incomplet, il n'existe pas toujours un vecteur de quantité totale d'actifs A qui permettent de 'réaliser' cette normalisation. En revanche, l'introduction d'une monnaie comme unité de compte revient à normaliser les prix conditionnels par l'intermédiaire de la quantité totale d'actifs émise par le Distributeur.

Tant que le niveau des prix conditionnels n'a pas d'effets réels, le choix de l'unité de compte n'a pas d'importance. Mais lorsque les taux d'inflation conditionnels ont un effet réel sur l'allocation des biens, l'introduction de la monnaie comme unité de compte peut se voir comme un instrument supplémentaire à la disposition du Distributeur. Cet instrument de politique monétaire est un instrument indirect puisque le Distributeur ne contrôle le niveau des prix conditionnels que par l'intermédiaire de la matrice des rendements Z. Comme on va le voir dans ce qui suit, il y a quelque chose de paradoxal ici puisque lorsque le Distributeur a un contrôle total sur le niveau des prix par l'intermédiaire des actifs, la politique monétaire n'a aucun effet réel. Ce n'est que dans les cas où le Distributeur ne contrôle que partiellement le niveau des prix que la politique monétaire à des effets réels. Dans cette section, on s'interroge sur les effets réels de la politique monétaire. En introduisant une contrainte sur la quantité totale d'actifs dont dispose le Distributeur, on analyse les cas pour lesquels les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes sont nuls ou non. Ajoutons donc la contrainte suivante au modèle d'OCGP,

$$-\eta'(\sum_{h\in H} a_h - \overline{A}) \tag{0.1}$$

La condition de premier ordre sur l'allocation des actifs est modifiée comme suit alors que les autres conditions de premier ordre du modèle OCGP restent inchangées,

$$\frac{\partial L}{\partial a_h'} = \theta_h' Z - \eta' = 0 \tag{0.2}$$

Avant d'évaluer les effets de la politique monétaire, remarquons qu'on peut se concentrer sur des vecteurs de quantité totale d'actifs normalisés comme dans le modèle de Magill et Quinzii, puisque le modèle possède toujours au moins un degré d'homogénéité dans le niveau des prix, indépendamment de la structure de la matrice des rendements Z. En effet, en multipliant la quantité totale de chaque actif par une constante v, le niveau des prix est multiplié par la même constante ν dans tous les états du monde. Le Distributeur peut réaliser l'homogénéité des fonctions de demande face à cette variation du niveau des prix en multipliant les portefeuilles individuels par la même constante v. Pour voir ceci de manière formelle, il suffit de montrer que lorsque le Distributeur peut choisir la quantité totale de $J-1$ actifs, alors la quantité totale du dernier actif est sans importance. Supposons que le Distributeur est soumis à une contrainte sur la quantité totale de l'actif 1 uniquement. Dans ce cas, en postmultipliant la condition d'optimalité sur les actifs par le portefeuille de chaque individu, on a

$$\theta'_h Z a_h = \theta'_h R_h = \eta_1 a_{h_1}$$

En faisant la somme sur les individus, et en se servant de la condition sur le coût social agrégé de l'allocation des revenus, on obtient

$$\sum_{h \in H} a_{h1}\eta_1 = A_1\eta_1 = 0$$

Comme A_1 est strictement positif, on en conclut immédiatement que $\eta_1 = 0$, et la contrainte sur la quantité totale d'actif 1 mise en circulation n'a pas d'effets réels. Avant de passer à la proposition de cette section, on définit une notion générale de séparabilité institutionnelle.

Définition 1. *On dira d'une matrice de rendements Z qu'elle est séparable de degré t, si on peut réarranger les états du monde de telle sorte que cette matrice puisse s'écrire sous la forme suivante,*

$$Z = \left[\begin{pmatrix} Z_t \\ 0 \end{pmatrix}, Z_{J-t} \right] \qquad \text{où } Z_t \text{ est une matrice de rang complet}$$

Par les conditions d'optimalité ci-dessus, on a la proposition suivante qui relie la nature des effets de la politique monétaire à la séparabilité institutionnelle,

Proposition 4.1. *Lorsque la structure institutionnelle est séparable de degré t, alors la politique monétaire associée à ces t actifs n'a pas d'effets réels.*

Comme corollaire à cette proposition, on obtient tout de suite les deux résultats suivants:

Corollaire 1. *la politique monétaire n'a pas d'effets réels lorsque les marchés sont complets.*

Corollaire 2. *la politique monétaire associée à un actif de Arrow n'a pas d'effet réel.*

Lorsque les marchés sont complets, l'ensemble des actifs satisfait aux conditions de la proposition, et la politique monétaire n'a pas d'effets réels dans ce cas. Lorsqu'il existe un actif de Arrow, ce dernier satisfait par définition aux conditions de la proposition, et là encore, la politique monétaire associée à cet actif n'a que des effets nominaux. Il s'en suit alors que la quantité totale d'actif zéro émise par le Distributeur, et par là le niveau des prix de première période, est sans effet sur l'allocation optimale. Cette proposition repose sur la relation qui existe entre la structure de la matrice des rendements et les degrés d'homogénéité du modèle. Lorsque la structure institutionnelle est séparable de degré t, elle permet de 'réaliser' t degrés d'homogénéités des fonctions de demande dans le niveau des prix et dans les revenus. Le niveau des prix est alors sans importance dans ces états du monde et la politique monétaire associée à ces actifs n'a que des effets nominaux[3].

Formellement, supposons qu'il existe un sous-ensemble d'actifs $T \subseteq J$ qui satisfait les conditions de la proposition. Ordonnons les actifs de telle sorte que tout actif $j \leq t$ appartienne au sous-ensemble T. On notera $\overline{J}$ le complément du sous-ensemble T. Par la condition de premier ordre sur l'allocation des actifs (0.2), on obtient l'unicité des coûts marginaux sociaux liés à l'allocation des revenus pour les t états du monde,

$$\theta'_{ht} = \eta'_t Z_t^{-1} = \theta'_t$$

Revenons au modèle OCGP maintenant, et considérons la condition agrégée sur les rentes de monopoles associées à l'allocation des revenus, $\sum_{h \in H} \theta'_h \widehat{R}_h = 0$. Si on se

[3]Pour relier cette propositioin au théorème de Géanakoplos et Polémarchakis sur les degrés d'indétermination réelle de l'équilibre, on peut remarquer que lorsque la matrice des rendements est en position générale, elle est séparale de degré 0 pour $J < S$, et séparable de degré S pour $J = S$.

