

Université de Montréal

Cobordismes lagrangiens et uniréglage

par

Vincent Létourneau

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

5 janvier 2015

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Cobordismes lagrangiens et uniréglage

présenté par

Vincent Létourneau

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

François Lalonde

(président-rapporteur)

Octav Cornea

(directeur de recherche)

Iosif Polterovich

(membre du jury)

Mémoire accepté le

12 novembre 2014

SOMMAIRE

Ce mémoire traite de la question suivante : est-ce que les cobordismes lagrangiens préservent l'uniréglage ? Dans les deux premiers chapitres, on présente en survol la théorie des courbes pseudo-holomorphes nécessaire. On examine d'abord en détail la preuve que les espaces de courbes J -holomorphes simples est une variété de dimension finie. On présente ensuite les résultats nécessaires à la compactification de ces espaces pour arriver à la définition des invariants de Gromov-Witten. Le troisième chapitre traite ensuite de quelques résultats sur la propriété d'uniréglage, ce qu'elle entraîne et comment elle peut être démontrée. Le quatrième chapitre est consacré à la définition et la description de l'homologie quantique, en particulier celle des cobordismes lagrangiens, ainsi que sa structure d'anneau et de module qui sont finalement utilisées dans le dernier chapitre pour présenter quelques cas où la conjecture tient.

Mots-clés : Courbes pseudoholomorphes, espaces de module, compacité de Gromov, invariants de Gromov-Witten, uniréglage, homologie quantique, complexe de perles, produit quantique, cobordismes lagrangiens, sous-variétés lagrangiennes.

SUMMARY

In this dissertation we study the following question : do Lagrangian cobordisms preserve uniruling? In the two first chapters, the necessary pseudoholomorphic curves theory is quickly presented. We first study in detail the proof that the spaces of simple J -holomorphic curves is a manifold of finite dimension. We then present the necessary results to produce the appropriate compactification of these spaces to get to the definition of Gromov-Witten invariants. In the third chapter then some results on the property of uniruling are presented : what are its consequences, how can it be obtained. In the fourth chapter quantum homology is defined, in particular for Lagrangian cobordism, and its ring and module structures are studied which are finally used in the last chapter to present examples of cobordisms which preserves uniruling.

Keywords : Pseudoholomorphic curves, moduli space, Gromov compactity, Gromov-Witten invariants, uniruling, quantum homology, pearl complex, quantum product, Lagrangian cobordism, Lagrangian submanifolds.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| Sommaire | v |
| Summary | vii |
| Remerciements | 1 |
| Introduction | 3 |
| Chapitre 1. Espaces de module de courbes pseudo-holomorphes. | 5 |
| 1.1. Structures presque complexes | 6 |
| 1.2. Courbes pseudo-holomorphes..... | 6 |
| 1.3. Courbes simples | 8 |
| 1.3.1. Espace de module universel | 12 |
| Chapitre 2. Compacité et invariants de Gromov-Witten | 19 |
| 2.1. Compacité..... | 19 |
| 2.2. Courbes stables..... | 23 |
| 2.3. Convergence, topologie et compacité de Gromov..... | 26 |
| 2.4. Courbes stables simples et invariants de Gromov-Witten | 28 |
| Chapitre 3. Uniruling | 35 |
| Chapitre 4. Homologie quantique et complexe de perles | 39 |
| 4.1. complexe de perles..... | 40 |
| 4.2. Relation a l'homologie de Floer | 45 |
| 4.3. Produit quantique | 47 |
| 4.4. Structure de $QH(M)$ -module | 48 |
| 4.5. Homologie quantique pour cobordismes lagrangiens | 50 |

| | |
|---|----|
| Chapitre 5. Uniruling et Cobordismes lagrangiens | 57 |
| 5.1. Lagrangiennes étroites et cobordismes | 57 |
| 5.2. Disques d'indice de Maslov 2 | 58 |
| 5.3. Action non-triviale de $QH(M)$ | 60 |
| 5.4. Contraintes topologiques de l'uniréglage | 61 |
| Bibliographie | 63 |

REMERCIEMENTS

Je dois un merci particulier à mon directeur de maîtrise Octav Cornea qui m'a donné son temps et ses connaissances avec une grande générosité. Merci à tout mes professeurs et collègues en particulier Jordan Payette , Jean-François Arbour et Bruno Joyal pour de précieuses conversations et pour leur enthousiasme. Merci aussi aux membres du comité d'évaluation du mémoire pour leur temps.

INTRODUCTION

Depuis l'article fondateur de Gromov *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, ces courbes occupent une place centrale dans l'étude des variétés symplectiques.

Dans le premier chapitre, le problème qu'on se pose est le suivant : étant donné une sous-variété compacte N de notre variété symplectique M (ou de manière plus générale N pourrait être une classe d'homologie pas nécessairement représentée par une sous-variété), on aimerait connaître le nombre de courbes pseudo-holomorphes intersectant cette sous-variété. Pour obtenir un invariant symplectique, la réponse devrait bien sur être indépendante du choix de J dans un sous-ensemble dense de l'espace \mathcal{J} de toutes les structures presque complexes de M .

L'approche qui est prise dans ce qui suit est celle suggérée par Gromov et débute avec la définition des courbes stables, le cas des sphères étant le seul dont on se préoccupera. Celles-ci sont essentiellement des courbes J -holomorphes munies d'une collection de points marqués $\{z_1, \dots, z_p\} \subset S^2$. On notera l'espace de module (espace de courbes non-paramétrées) des sphères à p points marqués et représentant une classe d'homologie sphérique par $\mathcal{M}_{0,p}(A, J)$. Ces espaces sont munis d'une application d'évaluation naturelle

$$\text{ev} : \mathcal{M}_{0,p}(A, J) \rightarrow M^{\times p} \text{ définie par } u \mapsto (u(z_1), \dots, (u(z_p)))$$

L'objectif est par la suite de comprendre quand l'évaluation représente une classe d'homologie de $M^{\times p}$. Cette question passe par le développement du langage des pseudocycles. Rapidement, un pseudocycle est une application lisse f possiblement singulière d'une variété V de dimension d qu'on ne suppose pas compacte dans M , mais telle que l'image a fermeture compacte et telle que la frontière de $f(V)$ a dimension inférieure à $d - 2$. Cette condition sur la frontière de $f(V)$ fait en sorte que l'application a une classe fondamentale puisque l'homologie ne détecte pas le bord du cycle qui est de dimension trop basse. Il est possible de montrer que bien que toutes les classes d'homologie ne sont pas représentables

par des sous-variétés, elles le sont par des pseudo-cycles et sous quelques hypothèses supplémentaires sur l'espace de module $\mathcal{M}_{0,p}(A, J)$ et sur la variété M , il se trouve que l'application d'évaluation définit un pseudocycle. Soit X_1, \dots, X_p une collection de cycles de M , PD l'application de dualité de Poincaré, $\overline{\mathcal{M}}_{0,p}(A, J)$ une compactification naturelle de $\mathcal{M}_{0,p}(A, J)$, les invariants de Gromov-Witten $\text{GW}_{0,p}^A$ sont alors définis par

$$\text{GW}_{0,p}^A(X_1, \dots, X_p) := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,p}(A, J)} \text{ev}_1^* \text{PD}(X_1) \smile \dots \smile \text{ev}_p^* \text{PD}(X_p)$$

avec les $\text{ev}_i = \pi_i \circ \text{ev}$ l'évaluation au point z_i .

Le cas des sous-variétés lagrangiennes est traité de la même manière avec les sphères remplacées par des disques à bord dans la sous-variété.

La théorie des courbes pseudo-holomorphes permet finalement de montrer le théorème de non-tassement de Gromov : si B_r^{2n} est la boule fermée de rayon r munie de la forme symplectique canonique sur \mathbf{R}^{2n} et $Z(R)$ est le cylindre $B_R^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$ aussi muni de la forme canonique sur \mathbf{R}^{2n} , alors étant donné un plongement symplectique $\iota : B_r^{2n} \rightarrow Z(R)$ on doit avoir $r \leq R$. Ce théorème combiné avec le théorème de Darboux permet de définir plusieurs invariants numériques comme le rayon de Gromov qu'on définit comme le supremum des πr^2 sur tout les r tels que B_r^{2n} se plonge symplectiquement dans (M, ω) . L'uniréglage est ensuite introduit comme outil pour étudier ces invariants numériques.

Les preuves qui sont présentées dans le texte sont toutes tirées des ouvrages cités, à l'exception de la preuve de la proposition 4.5.1 qui dit que pour (V, L_1, L_2) un cobordisme lagrangien exacte, l'isomorphisme entre $HF(L_1)$ et $HF(L_2)$ induit par V préserve le produit quantique et la structure de module sur l'homologie de la variété ambiante. Bien que ce résultat était déjà connu et est énoncé dans Biran et Cornea [3], on n'y donne pas de preuve. Celle qui est présentée ici est la mienne.

Pour éviter trop de confusion, notez que la convention suivante est adoptée. On notera les espaces de courbes paramétrées par $\widetilde{\mathcal{M}}$, les espaces de module par \mathcal{M} ($\widetilde{\mathcal{M}}$ après quotient par le groupe des reparamétrisations de Σ) et leur compactification $\overline{\mathcal{M}}$.

Partout dans ce texte, on note $H_*(X) := H_*(X, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ la partie libre de l'homologie.

Chapitre 1

ESPACES DE MODULE DE COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES

Dans ce chapitre et le suivant les résultats présentés ainsi que leurs preuves sont tirés de McDuff et Salamon [4].

On s'intéresse ici aux espaces de courbes J -holomorphes $\Sigma \rightarrow M$ pour les J qui sont ω -dominées, c'est-à-dire que $\omega(-, J-)$ est définie positive. Si on suppose de plus que les courbes ne se factorisent pas dans un revêtement branché de Σ (on dit dans ce cas que la courbe est simple), alors l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}^*(A, \Sigma, J)$ des telles courbes représentant une classe d'homologie $A \in H_2(M)$ fixée est une variété lisse orientée de dimension $n\chi(\Sigma) + 2c_1(A)$ où $c_1(A) = \int_A c_1$ et c_1 est la première classe de Chern du fibré tangent de M muni de J .

Comme c'est bien souvent le cas, montrer qu'un ensemble de courbes simples est une variété revient à réaliser l'ensemble comme la préimage d'une variété par une fonction lisse qui lui est transverse et appliquer le théorème des fonctions implicites. Comme les courbes J -holomorphes sont définies par l'équation $\bar{\partial}_J(u) = 0$, il est clair que c'est cette fonction qu'on veut utiliser et en effet on peut réaliser $\mathcal{M}^*(\Sigma, A, J)$ comme la préimage de la section nulle dans le fibré qui au-dessus de chaque $u \in C^\infty(\Sigma, M)$ a pour fibre les 1-formes anti- J -holomorphes à valeur dans u^*TM . Les structures presque complexes pour lesquelles $\bar{\partial}_J$ est transverse à la section nulle sont appelées régulières.

On ne peut malheureusement pas conclure que $\mathcal{M}^*(\Sigma, A, J)$ est une variété pour un J régulier puisque le théorème des fonctions implicites pour les variétés de dimension infinie est applicable seulement pour les variétés de Banach et les variétés qui nous intéressent n'en sont pas. L'idée pour contourner ce problème est de se restreindre à des espaces de Sobolev, lesquels ont une plus faible régularité mais ont l'avantage d'être des espaces de Banach. Le théorème des fonctions implicites s'applique à ces espaces et l'argument est complété en invoquant la régularité elliptique.

1.1. STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES

Une **structure complexe** sur V un espace vectoriel sur \mathbf{R} de dimension paire est un endomorphisme J tel que $J^2 = -\mathbf{1}$. Par exemple, si on identifie \mathbf{R}^{2n} à \mathbf{C}^n , la multiplication par i est une structure complexe qu'on note J_0 .

Proposition 1.1.1. Pour toute structure complexe J sur V il y a un isomorphisme $\Phi : V \rightarrow V$ tel que $J = \Phi J_0 \Phi^{-1}$.

Inversement, pour tout $\Phi \in \text{Gl}(2n, \mathbf{R})$, $\Phi J_0 \Phi^{-1}$ donne une structure complexe. Tout élément de $\text{Gl}(n, \mathbf{C}) \subset \text{Gl}(2n, \mathbf{R})$ commute avec J_0 , on a donc montré

Corollaire 1.1.1. L'espace $\mathcal{J}(\mathbf{R}^{2n})$ des structures complexes sur \mathbf{R}^{2n} est diffeomorphe à $\text{Gl}(2n, \mathbf{R}) / \text{Gl}(n, \mathbf{C})$.

Une **structure presque complexe** J sur une variété de dimension paire M est une section du fibré $\text{End}(TM)$ telle que sur chaque fibre J_x est une structure complexe pour $T_x M$. Il est clair qu'une structure complexe sur une variété M , c'est-à-dire un atlas tel que les fonctions de transition sont biholomorphes, induit une structure presque complexe sur M , cependant l'inverse n'est pas toujours possible. Les structures presque complexes qui proviennent d'une structure complexe sont dites intégrables. Soit ω une forme symplectique pour M , si $\omega(-, J-)$ est définie positive on dit que J est ω -**dominée** et si $\omega(-, J-)$ est symétrique et définie positive (donc $\omega(-, J-)$ est une métrique riemannienne) on dit que J est ω -**compatible**. On notera g_J la métrique associée à ω et J .

1.2. COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES

Soit (M, ω) une variété symplectique compacte munie d'une structure presque complexe J , (Σ, j) une surface de Riemann et une application lisse $u : \Sigma \rightarrow M$. On dit que la courbe u est pseudo-holomorphe, ou J -holomorphe si elle satisfait l'équation de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial}_J u := du - J \circ du \circ j = 0$$

Ces courbes partagent un nombre surprenant des propriétés avec les courbes holomorphes, on présente maintenant les plus importantes à notre traitement. La première généralise le fait qu'une fonction holomorphe est déterminée par ses valeurs sur une droite.

Théorème 1.2.1. Soit (M, J) une variété presque complexe avec J de classe C^2 , Σ_1 et Σ_2 deux surfaces de Riemann fermées et $u_1 : \Sigma_1 \rightarrow M$, $u_2 : \Sigma_2 \rightarrow M$ deux

courbes pseudo holomorphes telles que $u_1(\Sigma_1) \neq u_2(\Sigma_2)$ avec u_1 qui n'est pas constante, alors l'ensemble $u_1^{-1}(u_2(\Sigma_2))$ est au plus dénombrable.

Définition 1.2.1. La courbe u est dite **multiple** s'il existe un revêtement holomorphe branché à plus d'une feuille $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ et une application J -holomorphe $v : \Sigma' \rightarrow M$ telle que $u = v \circ \psi$. La courbe u est dite **simple** si elle n'est pas multiple. (La surface Σ admet un revêtement branché s'il existe une collection finie de points $P \subset \Sigma$ tel que $\Sigma \setminus P$ a un revêtement $\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma \setminus P$)

Définition 1.2.2. Soit $u : \Sigma \rightarrow M$ une courbe J -holomorphe, son **énergie** est définie par

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |du|_J^2 d\text{Vol}$$

où la norme $|\cdot|_J$ est la norme d'opérateurs $T\Sigma \rightarrow TM$ induite par la norme sur TM qui est elle même induite par la structure riemannienne $\omega(\cdot, J\cdot)$.

Un calcul facile montre la proposition suivante

Proposition 1.2.1. Soit (M, ω) une variété symplectique, si J est ω compatible alors toute application lisse $u : \Sigma \rightarrow M$ d'une surface de Riemann sans bord satisfait

$$E(u) = \int_{\Sigma} u^*\omega + \int_{\Sigma} |\bar{\partial}_J u|_J^2 d\text{vol}_{\Sigma}$$

Les hypothèses de cette dernière proposition impliquent que la première intégrale dans l'expression ci-dessus pour l'énergie ne dépend pas de la classe d'homologie de $u_*[S^2]$. De plus, la seconde intégrale n'est nulle que pour les applications solutionnant l'équation de Cauchy-Riemann. On en conclut que les courbes J -holomorphes minimisent l'énergie dans leur classe d'homologie, faisant de l'énergie de ces courbes un invariant topologique.

Si on s'intéresse plutôt aux surfaces avec bord Σ , on doit supposer de plus que le bord soit dans une sous-variété lagrangienne pour que l'énergie soit à nouveau un invariant topologique.

Proposition 1.2.2. Soit u une courbe J -holomorphe simple, l'ensemble de ses points injectifs $\{z \in \Sigma : du(z) \neq 0 \text{ et } u^{-1}(u(z)) = z\}$ est un ouvert dense de Σ .

On note $\mathcal{M}(\Sigma, A, J)$ l'espace de module des courbes J -holomorphes dans M telles que $u : \Sigma \rightarrow M$ représente la classe d'homologie $A \in H_2^S(M)$ les classes d'homologie sphériques.

Les théorèmes suivants seront utiles pour la section sur la compacité et le bubbling.

Théorème 1.2.2 (Théorème de prolongement de Riemann). Soit (M, ω) une variété symplectique compacte et L une sous-variété lagrangienne, J une structure presque complexe ω -dominée, et $u : (\Sigma \setminus p, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$ une courbe J -holomorphe d'énergie finie. Si de plus lorsque $\partial\Sigma \neq \emptyset$ on a $p \in \partial\Sigma$, alors u peut être étendue à une fonction J -holomorphe $(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$.

Théorème 1.2.3 (Énergie minimale des sphères J -holomorphes). Soit (M, J) une variété presque complexe munie d'une métrique riemannienne g , L une sous-variété complètement réelle (i.e. $TL \cap JTL = \emptyset$) et u une courbe J -holomorphe non constante d'une sphère ou d'un disque à bord dans L , alors il existe une constante $\hbar > 0$ (qui dépend de M, J, g) telle que

$$E(u) \geq \hbar$$

Remarque 1.2.1. Ce théorème remarquable est central à plusieurs arguments et illustre une fois de plus la rigidité et le comportement docile des courbes pseudo-holomorphes.

1.3. COURBES SIMPLES

Soit (Σ, j_Σ) une surface de Riemann et (M, ω) une variété symplectique, alors l'espace de module $\mathcal{M}(A, J)$ est obtenu comme la préimage de 0 par l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_J$ vu comme une section d'un fibré des formes holomorphes sur la variété de Banach constituée des fonctions lisses de Σ dans M . Soit

$$\mathcal{B} = C^\infty(\Sigma, M; A)$$

l'ensemble de toutes les fonctions lisses de Σ à valeur dans M et représentant la classe d'homologie A . Un vecteur tangent à u dans \mathcal{B} est un champ de vecteurs tangents à $u(\Sigma)$. Autrement dit, la fibre du fibré tangent à \mathcal{B} en u est

$$T\mathcal{B}_u = \Omega^0(\Sigma, u^*TM)$$

l'espace des sections du fibré pullback. De manière équivalente on peut penser à un vecteur tangent de \mathcal{B} comme un champ de vecteurs sur l'image de u . Ainsi, si on étend ce champ de vecteurs à un voisinage tubulaire de l'image de u , on peut alors faire agir le flot de ce champ de vecteurs qui définit une courbe dans \mathcal{B} . On considère maintenant le fibré $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ qui a pour fibre

$$\mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$$

les formes J -antilinéaires sur Σ à valeur dans u^*TM . On s'intéresse à ce fibré car c'est dans ce dernier que l'opérateur de Cauchy-Riemann prendra ses valeurs. En prenant la section

$$\bar{\partial}_J = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j_\Sigma)$$

on a $\mathcal{M}(\Sigma, A, J) = (\bar{\partial}_J)^{-1}(0)$. Le problème consistant à montrer que $\mathcal{M}(A, J)$ est une variété se réduit maintenant à vérifier quand l'image de $\bar{\partial}_J$ sera transverse à la section nulle. Cette question est équivalente à vérifier que la linéarisation de $\bar{\partial}_J$ est surjective sur la fibre tangente verticale, c'est-à-dire que la composition

$$D_u : T\mathcal{B} \xrightarrow{\bar{\partial}_J} T\mathcal{E}_u \cong \mathcal{E}_u \oplus T\mathcal{B}_u \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_u$$

est surjective avec π la projection sur le premier facteur.

