

Université de Montréal

**Modélisation mathématique de la propagation
de la malaria**

par

Fidèle Niyukuri

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

14 décembre 2014

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Modélisation mathématique de la propagation
de la malaria**

présenté par

Fidèle Niyukuri

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Robert G. Owens

(président-rapporteur)

Jacques Bélair

(directeur de recherche)

Alain Vinet

(membre du jury)

Mémoire accepté le

SOMMAIRE

Un modèle mathématique de la propagation de la malaria en temps discret est élaboré en vue de déterminer l'influence qu'un déplacement des populations des zones rurales vers les zones urbaines aurait sur la persistance ou la diminution de l'incidence de la malaria. Ce modèle, sous la forme d'un système de quatorze équations aux différences finies, est ensuite comparé à un modèle analogue mais en temps continu, qui prend la forme d'équations différentielles ordinaires. Une étude comparative avec la littérature récente permet de déterminer les forces et les faiblesses de notre modèle.

Mots clés : Malaria, Modélisation, R_0 , Stabilité, équilibre.

SUMMARY

A mathematical model for the spread of malaria has been developed to determine the influence that a population shift from rural to urban areas may have on the persistence or reduction of the disease. This discrete-time model, a system of fourteen finite-difference equations, is then compared with a continuous time model, a system of ordinary differential equations. A comparative study of recently published models allows a determination of the strengths and weaknesses of our model.

Key words : Malaria, Modeling, R_0 , stability, Equilibrium

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Dédicaces	xi
Remerciements	xiii
Introduction	1
Objectifs de notre travail	2
Chapitre 1. Modèle mathématique de la propagation du paludisme	
3	
1.1. Mode de propagation du paludisme.....	3
1.2. Historique des modèles mathématiques sur la propagation du paludisme.....	4
Mosquito theorem :.....	4
1.3. Cycle de la malaria	5
1.4. Quelques modèles mathématiques sur la malaria	6
1.4.1. Modèle de Ross	6
1.4.2. Modèle de Macdonald	7
1.4.3. Modèle de Anderson et May	7
1.4.4. Modèle de Tumwiine et Mugisha	8
1.5. Formulation du modèle.....	9
1.5.1. Description	9
1.5.2. Formulation et paramétrisation du modèle	10
1.6. Équilibre sans maladie	13
Chapitre 2. Calcul de R_0	17

2.1.	Définition de R_0	17
2.2.	Calcul de R_0	17
2.3.	Interprétation des résultats de R_0 et sa dépendance en Λ	23
2.4.	Points fixes endémiques	24
Chapitre 3.	Comparaison avec le modèle en temps continu.....	27
3.1.	Formulation du modèle en temps continu.....	27
3.2.	Equilibre sans maladie et stabilité.....	28
3.3.	Calcul de R_0	29
	Règle de Descartes	33
	Théorème de Frobenius	33
Chapitre 4.	Comparaison du modèle avec d'autres modèles	35
4.1.	Intégration du déplacement dans le modèle.....	35
4.2.	Intégration et estimation des paramètres dans le modèle.....	37
Conclusion.....		39
Références Bibliographiques		41

DÉDICACES

A ma Chère Épouse Florence Nintunze

Tu as été très brave pendant mon absence et tu as fait preuve de tes capacités de Mère. Trouve dans cet ouvrage l'expression de mon immense amour envers toi. Puisse le Tout-Puissant consolider notre union qu'Il a Lui-même consacrée.

A mon fils Dorian Mwizerwa

Tu as supporté mon absence avec courage et tu as été gentil avec ta Maman.

Trouves ici l'expression de l'amour paternel qui inonde mon coeur.

A tous ceux qui me sont chers

Je dédie ce Mémoire!

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à remercier premièrement Monsieur Jacques Bélaïr, Professeur Titulaire au Département de Mathématiques et Statistique de l'Université de Montréal, pour le soutien nécessaire qu'il a apporté pour que la réalisation de ce travail arrive à terme. Sa disponibilité, ses multiples conseils et orientations méritent une reconnaissance de ma part.

Je remercie en deuxième lieu ma famille qui a supporté mon absence pendant les deux années que je venais de passer au Canada.

Je remercie également le Gouvernement du Burundi qui a placé sa confiance en moi et le Gouvernement du Canada via le Ministère des Affaires Étrangères Commerce et Développement(MAECD)qui a soutenu matériellement et financièrement mes études. A toute l'équipe du Programme Canadien de Bourses de la Francophonie(PCBF) dirigée par Madame Jeanne Gallagher, je dis merci. Étant dans l'impossibilité de dresser une liste exhaustive, mes remerciements vont à l'endroit de toute personne qui, de près ou de loin, a apporté une contribution pour que ce travail puisse être réalisé.

INTRODUCTION

La modélisation mathématique est un outil important pour comprendre la propagation des maladies infectieuses. Modéliser signifiant décrire une situation réelle sous forme mathématique, le plus souvent en équations, on ne peut donc pas prétendre modéliser la propagation d'une maladie sans connaître, au moins dans les grandes lignes, les mécanismes de sa propagation.

Un modèle mathématique apporte une partie seulement de la théorie permettant de déterminer la dynamique et les mesures de contrôle possibles de la transmission des pathogènes par les moustiques : des concepts épidémiologiques et entomologiques pour la mesure de la transmission [24] doivent également être mis à profit. La modélisation mathématique utilise des modèles plus ou moins informatisés pour décrire, expliquer ou prévoir un comportement ou des phénomènes du monde réel. Cette approche est particulièrement pertinente pour étudier des questions ou tester des idées dans les systèmes complexes. Elle a un apport important dans la prise de décisions dans le cadre de la lutte à la maladie faisant objet de la modélisation, qui implique de modifier profondément un réseau complexe de systèmes biologiques interconnectés. Le potentiel d'évolution des parasites et des vecteurs, l'augmentation et la baisse de l'immunité humaine, les changements comportementaux des populations humaines et des vecteurs, de même que les interactions au sein des sous-populations nombreuses et hétérogènes des organismes concernés, compliquent l'élaboration de programmes et politiques optimaux [31].

Le choix de modéliser la propagation de la malaria, aussi appelé paludisme, a été motivé en partie par sa virulence : elle est en effet la 5ème cause de mortalité parmi les maladies infectieuses au monde après les infections respiratoires, le VIH/SIDA, les maladies diarrhéiques et la tuberculose [17]. La malaria tue annuellement entre un et trois millions de personnes, dont 75% sont des enfants africains [4]. En Afrique subsaharienne, elle occupe la deuxième cause de mortalité après le VIH/SIDA.

Selon le rapport de l'OMS de 2007, 40% de la population des pays pauvres, soit 2.5 milliards d'individus, étaient à risque [14]. Le plus récent rapport de l'OMS,

de 2011, indique que sur les 216 millions de cas palustres apparus en 2010, 81% émergent de la région Afrique. Les enfants de moins de cinq ans représentent 86% des 655 000 morts causées par cette maladie [32].

Dans les objectifs du millénaire pour le développement, l’OMS s’était fixé comme objectif d’éradiquer cette maladie pour 2015. Pour y arriver, des efforts conjugués de multiples intervenants sont indispensables. Parmi ces acteurs, les mathématiciens ont un rôle à jouer en élaborant des modèles mathématiques pour aider les autorités de santé publique à prendre des mesures conséquentes afin de réduire la propagation de cette maladie et ainsi entraîner une réduction du taux de mortalité.

L’utilisation des Moustiquaires Imprégnées d’Insecticide à Longue Durée d’Action (MIILDA) installées aux lits, a réduit le nombre de personnes tuées par cette maladie car la plupart des piqûres de moustiques surviennent la nuit, et ces moustiques se développent dans l’eau ou dans des milieux humides (feuilles de bananiers ou étangs d’eau, par exemple). Les enfants de moins de cinq ans, les femmes enceintes, les personnes vivant avec le VIH/SIDA ainsi que les voyageurs internationaux sont les plus vulnérables. L’intensité de la transmission du paludisme par les moustiques est aussi largement déterminée par les conditions environnementales. Là où les conditions permettent des populations nombreuses de moustiques et abondantes toute l’année, le taux d’inoculation entomologique du parasite peut atteindre mille piqûres infectées par personne et par an [9].

