Université de Montréal

Droites sur les hypergraphes

par

Aryan Bayani

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques pures

juillet 2014

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Droites sur les hypergraphes

présenté par

Aryan Bayani

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Odile Marcotte
(président-rapporteur)

Geňa Hahn
(directeur de recherche)

Gert Sabidussi
(co-directeur)

Khalid Benabdallah
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

SOMMAIRE

Le Théorème de Sylvester-Gallai affirme que dans un ensemble fini S de points dans le plan, où les points ne sont pas tous sur une même droite, il y a une droite qui passe par exactement deux points de S. Chvátal [14] a étendu la notion de droites aux espaces métriques arbitraires et a fait une conjecture généralisant le Théorème de Sylvester-Gallai. Chen [10] a démontré cette conjecture qui s'appelle maintenant le Théorème de Sylvester-Chvátal.

En 1943, Erdős [18] a remarqué un corollaire pour le Théorème de Sylvester-Gallai affirmant que, dans un ensemble fini V de points dans le plan, où les points ne sont pas tous sur une droite, le nombre de droites qui passent par au moins deux points de V est au moins $|V|$. De Bruijn et Erdős [7] ont généralisé ce corollaire, en utilisant une définition généralisée de droite (voir Chapitre 2) et ont prouvé que tout ensemble de n points, où les points ne sont pas tous sur une même droite, détermine au moins n droites distinctes.

Dans le présent mémoire, nous allons étudier les théorèmes mentionnés ci-dessus. Nous allons aussi considérer le Théorème de De Bruijn-Erdős dans le cadre des hypergraphes et des espaces métriques.

Mots-clés Points et droites, Sylvester-Gallai, De Bruijn-Erdős, hypergraphes et espaces métriques.

SUMMARY

The Sylvester-Gallai theorem states that in a finite set S of points in the plane, not all on the same line, there is a line passing through exactly two points of S. Chvátal [14] extended the concept of lines to arbitrary metric spaces and made a conjecture generalizing the Sylvester-Gallai theorem. Chen [10] proved this conjecture which is now called The Sylvester-Chvátal Theorem.
In 1943, Erdős [18] noticed a corollary to the Sylvester-Gallai theorem stating that, in a finite set V of points in the plane, not all on a line, the number of lines that pass through at least two points of V is at least $|V|$. De Bruijn et Erdős [7] generalized this corollary, using a generalized definition of a line (see Chapter 2) and proved that any set of n points, not all on the same line, determines at least n distinct lines.
In this master's thesis, we will study the theorems mentioned above. We will also look at the Theorem of De Bruijn-Erdős within the framework of hypergraphs and various metric spaces.

Keywords Points and lines, Sylvester-Gallai, De Bruijn-Erdős, hypergraphs and metric spaces.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

À la mémoire de Qazi Ibadur Rahman.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier avant tout mon directeur de recherche Geňa Hahn. Personne ne peut demander un superviseur et un directeur meilleur que lui. C'était un grand plaisir d'être son étudiant et de travailler avec lui. Je lui dois beaucoup.

J'aimerais aussi remercier mon co-directeur Gert Sabidussi. Il m'a donné l'honneur d'être son étudiant. Il m'a appris comment penser comme un mathématicien, et m'a fait me sentir comme un mathématicien.

J'aimerais exprimer mes remerciements à mon professeur et mathématicien préféré Vašek Chvátal. J'ai eu le cours le plus intéressant avec lui. J'admire son enseignement. J'ai eu le plus grand honneur de ma vie étudiante lorsqu'il m'a invité à son atelier au printemps 2013.

Je tiens à remercier Abraham Broer. Je le regarde non seulement comme un de mes meilleurs professeurs, mais aussi comme mon mentor. Sans son aide, je n'aurais jamais pu être la personne que je suis aujourd'hui. J'aimerais remercier Antonio Tavares. Un professeur à qui je dois énormément. Il m'a appris beaucoup sur moi et mes études. J'aimerais aussi remercier mes professeurs Matilde Lalín, Ivo G. Rosenberg et Marlène Frigon.

Je remercie Adrian Bondy avec qui j'ai eu le plaisir de travailler lors de l'atelier du printemps 2013. Je me sens extrêmement chanceux d'avoir travaillé avec lui.

Je tiens à remercier Pierre Aboulker, Laurent Beaudou, Ehsan Chiniforooshan, Nicolas Fraiman et Cathryn Supko. Nous avons eu de très bonnes discussions lors de l'atelier du printemps 2013 ensemble. J'ai beaucoup appris à avoir travaillé avec eux. Je veux aussi remercier mes amis Mohammad Bardestani, Saman Barghi, Tayma El Khazen, Léonard Frachet, Hamed Hatami, Colin Jauffret, Amin Ranjbar, Ben Seamone et Yori Zwols. Ils m'ont toujours encouragé et m'ont beaucoup aidé.

Je tiens à remercier madame Odile Marcotte pour tous ses commentaires, suggestions et corrections de mon mémoire.

Ce mémoire est dédié à la mémoire de Qazi Ibadur Rahman. Il me manquera, sa mémoire est gravée dans mon esprit.

INTRODUCTION

Dans le présent mémoire, je fais une synthèse des résultats sur le sujet des points et des droites. La majorité des résultats présentés sont dus à V. Chvátal (et à ses collaborateurs). Après avoir fait le cours Discrete Mathematics of Paul Erdős donné par V. Chvátal, je me suis davantage intéressé à ce sujet. Les résultats sans référence de ce mémoire ont été prouvés et présentés dans un atelier donné à l'université Concordia au printemps 2013, sous la direction de V. Chvátal. J'étais un des participants de cet atelier.

Théorème de Sylvester-Gallai

P. Erdős a écrit dans [19] qu'en 1933, lorsqu'il lisait le livre «Anschauliche Geometrie» de Hilbert et Cohn-Vossen, la conjecture suivante lui est venue :

- Soit $x_1, \cdots, x_n$ un ensemble fini de points dans le plan, qui ne sont pas tous sur une même droite. Alors, il y a une droite qui passe par exactement deux de ces points.

Il s'attendait à ce que cette conjecture soit facile à démontrer, mais à sa grande surprise et déception il n'a pas pu trouver de preuve. T. Gallai a trouvé la preuve après qu'Erdős lui ait soumis la conjecture. L. M. Kelly a remarqué quelques années plus tard que la conjecture n'était pas nouvelle. Elle avait été publiée par J. J. Sylvester dans *Educational Times* [29] en 1893. Erdős a confirmé que la preuve de Gallai était néanmoins originale. On ne sait pas si Sylvester avait une preuve de cette conjecture, qui est aujourd'hui connue sous le nom de Théorème de Sylvester-Gallai. Dans le présent mémoire, on verra une preuve donnée par L. M. Kelly.

V. Chvátal, dans [14], a donné une définition de droite dans les espaces métriques arbitraires, puis a fait la conjecture suivante :

- Soit (V, d) un espace métrique tel que $1 < |V| < \infty$, alors V contient deux points distincts a et b tels que la droite $\overline{ab}$ est : soit égale à $\{a, b\}$, soit égale à V.

Cette conjecture est une généralisation du Théorème de Sylvester-Gallai. Elle est connue aujourd'hui sous le nom de Théorème de Sylvester-Chvátal et a été prouvée par Chen [10]. Dans le présent mémoire, cette preuve sera étudiée en détail dans le Chapitre 1.

Théorème de De Bruijn-Erdős

En 1943, Erdős [18] a démontré un corollaire pour le Théorème de Sylvester-Gallai :

- Soit V un ensemble fini de points dans le plan, les points de V pas tous sur une droite ; alors le nombre de droites qui passent par au moins deux points de V est au moins $|V|$.

En 1948, De Bruijn et Erdős [7] ont prouvé un théorème qui généralise cet énoncé. Celui-ci est connu aujourd'hui sous le nom de Théorème de De Bruijn-Erdős. Il faut mentionner qu'il y a un autre théorème connu sous le même nom. Il concerne le nombre chromatique des graphes infinis et apparaît dans De Bruijn et Erdős [8].

Voici le Théorème de De Bruijn-Erdős :

- Soient m et n des entiers positifs tels que $n \geq 2$. Soit V un ensemble de n points. Soit E une famille de m sous-ensembles de V telle que $2 \leq |L| \leq n - 1$ pour $L \in E$ et telle que toute paire de points de V appartient à exactement un membre de E. Alors, $m \geq n$, et $m = n$ si et seulement si :

  (1) E est de type $\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\},\ \{p_1, p_n\},\ \{p_2, p_n\}, ..., \{p_{n-1}, p_n\}$

  ou,

  (2) $n = k(k-1) + 1$ avec chaque membre de E contenant k points de V et chaque point de V contenu dans k membres de E.

Nous allons voir deux preuves du Théorème de De Bruijn-Erdős dans le Chapitre 2 dont une preuve bijective.

Chen [10] a prouvé la généralisation du Théorème de Sylvester-Gallai énoncé précédemment. Dans le même esprit de généraliser le Théorème de De Bruijn-Erdős, Chen et Chvátal [11] ont posé la question suivante :

- Vrai ou faux ? Tout espace métrique fini (X, d), où aucune droite ne contient tous les points de X, définit au moins $|X|$ droites distinctes.

Dans le Chapitre 3, on verra des généralisations du Théorème de De Bruijn-Erdős avec des variations différentes pour les hypergraphes, ainsi que des bornes sur le nombre de droites définies sur un hypergraphe. De cette façon, on verra que l'énoncé ci-dessus est faux dans le cadre général (hypergraphes).

Dans le Chapitre 4, on étudiera le Théorème de De Bruijn-Erdős pour des espaces métriques différents. Ainsi, on verra quelques espaces métriques qui ont soit une droite qui contient tous les points de l'espace, soit déterminent au moins $|X|$ droites distinctes (ce qu'on appellera *la propriété de De Bruijn-Erdős*).

Chapitre 1

LE THÉORÈME DE SYLVESTER-GALLAI

Dans ce chapitre, nous allons voir le Théorème de Sylvester-Gallai, ainsi qu'une généralisation de ce théorème (dans un espace métrique arbitraire) connue sous le nom de Théorème de Sylvester-Chvátal. Par la suite, on va regarder une application du Théorème de Sylvester-Chvátal aux designs.

Théorème 1.1 (Sylvester-Gallai)**.** *Soit S un ensemble fini de points dans le plan dont les points ne sont pas tous sur une même droite. Il y a une droite qui passe par exactement deux points de S.*

Nous allons regarder une preuve du théorème donnée par L. M. Kelly [15].

Démonstration. Parmi tous les triplets x, y, z de points dans S tels que z n'est pas sur la droite $\overline{xy}$, choisissons-en un qui minimise la distance de z à $\overline{xy}$.
On sait qu'un tel triplet existe car par l'hypothèse les points de S ne sont pas tous colinéaires.
On montre maintenant que $\overline{xy}$ passe seulement par x et y. Supposons le contraire : il y a au moins trois points de S sur $\overline{xy}$. Sur cette droite choisissons le point p qui est le plus proche du point z. Ce point p divise la droite en deux demi-droites qui se rejoignent au point p. Au moins une de ces deux demi-droites contient au moins deux points de S, appelons-les p_1, p_2, tels que p_1 est plus proche de p (ou même possiblement égal à p, la figure ci-dessous).

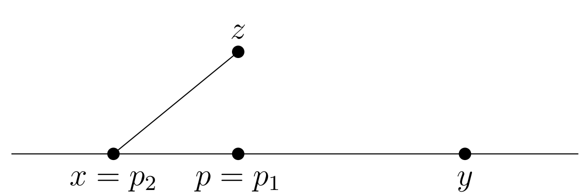

Figure 1.1. Le cas où p_1 est égal à p.

Maintenant, p_1 est plus proche de $\overline{zp_2}$ que z de $\overline{xy}$. Contradiction. $\square$

En 1943, Erdős [18] a démontré un corollaire pour le Théorème de Sylvester-Gallai.

Théorème 1.2. *Soit V un ensemble fini de points dans le plan dont les points ne sont pas tous sur une même droite. Le nombre de droites qui passent par au moins deux points de V est au moins $|V|$.*

DÉMONSTRATION. Par induction sur $|V|$. Par le Théorème de Sylvester-Gallai, on sait qu'il existe deux points x et y tels que $\overline{xy}$ ne passe par aucun autre point. Si les points $V - \{x\}$ ne sont pas tous sur une droite, alors par hypothèse d'induction on a au moins $|V| - 1$ droites distinctes qui passent par au moins deux points de $V - \{x\}$. Par le choix de x toutes ces droites sont différentes de $\overline{xy}$.
Si les points de $V - \{x\}$ sont tous sur une droite, alors cette droite et les $|V| - 1$ droites $\overline{xz}$ avec $z \in V - \{x\}$ sont toutes distinctes. $\square$

1.0.1. Le théorème de Sylvester-Chvátal

Dans la présente section nous allons étudier une généralisation du Théorème de Sylvester-Gallai [29, 15].

Définition 1.3. *Une* métrique *ρ sur un ensemble V est une fonction*

$$\rho : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\forall\, u, v \in V$:

(1) $\rho(u, v) \geq 0$ *et* $\rho(u, v) = 0$ *si et seulement si* $u = v$;
(2) $\rho(u, v) = \rho(v, u)$;
(3) $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

L'espace métrique (V, ρ) *est l'ensemble V avec la métrique ρ définie sur V.*

Dans un espace métrique (fini ou infini) (V, ρ) on définit la relation ternaire $\mathcal{B}(\rho)$ sur V par :

$$(u, v, w) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow u, v, w \text{ sont tous distincts et } \rho(u, w) = \rho(u, v) + \rho(v, w).$$

La relation ternaire $\mathcal{B}(\rho)$ peut nous indiquer que v est entre u et w. On peut écrire $[uvw]$ pour $(u, v, w) \in \mathcal{B}$ (notation adoptée par Menger [24], où elle est écrite sans les crochets).

Définition 1.4. *Une* droite $\overline{ab}$ *peut être définie de la façon suivante :*

$$\{x : [xab]\} \cup \{a\} \cup \{x : [axb]\} \cup \{b\} \cup \{x : [abx]\},$$

où a et b sont appelés les générateurs *de la droite $\overline{ab}$.*

Avec cette définition une généralisation directe du Théorème de Sylvester-Gallai n'est pas vraie.

Exemple : Soit V un espace métrique avec les points u, v, x, y, z tel que :

$$\rho(u,v) = \rho(v,x) = \rho(x,y) = \rho(y,z) = \rho(z,u) = 1,$$

$$\rho(u,x) = \rho(v,y) = \rho(x,z) = \rho(y,u) = \rho(z,v) = 2.$$

Ici on a $\overline{vy} = \{v, x, y\}$ et $\overline{xy} = \{v, x, y, z\}$ (une droite qui est un sous-ensemble d'une autre). Ainsi, il n'y a pas de droite qui contient seulement deux points ni une qui contient tous les points.

Si on veut que le théorème reste vrai, il nous faut une définition différente de droite. Chvátal [14] a donné une autre définition de droite dans un espace métrique arbitraire qui permet de généraliser le théorème.

Regardons la définition de Chvátal [14]. La relation ternaire $\mathcal{B}(\rho)$ est transformée en un ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho))$ de sous-ensembles de cardinalité trois de V (où l'ordre des éléments de chaque triplet est oublié) :

Définition 1.5. *(i)* $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho)) = \{\{a,b,c\} : (a,b,c) \in \mathcal{B}(\rho)\}$

(ii) Une famille $\mathcal{A}(\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho)))$ de sous-ensembles de V est définie par :

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho))) = \{S \subseteq V : \textit{aucun } T \textit{ dans } \mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho)) \textit{ a } |T \cap S| = 2\}.$$

La famille $\mathcal{A}(\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho)))$, qu'on note $\mathcal{A}$, est fermée sous l'intersection (par exemple si (V, ρ) est un espace Euclidien, alors $\mathcal{A}(\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho)))$ définit ses sous-espaces affines).

Pour tout sous-ensemble W de V définissons :

$$\mathcal{C}(W) = \bigcap_{W \subseteq S \in \mathcal{A}} S.$$

Ainsi, si W et V sont finis, alors $\mathcal{C}(W)$ est la valeur retournée de l'algorithme suivant :

$S = W$;
tant que un T dans $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho))$ a $|T \cap S| = 2$
faire $S \leftarrow S \cup T$ **fin ;**
retourner S;

Pour voir que l'algorithme se termine, il faut remarquer que $|W| \leq |V|$, ce qui veut dire que $|S|$ pourrait être au plus égal à $|V|$ et chaque itération diminue le nombre de triplets qui intersectent S en 2 points. Cela implique que la boucle s'arrête définitivement.

Définition 1.6. *Pour toute paire de points distincts a et b de V, la* droite $\overline{ab}$ *est définie comme $\mathcal{C}(\{a, b\})$, où a et b sont appelés les* générateurs *de la droite.*

Pour voir la relation entre les définitions 1.4 et 1.6, regardons, par exemple, ce que $[abc]$ veut dire dans le sens de la définition de Chvátal [14]. Par $[abc]$, nous avons $\rho(a, b) + \rho(b, c) = \rho(a, c)$, ce qui veut dire qu'on a $(a, b, c) \in \mathcal{B}$. Par la Définition 1.5, nous aurons $\{a, b, c\}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{B}(\rho))$. Maintenant, la droite engendrée par a et c contient le point b étant donné que $|\{a, b, c\} \cap \{a, c\}| = 2$.

Théorème 1.7 (Sylvester-Chvátal [10])**.** *Soit (V, ρ) un espace métrique tel que $1 < |V| < \infty$. Alors V contient deux points distincts a et b tels que la droite $\overline{ab}$ est soit égale à $\{a, b\}$, soit égale à V.*

Le Théorème de Sylvester-Gallai est un cas particulier du Théorème de Sylvester-Chvátal où (V, ρ) est un sous-espace fini d'un plan Euclidien.

Démonstration. Donnée par Chen [10]. Soit V notre espace métrique fini avec au moins deux points. Soit ρ la métrique de V.

Observation : Si tout triplet de points de V est dans une droite, alors il y a une droite qui contient tous les points de V.

Preuve de l'observation : Considérons une droite maximale L (par rapport à l'inclusion des ensembles). On va montrer que $L = V$. Supposons le contraire, donc on a un point c où $c \notin L$. Soit L la droite $\overline{ab}$, où a et b sont des générateurs de L. Par hypothèse, on a que les points a, b, c sont tous les trois dans une droite quelconque. Cette droite contient $L \cup \{c\}$, ce qui est une contradiction avec la maximalité de L.

Maintenant, nous allons prouver que si un triplet de points de V n'est contenu dans aucune droite, alors il existe une droite qui consiste de précisément deux points. Ceci (avec l'observation) terminera la démonstration.

Par une arête simple (cette terminologie est empruntée de l'interprétation de l'espace métrique comme un graphe complet pondéré), on veut dire une paire $ab \in E$ de points de V telle qu'il n'existe pas de point x qui satisfait $[axb]$. Par un triangle simple, on veut dire n'importe quel triplet de points a, b, c de V tels que ab, bc, ca sont toutes des arêtes simples.

Maintenant, considérons les trois énoncés suivants :

(1) Il existe un triplet de points de V qui n'appartient à aucune droite.

(2) Il existe un triangle simple qui n'est dans aucune droite.

(3) Il existe une droite qui contient précisément deux points.

On va montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2). On a trois points a, b, c de V tels qu'aucune droite ne contient $\{a, b, c\}$ (1.1). Parmi tous les triplets de ce genre choisissons-en un qui minimise $\rho(a, b) + \rho(b, c) + \rho(a, c)$. On montre que a, b, c est un triangle simple.

Supposons le contraire : sans perte de généralité il existe un point d tel que $[adb]$. Ainsi, on sait que $d \neq c$ car sinon $[acb]$ est en contradiction avec (1.1). Maintenant,

$$\rho(d, c) < \rho(d, b) + \rho(b, c)$$

car sinon (1.1) est en contradiction avec $[dbc]$ et $[adb]$. On a donc,

$$\begin{aligned}
&\rho(a, d) + \rho(d, c) + \rho(a, c) \\
<&\rho(a, d) + \rho(d, b) + \rho(b, c) + \rho(a, c) \\
=&\rho(a, b) + \rho(b, c) + \rho(a, c).
\end{aligned}$$

Maintenant, la minimalité de a, b, c implique que $\{a, d, c\}$ est contenu dans une droite. Parce que d est entre a et b (c'est-à-dire $[adb]$), on a que la même droite contient aussi $\{a, b, c\}$. Ce qui est une contradiction avec (1.1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Pour chaque triplet ordonné u, v, w de points de V écrivons

$$\Delta(u, v, w) = \rho(u, v) + \rho(v, w) - \rho(u, w)$$

Par (2) on a un triangle simple a, b, c qui satisfait (1.1). Parmi tous les triangles de ce genre choisissons-en un qui minimise $\Delta(a, b, c)$. Nous allons montrer que la droite $\overline{ac}$ contient précisément deux points.

Supposons le contraire. La droite $\overline{ac}$ contient au moins trois points. C'est-à-dire qu'il existe un point d qui satisfait $[dac]$ ou $[adc]$ ou $[acd]$. L'arête ac est simple donc on ne peut pas avoir $[adc]$. Sans perte de généralité supposons (par symétrie) $[acd]$. Parmi tels d, choisissons-en un qui minimise $\rho(c, d)$. Ceci nous garantit que cd est une arête simple.

Montrons que bd n'est pas une arête simple (1.2). Si bd est simple, alors (b, c, d) est un triangle simple. Maintenant, $[acd]$ et (1.1) nous garantissent que ce triangle simple n'appartient à aucune droite. Ainsi,

$$\Delta(b, c, d) \geq \Delta(a, b, c)$$

Ce qui signifie,

$$\rho(b, c) + \rho(c, d) - \rho(b, d) \geq \rho(a, b) + \rho(b, c) - \rho(a, c)$$
$$\rho(c, d) - \rho(b, d) \geq \rho(a, b) - \rho(a, c)$$

Puisqu'on a $[acd]$, ceci nous donne $[abd]$, ce qui est en contradiction avec (1.1). Maintenant, observons que

$$\rho(a, b) + \rho(b, d) < \rho(a, d) + \Delta(a, b, c). \quad (1.3)$$

Si (1.3) n'est pas vrai, alors étant donné qu'on a $[acd]$:

$$\rho(b, d) \geq \rho(b, c) + \rho(c, d)$$

Ce qui nous donne $[bcd]$, mais ici aussi nous avons une contradiction avec (1.1).

Par un chemin, on entend une séquence $P = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de points distincts de V. Sa longueur est définie comme :

$$l(P) = \sum_{i=1}^{k-1} \rho(a_i, a_{i+1})$$

Par un chemin spécial, on veut dire un chemin $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ tel que $a_1 = a$, $a_k = d, k \geq 3$ et

(i) aucune droite ne contient $\{a_1, a_2, a_3\}$,
(ii) au moins un des a_1a_2 et a_2a_3 n'est pas une arête simple.