Définition 1.3.1. On dit qu'une structure presque complexe $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ est régulière si elle est telle que $D_u : T\mathcal{B}_u \rightarrow \mathcal{E}_u$ est surjective pour tout u . On note $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ l'espace de toutes les J réguliers.

On note $\mathcal{M}^*(\Sigma, A, J)$ l'espace des courbes simples représentant A . Le théorème de régularité pour les courbes simples est finalement

Théorème 1.3.1. Pour $J \in \mathcal{J}_{reg}(M, \omega)$, $\mathcal{M}^*(\Sigma, A)$ est une variété orientée de dimension

$$n(2 - 2g) + 2c_1(A)$$

pour $2n$ la dimension de M et c_1 la première classe de Chern de TM . De plus, $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ est de Baire dans $\mathcal{J}(M, \omega)$.

Définition 1.3.2. Un opérateur de Cauchy-Riemann linéaire sur un fibré vectoriel complexe $E \rightarrow \Sigma$ est un opérateur \mathbf{C} -linéaire $D : \Omega^0(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$ qui satisfait la règle de Leibniz $D(f\xi) = fD\xi + (\bar{\partial}f)\xi$.

Proposition 1.3.1. Les opérateurs de Cauchy-Riemann linéaires sont Fredholm.

Une étude attentive de D_u dans un système de coordonnées nous montre qu'il s'agit d'un opérateur de Cauchy-Riemann linéaire et donc d'un opérateur de Fredholm. Si les espaces \mathcal{B} et \mathcal{E} étaient des variétés de Banach, la démonstration de ce théorème serait très simple, il suffirait d'appliquer la version du théorème de la fonction implicite dans le contexte des variétés de Banach pour immédiatement savoir que $\mathcal{M}^*(\Sigma, A, J)$ est une variété de dimension l'indice de l'opérateur D_u . Une manière élégante d'éviter ce problème est de réduire la régularité exigée des

espaces considérés en se concentrant sur certains espaces de Sobolev. Ceux-ci en étant des complétions dans un espace L_p sont donc automatiquement des espaces de Banach et les théorèmes de Sard et des fonctions implicites s'y appliquent et il reste alors à montrer que ces résultats peuvent être étendus aux espaces de fonctions d'intérêt. Cet argument s'élabore en plus grand détail comme suit.

Soit J une structure presque complexe compatible avec ω et ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne $\omega(\cdot, J\cdot)$. On définit la connexion complexe-linéaire suivante

$$\widetilde{\nabla}_v X := \nabla_v X - \frac{1}{2}J(\nabla_v J)X$$

On définit maintenant l'isomorphisme de fibrés

$$\Phi_u(\xi) : u^*TM \rightarrow \exp_u(\xi)^*TM$$

par le $\widetilde{\nabla}$ transport parallèle le long des ∇ géodésiques $s \mapsto \exp_{u(z)}(s\xi(z))$. On définit maintenant la composante verticale de $\bar{\partial}_J$ appliqué à la courbe de vecteur tangent ξ et passant par u

$$\mathcal{F}_u : \Omega^0(\Sigma, u^*TM) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$$

$$\mathcal{F}_u(\xi) = \Phi_u(\xi)^{-1}\bar{\partial}_J(\exp_u(\xi))$$

Proposition 1.3.2. Pour toute fonction lisse $u : \Sigma \rightarrow M$ l'opérateur $D_u : \Omega^0(\Sigma, u^*TM) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ est donné en coordonnées locales par l'identité

$$D_u(\xi) = \frac{1}{2}(\nabla\xi + J(u)\nabla\xi \circ j_\Sigma) - \frac{1}{2}J(u)(\nabla_\xi J)(u)\partial_J(u)$$

Remarque 1.3.1. De cette identité on peut voir que D_u est un opérateur de Cauchy-Riemann linéaire. Si on note $\nabla^{0,1}\xi := \frac{1}{2}(\nabla\xi + J(u)\nabla\xi \circ j_\Sigma)$, la composante antiholomorphe de ∇ , alors on a

$$\begin{aligned} D_u(f\xi) &= \nabla^{0,1}(f\xi) - \frac{1}{2}J(u)(\nabla_{f\xi}J)(u)\partial_J(u) \\ &= f\nabla^{0,1}(\xi) + \bar{\partial}(f)\xi - fJ(u)(\nabla_\xi J)(u)\partial_J(u) \\ &\quad \text{car } \nabla^{0,1} \text{ est Cauchy-Riemann et } \nabla_{f\xi} = f\nabla_\xi \\ &= fD_u\xi \end{aligned}$$

■

preuve: Par définition on a $D_u\xi = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(\lambda\xi)|_{\lambda=0}$ et par un lemme dont la preuve suit celle-ci on a aussi $\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(\lambda\xi)|_{\lambda=0} = \widetilde{\nabla}_\lambda\bar{\partial}_J(u_\lambda)|_{\lambda=0}$ on déballe ensuite les

définitions de $\widetilde{\nabla}$ et de $\bar{\partial}_J$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_\lambda \bar{\partial}_J(u_\lambda)|_{\lambda=0} &= \frac{1}{2} (\nabla_\lambda du_\lambda + J(u_\lambda) \circ \nabla_\lambda du_\lambda \circ j) \\ &\quad - \frac{1}{4} (J(u_\lambda)(\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda} J)(u_\lambda) du_\lambda - (\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda} J)(u_\lambda) du_\lambda \circ j)|_{\lambda=0}\end{aligned}$$

Puisque la connexion ∇ est la connexion de Levi-Civita on a $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ et donc

$$\nabla_{\partial_\lambda} du_\lambda(\partial_t) = \nabla_{\partial_\lambda} \partial_t u_\lambda = \nabla_{\partial_t} \partial_\lambda u_\lambda = \nabla_{\partial_t} \xi$$

On simplifie l'écriture de cette identité à $\nabla_\lambda du_\lambda = \nabla \xi$. Une connexion sur un fibré induit aussi une connexion sur le fibré des endomorphismes qui est donnée par le commutateur de la connexion avec un élément du fibré des endomorphismes. Dans notre cas ceci s'exprime comme $\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda} J = [\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda}, J]$. On a donc

$$J(\nabla J)J = J(\nabla J - J\nabla)J = -J\nabla + \nabla J = [\nabla, J]$$

et donc

$$\begin{aligned}& J(u_\lambda) (\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda} J) (u_\lambda) du_\lambda - (\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda} J)(u_\lambda) \circ j \\ &= J(u_\lambda) (\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda} J) (u_\lambda) (du_\lambda - J(u_\lambda) du_\lambda \circ j) \\ &= J(u_\lambda) (\nabla_{\partial_\lambda u_\lambda}) \partial_J u\end{aligned}$$

Cette dernière identité termine la preuve. ■

Lemme 1.3.1. Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ et $\Phi_{x_0}^{\gamma(t)}$ le transport parallèle de vecteurs au-dessus de x_0 le long de la courbe γ avec $\gamma(0) = x_0$. On a alors

$$\nabla_t \sigma(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} (\Phi_{x_0}^{\gamma(t)})^{-1} \sigma(\gamma(t))$$

preuve: Soit e_1, \dots, e_n une base de $E|_{x_0}$ alors le transport parallèle de cette base donne une trivialisaton de $\gamma^* E$ et le long de γ on peut décomposer les sections de E dans cette base. Soit $\sigma = \sum \sigma_i e_i$, alors

$$\begin{aligned}\nabla_t \sum \sigma_i e_i &= \sum d\sigma_i(\dot{\gamma}(t)) \otimes e_i + \sigma_i \nabla_t e_i \\ &= \sum d\sigma_i(\dot{\gamma}(t)) \otimes e_i \quad (\text{par définition de la base par transport parallèle}) \\ &= \sum \frac{d}{dt} \sigma(\gamma(t)) e_i \\ &= \frac{d}{dt} (\Phi_{x_0}^{\gamma(t)})^{-1} \sigma(\gamma(t))\end{aligned}$$

■

1.3.1. Espace de module universel

Les espace de Sobolev $W^{k,p}(\Sigma, M)$ entre deux variétés sont obtenus en plongeant d'abord les variétés dans des \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^m pour n et m suffisamment grand et en restreignant la norme de Sobolev aux fonctions lisses de Σ dans M . On définit le fibré $\mathcal{E}^{k-1,p} \rightarrow \mathcal{B}^{k,p}$ où les espaces sont définies comme

$$\mathcal{B}^{k,p} := \{u \in W^{k,p} : [u] = A \in H_2(M; \mathbf{Z})\}$$

$$\mathcal{E}_u^{k-1,p} := \{u \in W^{k-1,p}(\Sigma, \wedge_J^{0,1} u^* TM)\}$$

et où par $W^{k-1,p}(\Sigma, \wedge_J^{0,1} u^* TM)$ on entend la complétion par la norme de Sobolev (k, p) de l'espace des sections du fibré $\wedge_J^{0,1} u^* TM \rightarrow \Sigma$ de 1-formes J -antiholomorphes sur Σ à valeur dans le fibré pullback $u^* TM$. On définit une section $\bar{\partial}_J$ et une fonction $\mathcal{F}_u : W^{k,p}(\Sigma, u^* TM) \rightarrow W^{k-1,p}(\Sigma, \wedge_J^{0,1} u^* TM)$ de la même manière que dans la section précédente. On construit maintenant l'espace de module universel. Soit \mathcal{J}^l l'espace des structures presque complexes C^l , ω -compatibles sur M . L'espace de module universel est défini par

$$\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) := \{(u, J) \in \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l : \bar{\partial}_J u = 0\}$$

Proposition 1.3.3. \mathcal{J}^l est une variété de Banach.

La preuve est de McDuff et Salamon [4]. *preuve:* $T_J \mathcal{J}^l$ est formé des sections C^l du fibré $\text{End}(TM, J, \omega)$ sur M , les applications linéaires telles que $YJ + JY = 0$ et $\omega(YV, W) + \omega(V, YW) = 0$. Soit \exp l'exponentielle de matrices, on montre que pour un tel Y et t un paramètre réel, la courbe $J \exp(-tJY)$ est un chemin de sections de \mathcal{J}^l . Les relations définissant $T_J \mathcal{J}^l$ sont obtenues en dérivant les relations $(J \exp(-tJY))^2 = -Id$ et $\omega(X, J \exp(-tJY)Z) - \omega(Z, J \exp(-tJY)X) = 0$. Pour se convaincre que $J \exp(-tJY)$ est bien dans \mathcal{J}^l , on observe d'abord la relation suivante

$$J \exp(-tJY) = J \sum_{k \geq 0} (-1)^k (tJY)^k = - \sum_{k \geq 0} (tJY)^k = - \exp(tJY)$$

et en appliquant une propriété de l'exposant on a alors

$$(J \exp(-tJY))^2 = -(\exp(tJY) \exp(-tJY)) = -\mathbf{1}$$

Comme c'est le cas pour les groupes de Lie, un voisinage de J est paramétrisé par l'exponentielle. ■

On fera aussi usage des lemmes suivants qui sont démontrés en annexe dans McDuff et Salamon [4]. On définit D_u^* par $\int_{\Sigma} \langle D_u^* \eta, \xi \rangle dvol = \int_{\Sigma} \langle \eta, D_u \xi \rangle dvol$

Lemme 1.3.2. Soit $l \in \mathbf{N}$, $p > 2$, J ω -dominée et C^l sur M de dimension n , $u \in W^{l,p}(\Sigma, M)$, $1 \leq k \leq l$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$(1) \text{ Ind } D_u = \text{Ind } D_u^* = n(2 - 2g) + 2c_1(u^*TM)$$

(2) Si $\eta \in L^q(\Sigma, \wedge^{0,1} \otimes_J u^*TM)$ et tel que

$$\int_{\Sigma} \langle \eta, D_u \xi \rangle d\text{vol} = 0 \text{ pour tout } \xi \in W^{k,p}(\Sigma, u^*TM)$$

alors $\eta \in W^{l,p}(\Sigma, \wedge^{0,1} \otimes_J u^*TM)$

Lemme 1.3.3. Soit $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ alors il y a $Y \in \text{End}(\mathbf{R}^n)$ tel que $Y = Y^T = J_o Y J_o$ et $Y\xi = \eta$.

On présente maintenant la démonstration que l'espace de module universel est une variété de Banach et que les J réguliers sont denses. On considère la section $S : \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l \rightarrow \mathcal{E}^{k-1,p}$, $(u, J) \mapsto \bar{\partial}_J u$. L'espace de module universel $\mathcal{M}^*(A, \Sigma, \mathcal{J}^l) = S^{-1}(0)$ sera une variété de Banach si la linéarisation de S est surjective sur les couples (u, J) tels que u est J -holomorphe, condition équivalente à ce que la composition de dS avec la projection

$$\pi : T_{(u,J)} \mathcal{E}^{k-1,p} \cong \mathcal{E}_{(u,J)}^{k-1,p} \oplus T_u \mathcal{B}^{k,p} \oplus T_J \mathcal{J}^l \rightarrow \mathcal{E}_{(u,J)}^{k-1,p}$$

soit surjective. On note cette composition $D_{(u,J)} := \pi \circ dS(u, J)$. De la même manière que dans la proposition précédente qui donnait une description explicite de D_u , il est pratique de considérer les fonctions de transport parallèle pour obtenir la composante verticale de la section S . Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de $\omega(-, J-)$ sur M et $\widetilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}J(\nabla J)$ une connexion J -linéaire. On définit les fonctions

$$\Psi_J(Y) : \wedge^{0,1} \otimes_J u^*TM \rightarrow \wedge^{0,1} \otimes_{J'} u^*TM, \quad \alpha \mapsto \frac{1}{2}(\alpha - J' \circ \alpha \circ j)$$

qui à une forme J -antiholomorphe associent sa partie J' -antiholomorphe, et

$$\Phi_u(\xi) : \wedge^{0,1} \otimes_J u^*TM \rightarrow \wedge^{0,1} \otimes_J \exp_u(\xi)^*TM$$

donnée par le $\widehat{\nabla}$ transport parallèle le long des ∇ géodésiques. Soit s et t deux paramètres réels, la partie verticale de S le long de la courbe $(\exp_u(s\xi), J \exp(-tJY))$ est alors donnée par

$$\mathcal{F}_{(u,J)} := \Phi_u(\xi)^{-1} \circ \Psi_J(Y)^{-1} \bar{\partial}_{J \exp(-tJY)} \exp_u(s\xi)$$

et la linéarisation de S est alors

$$D_{(u,J)}(\xi, Y) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \mathcal{F}_{(u,J)}(t\xi, sY)$$

Puisque $\Phi_u(0) = \mathbf{1}$ et $\Psi_J(0) = \mathbf{1}$ et que

$$D_{(u,J)}(\xi, Y) = D_{(u,J)}(\xi, 0) + D_{(u,J)}(0, Y) = D_u(\xi) + D_{(u,J)}(0, Y)$$

où D_u est la linéarisation de $\bar{\partial}_J$ quand J est fixe, il ne reste plus qu'à calculer $D_{(u,J)}(0, Y)$.

$$\begin{aligned} D_{(u,J)}(0, Y) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{F}_{(u,J)}(0, sY) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi_J^{-1} \bar{\partial}_{J \exp(-tJY)} \exp_u(0) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi_J^{-1} \bar{\partial}_{J \exp(-tJY)} u \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{2} \left(\bar{\partial}_{J \exp(-tJY)} u + J \circ \bar{\partial}_{J \exp(-tJY)} u \circ j \right) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{4} \left(du + \tilde{J}_t \circ du \circ j + J(du + \tilde{J}_t \circ du \circ j) \circ j \right) \text{ où } \tilde{J}_t = J \exp(-tJY) \\ &= \frac{1}{4} \left(-J^2 Y \circ du \circ j + J(-J^2 Y \circ du \circ j) \circ j \right) \\ &= \frac{1}{4} (JYJ \circ du \circ j - JY \circ du) \text{ car } JY = -YJ \\ &= -\frac{JY}{4} (du - J \circ du \circ j) = -\frac{1}{2} JY \partial_J u \end{aligned}$$

On a donc l'identité

$$D_{(u,J)}(\xi, Y) = D_u \xi - \frac{1}{2} JY \partial_J u$$

L'opérateur D_u est Fredholm et en particulier d'image fermée. Par le théorème du graphe fermé on sait que D_u est continu comme $Y \mapsto \frac{1}{2} JY \partial_J u$. La somme de deux opérateurs continus est bien sûr continue et donc cette somme a image fermée. Pour montrer que $D_{(u,J)}$ est surjectif, il suffit donc de montrer que son image est dense. La preuve est séparée en deux cas : $k = 1$ et $k > 1$ pour k le paramètre $\mathcal{E}^{k,p}$. On fait usage d'une version géométrique du théorème de Hahn-Banach qu'on cite ici.

Théorème 1.3.2 (Hahn-Banach). Soit M un sous-espace d'un espace vectoriel topologique X et $K \subset X$ un sous-ensemble convexe ouvert tel que $M \cap K = \emptyset$, alors il existe un hyperplan fermé $N \subset X$ contenant M et tel que $K \cap N = \emptyset$.

(cas $k = 1$) Supposons au contraire que l'image n'est pas dense. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe pour un q tel que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ un $\eta \in L^q(\Lambda^{0,1} \otimes_{JU} {}^*TM)$ tel que $\int_{\Sigma} \langle \eta, D\mathcal{F}_{(u,J)}(\xi, Y) \rangle dvol_{\Sigma} = 0$. Puisqu'on peut prendre

ξ ou Y nul, cela implique

$$\int_{\Sigma} \langle \eta, D_u \xi \rangle dvol_{\Sigma} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} \langle \eta, Y \circ du \circ j \rangle dvol_{\Sigma} = 0$$

Il suit alors du lemme 1.3.2 que

$$\eta \in W^{1,p}(\Sigma, \bigwedge^{0,1} \otimes_J u^* TM)$$

On sait que pour les courbes simples l'ensemble des points injectifs est ouvert et dense (remarquons qu'on fait ici un usage critique de l'hypothèse des courbes simples). On montre que $\eta(z_0) = 0$ pour les points injectifs. Supposons au contraire que $\eta(z_0) \neq 0$, alors par le lemme 1.3.3 il existe un Y_0 tel que $Y_0(z_0) \circ du(z_0) \circ j(z_0) = \eta(z_0)$ (ce n'est pas une section de $\text{End}(TM, J, \omega)$, seulement un endomorphisme de la fibre de TM au-dessus de z_0), on a donc

$$\langle \eta(z_0), Y_0(z_0) \circ du(z_0) \circ j(z_0) \rangle > 0$$

On étend maintenant Y_0 à une section $Y \in C^l(M, \text{End}(TM, J, \omega))$ et telle que $Y(u(z_0)) = Y_0$. L'idée maintenant est d'utiliser l'injectivité de u à z_0 et une fonction cutoff β supportée dans un voisinage de $u(z_0)$ qui produira un vecteur βY d'intégrale $\int_{\Sigma} \langle \eta, \beta Y du j \rangle dvol_{\Sigma}$ non-nulle, une contradiction. En effet, puisque $\langle \eta(z_0), Y_0(z_0) \circ du(z_0) \circ j(z_0) \rangle > 0$ il y a un voisinage de $z_0 \in \Sigma$ sur lequel $\langle \eta, Y \circ du \circ j \rangle$ ne s'annule pas, soit $V_0 \subset \Sigma$ cet ouvert. En choisissant possiblement V_0 plus petit, par l'injectivité de u en z_0 on sait qu'il existe un $U_0 \subset M$ tel que $u(\Sigma \setminus V_0) \cap U_0 = \emptyset$. Soit $\beta : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction cutoff supportée par U_0 et telle que $\beta(z_0) = 1$. On a alors que l'intégrale $\int_{\Sigma} \langle \eta, \beta Y du j \rangle dvol_{\Sigma} > 0$, la contradiction recherchée. On conclut que η est nulle sur les points injectifs, mais puisque ceux-ci sont denses, par continuité on a donc $\eta \equiv 0$, ce qui contredit son choix par Hahn-Banach et qui fait que l'image de $d\mathcal{F}_{(u,J)}$ est dense pour les paires (u, J) telles que u est J -holomorphe et donc est aussi surjective, ce qui complète la démonstration pour $k = 1$.