restreint aux t premiers éléments, on obtient par la condition d'unicité des θ'_{ht},

$$\theta'_t \sum_{h \in H} \widehat{R}_{ht} = \theta'_t \widehat{m}_t = 0$$

Comme la matrice $\widehat{m}_t$ est de rang maximal, on a tout de suite $\theta'_t = 0$. Il suffit alors de substituer ce résultat dans la condition sur la quantité totale d'actifs, pour obtenir le résultat souhaité

$$\eta_t = 0 \qquad \text{pour } t = 0, ...j$$

Les multiplicateurs de Lagrange associés aux t instruments de politique monétaire sont nuls, et on en conclut que ces instruments n'ont pas d'effet réel. La condition sur les actifs dont les rendements ne satisfont aux conditions de la proposition devient,

$$q'_{h\overline{J}} - v'_h Z_{\overline{J}} = \eta'_{\overline{J}}$$

A l'optimum contraint, l'allocation des actifs $j > t$ ne satisfait pas le principe de tarification au coût marginal. Cependant, l'écart entre le bénéfice marginal individuel et le coût marginal social lié à l'allocation de ces actifs est le même pour tous les individus. Ceci se comprend aisément puisque si le Distributeur est limité dans la quantité totale d'actifs qu'il peut émettre, il reste libre d'allouer les actifs existants de manière optimale. Ce résultat est analogue au résultat qu'on obtient dans la théorie du consommateur lorsque la condition sur l'utilité marginale du revenu indique qu'à la marge l'individu est indifférent sur l'allocation de sa dernière unité de revenu entre les différents biens. Dans le cas présent, c'est le Distributeur qui est indifférent à la marge sur l'allocation de la dernière unité d'actif j entre tous les individus.

On peut se servir de cette condition pour donner une interprétation de la politique monétaire optimale. Pour que le Distributeur puisse mener une politique monétaire active, il faut qu'il puisse choisir la quantité totale de chaque actif qu'il met en circulation. Si on laisse le Distributeur optimiser sur $\overline{A}$, on obtient bien évidemment,

$$\eta = 0$$

Dès lors que le Distributeur peut allouer librement les actifs existants entre les individus, il le fait de telle sorte que l'écart sur la tarification au coût marginal soit le même pour tous les individus. Si le Distributeur peut mener une politique monétaire active, la politique monétaire optimale est telle que l'écart sur la tarification au coût marginal est nul.

4.2 Structure de rendement optimale

Si certaines structures de rendements permettent au Distributeur de mener une politique monétaire active alors que d'autres ne le permettent pas, on peut se demander quelle serait la structure optimale des rendements pour une quantité donnée d'actifs. En d'autres termes, on aimerait savoir si un Distributeur pouvant optimiser sur la structure des rendements choisirait une structure lui permettant de mener une politique monétaire active ou non. On va chercher à répondre à deux questions. Tout d'abord, il faut se demander si l'optimisation sur les rendements à des effets réels ou non. Dans l'affirmative, on pourra se demander s'il est optimal pour le Distributeur d'émettre des actifs dont les rendements permettent la conduite d'une politique monétaire active ou non.

Revenons au modèle OCGP. Si l'on optimise sur les rendements de l'actif j, les conditions de premier ordre sur les rendements de cet actif sont données par,

$$\sum_{h \in H} \theta'_h a_{hj} = 0$$

Rappelons que lorsque l'on cherche a savoir si la politique monétaire a des effets réels, il suffit d'imposer une contrainte sur la quantité totale de chaque actif mise en circulation. En associant les multiplicateurs η à ces contraintes, les conditions de premier ordre sur l'allocation des actifs deviennent,

$$\theta'_h Z = -\eta'$$

Les autres conditions de premier ordre restent quant à elles inchangées. A l'aide de ces deux conditions, on obtient la proposition suivante:

Proposition 4.2. *Lorsque le Distributeur peut optimiser sur les rendements de $(J-1)$ actifs, les rendements de l'actif J n'ont pas d'effets réels aussi longtemps qu'ils respectent la condition sur le rang de la matrice Z.*

Comme corollaire à cette proposition, lorsqu'il n'existe qu'un seul actif, le choix des rendements de cet actif n'a pas d'effets réels aussi longtemps qu'on choisit des rendements strictement positifs dans tous les états du monde.

On peut interpréter cette proposition de la manière suivante. Dans une économie de Distribution, les actifs satisfont une double fonction. Ils permettent d'abord d'allouer des revenus aux agents puisqu'on a supposé que les rendements des actifs étaient leur seule source de revenu. Une fois que les agents ont un revenu dans chaque état du monde, les actifs supplémentaires permettent de ré allouer ces revenus en fonction des préférences individuelles. Lorsqu'il n'existe qu'un seul actif, le système institutionnel ne permet que l'allocation de la richesse entre les différents individus, mais non sa répartition entre les différents états du monde. Par exemple, si un individu reçoit dix pour cent des actifs en circulation, il recevra un droit sur dix pour cent de la valeur de l'économie dans tous les états du monde. Dans ce cas, le choix des rendements de l'actif unique n'a pas d'effets réels, et on pourra toujours supposer que l'actif existant est un actif certain. Pour la démonstration de cette proposition, on commence tout d'abord par élargir la condition sur l'optimalité des rendements de l'actif j aux actifs $j = 0, 1, ..j, ...J-1$,

$$\sum_{h \in H} \theta'_h a_{hj} = 0 \qquad\qquad j = 0, 1, ..j, ...J-1$$

Revenons maintenant au modèle OCGP, et considérons la condition sur les rentes de monopoles agrégées associées à l'allocation des revenus,

$$\sum_{h \in H} \theta'_h \widehat{R}_h = 0$$

Si on décompose cette condition pour y faire apparaître le portefeuille d'actif de chaque individu, on a

$$\sum_{h \in H} \theta_{hs} \, (\sum_{j \in J} a_{hj} z_{js}) = 0 \qquad \forall s \in S$$

Or, par la condition sur l'optimalité des rendements des $J-1$ premiers actifs, cette condition se réduit à $\sum_{h \in H} \theta_{hs} a_{hJ} z_{Js} = 0 \; \forall s \in S$. En divisant par z_{Js}, on obtient

$$\sum_{h \in H} \theta_{hs} a_{hJ} = 0 \qquad \forall s \in S$$

Mais cette condition n'est autre que la condition d'optimalité sur le choix des rendements de l'actif J. Comme on obtient la condition d'optimalité sur les rendements de l'actif J pour un z_J quelconque qui satisfait la condition sur le rang de la matrice Z, on en conclut que le choix des rendements du dernier actif n'a pas d'effets réels lorsque le Distributeur peut choisir les rendements des $J-1$ actifs restants. En particuliers, si le Distributeur peut optimiser sur les rendements des actifs, il pourra toujours décider d'émettre un actif certain.

On a vu dans la section précédente que certaines structures de rendements permettaient au Distributeur de mener une politique monétaire active avec des effets réels, alors que d'autres structures de rendements ne le permettaient pas. Est-il possible de comparer au sens de Pareto deux structures de rendements qui ont un même rang mais dont l'une permet la conduite d'une politique monétaire avec effets réels alors que l'autre ne la permet pas ? La proposition suivante nous informe sur cette question.