Le chemin (a, b, d) est spécial. On a (i) à cause de $[acd]$ et (1.1). On a (ii) à cause de (1.2). Maintenant, on peut choisir un plus court chemin spécial $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ qu'on appelle P. Le chemin (a, b, d) est spécial et de (1.3) on a

$$l(P) < \rho(a, d) + \Delta(a, b, c). \quad (1.4)$$

Afin de compléter la preuve de (2) $\Rightarrow$ (3), on va distinguer trois cas pour le chemin spécial P.

Cas 1 : Ni a_1a_2 ni a_2a_3 ne sont des arêtes simples.
On a donc un point b_{12} tel que $[a_1b_{12}a_2]$. Parmi de tels points b_{12}, prenons-en un qui minimise $\rho(b_{12}, a_2)$ (cette propriété de b_{12} nous donne que $b_{12}a_2$ est une arête simple).

Ainsi, il y a un point b_{23} tel que $[a_2b_{23}a_3]$ et tel que a_2b_{23} est simple. Aucune droite ne contient $\{b_{12}, a_2, b_{23}\}$ (1.5). Sinon, $[a_1b_{12}a_2]$ et $[a_2b_{23}a_3]$ impliqueront que la même droite contient $\{a_1, a_2, a_3\}$ ce qui est une contradiction avec la propriété (i) de P.

Soit P' le chemin $(a_1, b_{12}, b_{23}, a_3, \cdots, a_k)$. De $[a_1b_{12}a_2]$ et $[a_2b_{23}a_3]$ on a,

$$l(P) - l(P') = \Delta(b_{12}, a_2, b_{23}).$$

Maintenant, $\Delta(b_{12}, a_2, b_{23}) > 0$ par (1.5), et donc P' est plus court que P. On avait P minimal, donc P' n'est pas spécial. Aucune droite ne contient $\{a_1, b_{12}, b_{23}\}$, car sinon $[a_1b_{12}a_2]$ donne que la même droite contient $\{b_{12}, a_2, b_{23}\}$ ce qui contredit (1.5). Le chemin P' n'étant pas spécial, a_1b_{12} et $b_{12}b_{23}$ sont des arêtes simples. L'arête $b_{12}b_{23}$ étant simple, b_{12}, a_2, b_{23} est un triangle simple, et (1.5) implique

$$\Delta(b_{12}, a_2, b_{23}) \geq \Delta(a, b, c)$$

Maintenant,

$$l(P) = l(P') + \Delta(b_{12}, a_2, b_{23}) \geq \rho(a, d) + \Delta(a, b, c)$$

ce qui est en contradiction avec (1.4).

Cas 2 : a_1a_2 est une arête simple et a_2a_3 n'est pas simple.

Comme dans le Cas 1, il existe un point b_{23} tel que $[a_2b_{23}a_3]$ et tel que a_2b_{23} est une arête simple. Notons qu'aucune droite ne contient $\{a_1, b_{23}, a_2\}$ (1.6). Sinon, $[a_2b_{23}a_3]$ garantit que la même droite contient $\{a_1, a_2, a_3\}$, ce qui contredit la propriété (i) de P. Soit P' le chemin $(a_1, b_{23}, a_3, \cdots, a_k)$. De $[a_2b_{23}a_3]$, on a

$$l(P) - l(P') = \Delta(a_1, a_2, b_{23})$$

Ainsi $\Delta(a_1, a_2, b_{23}) > 0$ (à cause de (1.6)). Donc, on a P' plus court que P et la minimalité de P implique que P' n'est pas spécial. Aucune droite contient $\{a_1, a_2, b_{23}\}$ car sinon, $[a_2b_{23}a_3]$ implique que la même droite contient $\{a_1, a_2, b_{23}\}$ contredisant (1.6). Le chemin P' n'étant pas spécial, a_1b_{23} et $b_{23}a_3$ sont des arêtes simples. L'arête a_1b_{23} étant simple, a_1, a_2, b_{23} est un triangle simple et (1.6) implique

$$\Delta(a_1, a_2, b_{23}) \geq \Delta(a, b, c)$$

mais

$$l(P) = l(P') + \Delta(a_1, a_2, b_{23}) \geq \rho(a, d) + \Delta(a, b, c)$$

ce qui contredit (1.4).

Cas 3 : a_2a_3 est une arête simple et a_1a_2 n'est pas simple.

Comme dans le Cas 1, il existe un point b_{12} tel que $[a_1b_{12}a_2]$ et tel que $b_{12}a_2$ est une arête simple. Notons qu'aucune droite ne contient $\{b_{12}, a_2, a_3\}$ (1.7). Sinon, $[a_1b_{12}a_2]$ garantit que la même droite contient $\{a_1, a_2, a_3\}$, ce qui contredit (i) de P. Soit P' le chemin $(a_1, b_{12}, a_3, \cdots, a_k)$. De $[a_1b_{12}a_2]$ on a

$$l(P) - l(P') = \Delta(b_{12}, a_2, a_3).$$

(1.7) donne $\Delta(b_{12}, a_2, a_3) > 0$ et par conséquent P' est plus court que P. Le chemin P étant minimal, cela implique que P' un chemin qui n'est pas spécial. Aucune droite contient $\{a_1, b_{12}, a_3\}$, sinon $[a_1b_{12}a_2]$ implique que la même droite contient aussi $\{b_{12}, a_2, a_3\}$ contredisant (1.7). Le chemin P' n'étant pas spécial, a_1b_{12} et $b_{12}a_3$ sont des arêtes simples. Comme $b_{12}a_3$ est une arête simple, b_{12}, a_2, a_3 est un triangle simple et (1.7) implique

$$\Delta(b_{12}, a_2, a_3) \geq \Delta(a, b, c)$$

mais

$$l(P) = l(P') + \Delta(b_{12}, a_2, a_3) \geq \rho(a, d) + \Delta(a, b, c)$$

ce qui contredit (1.4).

$\square$

1.0.1.1. Une application aux designs

Définition 1.8. *Un ensemble V de v points, où toute paire de deux points est dans exactement λ sous-ensembles (appelés* bloques*) et chaque sous-ensemble contient k points, est appelé un (v, k, λ)*-design.

Définition 1.9. *Un* hypergraphe *est une paire ordonnée $(X, \mathcal{H})$ tel que X est un ensemble et $\mathcal{H}$ est un ensemble de sous-ensembles non vides de X. Les éléments de X sont des* sommets *(ou des* points*) de l'hypergraphe, les éléments de $\mathcal{H}$ sont les* hyperarêtes *de l'hypergraphe et $|X|$ est appelé* l'ordre *de l'hypergraphe.*

On peut interpréter un design en tant qu'hypergraphe.

Définition 1.10. *Un hypergraphe sur un ensemble V de v points, où toute paire de deux points est dans λ hyperarêtes et chaque hyperarête contient k points est un (v, k, λ)*-design.

Un design sur V est *réalisable* en tant qu'espace métrique s'il existe un espace métrique (V, d) tel que pour n'importe quel triplet de points $a, b, c \in V$

$$\{a, b, c\} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}(d)) \Longleftrightarrow \{a, b, c\} \text{est dans une bloque (une hyperarête) du design.}$$

On sait par définition que :

- Un plan projectif fini d'ordre n est un $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-*design*.
- Un plan affine fini d'ordre n est un $(n^2, n, 1)$-*design*.

- Un système de Steiner est un $(v, 3, 1)$-*design*.

Si un $(v, k, 1)$-*design* est réalisable en tant qu'espace métrique, alors chaque droite dans cet espace métrique contient exactement k points. Le corollaire suivant qui découle du théorème de Sylvester-Chvátal (théorème 1.7), nous dit que ceci est impossible pour $k \geq 3$.

Corollaire 1.11 (Chen [10])**.** *Aucun $(v, k, 1)$-design avec $k \geq 3$ et $v > k$ n'est réalisable en tant qu'espace métrique. En particulier, aucun plan projectif d'ordre plus grand que* 1*, aucun plan affine d'ordre plus grand que deux, et aucun système de Steiner avec plus de trois points n'est réalisable en tant qu'espace métrique.*

Exemple : Le plan de Fano n'est pas réalisable en tant qu'espace métrique. Le plan de Fano est un $(7, 3, 1)$-*design*. On peut aussi le regarder en tant qu'hypergraphe (design) avec les sommets (points) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, et les hyperarêtes (bloques)

$$\{i \mod 7, (i+1) \mod 7, (i+3) \mod 7\} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Chapitre 2

LE THÉORÈME DE DE BRUIJN-ERDŐS

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux preuves du Théorème de De Bruijn-Erdős dont une preuve bijective.

Théorème 2.1 (De Bruijn et Erdős [7])**.** *Soit m et n des entiers positifs tels que $n \geq 2$. Soit V un ensemble de n points. Soit $\mathcal{E}$ une famille de m sous-ensembles de V telle que $2 \leq |L| \leq n-1$ pour $L \in \mathcal{E}$ et telle que chaque paire de points de V appartient à exactement un membre de $\mathcal{E}$. Alors m est supérieur ou égal à n et les deux sont égaux si et seulement si*

(1) *$\mathcal{E}$ est de type* $\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}$, $\{p_1, p_n\}$, $\{p_2, p_n\}, ..., \{p_{n-1}, p_n\}$

ou

(2) *$n = k(k-1)+1$ et chaque membre de $\mathcal{E}$ contient k points de V et chaque point de V est contenu dans k membres de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Présentée par Chvátal. Soit $d(p)$ le nombre de membres de $\mathcal{E}$ qui contiennent un point p de V.

On observe :

$$\text{Si } p \in V, L \in \mathcal{E}, p \notin L \Longrightarrow |L| \leq d(p). \tag{1}$$

Pour voir ceci, à chaque point p' de L attribuons l'unique membre $f(p')$ de $\mathcal{E}$ qui contient p et p'. Le point $p \in f(p'), p \notin L$ alors on a $f(p') \neq L$ et donc $f(p') \cap L = \{p'\}$. On sait que l'intersection $f(p') \cap L$ ne contient pas d'autre point car si $f(p') \cap L$ contient un autre point p'', alors p' et p'' appartiennent à deux membres différents de $\mathcal{E}$. Ainsi, l'application f est injective. Fin de la preuve de

(1).
Soit k le plus petit $d(p)$, et soit $p^* \in V$ un point pour lequel $d(p^*) = k$.
Observation :

$$k \geq 2.$$

Pour voir ceci, prenons un point p' de V tel que $p' \neq p^*$, et considérons l'unique membre L de $\mathcal{E}$ qui contient p^* et p'. Puisque $L \in \mathcal{E}$, il existe un point p'' de V qui n'appartient pas à L. L'unique membre de $\mathcal{E}$ qui contient p^* et p'' est différent de L. Fin de la preuve de l'observation.

Énumérons les membres de $\mathcal{E}$; $L_1, L_2, \cdots, L_m$ tels que tous les $L_1, L_2, \cdots, L_k$ contiennent p^* et aucun de $L_{k+1}, L_{k+2}, \cdots, L_m$ ne le contient. Les k ensembles

$$L_1 - \{p^*\}, L_2 - \{p^*\}, \cdots, L_k - \{p^*\}$$

sont non vides. On peut donc trouver des points $p_1, p_2, \cdots, p_k$ de V tels que

$$p_1 \in L_2 - \{p^*\}, p_2 \in L_3 - \{p^*\}, \cdots, p_{k-1} \in L_k - \{p^*\}, p_k \in L_1 - \{p^*\}.$$

Comme les k ensembles $L_1 - \{p^*\}, L_2 - \{p^*\}, \cdots, L_k - \{p^*\}$ sont deux à deux disjoints et comme $k \geq 2$, on a que $p_1, p_2, \cdots, p_k$ sont deux à deux distincts et

$$p_1 \notin L_1, p_2 \notin L_2, \cdots, p_{k-1} \notin L_{k-1}, p_k \notin L_k.$$

De (1) on a que

$$|L_i| \leq d(p_i) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2}$$

Énumérons les $n - k$ points restants de V ; $p_{k+1}, p_{k+2}, \cdots, p_n$. Par (1) on a que $|L_i| \leq d(p^*) \quad \forall i = k+1, k+2, \cdots, m$. Par le choix de p^*, on a aussi $d(p^*) \leq d(p_j) \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n$.
Maintenant, supposons $m \leq n$ (sinon, il n'y a rien à prouver). On a donc

$$|L_i| \leq d(p^*) \leq d(p_i) \quad \forall i = k+1, k+2, \cdots, m. \tag{3}$$

Comptons les couples (L_i, p_j) telles que $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ p_j \in L_i$ de deux façons différentes : une fois en les regroupant par les L_i et une autre fois en les regroupant par les p_j. Ainsi, on trouve

$$\sum_{i=1}^{m} |L_i| = \sum_{j=1}^{n} d(p_j). \tag{4}$$

En comparant (2),(3), et (4) on constate que $m = n$ et $|L_i| = d(p_i) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m$.
Maintenant, on va examiner deux cas. Soit r un indice qui maximise $|L_r|$.

Cas 1 : $|L_i| < |L_r|$ pour tout $i \neq r$.
Ici, $d(p_i) = |L_i| < |L_r|$ lorsque $i \neq r$, et donc (1) nous donne $p_i \in L_r$ lorsque $i \neq r$. Il s'en suit que $|L_r| = n - 1$. Ce qui implique que $\mathcal{E}$ est de type :

$$\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\},\ \{p_1, p_n\},\ \{p_2, p_n\}, ..., \{p_{n-1}, p_n\}.$$

Cas 2 : Il y a un indice $s \neq r$ tel que $|L_s| = |L_r|$.
L'intersection $L_r \cap L_s$ contient au plus un point, donc soit il existe un indice t tel que $L_r \cap L_s = \{p_t\}$, soit $L_r \cap L_s = \emptyset$. De (1) avec $L = L_r$ ou $L = L_s$ on a

$$|L_i| = d(p_i) \geq |L_r| \text{ lorsque } i \neq t.$$

La maximalité de $|L_r|$ implique

$$|L_i| = |L_r| \text{ lorsque } i \neq t$$

et

$$|L_t| \leq |L_r|. \tag{5}$$

Si $|L_t| \geq n-1$, alors (5) et l'hypothèse $|L_r| \leq n-1$ implique $|L_t| = |L_r| = n-1$. Si $|L_t| \leq n-2$, alors $d(p_t) \leq n-2$ et donc p_t est à l'extérieur d'un ensemble L_i avec $i \neq t$. L'inégalité (1) implique

$$|L_t| = d(p_t) \geq |L_i| = |L_r|.$$

En mettant $k = |L_r|$, on conclut que :
Chaque membre de $\mathcal{E}$ contient k points de V et chaque point de V est contenu dans k membres de $\mathcal{E}$.
Chacune des $\binom{n}{2}$ paires de points de V appartient à exactement un des n membres de $\mathcal{E}$. Ainsi, chaque membre de $\mathcal{E}$ contient exactement $\binom{k}{2}$ de ces paires-là. On a

$$\binom{n}{2} = n\binom{k}{2}$$

ce qui donne

$$n = k(k-1) + 1.$$

$\square$

2.0.2. Une preuve bijective du théorème de De Bruijn-Erdős

Dans la preuve bijective du théorème de De Bruijn-Erdős, nous allons utiliser le théorème des mariages (théorème de Hall). Ce théorème nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un couplage (un ensemble d'arêtes qui ne partagent pas de sommets) dans un graphe biparti.

2.0.2.1. Théorème des mariages (Hall)

Définition 2.2. *Un sommet v est* incident *à une arête e si $v \in e$.*

Définition 2.3. *Deux sommets u, v d'un graphe G sont* adjacents *ou* voisins*, si uv est une arête de G.*

Définition 2.4. *Le* degré *$d_G(u)$ est le nombre des voisins du sommet u dans le graphe G.*

Si le contexte est clair, on peut écrire $d(u)$ pour dire $d_G(u)$.

Définition 2.5. *Dans un graphe $G = (V, E)$, l'ensemble $N_G(U)$ est* l'ensemble des voisins *des sommets de $U \subseteq V$.*

Si le contexte le permet, on peut écrire $N(U)$ pour dire $N_G(U)$.

Définition 2.6. *Deux arêtes e et f $(e \neq f)$ sont* adjacentes*, si elles partagent un sommet.*

Définition 2.7. *Un ensemble des sommets ou des arêtes est* indépendant *ou* stable *si ses éléments sont deux à deux non adjacents.*

Définition 2.8. *Un ensemble M des arêtes indépendants dans un graphe $G = (V, E)$ est un* couplage*. M est un* couplage *de $U \subseteq V$ si tout sommet de U est incident à une arête dans M. Les sommets dans U ont alors* un couplage *(par M).*

Définition 2.9. *Un* chemin *P_n est un graphe non-vide tel que*

$$V = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad E = \{x_1x_2, x_2x_3, \cdots, x_{n-1}x_n\}.$$

Définition 2.10. *Si $P = (V, E)$ est un chemin avec $V = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ et $E = \{u_1u_2, \cdots, u_{k-1}u_k\}$, le graphe $C = (V, E \cup \{u_ku_1\})$ est appelé un* cycle*.*

Définition 2.11. *Un graphe non-vide G est appelé* connexe *si toute paire de sommets est reliée par un chemin dans G.*

Définition 2.12. *Un* pont *(ou un* isthme*) d'un graphe connexe est l'arête dont la suppression déconnecte le graphe.*

Les ponts dans un graphe sont précisément les arêtes qui ne se trouvent pas sur un cycle.

Théorème 2.13 (P. Hall [20])**.** *Soit G un graphe biparti sur $V = X \cup Y$ et $A \subseteq X$. Alors A a un couplage dans G si et seulement si*

$$|N(S)| \geq |S|, \quad \forall S \subseteq A \qquad (\dagger)$$

où $N(S)$ est l'ensemble des voisins des sommets de S.

Démonstration. Donnée par R. Diestel [16]. Notons que la condition est évidemment nécessaire. On prouve qu'elle est suffisante par induction sur $|A|$. Pour $|A| = 1$ l'affirmation est évidemment vraie. Soit $|A| \geq 2$, supposons que $|N(S)| \geq |S|\ \forall S \subseteq A$, est suffisant pour l'existence d'un couplage de A lorsque $|A|$ est plus petit.

Si $|N(S)| \geq |S| + 1$ pour tout ensemble non-vide $S \subsetneq A$, on peut prendre une arête $ab \in G$, $a \in A$ et $b \in X \backslash A$, et on peut considérer le graphe $G' := G - \{ab\}$. Maintenant, pour tout ensemble $S \subseteq A \backslash \{a\}$ on a

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|$$

et donc par l'hypothèse d'induction G' contient un couplage de $A \backslash \{a\}$. Ceci avec l'arête ab nous donne un couplage de A.

Maintenant supposons que A a un sous-ensemble propre et non-vide A', avec $|B'| = |A'|$ où $B' := N(A')$. Par l'hypothèse d'induction $G' := G[A' \cup B']$ (le sous-graphe induit pas $A' \cup B'$) contient un couplage de A'. Aussi, $G - G'$ satisfait la condition ($\dagger$). Supposons le contraire :

$$\exists S \subseteq A \backslash A', \ |N_{G-G'}(S)| < |S|$$

et ainsi on aura

$$|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$$

mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse. Alors, on a par induction que $G - G'$ contient un couplage de $A \backslash A'$. En mettant les deux couplages ensemble on a un couplage de A dans G. $\square$

Maintenant regardons de nouveau le théorème de De Bruijn-Erdős, avec une preuve bijective donnée par Bondy en 2013.

Soit V un ensemble fini de n points et soit $\mathcal{L}$ une famille de cardinalité m dont les membres sont des sous-ensembles de V(appelés droites), telle que n'importe quelle paire de points est incluse dans exactement une droite.
Supposons qu'il n'existe pas de droite universelle, c'est-à-dire, une droite qui contient tous les points. Alors, $m \geq n$ avec l'égalité si et seulement si,

(1) $\mathcal{L}$ est de type $\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\},\ \{p_1, p_n\},\ \{p_2, p_n\}, ..., \{p_{n-1}, p_n\}$

ou,

(2) $|V| = k(k-1)+1$ et chaque droite contient k points de V, et chaque point de V est contenu dans k droites de $\mathcal{L}$.

Démonstration. On sait que toute droite contient au moins deux points. On peut aussi supposer que $n \geq 3$ car si $n = 2$, on a une droite universelle. De plus, il n'existe pas de point x qui appartient à toutes les droites. Car, par hypothèse, il existe au moins deux droites contenant chacune au moins un point autre que x et la droite unique contenant ces deux points ne contient pas le point x.
Soit $G\,[V, \mathcal{L}]$ le graphe biparti sur $(V, \mathcal{L})$ avec l'ensemble des arêtes

$$\{xy : x \in V, y \in \mathcal{L} \text{ et } x \text{ est dans la droite } y\ \},$$

Soit $H\,[V, \mathcal{L}]$ le graphe biparti sur $(V, \mathcal{L})$ avec l'ensemble des arêtes

$$\{xy : x \in V, y \in \mathcal{L} \text{ et } x \text{ n'est pas dans la droite } y\ \}.$$

Étant donné qu'il n'existe pas de droite universelle et qu'il n'y a pas de point qui appartient à toutes les droites, le graphe H n'a pas de point isolé. On va montrer qu'il existe un couplage M de V dans le graphe H.
Par le théorème de Hall, il suffit de montrer

$$|N_H(S)| \geq |S|, \quad \forall S \subseteq V$$

Soit S un sous-ensemble de V. Si $|S| = 1$, alors $|N_H(S)| \geq 1 = |S|$ comme H n'a pas de sommet isolé. Supposons alors $|S| \geq 2$. Comme n'importe quelle paire de points appartient à une seule droite, n'importe quelle paire de sommets de V a un voisin unique commun dans G.
Par conséquent,

$$|N_H(S)| \geq m - 1.$$

Car sinon $|N_H(S)| < m-1$, et alors dans le graphe H, ils existent au moins deux membres y_1 et y_2 de $\mathcal{L}$ tels qu'aucun élément de S n'est adjacent ni à y_1 ni à y_2. Ce qui veut dire que dans le graphe G, les éléments de S sont adjacents à y_1 ou à y_2. Si dans le graphe G, les éléments de S sont tous adjacents à y_1 et à y_2, alors ceci veut dire que les éléments de S sont à la fois dans y_1 et dans y_2. Contradiction avec l'hypothèse. Maintenant supposons, sans perte de généralité, que dans le graphe G les éléments de S sont adjacents à y_1. Ceci veut dire que y_2 devrait appartenir à $N_H(S)$. Contradiction.

