

Université de Montréal

L'Approximation Diophantienne Simultanée et l'Optimisation Discrète

par
José Manuel Rodríguez Caballero

Département Mathématiques et de Statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

décembre, 2014

© José Manuel Rodríguez Caballero, 2014.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

L'Approximation Diophantienne Simultanée et l'Optimisation Discrète

présenté par:

José Manuel Rodríguez Caballero

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Matilde Lalin,	président-rapporteur
Andrew Granville,	directeur de recherche
Dimitris Koukoulopoulos,	membre du jury

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ

Étant donnée une fonction bornée (supérieurement ou inférieurement) $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$ par une expression mathématique, le problème de trouver les points extrémaux de f sur chaque ensemble fini $S \subset \mathbb{N}^k$ est bien défini du point de vue classique. Du point de vue de la théorie de la calculabilité néanmoins il faut éviter les cas pathologiques où ce problème a une complexité de Kolmogorov infinie. La principale restriction consiste à définir l'ordre, parce que la comparaison entre les nombres réels n'est pas décidable. On résout ce problème grâce à une structure qui contient deux algorithmes, un algorithme d'analyse réelle récursive pour évaluer la fonction-coût en arithmétique à précision infinie et un autre algorithme qui transforme chaque valeur de cette fonction en un vecteur d'un espace, qui en général est de dimension infinie. On développe trois cas particuliers de cette structure, un de eux correspondant à la méthode d'approximation de Rauzy. Finalement, on établit une comparaison entre les meilleures approximations diophantiennes simultanées obtenues par la méthode de Rauzy (selon l'interprétation donnée ici) et une autre méthode, appelée tétraédrique, que l'on introduit à partir de l'espace vectoriel engendré par les logarithmes de nombres premiers.

Mots clés: norme de Rauzy, approximation diophantienne simultanée, constante de k -bonacci, nombres réels récurrents.

ABSTRACT

Given a (lower or upper) bounded function $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$ by a mathematical expression. The problem to find the extremal points of f on any bounded set $S \subset \mathbb{N}^k$ is well-defined from a classical point of view. Nevertheless, from a computability theory perspective, it should be avoided the possibility of pathologies when this problem has infinite Kolmogorov complexity. The main constraint is that the order relationship between computable reals is not effectively solvable. We solve this problem by means of a structure containing two algorithms. The first one allows to evaluate the cost function while the second one transforms each value of the cost function in a point in an infinite dimensional vector of a space. We develop three particular cases, one of them corresponding to the Rauzy approximation method. Finally, we make a comparison between the best simultaneous Diophantine approximations obtained by the Rauzy method (our optimization-oriented version of it) and our tetrahedral method, that is one of the main achievement of this work.

Keywords: Rauzy norm, simultaneous Diophantine approximations, k -bonacci constant, recursive real numbers.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	viii
NOTATION	ix
DÉDICACE	x
REMERCIEMENTS	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 0 : SUR LE BUT ET LA MÉTHODOLOGIE	4
0.1 La méthodologie de l'analyse diophantienne inverse	4
0.2 Élucidation du problème de la diversité maximale	8
0.2.1 Épitomé généalogique	8
0.2.2 Constructions des meilleures approximations	9
0.2.3 Synthèse	13
0.3 Conclusions du chapitre	14
CHAPITRE 1 : CALCULABILITÉ ET SÉMANTIQUE	16
1.1 Le théorème du point fixé de Tarski	17
1.2 L'ordre plat	19
1.3 Les nombres réels rékursifs	20
1.4 Le champs de Lagarias	22

CHAPITRE 2 : Q-ANALOGUE TÉTRAÉDRIQUE	27
2.1 Polynômes isobariques	27
2.1.1 Anneau de fonctions symétriques	27
2.1.2 Polynômes de Fibonacci et Lucas généralisés	29
2.2 Les polynômes tétraédriques	31
CHAPITRE 3 : LE CHAMP TÉTRAÉDRIQUE	40
3.1 L'équation différentielle tétraédrique	40
3.1.1 Fonctions tétraédriques polynomiales	45
3.1.2 Propriété extrémale des progressions géométriques	49
3.2 Construction du champ tétraédrique	54
3.2.1 Préliminaires	54
3.2.2 Sémantique du logarithme vectoriel	55
3.2.3 Logarithme numérique	57
CHAPITRE 4 : LE CHAMP DE RAUZY	59
4.1 Le tenseur de Rauzy	59
4.2 Construction du champ de Rauzy	63
4.3 Comparaison	65
CONCLUSION	68
BIBLIOGRAPHIE	69
ANNEXE A : LE CHAMP QUADRATFREI	xii
A.1 Partie vectorielle	xii
A.2 Partie numérique	xiii

LISTE DES TABLEAUX

- 4.I Comparaison entre le champs tétraédrique et le champ de Rauzy 67

LISTE DES FIGURES

3.1	Graphique de la fonction d'entropie tétraédrique (3.14).	47
-----	--	----

NOTATION

- \mathbb{N} Ensemble de nombres naturels (le premier est 0).
- \mathbb{R}_c Ensemble de nombres réels récurrents.
- $L|_{\mathcal{X}}$ Restriction de la fonction L à l'ensemble \mathcal{X} .
- $\mathbf{0}_V$ Zéro de l'espace vectoriel V .
- \perp Valeur indéfinie.
- $\llbracket f \rrbracket$ Sémantique de l'algorithme f .
- β Fonction d'ordre supérieure utilisée pour définir les algorithmes.
- \mathcal{U} Variable muette de β , qui représente une fonction partielle.

À la mémoire de mon camarade d'école,
Raúl Delgado De La Cruz, qui a gagné une médaille pour Cuba à l'olympiade
d'informatique en Grèce (IOI'2004).

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche, le Professeur Granville, pour avoir dirigé ce travail et pour m'avoir aidé à aller jusqu'au bout. Il a su me proposer des sujets intéressants qui m'ont permis d'étudier la théorie de nombres dans différents directions. J'ai beaucoup apprécié son enthousiasme et sa clairvoyance tout au long de mon mémoire.

J'exprime toute ma reconnaissance aux nombreuses personnes qui m'ont soutenu et conseillé pendant ces années. Je remercie le Professeur MacHenry de l'Université de York pour les encouragements à approfondir dans l'approche isobarique à la théorie de nombres, qui est le cœur de cette recherche. Je remercie le Professeur Lalonde pour susciter dans son cours la motivation à apprendre la façon très particulière de rédiger un texte mathématique en français, qui était présente pendant toute ma rédaction.

Durant ces années, j'ai également profité d'un environnement de intellectuel agréable, entre le Séminaire d'Analyse Fonctionnelle du le Professeur Shnirelman à l'Université de Concordia et le Séminaire de Combinatoire Algébrique du le Professeur Bergeron à l'UQÀM.

Je garde une place toute particulière pour ma famille. Je remercie mes parents proche et éloignés qui m'ont suivi et encouragé de loin. J'adresse enfin toute mon affection à l'Église «Nouvelle Vie» qui m'a beaucoup soutenu.

INTRODUCTION

« La recherche des fractions $\frac{p'}{p}$,
 $\frac{p''}{p}$ qui approchent le plus deux
nombres donnés n'a cessé depuis
plus de 50 ans de me préoccuper
et aussi de me désespérer »

Charles Hermite ([19])

L'approche combinatoire à l'approximation diophantienne simultanée s'est développé vivement après que Rauzy ait défini sa norme en [74] et déterminé la suite de meilleures approximations simultanées en termes de fréquences de lettres dans le mot infini de tribonacci. Sa définition d'approximation était la même que celle introduite par Lagarias (voir [45]), qui est une généralisation du concept correspondant de la théorie de fractions continues (dimension 1). D'autres propriétés de la théorie de fractions continues ne peuvent pas être généralisées en gardant le concept de meilleure approximation dans sa forme originelle.

On considère que la propriété essentielle d'une meilleure approximation est le fait d'être la solution d'un problème d'optimisation discrète, où la restriction donne une mesure de la complexité de la solution. Par exemple, $\frac{8}{5}$ est une meilleure approximation du nombre d'or $\phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, parce que $x = 8$ et $y = 5$ est la solution optimale du problème suivant,

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{N} : 1 \leq y \leq 5, \\ (x - y\phi_2)^2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Pourquoi devrions-nous nous restreindre à un problème de minimisation? Par exemple, on peut également définir les meilleures approximations diophantiennes simultanées - d'une façon non classique - comme les solutions du problème de maximisation suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{N} : 1 \leq x + 2y \leq n, \\ \frac{x \log\left(\frac{x+y}{x}\right) + y \log\left(\frac{x+y}{y}\right)}{x+2y} \rightarrow \max. \end{array} \right.$$

où n mesure la complexité de la solution.

Le lien entre l'approximation diophantienne simultanée et l'optimisation combinatoire a été déjà remarqué en [27], où les ressources diophantiens ont été pris à titre d'outil pour réduire la complexité computationnelle d'algorithmes d'optimisation classiques.

Le principal objet de ce travail est de proposer une généralisation du concept de meilleure approximation diophantienne simultanée selon le point de vue de l'optimisation discrète. On en déduit, en particulier, une méthode, que l'on appellera *tétraédrique*, permettant de trouver les approximations simultanées des puissances négatives de n'importe quelle nombre algébrique β qui soit la racine réelle positive du polynôme

$$\mathcal{C}(X) = X^k - t_1 X^{k-1} - t_2 X^{k-2} - \dots - t_{k-1} X - t_k,$$

où $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in (\mathbb{Q}_{\geq 0})^k \setminus \{\mathbf{0}\}$. Après on établira une comparaison empirique entre les approximations simultanées du vecteur

$$\left(\frac{1}{\phi_3}, \frac{1}{(\phi_3)^2} \right),$$

où ϕ_3 est la constante tribonacci, obtenues par la méthode tétraédrique et par notre version de la méthode de Rauzy.

Il y a une caractéristique très subtile de la méthode de Rauzy que l'on veut préserver dans la généralisation : la finitude de la complexité de Kolmogorov, c'est-à-dire, on veut que le problème d'optimisation décrit en **ZFC** soit réductible à un nombre de Gödel dans les mathématiques constructives. La meilleure façon d'expliquer cette propriété est par un exemple pris de [76]. Supposons que l'on veut trouver

le point de minimum de la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sur l'ensemble $\{0, 1\}$ et on sait que $f(0) = 0$ et $f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k}$, où a_1, a_2, a_3, \dots est un ensemble énumératif récursif de nombres naturels qui ne soit pas récursif. Dans ce cas, la complexité descriptive nécessaire pour déterminer si $f(0) = f(1)$ est vraie ou fausse est irréductiblement infinie, bien que les complexités de $f(0)$ et $f(1)$ soient finies.

Pour surmonter la difficulté expliquée au-dessus, on décompose la fonction-coût en deux parties : une partie qui transforme chaque élément d'un treillis dans un vecteur d'un espace (qui est en général de dimension infinie) et une autre partie qui calcule une fonctionnelle linéaire sur cet espace. La façon la plus naturelle d'exprimer cette composition est dans le langage de la sémantique dénotationnelle (voir [33], [84], [90], [1]), qui peut être interprété comme une théorie topologique de la calculabilité (voir [98]).

CHAPITRE 0

SUR LE BUT ET LA MÉTHODOLOGIE

« Le mot élucider devient
dangereux si l'on croit que l'on
peut faire en toutes choses toute
la lumière »

Baruch Spinoza

Dans ce chapitre on introduit le but du mémoire et la méthodologie suivie pendant la recherche. La motivation pragmatique fondamentale consiste à *élucider* le problème suivant (*problème de la diversité maximale*) : trouver, pour n'importe quel entier positif n , les partages déterminants le plus grand nombre de compositions. Le nombre de compositions d'un partage est appelé *diversité*. La quantité de partages de n ayants diversité maximale et la valeur de cette diversité sont les termes généraux des suites A198254 et A102462 en [69] respectivement. La motivation conceptuelle néanmoins est de trouver une façon unifiée d'élucider de problèmes combinatoires pareils à partir d'un processus d'approximation diophantienne en dimension infinie.

Ce chapitre est composé de trois parties : une première qui explique la méthodologie suivie au toujours du mémoire, que l'on pourrait appeler *analyse diophantienne inverse*, une deuxième où cette méthodologie est appliquée au problème de la diversité maximale et une troisième pour les conclusions du chapitre.

0.1 La méthodologie de l'analyse diophantienne inverse

Herbert S. Wilf a publié un essai en 1982 (voir [100]) sur les critères pour déclarer un énoncé comme la *réponse* d'un problème combinatoire. Pour Wilf, une question n'est qu'un algorithme d'attaque par force brute et sa réponse est tout algorithme permettant d'obtenir les mêmes résultats avec une complexité en temps

inférieure. La réponse est *effective* si son nombre d'itérations est asymptotiquement négligeable par rapport au nombre d'itérations de l'attaque par force brute.

La méthodologie de ce mémoire se situe dans le même contexte informatique que celle de Wilf, mais le but n'est pas de résoudre de problèmes (algorithmes), sinon de les *élucider*. L'élucidation - dans le cadre de ce mémoire - est l'opération de sélection des entrées d'un algorithme qui peuvent être générés immédiatement, c'est-à-dire à partir d'une seule itération d'un algorithme fixé (on admet la récurrence à d'autres entrées précédentes du même problème comme une seule opération).

L'exemple archétypique d'élucidation est l'approximation diophantienne, où les réduites, en plus de minimiser localement la distance vers le vecteur que l'on désire d'approcher, ils sont, en général, plus simples que les autres quotients en raison de sa détermination par une suite récurrente. C'est la raison pour laquelle on appelle *suite de meilleures approximations diophantiennes* à la suite a_1, a_2, a_3, \dots des entrées obtenue par l'élucidation d'un problème.

Si a_1, a_2, a_3, \dots est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre $k < \infty$, dont son polynôme caractéristique soit le polynôme irréductible du nombre de Pisot α , on peut proclamer que le vecteur

$$\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \frac{a_{n-3}}{a_n}, \frac{a_{n-4}}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-k}}{a_n} \right)$$

est une « réduite » du vecteur

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\alpha^4}, \dots, \frac{1}{\alpha^{k-1}} \right).$$

Malgré son caractère tautologique, la définition antérieure permet d'invertir le flux méthodologique de l'analyse diophantienne :

Analyse diophantienne inverse : *On ne s'intéresse plus à calculer les réduites, on les connaît d'avance. On part d'une suite de « réduites » et l'on doit chercher un cadre métrique (ou plus généralement topologique) dans lequel cette notion soit justifiée (par exemple les théories d'approximations diophantiennes généralisée : [26], [25], [21], [24], [23]).*

Cette virage a été fait par l'école marseillaise de théorie de mots depuis l'article fondateur de G. Rauzy (voir [74]). Dans ce mémoire donc on ne cherche pas à trouver la formules pour les réduites, ici les « réduites » sont déterminées d'avance par des solutions d'un problème combinatoire : le problème de la diversité maximale et, plus spécifiquement, sa version simplifiée développée au chapitre 3.

Ce que l'on cherche dans ce mémoire est une ambiance théorique proche à l'approximation diophantienne classique où les « réduites » obtenues par l'élucidation du problème combinatoire soient aussi de réduites dans un sens analytique. Au chapitre 3 on a démontré¹ que les réduites du champ tétraédrique convergent, en effet, vers le vecteur de puissances inverses de la constante de k -bonacci, c'est qui justifie sa nomenclature. Au chapitre 4 on a montré empiriquement que la norme de Rauzy peut être utilisée aussi pour déterminer les réduites du champ tétraédrique et l'on a laissé la démonstration de ce fait pour de recherches ultérieures.

On trouve aussi cette méthodologie en théorie de fonctions arithmétiques en forme de localisation² (voir [58], [48], [57], [53], [54]) qui est incarnée dans les séries de Bell (voir [6]). Les suites (parallèles) de meilleures approximations - selon le nouveau sens décrit au-dessus - d'une fonction arithmétique (multiplicative ou additive) sont les suites de puissances de chaque nombre premier p , à savoir, $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, \dots$. Cette progression géométrique peut être interprétée ou bien comme la récurrence d'ordre 1,

$$\begin{aligned} p^0 &= 1, \\ p^n &= p \cdot p^{n-1}, \end{aligned}$$

qui permet d'approcher le scalaire $\frac{1}{p}$ de façon triviale, ou bien comme la récurrence d'ordre infini,

¹Le théorème que l'on a démontré est plus général, de sorte qu'il permet d'utiliser la même méthode pour approcher de puissances d'autres nombres algébriques.

²Localiser - dans ce contexte - veut dire se concentrer dans une voisinage p -adique d'un nombre premier fixé.

$$\begin{aligned}
p^0 &= 1, \\
p^n &= (p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + (p-1)p^{n-3} + \dots + (p-1)p + (p-1) \cdot 1
\end{aligned}$$

qui permet d'approcher le vecteur en dimension infinie,

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}, \dots, \frac{1}{p^d}, \dots \right),$$

par les réduites compactes³,

$$\left(\frac{p^{n-1}}{p^n}, \frac{p^{n-2}}{p^n}, \frac{p^{n-3}}{p^n}, \frac{p^{n-4}}{p^n}, \dots, \frac{p^{n-n}}{p^n}, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

De la même façon qu'en dimension finie, le problème fondamentale consiste à clarifier le cadre dans lequel les « réduites compactes » du vecteur en dimension infinie sont de réduites dans le sens métrique. Le cas $p = 2$ est spécialement important car il admet une interprétation combinatoire à partir du problème de la diversité maximale, où la suite de meilleures approximations diophantiennes simultanées est déterminée par la suite de partages de Cayley-Hickerson, une contribution de ce mémoire l'on expliquera au-dessous dans ce chapitre.

On est tenté de d'étendre la procédure d'approximation diophantienne simultanée des puissances inverses de la constante de k -bonacci⁴ (voir chapitre 4),

$$\left(\frac{1}{\phi_k}, \frac{1}{(\phi_k)^2}, \frac{1}{(\phi_k)^3}, \dots, \frac{1}{(\phi_k)^{k-1}} \right),$$

à partir de la norme de Rauzy au cas limite $k \rightarrow +\infty$. Cette extension néanmoins doit changer considérablement la structure de la méthode, car la façon la plus naturelle de le faire (extension de la matrice de la substitution à dimension infinie) tombe dans un cas dégénéré. On propose donc d'utiliser une structure

³Terminologie pris de la théorie de domaines de Scott qui veut dire que la quantité d'entrées non nulles est finie.

⁴C'est la solution réelle positive de l'équation $x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \dots + x + 1$.

plus flexible que l'approximation diophantienne classique pour résoudre ce problème : les champs de tétraédriques (voir chapitre 3).

0.2 Élucidation du problème de la diversité maximale

0.2.1 Épitomé généalogique

L. Euler a déposé en 1778 un travail à l'Académie de St.-Petersburg intitulé *De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$ (voir [22]), qui porte sur les coefficients obtenus après l'expansion de ce polynôme. Selon G. Andrew (voir [3]), ce sujet ne s'est pas tellement développé à cause du fait que les propriétés de ces coefficients sont mimetiquement proches à celles des coefficients binomiaux et parce que il n'y a pas de formule assez simple pour le cas général (cette impossibilité est une conséquence du théorème 8.8.1 de [70]). Les q -analogues de ces coefficients néanmoins apparaissent en mécanique statistique (voir [5]) ainsi que dans les identités du type Roger-Ramanujan (voir [4]).

Depuis un point de vue combinatoire, chaque coefficient $c(n, s, r)$ de l'expansion du polynôme⁵,

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^r)^s = \sum_{n=1}^{rs} c(n, s, r) x^n$$

est le nombre de compositions de n en s parties non vides, toutes bornées par r . Le comportement asymptotique de la fonction $c(n, s, r)$ a été étudié par M. N. Basu en 1952, voir [10].