Proposition 4.3. *Si le Distributeur peut optimiser sur les rendements de l'actif j, alors la quantité totale d'actif j mise en circulation n'a pas d'effets réels.*

Cette proposition met en lumière les coûts associés à l'aspect de production jointe lié aux rendements des actifs, qui était responsable des effets réels de la politique monétaire lorsque le système d'actifs est incomplet. Lorsque le système d'actifs est complet, la structure institutionnelle est complètement séparable. Dans ce cas, il est possible pour les agents de se protéger contre toute variation des taux d'inflation conditionnels par une modification de leur portefeuille optimal. Lorsque le système d'actifs est incomplet, ceci n'est vrai que pour les états du monde dans lesquels le système institutionnel permet de retrouver l'homogénéité dans les prix et les revenus. Pour la démonstration de la proposition, on commence par considérer la condition d'optimalité sur l'allocation de l'actif j, lorsque l'on a imposé une contrainte sur la quantité totale d'actif j allouée aux différents individus,

$$\theta'_h z_j = \eta_j \qquad \forall h \in H$$

Postmultiplions par la quantité d'actif j détenue par chaque individu, et faisons la somme sur les individus,

$$\sum_{h \in H} \theta'_h a_{hj} z_j = \eta_j A_j$$

Or, par la condition d'optimalité sur le choix des rendements de l'actif j, on a $\sum_{h \in H} \theta'_h a_{hj} = 0$. En substituant ceci dans la condition précédente, on obtient $\eta_j A_j = 0$. Puisque $A_j > 0$, il s'en suit que $\eta_j = 0$, et la contrainte sur la quantité totale d'actif j

mise en circulation n'est pas effective. On en conclut que les rendements optimaux de l'actif j ne permettent pas au Distributeur de mener une politique monétaire active par l'intermédiaire de cet actif.

Ce résultat est important puisqu'il met en évidence les coûts associés au phénomène de production jointe qui caractérise les rendements des actifs généraux. Lorsque la politique monétaire a des effets réels, les instruments de politique monétaire doivent réellement s'interpréter comme des instruments de second rang puisque si les rendements des actifs existants étaient optimaux, alors la politique monétaire n'aurait pas d'effets réels.

Conclusion

Dans cette thèse, on a présenté une méthodologie pour aborder le problème des actifs financiers incomplets comme un problème de second rang. On peut dire qu'on a étudié les effets d'un système d'actifs incomplets sous différentes hypothèses institutionnelles, mais on peut également dire qu'on a étudié le comportement de l'institution des prix uniques dans le cas particuliers d'un système d'actifs incomplets. Tout au long de la thèse, on a porté une attention particulière à la cohérence de notre démarche, et on s'est efforcé de réconcilier les interprétations de l'espace dual avec celles de l'espace primal.

La théorie généralisée du consommateur présentée dans le chapitre 1 a permis d'introduire de nouveaux effets de substitution qui sont absents de la théorie néo-classique à contrainte budgétaire unique. On a vu dans ce chapitre que le consommateur parvient à relier mentalement une structure institutionnelle totalement séparée par l'intermédiaire de ses prix de Arrow. On a proposé une décomposition originale de l'effet de substitution des prix en un effet de substitution intra état et un effet de substitution inter états, qui est résumé dans une matrice de substitution contingente de l'effet prix.

Dans le second chapitre, on a posé le problème non contraint pour une économie financière, et on a montré que la présence d'un système d'actifs financiers incomplet n'est pas suffisante en soi pour faire dévier l'allocation de l'optimum de premier rang, puisque le Distributeur peut implanter cet optimum à l'aide d'un système de taxes individuelles. Ce résultat est tout à fait particuliers aux économies financières, et il est intéressant puisque l'allocation des actifs ne peut pas être implantée par un système de marchés concurrentiels.

Dans le troisième chapitre, on a abordé le corps de la thèse en présentant trois modèles de second rang auxquels sont associés trois concepts d'optimalité contrainte: l'optimum contraint au sens pur, l'optimum contraint par un système de marchés concurrentiels pour les biens, et l'optimum contraint par un système de marchés concurrentiels pour les actifs. On a montré que dans chacun des cas le Distributeur se comporte comme un monopoleur de compromis, c'est-à-dire comme un monopoleur qui prélève un système de taxes et de subventions en n'utilisant qu'une partie de son pouvoir de monopole. Dans le premier modèle, on a rendu 'réelle' la contrainte sur l'incomplétude du système d'actif en imposant une contrainte (nominale en soi) d'unicité des unités de compte. On parle d'optimum contraint au sens pur[1], puisque cet optimum reflète exclusivement les contraintes imposées par un système d'actifs incomplet, comme ce serait le cas pour des actifs numéraires. On a montré que le Distributeur réussit à égaliser les recettes marginales de compromis, c'est-à-dire que le système de prix relatifs est utilisé comme un instrument de second rang, par son effet sur le coût de la vie individuel, pour réduire les distorsions liées à l'allocation des revenus. On a profité de ce modèle pour analyser les effets de la nature de l'unité de compte, et on a montré que dans le cas particuliers où il n'existe que deux individus, l'optimum contraint au sens pur est optimal au sens ex post si le Distributeur peut choisir l'unité de compte de son système.

Dans le second modèle, on a imposé l'unicité du système de prix à la consommation et on a obtenu ainsi l'optimum contraint au sens de Géanakoplos et Polémarchakis pour une économie financière. Dans ce cas, le Distributeur ne parvient plus à égaliser les recettes marginales de compromis, mais il égalise maintenant les recettes marginales de compromis corrigées par des redistributions fictives de quantités. Ces

[1] Après quelques semaines de réflexion, il semble bien que cet optimum contraint soit l'optimum contraint au sens de Diamond.

recettes marginales de compromis corrigées sont en fait égales à la recette marginale de compromis 'du marché', et le Distributeur utilise à nouveau les prix relatifs comme un instrument de second rang mais cette fois-ci au niveau agrégé. Comme le système de prix conditionnels est unique, cet optimum contraint est optimal au sens ex post, mais le système de dispositions marginales à payer pour les actifs reste individualisé, et l'équilibre concurrentiel n'est pas un OCGP.

Dans le troisième modèle, on a imposé l'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs, et on a obtenu un optimum contraint original qui est en quelque sorte la réciproque de l'OCGP. Ce modèle prend tout son sens par rapport au modèle précédent puisque les marchés financiers sont généralement considérés comme plus concurrentiels que les marchés des biens. Ce modèle est particulièrement intéressant puisqu'il introduit une nouvelle transmission de l'effet des prix sur l'optimalité inter états. Une variation des prix n'affecte plus seulement le coût de la vie des individus, mais elle affecte également leur revenu par l'intermédiaire de la réallocation du portefeuille d'actifs qui lui est associée. Le Distributeur réussit à nouveau à égaliser les recettes marginales de compromis corrigées par des redistributions fictives de quantité, qui sont elles-mêmes engendrées par des redistributions fictives d'actifs.