Supposons que $n \geq m$. Si les sommets de $\mathcal{L}$ n'ont pas de couplage dans H, alors

$$\forall S \subseteq V \text{ tel que } |S| = m, \quad \exists y \in \mathcal{L} \text{ tel que } N_H(S) = \mathcal{L}\backslash\{y\}.$$

Mais maintenant, on aura $xy \in E(G)$, $\forall x \in V$ ce qui veut dire que y est un sommet isolé de H. Ce qui est une contradiction.
Alors, on a un couplage M dans H couvrant un sous-ensemble V' de cardinalité m de V et tous les sommets de $\mathcal{L}$.
Maintenant, $d_G(x) \geq d_G(y)$ pour toutes les arêtes xy de H avec $x \in V$ et $y \in \mathcal{L}$. Ceci parce que si x n'appartient pas à la droite y, alors les droites $\overline{xa}$, $a \in y$ sont distinctes.
En particulier,

$$d_G(x) \geq d_G(y) \quad \forall xy \in M \text{ où } \ x \in V', y \in \mathcal{L}$$

et donc

$$\sum_{x \in V'} d_G(x) \geq \sum_{y \in \mathcal{L}} d_G(y).$$

D'autre part on a

$$\sum_{x \in V} d_G(x) = \sum_{y \in \mathcal{L}} d_G(y)$$

ce qui nous permet de conclure

$$d_G(x) = d_G(y) \quad \forall xy \in M \tag{6}$$

et que $V' = V$, et donc $n = m$.

Le graphe H ne contient pas de pont. Supposons le contraire. Soit l'arête xy' un pont dans H et soit xy dans M. Comme x est adjacent à y' dans H, $d_G(x)$ est forcément plus petit que $d_G(y)$. Mais par (6) on sait que $d_G(x) = d_G(y), \forall xy \in M$. Contradiction.
Maintenant supposons que le pont xy' est dans M. Soit $z \in \mathcal{L}$ un voisin de x. On sait que $xz \notin M$, alors il existe un point x' tel que $x'z \in M$. Comme $m = n$, il existe une droite $z' \in \mathcal{L}$ où $x'z'$ et xz' ne sont pas tous les deux dans M. Donc,

il existe un point x_1 tel que $x_1z' \in M$. Mais comme $m = n$, il existe une autre droite $z_1 \in \mathcal{L}$ où x_1z_1, $x'z_1$ et xz_1 ne sont pas toutes les trois dans M. Alors, on a forcément un point x_2 tel que x_2z_1 est dans M. En fait, on peut continuer les étapes ci-dessus, mais ceci est impossible comme n est fini. Alors, on ne peut avoir de pont dans le graphe H.

Comme H ne contient pas de pont, les composantes de H sont de deux types : un cycle ou une arête. Si H a plus d'une composante connexe, alors une seule de ces composantes contient plus d'une arête. Car sinon, les points d'une composante de H appartiendront tous à plus qu'une droite dans G. Ce qui est une contradiction.

Si H contient une composante connexe qui est une arête, alors le premier cas du théorème est vérifié. Soit ab la composante arête de H où $a \in V$ et $b \in \mathcal{L}$. Dans ce cas, le point a appartient à $m-1$ droites dans le graphe G. Les $n-1$ points de la composante qui n'est pas l'arête ab dans H appartiennent à la droite $b \in \mathcal{L}$ dans G et ils forment chacun une droite avec le point a.

Si H a une seule composante connexe, alors le deuxième cas du théorème est vérifié. Dans ce cas, toute arête de H est incluse dans un cycle.

Soit $x_1y_2x_2y_3x_3\ldots y_nx_ny_1x_1$ un étiquetage des sommets de cycle dans H où $x_i \in V$, $y_i \in \mathcal{L}$, $x_iy_j \notin M$ et $y_ix_i \in M$ pour $1 \le i, j \le n$ et $i \neq j$. On sait que si $xy \in M$, alors $d_G(x) = d_G(y)$ et que si $xy \notin M$ alors $d_G(x) \ge d_G(y)$. En parcourant les arêtes de cycle dans H et en regardant le degré de chaque sommet on obtient

$$d_G(x_1) \ge d_G(y_2) = d_G(x_2) \ge \cdots \ge d_G(y_n) = d_G(x_n) \ge d_G(y_1) = d_G(x_1).$$

C'est-à-dire, pour $2 \le k \le n$, on a $d_G(x_1) \ge d_G(x_k) \ge d_G(x_1)$. Ce qui implique que $d_G(x_1) = d_G(x_k)$.

Le graphe G est donc régulier de degré $d_G(y) = d_G(x)$ où $x \in V$ et $y \in \mathcal{L}$, ce qui veut dire que chaque droite contient $d_G(y)$ points, et chaque point de V est contenu dans $d_G(x)$ droites de $\mathcal{L}$. Pour le nombre des droites, en comptant les droites à partir de V, nous avons $\binom{|V|}{2}$. En comptant les droites à partir de $\mathcal{L}$, nous avons $m \cdot \binom{d_G(y)}{2}$ droites. Le nombre m étant égal à n, on a le deuxième cas du théorème.

$\square$

Chapitre 3

HYPERGRAPHES

Dans ce chapitre, on donne la définition d'une droite sur un hypergraphe, et nous allons voir quelques résultats sur les hypergraphes ayant un nombre de points inférieur ou égal à 6. Ensuite, nous étudierons des généralisations variées du Théorème de De Bruijn-Erdős ; ainsi que des bornes sur le nombres de droites sur un hypergraphe. À la fin du chapitre, on verra la notion la représentabilité d'un hypergraphe.

Rappelons-nous la définition d'un hypergraphe.

Définition 3.1. *Un* hypergraphe *est une paire ordonnée* $(X, \mathcal{H})$ *telle que* X *est un ensemble et* $\mathcal{H}$ *est une famille de sous-ensembles non vides de* X*. Les éléments de* X *sont des* sommets *(ou des* points*) de l'hypergraphe, les éléments de* $\mathcal{H}$ *sont les* hyperarêtes *de l'hypergraphe et* $|X|$ *est appelé* l'ordre *de l'hypergraphe.*

Définition 3.2. *Un hypergraphe est* k-uniforme *si toutes ses hyperarêtes contiennent exactement* k *éléments.*

3.1. Droites définies sur les hypergraphes

Définition 3.3 ([11])**.** *Soit* u, v *deux sommets distincts d'un hypergraphe* $(X, \mathcal{H})$*. La* droite $\overline{uv}$ *est définie par :*

$$\overline{uv} = \{u, v\} \cup \{p : \exists T \in \mathcal{H}, \{u, v, p\} \subseteq T\}$$

Remarque 3.4. *Si l'hypergraphe* $(X, \mathcal{H})$ *est* 3*-uniforme, la droite* $\overline{uv}$ *avec* u, v *distincts a la forme :*

$$\overline{uv} = \{u, v\} \cup \{w : \{u, v, w\} \in \mathcal{H}\}.$$

Exemple : Soit $(X, \mathcal{H})$ un hypergraphe 3-uniforme tel que $X = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{H} = \{\{a, b, c\}\}$. Cet hypergraphe détermine quatre droites :

$$\begin{aligned}
&\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{bc} = \{a, b, c\}\\
&\overline{da} = \{d, a\}\\
&\overline{db} = \{d, b\}\\
&\overline{dc} = \{d, c\}.
\end{aligned}$$

Exemple : Soit $(X, \mathcal{H})$ un hypergraphe 3-uniforme tel que $X = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{H} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Cet hypergraphe détermine une seule droite contenant tous les sommets :

$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{ad} = \overline{bd} = \overline{ac} = \{a, b, c, d\}.$$

Exemple : Soit $(X, \mathcal{H})$ un hypergraphe tel que $X = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{H} = \emptyset$. Cet hypergraphe détermine $\binom{4}{2} = 6$ droites.

Les exemples ci-dessus nous font remarquer qu'en général plus il y a d'hyperarêtes, moins il y a de droites.

Définition 3.5 (la propriété de De Bruijn-Erdős)**.** *Un hypergraphe* $(X, \mathcal{H})$ *a* la propriété de De Bruijn-Erdős *s'il a soit une droite qui contient tous les points de* X *(aussi appelée une* droite universelle*), soit au moins* n *droites, où* $n = |X|$*.*

Pour tout hypergraphe $(X, \mathcal{H})$ il existe un hypergraphe 3-uniforme $(X, \mathcal{H}^{(3)})$ tel que $(X, \mathcal{H})$ et $(X, \mathcal{H}^{(3)})$ définissent la même famille de droites :

$$\mathcal{H}^{(3)} = \{S : |S| = 3 \text{ et } \exists T \in \mathcal{H} \text{ tel que } S \subseteq T\}.$$

Par conséquent, on va considérer, sans perte de généralité, uniquement des hypergraphes 3-uniformes.

Soit $(V, \mathcal{L})$ un hypergraphe où chaque hyperarête contient au moins deux sommets et n'importe quelle paire de sommets appartient à exactement une hyperarête, alors $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites d'un hypergraphe 3-uniforme $(V, \mathcal{E})$. Pour voir ceci, soit $\mathcal{E}$ tous les sous-ensembles de cardinalité 3 inclus dans toutes les hyperarêtes appartenant à $\mathcal{L}$.

Maintenant, soit $(V, \mathcal{E})$ un hypergraphe 3-uniforme, alors chacune de ses droites contient au moins deux sommets, et n'importe quelle paire de sommets appartient à au moins une droite, mais ils peuvent appartenir à plus d'une droite. Par exemple, si V contient les sommets distincts p, q, r, s tels que $\{p, q, r\} \in \mathcal{E}$, $\{p, q, s\} \in \mathcal{E}$, $\{p, r, s\} \notin \mathcal{E}$, alors les droites $\overline{pr}$ et $\overline{ps}$ sont distinctes et les sommets p et q appartiennent tous les deux à $\overline{pr}$ et à $\overline{ps}$. Le théorème suivant montre qu'il s'agit du seul exemple.

Théorème 3.6 ([4]). *Si dans un hypergraphe* 3*-uniforme* $(V, \mathcal{E})$ *on a deux sommets appartenant à plus qu'une droite, alors* V *contient quatre sommets distincts* p, q, r, s *tels que au moins deux et au plus trois des quatre triplets :*

$$\{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}$$

appartiennent à $\mathcal{E}$*.*

Démonstration. Soit $(V, \mathcal{E})$ un hypergraphe 3-uniforme. Supposons que deux de ses sommets u, v appartiennent à non seulement la droite $\overline{uv}$, mais aussi à une autre droite $\overline{xy}$. Nous allons maintenant trouver des sommets distincts p, q, r, s tels que au moins deux mais pas tous les quatre parmi

$$\{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}$$

appartiennent à $\mathcal{E}$.
Cas 1 : Un de x, y est un de u, v.
Sans perte de généralité supposons que $x = u$. On a $\overline{uy} \neq \overline{uv}$ et $v \in \overline{uy}$, alors $y \neq v$ et $\{u, v, y\} \in \mathcal{E}$. Comme on a $\overline{uy} \neq \overline{uv}$, il existe un sommet z appartenant à exactement une de ces droites-ci. Étant donné que $\{u, v, y\} \in \mathcal{E}$, les sommets u, v, y, z sont tous distincts. Puisque soit $\{u, y, z\}$ soit $\{u, v, z\}$ appartient à $\mathcal{E}$, on peut prendre u, v, y, z pour p, q, r, s.
Cas 2 : x, y, u et v sont tous distincts.
Comme $u, v \in \overline{xy}$, on a $\{u, x, y\} \in \mathcal{E}$ et $\{v, x, y\} \in \mathcal{E}$. Si $\{u, v, x\} \notin \mathcal{E}$ ou $\{u, v, y\} \notin \mathcal{E}$, alors on peut prendre u, v, x, y pour p, q, r, s. Si $\{u, v, x\} \in \mathcal{E}$ et $\{u, v, y\} \in \mathcal{E}$, alors on revient au Cas 1 avec (v, x) à la place de (x, y) si on a $\overline{uv} \neq \overline{vx}$; et avec (v, x) à la place de (u, v) si on a $\overline{uv} = \overline{vx}$.

□

Regardons deux propositions à propos des droites définies sur les hypergraphes 3-uniformes. Dans la suite, on note m le nombre de droites d'un hypergraphe.

Proposition 3.7. *Dans un hypergraphe 3-uniforme, si r sommets appartiennent tous à au plus t droites et aucune de ces droites n'est universelle, alors*

$$n \leq \sum_{i \leq r+t} \binom{m}{i}$$

Démonstration. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_r$ des sommets appartenant à au plus t droites. Soient $L_1, L_2, \cdots, L_k$ les droites qui contiennent les r sommets. Étant donné qu'aucune des $L_1, L_2, \cdots, L_k$ n'est universelle, il existe des sommets (pas nécessairement distincts) $v_1, v_2, \cdots, v_k$ tels que $v_i \notin L_i$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, k$. Soit $A = \{u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_k\}$. Maintenant, pour tous les $x \in V$ définissons

$$\phi(x) = \{\overline{ax} : a \in A, a \neq x\}$$

On montre que l'application ϕ est injective :
Soient x, y deux sommets distincts. Il existe un sommet z dans A tel que $z \notin \overline{xy}$ (étant donné qu'aucune droite n'est universelle). Si $u_1, u_2, \cdots, u_r$ appartiennent à $\overline{xy}$, alors $\overline{xy} = L_i$ pour un i et dans ce cas-ci $v_i \notin \overline{xy}$.
On a $z \notin \overline{xy}$, donc x, y, z sont tous distincts et $\{x, y, z\}$ n'est pas une hyperarête. Comme $\{x, y, z\}$ n'est pas une hyperarête, $y \notin \overline{zx}$, ce qui implique $\overline{zx} \in \phi(x) \backslash \phi(y)$. Ceci montre que ϕ est injective.
Chaque $\phi(x)$ est un ensemble d'au plus $|A|$ droites provenant d'un pool de m droites ; et comme $|A| \leq r + k \leq r + t$, ayant ϕ injective on a

$$n \leq \sum_{i \leq r+t} \binom{m}{i}.$$

□

On constate en fait qu'on peut remplacer $\binom{m}{i}$ par $\binom{m}{r+t}$ dans l'inégalité ci-dessus, en remarquant que les $\phi(x)$ forment une antichaîne (c'est-à-dire, qu'il ne sont pas comparables par l'inclusion).

Proposition 3.8. *Soit $(V, \mathcal{H})$ un hypergraphe 3-uniforme. Soient r, t des entiers positifs tels que*

$$m^{r+t-1} < n - (r + t - 1).$$

Alors soit chaque ensemble de r sommets appartient à au moins t droites distinctes, soit il existe une droite universelle.

Démonstration. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_r$ des sommets, et soit $L_1, L_2, \cdots, L_k$ une plus grande famille des droites (non-universelles) dont chacune contient tous les $u_1, u_2, \cdots, u_r$.

Si $k \leq t-1$, on trouve une droite contenant tous les $u_1, u_2, \cdots, u_r$ qui est distincte de toutes les $L_1, L_2, \cdots, L_k$. Comme les $L_1, L_2, \cdots, L_k$ sont non-universelles, il existe des sommets $w_1, w_2, \cdots, w_k$ (pas nécessairement distincts) tels que $w_i \notin L_i$ pour tout i. Soit $W = \{u_1, u_2, \cdots, u_r, w_1, w_2, \cdots, w_k\}$. Pour chaque sommet s on écrit $x \sim_s y$ lorsque $\overline{sx} = \overline{sy}$. Maintenant, chaque relation d'équivalence $\sim_s$ partitionne l'ensemble des sommets autres que s en m classes (elles peuvent être vides) ; ceci avec les $r+k$ relations d'équivalence $\sim_s$ avec $s \in W$ divise les sommets dans $V \backslash W$(sommets à l'extérieur de W) en m^{r+k} classes.
Nous avons $m^{r+t-1} < n - (r + t - 1)$, ce qui veut dire qu'il existe au moins une classe avec au moins deux sommets. Ceci veut dire qu'il existe x, y (distincts) dans $V \backslash W$ tels que $x \sim_s y$ pour tout $s \in W$.
Le triplet $\{s, x, y\}$ est une hyperarête puisque $\overline{sx} = \overline{sy}$. Ainsi, $s \in \overline{xy}$ et on a $W \subset \overline{xy}$; ce qui implique $u_1, u_2, \cdots, u_r \in \overline{xy}$ et $\overline{xy} \neq L_i \ \ \forall i$. □

Regardons maintenant la définition d'un sous-hypergraphe.

Définition 3.9. *Pour $W \subseteq V$, le* sous-hypergraphe de $(V, \mathcal{E})$ induit par W *est $(W, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est formé par tous les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des sous-ensembles de W,*

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{E} \mid F \subseteq W\}.$$

Avec cette définition le Théorème 3.6 se lit comme suit :

— *Dans un hypergraphe* 3*-uniforme, aucun sous-hypergraphe induit par quatre points n'a deux ou trois hyperarêtes si et seulement si n'importe quelle paire de sommets appartient à exactement une droite.*

Rappelons qu'un hypergraphe 3-uniforme a la propriété de De Bruijn-Erdős s'il a au moins autant de droites que de sommets ou s'il contient une droite qui contient tous les sommets.
Avec le Théorème 3.6, la définition de la propriété de De Bruijn-Erdős et le Théorème de De Bruijn-Erdős on peut dire :

— *Si, dans un hypergraphe* 3*-uniforme, aucun sous-hypergraphe induit par quatre sommets n'a deux ou trois arêtes, alors cet hypergraphe a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Il n'est pas vrai que tous les hypergraphes 3-uniformes ont la propriété de De Bruijn-Erdős (on peut aussi regarder le Théorème 3.32 plus loin).

Exemple 1. Soit $(V, \mathcal{E})$ un hypergraphe 3-uniforme où $|V| = 11$ avec l'ensemble des sommets :

$$\{1, 2\} \cup (\{a, b, c\} \times \{d, e, f\})\,; \tag{7}$$

l'ensemble des arêtes :
les sous-ensembles de cardinalité 3 de $\{a, b, c\} \times \{d, e, f\}$ (il y en a $\binom{9}{3}$) et les 18 ensembles de cardinalité 3 : $\{i, (x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ où $x_i = y_i$.
Les droites de $(V, \mathcal{E})$ sont :

$$\begin{aligned}
&\{1, 2\}\\
&\{1, (a, d), (a, e), (a, f)\}\\
&\{1, (b, d), (b, e), (b, f)\}\\
&\{1, (c, d), (c, e), (c, f)\}\\
&\{2, (a, d), (b, d), (c, d)\}\\
&\{2, (a, e), (b, e), (c, e)\}\\
&\{2, (a, f), (b, f), (c, f)\}\\
&\{1\} \cup (\{a, b, c\} \times \{d, e, f\})\\
&\{2\} \cup (\{a, b, c\} \times \{d, e, f\})\\
&\{a, b, c\} \times \{d, e, f\}.
\end{aligned}$$

Alors aucune droite ne contient tous les 11 sommets et il y a seulement 10 droites.

3.1.1. Résultats sur les droites définies sur les hypergraphes avec $4, 5$ ou 6 points

Lemme 3.10. *Tous les hypergraphes* 3*-uniformes avec au plus* 4 *sommets ont la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Démonstration. Considérons un hypergraphe 3-uniforme avec n sommets où $2 \leq n \leq 4$. Si chacune de ses droites a exactement 2 sommets (c'est-à-dire, il n'existe aucune hyperarête), ou s'il y a une droite qui contient tous les n sommets ; on a fini. Sinon, une de ses droites a 3 sommets et $n = 4$.
Soit T la droite avec 3 sommets et w le quatrième sommet. S'il existe x, y dans T tels que $\overline{wx} = \overline{wy}$, alors $\overline{xy}$ est une droite universelle. Sinon, les trois droites $\overline{wx_i}$

avec $i = 1, 2, 3$ et $x_i \in T$ sont des droites deux à deux distinctes de 2 sommets chacune. $\square$

Lemme 3.11. *Tout hypergraphe* 3*-uniforme avec au plus* 5 *sommets a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Démonstration. Par le Théorème 6 de Beaudou et coll. [4] (dans ce document théorème 3.21 ci-dessous), s'il n'y a pas de 4 sommets qui génèrent 4 hyperarêtes alors l'hypergraphe a la propriété de De Bruijn-Erdős.
Maintenant, soient v_1, v_2, v_3, v_4 tels qu'ils génèrent 4 hyperarêtes. Si on a $v_iv_jv_5$, $1 \leq i < j \leq 4$ une hyperarête, alors $\overline{v_iv_j}$ est une droite universelle. Sinon, $v_1v_2v_3v_4, v_1v_5, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5$ sont des droites distinctes. $\square$

Définition 3.12. *Un hypergraphe* 3*-uniforme est* extrémal *s'il ne contient pas une droite universelle mais il possède n droites distinctes.*

Proposition 3.13. *Soit* (X, H) *un hypergraphe* 3*-uniforme. Si* $|X| \leq 6$*, alors il a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

On prouve cette proposition à l'aide des trois lemmes suivants.

Lemme 3.14. *Soit* (X, H) *un hypergraphe* 3*-uniforme avec* 6 *sommets. S'il n'a pas la propriété de De Bruijn-Erdős, alors il contient un sous-hypergraphe induit extrémal de* 5 *sommets.*

Démonstration. D'abord il faut noter qu'en supprimant un sommet on n'augmente pas le nombre de droites.
On sait qu'un hypergraphe avec 5 sommets a la propriété de De Bruijn-Erdős.
Maintenant, pour n'importe quel x dans X pour l'hypergraphe obtenu en supprimant x on a

- (i) soit une droite universelle, qui est $X \backslash \{x\}$ et qui est une droite dans (X, H) ((X, H) n'a pas de droite universelle)

- (ii) soit l'hypergraphe obtenu est extrémal.

Si (i) arrive avec un des 6 sommets de X, alors (X, H) a 6 droites. Ainsi, il a la propriété de De Bruijn-Erdős.
Donc, on a un sous-hypergraphe induit extrémal avec 5 sommets dans (X, H). $\square$

Définition 3.15. *Un* faisceau de droites *est un ensemble de n points contenant un sous-ensemble propre L avec $n-1$ points, et le point x qui n'appartient pas à*

L fait une droite de cardinalité 2 avec chacun des $n-1$ points de L.

Lemme 3.16. *Un hypergraphe 3-uniforme extrémal de 5 sommets est un faisceau de droites.*

Démonstration. Considérons un hypergraphe 3-uniforme extrémal (X, H) avec 5 sommets. Il a exactement cinq droites distinctes L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 (ces droites ne sont pas universelles).
On peut définir un graphe complet avec les sommets de X où on va étiqueter l'arête xy (écrit $l(xy)$) par k si $\overline{xy} = L_k$.