OBJECTIFS DE NOTRE TRAVAIL

Dans le présent travail, nous nous sommes fixé comme objectifs de formuler un modèle mathématique de la propagation du paludisme avec deux composantes spatiales ; d’analyser le modèle, les comportements des solutions ainsi que la persistance et les stratégies de réduction du taux de reproduction. Ce modèle prend la forme d’un système d’équations aux différences finies reflétant la discrétisation des pas de temps. Nous allons aussi faire une comparaison avec un modèle en temps continu (équations différentielles ordinaires).

Nous nous intéresserons en particulier aux conséquences de l’interaction, par le transport d’individus, entre groupes isolés, chacun possédant ses propres caractéristiques. Conceptuellement, ceci correspond, par exemple, à des visites, par des personnes habitant un milieu rural, à un environnement urbain.

Chapitre 1

MODÈLE MATHÉMATIQUE DE LA PROPAGATION DU PALUDISME

1.1. MODE DE PROPAGATION DU PALUDISME

Le paludisme, ou la malaria, est une maladie infectieuse dite vectorielle, car sa transmission se fait par l'intermédiaire des moustiques anophèles qui en sont appelés les vecteurs. A l'origine, on pensait que le paludisme était causé par le mauvais air des marais (« mal'aria» en italien). Cette pathologie est généralement causée par quatre espèces de protozoaires parasites de genres plasmodium à savoir *Plasmodium falciparum*, *vivax*, *Ovale* et *P.Malariae* [11,22,23]. Parmi ces quatre espèces, le *Plasmodium falciparum* est le plus virulent et son infection peut causer des complications affectant le cerveau, les poumons, les reins et d'autres organes [25]. D'autres espèces comme le *simian malaria* (ou du singe), *Plasmodium innuvi*, *Plasmodium cynomolgi* et le plasmodium *knowlesi* sont connues comme causes de la maladie chez l'homme [14].

En Afrique, les trois principaux complexes d'espèces vectrices et les plus redoutables sont : *A. funestus*, *A. gambiae* et *A. arabiensis*. Tous vivent presque exclusivement en association proche avec l'homme (anthropophilie). La meilleure illustration de la puissance de *A.gambiae* comme vecteur est donnée par son introduction accidentelle au Brésil en 1931 par bateau : il y a suscité en 1938 la pire épidémie enregistrée, en causant 14 000 morts en 8 mois [21]. Les symptômes de la malaria se manifestent dans les 7 à 9 jours suivant la piqûre par un moustique infecté [30].

1.2. HISTORIQUE DES MODÈLES MATHÉMATIQUES SUR LA PROPAGATION DU PALUDISME

Les modèles mathématiques de la propagation du paludisme remontent au début du siècle dernier, d'abord par Ross(1911) puis Martini(1921), Lotka(1923), Moshkovskii (1950) et George MacDonal (1957) [7]. Ross a élaboré deux modèles différents qui furent raffinés par Macdonald. Il avait déjà envisagé la dynamique de la transmission et le contrôle bien avant 1902, mais il n'a publié un premier modèle mathématique sur la propagation de la malaria qu'en 1908 [24]. Tous les éléments de la Théorie de Ross-Macdonald sont tombés avec la fin du programme global d'éradication de la malaria (Global Malaria Eradication Program , 1955-1969) et cette théorie a joué un rôle très important dans le développement des stratégies de prévention des maladies vectorielles [24]. La théorie mathématique a été solidifiée par Macdonald en 1950, puis par Garret-Jones [2].

Avant même la formulation du premier modèle mathématique de la propagation du paludisme par Ross, d'autres travaux de recherche sur les mécanismes de propagation de cette maladie avaient été entamés : signalons ceux du médecin militaire du Service de Santé des Armées, Charles Alphonse Laveran qui a démontré en 1880 que les parasites du paludisme se trouvent dans le sang humain, Ronald Ross lui même qui a démontré en 1897 que les moustiques dits anophèles sont les vecteurs du paludisme, et Giovanni Batista Grassi qui a démontré en 1898-1899 le cycle de vie d'un moustique [20,23]. Hawas et al (2010) ont utilisé les études de l'ADN afin de déterminer si une grave crise de paludisme combinée à une probable dégénération des os aurait tué le fils du Pharaon d'Égypte, le Roi Tutankhamer vers l'an 1324 avant J.C [12].

Ronald Ross est le premier à avoir énoncé ce qu'il a appelé le théorème du moustique (considéré aussi comme le premier résultat d'épidémiologie mathématique) qui est le suivant[21] :

Mosquito theorem :

1. Whatever the original number of malaria cases in the locality may have been, the ultimate endemic malaria ratio will tend to settle down to a fixed figure, dependent on the number of Anophelines and the other factors - that is, if these factors remains constant all the time.
2. If the number of Anophelines is sufficiently high, the ultimate malaria ratio (m) will become fixed at some figure between 0 and 1 (that is between 0% and 100%). If the number of Anophelines is sufficiently low (say below 40% per person), the ultimate malaria ratio will tend to zero - that is, the disease will tend to die

out. (In this calculation a negative malaria ratio, that is, one which is less than nothing, must be interpreted as meaning zero).

3. A small change in the constants (e.g. the Anopheline factor) may produce a great change in the malaria.

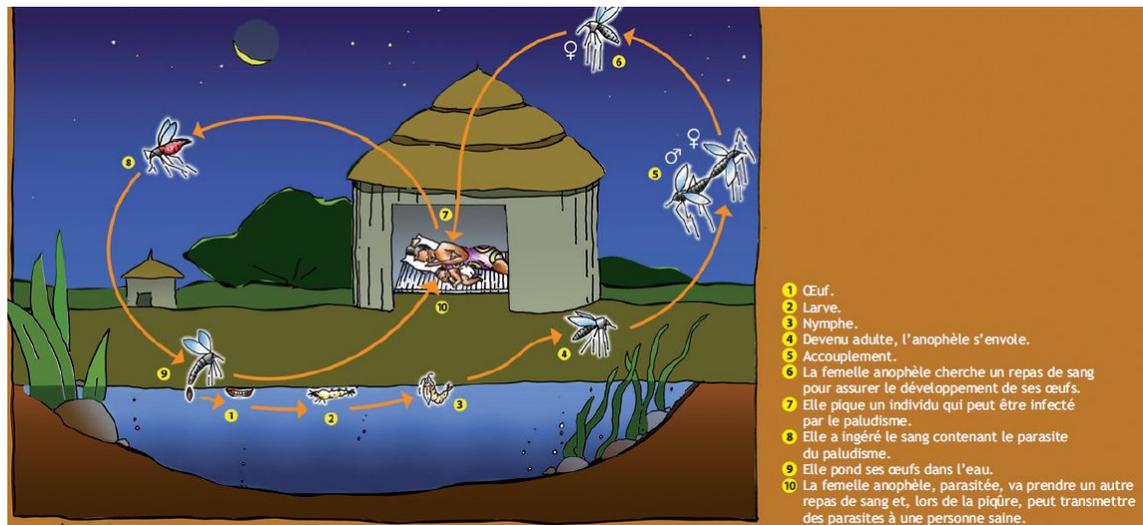


FIGURE 1.1. La vie de l'anophèle

1.3. CYCLE DE LA MALARIA

Le cycle se déroule successivement chez l'homme (phase asexuée chez l'hôte intermédiaire) et chez l'anophèle (phase sexuée chez l'hôte définitif). Chez l'homme le cycle est lui-même divisé en 2 phases à savoir la phase hépatique qui correspond à la phase d'incubation, cliniquement asymptomatique puis la phase sanguine qui correspond à la phase clinique de la maladie [27].

Les moustiques femelles pondent des oeufs dans l'eau et ces derniers deviennent des larves puis des nymphes. Dans les meilleures conditions, une nouvelle génération de moustiques sortira de ces nymphes dans 10 jours.