(cas $k > 1$) La preuve suit d'une application de la régularité elliptique qu'on cite ici.

Théorème 1.3.3 (Régularité elliptique). Soit D un opérateur de Cauchy-Riemann linéaire de classe $W^{l-1,p}$ où l est un entier positif et $p > 1$ tel que $lp > 2$. Soit $1 \leq k \leq l$ et $q, r > 1$ tels que $2/r - 1 \leq k - 2/q \leq l - 2/p$ alors si $\xi \in L^r(\Sigma, E)$ et $\eta \in W^{k-1,q}(\bigwedge^{0,1} T^* \Sigma \otimes_{\mathbf{C}} E)$ et $D\xi = \eta$ alors $\xi \in W^{k,q}(\Sigma, E)$

Soit $\eta \in W^{k-1,p}(\Sigma, \bigwedge^{(0,1)} \otimes_J u^* TM)$, par le cas $k = 1$, on sait qu'il existe un (ξ, Y) avec ξ une section de type $W^{1,p}$ tel que $d\mathcal{F}_{(u,J)}(\xi, Y) = \eta$, mais alors par

l'expression dérivée plus haut de $d\mathcal{F}$ on a l'identité

$$D_u\xi = \eta - \frac{1}{2}JY\partial_Ju$$

et donc $D_u\xi \in W^{k-1,p}$ car η l'est et $JY\partial_Ju$ l'est si $l > k$. On applique le théorème de régularité elliptique pour montrer que $\xi \in W^{k,p}(\Sigma, u^*TM)$. Par le théorème des fonctions implicites dans le cas des variétés de Banach, on conclut que $\bar{\partial}_J^{-1}(0) = \mathcal{M}^*(\Sigma, A, \mathcal{J}^l)$ est une variété de Banach.

On montre maintenant que l'espace de structures presque complexes $J_{reg}(A, \Sigma)$ est de Baire. La preuve pour le cas où J est C^l pour $l < \infty$ découle des résultats qu'on vient de montrer pour l'espace de module universel et le cas $l = \infty$ est une conséquence de ce résultat intermédiaire. La preuve pour $l < \infty$ qui s'avère une conséquence directe de la propriété suivante des opérateurs de Fredholm.

Lemme 1.3.4. Soit $D : X \rightarrow Y$ un opérateur de Fredholm et $L : Z \rightarrow Y$ un opérateur linéaire continu tel que $D \oplus L : X \oplus Z \rightarrow Y$ est surjective, alors la projection $\Pi : \ker(D \oplus L) \rightarrow Z$ est aussi un opérateur de Fredholm tel que $\ker \Pi \cong \ker D$ et $\text{coker } \Pi \cong \text{coker } D$. En particulier $\text{indice } \Pi = \text{indice } D$.

preuve: Le premier isomorphisme est obtenu de $\ker \Pi \cong \ker(D \oplus 0)$, le second suit du fait que $\text{im } \Pi = L^{-1}(\text{im } D)$. ■

On observe d'abord que le fibré tangent à l'espace de module universel a pour fibre $T\mathcal{M}_{(u,J)}^*(A, \Sigma, \mathcal{J}^l) \subset W^{1,p}(\Sigma, u^*TM) \times C^l(M, \text{End}(TM, J, \omega))$ le noyau de l'application $D_{(u,J)}$. On applique ensuite le résultat précédent aux opérateurs $D = D_u$, $L = \frac{1}{2}(Y \circ du \circ j)$, $D \oplus L = D_{(u,J)}$ et $\Pi = d\pi(u, J) : T\mathcal{M}_{(u,J)}^*(A, \Sigma, \mathcal{J}^l) \rightarrow T_J\mathcal{J}^l$ avec la projection $d\pi(u, J)$ l'application tangente à la projection $\mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{J}^l$. On conclut donc que $d\pi(u, J)$ est Fredholm de même indice que D_u et que $d\pi(u, J)$ est surjectif pour les mêmes paires (u, J) que D_u , ce qui revient à dire que les J réguliers sont précisément les valeurs régulières de π . Une application de la version pour espaces de Banach du théorème de Sard nous assure finalement que \mathcal{J}_{reg}^l est de Baire. Le résultat final est obtenu en produisant une suite de termes C^l avec $l \rightarrow \infty$ approximant une structures $J \in \mathcal{J}$. Les détails sont peu illuminants et ne seront pas reproduits ici.

On prouve finalement que $\mathcal{M}^*(A, \Sigma, J)$ est une variété de dimension de la dimension annoncée. On sait déjà que pour un $J \in \mathcal{J}_{reg}$ régulier (et maintenant lisse), $\bar{\partial}_J^{-1}(0) \subset \mathcal{B}^{k,p}$ est une variété de dimension $n(2-2g) + 2c_1(A)$ par les théorèmes des fonctions implicites et de Riemann-Roch. L'idée de la démonstration

est simplement d'utiliser les cartes données par ces résultats et d'observer qu'elles donnent aussi des cartes pour le cas lisse. On démontré jusqu'à maintenant que pour une courbe J -holomorphe u , l'application \mathcal{F}_u qui on le rappelle est définie par $\Phi_u(\xi)^{-1}\bar{\partial}_J \exp_u(\xi)$ est surjective et d'indice $n(2 - 2g) + 2c_1(A)$ et donc c'est aussi la dimension de $\mathcal{F}_u^{-1}(0)$ dans la fibre tangente à u dans $\mathcal{B}^{k,p}$. On peut donc paramétriser un voisinage de u par l'exponentielle $\xi \mapsto \exp_u(\xi)$ ce qui donne une sous-variété lisse N de $\mathcal{B}^{k,p}$. Puisque toutes les courbes dans N sont lisses par régularité elliptique, cette sous-variété est précisément $\mathcal{M}^*(A, \Sigma, J)$.

Bien que la théorie présentée jusqu'ici se porte déjà à plusieurs applications, dans d'autres cas, comme pour la définition des invariants de Gromov-Witten, il est nécessaire d'avoir la compacité de l'espace de module et si celui-ci n'est pas compacte, de trouver une compactification appropriée. C'est ce qui est présenté dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

COMPACTITÉ ET INVARIANTS DE GROMOV-WITTEN

2.1. COMPACTITÉ

En théorie de Morse certaines suites de lignes de flot d'une fonction de Morse convergent vers des lignes de flot brisées et l'ajout de ces trajectoires à l'espace de module des lignes de flot (en utilisant une topologie appropriée) le compactifie. La situation est semblable pour les espaces de module de courbes pseudo-holomorphes. Si une suite de courbes $u_k : \Sigma \rightarrow M$ est d'énergie uniformément bornée et que la norme L^∞ des dérivées de ces courbes diverge, la suite de courbes ne peut pas converger vers une courbe, mais convergera vers une courbe dite stable. On pense à celles-ci comme à la surface Σ à laquelle on a attaché un nombre fini de sphères ou disques à frontière lagrangienne. On dit que les sphères ou disques ainsi ajoutées sont des bulles apparues par concentration d'énergie en un point. Il est important aussi de comprendre que puisque les groupes $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ et $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ (respectivement, les groupes d'automorphismes de la sphère et du disque) sont non compactes, les espaces qu'on peut espérer compactifier sont les espaces de courbes non paramétrées, c'est-à-dire de la forme $\tilde{\mathcal{M}}/G$ pour $\tilde{\mathcal{M}}$ un espace de fonctions $\Sigma \rightarrow M$ et $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ ou $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Avant de présenter le phénomène de formation de bulles en détail, il est instructif de considérer un cas où il ne se produit pas.

Théorème 2.1.1. Soit (M, J) une variété presque complexe compacte et $L \subset M$ une sous-variété totalement réelle ($TL \cap JTL = \emptyset$) et $(\Sigma, j_\Sigma, dvol_\Sigma)$ une surface riemannienne compacte. Soit $\Omega_k \subset \Sigma$ une suite croissante d'ouverts qui recouvre Σ et $u_k : (\Omega_k, \Omega_k \cap \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$ une suite de courbes J -holomorphes telles que

$$\sup_k \|du_k\|_{L^\infty(K)} < \infty$$

pour tout compact $K \in \Sigma$. Alors u_k a une sous-suite convergent uniformément avec toutes ses dérivées sur les compacts de Σ à une courbe J -holomorphe $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$.

La preuve est trouvée en appendice de McDuff et Salamon [4]. Une application directe du théorème sur l'énergie minimale des sphères et disques à frontière lagrangienne 1.2.3 nous donne aussi la compacité de certains espaces de module de courbes d'énergie minimale, comme on le verra plus bas.

Maintenant si on cherche une suite de courbes J -holomorphes sans sous-suites convergentes, il faut donc supposer $\sup_k \|du_k\|_{L^\infty(K)} = \infty$. On veut aussi se restreindre aux courbes d'aire finie, donc $\sup_k E(u_k) < \infty$, car on s'intéresse aux espaces de module de courbes représentant une classe d'homologie fixée et l'énergie est constante à l'intérieur d'un tel espace. Afin d'illustrer le phénomène, on a besoin du lemme suivant. On rappelle qu'un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ entre deux variétés riemanniennes est dite **conforme** si $\psi^* dvol_N = \lambda^2 dvol_M$ pour λ^2 une fonction à valeurs réelles positives et non-nulles.

Lemme 2.1.1 (Invariance conforme de l'énergie). Soit $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ une transformation conforme et $u : \Sigma \rightarrow M$ une courbe J -holomorphe, alors u et $u \circ \phi$ ont la même énergie.

preuve: Le phénomène est local, alors supposons que $u : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^n$ et $\phi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ et alors la conformalité du difféomorphisme ϕ est équivalente à ce qu'elle soit analytique. On a alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}} |du|_J^2 dvol &= \int_{\mathbf{C}} \phi^*(|du|_J^2 dvol) = \int_{\mathbf{C}} (|du|_J^2 \circ \phi) \phi^* dvol = \int_{\mathbf{C}} (|du|_J^2 \circ \phi) |d\phi|^2 dvol \\ &= \int_{\mathbf{C}} |du|_J^2 |d\phi|^2 dvol = \int_{\mathbf{C}} |d(u \circ \phi)|_J^2 dvol \end{aligned}$$

■

Pour constater le phénomène du bubbling, on se place dans une carte autour d'un point où la norme de la dérivée de la suite de courbes diverge et on dilate ces cartes suffisamment rapidement pour que la dérivée de la nouvelle courbe ne diverge plus en ce point et on applique finalement le théorème de la continuation unique pour déduire l'apparition d'une sphère J -holomorphe. On présente maintenant le raisonnement complet. Soit les suites $\tilde{z}_k \in \Sigma$ et $c_k \in \mathbf{R}$ telles que $\|du_k\|_{L^\infty(\Sigma)} = |du_k(\tilde{z}_k)|$. On peut supposer que \tilde{z}_k converge à un point \tilde{z}_0 . Soit $\phi : U \rightarrow \Sigma$ une carte conforme $U \subset \mathbf{C}$ telle que $\phi(0) = \tilde{z}_0$. Soit la suite $z_k = \phi^{-1}(\tilde{z}_k)$ (on peut supposer que $\tilde{z}_k \in \phi(U)$.) Soit ε tel que $B_\varepsilon(z_k) \subset U$ pour tout k . On définit les transformations conformes $\psi_k : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ comme $z \mapsto z_k + \frac{z}{c_k}$

qui font en sorte que $v_k = u_k \circ \phi \circ \psi_k : B_{\varepsilon c_k} \rightarrow M$ a différentielle bornée. En effet en normalisant ϕ de telle sorte que $|d\phi(0)| = 1$ on s'assure que

$$\begin{aligned} \|dv_k\|_{L^\infty(B_{\varepsilon c_k})} &= |dv_k(0)| = |d(u_k \circ \phi \circ \psi_k)(0)| \\ &= |du_k(\tilde{z}_k)| |d\phi(z_k)| |d\psi_k(0)| = |d\phi(z_k)| \frac{c_k}{c_k} \end{aligned}$$

Si on choisit ϕ de telle sorte que $1/2 \leq |d\phi| \leq 2$, (cette condition peut être satisfaite en dilatant la source et en se restreignant à un plus petit domaine) on s'assure que la norme L^∞ des dv_k est bornée. On observe de plus que par invariance conforme de l'énergie $E(v_k) = E(u_k|_{B_\varepsilon}) \leq E(u_k)$ et donc le théorème 2.1.1 nous assure que la suite converge à une courbe J -holomorphe $v : \mathbf{C} \rightarrow M$. Par notre choix de ϕ on est assuré que la courbe v est d'énergie non-nulle. L'invariance conforme nous assure que $\mathbf{C} \rightarrow M \quad z \mapsto v(1/z)$ a énergie finie et donc le théorème de prolongement de Riemann 1.2.2 nous assure que v définit une courbe $S^2 \rightarrow M$. On dit que dans cette situation il y a eu «formation de bulle par accumulation d'énergie» en z_0 . Cette formulation intuitive exprime le fait que l'énergie de la courbe limite restreinte à un voisinage arbitrairement petit de $z_0 \in \Sigma$ est bornée inférieurement par l'énergie de la bulle. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ on a l'inégalité

$$E(v) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(u_k|_{B_\varepsilon(z_0)})$$

Cette inégalité est obtenue en fixant $R > 0$ et en observant que

$$\begin{aligned} E(v|_{B_R}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} E(v_k|_{B_R}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k|_{B_{R/c_k}(z_k)}) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k|_{B_\varepsilon(z_0)}) \quad \text{car } R/c_k \rightarrow 0 \text{ et éventuellement } B_{R/c_k}(z_k) \subset B_\varepsilon(z_0) \end{aligned}$$

Finalement, puisque cela tient pour tout R , l'inégalité recherchée suit en prenant la limite $R \rightarrow \infty$.

Remarque 2.1.1. Puisque la suite u_k est d'énergie bornée, et que les bulles formées sont d'énergie non-nulle, le théorème sur l'énergie minimale des sphères 1.2.3 nous assure que seulement un nombre fini de bulles peuvent être créées à la limite.

Il est maintenant facile de voir que dans le cas de courbes d'énergie minimale, aucune bulle ne peut se former.

Théorème 2.1.2. Soit (M, ω) une variété symplectique, J une structure ω -compatible et $A \in H_2(M)$ une classe sphérique telle que $\langle [\omega], A \rangle = \hbar$, alors l'espace de module $\mathcal{M}(A, S^2, J) / \text{PSL}(2, \mathbf{C})$ est compacte.

preuve: Soit $u_k : S^2 \rightarrow M$ une suite de courbes J -holomorphes (la preuve est identique pour les disques). Par le théorème de prolongement de Riemann, on peut considérer une courbe sur une sphère ou un disque comme une courbe sur \mathbf{C} ou \mathbf{H} , le demi-plan supérieur. En effet, si u est d'énergie finie, par invariance conforme la composition de u avec $z \mapsto 1/z$ doit aussi être d'énergie finie et peut alors être prolongée à une fonction lisse respectivement de la sphère ou du disque. On considère donc les courbes $v_k = u_k|_{\mathbf{C}}$. Par une reparamétrisation conforme appropriée (du même type que celles utilisées dans la présentation du phénomène de bubbling) on peut normaliser la norme L^∞ des courbes v_k de telle sorte que $|dv_k|_{L^\infty} = 1$. Par le théorème 2.1.1 on sait que v_k a une sous-suite qui converge uniformément à une courbe v sur les compacts et puisque l'énergie est finie on peut en fait prolonger v à une courbe sur S^2 . S'il y a eu formation de bulle au point ∞ , on sait déjà par l'inégalité 2.1 que la bulle a énergie non-nulle e et que la somme l'énergie de la bulle et de v est $e + E(v) = \hbar$ par hypothèse sur A , une contradiction. Aucune bulle est formée et v est la limite de v_k . ■

Une analyse du phénomène adapté au cas des surfaces à bord dans une lagrangienne révèle que l'accumulation d'énergie à un point du bord du disque donne lieu à la formation de bulles en disques à bord dans la même lagrangienne.

Une dernière remarque qui mérite d'être faite sur le phénomène d'apparition de bulles est que «les bulles sont connectées», c'est-à-dire que s'il y a formation de bulle, il est impossible que l'image de la bulle soit disjointe des autres composantes de la courbe. Cette idée intuitive est rendue précise dans les propositions suivantes.

Proposition 2.1.1. Soit (M, ω) une variété symplectique compacte, $J_k \in \mathcal{J}_{reg}(M, \omega)$ une suite de structures presque complexes ω -compatibles sur M convergent à J dans la topologie C^∞ , $u_k : B_r \rightarrow M$ une suite de courbes J_k -holomorphes sur le disque ouvert de rayon r centré en 0 et une courbe J -holomorphe $u : R_r \rightarrow M$ satisfaisant aux hypothèses suivantes :

- (a) u_k C^∞ -converge sur tout compacts du complément de 0.
- (b) Il y a accumulation d'énergie en 0, i.e. la limite suivante existe et est non-nulle

$$E_0 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k|_{B_\varepsilon})$$

Alors il existe une sous-suite u_k , un ensemble fini $\{p_1, \dots, p_m\} \subset S^2$, une suite $\phi_k \in \text{PSL}(2, \mathbf{C})$ qui convergent à la fonction constante 0 sur tout les compacts de $S^2 \setminus \infty$ et telle que les fonctions $v_k := u_k \circ \phi_k$ satisfont les conditions suivantes :

(1) la suite v_k C^∞ -converge à une courbe $v : S^2 \rightarrow M$ sur tout les compacts du complément de $\{p_1, \dots, p_m\}$.

(2) les limites suivantes existent et sont non-nulles

$$E_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} E(v_k|_{B_\varepsilon(p_i)})$$

(3) les énergies E_i satisfont

$$E(v) + \sum E_i = E_0$$

(4) les courbes u et v sont telles que $u(0) = v(\infty)$

Remarque 2.1.2. Le dernier théorème a une formulation un peu opaque, de manière plus intuitive la condition que E_0 soit non-nulle est posée pour qu'une bulle se forme en 0. Le contenu du théorème est qu'en général, v n'est pas la seule bulle formée et qu'il arrivera, lorsque les E_i sont non nuls que d'autres bulles se formeront sur v . De plus le fait que $u(0) = v(\infty)$ force que les bulles s'assemblent en une sorte d'arbre ayant un nombre fini de ramifications à chaque étape. Dans la section suivante, cette propriété est utilisée pour développer un langage qui permettra de traiter les suites de courbes de manière plus cohérente.

2.2. COURBES STABLES

La théorie qui est présentée dans cette section est la continuation des résultats présentés sur les suites de courbes et le bubbling. L'objectif est de rendre précise la notion de courbe limite lorsqu'on est en présence de bubbling ce qui mènera au développement des concepts de courbes stables, de convergence de Gromov et finalement à la compactification des espaces de courbes pseudo-holomorphes simples.