Fait 3.17. *Pour les sommets x, y, z, t on a :*

- *Si $l(xy) = l(xz)$, alors $\{x, y, z\} \in H$*

- *Si $l(xy) = l(zt)$, alors n'importe quel triplet parmi $\{x, y, z, t\}$ se trouve dans H.*

Fait 3.18. *Pour n'importe quel sommet x, y, z, t dans X, il est impossible d'avoir*

$$l(xy) = l(xz) \neq l(yz) = l(zt).$$

Supposons qu'on ait $l(xy) = l(xz) \neq l(yz) = l(zt)$. Disons que $l(xy) = 1$ et $l(yz) = 2$. On sait par le Fait 3.17 que $\{x, y, z\} \in H$ et que $\{y, z, t\} \in H$. On aura alors $\{x, y, z, t\} \in \overline{yz} \subseteq L_2$. Cette inclusion est une égalité étant donné que L_2 n'est pas universelle.
Maintenant, comme $x \in L_2$ et $l(zt) = 2$ on a donc $\{x, z, t\} \in H$ et alors $\{x, y, z, t\} \in \overline{xz} \subseteq L_1$. Cette inclusion aussi est une égalité ce qui nous donne $L_1 = L_2$, une contradiction.
Regardons maintenant la structure des arêtes du graphe complet (avec les sommets X) qui ont les étiquettes égales.

Cas 1 : Il existe quatre sommets x, y, z et t tels que $l(xy) = l(zt)$.
Sans perte de généralité soit $l(xy) = 1$. Du Fait 3.17 et L_1 n'étant pas universelle, on aura $L_1 = \{x, y, z, t\}$ et toutes les paires dans $\{x, y, z, t\}$ ont l'étiquette 1. Soit s le cinquième sommet. Le sommet s n'est pas dans L_1, alors il n'a pas d'arêtes incidentes avec l'étiquette 1. En plus, les arêtes incidentes à s ne peuvent pas avoir les mêmes étiquettes, sinon L_1 serait universelle. On conclut que l'étiquetage du graphe complet avec les sommets de X est forcé et correspond à un faisceau de

droites ; où L_1 est la droite de cardinalité $5-1=4$ et s est le sommet extérieur.

Cas 2 : Deux arêtes qui ont la même étiquette sont adjacentes.
Sous-cas 2.1 : Il existe 3 sommets x, y et z tels que $l(xy) = l(xz) = l(yz)$.
Sans perte de généralité supposons $l(xy) = 1$. La classe des arêtes étiquetées 1 contient exactement les trois arêtes xy, xz et yz (sinon, on est dans Cas 1). Soit t un quatrième sommet, les arêtes tx, ty et tz ont des étiquettes deux à deux distinctes (par Fait 3.18). Disons $l(tx) = 2$, $l(ty) = 3$ et $l(tz) = 4$. Soit s le cinquième sommet. De la même façon, sx, sy et sz ont deux à deux des étiquettes différentes.
Au plus une des droites est la droite 5. Supposons que $l(sx) \neq 5$ et $l(sy) \neq 5$ et que $l(sx) = 2$ et $l(sy) = 3$ (sinon, on est encore dans Cas 1). Par le Fait 3.17, $x, y \in \overline{st}$. Si on veut que $\overline{st}$ ne soit pas universelle, il faut avoir $l(sz) = 5$. Par le Fait 3.18, il ne reste aucun choix d'étiquette pour $l(st)$. On ne peut pas avoir ce sous-cas.

Sous-cas 2.2 : Il existe 4 sommets x, y, z et t tels que $l(xy) = l(xz) = l(xt)$.
Supposons que $l(xy) = 1$. Les arêtes yz, yt et zt n'ont pas l'étiquette 1 (sinon, on serait dans le Cas 1). Par le Fait 3.18, elles ont des étiquettes deux à deux différentes. Disons qu'on a $l(yz) = 2, l(yt) = 3$ et $l(zt) = 4$. Soit s le cinquième sommet. Pour que L_1 ne soit pas universelle, et aussi par le Fait 3.18, on a $l(sx) = 5$. N'importe quel choix pour $l(st)$ nous ramènera au Cas 1 ou au Fait 3.18.

Sous-cas 2.3 : N'importe quel ensemble d'arêtes ayant les mêmes étiquettes est composé de deux arêtes adjacentes.
Soient xy et yz tels que $l(xy) = l(yz) = 1$. Supposons qu'on a $l(xz) = 2$. Maintenant, à cause du Fait 3.18, on ne peut pas avoir l'arête xy étiquetée 2. Ce sous-cas n'arrive jamais.
On vient de montrer que tout hypergraphe 3-uniforme extrémal avec 5 sommets est un faisceau de droites.

□

Lemme 3.19. *Soit* (X, H) *un hypergraphe* 3*-uniforme où* $|X| = 6$*. S'il n'a pas la propriété de De Bruijn-Erdős, il ne peut pas contenir le faisceau de droites avec* 5 *sommets comme un sous-hypergraphe induit.*

Démonstration. Soit v un sommet de X tel que l'hypergraphe induit par $X \backslash \{v\}$ nous donne un faisceau de droites. Afin de ne pas augmenter le nombre de droites en rajoutant le sommet v, il faut choisir à quelle droite on doit ajouter v. Si v est rajouté à L_i, alors les triplets $\{v, x, y\}$ où $l(xy) = i$ sont dans H. Sinon, aucun de ces triplets n'appartient à H. En plus, tout $x \in X \backslash \{v\}$ doit être ajouté dans un triplet avec v, car sinon ils créeront des droites de cardinalité 2. Aussi aucun sommet x de $X \backslash \{v\}$ ne doit avoir les étiquettes de ses arêtes incidentes augmentées avec v, sinon on va avoir une droite universelle. On veut un ensemble d'étiquettes couvrant tous les sommets de $X \backslash \{v\}$ et qui n'induit pas un graphe étoile $K_{1,4}$. Ce qui est impossible pour le faisceau de droites. $\square$

En conclusion, on a la preuve de la Proposition 3.13 avec les lemmes 3.14, 3.16 et 3.19.

3.2. Des généralisations variées du Théorème de De Bruijn-Erdős

Dans la littérature, on peut trouver des généralisations variées du Théorème de De Bruijn-Erdős. Par exemple dans [27, 22, 3, 25]. Ici, nous allons voir des généralisations du Théorème dans le cas des hypergraphes 3-uniformes.

Théorème 3.20 (Beaudou et coll. [4], Th. 5)**.** *Si dans un hypergraphe 3-uniforme aucun sous-hypergraphe induit par quatre sommets n'a une ou trois hyperarêtes, alors cet hypergraphe a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Démonstration. Soit $(V, \mathcal{E})$ un hypergraphe 3-uniforme où aucun sous-graphe induit par quatre sommets n'a une ou trois hyperarêtes. Un tel hypergraphe a plus que 3 sommets. Soit x, u, v, w quatre sommets distincts. D'abord, on montre

$$\overline{uv} = \overline{uw} \text{ et } v \neq w \Rightarrow \overline{vw} = V. \tag{8}$$

On veut montrer que $x \in \overline{vw}$. Puisqu'on a $\overline{uv} = \overline{uw}$, on a $\{u, v, w\} \in \mathcal{E}$. Maintenant, les quatre sommets u, v, w, x induisent une ou trois hyperarêtes en plus de $\{u, v, w\}$. Étant donné que $\{u, v, x\} \in \mathcal{E}$ si et seulement si $\{u, w, x\} \in \mathcal{E}$, on aura $\{v, w, x\} \in \mathcal{E}$. Maintenant, on veut montrer que $(V, \mathcal{E})$ a la propriété de De Bruijn-Erdős. On peut supposer qu'il n'y a pas de droite qui contient tous les sommets de V, sinon on a fini. Prenons une droite L et un sommet v dans $V \backslash L$. Toutes les droites $\overline{uv}$ où $u \neq v$ sont deux à deux distinctes par (8) et L est différent de toutes les droites $\overline{uv}$ car elle ne contient pas le sommet v.

$\square$

Théorème 3.21 (Beaudou et coll. [4], Th. 6)**.** *Si, dans un hypergraphe* 3*-uniforme, aucun sous-graphe induit par quatre sommets n'a quatre hyperarêtes, alors il a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Démonstration. Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe 3-uniforme où aucun sous-graphe induit par quatre sommets n'a quatre hyperarêtes. Soit $|V| = n \geq 4$.
Nous allons prouver par induction que H a au moins n droites distinctes. Le cas avec $n = 4$ est déjà prouvé au Lemme 3.10.
L'étape inductive :
On peut supposer qu'il existe une certaine droite $\overline{pq}$ où $|\overline{pq}| \geq 4$, car sinon le théorème de De Bruijn-Erdős [7] nous dit que H a au moins n droites. Nommons les sommets de H : $p = v_1, q = v_2, \cdots, v_n$. Par l'hypothèse d'induction on sait qu'au moins $n-1$ des droites $\overline{v_r v_s}$ sont distinctes.
Nous allons montrer qu'au moins une parmi les droites $\overline{pv_2}, \overline{pv_3}, \cdots, \overline{pv_n}$ est différente des autres.
Supposons le contraire. Chaque droite $\overline{pv_i}$ est égale à une certaine $\overline{v_{r(i)} v_{s(i)}}$ et ainsi on va trouver quatre sommets induisant quatre hyperarêtes. On peut supposer qu'un des $r(i), s(i)$ est égale à i. Sinon on a $p, v_i, v_{r(i)}, v_{s(i)}$ quatre sommets induisant quatre hyperarêtes. Alors, on peut dire $r(i) = i$ et que $\overline{pv_i} = \overline{v_i v_{s(i)}}$ $\forall i$. Soit $s(2) = j$.
Cas 1 : $s(j) = 2$.
On a

$$\overline{pv_2} = \overline{v_2 v_{s(2)}} = \overline{v_2 v_j} = \overline{v_j v_2} = \overline{v_j v_{s(j)}} = \overline{pv_j}.$$

Cette droite a au moins quatre sommets (par notre supposition) ; p, v_2, v_j et un autre parmi ses sommets induisent quatre hyperarêtes, ce qui est une contradiction.

Cas 2 : $s(j) \neq 2$.
On a quatre sommets $p, v_2, v_j, v_{s(j)}$. On a $\overline{pv_2} = \overline{v_2 v_j}$ donc on a $\{p, v_2, v_j\} \in \mathcal{E}$. On a aussi $\overline{pv_j} = \overline{v_j v_{s(j)}}$ donc on a $\{p, v_j, v_{s(j)}\} \in \mathcal{E}$. Maintenant, $v_2 \in \overline{pv_j}$ et donc $\overline{pv_j} = \overline{v_j v_{s(j)}}$ implique $\{v_2, v_j, v_{s(j)}\} \in \mathcal{E}$. Ainsi, $v_{s(j)} \in \overline{v_2 v_j}$ et donc $\overline{pv_2} = \overline{v_2 v_j}$ implique $\{p, v_2, v_{s(j)}\} \in \mathcal{E}$. Mais on sait que $p, v_2, v_j, v_{s(j)}$ induisent quatre hyperarêtes. Contradiction.

□

On peut améliorer le Théorème précédent pour n suffisamment grand ($n \geq 27$). Pour un hypergraphe tel qu'indiqué dans le Théorème 3.21, on a que le nombre de droites distinctes croît plus rapidement que le nombre des sommets (ceci est vrai même s'il existe une droite universelle).

Théorème 3.22 (Beaudou et coll. [4], Th. 7)**.** *Si dans un hypergraphe* 3*-uniforme* $(V, \mathcal{E})$ *où* $|V| = n$*, aucun sous-hypergraphe induit par quatre sommets n'a quatre hyperarêtes, alors* $(V, \mathcal{E})$ *a au moins* $\left(\frac{n}{3}\right)^{3/2}$ *droites distinctes.*

Démonstration. Soit m le nombre de droites distinctes de $(V, \mathcal{E})$. Nous allons montrer le théorème en utilisant le principe d'induction.

Étape de base :

Si $1 < n \leq 3$, on a toujours $m \geq \left(\frac{n}{3}\right)^{3/2}$.

Étape inductive ($n \geq 4$) :

Prenons un plus grand ensemble S des paires (non-ordonnées) des sommets distincts tel que toutes les droites $\overline{vw}$ où $\{v, w\} \in S$ sont identiques. Soit $|S| = s$.

Cas 1 : $s \leq \sqrt{n} + 1$.

On a donc

$$m \geq \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{n}+1} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\sqrt{n}+1} = \frac{1}{2} n^{3/2} \cdot n^{1/2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+1} \ ,$$

$$\frac{1}{2} n^{3/2} \cdot \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n}+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{2} n^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} n^{3/2} > \left(\frac{n}{3}\right)^{3/2}$$

Cas 2 : $s > \sqrt{n} + 1$.

Donc ici on a $s > 3$. Maintenant, deux paires dans S partagent toujours un sommet, car sinon les quatre sommets induisent quatre hyperarêtes. Étant donné que $s > 3$, on en déduit qu'il y a un sommet commun pour toutes les paires dans S. On peut donc écrire pour ces paires-ci :

$$\{u, v_1\}, \{u, v_2\}, \cdots, \{u, v_s\}.$$

D'abord prouvons que toutes les droites $\overline{v_i v_j}$ avec $1 \leq i < j \leq s$ sont définies de façon unique, c'est-à-dire

$$\overline{v_iv_j} = \overline{xy} \text{ veut dire } \{x,y\} = \{v_i, v_j\} \tag{9}$$

Prenons les sommets v_i, v_j, x, y tels que $\overline{v_iv_j} = \overline{xy}$. On ne peut pas avoir tous ces sommets distincts, sinon ils vont induire quatre hyperarêtes. Sans perte de généralité, disons que $x = v_i$. Ainsi on suppose que $y \neq v_j$ ce qui nous amène à une contradiction.

On a $\{y, v_i, v_j\} \in \mathcal{E}$ puisque $y \in \overline{v_iy} = \overline{v_iv_j}$. Ainsi, on a $y \neq u$ car $\overline{v_iy} = \overline{v_iv_j} \neq \overline{uv_i}$. $\{u, v_i, v_j\} \in \mathcal{E}$ comme $\overline{uv_i} = \overline{uv_j}$. $\{u, v_i, y\} \in \mathcal{E}$ étant donné qu'on a $u \in \overline{v_iv_j} = \overline{v_iy}$. Finalement, $\{y, u, v_j\} \in \mathcal{E}$ parce que $y \in \overline{uv_i} = \overline{uv_j}$. Maintenant, on voit que u, v_i, v_j, y induisent quatre hyperarêtes. Ce qui est une contradiction et (9) est ainsi démontré.
Soit $\mathcal{L}_1$ l'ensemble de toutes les droites $\overline{v_iv_j}$. Soit $\mathcal{L}_2$ l'ensemble de toutes les droites $\overline{xy}$ où $x, y \notin \{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$. De (9), on a $|\mathcal{L}_1| = \binom{s}{2}$ et $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$. Ainsi par hypothèse d'induction on a $|\mathcal{L}_2| \geq \left(\frac{n-s}{3}\right)^{3/2}$. Alors on a

$$m \geq \binom{s}{2} + \left(\frac{n-s}{3}\right)^{3/2} > \binom{s}{2} + \left(\frac{n}{3}\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[2]{3}}\sqrt{n}\, s$$

$$> \left(\frac{n}{3}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}\, s\left(1 - \frac{3}{\sqrt[2]{3}}\right) > \left(\frac{n}{3}\right)^{3/2}$$

□

3.2.1. Une autre généralisation du Théorème de De Bruijn-Erdős

Ici la supposition qu'aucun sous-hypergraphe induit par quatre sommets a trois hyperarêtes (ou d'autres suppositions) n'est pas nécessaire. Mais par contre la supposition qu'aucun sous-graphe induit par quatre sommets a deux hyperarêtes ne peut être supprimée et ceci entre autres à cause de l'Exemple 1.

Avant de donner l'énoncé du théorème, il faut donner quelques définitions des hypergraphes extrémaux :

On reprend la Définition 3.15, cette fois pour un hypergraphe.
Définition 3.23. *Un* faisceau de droites *est un hypergraphe* $(V, \mathcal{L})$ *tel que*

$$\mathcal{L} = \{V \backslash \{w\}\} \cup \{\{v, w\} : v \in V \backslash \{w\}\} \textit{ pour un sommet } w.$$

On dit qu'un hypergraphe 3*-uniforme* $(V, \mathcal{E})$ génère un faisceau de droites *si*

$$\mathcal{E} = \binom{V\backslash\{w\}}{3} \quad \textit{pour un sommet } w.$$

Tel est le cas si et seulement si l'ensemble $\mathcal{L}$ *est tel que* $(V, \mathcal{L})$ *est un faisceau de droites.*

Définition 3.24. *Un* plan projectif fini *est un hypergraphe* $(V, \mathcal{L})$ *dans lequel, pour un entier* $k > 1$*, toute paire de sommets appartient à précisément une hyperarête,* $|V| = k(k-1)+1$*, et chaque hyperarête contient précisément* k *sommets.*

Un hypergraphe 3*-uniforme* génère un plan projectif fini *si, pour un plan projectif fini* $(V, \mathcal{L})$*,*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} \binom{L}{3}.$$

Tel est le cas si et seulement si l'ensemble des droites de $(V, \mathcal{E})$ *est* $\mathcal{L}$*.*

Définition 3.25. *Un hypergraphe* 3*-uniforme* $(V, \mathcal{E})$ *est un* complément de système de Steiner*, si toute paire de ses sommets appartient à précisément un membre de* $\binom{V}{3}\backslash\mathcal{E}$*. C'est le cas si et seulement si l'ensemble des droites de* $(V, \mathcal{E})$ *est* $\{V\backslash\{x\} : x \in V\}$*.*

Constatons que les deux hypergraphes extrémaux $(V, \mathcal{L})$ dans le Théorème de De Bruijn-Erdős sont le faisceau de droites et le plan projectif fini.

Définition 3.26. $F + G$ *est* l'union disjointe *des graphes* F *et* G*.*

Définition 3.27. $F \vee G$ *est le graphe* $F + G$ *avec des arêtes additionnelles qui relient tous les sommets de* F *à tous les sommets de* G*.*

Définition 3.28. *Un graphe* sans-F *est un graphe qui n'as pas de sous-graphe induit isomorphe au graphe* F*.*

Théorème 3.29 (Beaudou et coll. [4], Th. 2)**.** *Soit* $(V, \mathcal{E})$ *un hypergraphe* 3*-uniforme avec au moins* 2 *sommets tel qu'aucuns quatre sommets n'induisent deux hyperarêtes. Soit* $\mathcal{L}$ *l'ensemble des droites de cet hypergraphe. Si* $V \notin \mathcal{L}$*, alors* $|\mathcal{L}| \geq |V|$*, avec l'égalité si et seulement si* $(V, \mathcal{E})$ *génère un faisceau de droite ou un plan projectif fini ; ou est un complément du système de Steiner.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ l'hypergraphe et soit n le nombre de ses sommets. Nous allons utiliser l'induction sur n. Le cas $n = 2$ est trivial (en fait, dans ce cas-ci, $\mathcal{H}$ a la propriété de De Bruijn-Erdős). Dans l'étape inductive, on va distinguer entre deux cas (on a par hypothèse que $V \notin \mathcal{L}$).

Cas 1 : Toute paire de sommets de $\mathcal{H}$ appartient à précisément une droite maximale (par rapport à l'inclusion des ensembles).
Soit $\mathcal{L}^{\max}$ l'ensemble des droites maximales de $\mathcal{H}$. Par le Théorème de De Bruijn-Erdős on a $|\mathcal{L}^{\max}| \geq n$, avec l'égalité si et seulement si $(V, \mathcal{L}^{\max})$ est un faisceau de droites ou un plan projectif fini. Puisque $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}^{\max}$, on a $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{L}^{\max}| \geq n$. Si $|\mathcal{L}| = n$, alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\max}$, et donc $(V, \mathcal{L})$ est un faisceau de droites ou un plan projectif fini.

Cas 2 : Il existe des paires de sommets de $\mathcal{H}$ qui appartiennent à plus d'une droite maximale.
Soit p un de ces points et soit Σ le graphe avec l'ensemble de sommets $V \backslash \{p\}$, où les sommets u, v sont adjacents si et seulement si $\{p, u, v\} \in \mathcal{E}$. Puisque p, u, v, w n'induisent pas deux hyperarêtes,

> (i) si u, v, w induisent deux arêtes dans Σ, alors $\{u, v, w\} \in \mathcal{E}$; si u, v, w induisent une arête dans Σ, alors $\{u, v, w\} \notin \mathcal{E}$.

Un théorème de Seinsche [26] nous dit que tout graphe connexe sans-P_4 avec plus d'un sommets a un complément non connexe. La propriété (i) de Σ nous donne que Σ est sans-P_4. Sinon, ayant un sous-graphe P_4 implique que les quatre sommets de P_4 induisent deux hyperarêtes. Ainsi,

> (ii) Tout sous-graphe induit connexe de Σ avec plus d'un sommet a un complément non connexe.

Ayant les propriétés (i) et (ii), nous allons distinguer entre deux sous-cas.

Sous-cas 2.1 : Σ est non connexe.
Ici, nous allons montrer $|\mathcal{L}| > n$. Le graphe Σ étant non connexe, on a

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_k,$$

où $k \geq 2$ et chaque Σ_i est connexe. De (ii), on a que chaque Σ_i est soit un sommet, soit a un complément non connexe.

Pour chaque $i = 1, 2, \cdots, k$, soit V_i l'ensemble des sommets de Σ_i et soit $W_i = V_i \cup \{p\}$. On va montrer

(iii) si $x, y \in W_i,\ x \neq y,\ z \in V \backslash W_i$, alors $\{x, y, z\} \notin \mathcal{E}$.

Si un des x ou y est p, alors la conclusion découle du fait que tous les sommets dans V_i ne sont pas adjacents dans Σ à tous les sommets dans $V \backslash W_i$. Quand x et y sont des sommets adjacents dans Σ_i, la conclusion découle du même fait avec la propriété (i). Lorsque x et y ne sont pas adjacents dans Σ_i, considérons le chemin le plus court P qui va de x à y dans Σ_i. Étant donné que x et y ne sont pas adjacents et Σ est sans-P_4, P a exactement trois sommets. Soit w l'unique sommet intérieur de P. De (i), on a

$$\{x, y, w\} \in \mathcal{E}, \{x, z, w\} \notin \mathcal{E}, \{y, z, w\} \notin \mathcal{E}.$$

De plus, le fait que x, y, z, w n'induisent pas deux hyperarêtes implique $\{x, y, z\} \notin \mathcal{E}$. Soit $\mathcal{H}_i$ le sous-hypergraphe de $\mathcal{H}$ qui est induit par W_i. Dans l'argument inductif, on utilise la propriété (iii) de la façon suivante :

(iv) si $u, v \in W_i,\ u \neq v$ alors la droite $\overline{uv}$ dans $\mathcal{H}_i$ est égale à la droite $\overline{uv}$ dans $\mathcal{H}$.