Après un accouplement, la femelle cherche un repas de sang pour assurer le développement de ses oeufs. Elle pique des humains qui peuvent être sains ou infectés. La femelle transmet alors à la personne saine des parasites du paludisme qui vont migrer vers le foie en moins d'une heure. Ces parasites se multiplient dans les cellules du foie pendant 7 à 10 jours. Les cellules du foie infectées libèrent des milliers de parasites dans le sang et les globules rouges sont envahis. Les parasites se multiplient dans les globules rouges entre 1 à 3 jours. Ces globules rouges éclatent et libèrent les parasites dans le sang et ces derniers provoquent les symptômes du paludisme. Après quelques jours, les formes sexuées apparaissent

dans le sang. Lorsqu'une anophèle ingère les formes sexuées du parasite, les parasites mâles et femelles se fécondent et produisent un oeuf qui traverse la paroi de l'estomac du moustique et s'accroche à sa face externe. L'oeuf se développe, les parasites se multiplient et engendrent des milliers de formes asexuées du parasite qui, à leur tour, migrent et envahissent les glandes salivaires du moustique. Ils peuvent alors être transmis à un homme au cours d'un repas de sang. La durée de vie d'une anophèle est en moyenne de 45 jours et le cycle larvaire s'arrête lorsque la température est inférieure à 16°C ou supérieure à 32°C [13].

Le cycle de la malaria est illustré dans les Figures 1.1 et 1.2.

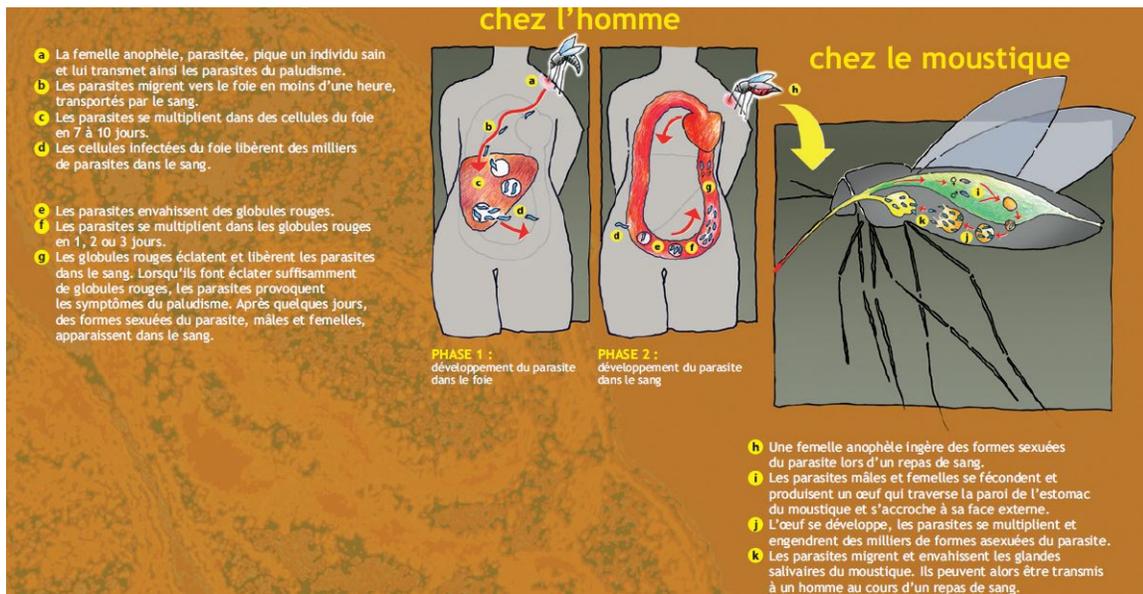


FIGURE 1.2. Cycle du parasite

1.4. QUELQUES MODÈLES MATHÉMATIQUES SUR LA MALARIA

1.4.1. Modèle de Ross

Dans son premier modèle mathématique sur la malaria, Ross montre que la réduction du nombre de moustiques en dessous d'un certain seuil est suffisante pour contrôler la maladie. Il divise la population humaine en deux compartiments à savoir les *Susceptibles* (S_h) et les *Infectés* (I_h) avec retour dans la classe des Susceptibles pour les individus infectés, ce qui conduit à la structure *SIS*. Les vecteurs sont aussi divisés en deux classes (S_m, I_m) ce qui conduit à la structure *SI*.

L'évolution de la fraction des individus dans les classes des infectés (I_h, I_m) a été étudié par Ross en utilisant deux équations différentielles ordinaires [18] :

$$\begin{aligned}\frac{dI_h}{dt} &= abmI_m(1 - I_h) - rI_h \\ \frac{dI_m}{dt} &= acI_h(1 - I_m) - \mu_2I_m\end{aligned}$$

avec

a : taux quotidien de piqûres à l'homme

b : proportion de piqûres produisant une infection sur l'humain

c : proportion de piqûres par lesquelles un moustique susceptible devient infecté

m : ratio du nombre de moustiques femelles/humains

r : taux moyen de guérison pour les humains

μ_2 : taux de mortalité des moustiques

Dans ce système, une hypothèse de population constante (normalisée à 1) de moustiques et des humains est implicitement introduite. De plus, si les deux équations sont de la même forme, le mécanisme de sortie du compartiment des infectés est différent : les humains guérissent mais les moustiquent meurent.

1.4.2. Modèle de Macdonald

Macdonald a modifié le modèle de Ross en y intégrant les informations biologiques de latence dans les moustiques suite au développement du parasite de la malaria. Il a aussi intégré la survivance des anophèles adultes [18] :

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= acI_h(1 - E_m - I_m) - acI_h(t - \tau_m)[1 - E_m(t - \tau_m)] \exp(-\mu_2\tau_m) - \mu_2E_m \\ \frac{dI_m}{dt} &= acI_h(t - \tau_m)[1 - E_m(t - \tau_m) - I_m(t - \tau_m)] \exp(-\mu_2\tau_m) - \mu_2I_m\end{aligned}$$

avec τ_m qui représente la période de latence des moustiques, estimée entre 5 et 15 jours.

1.4.3. Modèle de Anderson et May

Anderson et May [18] ont construit une extension des modèles de Ross et Macdonald en introduisant la classe des *Exposés* dans la population humaine. Leur modèle SEIS est composé de quatre équations différentielles ordinaires (EDO) décrivant l'évolution, en fonction du temps, des classes «*Exposés*» et «*Infectés*» tant pour l'hôte que pour les vecteurs. Leur modèle a la forme suivante :

$$\frac{dE^h(t)}{dt} = abmI^m(t)(1 - E^h(t) - I^h(t))$$

$$\begin{aligned}
& -abmI^m(t - \tau_h)[1 - E^h(t - \tau_h) - I^h(t - \tau_h)] \exp[-(r + \mu_1)\tau_h] \\
& -rE^h(t) - \mu_1E^h(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI^h}{dt} &= abmI^m(t - \tau_h)[1 - E^h(t - \tau_h) - I^h(t - \tau_h)] \exp[-(r + \mu_1)\tau_h] - rI^h(t) - \mu_1I^h(t) \\
\frac{dE^m(t)}{dt} &= acI^h(t)[1 - E^m(t) - I^m(t)] \\
& -acI^h(t - \tau_m)[1 - E^m(t - \tau_m) - I^m(t - \tau_m)] \exp(-\mu_2)\tau_m - \mu_2E^m(t) \\
\frac{dI^m}{dt} &= acI^h(t - \tau_m)[1 - E^m(t - \tau_m) - I^m(t - \tau_m)] \exp(-\mu_2)\tau_m - \mu_2I^m(t)
\end{aligned}$$

avec τ_h la période de latence des humains, estimée entre 10 et 100 jours.