Définition 2.2.1. Un **arbre** est un graphe connexe sans cycles. On représente un arbre par une paire (T, E) avec T l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes qu'on comprend aussi comme une relation $\alpha E \beta$ sur deux sommets $\alpha, \beta \in T$. Une **indexation** Λ pour T est une fonction

$$\{1, \dots, n\} = I \rightarrow T, \quad i \mapsto \alpha_i$$

Un arbre indexé est un triple (T, E, Λ) .

Définition 2.2.2. Soit (M, ω) compacte et J ω -dominée et $n \geq 0$, on appelle une **courbe stable** de genre 0 dans M avec n points marqués modelée sur l'arbre (T, E, Λ) un triple

$$(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\{u_\alpha\}_{\alpha \in T}, \{z_{\alpha\beta}\}, \{\alpha_i, z_i\}_{1 \leq i \leq n})$$

formé des éléments suivants

- (1) u_α une sphère J -holomorphes pour chaque $\alpha \in T$,
- (2) un ensemble de **points nodaux** consistant d'un $z_{\alpha\beta} \in S^2$ pour chaque α et β tels que $\alpha E \beta$ correspondant aux points d'attachement de deux sphères u_α et u_β , c'est-à-dire que les courbes u_α sont sujettes à la condition

$$u_{(z_{\alpha\beta})} = u_\beta(z_{\beta\alpha})$$

Pour un α fixé $z_{\alpha\beta} \neq z_{\alpha\gamma}$ pour $\beta \neq \gamma$.

- (3) un ensemble de **points marqués** consistant d'un $z_i \in S^2$ pour chaque indice $i \in \Lambda$ qui sont supposés distincts des points d'attachement $z_{\alpha_i\beta}$ de u_{α_i} .
- (4) si u_α est une courbe constante, elle doit aussi satisfaire la condition de **stabilité** qui dit que le total de ses points nodaux et marqués doit être ≥ 3 .

Pour la sphère α_i , l'ensemble des points nodaux $\{z_i\}$ est noté Z_{α_i} .

Remarque 2.2.1. La condition de stabilité est nécessaire pour rendre fini le groupe de reparamétrisation d'une courbe stable donnée, puisque les éléments de $PSL(2, \mathbf{C})$ sont déterminés par leur action sur 3 points.

D'une courbe stable (\mathbf{u}, \mathbf{z}) on peut définir une fonction $\Sigma(\mathbf{u}) \rightarrow M$ sur la variété singulière $\Sigma(\mathbf{u}) = (T \times S^2)/z_{\alpha\beta} \sim z_{\beta\alpha}$ qui revient à identifier les deux points nodaux correspondants sur deux sphères différentes. On définit maintenant l'ensemble de courbes stables représentant une classe d'homologie donnée $A \in H_2^S(M)$ qu'on note

$$SC_{0,n}(M, A, J) := \{(\mathbf{u}, \mathbf{z}) : A = \sum_{\alpha \in T} u_{\alpha*}[S^2]\}$$

Définition 2.2.3. Deux courbes stables (\mathbf{u}, \mathbf{z}) et $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{z}})$ modelées sur les arbres indicés (T, E, Λ) et $(\bar{T}, \bar{E}, \bar{\Lambda})$ seront dites **équivalentes**, qu'on note $(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \sim (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{z}})$, s'il existe un isomorphisme d'arbre $f : T \rightarrow \bar{T}$ et une fonction

$$\phi : T \rightarrow PSL(2, \mathbf{C}), \quad \alpha \mapsto \phi_\alpha$$

qui sont tels que

$$\bar{u}_{f(\alpha)} \circ \phi_\alpha = u_\alpha, \quad \bar{z}_{f(\alpha)f(\beta)} = \phi_\alpha(z_{\alpha\beta}), \quad \bar{z}_i = \phi_{\alpha_i}(z_i)$$

Les paires (f, ϕ) forment le groupe G_T qui agit sur l'ensemble des courbes modélées sur l'arbre T .

Remarque 2.2.2. Le groupe G_T est en fait le produit de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})^{\times |T|}$ avec le groupe d'isomorphismes d'arbres de T et a donc dimension $6|T| = 6(e(T) + 1)$.

On définit ensuite l'espace

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(A, J) = \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(M, A, J) := SC_{0,n}/\sim$$

obtenu comme le quotient de $SC_{0,n}(M, A, J)$ par la relation d'équivalence de courbes stables décrite précédemment. La notation $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(M, A, J)$ est suggestive, cet espace des courbes stables muni de la topologie appropriée sera en effet la compactification de l'espace $\mathcal{M}_{0,n}(M, A, J)$.

Il est important de remarquer que $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(A, J)$ peut être obtenu comme une réunion des classes de courbes stables modélées sur T pour toutes les classes d'isomorphismes d'arbres T . Plus précisément, soit $SC_{0,T}(A, J) \subset SC_{0,n}(A, J)$ la sous-catégorie composée des courbes stables modélées sur l'arbre n -indicé T qui a pour morphismes les isomorphismes de courbes stables. On peut définir les espaces de module

$$\mathcal{M}_{0,T}(A, J) := SC_{0,T}(A, J)/G_T$$

et alors l'espace des n -courbes stables est alors la réunion

$$\mathcal{M}_{0,n}(A, J) = \bigcup_{|T|=n} \mathcal{M}_{0,T}(A, J)$$

Les espaces $\mathcal{M}_{0,T}(A, J)$ sont informellement appelés les **strates** de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(A, J)$ et $\mathcal{M}_{0,T_n}(A, J)$ la **strate supérieure** où T_n est l'arbre n -indicé à un sommet et aucune arête. On reconnaît facilement qu'on a l'identité

$$\mathcal{M}_{0,n}(A, J) = \mathcal{M}_{0,T_n}(A, J)$$

Bien qu'en général les espaces $\mathcal{M}_{0,T}(A, J)$ ne sont pas des variétés, comme on le verra plus en détail dans la prochaine section, si on se restreint aux courbes stables simples, alors les strates sont des variétés et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(A, J)$ est un espace stratifié en bonne et due forme. On en rappelle la définition.

Définition 2.2.4. La définition d'une stratification est récursive sur la dimension de X . Un espace stratifié de dimension 0 est un ensemble de points isolés et de dimension -1 est vide. Une stratification de X est la donnée d'une filtration par des sous-espaces fermés

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

telle que pour tout $x \in X_i \setminus X_{i-1}$ il existe un voisinage U de x dans X muni d'un difféomorphisme

$$U \cong \mathbf{R}^i \times CL$$

où L est un espace stratifié de dimension $n - i - 1$ et CL est le cône sur L .

Avant de pouvoir réaliser l'espace des courbes stables modelées sur les arbres n -indicés comme la compactification de l'espace des courbes stables à n points marqués, il faut encore le munir de la bonne topologie, c'est le sujet de la prochaine section.

2.3. CONVERGENCE, TOPOLOGIE ET COMPACTITÉ DE GROMOV

Pour définir la convergence de Gromov on aura besoin de la notation suivante. Soit T un arbre et α et γ des sommets. On définit l'intervalle $[\alpha, \gamma] := \{\beta \in T : \alpha \leq \beta \leq \gamma\}$ c'est-à-dire le sous-arbre contenant les sommets intermédiaires entre α et γ . Pour deux sommets α et β partageant une arête, on définit maintenant $T_{\alpha\beta} := \{\gamma \in T : \beta \in [\alpha, \gamma]\}$, le sous-arbre maximal contenant β mais pas α . On note l'énergie de la composante $T_{\alpha\beta}$ par

$$m_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) := \sum_{\gamma \in T_{\alpha\beta}} E(u_\gamma)$$

Définition 2.3.1 (Convergence de Gromov). Soit une suite $J_k \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ qui C^∞ converge vers un J . Soit une suite de courbes stables avec n points marqués $(u_k, \mathbf{z}_k) \in SC_{0,n}(A, J)$. La suite (u_k, \mathbf{z}_k) sera dite **Gromov-convergente** vers une courbe stable $(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \in SC_{0,T}(A, J)$ modelée sur l'arbre T s'il existe une suite de reparamétrisations $\phi_k^\alpha \in \text{PSL}(2, \mathbf{C})$ qui satisfait aux conditions suivantes :

- (1) la suite $u_k^\alpha := u_k \circ \phi_k^\alpha$ est convergente uniformément sur les sous-ensembles compacts de $S^2 \setminus Z_\alpha$ où Z_α est l'ensemble des points nodaux de u_α .
- (2) $z^i = \lim_{k \rightarrow \infty} (\phi_k^{\alpha_i})^{-1}(z_k^i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$
- (3) pour tous les u_k^α et u_k^β tels que $\alpha E \beta$ on a

$$m_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k^\alpha|_{B_\varepsilon(z_{\alpha\beta})})$$

- (4) pour tous les ϕ_k^α et ϕ_k^β tels que $\alpha E \beta$ on a $\phi_k^{\alpha\beta} := (\phi_k^\alpha)^{-1} \circ \phi_k^\beta$ converge à $z_{\alpha\beta}$ uniformément sur les compacts de $S^2 \setminus z_{\beta\alpha}$

Cette définition mérite quelques clarifications pour être bien comprise. Les deux premières conditions se passent d'explications. La condition 3) force que

l'énergie accumulée au point $z_{\alpha\beta}$ est exactement l'énergie de la composante modélisée par $T_{\alpha\beta}$ dans la courbe stable (\mathbf{u}, \mathbf{z}) . La condition 4) est plus subtile, mais essentiellement exprime l'idée que puisque dans le domaine de u_k^α la norme $\|du_k^\alpha\|_{L^\infty}$ diverge aux points nodaux $z_{\alpha\beta}$, le rôle de $\phi_k^{\alpha\beta}$ est donc de dilater au voisinage de $z_{\alpha\beta}$ et de contracter au voisinage de $z_{\beta\alpha}$.

Un exemple instructif est celui où il y a formation d'une seule bulle. Si on voit la suite de courbes d'énergie bornée comme une suite de fonctions du plan (qu'on complète par le théorème de prolongement de Riemann à des fonctions de S^2) $u_k : \mathbf{C} \rightarrow M$ et si la norme $\|du_k\|_{L^\infty=k}$ diverge seulement en zéro, alors comme on a vu précédemment, si on précompose u_k par la dilatation $\phi_k^{\alpha\beta}$ définie par $z \mapsto z/k$, on obtient une suite de courbes $v_k = u_k \circ \phi_k^{\alpha\beta}$, et puisque les $\phi_k^{\alpha\beta}$ sont conformes, l'énergie reste bornée et on peut prolonger la limite v à S^2 . Dans ce contexte les points $z_{\alpha\beta}$ et $z_{\beta\alpha}$ sont respectivement 0 et ∞ et on voit que les fonctions $\phi_k^{\alpha\beta}$ satisfont bien la condition 4). On a finalement le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 (Compacité de Gromov). Soit J_k une suite dans $J_\tau(M, \omega)$ convergent vers J dans la topologie C^∞ . Soit $u_k : S^2 \rightarrow M$ une suite de sphères J_k -holomorphes avec n points marqués distincts \mathbf{z}_k telles que $\sup_k E(u_k) < \infty$, alors u_k a une sous-suite qui Gromov-converge vers une courbe stable et cette limite est unique à équivalence de courbes stables près.

Remarque 2.3.1. La définition de la convergence de Gromov s'étend bien sûr aux suites courbes stables modélisées sur les arbres T_k . Il est clair que le phénomène d'apparition de bulles entraîne que l'arbre limite T doit avoir un morphisme d'arbres surjectif $T \rightarrow T_k$ pour k suffisamment grand. Pour le reste, la définition est essentiellement la même et on obtient aussi un théorème de compacité équivalent.

L'étape suivante est de définir la topologie pour laquelle on peut espérer que les espaces $\overline{\mathcal{M}}(A, J)$ soient compacts.

Définition 2.3.2. La **topologie de Gromov** sur $\overline{\mathcal{M}}(A, J)$ est celle pour laquelle un sous-ensemble F est fermé ssi toutes les suites dans F sont Gromov-convergentes.

On peut montrer le théorème suivant

Théorème 2.3.2. Une suite dans $\overline{\mathcal{M}}(A, J)$ converge dans la topologie de Gromov ssi elle est convergente au sens de Gromov, $\overline{\mathcal{M}}(A, J)$ est compacte et métrisable

et l'application d'évaluation au i -eme point

$$ev_i : \overline{\mathcal{M}}(A, J) \rightarrow M$$

est continue.

2.4. COURBES STABLES SIMPLES ET INVARIANTS DE GROMOV-WITTEN

René Thom [6] a montré que les classes d'homologie singulière à coefficients entiers d'une variété ne peuvent pas toutes être représentées par les classes fondamentales de sous-variétés $N \hookrightarrow M$. L'idée d'un pseudocycle est de relâcher la condition sur le morphisme $N \rightarrow M$ en ne supposant plus qu'il est un plongement, mais en acceptant une classe plus large de fonctions lisses. Intuitivement, pour que la construction fonctionne, il faudra que le lieu singulier de la fonction ait dimension $\leq \dim N - 2$, car ainsi, l'homologie ne la «détectera pas». L'objectif de cette section est de voir que l'évaluation pour les courbes simples marquées est un pseudocycle. On verra d'abord que même si les limites de suites de courbes simples ne convergent pas nécessairement à une courbe simple (elle peut en fait converger à une courbe multiple ou à une courbe stable non-simple) on peut par contre compactifier $\mathcal{M}_{0,k}^*(A, J)$ seulement en utilisant des courbes stables simples. L'espace des courbes stables simples modelées sur l'arbre T et telles que $[u_\beta] = B_\beta$ et $B = \sum B_\beta$ est lui une variété de dimension $2n + 2c_1(B) + 2k - 2e(T) - 6$ et si la courbe stable (\mathbf{u}, \mathbf{z}) représente la classe A , le théorème 2.4.1 nous dit (sous certaines hypothèses sur A) qu'on peut trouver une courbe stable simple représentant les classes B_β et des entiers $m_\beta > 0$ tels que $A = \sum m_\beta B_\beta$. Le problème est maintenant que si $c_1(A) < 0$ alors rien ne nous garantit que $c_1(B) \leq c_1(A)$ et on ne peut pas conclure que la compactification de $\mathcal{M}_{0,k}^*(A, J)$ a la dimension requise pour en faire un pseudocycle (par exemple si $c_1(A) = -2$, $c_1(B) = -1$ et $m = 2$). Pour contourner ce problème on se restreindra à une classe de variétés symplectiques, les variétés semipositives, qui n'ont pas de classes sphériques avec nombre de Chern négatif. Dans ce contexte la frontière de la compactification de $\mathcal{M}_{0,k}^*(A, J)$ a bien une dimension de 2 plus basse et alors l'évaluation réalisera un pseudocycle.

On dit qu'un sous-ensemble $S \subset M$ a **dimension au plus** d si S est compris dans l'image d'une fonction lisse $W \rightarrow M$ avec W une variété lisse (pas nécessairement connexe) de dimension $\leq d$.

Définition 2.4.1. Un **pseudocycle de dimension d** est une fonction

$$f : V \rightarrow M$$

avec W orientée, de dimension d , telle que $\overline{f(V)}$ est compacte et l'ensemble limite

$$\Omega_f := \bigcap_{K \subset V} \overline{F(V \setminus K)} \quad \text{avec } K \text{ compacte}$$

est de dimension au plus d . On dira que deux pseudocycles $f_1 : V_1 \rightarrow M$ et $f_2 : V_2 \rightarrow M$ sont bordants s'il existe un cobordisme W entre V_1 et V_2 et une fonction lisse telle que $F|_{V_1} = f_1$ et $F|_{V_2} = f_2$.

On peut montrer que les classes de bordismes avec l'union disjointe comme opération forment un groupe isomorphe aux groupes d'homologie singulière de M . On peut ensuite retrouver la structure d'anneau de l'homologie en appliquant les résultats suivants.

Définition 2.4.2. Deux pseudocycles $e : U \rightarrow M$ et $f : V \rightarrow M$ sont dit **fortement transverses** si e et f sont transverses au sens habituel et de plus satisfont :

$$\Omega_e \cap \overline{f(V)} = \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{e(U)} \cap \Omega_f = \emptyset$$

Lemme 2.4.1. Si e et f sont des pseudocycles de dimensions complémentaires et sont fortement transverses, alors $e \cdot f$ le nombre d'intersection dépend seulement des classes de bordisme de e et f .

Définition 2.4.3. Une courbe stable $(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \in SC_{0,k}(A, J)$ modélée sur un arbre (T, E, Λ) est dite simple si les courbes u_α sont simples et $u_\alpha(S^2) \neq u_\beta(S^2)$ pour tout $\alpha \neq \beta$. L'utilité de la condition que les courbes doivent être distinctes deux à deux est clarifiée dans la preuve que ces espaces sont des variétés. On note $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J)$ l'ensemble de toutes les courbes stables simples modélées sur T et telles que $(u_\alpha)_*[S^2] = A_\alpha$. L'espace de module correspondant est le quotient de cet espace par le groupe d'isomorphismes de courbes stables G_T

$$\mathcal{M}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J) := \widetilde{\mathcal{M}}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J) / G_T$$

On aimerait maintenant montrer que l'évaluation pour les espaces de module de courbes simples est un pseudocycle, ce qui revient à montrer que puisque $\mu(A, k) := \dim \mathcal{M}_{0,k}^*(A, J) = 2n + 2c_1(A) + 2k - 6$ l'ensemble limite de ev doit être de dimension au plus $\mu(A, k) - 2$. Ce résultat s'appuie sur le fait que $\mathcal{M}_{0,k}^*(A, J)$ peut être compactifié par des espaces de courbes stables simples qui satisfont les

restrictions de dimensions nécessaires. Ce résultat découle des deux théorèmes suivants.

Théorème 2.4.1. Soit A une classe d'homologie sphérique et $(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \in SC_{0,k}(A, J)$ une courbe stable modelée sur T la représentant et telle que $[u_\alpha] = A_\alpha$, alors il existe une courbe stable simple $(\mathbf{u}', \mathbf{z}')$ modelée sur l'arbre T' et des classes sphériques de M $B_\beta = [u_\beta]$ avec $\beta \in T'$ tel que

$$\bigcup_{\beta \in T'} u_\beta(S^2) = \bigcup_{\alpha \in T} (u_\alpha(S^2))$$

$$\text{il y a des } m_\beta \in \mathbf{N} \text{ tels que } A = \sum_{\beta \in T'} m_\beta A'_\beta$$

$$\text{et } \text{ev}_i(\mathbf{u}', \mathbf{z}') = \text{ev}_i(\mathbf{u}, \mathbf{z})$$

Remarque 2.4.1. Dans la notation du dernier théorème, les courbes (\mathbf{u}, \mathbf{z}) et $(\mathbf{u}', \mathbf{z}')$ ne représentent pas les mêmes classes d'homologie, (\mathbf{u}, \mathbf{z}) représente $A = \sum A_\alpha$ et $(\mathbf{u}', \mathbf{z}')$ représente $B = \sum B_\beta$. De plus, si $(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (u, \mathbf{z})$ est une courbe multiple modelée sur un arbre à un seul sommet, alors $A = mB$ avec $m > 1$ le degré du recouvrement ramifié par lequel $u \rightarrow M$ se factorise.

Définition 2.4.4. Une structure ω -dominée $J \in \mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ est dite régulière pour l'arbre indicé (T, E, Λ) et les classes $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T}$ si la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann à u_α , D_{u_α} est surjective et si l'évaluation aux arêtes de T $\text{ev}^E : \mathcal{M}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J) \rightarrow M^E$ définie par (\mathbf{u}, \mathbf{z}) est transverse à la diagonale $\Delta^E := \{\{x_{\alpha\beta} \in M^E : x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}\}\}$. On note par $\mathcal{J}_{reg}^S(M, \omega)$ l'ensemble des J réguliers pour tous les arbres T et toutes les classes $\{A_\alpha\}$.