Ou même encore :

(v) si $u \in v_i,\ v \in v_j,\ i = j$ alors $\overline{uv} \cap (W_i \cup W_j) = \{u, v\}$.

Maintenant, montrons

(vi) $p \in \overline{uv} \Rightarrow \overline{uv} \subseteq W_i$ pour un i.

Puisque u et v sont distincts, on peut supposer $u \neq p$ et donc $u \in V_i$ pour un i. On montre que $v \in W_i$. Si $v = p$, alors ceci est trivial. Si $v \neq p$, alors $p \in \overline{uv}$ implique u et v sont adjacents dans Σ, et donc $v \in V_i$. On a $u, v \in W_i$, donc $\overline{uv} \subseteq W_i$ (par (iv)).

De (vi), on déduit

(vii) $W_r \notin \mathcal{L}$ pour un r.

On sait qu'il y a un sommet y autre que p tel que p et y appartiennent à au moins deux droites maximales de $\mathcal{H}$. Le sommet y appartient à V_r pour un r. Par (vi) toute droite contenant p et y est un sous-ensemble de W_r. Étant donné qu'au moins deux droites maximales contiennent p et y, on a $W_r \notin \mathcal{L}$.

Soit S l'ensemble des indices i tel que W_i est une droite de $\mathcal{H}_i$. De (iv) et (vii), on a $|S| \leq k-1$. Ainsi, on a trois sous-cas à considérer.

Sous-cas 2.1.1 : $|S| = 0$.
Par l'hypothèse d'induction, chaque $\mathcal{H}_i$ a au moins $|W_i|$ droites distinctes. Par (iv) chacune de ces droites est une droite de $\mathcal{H}$. Comme $|W_i \cap W_j| = 1$ lorsque $i \neq j$, on a donc que toutes ces droites avec $i = 1, 2, \cdots, k$ sont distinctes. Ainsi,

$$|\mathcal{L}| \geq \sum_{i=1}^{k} |W_i| = n + k - 1 > n.$$

Sous-cas 2.1.2 : $|S| = 1$.
On peut supposer que $S = \{1\}$. W_1 est une droite de $\mathcal{H}$. Par (v), les $|V_1| \cdot |V_2|$ droites $\overline{uv}$ de $\mathcal{H}$ avec $u \in V_1,\ v \in V_2$ sont toutes distinctes. L'intersection de ces droites avec V_2 est non vide, et donc elles sont distinctes de W_i. Par l'hypothèse d'induction, chaque $\mathcal{H}_i$ avec $i \geq 2$ a au moins $|W_i|$ droites distinctes. Par (iv), chacune de ces droites est une droite de $\mathcal{H}$. Comme $|W_i \cap W_j| = 1$ lorsque $i = j$, toutes ces droites avec $i = 2, 3, \cdots, k$ sont distinctes. Étant donné qu'elles sont toutes disjointes de V_1, elles sont toutes distinctes de W_1 et toute $\overline{uv}$ avec $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Ainsi,

$$|\mathcal{L}| \geq 1 + \sum_{i=2}^{k} |W_i| + |V_1| \cdot |V_2| \geq 1 + \sum_{i=2}^{k} |W_i| + |V_1| = n + k - 1 > n.$$

Sous-cas 2.1.3 : $2 \leq |S| \leq k-1$.
Soit $W^* = \bigcup_{i \in S} W_i$ et soit $\mathcal{H}^*$ le sous-graphe de $\mathcal{H}$ induit par W^*. De (vi) et $|S| \geq 2$, on a aucune droite de $\mathcal{H}$ contient W^*. Par l'hypothèse d'induction, $\mathcal{H}^*$ a au moins $1 + \sum_{i \in S} |V_i|$ droites distinctes, de même $\mathcal{H}$ a au moins $1 + \sum_{i \in S} |V_i|$ droites distinctes $\overline{uv}$ avec $u, v \in W^*$. Par l'hypothèse d'induction, chaque $\mathcal{H}_i$ où $i \notin S$ a au moins $|W_i|$ droites distinctes, et par (iv), chacune de ces droites est

une droite de $\mathcal{H}$. Étant donné que $|W_i \cap W_j| = 1$ lorsque $i \neq j$, toutes ces droites avec $i \notin S$ sont distinctes. Puisque elles sont aussi disjointes de $W^* \backslash \{p\}$, elles sont distinctes de tout $\overline{uv}$, où $u, v \in W^*$. Ainsi,

$$|\mathcal{L}| \geq 1 + \sum_{i \in S} |V_i| + \sum_{i \notin S} |W_i| = n + (k - |S|) > n.$$

Sous-cas 2.2 : Σ est connexe.
Par (ii), la supposition de ce sous-cas implique que Σ a un complément non connexe. Ceci veut dire

$$\Sigma = \Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \cdots \vee \Sigma_k,$$

où $k \geq 2$ et chaque Σ_i a un complément connexe ; de (ii) chaque Σ_i est soit un sommet, soit un graphe non connexe. Pour chaque $i = 1, 2, \cdots, k$, soit V_i l'ensemble des sommets de Σ_i et soit $W_i = V_i \cup \{p\}$.

Maintenant montrons

$(viii)$ $x, y \in W_i,\ x \neq y,\ z \in V \backslash W_i \Rightarrow \{x, y, z\} \in \mathcal{E}$.

Si un des x ou y est p, on aura que tout sommet de V_i est adjacent dans Σ à tous les sommets de $V \backslash W_i$. Si x, y ne sont pas adjacents dans Σ_i, on aura la conclusion aussi du même fait avec (i). Si x et y sont adjacents dans Σ_i ; considérons un chemin plus court P de x à y dans le complément de Σ_i. Comme Σ_i est sans-P_4 son complément est sans-P_4 aussi, donc P a exactement trois sommets. Soit w l'unique sommet de l'intérieur de P. De (i), on a

$$\{x, y, w\} \notin \mathcal{E}, \{x, z, w\} \in \mathcal{E}, \{y, z, w\} \in \mathcal{E}$$

ainsi, x, y, z, w n'induisent pas deux hyperarêtes, ce qui implique $\{x, y, z\} \in \mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{H}_i$ le sous-hypergraphe de $\mathcal{H}$ induit par W_i. Dans l'argument inductif, on utilise la propriété $(viii)$ de la façon suivante :

(ix) $u, v \in W_i,\ u \neq v \Rightarrow$ la droite $\overline{uv}$ dans $\mathcal{H}$ est égale à $Z \cup (V \backslash W_i)$ où Z est la droite $\overline{uv}$ dans $\mathcal{H}_i$.

De (ix), on a

(x) Aucune droite de $\mathcal{H}_i$ n'est égale à W_i.

Maintenant, l'hypothèse d'induction appliquée à $\mathcal{H}_i$ nous garantit qu'il y a $|W_i|$ droites distinctes. De (ix), on a

(xi) $\mathcal{H}$ a au moins $|W_i|$ droites distinctes $\overline{uv}$ où $u, v \in W_i$.

En plus de (ix) on a

(xii) $u, v \in W_i,\ x, y \in W_j,\ i \neq j,\ \overline{uv} = \overline{xy} \Rightarrow \overline{uv} = \overline{xy} = V \backslash \{p\}$.

Sous-cas 2.2.1 : $V \backslash \{p\} \notin \mathcal{L}$.
Ici, (xii) nous garantit

$$u, v \in W_i,\ x, y \in W_j,\ i \neq j \Rightarrow \overline{uv} \neq \overline{xy}.$$

Donc (xi) nous donne

$$|\mathcal{L}| \geq \sum_{i=1}^{k} |W_i| = n + k - 1 > n.$$

Sous-cas 2.2.2 : $V \backslash \{p\} \in \mathcal{L}$.
De (xi), on a que $\mathcal{H}$ a au moins $|W_i| - 1$ droites distinctes $\overline{uv}$ telles que $u, v \in W_i$ et $\overline{uv} \neq V \backslash \{p\}$, et donc (xii) avec la supposition de ce sous-cas nous donne

$$|\mathcal{L}| \geq \sum_{i=1}^{k} (|W_i| - 1) + 1 = n.$$

Afin de compléter ce sous-cas, nous allons considérer les hypergraphes extrémaux (ceux qui ont $|\mathcal{L}| = n$). On a

$(xiii)$ Chaque $\mathcal{H}_i$ a précisément $|W_i|$ droites, et V_i est une de ces droites. L'ensemble $\mathcal{L}$ est formé par tous les ensembles $Z \cup (V \backslash W_i)$ tels que Z est une droite d'un $\mathcal{H}_i$.

Montrons maintenant,

(xiv) L'ensemble des hyperarêtes $\mathcal{E}_i$ de chaque $\mathcal{H}_i$ est $\binom{V_i}{3}$.

Comme V_i est une droite de $\mathcal{H}_i$, alors elle contient au moins deux sommets. Si $|V_i| = 2$, alors de (x), (xiv) on aura que $\mathcal{H}_i$ n'as pas d'hyperarêtes. Supposons $|V_i| \geq 3$. Par l'hypothèse d'induction et (x), on a que $\mathcal{H}_i$ génère un faisceau de droite ou un plan projectif fini ou qu'il est un complément du système de

Steiner. Étant donné que V_i est une des droites de $\mathcal{H}_i$, le fait de montrer (xiv) nous donne que $\mathcal{H}_i$ génère un faisceau de droites. $\mathcal{H}_i$ ne génère pas un plan projectif fini, car une de ses droites (c'est-à-dire V_i) contient tous les sommets sauf un. Le sous-hypergraphe $\mathcal{H}_i$ ne génère pas non plus un complément du système de Steiner, par le fait que Σ_i est non connexe, et donc il contient des sommets u, v, w tels que u n'est pas adjacent aux v et w. Maintenant, u et p appartient à au moins deux membres de $\binom{W_i}{3} \backslash \mathcal{E}_i : \{u, v, p\}$ et $\{u, w, p\}$. Ainsi on a prouvé (xiv).

Montrons maintenant

> (xv) Pour tout $i = 1, 2, \cdots, k$ et tout $x \in V_i$, il y a un $L \in \mathcal{L}$ tel que $V_i \backslash L = \{x\}$.

Choisissons un sommet z dans $V \backslash W_i$. Puisque $\overline{xz} \neq V$, il y a un w dans V tel que $w \neq x$, $w \neq z$, et $\{x, z, w\} \notin \mathcal{E}$. De $(viii)$, on a $w \notin W_i$. Par la suite considérons un sommet arbitraire $y \in V_i \backslash \{x\}$. De $(viii)$, on aura $\{x, y, z\} \in \mathcal{E}$ et $\{x, y, w\} \in \mathcal{E}$. On sait aussi que x, y, z, w n'induisent pas deux hyperarêtes, ce qui fait que $\{y, z, w\} \in \mathcal{E}$. Alors, on conclut que $y \in \overline{zw}$ et donc $V_i \backslash \overline{zw} = \{x\}$.

Maintenant montrons

> (xvi) $V \backslash \{x\} \in \mathcal{L}$, $\forall x \in V$.

On sait, par la supposition de ce sous-cas, que $V \backslash \{p\} \in \mathcal{L}$. Regardons les sommets x qui ne sont pas égaux à p. On a x appartenant a un V_i. Par (xv), il existe un L dans $\mathcal{L}$ tel que $V_i \backslash L = \{x\}$. De $(xiii)$, ils existent un indice j et une droite Z de $\mathcal{H}_j$ tels que $L = Z \cup (V \backslash W_j)$. Maintenant $V_i \nsubseteq L$ et $V_r \subseteq L$ lorsque $r \neq j$, donc on a $j = i$. Par (xiv) toutes les droites de $\mathcal{H}_i$ sont soit égales à V_i, soit elles incluent p. Étant donné que $V_i \backslash Z = V_i \backslash L = \{x\}$, on aura donc que $p \in Z$. Maintenant, $V_i \backslash Z = \{x\}$ et $P \in Z$, ceci implique $Z = W_i \backslash \{x\}$. On conclut que $L = V \backslash \{x\}$.

Comme $|\mathcal{L}| = n$, le fait (xvi) garantit que $\mathcal{L}$ est formé par les n ensembles $V \backslash \{x\}$ avec x qui parcourt les sommets de V. C'est-à-dire, pour toute paire de sommets u et v, il existe un unique sommet dans $V \backslash \overline{uv}$. Ce qui veut dire que $\mathcal{H}$ est un complément du système de Steiner.

$\square$

3.3. Le nombre de droites d'un hypergraphe

Définition 3.30. *Soit $m(n,k)$ le plus petit nombre de droites dans un hypergraphe avec n sommets où chaque droite contient au plus k sommets.*

Ainsi, $m(n, n-1)$ désigne le nombre de droites d'un hypergraphe avec n sommets où aucune droite n'est universelle.

Lemme 3.31 (Chen et Chvátal [11])**.** *Si n, l, a sont des entiers positifs tels que $2 \leq n - l \leq a^l$. Alors il existe un hypergraphe tel que*

$$m(n, n-1) \leq 2^l + la$$

.

Démonstration. Soit $P = \{1, 2, \cdots, l\}$ (un ensemble de «positions»). Soit A où $|A| = a$ un ensemble (l'ensemble «alphabet»). Par hypothèse, on a un ensemble S des chaînes de longueur l sur l'alphabet A tel que $|S| = n - l$ et tel que pour chaque i dans P, certaine paire de chaînes dans S diffère à leur i-ième position. Maintenant, pour chaque choix de i dans P et x dans A ; soit

$$E_{ix} = \{i\} \cup \{x_1 x_2 \cdots x_l \in S : x_i = x\}.$$

Regardons toutes les droites $\overline{uv}$ dans l'hypergraphe :

$$(P \cup S, \{P, S\} \cup \{E_{ix} : i \in P, x \in A\})$$

Si $u, v \in P$, alors $\overline{uv} = P$. Si $u \in P$ et $v \in S$, alors $\overline{uv} = E_{ux}$ où x est le u-ième caractère dans V. Si $u, v \in S$, alors $\overline{uv} = S \cup P'$ avec P' l'ensemble des positions où u et v accordent ($P' \subset P$, P' peut être vide aussi).

Donc l'hypergraphe a n sommets (pas de droite universelle) et il y a $1 + la + (2^l - 1) = la + 2^l$ droites.

□

Regardons un petit exemple explicatif de la preuve du Lemme 3.31 :
Soient $n = 6$, $P = \{1, 2\}$ donc $l = 2$ et $a = |A| = 2$ (on a bel et bien $2 \leq 6 - 2 \leq 2^2$). Aussi $|S| = 6 - 2 = 4$ et $S = \{00, 01, 10, 11\}$.

On a pour les sommets : $1, 2, 00, 01, 10, 11$
On a pour les hyperarêtes :

$$P = \{1, 2\}, S = \{00, 01, 10, 11\}, E_{10} = \{1, 00, 01\},$$

$$E_{11} = \{1, 10, 11\}, E_{20} = \{2, 00, 10\}, E_{21} = \{1, 01, 11\}$$

On a $2 \cdot 2 + 2^2 = 8$ droites. Pour la simplicité de la lecture, nommons ainsi les sommets : $1 = A, 2 = B, 00 = C, 01 = D, 10 = E, 11 = F$. Regardons maintenant les 8 droites :

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \{A, B\} \\
\overline{AC} &= \{A, C, D\} = \overline{AD} \\
\overline{AE} &= \{E, F, A\} = \overline{AF} \\
\overline{DE} &= \{C, D, E, F\} = \overline{CF} \\
\overline{DF} &= \{C, D, E, F, B\} = \overline{CE} \\
\overline{EF} &= \{C, D, E, F, A\} = \overline{CD} \\
\overline{BC} &= \{B, C, E\} = \overline{BE} \\
\overline{BD} &= \{B, D, F\} = \overline{BF}
\end{aligned}$$

On peut voir par exemple :

$$A, B \in P \Rightarrow \overline{AB} = P$$

$$A \in P, C \in S \Rightarrow \overline{AC} = E_{10}$$

$$C, F \in S \Rightarrow \overline{CF} = S \cup \emptyset = S$$

$$C, D \in S \Rightarrow \overline{CD} = S \cup \{1\} = S \cup A \text{ etc.}$$

3.3.1. Borne supérieure pour $m(n, n-1)$

Théorème 3.32 (Chen et Chvátal [11])**.** *Il existe des constantes positives n_0 et c telles que :*

$$si\ n \geq n_0,\ alors\ m(n, n-1) \leq c^{\sqrt{\ln n}}$$

pour tout n.

Démonstration. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes arbitraires telles que :

$$0 < \alpha < 1,\ 1 < \beta < \gamma,\ \gamma < 2 < \delta.$$

On peut trouver un entier positif l_0 tel que :

$$l \geq l_0 \Rightarrow \alpha l < l - 1,\ \ \beta^l < \gamma^l - 1,\ \ l\gamma^l < 2^l,\ \ 2^{l+1} < \delta^l.$$

Le théorème est prouvé si $n \geq n_0$ implique

$$n - \left\lceil \frac{\sqrt{\ln n}}{\ln \beta} \right\rceil \geq 2,$$

et

$$\ln n_0 \geq {l_0}^2 \ln \beta, \;\; \ln c \geq \frac{\ln \delta}{\alpha \sqrt{\ln \beta}}.$$

Maintenant, soit n tel que $n \geq n_0$ et soient

$$l = \left\lceil \frac{\sqrt{\ln n}}{\ln \beta} \right\rceil \;, \;\; a = \lfloor \gamma^l \rfloor.$$

On a $l \geq l_0$, $a > \beta^l$ et donc

$$l \ln a > l^2 \ln \beta \geq \ln n.$$

Donc par le Lemme 3.31, nous avons

$$m(n, n-1) \leq 2^l + la$$

.

Ainsi

$$l < \frac{l-1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{\ln n}}{\ln \beta}$$

et

$$2^{l+1} < \delta^l.$$

On a donc

$$2^l + la < 2^{l+1} < \delta^l < c^{\sqrt{\ln n}}.$$

□

3.3.2. Borne inférieure pour $m(n, n-1)$

Dans cette section par lg on veut dire $\log_2$.

Théorème 3.33 (Chen et Chvátal [11])**.**

$$m(n, n-1) \geq \lg n$$

Démonstration. Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe avec n sommets et m droites où H n'a pas de droite universelle.

Observation : Pour tous sommets distincts u et v, il existe une droite qui contient u mais pas v (parce que il n'y a pas de droite universelle).

Maintenant, regardons la droite $\overline{uv}$ et le sommet w qui n'appartient pas à $\overline{uv}$. Ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'arête qui contient u, v, w et donc la droite $\overline{uw}$ contient u mais pas v.
Pour un sommet x, soit S_x l'ensemble de toutes les droites qui contiennent x. D'après l'observation tous ces n ensembles sont distincts. Ainsi, on peut dire :

$$n \leq 2^m.$$

□

Remarque : Les n ensembles S_x forment une antichaîne. C'est-à-dire, qu'ils ne sont pas des sous-ensembles d'un de l'autre.

Regardons un théorème qui peut nous aider à améliorer le résultat précédent.

3.3.2.1. Théorème de Sperner

Une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $\{1, 2, \cdots, n\}$ est une *antichaîne*, si aucun ensemble de $\mathcal{F}$ n'est contenu dans un autre ensemble de $\mathcal{F}$.

Théorème 3.34 (Alon et Spencer [2]). *Soit $\mathcal{F}$ une antichaîne, alors*

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

Démonstration. Soit δ une permutation de $\{1, 2, \cdots, n\}$ (choisie uniformément au hasard). Définissons $\mathcal{C}_\delta$ par

$$\mathcal{C}_\delta := \{\{\delta(j) : 1 \leq j \leq i\} : 0 \leq i \leq n\}$$

Les cas $i = 0, n$ donnent $\emptyset, \{1, 2, \cdots, n\} \in \mathcal{C}_\delta$ respectivement. Soit X une variable aléatoire telle que

$$X = |\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_\delta|.$$

On peut décomposer X :

$$X = \sum_{A \in \mathcal{F}} X_A,$$

où X_A est une variable aléatoire indicatrice pour $A \in \mathcal{C}$. On a donc

$$E[X_A] = Pr[A \in \mathcal{C}_\delta] = \frac{1}{\binom{n}{|A|}},$$

car $\mathcal{C}_\delta$ contient exactement un ensemble de cardinalité $|A|$, qui est uniformément distribué parmi les $|A|$-ensembles.
Par linéarité de l'espérance,

$$E[X] = \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}}.$$

Pour n'importe quel δ, $\mathcal{C}_\delta$ forme une chaîne où tous les ensembles sont deux à deux comparables. Étant donné que $\mathcal{F}$ est une antichaîne, on doit avoir :

$$X = |\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_\delta| \leq 1.$$

Donc,

$$E[X] \leq 1.$$

□

Théorème 3.35 (Sperner [28]). *Soit $\mathcal{F}$ une antichaîne, alors*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Démonstration. La fonction $\binom{n}{x}$ est maximale lorsque $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On a alors,

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1,$$

car on a

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \geq \binom{n}{|A|}.$$

□

Par le résultat de Sperner [28] (dans ce document le théorème 3.35) on sait que pour un ensemble de cardinalité m, la cardinalité d'une antichaîne est au plus $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Par la formule de Stirling on aura

$$\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sim \frac{2^m}{\sqrt{\frac{\pi m}{2}}},$$

et si $m = \lg n + \frac{1}{2} \lg \lg n + c$, alors

$$\frac{2^m}{\sqrt{\frac{\pi m}{2}}} \sim 2^c \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n.$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un n_0 tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(n, n-1) > \lg n + \frac{1}{2} \lg \lg n + \frac{1}{2} \lg \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Par le théorème 3.33 on a $m(n, k) \geq \lg n$ pour $2 \leq k < n$ (où $m(n, k)$ est une fonction non-croissante de k). Pour des petites valeurs de k, on peut améliorer la borne inférieure.

Théorème 3.36 (Chen et Chvátal [11])**.**

$$m(n, k) \geq \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \quad n \geq k \geq 2.$$

Démonstration. Soit $(V, \mathcal{E})$ un hypergraphe où $|V| = n$, $|\mathcal{L}| = m$ et chaque droite contient au plus k sommets.

($\star$) Pour tous sommets distincts u et v, il existe une droite qui contient u et v (ceci découle de la définition d'une droite).

Soit P l'ensemble de toutes les paires $(L, \{u, v\})$ telles que L est une droite et u, v sont deux sommets distincts dans L. Maintenant, nous allons regarder deux bornes sur $|P|$.

1) Chaque droite contient au plus k points :

$$|P| \leq m \binom{k}{2}.$$

2) De ($\star$) on a :

$$|P| \geq \binom{n}{2}.$$

En combinant les deux bornes sur $|P|$ on aura :

$$\binom{n}{2} \leq m \binom{k}{2},$$

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)} \leq m.$$

$\square$

3.3.2.2. Une amélioration pour la borne inférieure

En fait, on peut améliorer la borne inférieure. Soient V l'ensemble des sommets, et $\mathcal{L}$ l'ensemble des droites d'un hypergraphe $(V, \mathcal{E})$. On écrit $n = |V|$ et $m = |\mathcal{L}|$ (où $m = m(n, n-1)$ dans cette section).