1.4.4. Modèle de Tumwiine et Mugisha

Le modèle de Tumwiine et Mugisha [25] est du type *SIR* pour les hôtes et *SI* pour les vecteurs. Les individus de toutes les classes ont le même taux de mortalité. Ils excluent dans ce modèle les moustiques à partir du moment où ils ne participent pas au cycle d'infection. Leur modèle a la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{dS^h}{dt} &= \lambda^h N^h - \frac{abS^h I^v}{N^h} + \nu I^h + \gamma R^h - \mu^h S^h \\
\frac{dI^h}{dt} &= \frac{abS^h I^v}{N^h} - \nu I^h - r I^h - \delta I^h - \mu^h I^h \\
\frac{dR^h}{dt} &= r I^h - \nu R^h - \mu^h R^h \\
\frac{dS^v}{dt} &= \lambda^v N^v - \frac{acS^v I^h}{N^h} - \mu^v S^v \\
\frac{dI^v}{dt} &= \frac{acS^v I^h}{N^h} - \mu^v I^v
\end{aligned}$$

avec

S^h, I^h, R^h le nombre des hôtes Susceptibles, infectés et partiellement immunisés respectivement, au temps t ;

S^v, I^v le nombre de vecteurs susceptibles et Infectés respectivement au temps t ;

a le taux moyen quotidien de piqûre sur un humain par un moustique (taux d'infection) ;

b la proportion de piqûres produisant une infection sur l'homme ;

c la probabilité avec laquelle un moustique devient infectieux ;

γ le taux de perte d'immunité pour l'hôte ;

r taux d'acquisition d'immunité de l'hôte ;

δ taux de mortalité de l'hôte dû à la maladie ;

ν le taux de récupération des hôtes ;
 λ^h, λ^v les taux de natalité des hôtes et des vecteurs respectivement ;
 μ^h, μ^v les taux de mortalité naturelle des hôtes et des vecteurs respectivement.

1.5. FORMULATION DU MODÈLE

1.5.1. Description

Dans le présent modèle, nous considérons que le paludisme est transmis à une personne susceptible par un vecteur (moustique) infectieux et nous ignorons ou négligeons toute autre forme possible de transmission si elle existe (certains auteurs estiment par exemple que la malaria peut se transmettre d'une personne à une autre par transfusion sanguine, par piqûre d'aiguilles contaminées ou par greffe (ou transplantation) d'organes [2,3,30]).

Considérons une population divisée en deux groupes : le premier groupe est celui composé de la population des humains et des vecteurs d'une zone urbaine tandis que l'autre groupe sera celle d'une zone non urbaine (rurale). L'objectif étant de voir l'influence du déplacement des populations humaines sur la persistance de la maladie, considérons dans un premier temps un modèle mathématique en zone urbaine.

Nous divisons cette sous-population en quatre classes selon le modèle SEIR (Susceptibles, Exposés, Infectieux et Remis) en supposant que toute la population humaine est susceptible (l'âge et l'état des individus ne sont pas tenu en considération même si la vulnérabilité peut en dépendre). Appelons N_1^h la population humaine urbaine totale et $S_1^h, E_1^h, I_1^h, R_1^h$ le nombre des humains (hôtes) Susceptibles, Exposés, Infectieux et Remis respectivement, $N_1^h = S_1^h + E_1^h + I_1^h + R_1^h$.

On suppose que la population varie et cette variation est due aux naissances, à des morts, à l'émigration (qui peut être due à différentes causes : recherche de travail, visites,.....). La malaria étant aussi présente dans les zones rurales, les personnes qui font des déplacements (émigration) arrivent étant dans différents états. Nous supposons ici que les individus de toutes les catégories se déplacent (Susceptibles, Exposés, Infectieux et les Remis). Une des raisons importantes qui possiblement feraient que les différentes stratégies visant à éradiquer la malaria échouent est la négligence des immigrations et des visites [1,6]. Même si la période du stade Exposé est courte, nous supposons que le nombre d'émigrants exposés n'est pas négligeable [4]. Nous supposons aussi que seules les hôtes se déplacent et que les temps t et $t+1$ sont proches pour éviter qu'une classe soit vide suite à la courte période qui peut exister pour passer d'une certaine classe à l'autre (le passage de Exposé à Infectieux par exemple).

Quant à la population des vecteurs, nous considérons un modèle *SEI* car les vecteurs ne récupèrent pas. La classe des moustiques infectieux est finale; les moustiques ne quittent cette classe que lorsqu'ils meurent. De plus, il n'y a pas d'émigration chez les vecteurs car le vol du moustique ne dépasse pas en principe un ou deux kilomètres [21]. La variation de la population des vecteurs dépend du nombre de naissances et des morts, $N_1^v = S_1^v + E_1^v + I_1^v$.

1.5.2. Formulation et paramétrisation du modèle

Nous utiliserons le modèle de Jia Li [17] avec deux sous-populations ayant une interaction au niveau des hôtes. Appelons λ_1^h le taux d'infections des humains susceptibles en ville, γ_1^h le taux d'incubation des humains exposés avant de devenir infectieux, η_1^h le taux de guérison (récupération) des humains infectieux et θ_1^h le taux de perte de l'immunité par les humains qui avaient récupéré. Les mêmes paramètres sont utilisés pour la campagne avec indice 2. Nous considérons un déplacement unidirectionnel de la campagne vers la ville, correspondant à la recherche d'emplois (concentrés à la ville) ou de soins médicaux (qui y sont plus abondants)

La classe des hôtes susceptibles de la ville reçoit un apport constant de population noté ϵ_1 . Elle reçoit aussi une partie des hôtes susceptibles en provenance de la campagne avec un taux de Λ (qui est commun pour toutes les classes) et dont la valeur, positive, ne peut être arbitrairement grande. Une partie des éléments susceptibles devient exposée avec un taux d'infection λ_1^h . La portion restante (non infectée) a une probabilité de survie de α_{11}^h . Les individus exposés proviennent de la portion des susceptibles et d'une autre partie exposée provenant de la campagne avec un taux d'émigration Λ . Une partie de ces derniers devient infectieuse à un taux d'infection de γ_1^h et une autre partie reste exposée avec une probabilité de survie α_{21}^h . Quant à la classe des infectieux, ils récupèrent avec un taux de η_1^h et ceux qui n'ont pas récupéré ont une probabilité de survie de α_{31}^h dans la classe I_1^h . Tous les individus guéris ne le restent pas indéfiniment mais perdent l'immunité avec un taux de θ_1^h pour devenir susceptibles. Ceux qui n'ont pas encore perdu leur immunité restent dans la classe R_1^h avec une probabilité de survie de α_{41}^h . Nous supposons ici que les éléments qui vont passer de la classe du milieu rural vers le milieu urbain arrivent étant toujours dans l'état de départ.

Le modèle de la population des hôtes se présente sous la forme

$$\begin{aligned} S_1^h(t+1) &= \epsilon_1 + (1 - \lambda_1^h)\alpha_{11}S_1^h(t) + \theta_1^h R_1^h(t) + \Lambda S_2^h(t) \\ E_1^h(t+1) &= \lambda_1^h S_1^h(t) + (1 - \gamma_1^h)\alpha_{21}E_1^h(t) + \Lambda E_2^h(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1^h(t+1) &= \gamma_1^h E_1^h(t) + (1 - \eta_1^h) \alpha_{31}^h I_1^h(t) + \Lambda I_2^h(t) \\
R_1^h(t+1) &= \eta_1^h I_1^h(t) + (1 - \theta_1^h) \alpha_{41}^h R_1^h(t) + \Lambda R_2^h(t)
\end{aligned}$$

Les équations similaires pour la campagne peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}
S_2^h(t+1) &= \epsilon_2 + (1 - \lambda_2^h) \alpha_{12} S_2^h(t) + \theta_2^h R_2^h(t) - \Lambda S_2^h(t) \\
E_2^h(t+1) &= \lambda_2^h S_2^h(t) + (1 - \gamma_2^h) \alpha_{22} E_2^h(t) - \Lambda E_2^h(t) \\
I_2^h(t+1) &= \gamma_2^h E_2^h(t) + (1 - \eta_2^h) \alpha_{32}^h I_2^h(t) - \Lambda I_2^h(t) \\
R_2^h(t+1) &= \eta_2^h I_2^h(t) + (1 - \theta_2^h) \alpha_{42}^h R_2^h(t) - \Lambda R_2^h(t)
\end{aligned}$$