Z. Star s'est intéressé au problème extrémal suivant : Pour quelle valeur de n la fonction $n \mapsto c(n, s, r)$ atteint sa valeur maximale, étant donnés les nombres $s \geq 2$ et $r \geq 1$? Il a démontré en 1975 (voir [91]) que le point de maximum cherché est,

$$n = \begin{cases} \frac{s(r+1)}{2}, & \text{si } s(r+1) \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{s(r+1)-1}{2}, & \text{si } s(r+1) \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

⁵Il faut remarquer que le polynôme étudié par Euler avait l'unité comme terme indépendant, que l'on a exclu au but d'éviter les parties vides dans les compositions.

Soit $a(n, s, r) = c(n, s, r) - c(n, s, r - 1)$ le nombre de compositions de n en s parties non vides telles que la plus grande partie soit exactement r . En plus, on définit $a(n, r) = \sum_{s \geq 1} a(n, s, r)$. A. Odlyzko et B. Richmond ont travaillé dans le problème extrémal suivant : Pour quelle valeur de r la fonction $r \mapsto a(n, r)$ atteint sa valeur maximale, étant donné le nombre $n \geq 1$? Ils sont démontré en 1979 (voir [68]) que pour une infinité de valeurs de n , le point de maximum du problème est $r = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

P. Hitczenko et G. Louchard ont étudié en 2001 (voir [37]) les compositions depuis un point de vue probabiliste, à partir de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon la distribution géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Ils ont calculé la distribution de la partie la plus grande de ces compositions aléatoires.

M. Archibald et A. Knopfmacher ont utilisé aussi de méthodes probabilistes en 2011 (voir [7]) pour calculer l'espérance et la variance de la partie la plus grande qui n'apparait pas dans une composition aléatoire. M. E. Malandro a étudié en 2011 (voir [59]) les différents paramètres statistiques des compositions ayant les parties borné par un entier k . E. Schmutz et C. Shapcott ont étudié en 2012 (voir [85]) le produit des parties de compositions aléatoires.

0.2.2 Constructions des meilleures approximations

0.2.2.1 Compositions de Cayley généralisées

Chaque solution de l'équation diophantienne linéaire $n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m$, où m n'est pas fixé, vérifiant $x_1 = 1$ et $1 \leq x_j \leq 2x_{j-1}$ (pour $2 \leq j \leq m$) est appelée *composition de Cayley* de n . Arthur Cayley a démontré en 1857 (voir [15]) que le nombre de compositions Cayley est égal au nombre de partages de $2^{n-1} - 1$ en parties appartenants à l'ensemble $\{1, 1', \underbrace{2, 4, 8, 16, \dots, 2^{n-2}}_{\text{progression géométrique}}\}$ (on considère les deux parties 1 et 1' différentes). Ces compositions ont été reprises en 1959 par H. Minc pour énumérer les éléments d'un degré donné en un groupoïde libre commutatif d'entropie cyclique (voir [62]) et en 1981 par G. E. Andrews en relation avec l'identité de Roger-Ramanujan (voir [2]). M. Konvalinka et I. Pak ont étudié

en 2013 et 2014 les compositions de Cayley dans le cadre de la combinatoire des polytopes (voir [41] et [42]).

Une *composition de Cayley généralisée* de k en m parties est une solution de l'équation diophantienne linéaire $k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m$, vérifiant $0 \leq x_j \leq 2^{j-1}$ (pour chaque $1 \leq j \leq m$). Les compositions étudiées par Cayley décrites au dessus sont de compositions de Cayley généralisées mais l'implication réciproque est en générale fausse.

Le nombre de compositions de Cayley généralisées de k en m , noté $S_m(k)$, peut être obtenu grâce à l'expansion du produit

$$\prod_{j=0}^{m-1} [2^j + 1]_q = \sum_{k=0}^{2^m-1} S_m(k)q^k, \quad (1)$$

où $[n]_q := 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$ est le q -analogue classique de n (voir chapitre 2).

Le produit $\prod_{j=0}^{m-1} [2^j + 1]_q$ est le q -analogue du terme général de la suite A028361 en [69], qui apparait d'une façon naturelle en théorie de codes de Klein, voir [38] et [18]. Les termes de la somme $\sum_{k=0}^{2^m-1} S_m(k)q^k$ sont les lignes du triangle A131791 en [69].

L'identité (1) implique directement l'estimation asymptotique,

$$S_m(k) = O\left(2^{m(m-1)/2}\right), \quad (2)$$

où la constante dedans O est indépendante de k .

0.2.2.2 Partages de 2-Hickerson

Soit r un entier positif. On appelle *partage de r -Hickerson* de n (en m parties) à chaque solution en entiers non négatifs de l'équation,

$$n = [1]_r \alpha_{[1]_r} + [2]_r \alpha_{[2]_r} + [3]_r \alpha_{[3]_r} + \dots + [m]_r \alpha_{[m]_r},$$

où $[d]_r$ est la valeur du polynôme q -analogue classique $[d]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{d-1}$ de d évalué en $q = r$. On utilise la notation exponentielle

$$\alpha = \left([1]_r^{\alpha[1]_r}, [2]_r^{\alpha[2]_r}, [3]_r^{\alpha[3]_r}, \dots, [m]_r^{\alpha[m]_r} \right)$$

avec le même sens que pour les partages classiques.

D. R. Hickerson a établi en 1974 (voir [35]), dans le but de généraliser un résultat d'Euler, que le nombre de partages de r -Hickerson de n (avec m non fixé) est égal au nombre de compositions (appelées de Hickerson) $n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m$, où m n'est pas fixé, vérifiant $x_{j-1} \leq rx_j$ (pour chaque $2 \leq j \leq m$). S. Corteel et S. Lee en 2005 ont étudié, depuis un point de vue unificateur, les compositions de Hickerson et de Cayley (voir [17]).

Chaque $n = 2^m - m - 1$ est associé au partage de 2-Hickerson

$$\hbar_m := \left([1]_2^1, [2]_2^1, [3]_2^1, \dots, [m-1]_2^1 \right),$$

en raison de l'identité,

$$\begin{aligned} & [1]_2 \cdot 1 + [2]_2 \cdot 1 + [3]_2 \cdot 1 + \dots + [m-1]_2 \cdot 1 \\ = & (1) + (1+2) + (1+2+4) + \dots + (1+2+4+\dots+2^{m-2}) \\ = & 1 + (1+1) + (1+1+2) + \dots + (1+1+2+4+\dots+2^{m-2}) - m \\ = & 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{m-1} - m \\ = & 1 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{m-1} - m - 1 \\ = & 2^m - m - 1. \end{aligned}$$

Le partage conjugué à \hbar_m est

$$\hbar'_m = \left(1^{2^{m-2}}, 2^{2^{m-3}}, 3^{2^{m-4}}, \dots, (m-1)^{2^{m-m}} \right),$$

en vertu de la transformation,

$$\begin{aligned}
& [1]_2 \cdot 1 + [2]_2 \cdot 1 + [3]_2 \cdot 1 + \dots + [m-1]_2 \cdot 1 \\
= & (1) + (1+2) + (1+2+4) + \dots + (1+2+4+\dots+2^{m-2}) \\
= & (m-1) \cdot 1 + (m-2) \cdot 2 + (m-3) \cdot 4 + (m-4) \cdot 8 + \dots + 1 \cdot 2^{m-2} \\
= & 1 \cdot 2^{m-2} + 2 \cdot 2^{m-3} + 3 \cdot 2^{m-4} + \dots + (m-1) \cdot 1.
\end{aligned}$$

0.2.2.3 Partages de Cayley-Hickerson

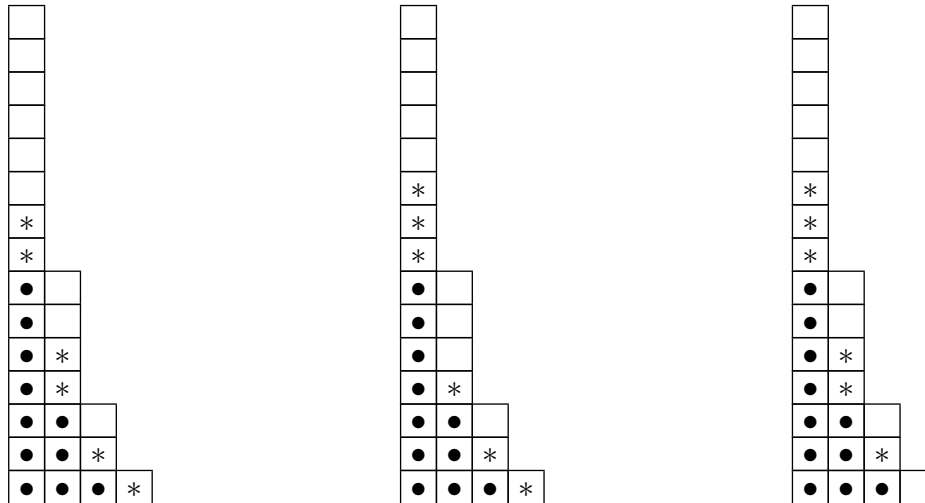
Soit $n = 2^m - m - 1 + k$, avec $0 \leq k < [m]_2$ et $m \geq 2$. Pour chaque composition de Cayley généralisée de k en m parties, $k = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, le *partage de Cayley-Hickerson* de n selon cette composition est le partage obtenu à partir du partage de 2-Hickerson conjugué $\check{h}'_m = (1^{2^{m-2}}, 2^{2^{m-3}}, 3^{2^{m-4}}, \dots, (m-1)^{2^{m-m}})$ par l'application des opérations suivantes dans l'ordre indiqué :

1. une substitution de $m-1$ par m itérée x_1 fois,
2. une substitution de $m-2$ par $m-1$ itérée x_2 fois,
3. une substitution de $m-3$ par $m-2$ itérée x_3 fois,
- ...
- $m-1$. une substitution de 1 par 2 itérée x_{m-1} fois,
- m . une insertion de x_m parties de longueur 1.

L'ensemble des partages de Cayley-Hickerson de n est la collection des partages Cayley-Hickerson de n selon toutes les compositions de Cayley généralisées de k en m parties.

Par exemple, les trois diagrammes de Young suivants (de gauche à droite) sont les trois partages de Cayley-Hickerson obtenus à partir du partage de 2-Hickerson

conjugué \tilde{h}'_3 par les compositions de Cayley généralisées $1+1+2+2$, $1+1+1+3$, $0+1+2+3$ respectivement :



0.2.3 Synthèse

Un algorithme permettant de réduire la recherche de la solution d'un problème donné dès tous les partages de n aux partages de Cayley-Hickerson seulement, est une solution *effective* selon Wilf (voir [100]), car la magnitude⁶ $O(n^{c_2 \log n})$ de l'espace de la deuxième recherche est asymptotiquement négligeable par rapport à celle de la première recherche, à savoir⁷ $\Omega\left(\frac{e^{c_1 \sqrt{n}}}{n}\right)$.

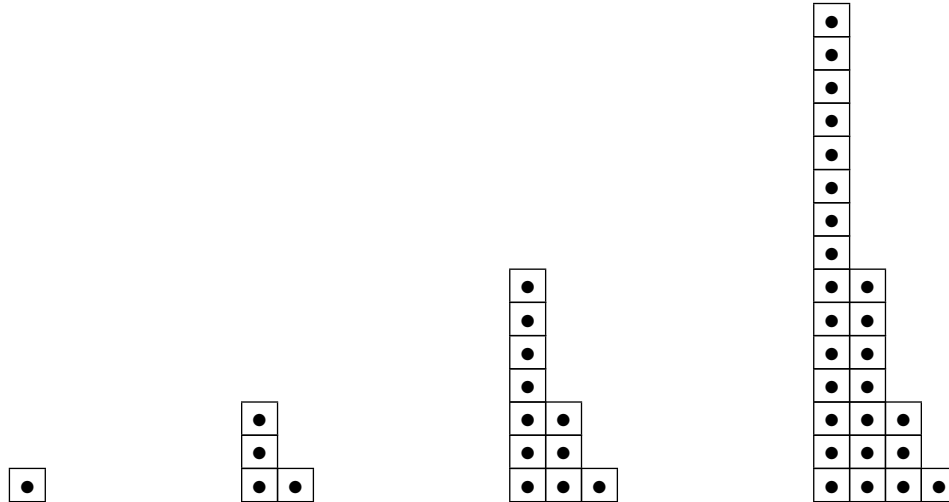
On conjecture que les partages de solution du problème de la diversité maximale sont tous de partages de Cayley-Hickerson. L'heuristique derrière cette conjecture est la supposition de l'existence d'une généralisation « assez régulière » lorsque $k \rightarrow +\infty$ de l'approximation diophantienne de la constante de k -bonacci par la norme de Rauzy.

Dans ce cas, la suite d'entrées $n = 2^m - m - 1$, pour $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ devient la suite de meilleures approximations, car la réponse respective peut être générée avec une seule itération, à savoir le partage de 2-Hickerson conjugué \tilde{h}'_m , tandis que

⁶On applique la formule (2) pour $\log_2 n \leq m + 1$.

⁷C'est une conséquence de la célèbre formule asymptotique pour le nombre de partages de n attribuée à Hardy et Ramanujan, voir [67]. Le symbol Ω doit être interprété selon la notation de Bachmann-Landau.

les autres solutions ont besoin d'un élément supplémentaire : les compositions de Cayley généralisées. Les 4 premières solutions du problème de la diversité maximale élucidé, correspondantes aux meilleures approximations 1, 4, 11 et 26 sont :



La conjecture ci-dessus induit une approximation du vecteur

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^d}, \dots \right)$$

par les réduites compactes générées par la suite de fréquences de parties dans les partages $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^d, \dots)$ construites de la façon suivante,

$$\left(\frac{2^{d-1}}{2^d}, \frac{2^{d-2}}{2^d}, \frac{2^{d-3}}{2^d}, \frac{2^{d-4}}{2^d}, \frac{2^{d-5}}{2^d}, \dots, \frac{2^{d-d}}{2^d}, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

0.3 Conclusions du chapitre

L'atout principal de cette recherche est le lien que l'on a établi entre le problème de la diversité maximale et l'approximation diophantienne simultanée en dimension infinie, qui est une contribution à la littérature sur les deux sujets, traditionnellement étudiés de façon indépendante. Dans les chapitres 3 et 4 on a travaillé avec une version simplifiée (en dimension finie et homogénéisée par la formule de Stirling) de cette relation selon l'approche unificatrice de la théorie de champs de Lagarias.

Trouver un cadre métrique ou topologique d'approximation diophantienne en dimension infinie ayant la même relation avec le problème de la diversité maximale que le champ tétraédrique (voir chapitre 3) avec le champ de Rauzy (voir chapitre 4) en dimension finie est un problème que ce mémoire ouvre pour de recherches ultérieures. Pragmatiquement, le but ultime de cette recherche consiste à trouver un algorithme pour calculer directement, à partir d'un processus d'approximation diophantienne, l'ensemble de partages à diversité maximale pour de valeurs de n qui ne soient pas de meilleures approximations du problème.

CHAPITRE 1

CALCULABILITÉ ET SÉMANTIQUE

Le but de ce chapitre est d'établir une définition d'approximation diophantienne simultanée, qui à différence de la définition classique introduite par Lagarias (voir [45]), ne soit pas dépendante d'une norme, sinon d'un problème d'optimisation discrète. Réinterpréter l'approche combinatoire à l'approximation diophantienne simultanée comme la solution d'une famille de problèmes d'optimisation discrète n'est pas du tout trivial. D'abord il faut garantir que la complexité de Kolmogorov du système complet (l'algorithme qui prend la fonctions et les sous-ensembles, pour retourner le point de minimum) soit finie (voir [50]). Pour cela on doit surmonter deux restrictions qui imposent les nombres réels récursifs : la non-décidabilité de la comparaison et la décidabilité conditionnée de l'ordre (voir [76]). On y réussit grâce à l'introduction du concept de *champ de Lagarias* (définition 1.4.1.) dont sa réductibilité à un algorithme sera démontrée (proposition 1.4.1).

En combinatoire de mots d'habitude les points fixés de substitutions sont utilisés pour construire des objets infinis. Par exemple, le mot de tribonacci peut être défini comme le point fixé de la substitution de tribonacci. Une telle définition descriptive implique implicitement la présence de l'infini actuel, qui est inadmissible d'après le constructivisme, même si l'on peut générer l'objet par un algorithme du point de vue de l'infini potentiel. Donc, pour utiliser d'une façon universelle les définitions basées sur les points fixés, on doit travailler depuis les mathématiques classiques (**ZFC**), mais au même temps il faut avoir une notion objective d'algorithme. Pour assurer l'accomplissement simultané de ces deux propriétés, apparemment contradictoires, nous allons utiliser la *sémantique dénotationnelle*, où la notion de construction est interprétée comme le point fixé d'une fonction continue entre l'espace topologique de Scott et soit même (un concept intérieur à **ZFC**).

1.1 Le théorème du point fixé de Tarski

La sémantique est l'étude de la façon dont le sens est transmis par des signes et le langage. Toute tentative d'introduire l'interprétation d'un langage dans le propre langage est condamnée à tomber dans un *diallèle*. D'après Tarski¹ (voir [93]), pour faire de la sémantique il faut d'abord avoir deux langages, un *langage objet* et un *métalangage*, tels que le deuxième contienne une copie du premier, en plus de ressources pour donner une opinion par rapport à sa syntaxe. Dans ce mémoire le langage objet est le constructivisme (voir [61], [95], [96], [14],[77],[78], [39], [14], [63], [79], [80], [81]), formalisé par **PCF** (où il n'y a que de algorithmes) et le métalangage sont les mathématiques traditionnels (voir [36]) formalisées par **ZFC** (où il n'y a que des ensembles). Plus précisément, on va assigner à chaque algorithme f de **PCF** une signification mathématique $\llbracket f \rrbracket$ en **ZFC**. Même si l'existence de **PCF** est la raison d'être de la sémantique dénotationnelle, dans ce mémoire on ne va pas mentionner **PCF** explicitement, car on ne s'intéresse pas à la syntaxe des algorithmes sinon à la sémantique seulement (voir [86], [87], [72], [33], [65], [92], [82], [98]).

Définition 1.1.1. ([33]) Un sous-ensemble U d'un ensemble partiellement ordonné (D, \sqsubset) est *ordonné filtrant* si et seulement si $U \neq \emptyset$ et pour n'importe quelle paire d'éléments $(x, y) \in U$ il existera un élément $z \in U$ tel que $x \sqsubset z$ et $y \sqsubset z$.

Définition 1.1.2. Un ordre partiel (D, \sqsubset) est *complet* si et seulement si l'élément minimal de U , noté $\sqcup U$, existe pour n'importe quel sous-ensemble ordonné filtrant $U \subset D$. Un ordre partiel complet (D, \sqsubset) est un *domaine* si et seulement si D a un élément minimal, noté par \perp .

Définition 1.1.3. ([33]) Soient C et D deux ensembles ordonnés complets. Une fonction $\beta : C \rightarrow D$ est *continue selon Scott* si et seulement si pour n'importe quel ensemble ordonné filtrant U , $\beta(\sqcup U) = \sqcup \beta(U)$. On utilise la notation $\beta \in C \rightarrow D$ pour indiquer que β est continue². Si β est une fonction partielle continue, on

¹La sémantique de Tarski est une version forte des idées développées par Emmanuel Kant (voir [34]).

²Cette notation polémique a été utilisée en [33].

utilisera la notation $\mathfrak{B} \in C \rightarrow D$.

Remarque. Le nom «continue» est pleinement justifié, car cette relation d'ordre induit une topologie où la continuité selon Scott devient la continuité topologique (voir [98]).

Le point de départ pour définir les algorithmes sémantiquement est le théorème suivant.