Le dernier chapitre peut se voir comme une application du modèle de l'OCGP dans lequel on à réinterprété la quantité totale d'actifs émise par le Distributeur comme un instrument de politique monétaire. On y a montré la relation étroite qui existe entre la nature des effets de la politique monétaire et la structure des rendements des actifs. On a été amenés ainsi à se questionner sur la structure optimale des rendements, et on a montré que cette dernière ne permet pas au Distributeur de mener une politique monétaire active. Les rendements optimaux sont séparables sur les états du monde, et ceci met en évidence les coûts associés à l'aspect de production jointe lié aux rendements des actifs usuels.

Le plan de recherche qui peut être engendré à partir de cette thèse est principalement de deux ordres: un travail à l'intérieur du modèle qui vise à perfectionner les interprétations et amener le modèle jusqu'à ces limites, et un travail à l'extérieur du modèle qui vise à trouver des champs d'application autres que la théorie financière. Pour amener le modèle jusqu'à ses limites, on peut introduire simultanément des contraintes sur les prix des actifs et sur les prix des biens tout en s'assurant que le modèle conserve des degrés de liberté. Pour traiter ce problème de manière efficace, il est nécessaire cependant de développer une théorie duale du consommateur, c'est-à-dire d'étudier le système inverse de demande.

L'utilisation des prix individualisés peut être plus fine que celle qu'on a présentée. Au lieu de ne considérer que des prix individuels ou des prix uniques, on peut envisager différents systèmes de prix pour certains groupes d'individus. En introduisant un secteur de production par exemple, on pourra considérer un système de prix à la consommation, et un système de prix à la production. Le système de prix différenciés peut également être utilisé pour mieux épouser les particularités de certains groupes de la population comme c'est déjà le cas avec les personnes de l'âge d'or ou les étudiants. Si le système de prix permet de discriminer entre les individus, le système de contraintes budgétaires séparées permet de discriminer entre les biens. Il serait intéressant d'appliquer un tel système à d'autres contextes que celui de l'incertain. On peut penser par exemple aux économies à deux monnaies dans lesquelles les biens d'importation se paient en dollars alors que les biens nationaux se paient en monnaie locale.

D'un point de vue anthropologique, on peut aborder l'institution d'un système d'actifs sous un angle différent. En effet, si un actif est caractérisé par un vecteur de rendements, on peut imaginer que ces rendements représentent un ensemble de droits et d'obligations contingentes à certains évènements. L'appartenance à une société ou à un certain groupe social pourrait dès lors être modélisée à l'aide d'un système de normes incomplètes. Enfin, le problème qu'on a présenté n'est pas directement un problème d'incomplétude des marchés, mais bien un problème d'incomplétude du système d'actifs. Il serait souhaitable d'utiliser la structure qu'on a développée tout au long de cette thèse pour aborder le problème de l'incomplétude des marchés des biens.

A toute fin pratique cette thèse n'a fait que confirmer l'aspect global des solutions qu'il faut amener pour la résolution d'un problème global. Une fois qu'on reconnaît l'incomplétude du système institutionnel, l'institution des marchés concurrentiels à prix unique n'est plus optimale même au sens contraint. Ce constat ne doit pas être vu comme un échec, mais bien comme la source d'une motivation nouvelle pour l'exploration d'institutions alternatives.

Annexe

A.1 Structure institutionnelle mentale de l'individu

Pour une allocation $\overline{x}$ donnée hors de tout contexte institutionnel, l'individu est capable de se construire un système de prix contingent individuel, un système de prix conditionnels individuel ainsi qu'un système de prix de Arrow individuel. Ainsi, pour toute allocation $\overline{x}$, l'individu est capable de se construire mentalement un cadre institutionnel à la Arrow-Debreu ou un cadre institutionnel à la Arrow dans lequel l'allocation $\overline{x}$ fait partie de son choix de consommation optimal.

Pour s'en convaincre, considérons une allocation $\overline{x}$ quelconque. On peut construire le système de prix conditionnels de l'individu, $\widehat{p}_h(\overline{x})$. Soit X' la matrice de consommation de dimension $(S+1)L$ configurée de manière analogue à la matrice des prix $\widehat{P}'$. Dotons l'individu d'un système de revenus conditionnels $R(\overline{x}) = \overline{X}' \; \widehat{p}_h(\overline{x})$ et laissons-le optimiser dans un cadre institutionnel à contraintes budgétaires séparées. Par le problème du consommateur considéré dans la première section, le panier de consommation optimal doit satisfaire les conditions de premier ordre suivantes,

$$\widehat{p}_h(x^*) = \widehat{p} \qquad et \qquad R = \widehat{P}'x^*$$

Si maintenant le système de prix institutionnel est donné par $\widehat{p} = \widehat{p}_h(\overline{x})$, le panier de consommation $\overline{x}$ satisfait les conditions de premier ordre. Comme ces conditions sont nécessaires et suffisantes, le panier $\overline{x}$ est un panier optimal pour l'individu évoluant dans ce cadre institutionnel.

Lorsqu'un individu fait face à $S+1$ contraintes budgétaires distinctes, la structure institutionnelle dans laquelle il évolue ne lui permet pas de relier ses différentes consommations conditionnelles. Cependant, il le fait tout de même mentalement par l'intermédiaire de ses préférences, en se servant de ses prix de Arrow. Si le panier de consommation $\overline{x}$ peut être vu par le consommateur comme le panier optimal lorsqu'il fait face à différentes contraintes budgétaires, il peut également être vu comme le panier optimal lorsqu'il fait face à une contrainte budgétaire unique. Construisons les prix de Arrow de l'individu associés à l'allocation $\overline{x}$, $\mu_h(\overline{x})$, et dotons-le d'une richesse contingente $\mathrm{w}_h(\overline{x}) = \mu'_h(\overline{x})R(\overline{x})$. Lorsque le système de prix institutionnel est donné par $p' = \mu'_h(\overline{x})\widehat{P}_h(\overline{x})$, le panier de consommation $\overline{x}$ satisfait les conditions de premier ordre du problème du consommateur faisant face à une contrainte budgétaire unique.

A.2 Décompositions de l'effet prix

Pour toute variation de prix $d\widehat{p}$, on peut construire des matrices de compensation à l'intérieur de chaque état du monde et des matrices de compensation entre les états du monde. On distingue deux matrices de compensation intra-état

$$d\widehat{p} = \left(I - \widehat{P}\,\overset{\vee}{R}\,X'\right)d\widehat{p} + \widehat{P}\,\overset{\vee}{R}\,X'd\widehat{p} \tag{0.1}$$

$$d\widehat{p} = \left(I - \widehat{P}\,\overset{\vee}{m}\,\Omega'\right)d\widehat{p} + \widehat{P}\,\overset{\vee}{m}\,\Omega'd\widehat{p} \tag{0.2}$$

La première matrice compense une variation de prix pour la variation du coût de la vie ($X'd\widehat{p} = 0$), alors que la seconde compense une variation de prix pour la variation de la grandeur de l'unité de compte ($\Omega'd\widehat{p} = dm = 0$). On parle de compensation conditionnelle au premier ordre lorsque la compensation laisse l'individu sur un niveau d'utilité inchangé au premier ordre. La compensation pour la variation du coût de la vie est une compensation au premier ordre alors que la compensation pour la variation du niveau des prix ne l'est pas.