Pour ce qui est des vecteurs (moustiques), au temps $t + 1$, la classe des susceptibles contient les naissances de toutes les classes avec un taux de naissance b_1^v et une probabilité de survie des vecteurs nouvellement nés $\alpha_{b_1}^v$ supposée égale aux trois classes ainsi que des susceptibles qui ne sont pas exposés avec un taux de survie α_{11}^v . Les susceptibles deviennent exposés avec un taux d'incubation λ_1^v . Les exposés deviennent infectieux au taux γ_1^v et ceux qui ne sont pas infectieux ont une probabilité de survie α_{21}^v . Les individus infectieux ont une probabilité de survie de α_{31}^v et les équations du modèle peuvent donc s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
S_1^v(t+1) &= b_1^v \alpha_{b_1}^v (N_1^v(t)) N_1^v(t) + (1 - \lambda_1^v(t)) S_1^v(t) \alpha_{11}^v \\
E_1^v(t+1) &= \lambda_1^v(t) S_1^v(t) + (1 - \gamma_1^v) E_1^v(t) \alpha_{21}^v \\
I_1^v(t+1) &= \gamma_1^v E_1^v(t) + I_1^v(t) \alpha_{31}^v
\end{aligned}$$

où

b_1^v est le taux de naissance par tête en ville ;

$\alpha_{b_1}^v$ est la probabilité de survie des vecteurs nouveau-nés en ville (on suppose qu'elle est la même dans les trois classes) ;

$\lambda_1^v(t)$ est le taux d'infection des vecteurs susceptibles en ville

γ_1^v est le taux d'infection des vecteurs exposés

$\alpha_{11}^v, \alpha_{21}^v, \alpha_{31}^v$ sont les probabilités de survie des vecteurs susceptibles non infectés, des exposés non infectieux et des infectieux respectivement.

Un modèle similaire pour la campagne peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
S_2^v(t+1) &= b_2^v \alpha_{b_2}^v (N_2^v(t)) N_2^v(t) + (1 - \lambda_2^v(t)) S_2^v(t) \alpha_{12}^v \\
E_2^v(t+1) &= \lambda_2^v(t) S_2^v(t) + (1 - \gamma_2^v) E_2^v(t) \alpha_{22}^v \\
I_2^v(t+1) &= \gamma_2^v E_2^v(t) + I_2^v(t) \alpha_{32}^v
\end{aligned}$$

Schématiquement, le modèle SEIR pour les hôtes et SEI pour le vecteurs se représentent respectivement par les Figures 1.3 et 1.4

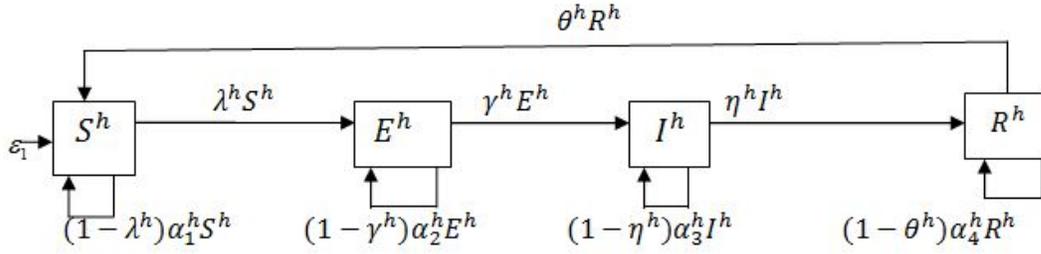


FIGURE 1.3. Représentation du modèle SEIR pour les hôtes

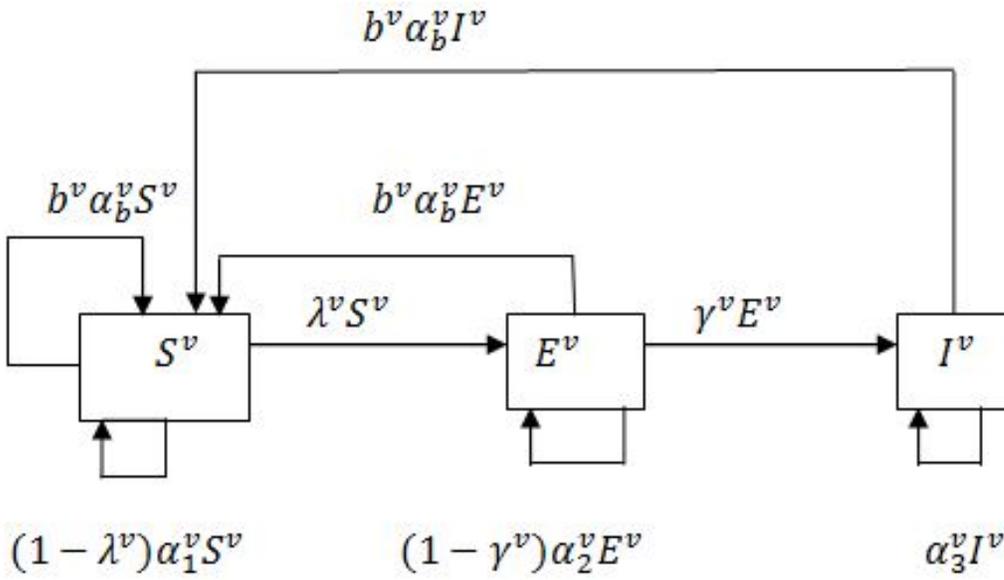


FIGURE 1.4. Représentation du modèle SEI pour les vecteurs

En supposant, comme dans [17], que r est le nombre moyen de piqûres qu'un seul moustique peut faire sur tous les humains en ville et avec β_1^h une probabilité de transmission par piqûre d'un moustique susceptible sur un humain infecté, on a

$$\lambda_1^v(t) = \beta_1^h r \frac{I_1^h(t)}{N_1^h(t)}.$$

Avec $\beta_1^h r < 1$, $\lambda_1^v(t)$ est déterminée comme dans [17] comme fonction de

$$L(t) = \beta_1^v r \frac{I_1^v}{N_1^h}$$

En effet, $L(t) = \beta_1^v r_1 \frac{I_1^v}{N_1^v}$, β_1^v étant la probabilité de transmission par piqûre d'un moustique infectieux à un humain susceptible et r_1 le nombre moyen de piqûres qu'un moustique peut faire sur tous les humains en ville toujours. De plus, r_1 et r satisfont la relation $r_1 N_1^h = r N_1^v$, ce qui permet d'écrire $L(t) = \beta_1^v r \frac{I_1^v}{N_1^h}$. $L(t)$ peut être supérieur à 1 car les vecteurs infectieux I_1^v peuvent être largement

supérieurs à N_1^h , malgré que $\beta_1^v r < 1$: ainsi, $\lambda_1^h(t) = G(L(t))$ avec $G(0) = 0$, et $\lim_{L \rightarrow \infty} G(L) = 1$.

De même, en supposant le cas similaire à la campagne, on a les expressions

$$\lambda_2^h = G\left(\frac{\beta_2^v r' I_2^v}{N_2^h}\right)$$

et

$$L_2(t) = \beta_2^v r' \frac{I_2^v}{N_2^h}$$

avec β_2^v la probabilité de transmission par piqûre d'un moustique infectieux à un humain susceptible et r_2 le nombre moyen de piqûres d'un moustique sur tous les humains à la campagne. Les expressions similaires à celles de la ville, avec indice 1, sont aussi valables avec indice 2 pour la campagne.