En adaptant les techniques de la preuve que l'espace de module des courbes simples est une variété de la bonne dimension, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.4.2. Pour tout arbre T et collection $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T}$ tels que $\sum A_\alpha = A$, on a

- (1) pour tout J régulier, l'espace de module $\mathcal{M}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J)$ est une variété orientée de dimension

$$\mu(A, T) := 2n + 2c_1(A) + 2k(T) - 6 - 2e(T)$$

$k(T)$ est le nombre de points marqués et $e(T)$ est le nombre d'arêtes de T .

- (2) l'ensemble $\mathcal{J}_{reg}^S(M, \omega)$ est de Baire dans \mathcal{J}

Cette preuve est de McDuff et Salamon [4].

preuve:(de (1)) Pour voir que l'espace de module a bien la dimension prétendue, il suffit de réaliser l'espace de module comme une préimage de Δ^E par l'évaluation. Remarquons d'abord que $\mathcal{M}^*(\{A_\alpha\})$ l'espace de module des courbes simples de la surface de Riemann $\Sigma = \bigsqcup_{\alpha \in T} S^2$ est une variété orientée de dimension $n\chi(\Sigma) + 2c_1(A) = n(2e(T) + 2) + 2c_1(A)$. Si $Z(T)$ est l'ensemble qui correspondra aux points nodaux et points marqués des courbes, qu'on définit comme

$$Z(T) := \{(\{z_{\alpha\beta}\}_{\alpha E\beta}, \{z_i\}_{i=1,\dots,k}) \in (S^2)^E \times (S^2)^k : z_{\alpha\beta} \neq z_i \text{ et } z_{\alpha\beta} \neq z_{\alpha\gamma}\}$$

et qu'on définit l'évaluation comme

$$\text{ev}^E : \mathcal{M}^*(\{A_\alpha\}, J) \times Z(T) \rightarrow M^E$$

Il est possible de montrer que ev^E est transverse à Δ^E . L'espace de fonctions d'intérêt est maintenant obtenu comme

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J) := \text{ev}^{-1}(\Delta^E)$$

Par régularité de J cet ensemble est une variété et est de dimension

$$\dim(\mathcal{M}^*(\{A_\alpha\}, J) \times Z(T)) - \text{codim}(\Delta^E)$$

mais $\dim(Z(T)) = 4e(T) + 2k(T)$ (chaque arête a 2 sommets) et $\dim(\Delta^E) = 2ne(T)$ et puisque $\dim(M^E) = 2n(2e(T))$ on a $\text{codim}(\Delta^E) = 2ne(T)$ on a donc la dimension

$$\dim(\widetilde{\mathcal{M}}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J)) = n(2e(T) + 2) + 2c_1(A) + 4e(T) + 2k(T) - 2ne(T)$$

On réalise ensuite l'espace de module comme le quotient de l'espace de fonctions par le groupe de reparamétrisation des courbes stables G_T

$$\mathcal{M}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J) = \widetilde{\mathcal{M}}_{0,T}^*(\{A_\alpha\}, J)/G_T$$

Mais G_T a dimension $6e(T) + 6$, ce qui complète la preuve de la première partie du théorème. ■

preuve:(de (2)) La seconde partie est une adaptation du cas pour les courbes simples prouvé précédemment. L'idée est qu'on considère l'espace Sobolev

$$\mathcal{B}^{k,p} = \{ \{u_\alpha\}_{\alpha \in T} \mid u_\alpha \in W^{k,p}(S^2, M), [u_\alpha] = A_\alpha \}$$

et le fibré $\mathcal{E}^{k-1,p} \rightarrow \mathcal{B}^{k,p}$ qui a pour fibres

$$\mathcal{E}_{\{u_\alpha\}, J}^{k-1,p} := \prod_{\alpha} \mathcal{E}_{u_\alpha, J}^{k-1,p}$$

La section qui à une courbe stable lui associe une forme anti- J -linéaire a la même linéarisation que la section étudiée dans la section 1.3.1 car on peut penser à

une courbe stable comme une courbe sur un nombre fini de sphères disjointes et donc cette linéarisation a toujours une image fermée. À nouveau on suppose que la linéarisation de $(u, J) \mapsto \bar{\partial}_J u$ n'est pas dense et par Hahn-Banach on peut choisir $\eta_\alpha \in L^q$ qui s'annule sur l'image de $D\mathcal{F}$ et on doit maintenant montrer que ces η_α sont nuls. En s'appuyant sur le théorème 1.2.1 on sait que si u_α est non-constante, alors $u_\alpha^{-1}(u_\beta(S^2))$ est un ensemble fini, donc il suffit d'appliquer le même argument que dans 1.3.1 à l'ensemble ouvert dense $Z(\alpha) \cup_{\beta \neq \alpha} u_\alpha^{-1}(u_\beta(S^2))$ pour conclure que les η_α sont tous nuls et que la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann est surjectif sur les paires (\mathbf{u}, J) telles que \mathbf{u} est J -holomorphe. Le reste de la preuve procède exactement comme dans le premier chapitre. ■

Remarque 2.4.2. Il est important de souligner que le théorème précédent s'applique seulement aux courbes fermées puisque le théorème 1.2.1 est un résultat sur les courbes fermées. Dans le cas des courbes à bord lagrangien, par exemple les disques, pour avoir que l'espace des courbes stables simples soit une variété on doit faire la supposition plus forte que les disques sont **totalemt disjoint** c'est-à-dire qu'aucun disque ne doit être contenu dans la réunion des autres. L'argument est alors applicable sans autres modifications.

Le théorème suivant est finalement tout ce qui nous manque pour définir les invariants de Gromov-Witten pour les courbes simples de genre 0.

Théorème 2.4.3. Soit (M, ω) une variété symplectique fermée et semipositive et soit $A \in H_2^S(M)$ une classe d'homologie telle que

$$\text{si } A = mB \text{ avec } m \in \mathbf{Z} \text{ et } c_1(B) = 0 \text{ alors } m = 1 \quad (2.4.1)$$

Soit $J \in \mathcal{J}_{reg}^S(M, A)$ alors l'évaluation

$$\text{ev} : \mathcal{M}_{0,k}^*(A, J) \rightarrow M^k$$

est un pseudocycle de dimension $2n + 2c_1(A) + 2k - 6$ et la classe de bordisme est indépendante de J .

preuve: On montre seulement que l'évaluation est un pseudocycle. La preuve est de McDuff et Salamon [4]. Le théorème de compacité de Gromov nous assure que l'ensemble limite Ω_{ev} est couvert par les ensembles $\text{ev}(\mathcal{M}_{0,T}(\{A_\alpha\}, J))$ et $\text{ev}(\mathcal{M}_{0,k}(A, J) \setminus \mathcal{M}_{0,k}^*(A, J))$ l'image des courbes multiples. Par le théorème 2.4.1 on sait que $\mathcal{M}_{0,T}(\{A_\alpha\}, J)$ sont couverts par les ensembles $\text{ev}(\mathcal{M}_{0,T}^*(\{B_\beta\}, J))$, l'image des courbes stables simples telles que $A = \sum m_\beta B_\beta$ et si $e(T) = 0$, on a $A = mB$ avec $m \geq 2$ (voir la remarque 2.4.1). On sait que par la condition de semipositivité $\mu(B, J) \leq \mu(A, J)$, donc si $e(T) > 0$, puisque l'espace de module

$\mathcal{M}_{0,T}^*(\{B_\beta\}, J)$ a dimension $\mu(B, J) - 2e(T)$ la condition de pseudocycle

$$\mu(B, J) - 2e(T) \leq \mu(A, J) - 2$$

est satisfaite. Dans le cas ou $e(T) = 0$, $A = mB$ avec $m \geq 2$ et la condition 2.4.1 forcent que $c_1(B) \neq 0$. De plus, on a bien sûr $c_1(A) = mc_1(B)$ et donc $2c_1(A) - 2c_1(B) = 2(m-1)c_1(B)$ est un entier ≥ 2 et donc l'espace des courbes multiples satisfait aussi la condition de pseudocycles. ■

On peut maintenant définir les invariants de Gromov-Witten

Définition 2.4.5. Soit M et A satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. Soient $X_1, \dots, X_k \in H_*(M) = H_*(M, \mathbf{Z})/Torsion$ des classes d'homologie telles que $\sum \deg(a_i) = \mu(A, k) = 2n + 2c_1(A) + 2k - 6$ avec $a_i = PD(X_i)$ leurs duaux de Poincaré. Soit l'application $ev_j : \mathcal{M}_{0,k}^*(A, J) \rightarrow M^k$, l'invariant de Gromov-Witten de genre 0 est défini ainsi

$$\begin{aligned} GW_{0,k}^A(X_1, \dots, X_r) &= \int_{\mathcal{M}_{0,k}^*(A, J)} ev_1^* a_1 \smile \dots \smile ev_k^* a_k \\ &:= ev \cdot PD(\pi_1^* a_1 \smile \dots \smile \pi_k^* a_k) \end{aligned}$$

Remarque 2.4.3. L'invariant ne dépend pas du choix de $J \in \mathcal{J}_{reg}^S(M, \omega)$ car par le théorème précédent, pour deux telles structures presque complexes, les pseudocycles obtenus sont bordants et le produit d'intersection dépend seulement de la classe de bordisme. Par la définition de GW , il est clair que cet invariant correspond à un compte orienté d'intersections du pseudocycle des courbes stables simples avec les cycles X_1, \dots, X_k .

Dans le cas où Σ est une surface à bord dans une sous-variété lagrangienne $L^n \subset M^{2n}$, on obtient un théorème de régularité équivalent à 1.3.1, mais alors la dimension de l'espace des courbes J -holomorphes à k points marqués sur le bord représentant une classe $A \in H_2(M, L)$ est de dimension

$$\dim(\mathcal{M}_k^*(A, D^2, J)) = n\chi(\Sigma) + \mu(A) + k$$

et on peut aussi compactifier ces espaces en leur ajoutant les espaces de courbes modélées sur un arbre k -indicé T et ceux-ci ont dimension

$$\dim(\mathcal{M}_T^*(\{A_\alpha\}, D^2, J)) = n\chi(\Sigma) + \mu(A) + k - e(T).$$

On aurait ensuite aimé définir les invariants de Gromov-Witten pour les lagrangiennes, mais comme l'apparition d'une bulle ne fait diminuer la dimension que de 1, l'argument qui montre que pour les variétés semi-positives l'évaluation sur

espace des courbes simples est un pseudocycle ne peut pas s'appliquer et donc l'évaluation ne correspondra pas en général à un cycle, mais seulement à une chaîne.

Cependant, il est clair que les espaces de module de disques de frontière lagrangienne contiennent beaucoup d'information topologique qu'il serait intéressant d'accéder. Le fait que le bubbling d'un disque diminue de 1 la dimension d'un espace de module suggère qu'une différentielle se cache dans la structure de disques d'une paire (M, L) et qu'il serait possible de l'étudier du point de vue de l'homologie. C'est ce point de vue qui est développé dans le chapitre 4 avec l'homologie quantique.

Chapitre 3

UNIRULING

Les variétés symplectiques ou sous-variétés lagrangiennes sont dites unirrégles si en chaque point passe une courbe pseudo-holomorphe. Nous verrons que pour une sous-variété lagrangienne, avoir suffisamment de disques holomorphes impose une forte rigidité sur la topologie. Ce point de vue et les résultats de cette section proviennent de Biran et Cornea [2].

Définition 3.0.6. Soit (M, ω) une variété symplectique et L une sous-variété lagrangienne. On dit que la paire (M, L) est (p, q) -unirrégulée d'ordre k si pour toute collection de p points distincts $P_i \in M \setminus L$ et de q points $Q_j \in L$ il existe un ensemble de Baire \mathcal{J} de structures presque complexes sur M tel que pour tout $J \in \mathcal{J}$ il y a un disque J -holomorphe non-constant $u : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, L)$ tel que $P_i \in u(\text{int}(D^2))$ et $Q_j \in u(\partial D^2)$ et $\mu(u) \leq k$.

En particulier, si $p = 0$ et $q = 1$ on dira simplement que L est unirrégulée et pareillement si $p = 1$ et $q = 0$ alors M est unirrégulée. C'est maintenant le cas des lagrangiennes qui nous intéresse. On verra que cette propriété est intéressante en soi, car elle impose une grande rigidité à L , mais elle est aussi utile à l'étude de certaines capacités symplectiques. On rappelle maintenant le théorème de non-tassement de Gromov.

Théorème 3.0.4 (Non-tassement). Soit $B^{2n}(r)$ la boule de dimension $2n$ et de rayon r munie de la forme symplectique canonique de \mathbf{C}^n et

$$Z^{2n}(R) := B^2(R) \times \mathbf{C}^{n-1}$$

un cylindre aussi muni de la forme canonique. S'il existe un plongement symplectique

$$B^{2n}(r) \hookrightarrow Z^{2n}(R)$$

alors $r \leq R$.

Une importante conséquence du théorème de non-tassement est qu'il permet de définir plusieurs invariants symplectiques numériques. Par le théorème de Darboux, chaque point d'une variété symplectique a un voisinage qui est symplectomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^{2n} muni de la forme symplectique canonique et donc le théorème de non-tassement impose une borne supérieure au rayon des boules qui peuvent être plongées dans la carte de Darboux. Cette borne n'est cependant pas globale, ce fait motive les définitions suivantes.

(1) Le **rayon de Gromov** d'une variété symplectique M est défini par

$$w_G(M) := \sup_{r>0} \{ \pi r^2 : \text{il y a un plongement symplectique de } B^{2n}(r) \text{ dans } M \}$$

(2) Le **rayon** d'une lagrangienne $L \subset M$ est

$$w(L) := \sup_{r>0} \left\{ \frac{\pi r^2}{2} : \text{il y a } B^{2n}(r) \rightarrow M \text{ plongement relatif à } L \right\}$$

où un plongement $f : B^{2n}(r) \rightarrow M$ relatif à L signifie que $f^{-1}(L) = B^{2n}(r) \cap \mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$.

(3) Le **nombre d'empilement symplectique mixte** est une généralisation des deux définitions précédentes. Soit un vecteur $v_{p,q} := (r_1, \dots, r_p, \rho_1, \dots, \rho_q)$, alors

$$w(M, L, v_{p,q}) := \sup_{\tau>0} \left\{ \sum \pi(\tau r_i)^2 + \frac{1}{2} \sum \pi(\tau \rho_j)^2 \right\}$$

Le lemme suivant de Biran et Cornea [2] donne beaucoup d'intérêt à la propriété d'uniréglage.

Lemme 3.0.2. Soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne monotone de constante de monotonie η . Si la paire (M, L) est (p, q) -uniréglée de type k , alors

$$w(M, L, v_{p,q}) \leq k\eta$$

On énonce maintenant une condition suffisante pour l'uniréglage.

Définition 3.0.7. Une sous-variété lagrangienne L est dite étroite si $HF(L) \cong 0$ et est dite large si $HF(L) \cong H_*(M, \mathbf{Z}_2) \otimes \Lambda$.

Les théorèmes suivants sont démontrés dans Biran et Cornea [2].

Théorème 3.0.5. Soit L une sous-variété lagrangienne monotone de dimension n d'une variété symplectique M . Supposons que $H_*(L, \mathbf{Z}_2)$ est engendré comme anneau par les sous-anneaux $H_k(L, \mathbf{Z}_2)$ avec $k \geq n-l$ pour un certain l . Si $N_L > l$, alors L est étroite ou large. Si $N_L > l+1$ alors L est large.

Exemple 3.0.1. Quelques exemples de variétés satisfaisant le critère du théorème précédent.

- L'homologie des tores $\mathbf{T}^n = (S^1)^{\times n}$ est engendré par $H_{n-1}(\mathbf{T}^n; \mathbf{Z}_2)$.
- L'homologie des surfaces orientables de genre ≥ 1 est engendrée par $H_1(\Sigma; \mathbf{Z}_2)$.
- L'homologie de $\mathbf{C}P^n$ est engendrée par le générateur de $H_{2n-2}(\mathbf{C}P^n)$.

Définition 3.0.8. On dit qu'une variété M est de point inversible si la classe d'homologie du point $[pt]$ dans $QH(M)$ est inversible pour le produit quantique. Il y a alors une classe $a_0 \in H_*(M; \mathbf{Z}_2)$ et $a_1 \in H_*(M; \mathbf{Z}_2) \otimes \mathbf{Z}_2[t]$ et un $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$[pt] * (a_0 + a_1 t) = [M] t^{\frac{k}{2C_M}}$$

où $C_M := \inf\{c_1(A) : A \in \pi_2(M), c_1(A) > 0\}$ est la classe de Chern minimale. L'entier k est unique et on dit alors que M est de point inversible à ordre k .

Exemple 3.0.2. $\mathbf{C}P^n$ est de point inversible, la preuve peut être trouvée dans l'introduction de McDuff et Salamon [4].

Théorème 3.0.6. Soit M une variété symplectique de point inversible à ordre k et L une sous-variété lagrangienne. Si L est large, alors L est uniréglée d'ordre $< k$.

Chapitre 4

HOMOLOGIE QUANTIQUE ET COMPLEXE DE PERLES

L'homologie quantique est une des nombreuses variations sur le thème du dénombrement des disques pseudo-holomorphes. L'idée est d'intégrer la structure de disques pseudo-holomorphes d'une variété symplectique ou d'une sous-variété Lagrangienne dans son complexe de Morse en considérant les lignes de flot d'une certaine fonction de Morse qui traversent des sphères J -holomorphes ou des disques dans le cas relatif. On nomme l'homologie de ce complexe l'homologie quantique et elle sera en fait isomorphe à l'homologie de Floer. On sait que l'homologie de Floer des orbites hamiltoniens est isomorphe à l'homologie singulière de la variété, mais que ce n'est en général pas le cas de l'homologie de Floer d'intersection lagrangienne. Cette asymétrie est en fait une manifestation du même phénomène qui fait qu'on peut définir des invariants de Gromov-Witten pour une variété symplectique semi-positive, mais que ce n'est pas possible, en utilisant le même argument, d'en définir pour une lagrangienne même monotone. La différence entre les deux situations est que lors de l'apparition d'une bulle dans le premier cas les espaces de module perdent 2 dimensions et une seule dans le second cas. Il faut comprendre par contre que bien que cette situation semble être un inconvénient, elle révèle en fait la richesse de ces structures et une fois qu'on s'est muni de l'homologie quantique ce qui semblait être un défaut devient un outil puissant d'étude des sous-variétés lagrangiennes.

Dans ce chapitre nous verrons donc les définitions de l'homologie quantique de variété symplectique et lagrangienne. Nous définissons ensuite une variante de l'homologie quantique pour les cobordismes lagrangiens ce qui nous permettra de produire une suite exacte longue d'homologie quantique relative à une certaine composante du bord du cobordisme. Ces outils permettent finalement de montrer que l'homologie des bouts d'un cobordisme sont isomorphes en tant que modules

sur $QH(M)$, l'homologie quantique de la variété ambiante. Les résultats présentés dans ce chapitre proviennent de Biran et Cornea [1].

4.1. COMPLEXE DE PERLES

Soit (M, ω) une variété symplectique et L une sous-variété Lagrangienne qu'on assume fermée. On suppose aussi L monotone ce qui signifie qu'il existe un $\rho > 0$ tel que

$$\omega(A) = \rho\mu(A) \text{ pour tout } A \in H_2^D(M, L)$$

avec $H_2^D(M, L)$ le groupe de 2-homologie sphérique et $\mu : H_2^D(M, L) \rightarrow \mathbf{R}$ l'indice de Maslov. En plus de la monotonie de L nous allons aussi exiger que l'indice de Maslov minimal N_L soit d'au moins 2 avec

$$N_L = \min\{\mu(A) > 0 : A \in H_2^D(M, L)\}$$

Remarque 4.1.1. L'hypothèse de monotonie dans le cas lagrangien tient le même rôle que celle de semipositivité dans le chapitre 2 et a entre autres pour effet que les espaces de disques ont la dimension appropriée à la définition du complexe de perles.