Les matrices de compensation inter états visent à compenser l'individu pour une variation de revenu ou une variation du niveau des prix conditionnels par une variation de revenu de première période ou une variation du niveau des prix de première période. On parle de compensation contingente au premier ordre dans les deux cas puisque la matrice de compensation qui est la même, tient compte des prix de Arrow individuels,

$$\left(I_{S+1} - \begin{matrix}\mu'_h \\ 0\end{matrix}\right) \tag{0.3}$$

On décompose alors une variation de revenu et une variation du niveau des prix en une variation qui n'affecte pas l'utilité de l'individu au premier ordre, et une variation qui affecte son utilité,

$$dR = \left(I_{S+1} - \begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) dR + \left(\begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) dR \tag{0.4}$$

$$dm = \left(I_{S+1} - \begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) dm + \left(\begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) dm \tag{0.5}$$

Comme une variation de revenu et une variation du niveau des prix peuvent être engendrées par des variations de prix, on peut décomposer une variation de prix en combinant la compensation conditionnelle et la compensation contingente,

$$d\widehat{p} = \left(I - \widehat{P} \overset{\vee}{R} X' \right) d\widehat{p} + \widehat{P} \overset{\vee}{R} \left(I_{S+1} - \begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) X' d\widehat{p} + \widehat{P} \overset{\vee}{R} \left(\begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) X' d\widehat{p}$$

$$d\widehat{p} = \left(I - \widehat{P} \overset{\vee}{m} \Omega' \right) d\widehat{p} + \widehat{P} \overset{\vee}{m} \left(I_{S+1} - \begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) \Omega' d\widehat{p} + \widehat{P} \overset{\vee}{m} \left(\begin{matrix} \mu'_h \\ 0 \end{matrix} \right) \Omega' d\widehat{p}$$

Si l'on s'intéresse aux effets sur la consommation des ces différentes compensations, on obtient des décompositions de l'effet prix, de l'effet revenus et de l'effet niveau des prix,

$$\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} = \widehat{K}^R - C^R X' + \frac{\partial x}{\partial R_0} \mu' X' \tag{0.6}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} = \widehat{K}^m - C^m \Omega' + \frac{\partial x}{\partial R_0} \frac{R_0}{m_0} \mu' \Omega' \tag{0.7}$$

Pour rappel, les différentes matrices de compensation sont définies comme suit,

$$\widehat{K}^R = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} (I - \widehat{P} \overset{\vee}{R} X') = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} |_{X' d\widehat{p} = 0}$$

$$\widehat{K}^m = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} (I - \widehat{P} \overset{\vee}{m} \Omega') = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} |_{\Omega' d\widehat{p} = 0}$$

$$C^R = \frac{\partial x}{\partial R} - \frac{\partial x}{\partial R_0}\mu' = \frac{\partial x}{\partial R}\,|_{\mu'_h dR=0}$$

$$C^m = \frac{\partial x}{\partial m} - \frac{\partial x}{\partial m_0}\mu' = \frac{\partial x}{\partial m}\,|_{\mu'_h dm=0}$$

Les matrices $\widehat{K}^R$ et C^R ne sont autres que les matrices de compensation $\widehat{K}$ et C qui apparaissent dans les conditions d'optimum financier. Remarquons que par la propriété d'homogénéité des fonctions de demande, toute variation des revenus est équivalente à une variation du niveau des prix. En effet, on a

$$\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\widehat{P}\stackrel{\vee}{R} = -\frac{\partial x}{\partial R}$$

Ainsi, on peut écrire les matrices C^R et C^m de la manière suivante,

$$C^R = -\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\widehat{P}\stackrel{\vee}{R} + \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}_0}\frac{\widehat{p}_0}{R_0}\mu' = -\frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\widehat{P}\stackrel{\vee}{R}\left(I_{S+1} - \begin{pmatrix} \mu' \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{0.8}$$

$$C^m = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\widehat{P}\stackrel{\vee}{m} - \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}_0}\frac{\widehat{p}_0}{m_0}\mu' = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\widehat{P}\stackrel{\vee}{m}\left(I_{S+1} - \begin{pmatrix} \mu' \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{0.9}$$

On en tire alors la relation suivante entre C^R et C^m,

$$C^R = -C^m\widehat{m}\stackrel{\vee}{R}$$

Au vue de (0.6) et (0.7), on peut construire deux matrices de compensation 'contingente' de l'effet prix,

$$\overline{K}^R = \widehat{K}^R - C^R X' = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\,|_{\mu'_h X' d\widehat{p}=0} \tag{0.10}$$

$$\overline{K}^m = \widehat{K}^m - C^m \Omega' = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}}\,|_{\mu'_h \Omega' d\widehat{p}=0} \tag{0.11}$$

La matrice $\overline{K}^R$ compense l'individu au premier ordre dans un sens 'contingent' pour une variation de prix donnée. C'est matrice $\overline{K}$ qui apparaît dans les conditions de l'optimum financier. La matrice $\overline{K}^m$ quant à elle ne compense pas l'individu au premier ordre puisque sa compensation est en terme de variation du niveau des prix et non en terme de variation du coût de la vie. En se servant de la propriété d'homogénéité, on peut exprimer ces matrices de compensation contingente de l'effet prix en terme de variation de prix uniquement,

$$\overline{K}^R = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} \left(I_{S+1} - \widehat{P} \overset{\vee}{R} \begin{pmatrix} \mu' \\ 0 \end{pmatrix} X' \right) \tag{0.12}$$

$$\overline{K}^m = \frac{\partial x}{\partial \widehat{p}} \left(I_{S+1} - \widehat{P} \overset{\vee}{m} \begin{pmatrix} \mu' \\ 0 \end{pmatrix} \Omega' \right) \tag{0.13}$$

Par construction, les matrices de compensation conditionnelles de l'effet prix permettent de décomposer les matrices ci-dessus en une compensation intra état et une compensation inter états,

$$\overline{K}^R = \overline{K}^R \left(I_{S+1} - \widehat{P} \overset{\vee}{R} X' \right) + \overline{K}^R \widehat{P} \overset{\vee}{R} X' = \widehat{K}^R - C^R X'$$

$$\overline{K}^m = \overline{K}^m \left(I_{S+1} - \widehat{P} \overset{\vee}{m} \Omega' \right) + \overline{K}^m \widehat{P} \overset{\vee}{m} \Omega' = \widehat{K}^m - C^m \Omega'$$

A.3 Cas particuliers pour l'OCGP

Pour s'assurer de la cohérence de notre modèle, on analyse quelques cas particuliers. On commence par présenter le modèle à un bien dans lequel l'équilibre concurrentiel est un OCGP. On analyse ensuite l'effet de différentes hypothèses de séparabilité, tant au niveau des préférences qu'au niveau institutionnel. Dans le premier cas, on s'intéresse au comportement du modèle lorsque le système d'actifs est composé uniquement d'actifs de Arrow. On passe ensuite au cas où les préférences sont séparables entre les états du monde, et qu'elles peuvent être représentées par des fonctions d'utilités de type von Neumann Morgenstern. On termine la section en analysant le comportement du modèle sous l'hypothèse de double séparabilité, séparabilité des préférences et séparabilité institutionnelle.