Définissons les applications suivantes :

$$\alpha : V \longrightarrow 2^{\mathcal{L}}$$

par

$$\alpha(x) = \{L \in \mathcal{L} : x \in L\}$$

et

$$\beta : V \longrightarrow 2^{\mathcal{L}}$$

par

$$\beta(x) = \{\overline{xw} : w \neq x\}.$$

On a ainsi que $\beta(x) \subseteq \alpha(x)$ pour tout x.

Lemme 3.37. *Si $f : V \longrightarrow 2^{\mathcal{L}}$ est une application telle que $\beta(x) \subseteq f(x) \subseteq \alpha(x)$ pour tout x, alors f est injective et $\{f(x) : x \in V\}$ est une antichaîne.*

Démonstration. On doit montrer que $\beta(x) - \alpha(y) \neq \emptyset$ quand $x \neq y$. Supposons que $\overline{xy}$ n'est pas une droite universelle (sinon, on a fini et $\overline{xy}$ contient tous les sommets). Maintenant, il existe un sommet z tel que $z \notin \overline{xy}$. Ce qui veut dire que $\{x, y, z\}$ n'est pas une hyperarête, et donc $\overline{xz} \in \beta(x) - \alpha(y)$. □

Lemme 3.38. *Si x, y, z sont des sommets tels que $\overline{xy} = \overline{xz}$, alors $\alpha(y) \cap \beta(x) = \alpha(z) \cap \beta(x)$.*

Démonstration. Ayant $y \in \overline{xw}$, on a que $\{x, w, y\}$ est une hyperarête. Alors, $w \in \overline{xy}$ et comme $\overline{xy} = \overline{xz}$ on a $\{x, z, w\}$ une hyperarête, et donc $z \in \overline{xw}$. □

Définition 3.39. *Pour S sous-ensemble de V, on définit $\cup_{x \in S} \beta(x)$ comme l'espace engendré par S de V.*

Lemme 3.40. *Si un ensemble de s sommets a un espace engendré de t droites, alors*

$$m - t \geq \lg(n - s) - s \lg t.$$

Démonstration. Ayant un ensemble S avec s sommets et son espace engendré T contenant t droites, énumérons les sommets de S par $x_1, x_2, \ldots, x_s$ et définissons une application

$$\psi : (V - S) \longrightarrow T^s$$
$$\psi(v) = (\overline{x_1 v}, \overline{x_2 v}, \ldots, \overline{x_s v}).$$

Soient $y, z \in V - S$ tels que $\psi(y) = \psi(z)$. Par le lemme 3.38, on a que

$$\alpha(y) \cap \beta(x_i) = \alpha(z) \cap \beta(x_i) \; \forall x_i \in S$$

et comme on a $T = \cup_{i=1}^{s} \beta(x_i)$, on aura

$$\alpha(y) \cap T = \alpha(z) \cap T.$$

Ceci et le Lemme 3.37 avec $f = \alpha$ impliquent

$$\alpha(y) - T \neq \alpha(z) - T$$

quand $\psi(y) = \psi(z)$ et $y \neq z$. Maintenant, pour tout sous-ensemble C de $V - S$ où ψ est constant on a $|C| \leq 2^{m-t}$. Comme au moins un de ces ensembles C a au moins $(n - s)/t^s$ sommets, on a

$$(n - s)/t^s \leq 2^{m-t}.$$

En appliquant lg des deux côtés ; on obtient ce qu'on voulait montrer. $\square$

Lemme 3.41. *Pour tout Δ positif, il existe un ensemble T contenant t droites tel que*

$$m - t \geq \lg(n - t/\Delta) - (t/\Delta) \lg t$$

et tel que $|\beta(u) - T| < \Delta$ pour tout sommet u.

Démonstration. Considérons un plus grand ensemble S des sommets où son espace engendré T a au moins $\Delta \cdot |S|$ droites (S peut être vide). Soient $|S| = s$, $|T| = t$. Comme $s \leq t/\Delta$, la borne inférieure de $m - t$ est garantie par le Lemme 3.40 (où le côté droit diminue lorsque s augmente). Maintenant, $\beta(u) \subseteq T$ quand $u \in S$ (par définition) la maximalité de S nous garantit $|\beta(u) - T| < \Delta$ quand $u \in V - S$ (sinon, on peut ajouter u à S). $\square$

Lemme 3.42. *Pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que*

$$\sum_{i<\delta N} \binom{N}{i} \leq 2^{\varepsilon N}$$

pour tout entier positif N.

Démonstration. Pour un cas spécial d'une inégalité prouvée pour la première fois par Bernstein [6, 21]

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{N}{i} \leq \left(\frac{N}{k}\right)^k \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor;$$

on a

$$\left(\frac{N}{k}\right)^k \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} \leq \left(\frac{eN}{k}\right)^k$$

et

$$\lim_{\delta \to 0^+} \left(\frac{e}{\delta}\right)^{\delta} = 1.$$

□

Théorème 3.43.

$$m \geq (2 - o(1)) \lg n.$$

Démonstration. Soit ε positif, nous allons montrer que $m \geq (2-4\varepsilon)\lg n$ pour tout n suffisamment grand.

Soit δ comme dans le Lemme 3.42. Soit T comme dans le Lemme 3.41 avec $\Delta = \frac{1}{2}\delta \lg n$.

On peut supposer que $t < 2\lg n$ (sinon, on a fini étant donné que $m \geq t$) et donc $\frac{t}{\Delta} < \frac{4}{\delta}$. Maintenant,

$$\begin{aligned} \lg(n - \frac{t}{\Delta}) - \left(\frac{t}{\Delta}\right) \lg t &= \lg(n - O(1)) - O(\lg \lg n) \\ &= (1 - o(1)) \lg n \end{aligned}$$

et par le Lemme 3.41 on a

$$m - t \geq (1 - o(1)) \lg n \tag{10}$$

Maintenant, supposons

$$t \leq \frac{1}{2}m$$

(sinon, $t \geq \frac{1}{2}m$ et on aura $m > 2(m-t)$; ainsi par (10) on a fini). Considérons un plus grand ensemble R des sommets tels que $\beta(y) \cap T = \beta(z) \cap T$ quand $y, z \in R$. Notons aussi que $|R| \geq n/2^t$.

Tous les ensembles $\beta(y) - T$ avec $y \in R$ sont distincts puisque β est injective (Lemme 3.37). Par le choix de T (Lemme 3.41) chacun de ces ensembles ont moins de $\frac{1}{2}\delta \lg n$ droites. Alors, on a

$$|R| \leq \sum_{i < \frac{1}{2}\delta \lg n} \binom{m-t}{i} \leq \sum_{i < \delta(m-t)} \binom{m-t}{i} \leq 2^{\varepsilon(m-t)} \leq 2^{\varepsilon m}$$

pour n assez grand (pour faire $\frac{1}{2}\lg n$ moins que $m-t$) et en utilisant (10). On a aussi

$$n \leq 2^t|R| \leq 2^{t+\varepsilon m} \leq 2^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)m} \leq 2^{\frac{m}{(2-4\varepsilon)}}$$

comme $t \leq \frac{1}{2}m$. En appliquant lg des deux côtés, on aura le résultat. □

3.4. Représentabilité

Soit $L(X,\mathcal{H})$ les droites de l'hypergraphe $(X,\mathcal{H})$. On a déjà vu qu'un hypergraphe k-uniforme est un hypergraphe où chaque hyperarête contient k sommets (ou points). Soit K_n^s l'hypergraphe s-uniforme avec n sommets et $\binom{n}{s}$ hyperarêtes.

Définition 3.44. *L'hypergraphe $(X,\mathcal{L})$ est* représentable *s'il existe un hypergraphe $(X,\mathcal{H})$ tel que $L(X,\mathcal{H}) = \mathcal{L}$.*

Définition 3.45. *Le* dual *H^* d'un hypergraphe H a les hyperarêtes de H comme ses sommets. Les hyperarêtes de H^* sont en bijection avec les sommets de H. L'hyperarête de H^* qui correspond à un sommet v de H comprend tous les hyperarêtes de H qui contiennent v.*

Proposition 3.46. *Si $s \leq m-2$, alors $(K_m^s)^\star$ n'est pas représentable.*

Démonstration. Soit $X = \{1,2,\cdots,m\}$. Les sommets de $(K_m^s)^\star$ sont les sous-ensembles de cardinalité s de l'ensemble X. Les hyperarêtes de $(K_m^s)^\star$ sont en bijection avec les éléments de X.
Soient

$$u_i = \{1,2,\cdots,s+1\} - \{i\} \quad \forall i = 1,2,\cdots,s \ ,$$
$$v = \{1,2,\cdots,s-1,s+2\}$$

Soit L_i l'hyperarête de $(K_m^s)^\star$ qui correspond au point i de X.
Maintenant, supposons que $(K_m^s)^\star$ est représentable. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble d'hyperarête d'une hypergraphe 3-uniforme avec les droites $L_1, L_2, \cdots, L_m$. D'une part, on a $\overline{u_s v} = L_i$ où $1 \leq i \leq s-1$ et $u_i \notin L_i$; ce qui veut dire $\{u_i, u_s, v\} \notin \mathcal{H}$. D'autre part, on a $\overline{u_i v} = L_j$ où $1 \leq j \leq s-1$ et étant donné que $u_s \in L_j$ on a $\{u_i, u_s, v\} \in \mathcal{H}$. Ce qui n'est pas possible. □

Chapitre 4

ESPACES MÉTRIQUES

Dans ce chapitre, nous allons voir la définition de droite sur les espaces métriques (qui ont été définis dans la Section 1.0.1), ainsi qu'un résultat sur le nombre de droites dans les espaces métriques. Aussi, nous allons voir qu'un espace métrique où une distance non-nulle est au plus 2 a la propriété de De Bruijn-Erdős. Ensuite, on va étudier les espaces métriques définis sur les graphes.

4.0.1. Droites dans les espaces métriques

Définition 4.1. *La* distance *entre x et y dans un espace métrique (X, d) est désignée par $d(x, y)$.*

Comme dans la Section 1.0.1 :

Dans un espace métrique arbitraire (X, d) on définie la relation ternaire $\mathcal{B}(d)$ sur X par :

$$(u, v, w) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow u, v, w \text{ sont tous distincts et } d(u, w) = d(u, v) + d(v, w)$$

La relation ternaire $\mathcal{B}(d)$ nous indique que v est entre u et w. On peut écrire $[uvw]$ pour $(u, v, w) \in \mathcal{B}$ (notation adopté par Menger [24]). Une droite $\overline{ab}$ peut être définie de la façon suivante :

$$\{x : [xab]\} \cup \{a\} \cup \{x : [axb]\} \cup \{b\} \cup \{x : [abx]\}$$

On peut étendre la notion de droite dans un espace métrique à une notion de droite définie sur un hypergraphe 3-uniforme $(X, \mathcal{H})$.

La définition de droite dans un espace métrique (X, d) dépend seulement de son hypergraphe 3-uniforme $(X, \mathcal{H}(d))$, où

$$\mathcal{H}(d) = \{\{a,b,c\} : d(a,b) + d(b,c) = d(a,c) \text{ et } a \neq b, b \neq c\}$$

Une droite $\overline{uv}$ sur un espace métrique (X,d) est

$$\overline{uv} = \{u,v\} \cup \{w : \{u,v,w\} \in \mathcal{H}(d)\}$$

De cette façon un espace métrique (X,d) et son hypergraphe 3-uniforme associé définissent la même famille de droites.

Pour désigner un hypergraphe 3-uniforme avec 4 sommets et 4 hyperarêtes, on écrit A_4^3.

Lemme 4.2 (Chiniforooshan et Chvátal [12])**.** *Soit H un hypergraphe 3-uniforme, soient x un sommet de H et T un ensemble des sommets de H tels que : (i) $x \notin T$; (ii) il n'existe pas de sommets u,v,w dans T tels que x,u,v,w induisent un A_4^3 dans H. Alors H définit au moins*

$$\frac{|T|^{2/3}}{2^{1/3}} - \frac{|T|^{1/3}}{2^{2/3}} \tag{11}$$

droites distinctes.

Démonstration. Soit S un plus grand sous-ensemble de T tel que toutes les droites $\overline{xv}$ avec $v \in S$ sont identiques. Maintenant, H définit au moins $\frac{|T|}{|S|}$ droites distinctes ; ceci nous donne le résultat voulu si $|S| \leq 2^{1/3}|T|^{1/3}$ (ce qui est en fait plus que (11)).

Montrons que H définit au moins $\binom{|S|}{2}$ droites distinctes, c'est-à-dire, toutes les droites $\overline{uv}$ où $u,v \in S$ sont distinctes. Ainsi, on aura le résultat (11) lorsque $|S| \geq 2^{1/3}|T|^{1/3}$.

Soient u,v et w des sommets deux à deux distincts dans S. Étant donné que $\overline{xu} = \overline{xv} = \overline{xw}$, les trois triplets $\{x,u,v\}$,$\{x,u,w\}$ et $\{x,v,w\}$ sont des hyperarêtes ; comme x,u,v,w n'induisent pas un A_4^3 il s'en suit que $\{u,v,w\}$ n'est pas une hyperarête de H.

Puisque w est un sommet arbitraire de S qui est aussi distinct de u et v, nous avons $\overline{uv} \cap S = \{u,v\}$. $\square$

Théorème 4.3 (Chiniforooshan et Chvátal [12])**.** *Dans tout espace métrique (X, d) avec $n \geq 2$, nous avons au moins*

$$\frac{1}{2^{1/3}}\left(\frac{n-1}{\lfloor\rho\rfloor}\right)^{2/3} - \frac{1}{2^{2/3}}\left(\frac{n-1}{\lfloor\rho\rfloor}\right)^{1/3}$$

droites distinctes, où ρ est le rapport entre la distance la plus grande et la distance (non-nulle) la plus petite dans (X, d).

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique. Soient δ la distance la plus petite non-nulle dans (X, d), et $x \in X$.
Distribuons toutes les $n-1$ distances $d(x, u)$ où $x \neq u$ dans $\lfloor\rho\rfloor$ boîtes :

$$[i\delta, (i+1)\delta) \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \cdots, \lfloor\rho\rfloor.$$

Maintenant, on aura un sous-ensemble T de $X - \{x\}$ et un $i \geq 1$ tel que

$$u \in T \Rightarrow i\delta \leq d(x, u) < (i+1)\delta$$

et $|T| \geq \frac{n-1}{\lfloor\rho\rfloor}$.

Il suffit de montrer que l'hypergraphe $(X, \mathcal{H}(d))$ satisfait les hypothèses du Lemme 4.2.
Soient u, v, et w des points arbitraires dans T tels que $\{x, u, v\}, \{x, u, w\}, \{x, v, w\} \in \mathcal{H}(d)$; il faut montrer que $\{u, v, w\} \notin \mathcal{H}(d)$.

Comme $\{x, u, v\} \in \mathcal{H}(d)$ puisque

$$|d(x, u) - d(x, v)| < \delta \leq d(u, v),$$

on a $d(u, v) = d(x, u) + d(x, v)$. De la même façon : $d(u, w) = d(x, u) + d(x, w)$, $d(v, w) = d(x, v) + d(x, w)$. Aussi,

$$i\delta \leq d(x, u) < (i+1)\delta \leq 2i\delta$$
$$i\delta \leq d(x, v) < (i+1)\delta \leq 2i\delta$$
$$i\delta \leq d(x, w) < (i+1)\delta \leq 2i\delta$$

ce qui nous permet de conclure :

$$2i\delta \leq d(u, v) < 4i\delta$$
$$2i\delta \leq d(u, w) < 4i\delta$$
$$2i\delta \leq d(v, w) < 4i\delta$$

et que $\{u, v, w\} \notin \mathcal{H}(d)$. $\square$

4.0.2. Espaces métriques où les distances non-nulles sont de 1 ou 2

Nous avons besoin de la définition qui suit pour la preuve du prochain théorème.

Définition 4.4. *Une relation $\prec$ est un* ordre total *sur l'ensemble S, si elle a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall u \in S,\ u \prec u$.

(2) $\forall u, v \in S,\ (u \prec v$ et $v \prec u) \Rightarrow u = v$.

(3) $\forall u, v, w \in S,\ (u \prec v$ et $v \prec w) \Rightarrow u \prec w$.

(4) $\forall u, v \in S$, on a soit $u \prec v$, soit $v \prec u$ et pas les deux en même temps.

Le résultat suivant est une amélioration d'une fameuse conséquence du Théorème de Turán [30] qui a été prouvé par Caro [9] et Wei [31]. Ici, nous allons voir une preuve donnée par Alon et Spencer [2].

Nous avons vu la notion de stable dans la Section 2.0.2.1.

Théorème 4.5 (Alon et Spencer [2])**.**

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1}$$

où $\alpha(G)$ est la cardinalité du stable maximum des sommets, et $d(v)$ est le degré du sommet v.

Démonstration. Soit $\prec$ une relation d'ordre total sur V (les sommets du graphe $G(V, E)$). Définissons

$$I := \{v \in V : vw \in E \Rightarrow v \prec w\}.$$

Soit X_v le variable aléatoire indicatrice pour $v \in I$, et $X = \sum_{v \in V} X_v$.
Pour chaque v

$$E[X_v] = P[v \in I] = \frac{1}{d(v)+1},$$

puisque

$$v \in I \iff v \text{ est le plus petit élément parmi } v \text{ et ses voisins.}$$

on a maintenant,

$$E[X] = \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1} = |I|$$

et donc il existe un ordre spécifique $\prec$ tel que

$$|I| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1}.$$

Maintenant, si $x, y \in I$ et si $xy \in E$, alors on a $x \prec y$ et $x \succ y$, ce qui est une contradiction. Alors, I est un stable et

$$\alpha(G) \geq |I|.$$

□

L'inégalité suivante sera utilisée dans la démonstration du théorème 4.7. Si dans le résultat précédent, on remplace $d(v)$ par $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} d(v) = \frac{2|E|}{|V|}$, ce qui est le degré moyen des sommets du graphe $G = (V, E)$, on obtient,

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\frac{2|E|}{|V|}+1} = \frac{|V|}{\frac{2|E|}{|V|}+1} = \frac{|V|^2}{2|E|+|V|}. \tag{12}$$

L'inégalité (12) est une conséquence du Théorème de Turán [30].

Définition 4.6. *Un* espace métrique $1-2$ *est un espace où les distances non-nulles sont de* 1 *ou* 2.

Théorème 4.7 (Chiniforooshan et Chvátal [12])**.** *Le plus petit nombre des droites $h(n)$ dans un espace métrique $1-2$ sur n points satisfait les inégalités :*

$$(1+o(1))\alpha n^{4/3} \leq h(n) \leq (1+o(1))\beta n^{4/3}$$

où $\alpha = 2^{-7/3}$ et $\beta = 3 \cdot 2^{-5/3}$.

Pour la preuve du théorème, nous avons besoin de la définition suivante ainsi que les lemmes qui viennent après.

Définition 4.8. *Les points u et v sont des* jumeaux *si et seulement si $d(u,v) = 2$ et $d(u,w) = d(v,w)$ pour tout w n'appartenant pas à $\{u, v\}$.*

La preuve du lemme suivant est laissée comme exercice.

Lemme 4.9. *Si u_1, u_2, u_3, u_4 sont quatre points dans un espace métrique $1-2$ alors on a :*

(i) si $d(u_i, u_j) = 1$ pour tous i et j distincts, alors $\overline{u_1u_2} \neq \overline{u_3u_4}$.

(ii) si $d(u_1,u_2)=1$ *et* $d(u_3,u_4)=2$, *alors* $\overline{u_1u_2}\neq\overline{u_3u_4}$.

(iii) si $d(u_1,u_2)=d(u_3,u_4)=2$ *et* u_4 *a un jumeau autre que* u_3, *alors* $\overline{u_1u_2}\neq\overline{u_3u_4}$.

Si u_1,u_2,u_3 *sont trois points distincts dans un espace métrique* $1-2$ *alors on a :*

(iv) si $d(u_1,u_2)=d(u_2,u_3)=1$ *et* u_1,u_3 *ne sont pas des jumeaux, alors* $\overline{u_1u_2}\neq\overline{u_2u_3}$.

(v) si $d(u_1,u_2)=1$, $d(u_2,u_3)=2$, *et* u_3 *a un jumeau autre que* u_2, *alors* $\overline{u_1u_2}\neq\overline{u_2u_3}$.

(vi) si $d(u_1,u_2)=d(u_2,u_3)=2$, *alors* $\overline{u_1u_2}\neq\overline{u_2u_3}$.

Maintenant, regardons la preuve du Théorème 4.7.

Démonstration. Montrons d'abord $h(n)\leq\beta n^{4/3}$.
Considérons un espace métrique où les points sont partitionnés en groupes deux à deux disjoints avec les cardinalités aussi égales que possible, tels que n'importe quelle paire de points se trouvant dans deux groupes différents sont à une distance de 1 l'un de l'autre, et n'importe quelle paire de points se trouvant dans le même groupe sont à une distance de 2 l'un de l'autre.
Si chacun des groupes contient au moins trois points :

- Soit $\overline{uv}=\overline{wx}\iff\{u,v\}=\{w,x\}$
- Soit $\overline{uv}=\overline{wx}\iff$ il y a deux groupes distincts tels que chacun des ensembles $\{u,v\}$,$\{w,x\}$ ont un élément dans chacun de ces groupes.

Maintenant, si on a n points et $\frac{n^{2/3}}{2^{1/3}}$ groupes, on a $\binom{2^{-1/3}n^{2/3}}{2}$ droites entre les groupes (venant des points ayant une distance égale à 1). Chaque groupe contient $\frac{n}{2^{-1/3}n^{2/3}}=2^{1/3}n^{1/3}$ points, ce qui nous donne $\binom{2^{1/3}n^{1/3}}{2}$ choix de droites venant (des points ayant une distance égale à 2) de chaque groupe. Étant donné qu'on a $2^{-1/3}n^{2/3}$ groupes au total, on a $\binom{2^{1/3}n^{1/3}}{2}2^{-1/3}n^{2/3}$ droites venant des points de distance deux. Alors, en tout pour les points de distance 1 et 2, nous avons

$$\binom{2^{-1/3}n^{2/3}}{2}+\binom{2^{1/3}n^{1/3}}{2}2^{-1/3}n^{2/3}=(2^{-5/3}+2^{-2/3})n^{4/3}-2^{-4/3}n^{2/3}-\frac{n}{2}$$

$$= 3 \cdot 2^{-5/3} n^{4/3} - 2^{-4/3} n^{2/3} - \frac{n}{2}$$

droites.