Définition 4.1.1. Le **complexe de perles** est défini ainsi : Soit le triplet (f, g, J) avec $f : L \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse, g une métrique Riemannienne sur L , J une structure presque complexe sur M qui est ω -dominée, Φ_s le flot de gradient négatif de f et $\Lambda = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent muni de la graduation telle que $\deg t = -N_L$. Ce choix du degré de t devient clair avec la définition de la différentielle du complexe de perles et sert à normaliser le degré de tous les termes qui apparaissent dans la différentielle. On définit le module suivant

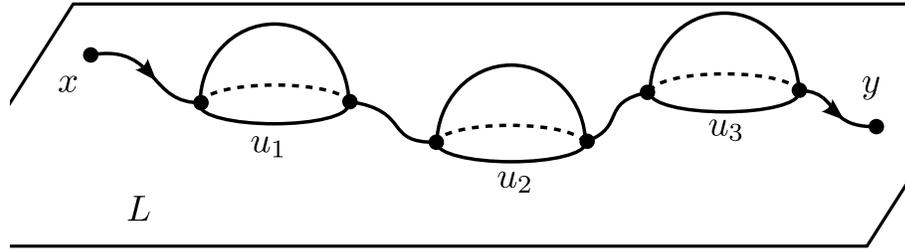
$$\mathcal{C}(f, g, J) = \mathbf{Z}_2\langle \text{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda$$

qui sera muni de la graduation $\deg(x \otimes p(t)) = \text{Ind}(x) - N_L \deg(p(t))$. La différentielle du complexe $\mathcal{C}(f, g, J)$ sera définie par un compte de lignes de flot rejoignant deux points critiques entrecoupées de disques J -holomorphes de bord dans L qu'on appelle des trajectoires perlées et dont l'espace de module est noté

$$\mathcal{P}_{\text{pri}}(x, y, \mathbf{A}, f, g, J)$$

Pour $x, y \in L$, $0 \neq A \in H_2^D(M, L)$ cet espace est composé des suites (u_1, \dots, u_N) telles que $u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est un disque J -holomorphe de bord dans L et tels qu'il existe une suite

$$-\infty < t_0 < 0 < t_1 < \dots < t_N < \infty \quad \text{telle que}$$

FIGURE 4.1. Une trajectoire perlée dans L

$$\Phi_{t_0}(u_1(-1)) = x, \quad \Phi_{t_i}(u_i(1)) = u_{i+1}(-1), \quad \Phi_{t_N}(u_N(1)) = y \quad \forall \quad i = 1, \dots, N$$

On exige aussi que la somme des classes d'homologie des disques u_i soit A et on identifiera toutes les trajectoires (u_1, \dots, u_N) et (u'_1, \dots, u'_N) telles qu'il existe des reparamétrisations $\sigma_i \in \text{Aut}(D) \quad \forall i = 1, \dots, N$ fixant 1 et -1 et telles que $u'_i = u_i \circ \sigma_i$. Le cas $A = 0$ est traité séparément et on définit $\mathcal{P}_{prl}(x, y, 0, f, g, J)$ comme l'espace de module des lignes de flot de f de x à y .

Formellement, soit Φ_t le flot du gradient négatif de (f, ρ) et $W^u(x)$ et $W^s(y)$ les variétés stables et instables des points x et y respectivement. On note aussi l'image du plongement défini sur $L \setminus \text{Crit}(f) \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ par

$$Q_{f,\rho} := \text{im}((x, t) \mapsto (x, \Phi_t(x))) \subset L \times L$$

Soit $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_l)$ une suite de classes d'homologie de $H_2(M)$ non-nulles et $G_{-1,1}$ le sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ qui fixe les points $-1, 1 \in \mathbf{D}$. On définit l'application d'évaluation suivante

$$ev_{-1,1} : \mathcal{M}(\mathbf{A}, J) \rightarrow L^{2l}$$

$$(u_1, \dots, u_l) \mapsto (u_1(-1), u_1(1), \dots, u_l(-1), u_l(1))$$

où $\mathcal{M}(\mathbf{A}, J)$ dénote $\mathcal{M}(A_1, J)/G_{-1,1} \times \dots \times \mathcal{M}(A_l, J)/G_{-1,1}$. On définit finalement l'espace de trajectoires perlées

$$\mathcal{P}_{prl}(x, y, \mathbf{A}, f, \rho, J) = ev_{-1,1}^{-1}(W^u(x) \times Q_{f,\rho}^{l-1} \times W^s(y))$$

Il peut être montré qu'il existe un ensemble de Baire de J compatibles à ω tel que l'application d'évaluation est transverse à la sous-variété $W^u(x) \times Q_{f,\rho}^{l-1} \times W^s(y)$ qui fait alors de $\mathcal{P}_{prl}(x, y, \mathbf{A}, f, \rho, J)$ une variété. On en calcule maintenant la dimension. On sait que chacun des $\mathcal{M}(A_i, J)$ a dimension $n + \mu(A_i)$ et en quotientant par $G_{-1,1}$ on réduit la dimension de 1. Les variétés $W^u(x)$ et $W^s(y)$ ont respectivement dimension $\text{Ind}(x)$ et $n - \text{Ind}(y)$ et $Q_{f,\rho}$ a dimension $n + 1$. Puisque la préimage d'une sous-variété par une fonction transverse a dimension

égale à la dimension de l'origine moins la codimension de la sous-variété, on obtient

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{P}_{prl}(x, y, \mathbf{A}, f, \rho, J) &= \dim(\mathcal{M}(\mathbf{A}, J)) - 1 + 2ln - \dim(W^u(x) \times Q_{f,\rho}^{l-1} \times W^s(y)) \\ &= ln + \mu(\mathbf{A}) - l - (2l - \text{Ind}(x) - (n+1)(l-1) - (n - \text{Ind}(y))) \\ &= \mu(\mathbf{A}) + \text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) - 1 \end{aligned}$$

La dimension de l'espace de trajectoires perlées $\mathcal{P}_{prl}(x, y, \mathbf{A}, f, g, J)$ est $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1$ et pour un choix générique de J et une paire (f, g) Morse-Smale si la dimension de l'espace de trajectoires est nulle, elle consiste en fait d'un nombre fini de points. On peut donc définir une différentielle $d : \mathcal{C}(f, g, J) \rightarrow \mathcal{C}(f, g, J)$ par

$$d(x) = \sum_{y, \mathbf{A}} (\#_{\mathbf{Z}_2} \mathcal{P}_{prl}(x, y, \mathbf{A}, f, g, J)) y \otimes t^{\frac{1}{N_L} \mu(A)}$$

On peut ensuite montrer que l'homologie de ce complexe ne dépend pas des choix de f, g et J .

La preuve que $d^2 = 0$ s'appuie essentiellement sur deux faits : le premier est que si l'espace $\mathcal{P}_{prl}(x, y, A)$ est de dimension 0 alors il est compact et le second est qu'en dimensions supérieures, on le compactifie dans la topologie de Gromov en ajoutant les trajectoires avec lignes de flot brisées et avec apparition de bulles.

On se rappelle que la preuve du résultat équivalent en théorie de Morse consistait en ajoutant aux lignes de flot les lignes brisées et en tirant la conclusion du fait que les variétés de dimension 1 ont toujours un nombre pair de composantes de bord. Il est important aussi d'utiliser des résultats de recollement, c'est-à-dire que s'il existe deux disques qui s'intersectent en un point sur leur bord, alors ces deux disques peuvent être réalisés comme la limite d'une suite de disques.

La preuve est obtenue en considérant séparément deux types différents de limites de trajectoires perlées. Le premier type est celui où une des lignes de flot est brisée. La preuve que la différentielle du complexe de Morse définit un complexe nous assure que de telles trajectoires viendront toujours en paire et donc que d^2x ne contribue pas de point critiques y tels que x et y sont reliés par des trajectoires de ce type. Le second type de trajectoires limites est celui où une bulle est apparue sur un des disques. Bien qu'une bulle en sphère pourrait se former sur un disque, c'est un phénomène de codimension 2 et puisqu'on suppose l'espace $\mathcal{P}_{prl}(x, y, A)$

de dimension 1, ce cas n'est pas possible et les seules bulles qui se formeront sont des disques à bord dans la lagrangienne. L'idée est maintenant de réaliser qu'une courbe limite où deux disques s'intersectent à la manière de la figure 4.2 peut être en fait réalisée comme limite de deux manières distinctes qui se produiront toujours tout deux par les résultats de recollement et donc ces trajectoires seront donc toujours comptées un nombre pair de fois ce qui nous donne la conclusion. On présente maintenant les résultats nécessaires à rendre l'argument précédent

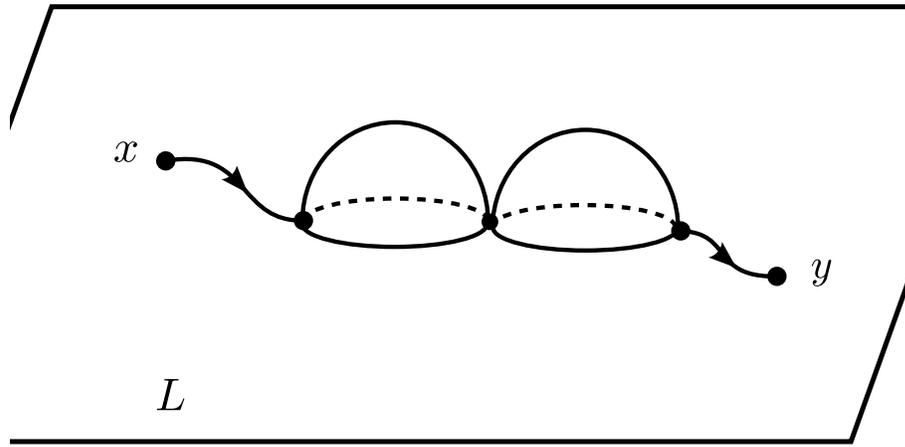


FIGURE 4.2. Une trajectoire dans $\overline{\mathcal{P}}_{prl}(x, y, A)$

rigoureux.

Soit $\widetilde{\mathcal{M}}(B, J) = \widetilde{\mathcal{M}}(B, D^2, J)$ l'espace des disques J -holomorphes paramétrées à bord dans L et représentant une classe $B \in H_2(M, L)$. Soit $G_{-1,1}$ le sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ qui fixe -1 et 1 et soient $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_l)$ et $\mathbf{B}' = (B'_1, \dots, B'_{l'})$ des ensembles ordonnés de classes dans $H_2(M, L)$. On note les espaces de module

$$\mathcal{M}(B_i, J) := \widetilde{\mathcal{M}}(B_i, J)/G_{-1,1}$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{B}, \mathbf{B}', J) := \left(\prod \mathcal{M}(B_i, J) \right) \times \left(\prod \mathcal{M}(B'_j, J) \right)$$

Une application d'évaluation est définie sur cet espace

$$ev_{\mathbf{B}, \mathbf{B}'} : \mathcal{M}(\mathbf{B}, \mathbf{B}', J) \rightarrow L^{\times 2l+2l'}$$

qui à chaque ensemble de courbes $(u_1, \dots, u_l, u'_1, \dots, u'_{l'})$ leur associe leurs valeurs aux points -1 et 1 , $(u_1(-1), u_1(1), \dots, u_{l'}(-1), u_{l'}(1))$. L'espace qui nous intéresse

pour décrire la compactification de $\mathcal{P}_{prl}(x, y, A)$ est

$$\mathcal{P}(x, y, \mathbf{B}, \mathbf{B}') := ev_{\mathbf{B}, \mathbf{B}'}^{-1}(W^u(x) \times Q_{f, \rho}^{l-1} \times \Delta(L) \times Q_{f, \rho}' \times W^s(y))$$

Avec $\Delta(L) \subset L \times L$ la diagonale. Si on exige de plus que les disques soient simples et totalement distincts, il existe un sous-ensemble de $\mathcal{J}_\tau(M, \omega)$ de Baire qui fait que cet espace est une variété de dimension $\mu(\mathbf{B}) + \mu(\mathbf{B}') + \text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) - 2$.

Remarque 4.1.2. En considérant la définition du complexe des perles pour une sous-variété lagrangienne, on est tenté de définir un complexe semblable pour la variété symplectique ambiante M en remplaçant les disques J -holomorphes par des sphères. On découvre par contre rapidement que la construction dans ce cas est beaucoup moins intéressante et en fait, l'homologie obtenue est l'homologie singulière de M prolongée périodiquement aux degrés inférieurs à 0 et supérieurs à $2n$.

Soit $\mathcal{M}^*(A, J)$ l'espace des sphères J -holomorphes simples de M représentant la classe d'homologie $A \in H_2(M, \mathbf{Z})$. Soient $N, S \in \mathbf{S}^2$ les pôles nord et sud de \mathbf{S}^2 et (f, ρ) une paire Morse-Smale pour M et J une structure presque complexe. On définit l'espace des trajectoires perlées $\mathcal{P}(x, y, A; f, \rho, J)$ exactement de la même manière que dans le cas lagrangien c'est-à-dire comme

$$ev_{N, S}^{-1}(W^u(x) \times Q_{f, \rho}^{l-1} \times W^s(y))$$

avec $Q_{f, \rho} = \{(x, \phi_t^f(x)) : x \in M\} \subset M \times M$. Quand (f, ρ) sont choisis tels que $ev_{N, S}$ est transverse à $W^u(x) \times Q_{f, \rho}^{l-1} \times W^s(y)$ on aura que $\mathcal{P}(x, y, A; f, \rho, J)$ est une variété de dimension $|x| - |y| + 2c_1(A)$. Ces trajectoires sont par contre paramétrées et puisque les éléments de $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$ sont déterminés par l'image de 3 points, les éléments qui fixent N et S forment une variété de dimension 2 et donc l'espace des trajectoires non-paramétrées est de dimension $|x| - |y| + 2c_1(A) - 2$. On définit maintenant un Λ -module gradué

$$\mathcal{C}(M, f, \rho, J) := \mathbf{Z}_2 \langle \text{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda$$

On aimerait faire de ce module gradué un complexe en définissant une différentielle de la même manière que précédemment

$$\phi(x) := \sum \#_2 \mathcal{P}(x, y, A, f, \rho, J) y t^{2c_1(A)}$$

Où la somme est prise sur les y tels que $2c_1(A) + \text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) - 2 = 0$. La procédure habituelle pour montrer que ϕ est une différentielle serait pour des

espaces $\dim \mathcal{P}(x, y, A; f, \rho, J) = \dim \mathcal{P}(y, z, A'; f, \rho, J) = 0$ de réaliser

$$\mathcal{P}(x, y, A; f, \rho, J) \times \mathcal{P}(y, z, A'; f, \rho, J)$$

comme une composante du bord de $\mathcal{P}(x, z, A + A'; f, \rho, J)$ mais on a

$$\begin{aligned} 0 &= \dim \mathcal{P}(x, y, A; f, \rho, J) + \dim \mathcal{P}(y, z, A'; f, \rho, J) \\ &= |x| - |y| + 2c_1(A) - 2 + |y| - |z| + 2c_1(A') - 2 \\ &= |x| - |z| + 2c_1(A + A') - 4 \\ &= \dim \mathcal{P}(x, z, A + A'; f, \rho, J) - 2 \end{aligned}$$

qui est le cas précisément, car comme on l'a déjà remarqué, l'apparition de bulles sphériques fait diminuer la dimension de l'espace de module de 2. Le produit ne peut donc pas être réalisé comme une composante de $\mathcal{P}(x, z, A + A'; f, \rho, J)$, sauf dans le cas où A ou A' serait 0, mais alors cette composante de bord correspond à une ligne de flot brisée et on constate alors que l'addition des sphères le long des lignes de flot n'a ajouté aucune information à la différentielle de Morse et c'est pourquoi $QH_*(M) \cong H_*(M) \otimes \Lambda$. Par contre, cet argument n'empêche pas que la structure d'anneau soit enrichie par l'ajout des sphères pseudo-holomorphes et c'est en fait le cas. Ces remarques ne sont en fait pas totalement surprenantes puisque comme on le voit dans la section suivante l'homologie quantique est en fait isomorphe à l'homologie de Floer.

4.2. RELATION A L'HOMOLOGIE DE FLOER

Il existe un morphisme entre le complexe de perles et le complexe de l'homologie de Floer d'intersection lagrangienne. Ce dernier est construit ainsi : soit l'espace des chemins à bouts dans une sous-variété lagrangienne L de M

$$\mathcal{C}(L) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M : \gamma \text{ lisse}, \gamma(0), \gamma(1) \in L \text{ et } [\gamma] = 0 \in \pi_2(M, L)\}$$

et soit $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ un hamiltonien et $\mathcal{O}_H \subset \mathcal{C}(L)$ l'espace des orbites contractiles dans L au temps 0 pour son flot ϕ^H . L'indice de Maslow donne un morphisme $\pi_1(\mathcal{C}(L)) \rightarrow \mathbf{Z}$ et soit $\tilde{\mathcal{C}}(L)$ le recouvrement de $\mathcal{C}(L)$ associé à $\pi_1(\mathcal{C}(L))/\ker(\mu)$. On note $\tilde{\mathcal{O}}_H$ les relèvements de boucles de \mathcal{O}_H . En fixant un élément η_0 dans le recouvrement, on peut définir un indice pour chaque $x \in \tilde{\mathcal{O}}_H$ par l'indice de Maslov $\mu(x, \eta_0)$. Muni de cette graduation, le complexe de Floer est le \mathbf{Z}_2 -module

$$CF_*(L) = \mathbf{Z}_2\langle \tilde{\mathcal{O}}_H \rangle$$

Le morphisme PSS (Piunikhin-Salamon-Schwarz) entre le complexe de perles $\mathcal{C}(f, g, J)$ et de Floer $CF_*(H, J)$ est une construction géométrique très intuitive et analogue à plusieurs morphismes de complexes de ce type. L'idée est la suivante : la valeur de PSS sur un point critique de f est obtenue en dénombrant des trajectoires perlées «perturbées» dans le sens qu'elles sont composées d'une suite de disques J -holomorphes à bord dans L et reliés par des lignes de flot de f mais cette trajectoire se termine en une solution à une équation différentielle interpolant entre l'équation de Cauchy-Riemann et l'équation de Floer. C'est-à-dire que cette solution à une extrémité se comporte comme un disque J -holomorphe et comme un orbite périodique d'un flot hamiltonien à l'autre extrémité. Plus précisément, soit $\beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction «step» lisse, c'est-à-dire qui est croissante de -1 à 1 et constante égale à 0 pour $x \leq -1$ et constante égale à 1 pour $x \geq 1$. Soit \mathcal{I} l'espace des solutions de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J \frac{\partial v}{\partial t} + \beta(s) \nabla H = 0$$

On considère l'espace de module suivant

$$\mathcal{P}(f, g, J, H) = \{(\mathbf{u}, p, v) : \mathbf{u} \in \mathcal{P}_{pri}(x, p, f, g, J) \text{ et tel que } \text{ev}_p(\mathbf{u}) \cap Q_{f,\rho} \cap v \neq \emptyset\}$$

Il est ensuite possible de montrer que cette application est un morphisme de complexes et que c'est en fait un isomorphisme en homologie.

Du point de vue de l'homologie de Floer d'intersection lagrangienne, il est facile de montrer les résultats suivants.

Définition 4.2.1. Une sous-variété lagrangienne $L \subset M$ est dite déplaçable s'il existe une isotopie hamiltonienne Φ_t telle que $\Phi_T(L) \cap L = \emptyset$.