Théorème 1.1.1. (*théorème du point fixé de Tarski*) Soit $\mathfrak{B} : D \rightarrow D$ une fonction définie sur un domaine D . Si \mathfrak{B} est continue selon Scott alors elle aura un point fixé minimal donné par la formule

$$\text{fix}(\mathfrak{B}) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}^{(n)}(\perp),$$

où $\mathfrak{B}^{(n)}$ représente le produit de composition de \mathfrak{B} avec soit même n fois.

Démonstration. La démonstration classique est exposée en [94]. Pour une démonstration plus récente : voir [20]. Pour des informations historiques par rapport au théorème 1.1.1 : voir [47]. \square

La *sémantique* (ou signification) d'un algorithme est définie comme le point fixé minimal d'une fonction continue selon Scott. Le théorème du point fixé de Tarski ne garantit pas que l'algorithme³ s'arrête, sinon seulement qu'il soit bien défini. Pour que l'algorithme \mathfrak{A} s'arrête toujours, sous l'hypothèse d'*adéquation computationnelle*, il suffit que le point fixé $\llbracket \mathfrak{A} \rrbracket \in D$ de la fonction d'ordre supérieur $\mathfrak{B} : D \rightarrow D$ soit une fonction totale (voir le chapitre 4 de [92]).

Définition 1.1.4. ([33]) Soient C et D deux ensembles ordonnés complets. Une fonction $\mathfrak{B} : C \rightarrow D$ est *monotone* si et seulement si pour chaque paire $(x, y) \in C^2$, si $x \sqsubset y$ alors $\mathfrak{B}(x) \sqsubset \mathfrak{B}(y)$.

Remarque. La monotonie est une propriété plus faible que la continuité selon Scott.

³Un algorithme dans ce contexte topologique est une approximations par des éléments compacts du domaine.

Théorème 1.1.2. *Une fonction $\mathbb{B} : D \rightarrow D$ est continue selon Scott si elle est la composition de fonctions monotones et sa variable.*

Démonstration. Voir le théorème 3.3 de [89] ou consulter [60] pour plus de détails.

□

Proposition 1.1.3. *Les fonctions suivantes sont continues selon Scott : la constante, la fonction identité, la fonction conditionnelle ($\ll if \gg$).*

Démonstration. Voir [90].

□

On va ajouter à la liste antérieure toutes les fonctions de l'arithmétique élémentaire en nombres entiers et rationnels : la somme, la différence, le produit, le minimum entre deux nombres, la fonction qui dit si un nombre est divisible par un autre nombre, le plus petit diviseur commun, la fonction factorielle, le plus petit nombre qui vérifie une propriété (opérateur μ), etc. Elles sont monotones parce qu'elles peuvent être définies en termes de fonctions μ -récurives, comme Gödel l'a fait en [29]. On applique une propriété appelée *solidité* qui dit que si un algorithme s'arrête pour n'importe quelle entrée, la fonction correspondante à sa sémantique sera totale (voir [28]).

1.2 L'ordre plat

Définition 1.2.1. L'*ordre plat* défini sur l'ensemble⁴ X est l'ensemble ordonné $(X \cup \{\perp\}, \sqsubset)$ tel que $\perp \notin X$ et pour chaque $a, b \in X \cup \{\perp\}$, $a \sqsubset b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = \perp$. On note $X \rightarrow Y$ pour exprimer l'ensemble de fonctions $X \cup \{\perp\} \rightarrow Y \cup \{\perp\}$, appelées *fonctions partielles*. Les *fonctions totales* sont celles définies (différentes de \perp) pour chaque valeur de X .

Proposition 1.2.1. *L'ordre plat $(X \cup \{\perp\}, \sqsubset)$ est un domaine et chaque fonction $f : X \cup \{\perp\} \rightarrow Y \cup \{\perp\}$, entre deux ensembles munis de cet ordre, est continue selon Scott.*

⁴On fait un abus de langage, car l'ordre plat est vraiment défini sur $X \cup \{\perp\}$.

Démonstration. Voir le théorème 6.13 de [84]. \square

À partir d'un ensemble partiellement ordonné complet on peut obtenir d'autres ensembles partiellement ordonnés complets grâce au résultat suivant.

Proposition 1.2.2. *Soient X et Y deux ensembles ordonnés complets et $D := X \rightarrow Y$ l'espace de fonctions continues selon Scott entre C et D . Si l'on définit*

$$f \sqsubset_D g \iff \forall x \in X; \quad f(x) \sqsubset_Y g(x),$$

alors (D, \sqsubset_D) sera un ensemble partialement ordonné complet.

Démonstration. Voir le théorème 3.1 de [89]. \square

1.3 Les nombres réels rékursifs

Alan Turing a introduit le concept de nombre réel rékursif (appelé aussi «réel calculable») en [97]. Il s'agit, selon la définition originelle, d'un nombre réel dont ses chiffres peuvent être générées par une machine de Turing. Plusieurs définitions différentes ont été énoncées par d'autres auteurs (voir [76], [66], [44], [40]) qui peuvent être équivalentes ou pas, selon les hypothèses de calculabilité choisies (par exemple, rékursivité primitive, μ -rékursivité, etc.).

On a choisi la détermination des nombres réels rékursifs par de suites de Cauchy calculables, définies comme les suites de Cauchy ordinaires, sauf que l'on exige en plus que le nombre « N » mentionné par le quantificateur existentiel \exists s'exprime par un algorithme à partir du nombre « ϵ ».

Définition 1.3.1. ([76]) Un *nombre réel rékursif* est une paire d'algorithmes $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ avec de sémantiques $\llbracket \mathfrak{F} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ et $\llbracket \mathfrak{G} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2; \quad \min\{m, n\} > \llbracket \mathfrak{G} \rrbracket(N) \implies |\llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(m) - \llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(n)| < \frac{1}{N}.$$

Un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ (en **ZFC**) est *récuratif* si et seulement s'il existe un nombre réel récuratif $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(n) = a.$$

On utilise la notation \mathbb{R}_c pour l'ensemble des nombres réels récuratifs.

Remarque. Une de principales différences entre l'analyse réel classique et l'analyse réel récuratif est que l'on peut définir en **ZFC** une suite monotone croissante de nombres réels récuratifs, même de nombres rationnels, telle que le supremum ne soit pas récuratif. Une suite vérifiant cette pathologie s'appelle *suite de Specker* (voir [8]).

Lemme 1.3.1. *Pour que $a \in \mathbb{R}$ soit un nombre réel récuratif il suffit qu'il existe une paire d'algorithmes $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, $\llbracket \mathfrak{F} \rrbracket, \llbracket \mathfrak{G} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, telle que*

$$\forall N \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}; \quad n > \llbracket \mathfrak{G} \rrbracket(N) \implies |a - \llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(n)| < \frac{1}{N}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire,

$$|\llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(m) - \llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(n)| \leq |\llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(m) - a| + |a - \llbracket \mathfrak{F} \rrbracket(n)|.$$

□

On rappelle que l'étude de nombres réels récuratifs fait partie de l'analyse constructive (développée en [13]) tandis que l'étude de nombres réels à virgule flottante fait partie de l'analyse numérique (développée en [73]).

Les deux théorèmes suivants expriment la cause fondamentale de difficulté à l'heure de définir en analyse constructive le concept de meilleure approximation diophantienne simultanée comme la solution d'un problème d'optimisation discrète.

Théorème 1.3.2. *Il y a un algorithme pour décider si deux nombres réels récuratifs donnés a et b vérifient $a < b$, à condition de savoir (d'une façon extérieure à l'algorithme) que $a \neq b$.*

Démonstration. Voir le théorème 1 de la page 785 de [76]. \square

Théorème 1.3.3. *Le problème de savoir si deux nombres réels récurrents donnés a et b vérifient $a = b$ n'est pas décidable.*

Démonstration. Voir le théorème 3 de la page 786 de [76]. \square

1.4 Le champ de Lagarias

Notre but est de réinterpréter la méthode d'approximation de Rauzy comme un problème d'optimisation discrète pour la comparer avec d'autres méthodes du même genre (la méthode tétraédrique par exemple). Pour que la généralisation garde le caractère combinatoire il faut que la structure soit calculable, c'est-à-dire, on veut que le problème d'optimisation d'une fonction-coût arbitraire $\llbracket f \rrbracket : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}_c$ sur un sous-ensemble fini quelconque $S \subset \mathbb{N}$ ait une complexité de Kolmogorov finie. Par les théorèmes 1.3.2 et 1.3.3, cet objectif ne est pas réalisable.

Une façon de résoudre cette difficulté théorique est par la composition $\llbracket f \rrbracket = \llbracket a \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket$, où $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket$ codifie chaque point du treillis comme un élément dans un espace vectoriel (de dimension infinie en général) et $\llbracket a \rrbracket$ transforme ce vecteur dans un nombre réel récurrent, vérifiant la linéarité.

Définition 1.4.1. Un *champ de Lagarias* est une structure $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ telle que :

1. \mathfrak{a} est un algorithme dont sa sémantique soit celle d'une application \mathbb{Q} -linéaire $\llbracket a \rrbracket : V \rightarrow \mathbb{R}_c$, où V est un \mathbb{Q} -espace vectoriel (en général de dimension infinie) ;
2. \mathfrak{K} est un algorithme dont sa sémantique soit $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket : \mathbb{N}^k \rightarrow V$.

Définition 1.4.2. Soit S un sous-ensemble fini de \mathbb{N}^k . On dit que \mathfrak{p} est une *meilleure approximation supérieure* du champ de Lagarias $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ de *complexité* S si et seulement si pour chaque $\mathfrak{p}' \in S$, une de deux conditions suivantes est satisfaite :

1. $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathfrak{p}') = \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathfrak{p})$;

$$2. \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') \neq \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) \text{ et } \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') \neq \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) \implies \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') < \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}).$$

Remarque. Du point de vue de la théorie de la calculabilité on ne peut pas substituer les conditions au-dessus par $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') = \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p})$ ou $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') < \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p})$, car la dernière condition est définie conditionnement.

De la même façon qu'on a définie la meilleure approximation supérieure, on peut définir la meilleure approximation inférieure avec un tout petit changement dans l'inégalité.

Définition 1.4.3. Soit S un sous-ensemble fini de \mathbb{N}^k . On dit que \mathbf{p} est une *meilleure approximation inférieure* du champ de Lagarias $(\mathbf{a}, \mathfrak{K})$ de *complexité* S si et seulement si pour chaque $\mathbf{p}' \in S$, une de deux conditions suivantes est satisfaite :

1. $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') = \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p})$;
2. $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') \neq \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p})$ et $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') \neq \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) \implies \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') > \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p})$.

Théorème 1.4.1. Soit $(\mathbf{a}, \mathfrak{K})$ un champ de Lagarias et $2_{<\omega}^{\mathbb{N}^k}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles non-vides finis et ordonnés filtrants de \mathbb{N}^k . Il existe un algorithme \mathfrak{G} , de sémantique $\llbracket \mathfrak{G} \rrbracket : 2_{<\omega}^{\mathbb{N}^k} \longrightarrow \mathbb{N}^k$, tel que pour n'importe quel sous-ensemble fini S de \mathbb{N}^k , muni d'un ordre filtrant, $\llbracket \mathfrak{G} \rrbracket(S)$ retourne la meilleure approximation supérieure (inférieure) par rapport à S . S'il y en a plusieurs, l'algorithme retournera la dernière selon l'ordre filtrant en S .

Démonstration. On va démontrer, sans perte de généralité, seulement le cas des meilleures approximations supérieures.

Considérons que chaque $S \in 2_{<\omega}^{\mathbb{N}^k}$ est une liste $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$ d'éléments de \mathbb{N}^k , avec $m > 0$, où l'ordre entre les index est isomorphe à l'ordre filtrant entre les éléments de S . On définit un ordre plat sur l'ensemble $2_{<\omega}^{\mathbb{N}^k}$ et un autre ordre plat sur l'ensemble \mathbb{N}^k (définition 1.2.1). Par la proposition 1.2.2, l'ensemble de fonctions continues selon Scott entre les deux ensembles ordonnés que l'on vient de définir, $D := 2_{<\omega}^{\mathbb{N}^k} \rightarrow \mathbb{N}^k$, est un ensemble partiellement ordonné complet. L'hypothèse de

l'ordre plat garantit que D soit un domaine dont la fonction $x \mapsto \perp$ joue le rôle de son élément minimal.

On définit la fonction d'ordre supérieur $\beta : D \rightarrow D$, associant à chaque fonction $\mathcal{U} \in D$, la fonction $\beta(\mathcal{U})$ donnée par la loi,

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\} \mapsto \begin{cases} \perp, & \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\} = \perp, \\ \mathbf{p}_1, & m = 1, \\ \mathbf{p}_m, & \text{si } m > 1 \text{ et } (\mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{B}), \\ \mathcal{U}(\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m-1}\}), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.1)$$

où les expressions \mathbf{A} et \mathbf{B} sont déterminées par les formules suivantes, liées à la définition 1.4.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') = \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}), \\ \mathbf{B} &:= \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') \neq \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) \text{ et} \\ &\quad \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') \neq \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) \implies \llbracket \mathfrak{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}') < \llbracket \mathfrak{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

où $\mathbf{p}' = \mathcal{U}(\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m-1}\})$ et $\mathbf{p} = \mathbf{p}_m$ (voir définition 1.4.2). La proposition \mathbf{A} est décidable parce il s'agit d'une comparaison dans un espace vectoriel sur les nombres rationnels (l'égalité entre les nombres rationnels est décidable). Par le théorème 1.3.2, \mathbf{B} est décidable.

L'expression (1.1) est une composition de fonctions monotones (conditionnelle, \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\} \mapsto \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m-1}\}$, etc.) et de l'argument de β , c'est-à-dire, la fonction \mathcal{U} . Par le théorème 1.1.2, la fonction d'ordre supérieur β est continue selon Scott. Par le théorème 1.1.1, β a un point fixé minimal $\llbracket \mathfrak{S} \rrbracket \in D$.

On démontre par induction sur m que $\llbracket \mathfrak{S} \rrbracket(S)$ est effectivement la dernière meilleure approximation du champ de Lagarias $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ de complexité S selon l'ordre filtrant dont S est muni.

cas $m = 1$. Le seul point qui retournera l'algorithme sera la meilleure approximation, car le point \mathbf{p}' dans la définition 1.4.2 sera toujours égal à \mathbf{p} . En conséquence, la condition 1 de cette définition sera satisfaite.

cas $m = u \implies \text{cas } m = u + 1$. Si $\mathbf{p} = \mathbf{p}_m$ est une meilleure approximation, ce point vérifiera la condition 1 de la définition 1.4.2, pour $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_m$ et les conditions 1 ou 2 pour chaque $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_j$, avec $1 \leq j \leq k - 1$. Cette dernière propriété, par l'hypothèse de récurrence, est équivalente au fait que $\mathbf{p}' = \llbracket \mathfrak{S} \rrbracket (\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m-1}\})$ vérifie les conditions 1 et 2, c'est à dire, que les propriétés **A** ou **B** soient satisfaites. Si elles sont effectivement satisfaites, la sortie de l'algorithme, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_m$, sera une meilleure approximation supérieure de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ de complexité S et la dernière selon l'ordre dont S est muni.

Autrement, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_m$ n'est pas une meilleure approximation supérieure du champ de Lagarias $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ de complexité S . Par hypothèse de récurrence, $\llbracket \mathfrak{S} \rrbracket (\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m-1}\})$ sera la dernière meilleure approximation supérieure du champ de Lagarias $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ de complexité S selon l'ordre dont S est muni.

Par le principe d'induction complète on conclut que l'algorithme donne la réponse attendue. \square

On introduit finalement un autre concept par rapport à l'approximation diophantienne simultanée.

Définition 1.4.4. Un vecteur $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1})$ est un guide *supérieur* (*inférieur*) d'un champ de Lagarias $(\mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ si et seulement si

1. $\llbracket \mathfrak{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket$ est bornée supérieurement (inférieurement);
2. pour n'importe quelle suite de vecteurs entiers $n \mapsto (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_k^{(n)})$, si les conditions suivantes sont vérifiées,

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_j^{(n)}}{\|(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_k^{(n)})\|} = \theta_j, \quad 1 \leq j \leq k - 1,,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_k^{(n)})\| = +\infty,$$

alors $n \mapsto \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathcal{R} \rrbracket (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_k^{(n)})$ convergera vers le supremum (l'infimum) de $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathcal{R} \rrbracket$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Définition 1.4.5. On appellera *suite de complexités isobariques* à l'ensemble $S_{n,k} = \{(p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^k : p_1 + 2p_2 + \dots + kp_k \leq n\}$, où $n \geq 1$.

CHAPITRE 2

Q -ANALOGUE TÉTRAÉDRIQUE

L'étude du champ tétraédrique suppose, comme préalable, celle du q -analogue de nombres tétraédriques (A000292 en [69]), c'est-à-dire les nombres F -représentables par le noyau $[4, -6, 4, -1]$. Au lieu d'utiliser la définition classique de q -analogue de coefficients binomiaux (voir [12]) pour faire cette construction, on introduit un nouveau q -analogue orienté vers la F -représentativité dans l'esprit de MacHenry et al. (voir [49]). Grâce à une identité vérifiée par le q -analogue de nombres tétraédriques (dans la forme d'un polynôme isobarique), qui permet de connaître explicitement le numérateur de la dérivée d'un quotient, on pourra démontrer que certaine fonction ne s'annule jamais. Cela va nous permettre de déterminer la direction vers laquelle l'interpolation du champ tétraédrique, par une fonction continue invariante par dilatations, atteint son maximum.

Le champ tétraédrique pourrait se développer, d'une façon plus brève, sans faire allusion au q -analogue des nombres tétraédrique. On considère néanmoins que cette nouvelle structure combinatoire est importante en soit-même et qu'il faut la mettre en évidence.

2.1 Polynômes isobariques

MacHenry et al. ont introduit une approche générale aux mathématiques depuis la théorie de fonctions symétriques qui a réussi à réduire de problèmes en théorie de fonctions arithmétiques (voir [54], [16], [53], [55], [57], [49], [48], [58]) et théorie algébrique de nombres (voir [52], [56]) à un langage commun de suites de polynômes.

2.1.1 Anneau de fonctions symétriques

Avant d'introduire les polynômes isobariques, pour de raison historiques, on va introduire l'anneau de fonctions symétriques, qui est le plus utilisé dans la

littérature malgré les avantages théorique qui offre l'anneau isobarique.

Définition 2.1.1. ([51]) *L'anneau de polynômes symétriques* en k variables $\Lambda_k(\mathbb{Q})$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ invariant par l'action du groupe symétrique \mathbf{S}_k dans les indéterminées x_1, x_2, \dots, x_k (voir chapitre 3 de [12]). L'anneau $\Lambda_k(\mathbb{Q})$ est gradué, donc $\Lambda_k(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1}^k \Lambda_k^j(\mathbb{Q})$, où $\Lambda_k^j(\mathbb{Q})$ est *l'espace homogène de degré j* .

Pour $m \geq n$, soit $\rho_{m,n} : \Lambda_m(\mathbb{Q}) \longrightarrow \Lambda_n(\mathbb{Q})$ la restriction de l'homomorphisme $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_m] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ donné par $x_1^{u_1} \dots x_m^{u_m} \mapsto x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n}$. Soit $\rho_{m,n}^j : \Lambda_m^j(\mathbb{Q}) \longrightarrow \Lambda_n^j(\mathbb{Q})$ la restriction de $\rho_{m,n}$. On définit *l'anneau des fonctions symétriques* comme la somme directe $\Lambda(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \Lambda^j(\mathbb{Q})$, où $\Lambda^j(\mathbb{Q}) = \varprojlim \Lambda_k^j(\mathbb{Q})$.