En supposant que n est assez grand (en fait le terme dominant dans l'expression ci-dessus est $3 \cdot 2^{-5/3} n^{4/3}$, et c'est facile de vérifier que l'expression appartient à $O(n^{4/3})$), nous pouvons négliger les derniers termes, ce qui nous donne,

$$(2^{-5/3} + 2^{-2/3}) n^{4/3} = 3 \cdot 2^{-5/3} n^{4/3}.$$

Conséquemment de la même façon, lorsqu'on a n points et $(1 + o(1)) \frac{n^{2/3}}{2^{1/3}}$ groupes, on aura $(1 + o(1)) \beta n^{4/3}$ droites.

Montrons $h(n) \geq (1 + o(1)) \alpha n^{4/3}$.
Soit (X, d) un espace métrique $1 - 2$. Soit $|X| = n$. Soit X_1 un sous-ensemble maximal de X tel que X_1 ne contient pas une paire de jumeaux.

Cas 1 : $|X_1| \geq \frac{n}{2}$.

Considérons un plus grand ensemble des sous-ensembles de cardinalité deux ($\{u_i, v_i\}$ avec $i = 1, 2, \cdots, s$ et $u_i \neq v_i$) de X_1 tel que

$$\overline{u_1 v_1} = \overline{u_2 v_2} = \cdots = \overline{u_s v_s}$$

Chacun des sous-ensembles de cardinalité deux de X_1 donne une droite ; donc il y a au moins

$$\binom{|X_1|}{2} \cdot \frac{1}{s}$$

droites distinctes.

On aura la conclusion voulue lorsque $s \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}$.

Pour $s \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}$, il faut montrer qu'il y a au moins

$$\binom{s}{2} - 5$$

droites distinctes. Pour ce faire, supposons que $s \geq 5$. Du point (iv) du Lemme 4.9 nous avons que les ensembles $\{u_i, v_i\}$ où $d(u_i, v_i) = 1$ sont deux à deux disjoints. Du point (vi) du Lemme 4.9 nous avons que les ensembles $\{u_i, v_i\}$ avec $d(u_i, v_i) = 2$ sont deux à deux disjoints. Du point (ii) du Lemme 4.9 nous avons que les ensembles $\{u_i, v_i\}$ avec $d(u_i, v_i) = 1$ rencontrent les ensembles $\{u_i, v_i\}$ avec $d(u_i, v_i) = 2$, maintenant le fait que $s \geq 5$ nous garantit que tous les s distances $d(u_i, v_i)$ sont égales.

Maintenant, nous allons montrer qu'il y a au moins $\binom{s}{2}$ droites distinctes. Pour n'importe quel choix d'indices i, j tels que $1 \leq i < j \leq s$, il existe une droite L_{ij} telle que

$$\{u_k, v_k\} \subseteq L_{ij} \Longleftrightarrow k \in \{i, j\}$$

Sous-cas 1.1 :

$$d(u_1, v_1) = d(u_2, v_2) = \cdots = d(u_s, v_s) = 1$$

comme

$$\{u_j, v_j\} \subseteq \overline{u_j v_j} = \overline{u_i v_i}$$
$$\{u_i, v_i\} \subseteq \overline{u_i v_i} = \overline{u_j v_j}$$

On peut supposer (en interchangeant u_j avec v_j si nécessaire) que $d(u_i, u_j) = 2$ et $d(u_i, v_j) = d(u_j, v_i) = 1$.

Maintenant disons $L_{ij} = \overline{u_i u_j}$. Si $k \notin \{i, j\}$, alors $u_j \in \overline{u_j v_j} = \overline{u_k v_k}$ implique qu'une des $d(u_j, u_k)$ et $d(u_j, v_k)$ est égale à 2 et donc $\{u_k, v_k\} \nsubseteq \overline{u_i u_j}$.

Sous-cas 1.2 :

$$d(u_1, v_1) = d(u_2, v_2) = \cdots = d(u_s, v_s) = 2$$

comme

$$\overline{u_1 v_2} = \overline{u_2 v_2} = \cdots = \overline{u_s v_s}$$

la distance entre un point dans un des ensembles $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \cdots, \{u_s, v_s\}$ et un point dans l'un des s ensembles est égale à 1. Donc on peut prendre $L_{ij} = \overline{u_i u_j}$.

Cas 2 : $|X_1| < \frac{n}{2}$.

Soit $X_2 = X - X_1$. Considérons un plus grand ensemble S dans X_2 tel que :

$$u, v \in S \Rightarrow d(u, v) = 1.$$

Soient

$$E_1 = \{\{u, v\} : u, v \in S, u \neq v\}$$
$$E_2 = \{\{u, v\} : u, v \in X_2, d(u, v) = 2\}.$$

Tous les points dans X_2 ont un jumeau (sinon, ils appartiennent à X_1). Grâce au Lemme 4.9, on obtient que n'importe quel couple de paire distinctes dans $E_1 \cup E_2$ détermine deux droites distinctes.

Maintenant, supposons qu'on a un graphe $G_{X_2} = (X_2, E_{X_2})$ où pour $u, v \in X_2$, uv est une arête de E_{X_2} si et seulement si $d(u, v) = 2$. Ceci veut dire que $uv \in E_{X_2}$ si et seulement si $\{u, v\} \in E_2$. Ainsi, nous avons que l'ensemble S est un stable (des sommets) de G_{X_2} et par, le Théorème 4.5 et l'inégalité (12), nous avons :

$$|S| \geq \frac{|X_2|^2}{2|E_2| + |X_2|}.$$

Ayant $|E_2| < \alpha n^{4/3}$ nous aurons $|E_1| \geq (1 + o(1))\alpha n^{4/3}$. On peut donc dire : $|E_1 \cup E_2| \geq (1 + o(1))\alpha n^{4/3}$.

□

4.0.3. La propriété de De Bruijn-Erdős pour les espaces métriques $1-2$

Définition 4.10 (la propriété de De Bruijn-Erdős)**.** *Un espace métrique* (V, d) *a* la propriété de De Bruijn-Erdős *s'il a une droite qui est égale à* V *(aussi appelée une droite universelle) ou s'il a au moins* n *droites.*

Théorème 4.11 (Chvátal [13])**.** *Tout espace métrique* $1-2$ *avec au moins* 2 *points a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Un espace métrique *critique* $1-2$ est un plus petit contre-exemple pour le Théorème 4.11. On va montrer qu'un tel espace n'existe pas ; ainsi le Théorème 4.11 est prouvé.

Lemme 4.12. *Pour tout paire u, v de jumeaux (définition 4.8) dans un espace métrique critique $1-2$, il existe un troisième point w dans cet espace tel que $d(u,w) = d(v,w) = 2$ et $d(x,y) = 1$ lorsque $x \in \{u,v,w\}, y \notin \{u,v,w\}$.*

Démonstration. Soit S notre espace critique. L'espace S n'a pas la propriété de De Bruijn-Erdős, mais $S \backslash u$ a la propriété de De Bruijn-Erdős. Nous allons montrer l'existence de w.
Les points u et v sont des jumeaux, ceci implique :

(1) Si x, y (distincts) sont dans $S \backslash \{u,v\}$, alors la droite $\overline{xy}$ dans S contient soit u et v, soit aucun des deux.
(2) Si $w \in S \backslash u$ et $d(w,v) = 1$, alors $\overline{wv}$ dans S (et aussi $\overline{wu}$ dans S) contient u et v.
(3) Si $w \in S \backslash u$ et $d(w,v) = 2$, alors la droite $\overline{wv}$ dans S contient v mais pas u ; la droite $\overline{wu}$ dans S contient u mais pas v.

S n'as pas la propriété de De Bruijn-Erdős, donc $\overline{uv} \neq S$.

u, v étant des jumeaux on a encore :
(4) Il existe un w dans $S \backslash u$ tel que $d(w,v) = 2$.
De $(1), (2), (3), (4)$ on a

(5) Le nombre de droites dans S est plus grand que le nombre de droites dans $S \backslash u$.

Puisque S n'as pas la propriété de De Bruijn-Erdős, le nombre de droites dans S est plus petit que $|S|$, et de (5) on a que le nombre des droites dans $S \backslash u$ est plus grand que $|S \backslash u|$. Mais, on sait que $S \backslash u$ a la propriété de De Bruijn-Erdős, donc

(6) $S \backslash u$ a une droite qui contient tous les sommets (c'est-à-dire une droite universelle).

Puisque S n'a pas la propriété de De Bruijn-Erdős,
(7) S n'a pas de droite universelle.

Les faits $(1), (6), (7)$ ensemble impliquent qu'une droite $\overline{wv}$ dans $S \backslash u$ est universelle.

Les faits $(2), (7)$ ensemble impliquent $d(w,v) = 2$. Comme u, v sont des jumeaux $d(u,v) = 2, d(w,u) = 2$. Maintenant, $\overline{wv}$ est une droite universelle dans

$S\backslash u$, on a $d(w,y) = d(v,y) = 1$ lorsque $y \notin \{u,v,w\}$. u et v étant des jumeaux, alors $d(u,y) = 1$ lorsque $y \notin \{u,v,w\}$.

□

Lemme 4.13. *Un espace métrique critique* $1-2$ *ne contient aucune paire de jumeaux.*

Démonstration. Supposons le contraire. Un espace métrique critique $1-2$ contient une paire de jumeaux. Nous allons montrer que S a au moins $|S|$ droites (contredisant le fait que S n'a pas la propriété de De Bruijn-Erdős).
Considérons l'ensemble le plus grand de $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ des sous-ensembles deux à deux disjoints de cardinalité trois de S tel que $d(u,v) = 2$ lorsque u, v sont des points distincts dans le même T_i et tel que $d(u,x) = 1$ lorsque $u \in T_i$, $x \notin T_i$ pour un i.
Nous avons supposé que S contient une paire de jumeaux, alors en utilisant le Lemme 4.12, nous aurons $k \geq 1$. C'est en utilisant ce fait qu'on montre l'existence de $|S|$ droites dans S.

Soit $\mathcal{L}_1$ l'ensemble de toutes les droites $\overline{uv}$ tel que u, v sont des points distincts dans le même T_i. Si $\overline{uv} = \mathcal{L}_1$, alors $\overline{uv} = S\backslash w$ où $\{u,v,w\} = T_i$ pour un i. Maintenant,

(α) $\mathcal{L}_\infty$ contient les $3k$ ensembles $S\backslash w$ avec w qui change dans $\sum_{i=1}^{k} T_i$.

Prenons un point $r \in T_1$ et soit $\mathcal{L}_2$ l'ensemble de toutes les droites $\overline{rx}$ avec $x \in S\backslash \sum_{i=1}^{k} T_i$. Le Lemme 4.12 et la maximalité de k nous assurent que S ne contient pas de paire x, y des jumeaux tels que $x, y \in S\backslash \sum_{i=1}^{k} T_i$. Ce fait et le Lemme 4.9 impliquent

(β) $|\mathcal{L}_2| = |S| - 3k$.

(8) Chaque droite dans $\mathcal{L}_2$ inclut tous les points dans T_1 et aucun des points dans T_2.

De (α) et (β) on a

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset.$$

Et donc, par (α) et (β) on a

$$|\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2| = |S|.$$

□

On peut regarder un espace métrique $1-2$ comme un graphe complet tel que chaque arête uv est étiquetée par la distance entre u et v ($d(u,v)$).

Soient uv, xy deux arêtes de ce graphe. Si $\overline{uv} = \overline{xy}$, alors on écrit $uv \approx xy$.

Lemme 4.14. *Chaque classe d'équivalence de la relation $\approx$ dans un espace métrique critique $1-2$ est soit un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes avec les étiquettes identiques, soit un sous-ensemble (pas nécessairement propre) d'un cycle de longueur quatre avec les étiquettes alternantes.*

La preuve du Lemme 4.14 découle du lemme 4.9 combinés avec le lemme 4.13.

Lemme 4.15. *La cardinalité d'une classe d'équivalence $\approx$ dans un espace métrique critique $1-2$ sur n points est au plus* $\max\{\frac{n-1}{2}, 4\}$

Démonstration. Ceci découle du Lemme 4.14 et le fait qu'une classe d'équivalence de cardinalité $\frac{n}{2}$ (des arêtes deux à deux disjointes) donne une droite universelle. □

Lemme 4.16. *Tout espace métrique critique $1-2$ a au plus 7 points.*

Démonstration. Considérons un espace métrique critique $1-2$ avec n points. Cet espace n'a pas la propriété de De Bruijn-Erdős, et donc il a moins de n droites. La relation d'équivalence $\approx$ partitionne les $\binom{n}{2}$ arêtes de son graphe complet en au plus $n-1$ classes. La cardinalité d'une plus grande classe est au moins $\frac{n}{2}$, et donc du Lemme 4.15 on a

$$\frac{n}{2} \leq \max\{\frac{n-1}{2}, 4\}$$

ce qui donne,

$$n \leq 8.$$

Si $n = 8$, les 28 arêtes du graphe complet sont partitionnées en 7 classes d'équivalences de cardinalité 4. Par le Lemme 4.14, chacune des classes forme un cycle de longueur 4. Maintenant, l'ensemble d'arêtes d'un graphe complet sur 8 sommets ne peut pas être partitionné en cycles puisque chaque sommet a un degré impair. Cette contradiction nous donne $n \leq 7$.

□

Lemme 4.17. *Aucun espace métrique critique $1-2$ n'a 7 points.*

Démonstration. Considérons un espace métrique critique $1-2$ avec 7 points. Cet espace a moins de 7 droites (étant donné qu'il est un espace critique), et sa relation d'équivalence partitionne les $\binom{7}{2} = 21$ arêtes de son graphe complet en au plus 6 classes.

Par le Lemme 4.15, chacune de ces classes a une cardinalité d'au plus 4, et donc au moins trois parmi elles ont une cardinalité égale à 4. Par le Lemme 4.14, toutes ces trois classes sont des cycles de longueur quatre.

Soient G_1, G_2, G_3 les sous-graphes (cycles mentionnés en haut) du graphe complet sur 7 sommets. G_1, G_2 et G_3 sont deux à deux arête-disjoints. N'importe quel couple de ces sous-graphes partage au plus deux sommets. L'union de ces sous-graphes a 7 sommets, alors certains deux de ceux-ci partagent au moins deux sommets.

Sans perte de généralité disons que G_1 et G_2 partagent précisément deux sommets u et v. Puisque G_1 et G_2 sont arête-disjoints, on peut supposer (sans perte de généralité) que les sommets u et v sont adjacents dans G_1 et non-adjacents dans G_2.

Soient w et x les deux autres sommets de G_1 tels que les quatre arêtes de G_1 sont

$$uv, vw, wx, ux.$$

Soient y et z les deux autres sommets de G_2 tels que les quatre arêtes de G_2 sont

$$uy, uz, vz, vy.$$

Étant donné que les étiquettes sur les arêtes de G_2 alternent ; on peut supposer (en changeant y et z si nécessaire)

$$d(u, y) = 1, d(u, z) = 2$$
$$d(v, z) = 1, d(v, y) = 2$$

On a $u \in \overline{vy}$ comme $\overline{uy} = \overline{vy}$; puisque $d(v, y) = 2$ on aura $d(u, v) = 1$. Ainsi, comme les étiquettes des arêtes de G_1 alternent, on a

$$d(v, w) = 2, d(w, x) = 1, d(u, x) = 2.$$

Maintenant $d(y, u) + d(u, v) = d(y, v)$, et donc $y \in \overline{uv}$. On a $uv \approx vw$, ce qui donne $y \in \overline{vw}$. Ceci est une contradiction puisque $d(v, w) = 2$ et $d(v, y) = 2$.

□

Lemme 4.18. *Tout espace métrique critique* $1-2$ *sur* 5 *ou* 6 *points contient des sommets* u, v, w, x, y *tels que*

$$d(u, w) = d(u, x) = d(v, w) = d(v, x) = 1,$$

$$d(u,v) = d(w,x) = 2,$$
$$d(u,y) \neq d(v,y) \ , \ d(w,y) \neq d(x,y).$$

Démonstration. Considérons un espace métrique critique $1-2$ sur n points, tel que $n=5$ ou $n=6$. Cet espace étant un espace critique a moins de n droites, et sa relation d'équivalence $\approx$ partitionne les $\binom{n}{2}$ arêtes de son graphe complet en au plus $n-1$ classes d'équivalence.
Puisque la classe la plus grande parmi ces classes a au moins 3 éléments, le Lemme 4.14 et le fait qu'il n'y a pas de droite universelle implique qu'il y a des points u, v, w, x et y tels que soit

$$d(u,v) = 2, d(v,w) = 1, d(w,x) = 2$$

et

$$\overline{uv} = \overline{vw} = \overline{wx}$$

soit

$$d(v,w) = 1, d(w,x) = 2, d(u,x) = 1$$

et

$$\overline{vw} = \overline{wx} = \overline{ux}.$$

De tous les deux cas, l'égalité des trois droites implique

$$d(u,w) = d(u,x) = d(v,w) = d(v,x) = 1$$
$$d(u,v) = d(w,x) = 2.$$

Maintenant w et x ne sont pas des jumeaux, alors il existe un point $y \neq w, x$ tel que

$$d(w,y) \neq d(x,y)$$

Il nous reste à montrer

$$d(u,y) \neq d(v,y)$$

Supposons le contraire $d(u,y) = d(v,y)$. Comme $y \notin \overline{wx}$ et $\overline{vw} = \overline{wx}$, on a $y \notin \overline{vw}$ et donc

$$d(v,y) = d(w,y)$$

ce qui donne

$$d(u,y) \neq d(x,y)$$

et donc $y \in \overline{vx}$, comme $y \notin \overline{wx}$ on ne peut pas avoir $\overline{vw} = \overline{wx} = \overline{ux}$. On a donc forcément $\overline{uv} = \overline{vwwx}$. On a par hypothèse que $d(u,y) = d(v,y)$ et donc $y \notin \overline{uv}$.

On conclut alors

$$d(u,y) = d(v,y) = d(w,y) = 2,$$
$$d(x,y) = 1.$$

Maintenant u et v ne sont pas des jumeaux, alors il existe un point $z \neq u, v$ tel que $d(u,z) \neq d(v,z)$. On a donc $d(x,z)$ différent de $d(u,z)$ ou $d(v,z)$, donc z appartient à une des droites $\overline{ux}$ ou $\overline{vx}$. Mais, ceci implique que cette droite est universelle. Contradiction. $\square$

Lemme 4.19. *Aucun espace métrique critique* $1-2$ *n'a* 5 *ou* 6 *points.*

Démonstration. Considérons un espace métrique $1-2$ sur n points tel que $n = 5$ ou $n = 6$. Soit u, v, w, x et y les mêmes qu'au Lemme 4.18. On peut supposer (après un décalage circulaire de u, w, v, x si nécessaire)

$$d(u,w) = d(u,x) = d(v,w) = d(v,x) = 1$$
$$d(u,y) = d(w,y) = 1$$
$$d(v,y) = d(x,y) = 2.$$

Étant donné que

$$\{u,v,w,x,y\} \subseteq \overline{ux} \text{ et } \{u,v,w,x,y\} \subseteq \overline{vw}$$

et qu'il n'y a pas de droite universelle, $n = 6$. Aussi on a que le sixième point z n'appartient pas aux droites $\overline{ux}$ et $\overline{vw}$. On a,

$$d(u,z) = d(x,z)$$
$$d(v,z) = d(w,z)$$

puisque $z \notin \overline{ux}$ et $z \notin \overline{vw}$.
Par symétrie, il faut donc distinguer entre les cas suivants :

1) $d(u,z) = d(x,z) = 1$, $d(v,z) = d(w,z) = 1$,
2) $d(u,z) = d(x,z) = 1$, $d(v,z) = d(w,z) = 2$,
3) $d(u,z) = d(x,z) = 2$, $d(v,z) = d(w,z) = 2$.

Pour chacun des trois cas qu'on vient de voir, on peut avoir soit $d(y,z) = 1$, soit $d(y,z) = 2$. Il y a donc 6 espaces métriques. En les vérifiant on constate que chacun de ces espaces ont au moins 6 droites.

$\square$

Lemme 4.20. *Tout espace métrique* $1-2$ *sur* $2, 3$ *ou* 4 *points a la propriété de De Bruijn-Erdős.*

Démonstration. Considérons un espace métrique critique $1-2$ sur n points. Si chacune de ses droites contient deux points, ou s'il y a une droite qui contient tous les n sommets, cet espace a la propriété de De Bruijn-Erdős. Sinon, une de ses droites contient exactement 3 points et $n = 4$.
Soit T la droite qui contient 3 points. Soit w le quatrième sommet de l'espace. S'il y a deux sommets x et y dans T tel que $\overline{wx} = \overline{wy}$, alors $\overline{xy}$ est une droite universelle. Sinon, les droites $\overline{wx}$ où x représente les différents points du T sont des droites deux à deux disjoints contenant deux points chacune. □

4.0.4. L'espace métrique $1-2-3$

Définition 4.21. *Un* espace métrique $1-2-3$ *est un espace métrique où les distances non-nulles sont 1,2 ou 3.*

Si (X, d) est un espace métrique $1-2-3$, on lui associe un graphe complet G_X avec les sommets X où chaque arête xy est étiquetée i si la distance de x à y est égale à i ; et on écrit $d(x, y) = i$.

Théorème 4.22. *Soit (X, d) un espace métrique $1-2-3$ où $|X| = n$. Soit G_X le graphe complet associé à (X, d). Alors, l'espace (X, d) détermine au moins*

$$\min_{|S|\leq\binom{n}{2}} \max\left(\frac{2|S|}{n-1}, 2^{-7/3}\left(n-\frac{2|S|}{n}\right)^{4/3}\right)$$

droites, où $S = \{xy \in E(G_X) \mid d(x, y) \in \{2, 3\}\}$.

Démonstration. Soient a, b, c, d quatre sommets distincts. On a :

1) Si $d(a, b) = d(b, c) = 2$, alors $\overline{ab} \neq \overline{bc}$
2) Si $d(a, b) = d(b, c) = 3$, alors $\overline{ab} \neq \overline{bc}$
3) Si $d(a, b) = 2$ et $d(c, d) = 3$, alors $\overline{ab} \neq \overline{cd}$.

Écrivons $|S| = s$, on a $s \leq \binom{n}{2}$.
Soit

$$T = \{xy \in E(G_X) \mid d(x, y) = 1\}.$$

L'ensemble $S \cup T$ partitionne les arêtes de G_X.

Soient G_S le graphe défini sur X avec l'ensemble d'arêtes S et G_T le graphe défini sur X avec l'ensemble d'arête T. Nous allons montrer que l'espace métrique

X détermine au moins

$$\max\left(\frac{2s}{n-1}, 2^{-7/3}\left(n-\frac{2s}{n}\right)^{4/3}\right)$$

droites.