Proposition 4.2.1. Soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne déplaçable, alors $HF_*(L) = 0$

preuve: On observe que QH_* est invariant sous isotopies hamiltoniennes et que pour un t suffisamment grand $L \cap \phi_t(L) = \emptyset$ et donc $HF_*(L, \phi_t(L)) = 0$. ■

Proposition 4.2.2. Toutes les sous-variétés lagrangiennes de (\mathbf{C}^n, ω_0) sont déplaçables.

preuve: Il suffit de prendre par exemple la fonction $\text{im}(z_1) : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}$, qui à z associe la partie imaginaire de la première coordonnée $z_1 = (x_1, y_1)$ de $z = (z_1, \dots, z_n)$. Le champ de vecteurs hamiltonien associé $-J_0 \nabla \text{im}(z_1) = \partial_{x_1}$ a comme

flot hamiltonien la translation $\Phi_t(z) = (x_1 + t, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$. Toute sous-variété lagrangienne L est donc telle que $\Phi_t(L) \cap L = \emptyset$ pour un t suffisamment grand. ■

4.3. PRODUIT QUANTIQUE

Une autre construction géométrique qui met en évidence davantage de structure de $QH_*(L)$ est le produit quantique. Comme pour la définition de la différentielle quantique, on commence avec la définition du produit d'intersection du complexe de Morse et on y incorpore la structure de courbes J -holomorphes. L'idée est de prendre deux points critiques de fonctions de morses distinctes et de suivre pour chacun d'eux une trajectoire perlée qui se rencontrent en un disque pseudo-holomorphe lequel est l'origine d'une troisième trajectoire perlée pour une autre fonction de Morse.

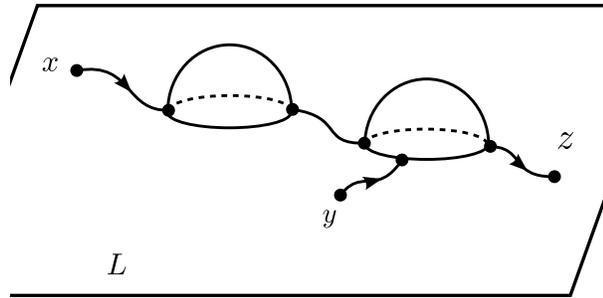


FIGURE 4.3. Diagramme d'une trajectoire de produit quantique

Soient f, f' et f'' trois fonctions de morses $L \rightarrow \mathbf{R}$, le produit quantique est défini ainsi

$$* : \mathcal{C}(f, g, J) \otimes \mathcal{C}(f', g, J) \rightarrow \mathcal{C}(f'', g, J)$$

On considère l'espace de module

$$\mathcal{P}_{prod}(x, y, z, A, f, f', f'', g, J)$$

pour $x, y, z \in L$, composé des triples (u, u', u'', v) avec $u \in \mathcal{P}_{prl}(x, \tilde{x}, B, f, g, J)$, $u' \in \mathcal{P}_{prl}(y, \tilde{y}, B', f', g, J)$, $u'' \in \mathcal{P}_{prl}(\tilde{z}, z, B'', f'', g, J)$ et $v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que

$$v(1) = \tilde{z}, \quad v\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tilde{x} \text{ et } v\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \tilde{y}$$

et tel que $B + B' + B'' + [v] = A$

Le produit est finalement défini comme une somme prise sur tous les z et A tels que $\mathcal{P}_{prod}(x, y, z, A, f, f', f'', g, J)$ est de dimension nulle

$$x * y = \sum_{z, A} (\#\mathbf{z}_2 \mathcal{P}_{prod}(x, y, z, A, f, f', f'', g, J)) z \otimes t^{\frac{\mu(A)}{NL}}$$

Il est possible de montrer que si $HF_*(L, L)$ est muni d'une structure d'algèbre graduée avec μ^2 , le produit de Donaldson et $QH_*(L)$ est muni du produit quantique, alors l'isomorphisme de modules $QH_*(L) \rightarrow HF_*(L, L)$ défini précédemment est en fait un isomorphisme d'algèbre graduée (modulo un décalage de degré car l'unité pour le produit a degré n). Il faut aussi à nouveau montrer la régularité et la compacité des espaces de module \mathcal{P}_{prod} .

On peut interpréter cette définition comme une extension du produit d'intersection en homologie singulière où deux cycles s'intersectent s'ils sont reliés par une courbe J -holomorphe. On peut définir le même type de produit sur $QH_*(M)$ en utilisant les invariants de Gromov-Witten comme présenté dans McDuff et Salamon [4] ce qui revient à dénombrer des sphères avec deux trajectoires de flot gradient entrant et une sortant.

4.4. STRUCTURE DE $QH(M)$ -MODULE

Comme en homologie de Morse, il est possible de définir une action de l'homologie quantique de la variété ambiante sur celle d'une sous-variété lagrangienne. Intuitivement, l'action est définie en comptant le nombre d'éléments dans un espace de module d'arbres à deux entrées et une sortie qui sont composés d'une trajectoire perlée entre deux points dans la lagrangienne et d'une ligne de flot partant d'un point de la variété ambiante et se terminant dans un des disques de la trajectoire perlée (possiblement constant). Plus formellement, soit (f, ρ_L) et (g, ρ_M) une paire Morse-Smale pour L et M respectivement. On exige aussi des fonctions f et g qu'elles satisfassent une condition de transversalité c'est-à-dire qu'étant donné $a \in \text{Crit}(h)$ et $x, y \in \text{Crit}(f)$ on doit avoir que $W^u(a)$ est transverse à L et aux variétés $W^u(x)$ et $W^s(y)$. Soit une classe d'homologie $A \in H_2(M, L; \mathbf{Z})$, et $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_l)$ un l -tuple de classes de $H_2(M, L; \mathbf{Z})$ telles que $A = \sum A_i$. Soit J une structure presque complexe compatible à ω , on définit les fonctions d'évaluation suivantes

$$e_{q_1, \dots, q_j, p_1, \dots, p_k} : \mathcal{M}(A, J) \times \partial \mathbf{D}^{\times k} \times \text{int } \mathbf{D}^{\times j} \rightarrow L^k \times M^l$$

$$u \mapsto (u(q_1), \dots, u(q_j), u(p_1), \dots, u(p_k))$$

Les applications qui nous intéressent ici sont $e_{-1,1}$ et $e_{-1,0,1}$. Soit l'espace $\mathcal{M}(\mathbf{A}, J) := \mathcal{M}(A_1, J) \times \dots \times \mathcal{M}(A_l)$ on définit

$$ev_k : \mathcal{M}(\mathbf{A}, J) \rightarrow L^{2k-1} \times M \times L^{2l-2k+1}$$

$$(u_1, \dots, u_l) \mapsto (ev_{-1,1}(u_1), \dots, ev_{-1,1}(u_{k-1}), ev_{-1,0,1}(u_k), ev_{-1,1}(u_{k+1}), \dots, ev_{-1,1}(u_l))$$

et on définit l'espace de module

$$\mathcal{P}_{mod}(a, x, y; \mathbf{A}, k, J) := ev_{(k)}^{-1}(W^u(x) \times Q_{f, \rho_L}^{k-1} \times W^u(a) \times Q_{f, \rho_L}^{l-k} \times W^s(y)) / \mathbf{G}$$

Où \mathbf{G} est le groupe de reparamétrisations des disques fixant -1 et 1 agissant indépendamment sur chacun des facteurs $\mathcal{M}(A_i, J)$ et on pose finalement

$$\mathcal{P}_{mod}(x, y, a, \mathbf{A}, J) := \bigcup_{k=1}^l \mathcal{P}_{mod}(x, y, a, \mathbf{A}, k, J)$$

On précise que les espaces $\mathcal{M}(A_i, J)$ peuvent contenir des disques constants et donc on comprend la trajectoire de gradient négatif de a comme intersectant la trajectoire sur une ligne de gradient de f plutôt que sur un disque. Quand les $ev_{(k)}$ sont transverses, les espaces $\mathcal{P}_{mod}(x, y, a, \mathbf{A}, J)$ seront des variétés de dimension $\text{Ind}(x) + \text{Ind}(a) - \text{Ind}(y) + \mu(\mathbf{A}) - 2n$. Dans le cas où la dimension est 0, il reste à montrer que l'espace est compacte. On a en fait le théorème suivant

Théorème 4.4.1. Il existe un ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{reg} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{reg}$, $\mathbf{A} \in H_2(M, L; \mathbf{Z})^l$, $x, y \in \text{Crit}(f)$, $a \in \text{Crit}(h)$ avec $\text{Ind}(x) + \text{Ind}(a) - \text{Ind}(y) + \mu(\mathbf{A}) - 2n = 0$ alors $\mathcal{P}_{mod}(x, y, a, \mathbf{A}, J)$ est une variété compacte de dimension 0 composée uniquement de disques simples et absolument disjoints.

La définition suivante a maintenant du sens

Définition 4.4.1. Pour un choix de paramètres tel que $\text{Ind}(x) + \text{Ind}(a) - \text{Ind}(y) + \mu(\mathbf{A}) - 2n = 0$ on pose $n(x, y, a, \mathbf{A}, J) := \#_2 \mathcal{P}_{mod}(x, y, a, \mathbf{A}, J)$ et dans le cas où $\mu(\mathbf{A}) = 0$ on pose $n(x, y, a) := \#_2(W^u(a) \cap W^u(x) \cap W^s(y))$. L'action de $QH(M)$ est alors définie comme

$$a * x = \sum n(x, y, a) y + \sum n(x, y, a, \mathbf{A}, J) y t^{\bar{\mu}(\mathbf{A})}$$

Les théorèmes suivants seront utilisés plus tard.

Théorème 4.4.2. Pour tout $a, b \in QH(M)$ et tout $x, y \in QH(L)$ alors si $[M]$ est la classe du maximum dans $QH(M)$

$$(1) (a * b) * x = a * (b * x)$$

à \overline{W} en ajoutant à chaque composante de bord négative le cylindre $(-\infty, R_-] \times a_i^- \times L_i^-$ et le cylindre correspondant pour les composantes de bord positives.

On choisit ensuite $S \subset \{a_i^\pm \times L_i^\pm\}_{i \in \{1, \dots, k_-, \dots, k_+\}}$ un sous-ensemble des composantes du bord de W et un triplet $(\hat{f}, (\cdot, \cdot), \tilde{J})$ où $\hat{f} : W \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Morse, (\cdot, \cdot) est une structure riemannienne et \tilde{J} est une structure presque complexe sur $M \times \mathbf{C}$ qui sont sujets aux conditions suivantes : le champ de vecteurs $-\nabla \hat{f}$ doit être transverse à ∂W , sortant le long de S et entrant le long de $\partial W \setminus S$. On exige aussi que \tilde{J} soit telle que $\pi : M \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ soit holomorphe en dehors d'un compacte contenu dans $[R_-, R_+]$. Il est démontré dans Biran et Cornea [3] que l'homologie quantique, l'homologie du complexe de perles $\mathcal{C}(\hat{f}, (\cdot, \cdot), \tilde{J})$ est indépendante du choix de triplet $(\hat{f}, (\cdot, \cdot), \tilde{J})$ (pour un choix générique). On note cette homologie $QH(\overline{W}, L)$.

Définition 4.5.2. Soit $\pi : \mathbf{C} \times M \rightarrow \mathbf{C}$ la projection sur le facteur \mathbf{C} , un cobordisme lagrangien $V \in \mathbf{C} \times M$, on dira qu'un disque \tilde{J} -holomorphe $u : (D^2, S^1) \rightarrow (\mathbf{C} \times M, V)$ est vertical si la fonction $\pi \circ u$ est constante.

Proposition 4.5.1. Soit \overline{W} une lagrangienne à bouts cylindriques associée à un cobordisme (W, L_0, L_1) , alors il existe une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow QH_*(L_0) \rightarrow QH_*(\overline{W}) \rightarrow QH_*(\overline{W}, L_0) \rightarrow \dots$$

preuve: La preuve de Biran et Cornea [3] est comme d'habitude obtenue en produisant une suite exacte courte de complexes. L'idée est de faire un choix de fonction de Morse qui n'a qu'un maximum près du bout correspondant à L_0 et qu'un minimum près du bout de L_1 , ainsi en séparant W en deux parties : le bout de L_0 et son complément sur lequel le gradient de la fonction de Morse est entrant pour chaque composante de bord.

Soit $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse telle que

$$\tilde{f}|_{[R_- - \varepsilon, R_- - \varepsilon/4] \times a_0 \times M}(t, a_0, x) = f_0(x) + \sigma_0(t) \quad (4.5.1)$$

$$\tilde{f}|_{[R_+ + \varepsilon/4, R_+ + \varepsilon] \times a_1 \times M}(t, a_1, x) = f_1(x) + \sigma_1(t) \quad (4.5.2)$$

avec les fonctions σ_i des fonctions de Morse de l'intervalle toutes deux avec un seul point critique et les f_i des fonctions de Morse des L_i . La fonction σ_0 a un maximum en $R_- - \varepsilon/2$ et σ_1 a un minimum en $R_+ + \varepsilon/2$. On choisit aussi une structure riemannienne (\cdot, \cdot) sur W qui est telle que dans les mêmes voisinages des points critiques de \tilde{f} la structure riemannienne ait la forme $dx^2 \oplus g^\pm$ avec g^\pm une structure riemannienne sur L_0 et L_1 respectivement. Ces choix de fonctions et de structure riemannienne assurent que le gradient négatif de \tilde{f} est entrant au bout

L_1 et sortant au bout L_0 de sorte que le complexe $\mathcal{C}(\tilde{f}, (\cdot, \cdot), \tilde{J})$ aura bien pour homologie le groupe $QH(W, L_0)$ et que la restriction au sous-complexe associé à

$$\widehat{L}_0 := W \cap \pi^{-1}([R_- - \varepsilon, R_- - \varepsilon/4]) = [R_- - \varepsilon, R_- - 3\varepsilon/4] \times \{a_0\} \times L_0$$

est isomorphe au complexe $\mathcal{C}(L_0, f, J)$ mais avec les degrés décalés de 1 puisque la fonction σ_- a un maximum en $R_- - \varepsilon/2$ et donc ajoute une dimension aux variétés instables associées à la fonction f . Cet isomorphisme est construit en observant que par 5.2.1 tout les points critiques de $\tilde{f}|_{\widehat{L}_0}$ sont situés dans la région $\{R_- - \varepsilon/2\} \times a_0 \times L_0$ et que dans la région \widehat{L}_0 de W tout les disques holomorphes ont leur bord inclus dans une fibre $\pi_{L_0}^{-1}(x)$ pour $x \in L_0$ et $\pi_{L_0} : \widehat{L}_0 \rightarrow L_0$ la projection sur ce facteur. On note maintenant

$$\widehat{W} := W \setminus \pi^{-1}([R_- - \varepsilon, R_- - 5\varepsilon/8])$$

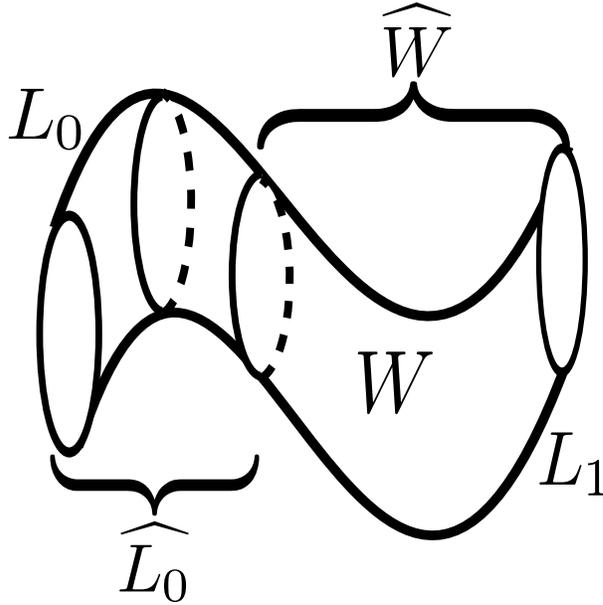


FIGURE 4.5. La décomposition de W

On remarque que \tilde{f} restreinte à \widehat{W} a un gradient négatif qui est entrant à ses deux bouts et donc le complexe de perles associé calcule l'homologie quantique de W (non-relative à une composante de bord). On observe maintenant qu'on a la suite exacte courte de complexes perlés suivante avec i l'inclusion de complexe et r le quotient par l'image de i

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\widehat{W}, \tilde{f}|_{\widehat{W}}, \tilde{J}) \xrightarrow{i} \mathcal{C}(W, \tilde{f}, \tilde{J}) \xrightarrow{r} \mathcal{C}(\widehat{L}_0, \tilde{f}|_{\widehat{L}_0}, \tilde{J}) \rightarrow 0$$

Cette suite est exacte. La longue suite exacte en homologie associée à cette suite exacte courte est celle recherchée ■

Proposition 4.5.2. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien monotone et L_0, L_1 des sous-variétés uniformément monotones de M alors

$$QH(V, L_0) = QH(V, L_1) = 0$$

preuve: L'idée de la preuve est d'utiliser un isomorphisme de type PSS entre $QH(V, L_0)$ et $HF(V)$ et montrer que V est déplaçable, donc que son homologie de Floer est triviale. ■

Remarque 4.5.1. Cette propriété remarquable des cobordismes lagrangiens monotones est un phénomène de plus reflétant la rigidité des lagrangiennes monotones. En effet, il est facile de trouver des exemples de variétés topologiques ou lisses qui sont des cobordismes, mais pas des h-cobordismes.

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve du prochain théorème.