Définition 2.1.2. Un *partage* α de n , notée $\alpha \vdash n$, est un point $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que

$$\sum_{j=1}^k j\alpha_j = n.$$

Définition 2.1.3. ([55]) Soit l'homomorphisme $\kappa : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_k, \dots]$ défini par

$$e_j \mapsto (-1)^{j+1} t_j, \tag{2.1}$$

où e_j est la j -ème fonction symétrique élémentaire (l'homomorphisme est bien défini car $e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \dots e_k^{\alpha_k}$ est une base de Λ^j pour $\alpha \vdash j$ par le théorème 4.3.7 de [83]). On appellera *anneau isobarique*, noté $\Lambda'(\mathbb{Q})$, l'image de κ . Aussi, on appellera *anneau isobarique en k variables*, noté $\Lambda'_k(\mathbb{Q})$, l'image de $\Lambda_k(\mathbb{Q})$ par κ .

Définition 2.1.4. ([46]) On appellera *poids* du monôme $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_k^{\alpha_k}$ à la somme $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k$.

L'adjectif «isobarique» est dérivé du grec *iso-* (égal) and *baros* (poids). L'anneau gradué $\Lambda'(\mathbb{Q})$ est appelé isobarique parce que chacun de ses espaces homogènes Λ^j est défini comme l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_j]$ tels que le poids de chaque monôme soit j . L'origine historique des polynômes isobariques est dans la forme du polynôme indicateur de cycles (voir [75]). Le mot «isobarique» a été introduit G. Pólya :

«Der Zyklenzeiger ist ein isobares Polynom vom Gewichte s » (page 157 de [71]).

2.1.2 Polynômes de Fibonacci et Lucas généralisés

La caractéristique la plus remarquable de l'approche de MacHenry et al. à la théorie de fonctions symétriques, selon le point de vue de ce mémoire, est la façon de traiter les suites de polynômes symétriques comme des objets en eux-mêmes et pas comme des suites d'objets. Cette idée est introduite en [55], où le module de polynômes isobariques pondérés est défini. Chaque élément de ce module est une suite de polynômes dont son information est codée par un vecteur et l'on peut construire chaque élément de la suite grâce à un algorithme (les identités de Newton). On généralise cette idée à partir de la sémantique dénotationnelle à fin de définir une suite (calculable) d'éléments comme le point fixé d'une fonction d'ordre supérieur continue selon Scott. Même si du point de vue classique il serait préférable, en raison de son caractère plus élémentaire, d'utiliser tout simplement l'induction complète pour définir les d'objets d'une suite, on a choisi d'utiliser le langage de la sémantique dénotationnelle parce qu'on ne s'intéresse pas aux objets isolés sinon aux règles génératrices (algorithmes), qu'on identifie avec les équations de domaines (voir [88], [92], [11], [64], [1]).

Définition 2.1.5. Une *suite calculable de polynômes isobariques* est un algorithme qui \mathfrak{S} dont sa sémantique $\llbracket \mathfrak{S} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda'(\mathbb{Q})$ vérifie que $\llbracket \mathfrak{S} \rrbracket(n) \in (\Lambda'(\mathbb{Q}))^n$ (espace homogène de polynômes à poids constant égal à n).

Définition 2.1.6. ([54]) Supposons que \mathbb{N} et $\Lambda'(\mathbb{Q})$ sont munis d'un ordre plat. Soit $D := \mathbb{N} \rightarrow \Lambda'(\mathbb{Q})$ l'ensemble de fonctions continues selon Scott pour l'ordre mentionné. La *suite de polynômes de Fibonacci généralisés* (en k variables¹, où k est un nombre naturel ou $k = +\infty$), est un algorithme \mathfrak{Fib} dont sa sémantique $\llbracket \mathfrak{Fib} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda'(\mathbb{Q})$ soit le point fixé de $\beta : D \rightarrow D$ déterminée par

¹Si $k = +\infty$, on considère automatiquement que $\min(n, +\infty) := n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{U}) := n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ \sum_{j=1}^{\min(n,k)} t_j \mathfrak{U}(n-j), & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

On utilise la notation F_n pour $\llbracket \mathfrak{Fib} \rrbracket(n)$.

Définition 2.1.7. ([54]) Avec les mêmes hypothèses que dans la définition 2.1.6. La suite de polynômes de Lucas généralisés (en k variables², où k est un nombre naturel ou $k = +\infty$), est un algorithme \mathfrak{Lucas} dont sa sémantique $\llbracket \mathfrak{Lucas} \rrbracket : \mathbb{N} \longrightarrow \Lambda'(\mathbb{Q})$ soit le point fixé de la fonction d'ordre supérieur $\mathfrak{B} : D \longrightarrow D$ déterminée par

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{U}) := n \mapsto \begin{cases} k, & \text{si } n = 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} t_j \mathfrak{U}(n-j) + nt_n, & \text{si } 0 < n < k, \\ \sum_{j=1}^{\min(n,k)} t_j \mathfrak{U}(n-j), & \text{si } n \geq k. \end{cases} \quad (2.3)$$

On utilise la notation G_n pour $\llbracket \mathfrak{Lucas} \rrbracket(n)$.

Selon l'approche de domaines de Scott, les suites de polynômes $\llbracket \mathfrak{Fib} \rrbracket$ et $\llbracket \mathfrak{Lucas} \rrbracket$ sont des objets calculables en eux-mêmes, pas de «suites» $\{F_n\}_{n \geq 0}$ et $\{G_n\}_{n \geq 0}$ dans le sens classique. Par exemple, l'algorithme \mathfrak{Fib} est codée par un nombre de Gödel, qui peut être surmonté par le nombre de Gödel de n'importe quel polynôme de Fibonacci généralisé d'index assez grand. En conséquence, la «suite» de polynômes $\{F_n\}_{n \geq 0}$ dans le sens classique du terme contient une quantité illimitée d'information tandis que l'algorithme \mathfrak{Fib} contient une quantité limitée d'information, qui est une borne supérieure de la complexité de Kolmogorov de la suite. On s'intéresse à la méthode \mathfrak{Fib} pour générer les polynômes $F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$, pas aux polynômes particuliers.

Définition 2.1.8. Soit A un anneau. Si le nombre k est fini, l'évaluation au point $(p_1, p_2, \dots, p_k) \in A^k$ d'une suite calculable arbitraire de polynômes isobariques déterminée par un algorithme \mathfrak{S} est définie comme l'algorithme $\mathfrak{S} \leftarrow (p_1, p_2, \dots, p_k)$ dont sa sémantique $\llbracket \mathfrak{S} \leftarrow (p_1, p_2, \dots, p_k) \rrbracket : \mathbb{N} \longrightarrow A$ soit déterminée par

²Si $k = +\infty$, on considère automatiquement que l'affirmation $n \geq k$ est fausse pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

$$\llbracket \mathfrak{S} \leftarrow (p_1, p_2, \dots, p_k) \rrbracket (n) := \llbracket \mathfrak{S} \rrbracket (n)(p_1, p_2, \dots, p_k).$$

Pour $k = +\infty$, l'évaluation d'une suite calculable arbitraire de polynômes isobariques déterminée par un algorithme \mathfrak{S} est définie seulement pour une suite de valeurs générée par un algorithme \mathfrak{P} tel que $\llbracket \mathfrak{P} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow A$. Dans ce cas, on définit un algorithme $\mathfrak{S} \leftarrow \mathfrak{P}$ dont sa sémantique $\llbracket \mathfrak{S} \leftarrow \mathfrak{P} \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow A$ soit déterminée par

$$\llbracket \mathfrak{S} \leftarrow \mathfrak{P} \rrbracket (n) := \llbracket \mathfrak{S} \rrbracket (n)(\llbracket \mathfrak{P} \rrbracket (0), \llbracket \mathfrak{P} \rrbracket (1), \llbracket \mathfrak{P} \rrbracket (2), \dots, \llbracket \mathfrak{P} \rrbracket (n-1)).$$

Remarque. L'élément d'index zéro de la suite de polynômes isobariques est un scalaire, donc, il n'est pas évalué dans aucune valeur des variables.

Définition 2.1.9. ([49]) Une suite numérique $\{a_n\}_{n \geq 0}$ est *F-représentable* par le noyau $[t_1, t_2, \dots, t_k]$ si et seulement si $a_n = F_{n+d}(t_1, t_2, \dots, t_k)$ pour quelque $d \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.1.1. *Chaque polynôme isobarique F_n correspond, selon l'isomorphisme κ^{-1} (voir définition 2.1.3), au polynôme symétrique complet h_n .*

Démonstration. Voir [55]. □

Proposition 2.1.2. *Chaque polynôme isobarique G_n correspond, selon l'isomorphisme κ^{-1} (voir définition 2.1.3), au polynôme symétrique somme de puissances p_n*

Démonstration. Voir théorème 3.2. de ?? □

2.2 Les polynômes tétraédriques

La définition suivante est dans l'esprit de [49], où les fonctions arithmétiques sont représentées localement par des évaluations de la suite de polynômes de Fibonacci généralisés.

Définition 2.2.1. Le n -ème *nombre tétraédrique* est la valeur

$$\mathcal{T}_n := F_{n-1}(4, -6, 4, -1), \quad n > 0,$$

où F_{n-1} est le $n - 1$ -ème polynôme généralisé de Fibonacci en quatre variables (définition 2.1.6).

Exemple 2.2.1. Les premiers nombres tétraédriques sont :

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969\dots$$

Proposition 2.2.1. *La définition 2.2.1 coïncide avec la définition de la suite A000292 en [69], c'est-à-dire*

$$\mathcal{T}_n = \binom{n+2}{3}. \quad (2.4)$$

Démonstration. Par la proposition 2.1.1 et la définition du polynôme symétrique complet,

$$F_{n-1}(4, -6, 4, -1) = \sum_{\substack{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = n-1 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{N}}} \lambda_1^{u_1} \lambda_2^{u_2} \lambda_3^{u_3} \lambda_4^{u_4}, \quad (2.5)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont les racines du polynôme

$$\mathcal{C}(X) = X^4 - 4X^3 - (-6)X^2 - 4X - (-1).$$

On vérifie sans peine que toutes les racines sont égales à 1, donc,

$F_{n-1}(4, -6, 4, -1)$ est le nombre de solutions entières non négatives de l'équation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = n - 1. \quad (2.6)$$

Il y a une bijection entre les solutions non négatives de l'équation (2.6) et les suites de $(n - 1) + (4 - 1)$ bits dont $4 - 1$ sont en état activé et le reste sont en état désactivé (voir [99]). La quantité de suites de bits vérifiant cette propriété est

$$\binom{(n-1) + (4-1)}{4-1} = \binom{n+2}{3}.$$

Donc, \mathcal{T}_n vérifie la formule (2.4).

□

Remarque. L'interprétation géométrique de \mathcal{T}_n est le nombre de boules dans une pyramide triangulaire (tétraèdre) dans laquelle chaque arête contient $n + 1$ boules (voir [32]).

Du point de vue classique on devrait définir le q -analogue (voir [12]) du nombre tétraédrique \mathcal{T}_n par la formule

$$[\mathcal{T}_n]_q := \begin{bmatrix} n+2 \\ 3 \end{bmatrix}_q, \quad (2.7)$$

où l'expression limitée par $[\]_q$ est le q -analogue du coefficient binomial. Dans le cadre des polynômes isobariques, c'est plus naturel néanmoins de définir le q -analogue $\mathcal{T}_n(q)$ d'un nombre tétraédrique \mathcal{T}_n comme une généralisation de $F_{n-1}(4, -6, 4, -1)$, c'est-à-dire une expression en q telle que elle devienne $F_{n-1}(4, -6, 4, -1)$ lorsque $q \rightarrow 1^-$.

Définition 2.2.2. Le q -analogue du n -ème nombre tétraédrique est le polynôme suivant en q , déterminé par l'expression

$$\mathcal{T}_n(q) := F_{n-1} \left(4q, -(7q-1)q, 4(2q-1)q^2, -(8q-7)q^3, \underbrace{8(q-1)q^{2n}, -8(q-1)q^{2n+1}}_{\text{itérer pour chaque } n \geq 2} \right).$$

Remarque. Même si la quantité de variables est infinie, elle est définie par un algorithme. On doit la calculer donc selon la définition 2.1.8.

Lemme 2.2.2. Le q -analogue de nombres tétraédriques vérifie l'équation de récurrence non homogène

$$\mathcal{T}_n(q) = n^2 q^{n-1} + q \mathcal{T}_{n-2}(q), \quad n \geq 3. \quad (2.8)$$

Démonstration. Soit $\Delta_n(q) := \mathcal{T}_n(q) - q \mathcal{T}_{n-2}(q)$. Il suffit de démontrer par induction complète que $\Delta_n(q) = n^2 q^{n-1}$ sur $n \geq 3$.

$n = 1, 2, 3, 4$. Par l'équation de domaine de \mathfrak{F} (définition 2.1.6), le théorème 1.1.1 et l'algorithme d'évaluation (définition 2.1.8), on peut calculer les premières valeurs de $\mathcal{T}_1(q)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(q) &= 1, \\ \mathcal{T}_2(q) &= 4q, \\ \mathcal{T}_3(q) &= 9q^2 + q, \\ \mathcal{T}_4(q) &= 16q^3 + 4q^2 \\ \mathcal{T}_5(q) &= 25q^4 + 9q^3 + q^2, \\ \mathcal{T}_6(q) &= 36q^5 + 16q^4 + 4q^3.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3(q) - q\mathcal{T}_1(q) &= 3^2q^2, \\ \mathcal{T}_4(q) - q\mathcal{T}_2(q) &= 4^2q^3 \\ \mathcal{T}_5(q) - q\mathcal{T}_3(q) &= 5^2q^4, \\ \mathcal{T}_6(q) - q\mathcal{T}_4(q) &= 6^2q^5.\end{aligned}$$

cas $n \leq u - 1 \implies$ cas $n = u$. Par l'équation de domaine de \mathfrak{F} (définition 2.1.6.) et le théorème 1.1.1,

$$F_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^n t_j F_{n-j}(t_1, t_2, \dots, t_{n-j}), \quad 1 \leq n \leq u + 1.$$

On applique l'algorithme d'évaluation (définition 2.1.8) à l'égalité antérieure (on substitut n par $n + 1$ pour avoir une notation plus simple),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(q) &= 4q\mathcal{T}_{n-1}(q) - (7q-1)q\mathcal{T}_{n-2}(q) + 4(2q-1)q^2\mathcal{T}_{n-3}(q) - (8q-7)q^3\mathcal{T}_{n-4}(q) \\ &\quad + \sum_{j=5}^n 8(q-1)(-q)^{j-1}\mathcal{T}_{n-j}(q), \quad 1 \leq n \leq u. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On obtient la récurrence suivante par la linéarité de (2.9),

$$\begin{aligned} \Delta_u(q) &= 4q\Delta_{u-1}(q) - (7q-1)q\Delta_{u-2}(q) + 4(2q-1)q^2\Delta_{u-3}(q) - (8q-7)q^3\Delta_{u-4}(q) \\ &\quad + \sum_{j=5}^u 8(q-1)(-q)^{j-1}\Delta_{u-j}(q), \quad 1 \leq n \leq u. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence (appliquée à l'équation 2.10),

$$\begin{aligned} \Delta_u(q) &= 4q(u-1)^2q^{u-2} - (7q-1)q(u-2)^2q^{u-3} + 4(2q-1)q^2(u-3)^2q^{u-4} \\ &\quad - (8q-7)q^3(u-4)^2q^{u-5} + \sum_{j=5}^u 8(q-1)(-q)^{j-1}(u-j)^2q^{u-j-1} \\ &= 4(u-1)^2q^{u-1} - (7q^{u-1} - q^{u-2})(u-2)^2 + 4(2q^{u-1} - q^{u-2})(u-3)^2 \\ &\quad - (8q^{u-1} - 7q^{u-2})(u-4)^2 + 8(q-1)q^{u-2}\frac{u^2 - 9u + 20}{2} \\ &= \left(4(u-1)^2 - 7(u-2)^2 + 8(u-3)^2 - 8(u-4)^2 + 4(u^2 - 9u + 20)\right)q^{u-1} \\ &\quad + \left((u-2)^2 - 4(u-3)^2 + 7(u-4)^2 - 4(u^2 - 9u + 20)\right)q^{u-2} \\ &= u^2q^{u-1}. \end{aligned}$$

D'après le principe d'induction complète, l'équation (2.8) est vraie pour tout entier $n \geq 3$. \square

Lemme 2.2.3. *Le q -analogue des nombres tétraédriques vérifie*

$$\mathcal{T}_n(q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 q^{n-1-j}. \quad (2.11)$$

Remarque. Les coefficients de $\mathcal{T}_n(q)$ correspondent aux nombres du triangle A152205 de [69].

Démonstration. Soit $f_n(q) := \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 q^{n-1-j}$. On vérifie sans peine que $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{(n-2)-1}{2} \rfloor$, pour chaque $n \geq 3$. En conséquence,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 q^{n-1-j} = n^2 q^{n-1} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(n-2)-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 q^{n-1-j}.$$

Substituant les sommes par $f_n(q)$ et $f_{n-2}(q)$ dans l'égalité antérieure,

$$f_n(q) = n^2 q^{n-1} + f_{n-2}(q).$$

Par le lemme 2.2.2, il suffit de vérifier que $f_n(q)$ satisfait les mêmes conditions initiales que $\mathcal{T}_n(q)$. On calcule sans peine $f_1(q) = 1$, $f_2(q) = 4q$ et l'on vérifie dans la liste donnée dans la démonstration du lemme 2.2.2 que $f_1(q) = \mathcal{T}_1(q)$ et $f_2(q) = \mathcal{T}_2(q)$ respectivement. Donc $\mathcal{T}_n(q) = f_n(q)$ pour chaque $n \geq 1$. \square

Définition 2.2.3. L'opérateur linéaire $\Psi : \mathbb{Q}[q, X] \longrightarrow \Lambda'(\mathbb{Q})$ est défini sur la base,

$$q^j X^n \mapsto t_{j+1} t_{n-(j+1)}.$$

Définition 2.2.4. On appellera *suite de polynômes isobariques tétraédriques* à $\{T_n\}_{n \geq 3}$ définie par la formule

$$T_n = \Psi(X^n \mathcal{T}_{n-2}(q)), \quad n \geq 3.$$

Théorème 2.2.4. *Pour chaque $n \geq 3$,*

$$T_n = \sum_{\substack{a+b=n \\ 0 < a < b}} (b-a)^2 t_a t_b. \quad (2.12)$$

Démonstration. Par le lemme 2.2.3,

$$\begin{aligned}
T_n &= \Psi(X^n \mathcal{T}_{n-2}(q)) \\
&= \Psi \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(n-2)-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 q^{(n-2)-1-j} X^n \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(n-2)-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 \Psi(q^{(n-2)-1-j} X^n) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(n-2)-1}{2} \rfloor} (n-2j)^2 t_{j+2} t_{n-(j+2)} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(n-2)-1}{2} \rfloor} ((n-(j+2)) - (j+2))^2 t_{j+2} t_{n-(j+2)} \\
&= \sum_{\substack{a+b=n \\ 0 < a < b}} (b-a)^2 t_a t_b.
\end{aligned}$$

□

Définition 2.2.5. On appellera *polynôme isobarique tétraédrique partiel* à $T_{n,k} := \rho'_{n,k}(T_n)$, où $n \geq 3$, $k \geq 1$ et l'homomorphisme d'anneaux $\rho'_{n,k}$ rend commutatif le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_n(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\kappa|_{\Lambda_n(\mathbb{Q})}} & \Lambda'_n(\mathbb{Q}) \\
\rho_{n,k} \downarrow & & \downarrow \rho'_{n,k} \\
\Lambda_k(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\kappa|_{\Lambda_k(\mathbb{Q})}} & \Lambda'_k(\mathbb{Q})
\end{array} \tag{2.13}$$

où $\rho_{n,k}$ et κ apparaissent dans les définitions 2.1.1 et 2.1.3 respectivement. En particulier,

$$\rho'_{n,k}(t_j) = \begin{cases} t_j, & \text{si } j \leq k, \\ 0, & \text{si } j > k. \end{cases} \tag{2.14}$$

Le lemme suivant joue un rôle fondamental dans l'étude de l'entropie tétraédrique (proposition 3.1.9).