Montrons que l'espace métrique (X, d) détermine au moins $2^{-7/3}\left(n-\frac{2s}{n}\right)^{4/3}$ droites.
Pour un sommet u, $G_X[N_{G_T}(u)]$ est un espace métrique $1-2$. On a

$$|E(G_T)| = |T| = \binom{n}{2} - s.$$

En plus,

$$\sum_{v\in X} d_{G_T}(v) = 2|T| = n(n-1) - 2s$$

donc il existe un sommet v de degré au moins $n-1-\frac{2s}{n}$. Alors, $G_X[N_{G_T}(v)]$ est un espace métrique $1-2$ avec $n-\frac{2s}{n}$ sommets. On a donc au moins $2^{-7/3}\left(n-\frac{2s}{n}\right)^{4/3}$ droites (Théorème 4.7).

Montrons que l'espace métrique (X, d) détermine au moins $\frac{2s}{n-1}$ droites.
On dit que les arêtes ab et cd sont dans la même classe d'équivalence si $\overline{ab} = \overline{cd}$ (le nombre des classes d'équivalence est égal au nombre des droites).
Soit C une classe d'équivalence. Montrons qu'on a

$$|C \cap S| \leq \max\left(\frac{n-1}{2}, 4\right).$$

Plus précisément, $C \cap S$ est soit un couplage (une classe d'équivalence de cardinalité $\frac{n}{2}$ donne une droite universelle), soit un sous-graphe d'un cycle de quatre. Par 1) et 2) $C \cap S$ n'admet pas des sommets de degré 3 ou plus. Pour voir cela, supposons qu'il y a un sommet u de degré 3. Le sommet u est incident à trois arêtes chacune étiquetées 2 ou 3. De 1) et 2), on constate qu'aucune paire des trois arêtes n'appartient à une seule droite. Ce qui veut dire que les trois arêtes n'appartiennent pas toutes à la même classe d'équivalence. Contradiction.
Disons qu'on a un sommet de degré 2 dans $C \cap S$ sinon, on a un couplage. Soit v le sommet de degré 2 avec les arêtes incidentes vx et vy. Par 1), 2) et l'argument vu ci-dessus, on peut supposer $d(v, x) = 2$ et $d(v, y) = 3$. Maintenant, à cause de 3) on sait qu'il n'existe pas d'arête étiquetée 2 ou 3 dans la classe d'équivalence qui n'est pas adjacente ni à x ni à y. À cause de 1), on sait qu'il n'existe pas d'arête étiquetée 2 qui est adjacente à x. Par 2), il n'existe pas d'arête étiquetée 3 qui est adjacente à y.

Considérons deux cas :

- Supposons qu'on a une arête zy (étiquetée 2), et soit w un voisin de z. Si l'étiquette de l'arête xz est égale à 1, alors on peut supposer que l'étiquette de l'arête wz est égale à 3. Dans ce cas, l'étiquette de wx ne peut pas être $1, 2$ ou 3. Donc, l'étiquette de xz est égale à 3, et on a que $C \cap S$ est un sous-graphe d'un cycle de quatre où les étiquettes des arêtes alternent entre 2 et 3.
- Supposons qu'on a une arête xu (étiquetée 3). Dans ce cas, uy a une étiquette égale à 2 et aucune autre arête adjacente à y ou à u n'a l'étiquette 2 dans la classe d'équivalence. On a donc un sous-graphe d'un cycle de quatre pour $C \cap S$ où les étiquettes des arêtes alternent entre 2 et 3.

Alors, on peut dire qu'il existe au moins $\frac{s}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2s}{n-1}$ droites. □

4.1. Espace métrique induit par des graphes

Dans les Sections 1.0.1 et 4.0.1, on a vu la définition de la relation ternaire $\mathcal{B}(d)$ sur un espace métrique (V, d) où :

$$(u, v, w) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow u, v, w \text{ sont tous distincts et } d(u, w) = d(u, v) + d(v, w).$$

Ce qui nous indique que v est entre u et w, et on écrit $[uvw]$ pour $(u, v, w) \in \mathcal{B}$. On a aussi défini la droite $\overline{xy}$ de la façon suivante :

$$\{x, y\} \cup \{z : [zxy] \text{ ou } [xzy] \text{ ou } [xyz]\}.$$

Tout graphe connexe fini induit un espace métrique où la distance entre u et v, écrit $d(u, v)$, est le plus petit nombre d'arêtes sur un chemin (voir Définition 2.9) de u à v.

Alors, pour un graphe $G = (V, E)$, la droite $\overline{ab}$ est la paire $\{a, b\}$ avec tout sommet c tel que $d(a, b) = d(a, c) + d(c, b)$ ou $d(c, b) = d(c, a) + d(a, b)$ ou $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ soit vraie.

Dans le contexte des graphes, $[abc]$ veut dire que b est le sommet *intérieur* du chemin le plus court de a à c.

Définition 4.23. *La distance la plus grande parmi toutes les distances dans un graphe est appelée le* diamètre *du graphe.*

Théorème 4.24 (Chiniforooshan et Chvátal [12])**.** *Si dans un espace métrique (X, d) induit par un graphe de diamètre t, aucune droite n'est universelle ($\neq X$), alors il y a au moins $\sqrt{t/2}$ droites distinctes.*

Démonstration. Il y a des sommets $v_0, v_1, \cdots, v_t$ tels que

$$d(v_i, v_j) = j - i \text{ quand } 0 \leq i < j \leq t.$$

Supposons un plus grand ensemble S d'indices r tel que toutes les droites $\overline{v_r v_{r+1}}$ sont égales. On a au moins $\frac{t}{|S|}$ droites distinctes. Ce qui nous donne la conclusion voulue lorsque $|S| \leq \sqrt{2t}$. Pour le cas $|S| \geq \sqrt{2t}$, nous allons montrer qu'il existe au moins $\frac{|S|}{2}$ droites distinctes, et ainsi nous aurons la conclusion dans ce cas aussi.

Soit u un sommet qui n'est pas sur la droite $\overline{v_r v_{r+1}}$ où $r \in S$.

Nous allons montrer que $\frac{|S|}{2}$ des droites $\overline{uv_r}$ avec $r \in S$ sont deux à deux distinctes, c'est-à-dire pour tous indices i, j, k dans S au moins deux des droites $\overline{uv_i}, \overline{uv_j}, \overline{uv_k}$ sont distinctes. Par le fait que $u \notin \overline{v_r v_{r+1}}$ et l'inégalité du triangle on a :

$$|d(u, v_r) - d(u, v_{r+1})| < d(v_r, v_{r+1}) \quad \forall r \in S.$$

Aussi $d(v_r, v_{r+1}) = 1$, et donc on a $d(u, v_r) = d(u, v_{r+1})$ pour tout $r \in S$. Considérons n'importe quel triplet d'indices i, j, k dans S tels que $i < j < k$.

Maintenant,

$$d(v_i, v_j) + d(v_j, u) > d(v_{i+1}, v_j) + d(v_j, u) \geq d(v_{i+1}, u) = d(v_i, u)$$
$$d(u, v_i) + d(v_i, v_j) > d(u, v_i) + d(v_{i+1}, v_j) = d(u, v_{i+1}) + d(v_{i+1}, v_j) \geq d(u, v_j),$$

et donc,

$$v_j \in \overline{uv_i} \Leftrightarrow d(v_i, u) + d(u, v_j) = d(v_i, v_j)$$

aussi

$$v_k \in \overline{uv_j} \Leftrightarrow d(v_j, u) + d(u, v_k) = d(v_j, v_k).$$

Nous avons

$$d(u, v_i) + d(u, v_k) = d(u, v_i) + d(u, v_{k+1}) \geq d(v_i, v_{k+1}) = k + 1 - i$$

et donc $d(u, v_i) > j - 1$ ou $d(u, v_k) > k - j$.

Si $d(u, v_i) > j - i$, alors

$$d(v_i, u) + d(u, v_j) > d(v_i, v_j)$$

et donc $v_j \notin \overline{uv_i}$ et aussi $v_i \notin \overline{uv_j}$ ce qui implique :

$$\overline{uv_i} \neq \overline{uv_j}.$$

Si $d(u, v_{k+1}) > k - j$, alors

$$d(v_j, u) + d(u, v_k) > d(v_j, v_k)$$

et donc $v_k \notin \overline{uv_j}$ et aussi $v_j \notin \overline{uv_k}$ ce qui implique :

$$\overline{uv_j} \neq \overline{uv_k}.$$

□

Corollaire 4.25 (Chiniforooshan et Chvátal [12])**.** *Un espace métrique induit par un graphe connexe de n sommets qui n'a pas de droite universelle, contient au moins $2^{-8/7}n^{2/7}$ droites distinctes.*

Démonstration. Si le diamètre du graphe est au plus $2^{-9/7}n^{4/7}$, alors on obtient le résultat voulu par le Théorème 4.3. Sinon, cela découle du Théorème 4.24. □

4.1.1. La propriété de De Bruijn-Erdős pour les graphes à cordes

Définition 4.26. *Une arête qui attache un sommet dans un cycle à un autre sommets dans le cycle, est une* corde*.*

Définition 4.27. *Un cycle qui ne contient pas de corde est un cycle* élémentaire*.*

Définition 4.28. *Un graphe où chaque cycle de longueur 4 a une corde est un* graphe à cordes*. C'est-à-dire, qu'il ne contient pas de cycles élémentaires autre que des triangles (le cycle de longueur 3).*

Théorème 4.29 (Beaudou et coll. [5])**.** *Tout espace métrique induit par un graphe à cordes connexe avec n sommets où $n \geq 2$ a la propriété de De Bruijn-Erdős ;*

c'est-à-dire, le graphe a soit une droite qui contient tous les sommets, soit a au moins n droites.

D'abord, nous devons préparer la preuve.

Lemme 4.30. *Soient s, x, y des sommets dans un graphe à cordes fini tel que $[sxy]$. Si $\overline{sx} = \overline{sy}$, alors x est un point d'articulation qui sépare s et y.*

Démonstration. L'ensemble de tous les sommets u tel que $d(s, u) = d(s, x)$ séparent s et y. Parmi tous les sous-ensembles séparant s et y choisissons un minimal et l'appelons C. Puisque x est un sommet intérieur d'un chemin plus court de s à y, x appartient à C. On veut montrer qu'aucun d'autre sommet appartient à C.
Supposons le contraire. C contient un sommet u autre que x. Si on enlève C de notre graphe, on aura deux composantes connexes S et Y telles que $s \in S$ et $y \in Y$. La minimalité de C fait que chacun de ses sommets a au moins un voisin dans S et au moins un voisin dans Y. Comme chacun des u et x a au moins un voisin dans S, il y a un chemin de u à x avec au moins un sommet intérieur et tous les sommets intérieurs dans S.
Soit P un plus court tel chemin. P n'a pas de corde sauf possiblement ux. De la même façon, il y a un chemin Q de u à x avec au moins un sommet intérieur et tous les sommets intérieurs dans Y. Aussi, Q n'a pas de corde sauf possiblement ux. L'union de P et Q est un cycle de longueur au moins quatre. Ce qui fait que u et x sont adjacents. L'union de Q et ux est un cycle sans corde, donc Q a exactement deux arêtes. On a donc un sommet v dans Y qui est adjacent à u et x. Soient $d(s, x) = i$ et $d(x, y) = j$. Tout sommet t tel que $d(s, t) < i$ appartient à S et comme v n'a pas de voisin dans S, $d(s, v) > i$.
Maintenant, $d(x, v) = i$ donc on a $d(s, v) = i + 1$ et on a ainsi $v \in \overline{sx}$. Puisque $\overline{sx} = \overline{sy}$, $v \in \overline{sy}$. Comme $d(v, x) = 1$ et $d(x, y) = j$, on a $d(v, y) \leq j + 1$. Maintenant, $d(s, v) = i + 1,\ d(s, y) = i + j,\ d(v, y) \leq j + 1,\ i \geq 1,\ j \geq 1$ et $v \in \overline{sy}$ implique $d(v, y) = j - 1$. Comme $d(u, v) = 1$, on a $d(u, y) \leq j$. Comme $d(s, u) = i$ et $d(s, y) = i + j$, on a $d(u, y) = j$ et $u \in \overline{sy}$. Étant donné que $d(s, u) = i,\ d(s, x) = i$, et $d(u, x) = 1$, on a $u \notin \overline{sx}$. Mais, ceci veut dire $\overline{sx} \neq \overline{sy}$ ce qui est une contradiction. $\square$

Définition 4.31. *Un sommet est appelé* simplicial*, si ses voisins sont deux à deux adjacents.*

Lemme 4.32. *Soient s, x, y des sommets distincts dans un graphe à cordes fini (connexe). Si s est simplicial et si $\overline{sx} = \overline{sy}$, alors $\overline{xy}$ contient tous les sommets du graphe. C'est-à-dire $\overline{xy}$ est universelle.*

Démonstration. $\overline{sx} = \overline{sy}$ et donc $y \in \overline{sx}$. On a donc $[ysx], [syx]$ ou $[sxy]$. s étant simplicial, c'est impossible d'avoir $[ysx]$. Sans perte de généralité, supposons $[sxy]$ (on peut changer x et y si jamais c'est nécessaire). On doit montrer que pour un sommet u, on aura $u \in \overline{xy}$.
Soit P le chemin le plus court de s à u. Soit Q le chemin le plus court de u à y. Du Lemme 4.30, on a x est un point d'articulation séparant s et y, donc la concaténation de P et Q passe forcément par x. Alors, on a $[sxu]$ ou $[uxy]$ (ou même les deux). Si $[uxy]$, alors $u \in \overline{xy}$ et on a fini. Maintenant, supposons qu'on a $[sxu]$, et donc $u \in \overline{xy}$. Puisque $\overline{sx} = \overline{sy}$, on a $[usy]$ ou $[suy]$ ou $[syu]$. s étant simplicial on ne peut pas avoir $[usy]$. Si $[suy]$, alors $[sxu]$ implique $[xuy]$. Si $[syu]$, alors $[sxy]$ implique $[xyu]$. Dans tous les deux cas, on a $u \in \overline{xy}$. $\square$

La preuve du Théorème 4.29. Considérons un graphe à cordes avec n sommets où $n \geq 2$. Par un théorème de Dirac [17], ce graphe a au moins deux sommets simpliciaux. Soit s un de ces sommets simpliciaux. On peut supposer que les droites $\overline{sz}$ où $s \neq z$ sont deux à deux distinctes, car sinon par le Lemme 4.32, on a une droite universelle.
Étant donné que notre graphe est connexe avec au moins 2 sommets, s a au moins un voisin. Choisissons un de ses voisins et l'appelons u. Si u est le seul voisin de s, tout chemin allant de s à n'importe quel autre sommet dans le graphe passe par u ; ce qui fait que $\overline{su}$ est une droite universelle. Si s a un autre voisin que u, appelons-le v, la droite $\overline{uv}$ sera différente de toutes les $n-1$ droites $\overline{sz}$ avec $s \neq z$. Puisque s, u, v sont deux à deux adjacents, $s \in \overline{uv}$.

$\square$

Théorème 4.33 ([5])**.** *Tout espace métrique induit par un graphe biparti connexe avec n sommets, où $n \geq 2$, a une droite universelle.*

Démonstration. $\overline{xy}$ contient tous les sommets si x et y sont adjacents.
Soit u un sommet dans le graphe. $d(u, x)$ et $d(u, y)$ ont des parités différentes. Comme $d(x, y) = 1$; $d(u, x)$ et $d(u, y)$ diffèrent par au plus 1. En fait, $d(u, x)$ et $d(u, y)$ diffèrent de un. Ce qui nous donne $u \in \overline{xy}$. $\square$

CONCLUSION

Nous avons vu le Théorème de Sylvester-Gallai, ainsi qu'une généralisation de celui-ci dans le Chapitre 1.

Nous avons aussi vu le Théorème de De Bruijn-Erdős, et des généralisations variées de celui-ci (les théorèmes 3.20, 3.21 et 3.29). Ainsi, on a vu dans le Chapitre 3 et 4 qu'on a d'une part :

Pour n assez grand, il existe un hypergraphe qui ne contient que $c^{\sqrt{\ln n}}$ droites distinctes où c est une constante. Ce qui veut dire que la propriété de De Bruijn-Erdős n'est pas vraie dans le cadre général (Théorème 3.32).

D'autre part :

- Soit (X, H) un hypergraphe 3-uniforme. Si $|X| \leq 6$, alors il a la propriété de De Bruijn-Erdős (Proposition 3.13).

- Dans un hypergraphe 3-uniforme sur n points : soit il y a au moins $(2-\varepsilon)\log n$ droites (où $\varepsilon > 0$), soit il y a une droite qui contient tous les n points (Théorème 3.43).

- Dans tout espace métrique sur n points, il y a $\Omega\left((n/\rho)^{2/3}\right)$ droites distinctes où ρ est le ratio entre la distance la plus grande et la distance non-nulle la plus petite dans l'espace métrique (Théorème 4.3).

- Tout espace métrique sur n points, où les distances non-nulles sont de 1 ou 2, a la propriété de De Bruijn-Erdős. En fait un tel espace détermine $\Omega(n^{4/3})$ droites (Théorèmes 4.11 et 4.7).

- Tout espace métrique induit par un graphe sur n points détermine : soit $\Omega(n^{2/7})$ droites distinctes, soit une droites qui contient tous les n sommets (Corollaire 4.25).

- Tout espace métrique induit par un graphe cordal sur n points a la propriété de De Bruijn-Erdős (Théorème 4.29).

- Tout espace métrique induit par un graphe biparti sur n points a la propriété de De Bruijn-Erdős (Théorème 4.33).

La recherche sur ce sujet est toujours active. En 2013, Kantor et Patkós [23] ont montré que pour un ensemble de n points dans le plan muni de la métrique L_1, où aucun couple de points ne partage leur coordonnée x ou y, a la propriété de De Bruijn-Erdős. Si les points de l'espace métrique partagent leurs coordonnées, alors soit il y a une droite qui contient tous les points de l'espace, soit l'espace induit au moins $n/37$ droites distinctes.

Ajouté au moment du dépôt final : les résultats de la Section 3.3.2.2 apparaissent dans Aboulker, Bondy, Chen, Chiniforooshan, Chvátal, et Miao [1] daté le 25 août 2013.

Bibliographie

[1] P. Aboulker, A. Bondy, X. Chen, E. Chiniforooshan, V. Chvátal, et P. Miao. *Number of lines in hypergraphs.* `arXiv:1308.5393 [math.CO]`.

[2] N. Alon et J. Spencer. *The Probabilistic Method.* Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. J. Wiley, New York, 2000.

[3] N. Alon, K. E. Mellinger, D. Mubayi, et J. Verstraëte. *The de Bruijn–Erdős theorem for hypergraphs.* Des. Codes Cryptogr., **65 (3)** : 233–245, 2012.

[4] L. Beaudou, A. Bondy, X. Chen, E. Chiniforooshan, M. Chudnovsky, V. Chvátal, N. Fraiman, et Y. Zwols. *Lines in hypergraphs.* à paraître dans Combinatorica, , `arXiv:1112.0376v [math.CO]`.

[5] L. Beaudou, A. Bondy, X. Chen, E. Chiniforooshan, M. Chudnovsky, V. Chvátal, N. Fraiman, et Y. Zwols. *A De Bruijn-Erdős theorem for chordal graphs.* , `arXiv:1201.6376v1 [math.CO]`.

[6] S. Bernstein. *On a modifcation of Chebyshev's inequality and of the error formula of Laplace.* Section Mathématique des Annales Scientifques des Institutions Savantes de l'Ukraine, **1** : 38–49, 1924. (russe).

[7] N. G. De Bruijn et P. Erdős. *On a combinatorial problem.* Indag. Math. (N.S.), **10** : 421–423, 1948.

[8] N. G. De Bruijn et P. Erdős. *A colour problem for infnite graphs and a problem in the theory of relations.* Indag. Math. (N.S.), **13** : 369–373, 1951.

[9] Y. Caro. *New results on the independence number.* Tel-Aviv University, pages 75–79, 1979.

[10] X. Chen. *The Sylvester-Chvatal Theorem.* Discrete Comput. Geom., **35 (2)** : 193–199, 2006.

[11] X. Chen et V. Chvátal. *Problems related to a de Bruijn - Erdős theorem.* Discrete Appl. Math., **156** : 2101–2108, 2008.

[12] E. Chiniforooshan et V. Chvátal. *A De Bruijn - Erdős theorem and metric spaces.* Discrete Math. Theor. Comput. Sci., **13** : 67–74, 2011.

[13] V. Chvátal. *A De Bruijn-Erdős theorem for 1-2 metric spaces.* à paraître dans Czechoslovak Math. J., `arXiv:1205.1170v1 [math.CO]`.

[14] V. Chvátal. *Sylvester-Gallai theorem and metric betweenness.* Discrete Comput. Geom., **31** : 175–195, 2004.

[15] H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry.* Wiley, New York, 1961.

[16] R. Diestel. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1997.

[17] G. A. Dirac. *On rigid circuit graphs.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **25** : 71–76, 1961.

[18] P. Erdős. *Three point collinearity.* Amer. Math. Monthly, **50 (1)** : 65, 1943.

[19] P. Erdős. *Personal reminiscences and remarks on the mathematical work of Tibor Gallai.* Combinatorica, **2 (3)** : 207–212, 1982.

[20] P. Hall. *On representatives of subsets.* J. London Math. Soc, **10 (1)** : 26–30, 1935.

[21] W. Hoeffding. *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* J. Amer. Statist. Assoc., **58** : 13–30, 1963.

[22] D. J. Houck et M. E. Paul. *On a theorem of de Bruijn and Erdős.* Linear Algebra Appl., **23** : 157–165, 1979.

[23] I. Kantor et B. Patkós. *Towards a de Bruijn–Erdős Theorem in the L_1-Metric.* Discrete Comput. Geom., **49** : 659–670, 2013.

[24] K. Menger. *Untersuchungen über allgemeine Metrik.* Math. Ann., **100** : 75–163, 1928.

[25] H. J. Ryser. *An extension of a theorem of de Bruijn and Erdős on combinatorial designs.* J. Algebra, **10 (2)** : 246–261, 1968.

[26] D. Seinsche. *On a property of the class of n-colorable graphs.* J. Combin. Theory Ser. B, **16 (2)** : 191–193, 1974.

[27] H. S. Snevily. *On generalizations of the de Bruijn—Erdős theorem.* J. Combin. Theory Ser. A, **68 (1)** : 232 – 238, 1994.

[28] E. Sperner. *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge.* Math. Z., **27** : 544–548, 1928.

[29] J. J. Sylvester. *Mathematical question 11851.* Educational Times, **59** : 98, 1893.

[30] P. Turán. *Egy gráfelméleti szélsöértékfeladatról (on an extremal problem in graph theory).* Matematikai És Fizikai Lapok, **48** : 436–452, 1941. (hongrois).

[31] V.K. Wei. *A lower bound on the stability number of a simple graph.* Bell Lab. Tech. Memor, pages 81–11217, 1981.