Lemme 4.5.1. Soit (M, ω) une variété symplectique, on munit $D^2 \times M$ de la forme symplectique $\omega_0 \oplus \omega$ avec ω_0 la structure canonique sur \mathbf{C} , alors

$$QH_k(D^2 \times M, S^1 \times M) \cong QH_{k-2}(M).$$

preuve: Soit la suspension de M définie par $SM := M \times I / \sim$ où \sim est la relation engendrée par $(x, 1) \sim (y, 1)$ et $(x, 0) \sim (y, 0)$ avec I l'intervalle $[0, 1]$. On considère les ouverts $A = q(M \times [1/2, 1])$ et $B = q(M \times [0, 1/2])$ où q est l'application quotient par \sim . Les ouverts A et B sont contractiles et leur intersection a le type d'homotopie de M , la longue suite exacte donne donc un isomorphisme $H_k(SM) \cong H_{k-1}(M)$. Il suffit maintenant d'observer que $\mathbf{D}^2 \times M / \mathbf{S}^1 \times M$ a le type d'homotopie de S^2M ce qui suit en considérant les identifications suivantes

$$\begin{aligned} S^2M \simeq \Sigma^2M &:= \frac{\frac{M \times I}{(M \times \partial I) \cup (x_0 \times I)} \times I}{(\Sigma M \times \partial I) \cup (x_0 \times I)} \\ &\cong \frac{M \times I^2}{(M \times \partial I \times I) \cup (M \times I \times \partial I) \cup (x_0 \times I^2)} \\ &\cong \frac{M \times \mathbf{D}^2}{M \times \mathbf{S}^1} \end{aligned}$$

ΣM est la suspension réduite, obtenue de SM en quotientant par $x_0 \times I$ avec x_0 le point de base de M ■

Théorème 4.5.1. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien monotone et L_0, L_1 des sous-variétés uniformément monotones de M alors $QH(L_0)$ et $QH(L_1)$ sont isomorphes en tant qu'anneaux et $QH(M)$ -modules.

preuve: Cette preuve est adaptée de Biran et Cornea [3]. Par le lemme précédent on a $QH(V, L_0) = 0$ et la suite longue d'homologie quantique relative

$$\dots \rightarrow QH_*(L_0) \rightarrow QH_*(V) \rightarrow QH_*(V, L_0) \rightarrow \dots$$

On sait donc que l'application induite par l'inclusion $L_0 \hookrightarrow V$ est un isomorphisme. Il reste donc à montrer que c'est un isomorphisme d'anneaux et de $QH(M)$ -modules. Soit une fonction de Morse F telle que $F(z, x) = f(z) + G(x)$ avec $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse avec un seul maximum en 0 et $G : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse sur M . On note $\mathcal{C}_k := \mathcal{C}_k(\mathbf{C} \times M, F, \tilde{J})$ pour un choix générique de structure riemannienne et presque complexe sur $\mathbf{C} \times M$ de sorte que le produit quantique est défini. On remarque alors que le gradient négatif de F est sortant le long de la frontière de $D^2 \times M$ et donc que $\mathcal{C}_k(\mathbf{C} \times M, F, \tilde{J})$ calcule l'homologie quantique $D^2 \times M$ relative à $S^1 \times M$ qui est isomorphe à l'homologie de M avec le degré translaté de 2. Ce fait suit du lemme précédent. En utilisant les données $(\tilde{f}, (\cdot, \cdot))$ que dans la preuve de 4.5.1 pour le second complexe. Si nécessaire on perturbe F de sorte qu'elle satisfasse les conditions nécessaires à la définition des espaces de module nécessaires à la définition de l'action de $QH(M)$ qui sont énoncées dans la section 4.4. On considère maintenant le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_k \otimes \mathcal{C}_l(\widehat{W}, \tilde{f}|_{\widehat{W}}) & \xrightarrow{id \otimes j} & \mathcal{C}_k \otimes \mathcal{C}_l(W, \tilde{f}) & \xrightarrow{id \otimes r} & \mathcal{C}_k \otimes \mathcal{C}_l(\widehat{L}_0, \tilde{f}|_{\widehat{L}_0}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow * & & \downarrow * & & \downarrow * \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{k+l-2n-2}(\widehat{W}, \tilde{f}|_{\widehat{W}}) & \xrightarrow{j} & \mathcal{C}_{k+l-2n-2}(W, \tilde{f}) & \xrightarrow{r} & \mathcal{C}_{k+l-2n-2}(\widehat{L}_0, \tilde{f}|_{\widehat{L}_0}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La suite du bas est simplement la suite exacte courte utilisée dans la démonstration de l'existence de la suite exacte longue et la suite du haut est cette même suite tensorée avec le facteur $\mathcal{C}_k(\mathbf{C} \times M)$. Les applications verticales $*$ correspondent au produit quantique de l'homologie quantique de M agissant sur celle des différents espaces. Si on montre que ce diagramme est commutatif, la functorialité de la longue suite exacte nous assurera que le diagramme suivant est commutatif (avec les espaces et les degrés des groupes d'homologie remplacés en appliquant le lemme précédent)

$$\begin{array}{ccc} QH(M)_{k-2} \otimes QH_l(L_0) & \longrightarrow & QH_{k-2}(M) \otimes QH_l(W) \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ QH_{k+l-2n-2}(L_0) & \longrightarrow & QH_{k+l-2n-2}W \end{array}$$

L'action de M sera donc préservée par l'isomorphisme $QH(L_0) \cong QH(W)$, le même argument appliqué au bout L_1 nous permet donc de conclure que $QH(L_0)$ et $QH(L_1)$ sont isomorphes en tant que $QH(M)$ -modules. Un argument identique

obtenu en remplaçant $QH(M)$ par $QH(V)$ montre que l'isomorphisme est un morphisme d'anneaux.

On montre maintenant la commutativité du diagramme entre les deux suites exactes courtes. On considère d'abord le carré de gauche. Soit

$$a \otimes \beta \in \mathcal{C}_k(\mathbf{C} \times M) \otimes \mathcal{C}_l(\widehat{W}, \tilde{f}|_{\widehat{W}})$$

alors chaque trajectoire perlée de l'espace $\mathcal{P}_{mod}(a, \beta)$ est aussi une trajectoire de $\mathcal{P}_{mod}(a, j(\beta))$ puisque $\widehat{W} \subset W$, on a donc l'inclusion $\mathcal{P}_{mod}(a, \beta) \subset \mathcal{P}_{mod}(a, j(\beta))$. On a aussi l'inclusion inverse puisque si on avait une trajectoire de $\mathcal{P}_{mod}(a, j(\beta))$ mais pas de $\mathcal{P}_{mod}(a, \beta)$, il faudrait qu'elle intersecte \widehat{L}_0 , mais puisque le gradient négatif de \tilde{f} est sortant le long du bord de \widehat{L}_0 et que tout les disques qui intersectent \widehat{L}_0 sont verticaux. Finalement, on montre que le carré de droite est commutatif. Soit maintenant $a \otimes \beta \in \mathcal{C}_k(\mathbf{C} \times M) \otimes \mathcal{C}_l(W, \tilde{f})$, encore une fois il est clair que $\mathcal{P}_{mod}(a, r(\beta)) \subset \mathcal{P}_{mod}(a, \beta)$ et il existe possiblement des trajectoires de $\mathcal{P}_{mod}(a, \beta)$ qui quittent \widehat{L}_0 pour s'arrêter à un point critique dans \widehat{W} , mais celles-ci n'apparaîtront pas dans $a * r(\beta)$ ni dans $r(a * \beta)$. Par contre, il se pourrait qu'une trajectoire de $\mathcal{P}_{mod}(a, \beta)$ quitte \widehat{L}_0 et y retourne pour s'arrêter à un point critique dans \widehat{L}_0 ce qui contribuerait un terme à $r(a * \beta)$ qui n'apparait pas dans $a * r(\beta)$, mais cela n'est en fait pas possible pour les même raisons que dans l'argument précédent, c'est-à-dire que le gradient négatif de \tilde{f} est sortant le long du bord de \widehat{L}_0 et que tout les disques qui intersectent \widehat{L}_0 sont verticaux. ■

Chapitre 5

UNIRULING ET COBORDISMES LAGRANGIENS

Nous présentons ici plusieurs résultats sur les cobordismes lagrangiens et quelques exemples de cobordismes pour lesquels les deux bouts sont uniréglés.

5.1. LAGRANGIENNES ÉTROITES ET COBORDISMES

Proposition 5.1.1. Les sous-variétés lagrangiennes monotones L telles que $HQ(L) = 0$ et de Maslov minimal ≥ 2 sont uniréglées.

preuve: On choisit une fonction de Morse f pour une lagrangienne étroite L qui a un seul minimum. Une preuve de l'existence d'une telle fonction peut être trouvée dans Milnor [5]. Supposons que le minimum x_0 de f soit un cycle du complexe quantique. Alors $HF_0(L) = 0$ impliquerait que x_0 doit être un bord pour que le groupe d'homologie s'annule. Soit alors y tel que $x_0 = dy$, alors l'espace $\mathcal{P}(y, x_0, A, J, f, \rho)$ est de dimension $|y| + \mu(A) - 1$ et pour que cette dimension soit égale à 0 deux cas sont possibles. Le premier est que $|y| = 0$ et $\mu(A) = 1$ qui est impossible par hypothèse de monotonie. Le second cas est que $\mu(A) = 0$, mais alors la trajectoire perlée est simplement une trajectoire de Morse et puisque l'homologie de Morse de degré 0 est non triviale on doit avoir que $dy = 0$. Le minimum n'est donc pas un cycle et $dx_0 = z$ pour un z non-nul. Puisqu'aucune trajectoire de Morse ne quitte le minimum, on doit avoir que la trajectoire perlée qui quitte le minimum débute par un disque et donc qu'un disque passe par le minimum. La conclusion suit du fait qu'on peut construire une fonction de Morse ayant un seul minimum en $x \in L$ pour tout x . ■

On obtient immédiatement plusieurs exemples de cobordismes préservant l'uniréglage.

Corollaire 5.1.1. Toutes les sous-variétés lagrangiennes monotones déplaçables sont uniréglées.

preuve: C'est une conséquence de 4.2.1 et de la proposition précédente. ■

Corollaire 5.1.2. Toutes les sous-variétés monotones compactes de \mathbf{C}^n muni de la forme symplectique canonique sont uniréglées.

preuve: Les lagrangiennes de \mathbf{C}^n sont déplaçables comme on l'a vu dans le chapitre précédent. La conclusion suit du corollaire précédent. ■

Corollaire 5.1.3. Soit (V, L, L') un cobordisme monotone de lagrangiennes uniformément monotones et $QH(L) = 0$ alors les deux bouts sont uniréglés.

preuve: Par 4.5.1 on sait que $QH(L') = 0$ et par 5.1.1 on a donc que les deux bouts sont uniréglés. ■

5.2. DISQUES D'INDICE DE MASLOV 2

L'espace des disques J -holomorphes simples d'indice de Maslov 2

$$\mathcal{M}^*(2, J) = \{u \in \mathcal{M}^*(D^2, A, J) : \mu(A) = 2\}$$

permet de définir un invariant numérique de type Gromov-Witten de la lagrangienne L . Si on considère G le groupe des biholomorphismes du disque fixant le point 1, alors puisque $\dim G = 2$ on obtient que l'espace des courbes non paramétrées $\mathcal{M}^*(2, J)/G$ est de dimension $n + 2 - \dim G = n$. Par le théorème de compacité de Gromov on sait cet espace compact. En effet, une suite de disques d'indice de Maslow μ peut seulement converger vers un arbre de disques dont la somme des indices de Maslow est μ donc si μ est l'indice de Maslow minimal une suite de disques ne peut converger que vers un arbre à une seule composante, c'est-à-dire un disque, lui aussi d'indice de Maslow minimal. On peut alors considérer le degré de l'application d'évaluation au point 1

$$ev : \mathcal{M}^*(2, J) \rightarrow L$$

qui à une courbe u lui associe sa valeur $u(1)$. On définit ainsi

$$n_L = \deg(ev) = \sum_{x \in ev^{-1}(y)} \varepsilon_x$$

pour x une valeur régulière de ev et $\varepsilon_y = 1$ si ev préserve l'orientation près de y et -1 sinon. On remarque au passage que n_L est un compte algébrique, donc si n_L est positif on sait que pour un point générique (les valeurs régulières de ev) il doit passer un disque J -holomorphe. Par contre si $n_L = 0$, on ne peut pas

conclure qu'il n'y a pas de disques passant en ces points. La proposition suivante nous permettra de conclure que les cobordismes lagrangiens préservent n_L .

Finalement il faut vérifier que n_L n'est pas dépendant de J la structure presque complexe choisie. On choisit donc un chemin J_t entre les structures presque complexes J_0 et J_1 qu'il est toujours possible de choisir tel que J_{t_0} n'est pas régulier pour seulement un nombre fini de t_0 . L'ensemble de tels chemins de structures complexes dites régulières est de Baire (on peut trouver la preuve dans McDuff et Salamon [4]) et l'espace

$$\mathcal{M}^*(A, \Sigma, J_t) := \{(u, J_t) : \bar{\partial}_{J_t} u = 0\}$$

est alors un cobordisme entre $\mathcal{M}^*(A, \Sigma, J_0)$ et $\mathcal{M}^*(A, \Sigma, J_1)$. En quotientant par le groupe de biholomorphismes du disque fixant 1, on définit à nouveau une application d'évaluation $ev : \mathcal{M}^*(A, \Sigma, J_t) \rightarrow M$ qui étend l'application ev sur les deux bouts du cobordisme et leurs degrés doivent alors coïncider.

Proposition 5.2.1. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien et $u : (D^2, S^1) \rightarrow (M \times \mathbf{C}, V)$ un disque J-holomorphe à bord dans V , si l'image de u passe suffisamment près du bout L_i , alors u se projette à une application constante dans \mathbf{C} .

preuve: Soit u un disque dans $M \times \mathbf{C}$ à bord dans V et dont l'image $u(\partial D^2)$ a une intersection non-nulle avec $V|_{[0, \varepsilon] \times \mathbf{R}} = [0, \varepsilon] \times L_0$. Supposons que l'arc $[-\delta, \delta] \subset \partial D^2$ soit entièrement inclus dans $[0, \varepsilon] \times L_0$. Soit π la projection de $M \times \mathbf{C}$ sur \mathbf{C} , alors la composition $\pi \circ u$ est une fonction holomorphe $D^2 \rightarrow \mathbf{C}$ et donc une application ouverte. L'idée est maintenant d'observer que l'application $\pi \circ u$ ne peut pas être ouverte et donc doit être constante de quoi on conclut que l'image de u est incluse dans une tranche $\{x\} \times \{0\} \times L_0$ pour un $x \in [0, \varepsilon]$. Supposons au contraire que $\pi \circ u$ ne soit pas constante, puisqu'elle est ouverte, l'intérieur de son image ne peut pas être vide et puisque l'image est compacte sa frontière est non vide, mais tout $u(\partial D^2)$ est contenu dans V donc un point intérieur de D^2 est envoyé dans un point frontière par $\pi \circ u$ ce qui contredit le fait qu'elle soit une application ouverte, elle est donc constante. ■

Corollaire 5.2.1. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien, alors $n_{L_0} = n_{L_1}$.

preuve: On sait que n_V disques passent par un point générique de V , la conclusion suit alors par la proposition précédente. ■

Corollaire 5.2.2. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien, si $n_{L_0} \neq 0$ alors les deux bouts du cobordisme sont unirégulés.

preuve: Si $n_{L_0} = 0$ il peut y avoir ou non un disque passant par un point générique de L_0 puisque ce nombre est un compte algébrique (un degré), par contre lorsqu'il est $\neq 0$, on est assuré qu'il passe au moins un disque par ce point. ■

Remarque 5.2.1. La construction précédente se généralise facilement à d'autres espaces de module et permet de tirer des invariants semblables, cependant ces constructions ne sont pas applicables dans tout les cas. On considère plutôt l'espace $\mathcal{M}^*(\mu, J)$ de tous les disques J -holomorphes dans M à bord dans L d'indice de Maslov μ . La dimension de celui-ci est $n + \mu$. Si on considère les applications d'évaluation

$$ev : \mathcal{M}^*(\mu, J) \times (S^1)^k \times (D^2)^l \rightarrow M^{k+l}$$

qui évaluent un disque u en $k \geq 1$ points de son bord et $l \geq 0$ points de son intérieur $(z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{k+l})$. La préimage d'une valeur régulière d'une telle application aura dimension

$$\dim \mathcal{M}^*(\mu, J) \times (S^1)^k \times (D^2)^l - \dim M^{k+l} = n + \mu + k + 2l - n(k+l)$$

Dans le cas ou $k+l = 2$, le groupe de biholomorphismes du disque fixant 2 points a dimension 1 et alors la dimension de l'espace des disques non paramétrés passant par une certaine collection de points $(z_1, \dots, z_{k+l}) \in M^{k+l}$ sera de $n + \mu + k + 2l - n(k+l) - 1$. Par contre si $k+l \geq 3$, le groupe de reparamétrisation est trivial et l'espace des disques non-paramétrés aura toujours dimension $n + \mu + k + 2l - n(k+l)$. En faisant la supposition supplémentaire que μ est l'indice de Maslow minimal de L on obtient donc un compte (algébrique) des disques passant par les points choisis pour toutes les solutions entières (k, l) de l'équation

$$\begin{aligned} n + \mu + k + 2l - n(k+l) &= 0 & \text{si } k+l \geq 3 \\ n + \mu + k + 2l - n(k+l) - 1 &= 0 & \text{si } k+l = 2 \end{aligned}$$

5.3. ACTION NON-TRIVIALE DE $QH(M)$

Proposition 5.3.1. S'il existe un élément $z \in QH(M)$ et $x \in QH_0(L)$ tel que $z * x \neq x$ alors L est uniréglée.

preuve: On observe d'abord que si x est la classe du point, laquelle est représentée par le minimum d'une fonction de Morse, alors la non trivialité de $z * x$ implique qu'un disque pseudo-holomorphe passe par x , puisqu'aucune ligne de flot ne quitte le minimum. Puisque pour chaque point de L il existe une fonction de Morse ayant un minimum en ce point, $z * \min \neq \min$ implique tout de suite que L est uniréglée. ■

Corollaire 5.3.1. Si L est de point inversible et $QH(M)$ agit non trivialement sur $QH(L)$ alors L est uniréglée.

preuve: Soient $a \in QH(M)$ et $\alpha \in QH(L)$ tels que $a * \beta \neq \beta$. Puisque L est de point inversible, on a

$$\begin{aligned} a * \beta &= a * (\beta * [L]) \\ &= a * (\beta * ([pt] * [pt]^{-1})) \\ &= \beta * ((a * [pt]) * [pt]^{-1}) \end{aligned}$$

et donc $a * [pt] \neq [pt]$ car sinon $a * \beta = \beta$. La conclusion suit du théorème précédent. ■

Corollaire 5.3.2. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien. Si l'action de $QH(M)$ sur $QH_0(L_0)$ est non triviale alors l'action sur $QH_0(L_1)$ est aussi non triviale.

preuve: La preuve est immédiate du fait que $QH_*(L_0) \cong QH_*(L_1)$ en tant que $QH_*(M)$ -modules qu'on a prouvé dans le chapitre précédent. ■

Corollaire 5.3.3. Si $QH(M)$ agit non trivialement sur le QH_0 d'un des bouts d'un cobordisme lagrangien alors ils sont tout deux uniréglés.

preuve: La preuve est directe du corollaire précédent et de la proposition 5.3.1

■

Remarque 5.3.1. Les observations précédentes tiennent aussi pour une action non-triviale de $QH(L)$ sur $QH_0(L)$.

5.4. CONTRAINTES TOPOLOGIQUES DE L'UNIRÉGLAGE

Comme on a vu dans le chapitre 4, l'uniréglage impose des contraintes très fortes sur la topologie d'une variété symplectique et ses sous-variétés lagrangiennes. Les propositions suivantes sont des conséquences des théorèmes énoncés dans le chapitre 4 sur la topologie des cobordismes lagrangiens.

Proposition 5.4.1. Soit (V, L_0, L_1) un cobordisme lagrangien monotone et L_0, L_1 uniformément monotones de dimension n d'une variété symplectique M de point inversible. Supposons aussi que $H_*(L_0; \mathbf{Z}_2) \cong H_*(L_1; \mathbf{Z}_2)$ en tant qu'anneaux et que L_0 est large, alors L_0 et L_1 sont simultanément uniréglés.

preuve: Par la préservation de l'homologie quantique des cobordismes lagrangiens et puisque L_0 est large, on doit avoir que L_1 est aussi large. Par le théorème 3.0.6 L_0 et L_1 sont donc toutes deux uniréglées. ■

Remarque 5.4.1. Ces exemples donnent bonne raison de croire que les cobordismes monotones préservent toujours la propriété d'uniréglage. Une approche prometteuse pour la poursuite de cette question serait maintenant de chercher des invariants de type Gromov-Witten pour lagrangiennes qui seraient préservés par les cobordismes. Ceux-ci donnent une méthode simple pour détecter les sphères pseudo-holomorphes dans les variétés symplectiques. En effet, si on sait qu'il existe un certain $GW_{0,k}^A(pt, a_2, \dots, a_k) \neq 0$, alors on sait par l'interprétation géométrique de ces nombres que la variété est uniréglée.

Bibliographie

- [1] P. Biran et O. Cornea. *Quantum structures for lagrangian submanifolds*. preprint, 2007. arXiv :0708.4221.
- [2] P. Biran et O. Cornea. *Rigidity and uniruling for lagrangian submanifolds*. *Geometry and Topology*, **13** : 2881–2989, 2009.
- [3] P. Biran et O. Cornea. *Lagrangian cobordism 1*. *Journal of the American Mathematical Society*, **26 (2)** : 295–340, 2013.
- [4] D. McDuff et D. Salamon. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2012.
- [5] J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [6] R. Thom. *Quelques propriétés des variétés différentiables*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **28 (1)** : 17–86, 1954.