1.6. ÉQUILIBRE SANS MALADIE

A l'équilibre, le système satisfait les 14 équations suivantes :

$$S_1^h(t) = \epsilon_1 + (1 - \lambda_1^h)\alpha_{11}S_1^h(t) + \theta_1^h R_1^h(t) + \Lambda S_2^h(t) \quad (1)$$

$$E_1^h(t) = \lambda_1^h S_1^h(t) + (1 - \gamma_1^h)\alpha_{21}E_1^h(t) + \Lambda E_2^h(t) \quad (2)$$

$$I_1^h(t) = \gamma_1^h E_1^h(t) + (1 - \eta_1^h)\alpha_{31}I_1^h(t) + \Lambda I_2^h(t) \quad (3)$$

$$R_1^h(t) = \eta_1^h I_1^h(t) + (1 - \theta_1^h)\alpha_{41}R_1^h(t) + \Lambda R_2^h(t) \quad (4)$$

$$S_2^h(t) = \epsilon_2 + (1 - \lambda_2^h)\alpha_{12}S_2^h(t) + \theta_2^h R_2^h(t) - \Lambda S_2^h(t) \quad (5)$$

$$E_2^h(t) = \lambda_2^h S_2^h(t) + (1 - \gamma_2^h)\alpha_{22}E_2^h(t) - \Lambda E_2^h(t) \quad (6)$$

$$I_2^h(t) = \gamma_2^h E_2^h(t) + (1 - \eta_2^h)\alpha_{32}I_2^h(t) - \Lambda I_2^h(t) \quad (7)$$

$$R_2^h(t) = \eta_2^h I_2^h(t) + (1 - \theta_2^h)\alpha_{42}R_2^h(t) - \Lambda R_2^h(t) \quad (8)$$

$$S_1^v(t) = b_1^v \alpha_{b1}^v (N_1 v(t)) N_1^v(t) + (1 - \lambda_1^v(t)) S_1^v(t) \alpha_{11}^v \quad (9)$$

$$E_1^v(t) = \lambda_1^v(t) S_1^v(t) + (1 - \gamma_1^v) E_1^v(t) \alpha_{21}^v \quad (10)$$

$$I_1^v(t) = \gamma_1^v E_1^v(t) + I_1^v(t) \alpha_{31}^v \quad (11)$$

$$S_2^v(t) = b_2^v \alpha_{b2}^v (N_2 v(t)) N_2^v(t) + (1 - \lambda_2^v(t)) S_2^v(t) \alpha_{12}^v \quad (12)$$

$$E_2^v(t) = \lambda_2^v(t) S_2^v(t) + (1 - \gamma_2^v) E_2^v(t) \alpha_{22}^v \quad (13)$$

$$I_2^v(t) = \gamma_2^v E_2^v(t) + I_2^v(t) \alpha_{32}^v \quad (14)$$

En résolvant les 8 premières équations, par substitution inverse, en commençant par la dernière, nous avons :

$$(8) \text{ donne } R_2^h = \frac{\eta_2^h}{A_{42}^h} I_2^h \quad (8') \text{ avec } A_{42}^h = 1 + \Lambda - (1 - \theta_2^h)\alpha_{42}^h$$

$$(7) \text{ donne } I_2^h = \frac{\gamma_2^h}{A_{32}^h} E_2^h \quad (7') \text{ avec } A_{32}^h = 1 + \Lambda - (1 - \eta_2^h)\alpha_{32}^h$$

(6) donne $E_2^h = \frac{\lambda_2^h}{A_{22}^h} S_2^h$ (6') avec $A_{22}^h = 1 + \Lambda - (1 - \gamma_2^h) \alpha_{22}^h$.

(8'), (7') et (6') donnent $R_2^h = \frac{\eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h} S_2^h$ et $I_2^h = \frac{\gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h} S_2^h$,

(5) donne $[(1 + \Lambda - (1 - \lambda_2^h) \alpha_{12}^h) - \frac{\theta_2^h \eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h}] S_2^h = \epsilon_2$,

et donc $S_2^h = \frac{\epsilon_2}{[(1 + \Lambda - (1 - \lambda_2^h) \alpha_{12}^h) - \frac{\theta_2^h \eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h}]} \quad (\text{a})$

qu'on peut écrire comme

$$S_2^h = \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} \text{ avec } A_{12}^h = [(1 + \Lambda - (1 - \lambda_2^h) \alpha_{12}^h) - \frac{\theta_2^h \eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h}]$$

Cela fait que $R_2^h = \frac{\eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}$ (b), $I_2^h = \frac{\gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}$ (c), $E_2^h = \frac{\lambda_2^h}{A_{22}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}$ (d), de sorte que (4) et (b) donnent

$$R_1^h = \frac{\eta_1^h}{A_{41}^h} I_1^h + \frac{\Lambda \eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}, \text{ avec } A_{41}^h = 1 - (1 - \theta_1^h) \alpha_{41}^h$$

(3) donne

$$I_1^h = \frac{\gamma_1^h}{A_{31}^h} E_1^h + \frac{\Lambda \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}, \text{ avec } A_{31}^h = 1 - (1 - \eta_1^h) \alpha_{31}^h,$$

puis

$$E_1^h = \frac{\lambda_1^h}{A_{21}^h} S_1^h + \frac{\Lambda \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{21}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} \text{ avec } A_{21}^h = 1 - (1 - \gamma_1^h) \alpha_{41}^h$$

et

$$I_1^h = \frac{\gamma_1^h}{A_{31}^h} \left(\frac{\lambda_1^h}{A_{21}^h} S_1^h + \frac{\Lambda \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{21}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} \right) + \frac{\Lambda \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}$$

d'où

$$I_1^h = \frac{\gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h} S_1^h + \frac{\Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h} + \frac{\Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h}$$

et

$$R_1^h = \frac{\eta_1^h \gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} S_1^h + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h},$$

$$\begin{aligned} [1 - (1 - \lambda_1^h) \alpha_{11}^h - \frac{\theta_1^h \eta_1^h \gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} - \frac{\Lambda \epsilon_2}{A_{12}^h}] S_1^h &= \epsilon_1 + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} \\ &\quad + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h}, \end{aligned}$$

$$S_1^h = \frac{\epsilon_1}{A_{11}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \quad (\text{e})$$

$$\text{avec } A_{11}^h = [1 - (1 - \lambda_1^h)\alpha_{11}^h - \frac{\theta_1^h \eta_1^h \gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} - \frac{\Lambda \epsilon_2}{A_{12}^h}]$$

$$R_1^h = \frac{\eta_1^h \gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} \left[\frac{\epsilon_1}{A_{11}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right. \\ \left. + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right] (f)$$

$$I_1^h = \frac{\gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h} \left[\frac{\epsilon_1}{A_{11}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right] \\ + \frac{\Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h} + \frac{\Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h} (g)$$

et, finalement,

$$E_1^h = \frac{\lambda_1^h}{A_{21}^h} \left[\frac{\epsilon_1}{A_{11}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right] \\ + \frac{\Lambda \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{21}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} (h).$$

La résolution des six équations restantes donne successivement : à partir de (11), $E_1^v = \frac{(1 - \alpha_{31}^v)}{\gamma_1^v} I_1^v$ (11') et, à partir de (14), $E_2^v = \frac{(1 - \alpha_{32}^v)}{\gamma_2^v} I_2^v$ (14'). Puis, (10) et (13) donnent $\lambda_1^v S_1^v = A_{21}^v E_1^v$ (10') et $\lambda_2^v S_2^v = A_{22}^v E_2^v$ (13') avec $\lambda_1^v = \beta_1^h r_1^h \frac{I_1^h}{N_1^h}$ et $\lambda_2^v = \beta_2^h r_2^h \frac{I_2^h}{N_2^h}$, $A_{21}^v = 1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v$ et $A_{22}^v = 1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{22}^v$,

$$S_1^v = \frac{A_{21}^v (1 - \alpha_{31}^v) I_1^v}{\gamma_1^v} \frac{N_1^h}{\beta_1^h r_1^h I_1^h} (10'')$$

et

$$S_2^v = \frac{A_{22}^v (1 - \alpha_{32}^v) I_2^v}{\gamma_2^v} \frac{N_2^h}{\beta_2^h r_2^h I_2^h}. (13'')$$

(9) et (12) donnent $(1 - \alpha_{11}^v) S_1^v = b_1^v \alpha_{b1}^v [S_1^v + E_1^v + I_1^v] - \beta_1^h r_1^h \frac{I_1^h}{N_1^h} S_1^v \alpha_{11}^v$, d'où

$$S_1^v = \frac{b_1^v \alpha_{b1}^v (1 - \alpha_{31}^v + \gamma_1^v)^v}{I} \frac{1}{\gamma_1^v} (1 - \alpha_{11}^v - b_1^v \alpha_{b1}^v + \beta_1^h r_1^h \frac{I_1^h}{N_1^h} \alpha_{11}^v) (10''')$$