Lemme 2.2.5. Soit $Q(X) = 1 - \sum_{j=1}^k t_j X^j$ le polynôme réciproque de $\mathcal{C}(X)$ (définition 3.1.4), alors

$$\left(\frac{\frac{Q(X)-Q(0)}{X}}{Q'(X)} \right)' = - \frac{\sum_{n=3}^{2k} T_{n,k} X^{n-3}}{(Q'(X))^2}. \quad (2.15)$$

Démonstration. Par la règle du quotient,

$$\left(- \frac{\frac{1-Q(X)}{X}}{Q'(X)} \right)' = - \frac{\left(\frac{1-Q(X)}{X} \right)' Q'(X) - \frac{1-Q(X)}{X} Q''(X)}{(Q'(X))^2}.$$

Le numérateur dans l'expression antérieure peut être transformé algébriquement de la façon suivante,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-Q(X)}{X} \right)' Q'(X) - \frac{1-Q(X)}{X} Q''(X) \\ &= - \left(t_1 + t_2 X + t_3 X^2 + \dots \right)' \left(t_1 + 2t_2 X + 3t_3 X^2 + \dots \right) \\ & \quad + \left(t_1 + t_2 X + t_3 X^2 + \dots \right) \left(t_1 + 2t_2 X + 3t_3 X^2 + \dots \right)' \\ &= - \left(t_2 + 2t_3 X + 3t_4 X^2 + \dots \right) \left(t_1 + 2t_2 X + 3t_3 X^2 + \dots \right) \\ & \quad + \left(t_1 + t_2 X + t_3 X^2 + \dots \right) (2 \cdot 1t_2 + 3 \cdot 2t_3 X + \dots) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=2}^k \ell(\ell-1) t_j t_\ell X^{(j-1)+(\ell-2)} - \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=2}^k j(\ell-1) t_j t_\ell X^{(j-1)+(\ell-2)} \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=2}^k (\ell-j)(\ell-1) t_j t_\ell X^{(j-1)+(\ell-2)}. \end{aligned}$$

Par les changements de variables $n = j + \ell$ et $a = \ell$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=2}^k (\ell-j)(\ell-1)t_j t_\ell X^{(j-1)+(\ell-2)}, \\
&= \sum_{n=3}^{2k} \left(\sum_{\substack{a+b=n \\ 1 \leq a \leq k \\ 1 \leq b \leq k}} (a-b)(a-1)t_a t_b \right) X^{n-3} \\
&= \sum_{n=3}^{2k} \left(\sum_{\substack{a+b=n \\ 1 \leq a \leq k \\ 1 \leq b \leq k}} (a-b)^2 t_a t_b \right) X^{n-3} + \sum_{n=3}^{2k} \left(\sum_{\substack{a+b=n \\ 1 \leq a \leq k \\ 1 \leq b \leq k}} (a-b)(b-1)t_a t_b \right) X^{n-3} \\
&= \sum_{n=3}^{2k} \left(\sum_{\substack{a+b=n \\ 1 \leq a \leq k \\ 1 \leq b \leq k}} (a-b)^2 t_a t_b \right) X^{n-3} - \sum_{n=3}^{2k} \left(\sum_{\substack{a+b=n \\ 1 \leq a \leq k \\ 1 \leq b \leq k}} (a-b)(a-1)t_a t_b \right) X^{n-3} \\
&= \sum_{n=3}^{2k} \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{a+b=n \\ 1 \leq a \leq k \\ 1 \leq b \leq k}} (a-b)^2 t_a t_b \right) X^{n-3} \\
&= \sum_{n=3}^{2k} T_{n,k} X^{n-3}.
\end{aligned}$$

Donc, la dérivée du quotient $\frac{Q(X)-Q(0)}{Q'(X)}$ peut s'exprimer de la façon attendue. \square

CHAPITRE 3

LE CHAMP TÉTRAÉDRIQUE

La courbe de Véronèse,

$$\nu := \{(x, x^2, x^3, \dots, x^{k-1}) : x \in \mathbb{R}\},$$

est très importante du point de vue historique parce qu'elle a donnée lieu à la naissance de l'approximation diophantienne en variétés (voir [9]). Le but du champ tétraédrique est de caractériser les points algébriques de cette courbe comme ses vecteurs guides supérieurs (définition 1.4.4).

En effet, soit $\mathcal{C}(X) := X^k - \sum_{j=1}^k t_j X^{k-j}$, où $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in (\mathbb{Q}_{\geq 0})^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $k \geq 2$. On note β la seule racine réelle positive de $\mathcal{C}(X)$. La classe d'équivalence $\mathbb{R}_{>0} \left(c_1, c_2 \frac{1}{\beta}, c_3 \frac{1}{\beta^2}, \dots, c_k \frac{1}{\beta^{k-1}} \right) + \mathbb{R}_{\geq 0} (1 - c_1, 1 - c_2, 1 - c_3, \dots, 1 - c_k)$, où

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad c_j := \begin{cases} 1, & \text{si } t_j \neq 0, \\ 0, & \text{si } t_j = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

peut être caractérisée comme les points de maximum de la fonction

$$L(x_1, x_2, \dots, x_k) := \frac{\sum_{j=1}^k t_j x_j \log \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i x_i}{x_j} \right)}{\sum_{j=1}^k j t_j x_j}, \quad \forall x_j > 0, \quad (3.2)$$

définie sur la frontière (les points avec de coordonnées égales à zéro) par continuité, sauf à l'origine, où elle n'est pas définie au but de donner un caractère projectif à la construction.

3.1 L'équation différentielle tétraédrique

Définition 3.1.1. Une fonction tétraédrique $M : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue (selon la topologie hérité de la droite réelle achevée¹), de classe C^2 dans l'intérieur de son domaine de définition, telle que :

¹Cette condition implique l'existence de $\lim_{x \rightarrow 0^+} M(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x)$.

1. $M(0) \neq 0$ et $M(+\infty) \neq 0$;
2. $M(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$;
3. $M'(x) < 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

Définition 3.1.2. L'équation tétraédrique est l'équation différentielle suivante,

$$f''(x) = \frac{M''(x)}{M'(x)} f'(x) + c \frac{M'(x)}{xM(x)}, \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad (3.3)$$

où $c > 0$ est une constante arbitraire.

Remarque. La constante c dans l'équation (3.3) s'interprète comme l'unité de mesure par rapport à n'importe quel phénomène physique décrit par cette équation.

Définition 3.1.3. Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique, une fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$ est une solution de classe C^2 de l'équation (3.3).

À continuations on déduit certains propriétés des solutions de l'équation (3.3).

Lemme 3.1.1. Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique et $f(x)$, la fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$. Si $x = r \in (0, +\infty)$ est un point stationnaire de $f(x)$ alors $x = r$ sera un point de maximum local strict.

Démonstration. Soit $x = r \in (0, +\infty)$ un point stationnaire. En vertu du théorème de Fermat, l'équation (3.3) devient

$$f''(r) = c \frac{M'(r)}{rM(r)} < 0. \quad (3.4)$$

Par conséquent, $x = r$ est un point de maximum local strict de $f(x)$. \square

Lemme 3.1.2. Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique et $f(x)$ la fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$. Si $x = r \in (0, +\infty)$ et $x = s \in (0, +\infty)$ sont deux points de maximum locaux stricts de $f(x)$, ils seront égaux.

Démonstration. Supposons que $x = r$ et $x = s$ sont deux points de maximum locaux stricts de $f(x)$ et que $r \neq s$. On se restreint, sans perte de généralité, au cas $r < s$. Par le théorème de Fermat, $f'(r) = f'(s) = 0$. Par le théorème de Rolle il existe un point $\xi \in (r, s)$ tel que $f''(\xi) = 0$, mais cela est absurde en raison de l'inégalité (3.4). Par *reductio ad absurdum*, $r = s$. \square

Lemme 3.1.3. *Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique et $f(x)$ la fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$. Si $x = r$ est un point de maximum local strict de $f(x)$, alors $x = r$ sera un point de maximum global de $f(x)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer, en raison du lemme 3.1.2, que ni $x = 0$ ni $x = +\infty$ sont de points de maximum globaux de $f(x)$. Supposons que $x = 0$ est un point de maximum global de $f(x)$. Par le théorème des bornes atteintes, $f(x)$ atteint son minimum sur $[0, r]$. Si σ était le point de minimum de $f(x)$ sur $[0, r]$, on aurait $0 < \sigma < r$, parce que r est un point de maximum strict. Dans ce cas r serait un point stationnaire d'après le théorème de Fermat. Par le lemme 3.1.1, σ devrait être un point de maximum local strict, mais cela contredit le fait que σ soit un point de minimum local. Par *reductio ad absurdum*, $x = 0$ n'est pas un point de maximum global de $f(x)$.

Supposons que $x = +\infty$ est un point de maximum global de $f(x)$. Par le théorème des bornes atteintes, $f(x)$ atteint son minimum sur $[r, +\infty]$ (même si l'ensemble $[r, +\infty]$ n'est pas borné, il est un compact et la fonction est continue sur $[r, +\infty]$). Si σ était le point de minimum de $f(x)$ sur $[r, +\infty]$, on aurait l'inégalité $r < \sigma < +\infty$, parce que r est un point de maximum strict. Dans ce cas r serait un point stationnaire d'après le théorème de Fermat. Par le lemme 3.1.1, σ devrait être un point de maximum local strict, mais cela contredit le fait que σ soit un point de minimum local. Par *reductio ad absurdum*, $x = +\infty$ n'est pas un point de maximum global de $f(x)$. \square

Lemme 3.1.4. *Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique généralisée. Si $f(x)$ est une fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$, alors $f(x) + aM(x) + b$ sera aussi*

une fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$, pour n'importe quelle paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. On vérifie sans peine que,

$$(aM(x) + b)'' = \frac{M''(x)}{M'(x)} (aM(x) + b)', \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad (3.5)$$

par l'identité antérieure et l'équation (3.3),

$$(f(x) + aM(x) + b)'' = \frac{M''(x)}{M'(x)} (f(x) + aM(x) + b)' + c \frac{M'(x)}{xM(x)}. \quad (3.6)$$

Donc, $f(x) + aM(x) + b$ est aussi une fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$. \square

Lemme 3.1.5. *Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique généralisée. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions d'entropie tétraédrique associées à $M(x)$, la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ pourra s'exprimer par la somme $h(x) = aM(x) + b$, pour quelque paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions d'entropie tétraédrique associées à $M(x)$. La fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ est une solution de l'équation (linéaire) (3.3) :

$$h''(x) = \frac{M''(x)}{M'(x)} h'(x), \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (3.7)$$

Par conséquent, $M'(x)h''(x) - M''(x)h'(x) = 0$, c'est-à-dire $\left(\frac{h'(x)}{M'(x)}\right)' = 0$. Ainsi, $\frac{h'(x)}{M'(x)}$ est une constante, notée a . D'où, $h'(x) = aM'(x)$. Donc, il existe un nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = aM(x) + b$. \square

Proposition 3.1.6. *La famille de fonctions d'entropie tétraédrique d'une fonction tétraédrique $M(x)$ peut être paramétrée par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\forall x \in (0, +\infty); \quad f_{a,b}(x) = c \left[M(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} - \log x \right] + aM(x) + b. \quad (3.8)$$

Démonstration. Par les lemmes 3.1.4, 3.1.5 et la linéarité de (3.3), il suffit de vérifier que $f(x) = c \left(M(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} - \log x \right)$ est une solution particulière de (3.3). On le fait à continuation,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= c \left[M(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} - \log x \right]' \\
 &= cM'(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} + cM(x) \frac{1}{xM(x)} - c \frac{1}{x} \\
 &= cM'(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)}, \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= c \left(M'(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} \right)' \\
 &= cM''(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} + c \frac{M'(x)}{xM(x)} \\
 &= \frac{M''(x)}{M'(x)} \left(cM'(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} \right) + c \frac{M'(x)}{xM(x)} \\
 &= \frac{M''(x)}{M'(x)} f'(x) + c \frac{M'(x)}{xM(x)}.
 \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.7. *Soit $M(x)$ une fonction tétraédrique et $f(x)$ la fonction d'entropie tétraédrique associée à $M(x)$. Il existe un point $x = r \in (0, +\infty)$ de maximum global strict de $f(x)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.1.4, il existent deux points $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f_{a,b}(x) = c \left[M(x) \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} - \log x \right] + aM(x) + b$. En raison de l'équation (3.9), pour garantir l'existence d'un point stationnaire de $f(x)$ il suffit de montrer que l'équation suivante a une solution $x \in (0, +\infty)$,

$$\int_1^x \frac{dt}{tM(t)} = -a. \tag{3.10}$$

Par les inégalités $M(0) \neq 0$ et $M(+\infty) \neq 0$, on peut borner $\int_1^x \frac{dt}{tM(t)}$ par deux multiples du logarithme,

$$\frac{\log x}{M(0)} \leq \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} \leq \frac{\log x}{M(+\infty)}. \quad (3.11)$$

Par conséquent, il y a deux points $u, v \in (0, +\infty)$ tels que $\int_1^u \frac{dt}{tM(t)} < -a$ et $\int_1^v \frac{dt}{tM(t)} > -a$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point $\xi \in (u, v)$ tel que $\int_1^\xi \frac{dt}{tM(t)} = -a$. Par le lemme 3.1.1, $x = \xi$ est un point de maximum local. Par le lemme 3.1.2, $x = r$ est le seul point de maximum de $f(x)$. Par le lemme 3.1.3, $x = \xi$ est un point de maximum global. \square

3.1.1 Fonctions tétraédriques polynomiales

Définition 3.1.4. ([31]) Soit $\mathcal{C}(X)$ un polynôme de degré k , son *polynôme réciproque* est $Q(X) = X^k \mathcal{C}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Proposition 3.1.8. *Le polynôme $\mathcal{C}(X)$ a une racine positive et seulement une.*

Démonstration. Par la règle des signes de Descartes (voir [43]), le nombre de racines réelles positives de $\mathcal{C}(X)$ est plus petit ou égal à 1, car il y a un seul changement de signe.

On suppose, sans perte de généralité, que $t_k \neq 0$ (autrement, on pourrait diviser $\mathcal{C}(X)$ par X^j sans changer le nombre de racines positives). En conséquence, $\mathcal{C}(0) < -t_k$, $\mathcal{C}(K) > 0$ pour quelque nombre $K \in \mathbb{R}_{>0}$ assez grand, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{C}(X) = +\infty$. Par le théorème de valeurs intermédiaires, $\mathcal{C}(X)$ a au moins une racine positive. Donc, le polynôme $\mathcal{C}(X)$ possède une racine positive et seulement une. \square

Définition 3.1.5. La *fonction tétraédrique polynomiale associée* à $\mathcal{C}(X)$ est définie par

$$M(x) = \frac{\frac{Q(x)-Q(0)}{x-0}}{Q'(x)}, \quad \forall x > 0, \quad (3.12)$$

Les valeurs $M(0)$ et $M(+\infty)$ sont définies par continuité.

Désormais $M(x)$ sera une fonction tétraédrique associée à $\mathcal{C}(X)$.

Proposition 3.1.9. *La fonction tétraédrique polynomial associée à $\mathcal{C}(X)$ est, en effet, une fonction tétraédrique selon la définition 3.1.1.*

Démonstration. La fonction $M(x)$ est bien définie et continue sur $(0, +\infty)$ car $Q'(x) \neq 0$ parce que $x \mapsto \sum_{j=1}^k t_j x^{j-1}$ est strictement croissante. On vérifie sans peine que $\lim_{x \rightarrow 0^+} M(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = \frac{1}{k}$ (condition 1. de la définition 3.1.1). La fonction $M(x)$ est positive sur $(0, +\infty)$ parce que $1 - Q(x) > 0$ sur le même intervalle (condition 2. de la définition 3.1.1) Finalement, $M(x)$ vérifie la condition 3 de la définition 3.1.1 en raison du lemme 2.2.5,

$$M'(x) = -\frac{\sum_{n=3}^{2k} T_{n,k} x^{n-3}}{(Q'(x))^2}. \quad (3.13)$$

Donc, $M(x)$ est une fonction tétraédrique. \square

Lemme 3.1.10. *La famille de fonctions d'entropie tétraédrique polynomiales associées à $\mathcal{C}(X)$ peut être paramétrée par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de la façon suivante,*

$$\forall x \in (0, +\infty); \quad f_{a,b}(x) = cM(x) \log(1 - Q(x)) - \log x + aM(x) + b. \quad (3.14)$$

Démonstration. Par le lemme 3.1.6 il suffit de calculer,

$$\begin{aligned} & \int_1^x \frac{dt}{tM(t)} \\ &= \int_1^x \frac{-tQ'(t)}{1-Q(t)} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^x \frac{d(1-Q(t))}{1-Q(t)} \\ &= \log(1-Q(x)) - \log(1-Q(1)). \end{aligned}$$

\square

Exemple 3.1.1. Le graphique 3.1 montre la fonction d'entropie tétraédrique $y = f(x)$, où $a = 0$, $b = 0$ et $\mathcal{C}(X) = X^3 - X^2 - X - 1$.

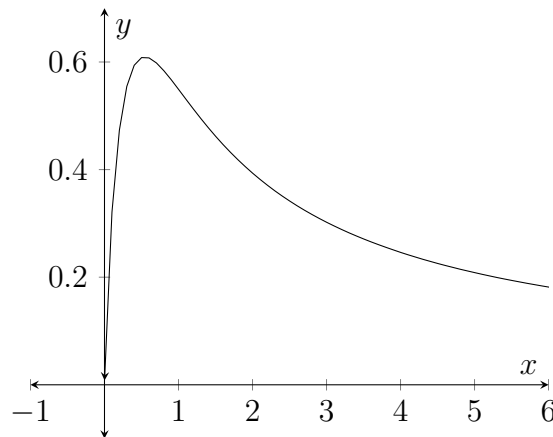


Figure 3.1 : Graphique de la fonction d'entropie tétraédrique (3.14).

Définition 3.1.6. Soient $c_1, c_2, \dots, c_k \in \{0, 1\}$ fixés. Deux suites finies u_1, u_2, \dots, u_k et v_1, v_2, \dots, v_k d'éléments sont (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalentes si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, si $c_j = 1$ alors $u_j = \lambda v_j$. Une suite finie est une *progression géométrique* (c_1, c_2, \dots, c_k) -sélective si et seulement si elle est (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalente à une progression géométrique.

On définit l'ensemble compact

$$\mathcal{X} := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{Q}_{\geq 0})^k : \sum_{j=1}^k j t_j x_j = 1 \right. \\ \left. \text{et } \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}; \quad c_j = 0 \implies x_j = 1 \right\}, \quad (3.15)$$

de manière que la restriction $L|_{\mathcal{X}}$ contienne la même information que L , en raison de son invariance par dilatations. Par le théorème de bornes atteintes il y a au moins un point de maximum de $L|_{\mathcal{X}}$, noté $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \in \mathcal{X}$.

Lemme 3.1.11. Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations de la proposi-

tion 3.1.10,

$$\begin{aligned} & cL\left(\mathbb{R}_{>0}\left(c_1, c_2x, c_3x^2, \dots, c_kx^{k-1}\right) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1 - c_1, 1 - c_2, 1 - c_3, \dots, 1 - c_k)\right) \\ & = f_{0,0}(x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

où la fonction L est définie en (3.2).