A.3.1 Le modèle à un bien de Diamond

Lorsqu'il n'existe qu'un bien dans chaque état du monde, il n'y a plus de possibilités de substitution à l'intérieur de chaque état du monde. Par la propriété d'homogénéité des fonction de demande, l'effet-revenus se confond avec l'effet-prix, et on a les deux propriétés suivantes:

P.1) La matrice de Slutsky $\widehat{K}$ est nulle

Lorsqu'il n'existe qu'un bien par état du monde, l'économie compte au total $L = S+1$ biens. Comme la matrice $\widehat{K}$ est de rang $L-(S+1)$, elle est de rang nul lorsqu'il n'existe qu'un bien.

P.2) les fonctions de demande conditionnelles sont données par $x_h = \widehat{P}^{-1}R_h$

Comme $\widehat{P}$ est une matrice diagonale avec des éléments strictement positifs, elle possède une inverse classique. En postmultipliant les contraintes budgétaires individuelles par $\widehat{P}^{-1}$, on obtient les fonctions de demande ci-dessus[1].

Au vue de *(P.2)*, les fonctions de demande sont séparables sur les états du monde, et tant l'effet-prix croisé que l'effet-revenus croisé sont nuls. On peut obtenir alors *(P.1)* à partir de *(P.2)* en se servant de la propriété d'homogénéité des fonctions de demande.

Proposition A.3.1. *Lorsqu'il n'existe qu'un bien par état du monde, l'optimum contraint (OCGP) se caractérise par un système unique de dispositions marginales à payer pour les actifs (Diamond 1967).*

On obtient tout de suite comme corollaire à cette proposition que l'équilibre walrassien est un OCGP lorsqu'il n'existe qu'un bien. Pour comprendre ce qui se passe, il suffit de remarquer que lorsque l'on impose l'unicité des prix conditionnels dans le modèle à un bien, les effets-revenus sont uniques,

$$\partial x_h / \partial R_h = \widehat{P}^{-1} = \partial x / \partial R \qquad \forall h \in H$$

Or la différence dans l'évaluation des actifs entre les individus provenait justement de la différence des effets-revenus entre ces individus. Lorsqu'il n'existe qu'un bien par état du monde, la condition d'optimalité sur l'allocation des prix relatifs disparaît bien évidemment. En substituant les fonctions de demande dans les conditions de premier ordre, et en transformant la condition sur les actifs de telle sorte à faire apparaître les dispositions marginales à payer pour les actifs, on obtient l'unicité des dispositions marginales à payer pour les actifs,

[1] Bien qu'il ne semble plus rester de degrés de liberté dans le problème du consommateur, on peut toujours remplacer les contraintes financières par des contraintes d'inégalité. Dans ce cas, le consommateur maximise son utilité en décidant de consommer tout ce que son revenu lui permet.

$$q'_h = \frac{\sigma' \partial x_h / \partial R_{h1}}{\sigma' \partial x_h / \partial R_{h0}} Z_1 = v' Z_1 = q'$$

Si cette proposition est encourageante pour l'institution walrassienne, il ne faut pas oublier que l'OCGP reste en général un optimum de second rang puisque les prix de Arrow individuels ne sont pas uniques. En effet, lorsqu'il n'existe qu'un bien, il est équivalent d'imposer une contrainte d'unicité du prix de ce bien ou une contrainte sur le niveau du prix de ce bien. Le modèle à un bien se ramène ainsi au modèle à normalisation unique, à la différence près qu'il n'existe plus de substitution à l'intérieur de chaque état du monde. Or dans le modèle à normalisation unique,on a montré que la contrainte de normalisation des prix était effective[2].

A.3.2 Hypothèses de séparabilité

Dans le modèle non contraint où le Distributeur alloue librement les prix et les revenus, le système institutionnel est séparable entre les différents états du monde. L'individu qui fait face à un système de $S+1$ contraintes budgétaires séparées parvient tout de même à faire un lien entre ces différentes contraintes budgétaires par l'intermédiaire de ses préférences. On dira alors que le modèle est séparable au niveau institutionnel, mais non dans les préférences. Lorsqu'on introduit la contrainte sur l'allocation des revenus, les rendements des actifs permettent de lier les différentes contraintes budgétaires, et le système institutionnel n'est plus séparable. Dans cette section, on analyse la séparabilité institutionnelle lorsque le Distributeur est contraint dans l'allocation des revenus en introduisant des actifs de Arrow. On introduit ensuite la séparabilité au niveau des préférences, et on étudie l'effet de cette séparabilité sur les conditions de premier ordre. Après avoir analysé l'effet de chaque type de séparabilité,

[2]Dans le modèle à un bien, seule la contrainte sur l'unicité du prix du bien zéro n'est pas effective, $\xi_{ho} = 0$ pour tous les individus. Ceci se comprend aisément si l'on se souvient que dans le modèle a normalisation unique, la contrainte sur le niveau des prix de première période n'était pas effective.

on regarde le comportement du modèle lorsqu'il est totalement séparable.

a) Séparabilité institutionnelle

Dans les sections précédentes, la possession d'un actif 'général' forçait les individus à accepter la totalité des rendements de cet actif. Il était en effet impossible d'acheter uniquement certains des rendements de l'actif en question, ce qui créait un effet de "production jointe" dans les rendements. Dans cette section on considère le cas où chaque actif ne paie que dans un état du monde, c'est-à-dire le cas où les actifs sont des actifs de Arrow. On peut étudier ainsi l'effet pur des marchés incomplets sans introduire de biais dû à l'effet de "production jointe" des rendements. Notons cependant que les actifs de Arrow ne sont qu'un cas particuliers de séparabilité institutionnelle. Ils ont néanmoins une importance particulière qui justifie qu'on les traite dans cette section. Le cas général de la séparabilité institutionnelle est présenté dans le dernier chapître lorsqu'on aborde le problème de la politique monétaire optimale[3].