Par un raisonnement similaire on a :

$$S_2^v = \frac{b_2^v \alpha_{b2}^v (1 - \alpha_{32}^v + \gamma_2^v)^v}{I} \frac{2}{\gamma_2^v} (1 - \alpha_{12}^v - b_2^v \alpha_{b2}^v + \beta_2^h r_2^h \frac{I_2^h}{N_2^h} \alpha_{12}^v) (13''')$$

En comparant les équations (10'') et (10''') puis (13'') et (13''') on a :

$$\frac{A_{21}^v (1 - \alpha_{31}^v) I_1^v}{\gamma_1^v} \frac{N_1^h}{\beta_1^h r_1^h I_1^h} = \frac{b_1^v \alpha_{b1}^v (1 - \alpha_{31}^v + \gamma_1^v)^v}{I} \frac{1}{\gamma_1^v} (1 - \alpha_{11}^v - b_1^v \alpha_{b1}^v + \beta_1^h r_1^h \frac{I_1^h}{N_1^h} \alpha_{11}^v)$$

et

$$\frac{A_{22}^v(1 - \alpha_{32})I_2^v}{\gamma_2^v} \frac{N_2^h}{\beta^h r_2^h I_2^h} = \frac{b_2^v \alpha_{b2}^v (1 - \alpha_{32}^v + \gamma_2^v)^v}{I} \frac{1}{\gamma_2^v} (1 - \alpha_{12}^v - b_2^v \alpha_{b2}^v + \beta_2^h r_2^h \frac{I_2^h}{N_2^h} \alpha_{12}^v)$$

$$I_1^v = \frac{\beta_1^h r_1^h I_1^h}{A_{21}^v N_1^h (1 - \alpha_{31}^v)} \frac{b_1 \alpha_{b1}^v (1 - \alpha_{31}^v + \gamma_1^v)}{(1 - \alpha_{11}^v - b_1^v \alpha_{b1}^v + \beta_1^h r_1^h \frac{I_1^h}{N_1^h} \alpha_{11}^v)} I_1^v \quad (15)$$

puis

$$I_2^v = \frac{\beta_2^h r_2^h I_2^h}{A_{22}^v N_2^h (1 - \alpha_{32}^v)} \frac{b_2 \alpha_{b2}^v (1 - \alpha_{32}^v + \gamma_2^v)}{(1 - \alpha_{12}^v - b_2^v \alpha_{b2}^v + \beta_2^h r_2^h \frac{I_2^h}{N_2^h} \alpha_{12}^v)} I_2^v \quad (16)$$

L'équation (15) n'est valide que si $I_1^v = 0$ ou si le coefficient de I_1^v dans le second membre qui est

$$\frac{\beta_1^h r_1^h I_1^h}{A_{21}^v N_1^h (1 - \alpha_{31}^v)} \frac{b_1 \alpha_{b1}^v (1 - \alpha_{31}^v + \gamma_1^v)}{(1 - \alpha_{11}^v - b_1^v \alpha_{b1}^v + \beta_1^h r_1^h \frac{I_1^h}{N_1^h} \alpha_{11}^v)}$$

est égal à 1. Les informations contenues dans la deuxième condition ne nous intéressent pas ici.

Le même raisonnement s'applique pour l'équation (16). Ainsi, $I_1^v = I_2^v = 0$ (i) ce qui conduit à $E_1^v = E_2^v = I_1^h = R_1^h = E_1^h = I_2^h = R_2^h = E_2^h = 0$ (j) via les relations (11'),(14'),(b),(c),(d),(f),(g) et (h).

Les équations (10') et (13') sont satisfaites avec des valeurs notées S_{01}^v et S_{02}^v respectivement, qui sont positives et non nulles, suite au comportement de la fonction λ_1^v ou λ_2^v qui s'annule si I_1^v ou I_2^v est nulle. De plus, les expressions de S_{01}^h et S_{02}^h sont données par

$$\begin{aligned} S_{01}^h &= \frac{\epsilon_1 + \frac{\Lambda \epsilon_2}{1 + \Lambda - \alpha_{12}^h}}{1 - \alpha_{11}^h} \\ S_{01}^h &= \frac{(1 + \Lambda - \alpha_{12}^h) \epsilon_1 + \Lambda \epsilon_2}{(1 + \Lambda - \alpha_{12}^h)(1 - \alpha_{11}^h)} \\ &(k) \end{aligned}$$

et $S_{02}^h = \frac{\epsilon_2}{1 + \Lambda - \alpha_{12}^h}$ (l) en tenant compte du comportement de la fonction G définissant λ_1^h et λ_2^h . Les expressions (b),(c),(d),(f),(g),(h),(i),(j),(k),(l) donnent donc (finalement !) le point d'équilibre sans maladie

$$(E_1^v, E_2^v, I_1^v, I_2^v, E_1^h, E_2^h, I_1^h, I_2^h, S_1^v, S_2^v, S_1^h, S_2^h, R_1^h, R_2^h) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, S_{01}^v, S_{02}^v, S_{01}^h, S_{02}^h, 0, 0)$$

Chapitre 2

CALCUL DE R_0

2.1. DÉFINITION DE R_0

R_0 est un paramètre très important en épidémiologie mathématique. Il est défini comme le nombre moyen d'infections secondaires causées par un individu infectieux introduit dans une population entièrement susceptible. R_0 est considéré aussi comme une mesure de l'intensité de transmission d'une maladie et sa valeur permet de dire si une maladie tend à disparaître ou à persister, selon qu'elle est inférieure ou supérieure à 1 ([1],[20] et [18]). Pour les maladies transmises par des vecteurs, R_0 dépend aussi de la densité des vecteurs. Les facteurs environnementaux tels que la température, l'humidité, les précipitations et les vents ont une influence sur la reproduction des moustiques, leur développement, leur longévité ainsi que la survie du vecteur dans son cycle de développement [18]. Les entomologistes de l'OMS sous la direction de Garrett-Jones ont développé des méthodes pour la mesure de la transmission entomologique : pour remplacer R_0 , ils ont introduit la notion de «capacité vectorielle», ou taux de reproduction journalière, qu'ils ont défini comme le nombre prévu de piqûres de moustiques infectieux qui allait résulter de tous les moustiques qui mordent une seule personne totalement infectieuse sur une seule journée. La capacité vectorielle décrit aussi l'intensité potentielle de transmission des moustiques [8, 20].

2.2. CALCUL DE R_0

Pour calculer R_0 dans le cas d'un système en temps discret, nous employons l'approche des matrices de nouvelle génération [17, 15]. Pour les compartiments (classes) des infectés, les équations décrivant leur dynamique peuvent s'écrire, dans leur approximation linéaire, comme

$$X(t + 1) = (F + T)X(t) \tag{2.2.1}$$

où $X(t)$ est le nombre des individus infectieux dans chaque classe au temps t , F représente les nouvelles infections et T représente les transitions entre les classes.

La linéarisation au point d'équilibre de (2.2.1) donne naissance à deux matrices F et T qui sont non négatives. Le rayon spectral de T est inférieur à 1 et R_0 sera alors le rayon spectral de $[F(I - T)^{-1}]$ où I est la matrice identité.