Démonstration. On utilise la notation $0 \log \left(\frac{A}{0}\right) = 0$. Par le lemme 3.1.11,

$$\begin{aligned} & cL\left(\mathbb{R}_{>0}\left(c_1, c_2x, c_3x^2, \dots, c_kx^{k-1}\right) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1 - c_1, 1 - c_2, 1 - c_3, \dots, 1 - c_k)\right) \\ & = c \frac{\sum_{j=1}^k c_j t_j x^{j-1} \log\left(\frac{\sum_{i=1}^k c_i t_i x^{i-1}}{c_i x^{j-1}}\right)}{\sum_{j=1}^k j c_j t_j x^{j-1}} \\ & = c \frac{\sum_{j=1}^k t_j x^{j-1} \log\left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i x^{i-1}}{x^{j-1}}\right)}{\sum_{j=1}^k j t_j x^{j-1}} \\ & = c \frac{(t_1 + t_2x + \dots + t_kx^{k-1}) \log(t_1 + t_2x + \dots + t_kx^{k-1}) - \sum_{j=1}^k t_j x^{j-1} \log x^{j-1}}{t_1 + 2t_2x + 3t_3x^2 + \dots + kt_kx^{k-1}} \\ & = c \frac{\left(\sum_{j=1}^k t_j x^{j-1}\right) \log \sum_{j=1}^k t_j x^{j-1} - \left(\sum_{j=1}^k j t_j x^{j-1}\right) \log x + \left(\sum_{j=1}^k t_j x^{j-1}\right) \log x}{t_1 + 2t_2x + 3t_3x^2 + \dots + kt_kx^{k-1}} \\ & = c \frac{\sum_{j=1}^k t_j x^{j-1}}{\sum_{j=1}^k j t_j x^{j-1}} \log\left(x \sum_{j=1}^k t_j x^{j-1}\right) - c \log x \\ & = f_{0,0}(x). \end{aligned}$$

□

Lorsque l'on restreint la fonction-coût du champ tétraédrique à la courbe de Véronèse on obtient la fonction d'entropie tétraédrique (lemme 3.1.11), qui peut être caractérisée par une équation différentielle linéaire non homogène de deuxième ordre à coefficients variables. Le cas limite de cette équation est l'équation différentielle de la fonction d'entropie binaire, qui n'est plus une fonction d'entropie tétraédrique. Donc, dans une généralisation de cette théorie à dimension infinie, l'entropie tétraédrique doit être substitué par l'entropie binaire et ce changement qualitatif aura de conséquences

non triviales dans le comportement diophantienne du champ de Lagarias. Par exemple, le but ne serait plus d'approcher les puissances négatives de la constante de k -bonacci (nombres irrationnel en dimension finie), sinon les puissances négatives de 2 (nombres rationnels en dimension infinie). Dans ce mémoire néanmoins on se limite au cas où la dimension soit finie. Voir un exemple d'approximation diophantienne en dimension infinie en [26].

3.1.2 Propriété extrémale des progressions géométriques

Lemme 3.1.12. *Soit $L(\mathbf{x}) = \frac{F(\mathbf{x})}{G(\mathbf{x})}$, où $F, G : (\mathbb{R}_{\geq 0})^k \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^2 telles que $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$ et $G(\lambda\mathbf{x}) = \lambda G(\mathbf{x}) \neq 0$, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Pour chaque $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \in \mathcal{X}$, si $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est un point de maximum local de la fonction $L|_{\mathcal{X}}$ alors $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ sera une solution de l'équation*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (3.17)$$

Démonstration. Par le théorème de Fermat, tous les points de maximum de L vérifient,

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Par la règle du quotient,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})\frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x})}{G(\mathbf{x})^2} = 0.$$

On multiplie l'équation antérieure par $G(\mathbf{x}) \neq 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{F(\mathbf{x})}{G(\mathbf{x})} \frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Substituant $\frac{F(\mathbf{x})}{G(\mathbf{x})}$ par $L(\mathbf{x})$, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Supposons que $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est un point de maximum local de $L|_{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire, le maximum de L est atteint sur la demi-droite $R = \mathbb{R}_{>0}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$. Donc, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ vérifie l'équation antérieure. \square

Lemme 3.1.13. *Les coordonnées de tous les points de maximum locaux de L sont (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalentes à $(1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \dots, \frac{1}{\beta^{k-1}})$, où β est la racine positive de $\mathcal{C}(X)$.*

Démonstration. Soient $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$ données par

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k t_j x_j \log \left(\frac{\sum_{\ell=1}^k t_\ell x_\ell}{x_j} \right), \quad (3.18)$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k j t_j x_j. \quad (3.19)$$

Prenons $1 \leq p \leq k$ tel que $c_p = 1$. Supposons, sans perte de généralité, que $x_p \neq 0$ (pour obtenir le cas $x_p = 0$ il suffit de passer à la limite lorsque $x_p \rightarrow 0^+$ dans les identités ci-dessous). On calcule sans peine

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_p} = p t_p \quad (3.20)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_p}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_p} (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_k x_k) \log (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_k x_k) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_p} \sum_{j=1}^k t_j x_j \log x_j \\ &= (t_p \log (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_k x_k) + t_p) - (t_p \log x_p + t_p) \\ &= t_p \log \left(\frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_k x_k}{x_p} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituant les expressions au-dessus dans l'équation (3.17), on obtient

$$t_p \log \left(\frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_k x_k}{x_p} \right) = t_p p L(\mathbf{x}). \quad (3.22)$$

Pour chaque index $j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tel que $t_j \neq 0$ et $t_{j+d_j} \neq 0$ pour quelque $d_j > 0$, on calcule la différence entre l'équation (3.22) évaluée en $p = j$ et elle même évaluée en $p = j + d_j$,

$$\log \left(\frac{x_j}{x_{j+d_j}} \right) = d_j L(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Donc, les coordonnées de chaque point de maximum local vérifient $\frac{x_{j+d_j}}{x_j} = x^{d_j} > 0$ à condition que $t_j \neq 0$ et $t_{j+d_j} \neq 0$ pour quelque $d_j > 0$. Substituant $\frac{x_{j+d_j}}{x_j} = x^{d_j}$ par x^{-d_j} dans l'équation antérieure, on obtient

$$\begin{aligned} & d_j L \left(\mathbb{R}_{>0} \left(c_1, c_2 x, c_3 x^2, \dots, c_k x^{k-1} \right) + \mathbb{R}_{\geq 0} (1 - c_1, 1 - c_2, 1 - c_3, \dots, 1 - c_k) \right) \\ &= \log x^{-d_j}. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.1.11,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} f_{0,0}(x) &= \log x^{-d_j} \\ f_{0,0}(x) &= -cd_j \log x \\ cM(x) \log(1 - Q(x)) - cd_j \log x &= -cd_j \log x \\ cM(x) \log(1 - Q(x)) &= 0 \\ \log(1 - Q(x)) &= 0 \\ 1 - Q(x) &= 1 \\ Q(x) &= 0. \end{aligned}$$

Donc, les coordonnées de tous les points de maximum locaux de L sont (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalentes à $\left(1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \dots, \frac{1}{\beta^{k-1}}\right)$, où β est la racine positive de $\mathcal{C}(X)$. \square

Théorème 3.1.14. *Les coordonnées de tous les points de maximum de L sont en progression géométrique (c_1, c_2, \dots, c_k) -sélective, (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalente à $\left(1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \dots, \frac{1}{\beta^{k-1}}\right)$, où β est la racine positive de $\mathcal{C}(X)$.*

Démonstration. Soit $\eta = c_1 + c_2 + \dots + c_k$. En raison de l'invariance par dilata-tions de L et de l'indépendances de coordonnées j -èmes telles que $c_j = 0$, il suf-
fit de démontrer que les coordonnées de tous les points de maximum de $L|_{\mathcal{X}}$
sont en progression géométrique (c_1, c_2, \dots, c_k) -sélective, (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalente à
 $(1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \dots, \frac{1}{\beta^{k-1}})$. On rappelle que l'ensemble \mathcal{X} est défini dans l'expression (3.15).
Il faut remarquer que \mathcal{X} dépend de c_1, c_2, \dots, c_k , même si on ne le met pas en
évidence dans la notation. On va démontrer par induction finie en η l'affirmation
plus générale suivante :

Si $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est un point de maximum global de $L|_{\mathcal{X}}(x_1, x_2, \dots, x_k)$
alors $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ sera un point de maximum local² de L . En plus,
 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est une progression géométrique (c_1, c_2, \dots, c_k) -sélective (c_1, c_2, \dots, c_k) -
équivalent à $(1, \xi, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^{k-1})$ et $\max L|_{\mathcal{X}} = -\log \xi$, où ξ est la seule
racine positive de $Q(x)$ (on remarque que $\xi = \frac{1}{\beta}$).

cas $\eta = 1$. La fonction $L|_{\mathcal{X}}$ devient,

$$\begin{aligned} L|_{\mathcal{X}} &= t_{b_1} x_{b_1} \log \left(\frac{t_{b_1} x_{b_1}}{x_{b_1}} \right) \\ &= t_{b_1} x_{b_1} \log(t_{b_1}), \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $t_{b_1} \neq 0$.

Pour que la solution appartienne à \mathcal{X} il est nécessaire et suffisante que $b_1 t_{b_1} x_{b_1} =$
1. Cette condition est vérifiée par le seul point (en \mathcal{X}) $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ tel que $x_{b_1}^* =$
 $\frac{1}{b_1 t_{b_1}}$ et $x_j^* = 1$ pour $j \neq b_1$. En particulier, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est une progression géométrique
 (c_1, c_2, \dots, c_k) -sélective, car c'est (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalente à un seul élément non nul.
En plus, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est un point de maximum local de L , parce que aucune de
ses coordonnées n'est nulle. On vérifie sans peine que $\xi = (1/t_{b_1})^{1/b_1}$ et $\max L|_{\mathcal{X}} =$
 $\frac{1}{b_1} \log t_{b_1} = -\log \xi$.

²C'est un point de maximum local non strict en général, c'est-à-dire il peut être un point-selle.

cas $1 \leq \eta \leq u - 1 < k \implies$ cas $\eta = u$. Soit b_1, b_2, \dots, b_u la suite finie croissante d'index j tels que $c_j = 1$. La fonction $L|_{\mathcal{X}}$ devient,

$$L|_{\mathcal{X}} = \sum_{j=1}^u t_{b_j} x_{b_j} \log \left(\frac{t_{b_1} x_{b_1} + \dots + t_{b_u} x_{b_u}}{x_{b_j}} \right). \quad (3.25)$$

Soit $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ un point de maximum de $L|_{\mathcal{X}}$. Si $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ n'était pas un point de maximum local de L , quelque x_{b_j} serait zéro, car le point de maximum serait à la frontière de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^k \setminus \{\mathbf{0}\}$. Supposons que $x_{b_{j_0}} = 0$ pour quelque j_0 . Par conséquent, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est aussi le point de maximum d'un problème analogue, avec la seule différence que $c_{j_0} = 0$ et la valeur η est diminuée d'une unité. Par hypothèse de récurrence, la valeur de $\max L|_{\mathcal{X}}$ est $-\log \xi_0$, où ξ_0 est la racine positive de l'équation

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ j \neq j_0}} t_{b_j} x^{b_j} = 1. \quad (3.26)$$

Soit ξ_1 la racine positive de l'équation

$$\sum_{j=1}^u t_{b_j} x^{b_j} = 1. \quad (3.27)$$

La racine positive de l'équation (3.26) est plus grande que la racine positive de l'équation (3.27), car $b_{j_0} \neq 0$ et la fonction

$$x \mapsto \sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ j \neq j_0}} t_{b_j} x^{b_j}$$

est strictement croissante. Par l'inégalité

$$L(1, \xi_1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4, \dots, \xi_1^{k-1}) = -\log \xi_1 > -\log \xi_0, \quad (3.28)$$

on conclut que L n'atteint pas son maximum sur la frontière de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^k \setminus \{\mathbf{0}\}$. Par *reductio ad absurdum*, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est un point de maximum local de L .

Par le lemme 3.1.13, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est (c_1, c_2, \dots, c_k) -équivalent à

$(1, \xi_1, \xi_1^2, \xi_1^3, \dots, \xi_1^{k-1})$.

Par induction finie l'affirmation est démontré. \square

3.2 Construction du champ tétraédrique

3.2.1 Préliminaires

3.2.1.1 Diviseurs bornés

On munira l'ensemble $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ d'un ordre plat (définition 1.2.1), noté \sqsubset . La propriété d'être continue selon Scott pour une fonction $f : (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \cup \{\perp\} \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \cup \{\perp\}$ dans ce cadre est équivalente à

$$\forall x; \quad f(\perp) \sqsubset f(x),$$

c'est-à-dire la fonction évaluée dans un argument indéfini ne peut contenir plus d'information que sont évaluation dans un élément défini. Par la proposition 1.2.2, $D := (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ est un ensemble partiellement ordonné complet. En plus, il s'agit d'un domaine parce que l'élément minimal est la fonction $x \mapsto \perp$.

Soit la fonction d'ordre supérieur $\beta : D \rightarrow D$ déterminée par

$$\beta(\mathcal{U}) := (n, m) \mapsto \begin{cases} \perp, & \text{si } (n, m) = \perp, \\ n, & \text{si } m = 1, \\ \mathcal{U}(n, m-1), & \text{si } m > 1 \text{ et } \frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}, \\ \min\{\mathcal{U}(n, m-1), m\}, & \text{si } m > 1 \text{ et } \frac{n}{m} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.29)$$

La fonction d'ordre supérieur β est définie comme une composition de fonctions monotones (selon \sqsubset) et sa variable, qui est une fonction aussi, \mathcal{U} . Donc, β est continue selon Scott par le théorème 1.1.2. Par le théorème 1.1.1, β a un point fixé minimal $\llbracket \mathbf{div}_c \rrbracket \in D$. Ainsi, l'algorithme \mathbf{div}_c est déterminé sémantiquement, même si on ne s'intéresse pas à sa syntaxe.

3.2.1.2 Diviseurs minimaux

On définit un algorithme \mathbf{div}_{\min} dont sa sémantique $\llbracket \mathbf{div}_{\min} \rrbracket : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ soit déterminée par

$$\llbracket \mathbf{div}_{\min} \rrbracket(n) := \llbracket \mathbf{div}_c \rrbracket(n, n). \quad (3.30)$$

3.2.1.3 Sémantique de nombres premiers

Soit \mathbb{N} muni d'un ordre plat et $D := \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, l'ensemble de fonctions continues selon Scott pour l'ordre mentionné. Gödel a introduit en [29], d'une façon syntactique, un algorithme pour calculer le n -ème nombre premier $\mathbf{premier}$. Dans ce mémoire $\llbracket \mathbf{premier} \rrbracket$ est le point fixé minimal de la fonction d'ordre supérieur continue selon Scott $\beta : D \longrightarrow D$ déterminée par

$$\beta(\mathcal{U}) := n \mapsto \begin{cases} \perp, & \text{si } n = \perp, \\ 2, & \text{si } n = 0, \\ \min\{p \in \mathbb{N} : p > \mathcal{U}(n-1) \text{ et } p = \llbracket \mathbf{div}_{\min} \rrbracket(p)\}, & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

3.2.2 Sémantique du logarithme vectoriel

Proposition 3.2.1. *Les logarithmes naturels de nombres premiers sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} .*

Démonstration. Soient $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ de nombres rationnels, écrits dans la forme réduite. Supposons que

$$\frac{m_1}{n_1} \log p_1 + \frac{m_2}{n_2} \log p_2 + \dots + \frac{m_k}{n_k} \log p_k = 0, \quad (3.32)$$

p_1, p_2, \dots, p_k sont de nombres premiers différents. Si l'on multiplie l'égalité antérieure par le plus petit multiple de dénominateur, on obtiendra

$$u_1 \log p_1 + u_2 \log p_2 + \dots + u_k \log p_k = 0, \quad (3.33)$$

où u_1, u_2, \dots, u_k sont quelque nombres entiers. On applique la fonction exponentielle à l'égalité antérieure,

$$p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_k^{u_k} = 1. \quad (3.34)$$

Par le théorème fondamental de l'arithmétique, un nombre rationnel est égal à 1 si et seulement si tous les exposants dans sa décomposition en nombres premiers sont égaux à zéro. Ainsi, $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$. Par conséquent, $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \dots = \frac{m_k}{n_k} = 0$. Donc, les logarithmes naturels de nombres premiers sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . \square

Soit V l'espace vectoriel de dimension infinie dénombrable généré sur \mathbb{Q} par la base $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_7, \dots$, où les index sont les nombres premiers. On introduit l'ordre plat en $\mathbb{Q}_{>0}$ et V . Par la proposition 1.2.2, l'ensemble de fonctions continues selon Scott $D := \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow V$ est partiellement ordonné. Par continuité de Scott selon l'ordre plat, D contient un élément minimal $x \mapsto \perp$. Donc, D est un domaine. La fonction d'ordre supérieur $\beta : D \rightarrow D$ déterminée par

$$\beta\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{m}{n} \mapsto \begin{cases} \perp, & \text{si } \frac{m}{n} = \perp, \\ \mathbf{0}_V, & \text{si } m = 1 \text{ et } n = 1, \\ \mathcal{U}\left(\frac{\frac{m}{n}}{\llbracket \text{div}_{\min} \rrbracket(m)}\right) + \mathbf{v}_{\llbracket \text{div}_{\min} \rrbracket(m)}, & \text{si } m > 1 \text{ et } n = 1, \\ \mathcal{U}\left(\frac{\frac{m}{n}}{\llbracket \text{div}_{\min} \rrbracket(n)}\right) - \mathbf{v}_{\llbracket \text{div}_{\min} \rrbracket(n)}, & \text{si } n > 1. \end{cases} \quad (3.35)$$

est continue selon Scott en raison du théorème 1.1.2, parce qu'elle est définie à partir d'une composition de fonctions monotones et de son argument \mathcal{U} . On suppose toujours que $\gcd(m, n) = 1$ dans la représentation de $\frac{m}{n}$. Par le théorème 1.1.1, cette fonction a un point fixé minimal $\llbracket \log \rrbracket : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow V$, appelé *logarithme vectoriel*, qui est une fonction totale, car le plus petit diviseur non trivial d'un nombre plus grand que 1 est toujours plus grand que 1.

3.2.3 Logarithme numérique

Soit \mathbf{ln} un algorithme dont sa sémantique $\llbracket \mathbf{ln} \rrbracket : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_c$ assigne à chaque $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ son logarithme naturel $\llbracket \mathbf{ln} \rrbracket(p) = \log p$ déterminé par la suite

$$\llbracket \mathbf{ln} \rrbracket(p) := n \mapsto \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}. \quad (3.36)$$

La différence entre les sémantiques des algorithmes \mathbf{ln} et \mathbf{log} est que la première fonction calcule le logarithme naturel numériquement dans une arithmétique exacte tandis que la deuxième fonction calcule le logarithme naturel symboliquement comme un point dans un espace vectoriel.

Proposition 3.2.2. *L'algorithme \mathbf{ln} détermine un nombre réel récursif.*

Démonstration. Par le développement de Taylor du logarithme,

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) &< \frac{1}{k} < -\log\left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad k \geq 2, \\ \log(k+1) - \log k &< \frac{1}{k} < \log k - \log(k-1), \\ \log(np+1) - \log n &< \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} < \log(np) - \log(np-1), \\ \log(np+1) - \log pn &< \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} - \log p < \log n - \log(np-1), \\ \log\left(1 + \frac{1}{pn}\right) &< \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} - \log p < -\log\left(1 - \frac{1}{pn}\right), \\ \frac{1}{pn+1} &< \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} - \log p < \frac{1}{pn-1}, \end{aligned}$$

Pour obtenir $\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} - \log p < \frac{1}{N}$ il suffit de choisir $n > \llbracket \mathfrak{G} \rrbracket(N) := N + 1$ selon la définition 1.3.1, car $\frac{1}{pn-1} < \frac{1}{p(N+1)-1} = \frac{1}{pN+p-1} \leq \frac{1}{N}$. Par le lemme 1.3.1, la suite détermine un nombre réel récursif. \square

Définition 3.2.1. La fonction linéaire $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket : V \longrightarrow \mathbb{R}_c$ du champ de Lagarias tétraédrique est définie en chaque élément de la base par

$$\llbracket \mathbf{a} \rrbracket(\mathbf{v}_{\llbracket \text{premier} \rrbracket}(n)) := \llbracket \llbracket \mathbf{n} \rrbracket \circ \llbracket \text{premier} \rrbracket \rrbracket(n), \quad (3.37)$$

où $\llbracket \mathbf{n} \rrbracket$ est l'algorithme définie en (3.36).