Supposons qu'il existe un système de $J \leq S$ actifs de Arrow pour allouer les revenus de seconde période dans les différents états du monde. Comme les individus n'ont pas de revenu en dehors de celui qu'ils tirent du rendement de leur portefeuille, lorsqu'il existe un système incomplet d'actifs de Arrow, cette structure institutionnelle ne permet pas au Distributeur d'allouer des revenus dans tous les états du monde, et par là, elle ne lui permet pas d'allouer les biens dans tous les états du monde. Pour remédier à ce problème, on peut représenter cette structure institutionnelle comme un problème de 'rationnement quantitatif' sur les actifs. A cet effet, on va supposer qu'il existe un système complet d'actifs de Arrow ($S+1$), mais que seuls $J \leq S+1$ actifs sont présentement sous le contrôle du Distributeur. Les autres $\overline{J} = S - J$ actifs sont

[3] Le cas général est celui où il existe un sous-ensemble d'actifs de cardinalité j qui n'ont des rendements non nuls que dans un sous-ensemble d'états du monde de même cardinalité. Par l'hypothèse sur le rang de la matrice Z, la matrice des rendements associés à ce sous-ensemble d'actifs est de rang maximal.

considérés comme fixés. On peut penser par exemple à des problèmes de liquidité liés aux diverses échéances qui empêchent le Distributeur d'utiliser la totalité des actifs existants. On pose alors

$$Z_1 = I_S \qquad et \qquad a'_h = (a'_{hJ}, a'_{h\bar{J}})$$

On introduit la contrainte sur les actifs qui ne sont pas liquides comme suit :

$$-\sum_{h\in H} \vartheta'_{h\bar{J}}(a'_{h\bar{J}} - \overline{a}'_{h\bar{J}})$$

où $\overline{a}'_{h\bar{J}}$ est pris comme un paramètre échappant au contrôle du Distributeur. Les conditions de premier ordre sur l'allocation des actifs sont modifiées comme suit,

$$\frac{\partial L}{\partial a'_{hJ}} = \theta'_h Z_J = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{hJ} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a'_{h\bar{J}}} = \theta'_h Z_{\bar{J}} = -\vartheta'_{h\bar{J}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{h\bar{J}} = -\vartheta'_{h\bar{J}}$$

Les revenus dans les J états du monde pour lesquels il existe des actifs de Arrow satisfont le principe de tarification au coût marginal, et il n'est plus possible de réduire le coût social des allocations individuelles par une variation de ces revenus. Ceci découle du fait que l'existence d'un actif de Arrow permet au Distributeur d'avoir la même latitude que l'allocation directe du revenu dans l'état pour lequel cet actif a un rendement non nul. Rappelons au risque de nous répéter que la tarification au coût marginal n'implique pas en elle même l'unicité des prix. Si l'on considère en effet la condition sur les dispositions marginales à payer pour les J actifs de Arrow liquides, on a toujours $q'_{hJ} = \nu'_{hJ} Z_J$. En substituant la forme particulière de la matrice des rendements, on a

$$q_{hJ} = \nu_{hJ} \qquad \forall h \in H$$

Les dispositions marginales à payer pour les actifs liquides ne seront les mêmes que lorsque le taux de transformation du revenu, qui laisse inchangée la dépense des consommateurs évaluée aux prix sociaux, sera unique. Ceci sera le cas notamment lorsque les prix sociaux π seront proportionnels aux prix privés p_h. Pour les actifs qui ne sont pas sous le contrôle du Distributeur, les multiplicateurs $\vartheta'_{h\overline{J}}$ donne la réduction de la dépense individuelle qui pourrait être réalisée par une variation marginale de l'allocation de ces actifs. La séparabilité institutionnelle introduite par les actifs de Arrow permet d'éliminer les distorsions liées à l'optimalité inter-états dans les états pour lesquels il existe des actifs de Arrow. Lorsque les préférences ne sont pas séparables, le système de prix relatifs à l'intérieur de chaque état du monde, y compris les états pour lesquels il existe un actif de Arrow liquide, est toujours utilisé comme instrument de second rang à des fins d'optimalité inter-états. On verra que la séparabilité institutionnelle a une importance cruciale dans le cadre de la politique monétaire optimale menée par le Distributeur qu'on analysera dans la partie suivante.

b) Séparabilité des préférences

La contrainte d'unicité du système de prix a été introduite entre autre pour réduire le problème d'engagement lié à la différence entre l'optimalité au sens ex-ante et l'optimalité au sens ex-post. Les préférences qu'on a considérées jusqu'ici sont des préférences définies au sens ex-ante. Or, pour pouvoir parler d'optimalité au sens 'ex-post', il faut avoir défini préalablement les préférences de l'individu une fois l'incertitude levée. Lorsqu'on considère le cas particuliers où les préférences sont additivement séparables sur les états du monde, on a une représentation naturelle des préférences au sens ex-post. Si les préférences des individus sont représentable par des fonctions d'utilité du type $\mu(x) = \sum_{s\in S} \rho_s \widetilde{U}(x_s)$[4], les préférences ex-post sont données naturellement par $\rho_s \widetilde{U}(x_s)$ pour tout $s \in S$. Sous cette hypothèse, on est alors en mesure d'analyser la relation entre l'optimalité au sens ex-ante et l'optimalité au sens ex-post.

[4]Sous cette formalisation, on impose également la séparabilité inter-temporelle.

Pour savoir si l'hypothèse de séparabilité des préférences permet de résoudre le problème d'engagement du Distributeur, il suffit de revenir au premier modèle de second rang dans lequel on a imposé l'unicité des normalisations. En substituant l'hypothèse de séparabilité des préférences, on vérifie alors s'il reste optimal ou non pour le Distributeur d'avoir des systèmes de prix individualisés. Lorsque les préférences sont séparables sur les états du monde, la matrice de Slutsky $\widehat{K}_h$ est bloc-diagonale. En substituant ceci dans la condition sur l'allocation des prix relatifs, on obtient

$$\sigma_s' \widehat{K}_{ss}^h = -(\theta_s x_{hs}' + \delta_{hs} \omega_s') \qquad \forall s \in S, \qquad \forall h \in H$$

Le coût social lié à l'allocation des prix relatifs dans chaque état ne dépend que des éléments de cet état. En se servant de la condition d'optimalité sur le niveau des prix et en se rappelant que $\theta_{h0} = 0$, on obtient directement que le système de prix de la première période est proportionnel aux prix sociaux,

$$\widehat{p}_{h0} = \gamma_0 \pi_0 \qquad \forall h \in H$$

En ce qui concerne les autres états du monde, tant que la contrainte sur l'allocation du revenu est effective, le Distributeur continue à utiliser les prix relatifs de manière individuelle dans chaque état du monde à des fins d'optimalité inter-états. L'hypothèse de séparabilité des préférences per se, n'amène aucune raison pour que la contrainte sur l'unicité des prix relatifs ne soit pas effective, hormis pour la première période[5].

c) Double séparabilité

Lorsqu'on conjugue l'hypothèse de séparabilité institutionnelle avec celle de la séparabilité des préférences, le problème devient totalement séparable pour les états

[5] On peut essayer d'expliquer ce résultat de la manière suivante. Lorsque l'on cherche à maximiser une somme pondérée à l'aide d'instruments indirectes, si ces instruments affectent les poids de la pondération, à l'optimum, les éléments que l'on pondère ne sont pas nécessairement maximaux.