La fonction vectorielle du champ de Lagarias tétraédrique est déterminée par

$$\llbracket \mathfrak{D}_j \rrbracket(\mathbf{p}) := \begin{cases} \mathbf{0}_V, & \text{si } p_j = 0, \\ t_j p_j \llbracket \log \rrbracket \left(\frac{\sum_{\ell=1}^k t_\ell p_\ell}{p_j} \right), & \text{si } p_j \neq 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) := \begin{cases} \mathbf{0}_V, & \text{si } \forall j, p_j = 0, \\ \frac{1}{\sum_{j=1}^k j t_j p_j} \sum_{j=1}^k \llbracket \mathfrak{D}_j \rrbracket(p_1, p_2, \dots, p_k), & \text{si } \exists j, p_j \neq 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

où (p_1, p_2, \dots, p_k) sont les coordonnées de \mathbf{p} .

Proposition 3.2.3. Soit β la racine réelle positive de $\mathcal{C}(X)$ et c_j le symbol défini en (3.1). Chaque élément de la classe d'équivalence $\mathbb{R}_{>0} \left(1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \dots, \frac{1}{\beta^{k-1}}\right) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1 - c_1, 1 - c_2, 1 - c_3, \dots, 1 - c_k)$ est associé, du point de vue projectif, à un vecteur un guide supérieur de du champ de Lagarias ponderé³.

Démonstration. La fonction $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket$ peut être interpolée par l'expression (3.39) peut être interpolé au valeurs non entiers par la fonction (3.2). Donc, le résultat suit du théorème 3.1.14. \square

³On dit que (a_1, a_2, \dots, a_k) est associé du point de vue projectif à $\left(\frac{a_1}{a_k}, \frac{a_2}{a_k}, \dots, \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)$.

CHAPITRE 4

LE CHAMP DE RAUZY

Rauzy a introduit en [74], pour l'étude de la répartition dans \mathbb{R}^2 modulo \mathbb{Z}^2 de la suite $\{N\eta\}_{n \in \mathbb{N}}$ (η est un vecteur à coordonnées dans un corps cubique), une nouvelle norme, appelée *norme de Rauzy*, permettant d'établir un lien entre les meilleures approximations diophantiennes simultanées et les fréquences des lettres dans un mot combinatoire infini. Cette construction combinatoire, qui est le point fixé d'une substitution de Pisot, conduit à déterminer, lorsque le corps cubique soit le corps de décomposition du polynôme $\mathcal{C}(X) = X^3 - X^2 - X - 1$, la suite de nombres de tribonacci (A000073 en [69]), qui est globalement F -représentable par le noyau¹ $[1, 1, 1]$ (voir [49]), permettant d'exprimer les meilleures approximations diophantiennes simultanées de $\left(\frac{1}{\phi_3}, \frac{1}{(\phi_3)^2}\right)$ par les quotients

$$\left(\frac{F_{n-1,3}(1, 1, 1)}{F_{n,3}(1, 1, 1)}, \frac{F_{n-2,3}(1, 1, 1)}{F_{n,3}(1, 1, 1)} \right),$$

où ϕ_3 est la racine réels positive de $\mathcal{C}(X)$.

Dans ce chapitre on réinterprète le résultat de Rauzy en termes des champs de Lagarias, au but d'établir une comparaison entre la méthode de Rauzy et la méthode tétraédrique définie dans ce mémoire.

4.1 Le tenseur de Rauzy

Soit α une de racine complexe non réelle du polynôme $\mathcal{C}(X) = X^3 - X^2 - X - 1$.

Proposition 4.1.1. *On peut exprimer $\Re\alpha$ et $(\Im\alpha)^2$ à partir de ϕ_3 de la façon suivante,*

¹Cette propriété signifie que l'on peut générer cette suite numérique (décalée) à partir de la suite de polynômes de Fibonacci généralisés évalués dans le noyau, c'est-à-dire $\{F_{n-2,3}(1, 1, 1)\}$.

$$\Re\alpha = -\frac{1}{2}\phi_3 + \frac{1}{2}, \quad (4.1)$$

$$(\Im\alpha)^2 = \frac{3}{4}(\phi_3)^2 - \frac{1}{2}\phi_3 - \frac{5}{4}. \quad (4.2)$$

Démonstration. Les deux racines non réelles du polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$ sont complexes conjuguées parce que tous les coefficients sont réels. Par les identités de Viète,

$$\phi_3 + \alpha + \bar{\alpha} = 1.$$

Par conséquent, $\Re\alpha = \frac{1-\phi_3}{2}$. Par les identités de Viète une fois encore,

$$\phi_3\alpha\bar{\alpha} = 1.$$

D'où, $(\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2 = \frac{1}{\phi_3}$. On développe cette identité,

$$\begin{aligned} (\Im\alpha)^2 &= \frac{1}{\phi_3} - (\Re\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{\phi_3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_3\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}(\phi_3)^2 - \frac{1}{2}\phi_3 - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

□

Définition 4.1.1. ([74]) La *forme quadratique de Rauzy*² est la forme quadratique $R(x, y)$ à coefficients en $\mathbb{Z}[\phi_3]$ donnée par la formule

$$R(x, y) := \left| \left(\alpha + \frac{1}{\phi_3} \right) x + \frac{1}{\phi_3} y \right|^2, \quad (4.3)$$

où x et y sont deux variables réels.

²Rauzy a défini en [74] la norme qui porte son nom. Dans ce mémoire on s'intéresse plus à la forme quadratique qui la détermine.

Proposition 4.1.2. *On peut exprimer $R(x, y)$ explicitement de la façon suivante,*

$$R(x, y) = ((\phi_3)^2 - 3)x^2 + (-(\phi_3)^2 + 3\phi_3 - 2)xy + (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)y^2. \quad (4.4)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} R(x, y) &:= \left| \left(\alpha + \frac{1}{\phi_3} \right) x + \frac{1}{\phi_3} y \right|^2 \\ &= \left| \left(\alpha + (\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) x + \left((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) y \right|^2 \\ &= \left| \left(\Re \alpha + (\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) x + \left((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) y + i(\Im \alpha) x \right|^2 \\ &= \left(\left(\Re \alpha + (\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) x + \left((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) y \right)^2 + (\Im \alpha)^2 x^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \phi_3 + (\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) x + \left((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) y \right)^2 + \left(\frac{3}{4} (\phi_3)^2 - \frac{1}{2} \phi_3 - \frac{5}{4} \right) x^2 \\ &= \left(\left((\phi_3)^2 - \frac{3}{2} \phi_3 - \frac{1}{2} \right) x + \left((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1 \right) y \right)^2 + \left(\frac{3}{4} (\phi_3)^2 - \frac{1}{2} \phi_3 - \frac{5}{4} \right) x^2 \\ &= \left((x+y)(\phi_3)^2 - \left(\frac{3}{2} x + y \right) \phi_3 - \frac{1}{2} x - y \right)^2 + \left(\frac{3}{4} (\phi_3)^2 - \frac{1}{2} \phi_3 - \frac{5}{4} \right) x^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{4} x^2 - xy - y^2 \right) (\phi_3)^2 + \left(\frac{1}{2} x^2 + 3xy + 2y^2 \right) \phi_3 + \left(-\frac{7}{4} x^2 - 2xy \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} (\phi_3)^2 - \frac{1}{2} \phi_3 - \frac{5}{4} \right) x^2 \\ &= (x^2 - xy - y^2) (\phi_3)^2 + (3xy + 2y^2) \phi_3 + (-3x^2 - 2xy) \\ &= ((\phi_3)^2 - 3)x^2 + (-(\phi_3)^2 + 3\phi_3 - 2)xy + (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)y^2. \end{aligned}$$

□

Définition 4.1.2. Le tenseur de Rauzy $\mathbf{G} : \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ est donné par

$$\overleftarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := (\mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{v}, \mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{v}, \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{v}), \quad (4.5)$$

où les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} sont définies par

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} := \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Proposition 4.1.3. *On peut exprimer la mesure d'approximation à $(\frac{1}{\phi_3}, \frac{1}{(\phi_3)^2})$ donnée par la méthode de Rauzy à partir du tenseur de Rauzy,*

$$R\left(x - \frac{1}{\phi_3}z, y - \frac{1}{(\phi_3)^2}z\right) = \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} (\phi_3)^2 \\ \phi_3 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (4.7)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & R\left(x - \frac{1}{\phi_3}z, y - \frac{1}{(\phi_3)^2}z\right) \\ &= R\left(x - ((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1)z, y - (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)z\right) \\ &= ((\phi_3)^2 - 3)\left(x - ((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1)z\right)^2 \\ &\quad + (-(\phi_3)^2 + 3\phi_3 - 2)\left(x - ((\phi_3)^2 - \phi_3 - 1)z\right)\left(y - (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)z\right) \\ &\quad + (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)\left(y - (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)z\right)^2 \\ &= ((\phi_3)^2 - 3)x^2 + (-(\phi_3)^2 + 3\phi_3 - 2)xy + (-(\phi_3)^2 + 2\phi_3)y^2 + ((\phi_3)^2 - \phi_3 - 2)xz \\ &\quad + (-2(\phi_3)^2 + 3\phi_3 + 1)yz + (-\phi_3 + 2)z^2 \\ &= (x^2 - xy - y^2 + xy - 2yz)(\phi_3)^2 \\ &\quad + (3xy + 2y^2 - xz + 3yz - z^2)\phi_3 \\ &\quad + (-3x^2 - 2xy - 2xz + yz + 2z^2)1 \\ &= \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} (\phi_3)^2 \\ \phi_3 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

□

4.2 Construction du champ de Rauzy

Proposition 4.2.1. *La suite*

$$n \mapsto \frac{G_{n+1}(1,1,1)}{G_n(1,1,1)}$$

détermine un nombre réel récurrentif.

Démonstration. Par le lemme 2.1.2, $G_n(1,1,1) = (\phi_3)^n + \alpha^n + \bar{\alpha}^n$. On peut calculer sans peine le nombre $M > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{G_{n+1}(1,1,1)}{G_n(1,1,1)} - \phi_3 \right| \\ &= \left| \frac{(\phi_3)^{n+1} + \alpha^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}}{(\phi_3)^n + \alpha^n + \bar{\alpha}^n} - \phi_3 \right| \\ &= \left| \frac{(\phi_3)^{n+1} + \alpha^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1} - ((\phi_3)^{n+1} + \phi_3 \alpha^n + \phi_3 \bar{\alpha}^n)}{(\phi_3)^n + \alpha^n + \bar{\alpha}^n} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha^n(\alpha - \phi_3) + \bar{\alpha}^n(\bar{\alpha} - \phi_3)}{(\phi_3)^n + \alpha^n + \bar{\alpha}^n} \right| \\ &\leq \left| \frac{\alpha^n(\alpha - \phi_3)}{(\phi_3)^n + \alpha^n + \bar{\alpha}^n} \right| + \left| \frac{\bar{\alpha}^n(\bar{\alpha} - \phi_3)}{(\phi_3)^n + \alpha^n + \bar{\alpha}^n} \right| \\ &\leq M \left(\frac{|\alpha|}{\phi_3} \right)^n. \end{aligned}$$

En conséquence, $\left| \frac{G_{n+1}(1,1,1)}{G_n(1,1,1)} - \phi_3 \right| < \frac{1}{N}$ à condition que $n > \frac{1}{\log\left(\frac{|\alpha|}{\phi_3}\right)} \log\left(\frac{1}{MN}\right)$.

En effet,

$$\begin{aligned} n &> \frac{1}{\log\left(\frac{|\alpha|}{\phi_3}\right)} \log\left(\frac{1}{MN}\right), \\ n \log\left(\frac{|\alpha|}{\phi_3}\right) &< \log\left(\frac{1}{MN}\right), \\ \left(\frac{|\alpha|}{\phi_3}\right)^n &< \frac{1}{MN}, \\ M \left(\frac{|\alpha|}{\phi_3}\right)^n &< \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Par le lemme 1.3.1, la suite détermine un nombre réel récursif. \square

Définition 4.2.1. Le *champ de Rauzy* est un champ de Lagarias $(\mathbf{a}, \mathfrak{K})$ tel que $k = 3$ et V est l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} généré par la base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

La fonction linéaire $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket$ du champ de Rauzy est définie sur la base B de la façon suivante,

$$\llbracket \mathbf{a} \rrbracket(\mathbf{v}_1) := n \mapsto \frac{G_{n+2}(1, 1, 1)}{G_n(1, 1, 1)}, \quad (4.8)$$

$$\llbracket \mathbf{a} \rrbracket(\mathbf{v}_2) := n \mapsto \frac{G_{n+1}(1, 1, 1)}{G_n(1, 1, 1)}, \quad (4.9)$$

$$\llbracket \mathbf{a} \rrbracket(\mathbf{v}_3) := 1. \quad (4.10)$$

La fonction $\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket$ est définie à partir de ses coordonnées dans la base B de la façon suivante,

$$\llbracket \llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(p_1, p_2, p_3) \rrbracket_B := \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \left(\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) \right). \quad (4.11)$$

Proposition 4.2.2. Le vecteur $(\frac{1}{\phi_3}, \frac{1}{(\phi_3)^2})$ est un guide inférieure du champ de Rauzy.

Démonstration. On a construit l'expression $(\mathbf{a}, \mathfrak{K})$ du champ de Lagarias en (4.11)

selon l'expression (4.8). D'où, la valeur zéro est un point d'accumulation de l'image de $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathcal{K} \rrbracket$ en raison du théorème d'approximation de Dirichlet appliqué au vecteur $(\frac{1}{\phi_3}, \frac{1}{(\phi_3)^2}, 1)$. Donc, il reste à démontrer que $R(x, y)$ est définie positive³ pour garantir que $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket \circ \llbracket \mathcal{K} \rrbracket(p_1, p_2, p_3) > 0$ pour $(p_1, p_2, p_3) \neq (0, 0, 0)$. On vérifie sans peine que le coefficient de x , $(\phi_3)^2 - 3$ et le discriminant de $R(x, y)$

$$\left(-(\phi_3)^2 + 3\phi_3 - 2\right)^2 - 4\left((\phi_3)^2 - 3\right)\left(-(\phi_3)^2 + 2\phi_3\right)$$

sont positifs, d'après l'expression (4.4). Donc, $R(x, y)$ est définie positive.

□

4.3 Comparaison

La liste suivante montre la comparaison entre les meilleures approximations supérieures et inférieures selon le champ tétraédrique et le champ de Rauzy, respectivement. On a fait une permutation dans l'ordre de coordonnées au but d'obtenir deux quotients pour s'approcher simultanément au vecteur $(\frac{1}{\phi_3}, \frac{1}{(\phi_3)^2})$.

Même si l'on a développé une sémantique très élégante pour l'arithmétique de précision infinie, du point de vue pratique c'est mieux d'utiliser les nombres réels à virgule flottante, même si pour de valeurs de n trop grand cela ne va plus marcher. Donc, on va utiliser le programme informatique suivant, écrit en SAGE :

```
tribonacci_constant = 1.83928675521416
```

```
def N_Rauzy(x, y):
```

```
    return float( ( (x^2 - x*y - y^2)*tribonacci_constant^2 +
                    (3*x*y + 2*y^2)*tribonacci_constant - (3*x^2 + 2*x*y) ) )
```

```
def L_Rauzy(x, y, z):
```

³Même si la motivation pour définir $R(x, y)$ était le carré de la norme de Rauzy, on n'a pas encore démontré cela dans ce mémoire.

```

return N_Rauzy(x - z/tribonacci_constant, y
              - z/(tribonacci_constant^2))

def max_mult3(n):
    A = []
    for j in range(1,n+1):
        A = A + [(p,float(sum([ (0 if a == 0 else
                                a * log( float(sum(p))/a ))
                                for a in p ])))/j) for
p in WeightedIntegerVectors(j, range(1,4)).list()]
        s = A[[a[1]for a in A].index(max([a[1] for a in A]))][0]
        return (Integer(s[1])/Integer(s[0]), Integer(s[2])/Integer(s[0]))

def min_Rauzy(n):
    A = []
    for j in range(1,n+1):
        A = A + [(p,L_Rauzy(p[0],p[1],p[2]))
                for p in WeightedIntegerVectors(j, range(1,4)).list()]
        s = A[[a[1]for a in A].index(min([a[1] for a in A]))][0]
        return (Integer(s[0])/Integer(s[2]), Integer(s[1])/Integer(s[2]))

```

Après l'exécution du programme informatique antérieur on a obtenu les valeurs suivants, qui montrent l'avantage du champ tétraédrique par rapport au champ de Rauzy selon la suite de complexités isobariques (définition 1.4.5) S_1, S_2, S_3, \dots . On a choisi quelque valeurs de n en particulières au but d'obtenir les approximations en termes de nombres de tribonacci consécutifs.

Tableau 4.I : Comparaison entre le champs tétraédrique et le champ de Rauzy

n	tétraédrique	Rauzy
21	$\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
39	$\left(\frac{7}{13}, \frac{4}{13}\right)$	$\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$
71	$\left(\frac{13}{24}, \frac{7}{24}\right)$	$\left(\frac{7}{13}, \frac{4}{13}\right)$
131	$\left(\frac{6}{11}, \frac{13}{44}\right)$	$\left(\frac{13}{24}, \frac{7}{24}\right)$
241	$\left(\frac{44}{81}, \frac{8}{27}\right)$	$\left(\frac{6}{11}, \frac{13}{44}\right)$
443	$\left(\frac{81}{149}, \frac{44}{149}\right)$	$\left(\frac{44}{81}, \frac{8}{27}\right)$

CONCLUSION

Nous avons trouvé une façon orientée vers l'optimisation discrète de généraliser le concept de meilleure approximation diophantienne simultanée, en préservant le caractère combinatoire de la méthode de Rauzy, c'est-à-dire le champ de Lagarias a garanti l'élimination des pathologies par rapport à la calculabilité de la fonction-coût. On a développé la théorie du champ tétraédrique et les structures liées : le q -analogue des nombres tétraédriques et la fonction d'entropie tétraédrique. On a développé également la théorie du champ de Rauzy pour établir une comparaison entre la performance de chacune de ces méthodes. On a conclu empiriquement que pour la suite de complexités isobariques, la méthode du champ tétraédrique est plus performante, dans le sens de donner des dénominateurs plus grands, que la méthode du champ de Rauzy.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Samson Abramsky. Domain theory in logical form. *Annals of pure and applied logic*, 51(1):1–77, 1991.
- [2] George Andrews. The rogers-ramanujan reciprocal and minc’s partition function. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2):251–256, 1981.
- [3] George E Andrews. Euler’s ”exemplum memorabile inductionis fallacis” and q -trinomial coefficients. *Journal of the American Mathematical Society*, 3(3): 653–669, 1990.
- [4] George E Andrews. q -trinomial coefficients and rogers-ramanujan type identities. Dans *Analytic number theory*, pages 1–11. Springer, 1990.
- [5] George E Andrews et Rodney J Baxter. Lattice gas generalization of the hard hexagon model. iii. q -trinomial coefficients. *Journal of statistical physics*, 47 (3-4):297–330, 1987.
- [6] Tom M Apostol. *Introduction to analytic number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1976.
- [7] Margaret Archibald et Arnold Knopfmacher. The largest missing value in a composition of an integer. *Discrete Mathematics*, 311(8):723–731, 2011.
- [8] Mohammad Ardeshir et Rasoul Ramezani. Decidability and specker sequences in intuitionistic mathematics. *Mathematical Logic Quarterly*, 55(6): 637–648, 2009.
- [9] Dzmityr Badziahin, Victor Beresnevich et Sanju Velani. Inhomogeneous theory of dual diophantine approximation on manifolds. *Advances in Mathematics*, 232(1):1 – 35, 2013. ISSN 0001-8708. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870812003544>.