du monde auxquels sont associés des actifs de Arrow "liquides". Par l'hypothèse de séparabilité institutionnelle, on a $\theta'_{hJ} = 0$. En substituant ceci dans la condition sur l'allocation des prix relatifs lorsque les préférences sont séparables, on obtient pour les J états du monde pour lesquels il existe un actif de Arrow,

$$\sigma'_s \widehat{K}^h_{ss} = -\xi'_{hs} \qquad \forall s \leq J, \qquad \forall h \in H$$

En faisant la somme sur les individus, et en se servant de la condition d'optimalité sur l'allocation des prix, on obtient par le rang de la matrice de Slutsky agrégée,

$$\sigma'_s = \gamma_s \widehat{p}'_s \qquad \forall s \leq J$$

Le système de prix à la consommation est proportionnel au système de prix officiels dans les états du monde pour lesquels il existe un actif de Arrow. En substituant ceci dans la condition précédente, on obtient par l'additivité de la matrice de substitution de Slutsky,

$$\xi'_{hs} = 0 \qquad \forall s \leq J, \qquad \forall h \in H$$

La contrainte sur l'unicité du système de prix n'est pas effective dans les J états du monde pour lesquels les actifs de Arrow sont liquides. En substituant ceci dans la condition de premier ordre sur l'allocation des actifs, on obtient l'unicité des dispositions marginales à payer pour les J actifs de Arrow,

$$q'_{hJ} = \frac{\gamma'_J}{\gamma_0} Z_J = q'_J \qquad \forall h \in H$$

Le Distributeur peut alors implanter l'allocation optimale des actifs de Arrow liquides ainsi que l'allocation des bien conditionnels dans les J états du monde, par un système de marché concurrentiel à prix unique. On se retrouve alors dans un monde séparé en deux. Une partie du monde *possible* se trouve au premier rang alors que l'autre partie du monde possible se trouve au second rang. En conséquence, l'optimalité au sens ex-ante implique l'optimalité au sens ex-post pour une partie du monde possible uniquement.

References

[1] Allard M. Bronsard C. et Gouriéroux C. (1998), **Drèze-Modigliani decompositions and financial premiums**, miméo, Université de Montréal.

[2] Arrow K.J.(1953), **Le rôle des valeurs boursières pour la meilleure répartition des risques**, Econométrie, Colloques Internationaux du CNRS, 40, 41-47

[3] Arrow K.J. et Debreu G. (1954), **Existence of an equilibrium for a competitive Economy**, Econometrica 22, 265-292.

[4] Balasko Y. et Cass D. (1989), **The structure of financial equilibrium with exogenous yields: the case of incomplete markets**, Econometrica, Vol 57, No.1, 1989.

[5] Balasko Y (1979), **Budget constrained Pareto-efficient allocations**, Journal of Economic Theory 21, 359-379.

[6] Boiteux M (1971), **On the management of public monopolies subject to budgetary constraints**, Journal of economic theory 3, 219-240.

[7] Cass D. (1985), **On the 'number' of equilibrium allocations whith incomplete financial markets**, CARESS Working Paper. University of Pennsylvania.

[8] Cass D. (1990), **Incomplete financial markets and indeterminacy of competitive equilibrium**, dans Advances in Economic Theory; Sixth World Congress, Vol. II, Cambridge University Press.

[9] Debreu G. (1959), **Theory of value**, New York: Wiley.

[10] Debreu G. (1951), **The coefficient of resource utilization**, Econometrica, 19, 273-291.

[11] Dierkert E. (1991), **The optimality of Boiteux-Ramsey pricing**, Econometrica, Vol.59, No.1, 99-121.

[12] Drèze J.H. (1964), **Postwar contributions of french economists**, American Economic Review, 60, 1-64.

[13] Drèze J.H. (1971), **Market allocation under uncertainty**, European Economic Review, 2, 133-165.

[14] Duffie D. et Shafer W. (1985), **Equilibrium in incomplete markets: I, A basic model of generic existence**, Journal of Mathematical Economics 14, 265-300.

[15] Duffie D. (1987), **Stochastic equilibria with incomplete financial markets**, Journal of Economic Theory 41, 405-416.

[16] Duffie D. (1992), **The nature of incomplete security markets**, dans Advances in Economic Theory, Sixth World Congress Vol. II, Ch.4, Cambridge University Press.

[17] Geanakoplos J. et Polemarchakis H. (1986), **Existence, regularity, and constrained suboptimality of competitive allocations when the asset market is incomplete**, dans Uncertainty, Information and Communication: Essays in Honor of Kenneth Arrow, Volume 3, Cambridge Unviersity Press

[18] Geanakoplos J. et Mas-Colell A. (1989), **Real indeterminacy with financial assets**, Journal of Economic Theory 47, 22-38.

[19] Geanakoplos J. (1990), **An introduction to general equilibrium with incomplete asset markets**, Journal of Mathematical Economics 19, 1990.

[20] Grossman S.J. (1977), **A characterization of the optimality of equilibrium in incomplete markets**, Journal of Economic Theory 15, 1-15.

[21] Hart.O, (1975), **On the optimality of equilibrium when the market structure is incomplete**, Journal of Economic Theory 11,

[22] Laffont J.J. (1989), The **economics of uncertainty and information**, Ch 5 et 6, The MIT Press, London.

[23] Luenberger D.G. (1994), **Dual Pareto Efficiency**, Journal of Economic Theory 62, 70-85.

[24] Magill M. et Quinzii M. (1992), **Real effects of money in general equilibrium**, Journal of Mathematical Economics 21, 1992

[25] Magill M. et Quinzii M. (1996), **Theory of incomplete markets** Vol.1, Ch.2 et Ch.7, MIT Press, London.

[26] Magill M. et Shafer W. (1991), **Incomplete Markets**, dans Handbook of Mathematical Economics, Volume IV, Ch.30, 1523-1614

[27] Malinvaud E. (), **Leçons de théorie microéconomique**, Ch IV,V,X,XI,

[28] Malinvaud E. (1993), **Équilibre général dans les économies de marché**, Economica, Paris.

[29] Polémarchakis H.M. (1990), **The economic implications of an incomplete asset market**, New Developments in Economic Theory, Vol 80, No 2, 280-283.

[30] Radner R (1968), **Competitive equilibrium under uncertainty**, Econometrica Vol. 1, 31-58

[31] Radner R. (1972), **Existence of equilibrium of plans, prices, and price expectations in a sequence of markets**, Econometrica 40, 289-304.

[32] Radner R. (1982), **Equilibrium under Uncertainty**, Handbook of Mathematical Economics, vol II, Ch.20, 923-1006.

[33] Stiglitz J.E. (1982), **The inefficiency of the stock market equilibrium**, Review of Economic Studies XLIX, 241-261.

[34] Wan-hsiang Pan (1995), **A second welfare theorem for constrained efficient allocations in incomplete markets**, Journal of mathematical Economics 24, 577-599.

[35] Werner J (1985), **Equilibrium in economies with incomplete fiancial markets**, Journal of Economic Theory 36, 110-119.