- [10] N.M. Basu. A note on partitions. *Bulletin of Cal. Math. Soc.*, 44(1):27–30, 1952.
- [11] Nick Benton, Andrew Kennedy et Carsten Varming. Some domain theory and denotational semantics in coq. Dans *Theorem Proving in Higher Order Logics*, pages 115–130. Springer, 2009.
- [12] François Bergeron. *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces*. AK Peters, 2009.
- [13] Matt Bishop. *Foundations of constructive analysis*. 1967.
- [14] Douglas Bridges et Fred Richman. *Varieties of constructive mathematics*, volume 97. Cambridge University Press, 1987.
- [15] Arthur Cayley. Xxxvii. on a problem in the partition of numbers. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 13(86):245–248, 1857.
- [16] Aura Conci, Huilan Li et Trueman MacHenry. Rational convolution roots of isobaric polynomials. *arXiv preprint arXiv :1404.5224*, 2014.
- [17] Sylvie Corteel, Sunyoung Lee et Carla D Savage. Enumeration of sequences constrained by the ratio of consecutive parts. *Sém. Lothar. Combin. A*, 54:2005, 2005.
- [18] Lars Eirik Danielsen et Matthew G Parker. On the classification of all self-dual additive codes over $\text{gf}(4)$ of length up to 12. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 113(7):1351–1367, 2006.
- [19] H Davenport et K Mahler. Simultaneous diophantine approximation. *a () a*, 1(2):23, 1946.
- [20] Federico Echenique. A short and constructive proof of tarski’s fixed-point theorem. *International Journal of Game Theory*, 33(2):215–218, 2005.

- [21] Manfred Einsiedler, Lior Fishman et Uri Shapira. Diophantine approximations on fractals. *Geometric and Functional Analysis*, 21(1):14–35, 2011.
- [22] Leonhard Euler. De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$. *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae*, 12:47–57, 1801.
- [23] Lior Fishman et David Simmons. Extrinsic diophantine approximation on manifolds and fractals. *arXiv preprint arXiv :1406.0785*, 2014.
- [24] Lior Fishman et David Simmons. Unconventional height functions in simultaneous diophantine approximation. *arXiv preprint arXiv :1401.8266*, 2014.
- [25] Lior Fishman, David S Simmons, Mariusz Urba et al. Diophantine approximation and the geometry of limit sets in gromov hyperbolic metric spaces. 2013.
- [26] Lior Fishman, David S Simmons et Mariusz Urbański. Diophantine approximation in banach spaces. *arXiv preprint arXiv :1302.2275*, 2013.
- [27] András Frank et Éva Tardos. An application of simultaneous diophantine approximation in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 7(1):49–65, 1987.
- [28] Johan Glimming. *Computational Soundness and Adequacy for Typed Object Calculus*. Citeseer, 2007.
- [29] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i. *Monatshefte für mathematik und physik*, 38(1):173–198, 1931.
- [30] Hsian Ming Goo. A special algorithm to approximate the square root of positive integer.
- [31] Daniel Guinin et Bernard Joppin. *Algèbre et géométrie MPSI*. Editions Bréal, 1999.

- [32] T Aaron Gulliver. Sequences from integer tetrahedrons. Dans *Int. Math. Forum*, volume 1, pages 517–521, 2006.
- [33] Carl A Gunter, Peter D Mosses et Dana S Scott. Semantic domains and denotational semantics. Rapport technique, DTIC Document, 1989.
- [34] Robert Hanna. Kant, truth and human nature. *British journal for the history of philosophy*, 8(2):225–250, 2000.
- [35] Dean R Hickerson. A partition identity of the euler type. *American Mathematical Monthly*, pages 627–629, 1974.
- [36] David Hilbert et Paul Bernays. *Fondements des mathématiques*, volume 2. Editions L’Harmattan, 2001.
- [37] Paweł Hitczenko et Guy Louchard. Distinctness of compositions of an integer : a probabilistic analysis. *Random Structures & Algorithms*, 19(3-4):407–437, 2001.
- [38] Gerald Hohn. Self-dual codes over the kleinian four group. *Mathematische Annalen*, 327(2):227–255, 2003.
- [39] William Julian, Ray Mines et Fred Richman. Algebraic numbers, a constructive development. *Pacific Journal of Mathematics*, 74(1):91–102, 1978.
- [40] Ker-I Ko. On the definitions of some complexity classes of real numbers. *Mathematical systems theory*, 16(1):95–109, 1983. ISSN 0025-5661. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01744572>.
- [41] Matjaž Konvalinka et Igor Pak. Triangulations of cayley and tutte polytopes. *Advances in Mathematics*, 245:1–33, 2013.
- [42] Matjaž Konvalinka et Igor Pak. Cayley compositions, partitions, polytopes, and geometric bijections. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 123(1):86–91, 2014.

- [43] Werner Krandick et Kurt Mehlhorn. New bounds for the descartes method. *Journal of Symbolic Computation*, 41(1):49–66, 2006.
- [44] A. H. Lachlan. Recursive real numbers. *The Journal of Symbolic Logic*, 28(1):pp. 1–16, 1963. ISSN 00224812. URL <http://www.jstor.org/stable/2271331>.
- [45] Jeffrey Lagarias. Best simultaneous diophantine approximations. ii. behavior of consecutive best approximations. *Pacific journal of mathematics*, 102(1):61–88, 1982.
- [46] Serge Lang. Algebra revised third edition. *GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS-NEW YORK-*, 2002.
- [47] J-L Lassez, VL Nguyen et EA Sonenberg. Fixed point theorems and semantics : A folk tale. *Information processing letters*, 14(3):112–116, 1982.
- [48] Huilan Li et Trueman MacHenry. The convolution ring of arithmetic functions and symmetric polynomials. *arXiv preprint arXiv :1009.1892*, 2010.
- [49] Huilan Li et Trueman MacHenry. Permanents and determinants, weighted isobaric polynomials, and integer sequences. *Journal of Integer Sequences*, 16(2):3, 2013.
- [50] Ming Li et Paul MB Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*. Springer, 2009.
- [51] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. New York, 1995.
- [52] T MacHenry. Fibonacci fields. *Fibonacci Quarterly*, 38(1):17–24, 2000.
- [53] T MacHenry. Generalized fibonacci and lucas polynomials and multiplicative arithmetic functions. *Fibonacci Quarterly*, 38(2):167–173, 2000.

- [54] TRUEMAN MacHENRY et al. A subgroup of the group of units in the ring of arithmetic functions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 29(3): 1055–1066, 1999.
- [55] Trueman MacHenry et Geanina Tudose. Reflections on symmetric polynomials and arithmetic functions. *arXiv preprint math/0106213*, 2001.
- [56] Trueman MacHenry et Kieh Wong. Degree k linear recursions mod (p) . *arXiv preprint arXiv :0712.2403*, 2007.
- [57] Trueman MacHenry et Kieh Wong. A representation of multiplicative arithmetic functions by symmetric polynomials. *arXiv preprint arXiv :0711.3620*, 2007.
- [58] Trueman Machenry, Kieh Wong et al. A correspondence between isobaric rings and multiplicative arithmetic functions. *Rocky Mountain J. Math*, 42: 1247–1290, 2012.
- [59] Martin E Malandro. Asymptotics for restricted integer compositions. Report technique, 2011.
- [60] Zohar Manna. *Mathematical theory of computation*. Courier Dover Publications, 2012.
- [61] Andrei Andreevich Markov. The theory of algorithms. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. VA Steklova*, 42:3–375, 1954.
- [62] Henryk Minc. A problem in partitions : Enumeration of elements of a given degree in the free commutative entropic cyclic groupoid. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 11(04):223–224, 1959.
- [63] Ray Mines et Fred Richman. *A course in constructive algebra*. Springer, 1988.
- [64] Michael W Mislove. Topology, domain theory and theoretical computer science. *Topology and its Applications*, 89(1):3–59, 1998.

- [65] John C Mitchell. *Foundations for programming languages*, volume 1. MIT press Cambridge, 1996.
- [66] Andrzej Mostowski. On computable sequences. *Fundamenta Mathematicae*, 44:37–51, 1957.
- [67] Melvyn B Nathanson. *Elementary methods in number theory*, volume 195. Springer Science & Business Media, 2000.
- [68] A Odlyzko et B Richmond. *On the compositions of an integer*. Springer, 1980.
- [69] OEIS Foundation Inc. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. url<http://oeis.org/A130715>, 2012.
- [70] Marko Petkovšek, Herbert S Wilf et Doron Zeilberger. $A = b$. 1996. *AK Peters, Wellesley, MA*.
- [71] George Pólya. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. *Acta mathematica*, 68(1):145–254, 1937.
- [72] Peter John Potts. *Exact real arithmetic using Mobius transformations*. Thèse de doctorat, PhD-thesis, Imperial College London, 1998. Available from : <http://theory.doc.ic.ac.uk/~pjp>, 1998.
- [73] Anthony Ralston et Philip Rabinowitz. *A first course in numerical analysis*. Courier Dover Publications, 2012.
- [74] Gérard Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 110:147–178, 1982.
- [75] J Howard Redfield. The theory of group-reduced distributions. *American Journal of Mathematics*, pages 433–455, 1927.
- [76] H Gordon Rice. Recursive real numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(5):784–791, 1954.

- [77] Fred Richman. The constructive theory of countable abelian p-groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 45(2):621–637, 1973.
- [78] Fred Richman. Constructive aspects of noetherian rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(2):436–441, 1974.
- [79] Fred Richman. Intuitionism as generalization. Dans *Philosophia Math.* Cite-seer, 1990.
- [80] Fred Richman. Generalized real numbers in constructive mathematics. *Indagationes Mathematicae*, 9(4):595–606, 1998.
- [81] Fred Richman. The fundamental theorem of algebra : a constructive development without choice. *Pacific Journal of Mathematics*, 196(1):213–230, 2000.
- [82] Randall Rustin. *Formal semantics of programming languages*, volume 2. Prentice Hall, 1972.
- [83] Bruce E Sagan. *The symmetric group : representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, volume 203. Springer, 2001.
- [84] David A Schmidt et Denotational Semantics. A methodology for language development. 1997.
- [85] Eric Schmutz et Caroline Shapcott. Part-products of s-restricted integer compositions. *arXiv preprint arXiv :1203.2374*, 2012.
- [86] Dana Scott. *Outline of a mathematical theory of computation*. Oxford University Computing Laboratory, Programming Research Group, 1970.
- [87] Dana Scott. Mathematical concepts in programming language semantics. Dans *Proceedings of the May 16-18, 1972, spring joint computer conference*, pages 225–234. ACM, 1972.

- [88] Dana S Scott. Domains for denotational semantics. Dans *Automata, languages and programming*, pages 577–610. Springer, 1982.
- [89] Frank SK Silbermann et Bharat Jayaraman. A domain-theoretic approach to functional and logic programming. *Journal of Functional Programming*, 2(03):273–321, 1992.
- [90] Kenneth Slonneger et Barry L Kurtz. *Formal syntax and semantics of programming languages*. Addison-Wesley Reading, 1995.
- [91] Z Star. An asymptotic formula in the theory of compositions. *aequationes mathematicae*, 13(3):279–284, 1975.
- [92] Thomas Streicher. *Domain-theoretic foundations of functional programming*. World Scientific, 2006.
- [93] Alfred Tarski. The semantic conception of truth : and the foundations of semantics. *Philosophy and phenomenological research*, 4(3):341–376, 1944.
- [94] Alfred Tarski et al. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific journal of Mathematics*, 5(2):285–309, 1955.
- [95] Anne S Troelstra. Proof theory and constructive mathematics. *Mathematics : Concepts and Foundations*, 2, 1977.
- [96] Anne Sjerp Troelstra et Dirk Van Dalen. *Constructivism in mathematics*, volume 1. Elsevier, 1988.
- [97] Alan Mathison Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *J. of Math*, 58:345–363, 1936.
- [98] Steven Vickers. *Topology via logic*. Cambridge University Press, 1996.
- [99] N IA Vilenkin. *Combinatorics*. Mir, 1972.
- [100] Herbert S Wilf. What is an answer ? *American Mathematical Monthly*, pages 289–292, 1982.

ANNEXE A

LE CHAMP QUADRATFREI

Le but de cette annexe est de démontrer que la définition 1.4.1 n'est pas *ad hoc*, c'est-à-dire, qu'il y a d'autres champs de Lagarias de dimension infinie également naturels, du point de vue arithmétique, en plus que ceux dont l'espace V est généré par les logarithmes de nombres premiers. Les démonstrations de l'existence de points fixés seront exactement les mêmes que pour les définitions correspondantes du champ tétraédrique, c'est-à-dire des applications du théorème 1.1.2. Donc, elles seront omises par souci de brièveté.

A.1 Partie vectorielle

Définition A.1.1. Supposons que les ensembles $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ sont munis d'un ordre plat (définition 1.2.1) et que $D := (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \rightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$ est le domaine de fonctions continues selon Scott pour l'ordre mentionné (proposition 1.2.2). Soit $\llbracket \text{div}_{\square} \rrbracket \in D$ le point fixé minimal de la fonction d'ordre supérieur $\beta : D \rightarrow D$, déterminée par

$$\beta(\mathcal{U}) := (n, m) \mapsto \begin{cases} \perp, & \text{si } (n, m) = \perp, \\ \mathcal{U}(n, m-1), & \text{si } \frac{n}{m^2} \notin \mathbb{Z}, \\ m, & \text{si } \frac{n}{m^2} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Définition A.1.2. Soit div_{\square} l'algorithme dont sa sémantique $\llbracket \text{div}_{\square} \rrbracket : \mathbb{N}\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$ soit déterminée par

$$\llbracket \text{div}_{\square} \rrbracket(n) := \llbracket \text{div}_{\square\square} \rrbracket(n, n). \quad (\text{A.2})$$

Définition A.1.3. Supposons que l'ensemble \mathbb{N} est muni d'un ordre plat et que $D := \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est le domaine de fonctions continues selon Scott correspondantes à l'ordre mentionné. Les nombres entiers positifs sans facteurs carrés sont générés

par l'algorithme `quadratsfrei` dont sa sémantique $\llbracket \text{quadratsfrei} \rrbracket \in D$ est le point fixé minimal de $\beta : D \rightarrow D$, déterminée par

$$\beta(\mathcal{U}) := n \mapsto \begin{cases} \perp, & \text{si } n = \perp, \\ 1, & \text{si } n = 0, \\ \min\{p \in \mathbb{N} : p > \mathcal{U}(n-1) \text{ et } \llbracket \text{div} \rrbracket(p) = 1\}, & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Soit V le \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension infinie $\mathbb{Q}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_{10}, \dots]$, où les index sont les nombres entiers positifs sans facteurs carrés.

Définition A.1.4. On introduit un ordre plat en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et V . Soit $D := \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow V$ le domaine de fonctions continues selon Scott pour l'ordre mentionné. La sémantique $\llbracket \text{racine} \rrbracket \in D$ de l'algorithme *racine carrée vectorielle* `racine` est le point fixé minimal de la fonction d'ordre supérieure continue selon Scott $\beta : D \rightarrow D$, déterminée par

$$\beta(\mathcal{U}) := n \mapsto \begin{cases} \perp, & \text{si } n = \perp, \\ \mathbf{0}_V, & \text{si } n = 0, \\ \mathbf{v}_n, & \text{si } n > 0 \text{ et } \llbracket \text{div} \rrbracket(n) = 1, \\ \llbracket \text{div} \rrbracket \mathcal{U} \left(\frac{n}{\llbracket \text{div} \rrbracket^2} \right), & \text{si } n > 0 \text{ et } \llbracket \text{div} \rrbracket(n) > 1. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Partie numérique

Définition A.2.1. Soit `sqrt` un algorithme dont sa sémantique $\llbracket \text{sqrt} \rrbracket : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_c$ assigne à chaque $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sa racine carrée $\llbracket \text{sqrt} \rrbracket(p) = \sqrt{p}$ déterminée par la suite

$$n \mapsto \frac{a_n}{b_n}, \quad (\text{A.5})$$

où chaque paire (a_n, b_n) est générée par l'algorithme de *Bhaskara-Brouncker*, \mathfrak{B} . Pour construire cet algorithme, on muni d'abord l'ensemble \mathbb{N} d'un ordre plat.

Soit $D := \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ l'ensemble de fonctions continues selon Scott correspondantes à l'ordre mentionné. La sémantique $\llbracket \mathfrak{B} \rrbracket \in D$ est le point fixé minimal de la fonction d'ordre supérieure continue selon Scott $\beta : D \rightarrow D$ déterminée par

$$\beta(\mathcal{U}) := n \mapsto \begin{cases} (1, 1), & \text{si } n = 0, \\ f(\mathcal{U}(n-1)), & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$f(a, b) := (a + bp, a + b). \quad (\text{A.7})$$

Proposition A.2.1. *L'algorithme `sqrt` détermine un nombre réel récursif.*

Démonstration. L'ordre d'approximation de l'algorithme Bhaskara-Brouncker est (voir [30])

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{p} \right| < \frac{1}{b_n^2},$$

où $\llbracket \mathfrak{B} \rrbracket(n) = (a_n, b_n)$. Pour $p = 1$, $a_n = b_n = n$, chaque approximation finie est exacte. Supposons $p > 1$. On va démontrer par induction complète que $a_n \geq n$ et $b_n \geq n$.

$n = 1$. On obtient par définition que $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.

cas $n - 1 \implies$ cas n . Par hypothèse de récurrence,

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}p \geq (n-1) + (n-1)p \geq n \text{ et}$$

$$b_n \geq a_{n-1} + b_{n-1} \geq (n-1) + (n-1) \geq n.$$

Par induction complète, $a_n \geq n$ et $b_n \geq n$.

Donc, pour garantir que $\left| \llbracket \mathfrak{sqrt} \rrbracket(n) - \sqrt{p} \right| < \frac{1}{N}$, il suffit que $n > \llbracket \mathfrak{G} \rrbracket(N) := N$, parce que $\frac{1}{b_n^2} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Par le lemme 1.3.1 la proposition est démontré.

□

Finalement, on peut construire le champ quadratfrei.

Définition A.2.2. La fonction linéaire $\llbracket \mathfrak{a} \rrbracket : V \rightarrow \mathbb{R}_c$ du champ quadratfrei est définie en chaque élément de la base de la façon suivante,

$$\llbracket \mathbf{a} \rrbracket(\mathbf{v}_{\llbracket \text{quadratifrei} \rrbracket(n)}) = \llbracket \text{sqrt} \rrbracket \circ \llbracket \text{quadratifrei} \rrbracket(n). \quad (\text{A.8})$$

La fonction vectorielle du champ de Lagarias quadratifrei est définie par,

$$\llbracket \mathfrak{K} \rrbracket(\mathbf{p}) := \begin{cases} \mathbf{0}_V, & \text{si } \mathbf{p} = \mathbf{0}, \\ \frac{1}{\sum_{\ell=1}^k p_\ell} \sum_{1 \leq i < j \leq k} \llbracket \text{racine} \rrbracket(p_i p_j) & \text{si } \mathbf{p} \neq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$