Au point d'équilibre sans maladie, noté DFE (Disease Free Equilibrium) et donné par

$(E_1^v, E_2^v, I_1^v, I_2^v, E_1^h, E_2^h, I_1^h, I_2^h, S_1^v, S_2^v, S_1^h, S_2^h, R_1^h, R_2^h) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, S_{01}^v, S_{02}^v, S_{01}^h, S_{02}^h, 0, 0)$,
la matrice jacobienne est de la forme

$$J = \begin{pmatrix} F + T & 0 \\ A & C \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

avec F et T deux matrices non-négatives, et

$$P = F + T = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

avec :

$$P_1 = \begin{pmatrix} (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \gamma_2^v)\alpha_{22}^v & 0 & 0 \\ \gamma_1^v & 0 & \alpha_{31}^v & 0 \\ 0 & \gamma_2^v & 0 & \alpha_{32}^v \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_1^h r S_{01}^v}{S_{01}^h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2^h r' S_{02}^v}{S_{02}^h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & G'(0)\beta_1^v r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G'(0)\beta_2^v r' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} (1 - \gamma_1^h)\alpha_{21}^h & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \gamma_2^h)\alpha_{22}^h - \Lambda & 0 & 0 \\ \gamma_1^h & 0 & (1 - \eta_1^h)\alpha_{31}^h & \Lambda \\ 0 & \gamma_2^h & 0 & (1 - \eta_2^h)\alpha_{32}^h - \Lambda \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

et

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1^h r S_{01}^v}{S_{01}^h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2^h r' S_{02}^v}{S_{02}^h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'(0)\beta_1^v r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G'(0)\beta_2^v r' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$T_1 = P_1 \text{ et } T_2 = P_4$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11}^h & \Lambda & \theta_1^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{12}^h - \Lambda & 0 & \theta_2^h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - \theta_1^h)\alpha_{41}^h & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - \theta_2^h)\alpha_{42}^h - \Lambda \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

avec $C_{11} = b_1^v \alpha_{b1}^{v'}(S_{01}^v) S_{01}^v + b_1^v \alpha_{b1}^v(S_{01}^v) + \alpha_{11}^v$; $C_{22} = b_2^v \alpha_{b2}^{v'}(S_{02}^v) S_{02}^v + b_2^v \alpha_{b2}^v(S_{02}^v) + \alpha_{12}^v$
et

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_1^h r_1 S_{01}^v}{S_{01}^h} \alpha_{11}^v & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_2^h r_2 S_{02}^v}{S_{02}^h} \alpha_{12}^v \\ 0 & 0 & -G'(0)\beta_1^v r \alpha_{11}^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G'(0)\beta_2^v r' \alpha_{12}^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_2^h \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

avec

$$A_{11} = A_{13} = b_1^v \alpha_{b1}^{v'}(S_{01}^v) S_{01}^v + b_1^v \alpha_{b1}^v(S_{01}^v)$$

$$A_{22} = A_{24} = b_2^v \alpha_{b2}^{v'}(S_{02}^v) S_{02}^v + b_2^v \alpha_{b2}^v(S_{02}^v)$$

En cas d'absence de maladie, le point d'équilibre sans maladie (DFE) est localement stable et le rayon spectral de la matrice C est inférieur à 1, tout comme celui de la matrice T : $\rho(C), \rho(T) < 1$. La stabilité du système linéarisé dépend

des valeurs propres de $F + T$, et est indépendante de la matrice A .

De plus,

$$\sum_{i=1}^8 t_{ij} \leq 1 \quad (2.2.12)$$

pour $j = 1, 2, \dots, 8$.

Pour calculer R_0 , nous allons nous baser sur des formules de l'algèbre matricielle relatives aux matrices blocs suivantes :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (AD - ACA^{-1}B) \quad (2.2.15)$$

Donc, on peut écrire

$$(I - T) = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{22}^v & 0 & 0 \\ -\gamma_1^v & 0 & 1 - \alpha_{31}^v & 0 \\ 0 & -\gamma_2^v & 0 & 1 - \alpha_{32}^v \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

et

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \gamma_1^h)\alpha_{21}^h & -\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (1 - \gamma_2^h)\alpha_{22}^h + \Lambda & 0 & 0 \\ -\gamma_1^h & 0 & 1 - (1 - \eta_1^h)\alpha_{31}^h & -\Lambda \\ 0 & -\gamma_2^h & 0 & 1 - (1 - \eta_2^h)\alpha_{32}^h + \Lambda \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

En utilisant les formules matricielles ci-haut données on a :

$$(I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-(1-\gamma_1^v)\alpha_{21}^v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-(1-\gamma_2^v)\alpha_{22}^v} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_1^v}{(1-(1-\gamma_1^v)\alpha_{21}^v)(1-\alpha_{31}^v)} & 0 & \frac{1}{1-\alpha_{31}^v} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2^v}{(1-(1-\gamma_2^v)\alpha_{22}^v)(1-\alpha_{32}^v)} & 0 & \frac{1}{1-\alpha_{32}^v} \end{pmatrix} \quad (2.2.20)$$

et

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & d_{42} & 0 & d_{44} \end{pmatrix} \quad (2.2.21)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{1-(1-\gamma_1^h)\alpha_{21}^h} \\ d_{12} &= \frac{\Lambda}{(1-(1-\gamma_1^h)\alpha_{21}^h)(1-(1-\gamma_2^h)\alpha_{22}^h+\Lambda)} \\ d_{22} &= \frac{1}{1-(1-\gamma_2^h)\alpha_{22}^h+\Lambda} \\ d_{31} &= \frac{\gamma_1^h}{(1-(1-\gamma_1^h)\alpha_{21}^h)(1-(1-\eta_1^h)\alpha_{31}^h)} \\ d_{32} &= \frac{\Lambda\gamma_1^h}{(1-(1-\gamma_1^h)\alpha_{21}^h)(1-(1-\eta_1^h)\alpha_{31}^h)(1-(1-\gamma_2^h)\alpha_{22}^h+\Lambda)} + \frac{\Lambda\gamma_2^h}{(1-(1-\eta_1^h)\alpha_{31}^h)(1-(1-\eta_2^h)\alpha_{32}^h+\Lambda)(1-(1-\gamma_2^h)\alpha_{22}^h+\Lambda)} \\ d_{33} &= \frac{1}{1-(1-\eta_1^h)\alpha_{31}^h} \\ d_{42} &= \frac{\gamma_2^h}{(1-(1-\gamma_2^h)\alpha_{22}^h+\Lambda)(1-(1-\eta_2^h)\alpha_{32}^h+\Lambda)} \\ d_{44} &= \frac{1}{(1-(1-\eta_2^h)\alpha_{32}^h+\Lambda)} \end{aligned}$$

et donc

$$Q = F(I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{15} & q_{16} & q_{17} & q_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{26} & 0 & q_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{51} & 0 & q_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{62} & 0 & q_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.22)$$

avec

$$q_{15} = \frac{\gamma_1^h \beta_1^h r S_{01}^v}{S_{01}^h [1 - (1 - \gamma_1^h)\alpha_{21}^h] [1 - (1 - \eta_1^h)\alpha_{31}^h]} \quad (2.2.23)$$

$$q_{16} = V_1 + V_2 \quad (2.2.24)$$

où

$$V_1 = \frac{\Lambda \beta_1^h r S_{01}^v \gamma_1^h}{S_{01}^h (1 - (1 - \gamma_1^h)\alpha_{21}^h)(1 - (1 - \eta_1^h)\alpha_{31}^h)(1 - (1 - \gamma_2^h)\alpha_{22}^h + \Lambda)} \quad (2.2.25)$$

$$V_2 = \frac{\Lambda \beta_1^h r S_{01}^v \gamma_2^h}{S_{01}^h (1 - (1 - \eta_1^h) \alpha_{31}^h) (1 - (1 - \eta_2^h) \alpha_{32}^h + \Lambda) (1 - (1 - \gamma_2^h) \alpha_{22}^h + \Lambda)} \quad (2.2.26)$$

$$q_{17} = \frac{\beta_1^h r S_{01}^v}{S_{01}^h [1 - (1 - \eta_1^h) \alpha_{31}^h]} \quad (2.2.27)$$

$$q_{18} = \frac{\beta_1^h r S_{01}^v}{S_{01}^h [1 - (1 - \eta_1^h) \alpha_{31}^h] [(1 - (1 - \eta_2^h) \alpha_{32}^h) + \Lambda]} \quad (2.2.28)$$

$$q_{26} = \frac{\gamma_2^h \beta_2^h r' S_{02}^v}{S_{02}^h [1 - (1 - \gamma_2^h) \alpha_{22}^h + \Lambda] [1 - (1 - \eta_2^h) \alpha_{32}^h + \Lambda]} \quad (2.2.29)$$

$$q_{28} = \frac{\beta_2^h r' S_{02}^v}{S_{02}^h [(1 - (1 - \eta_2^h) \alpha_{32}^h) + \Lambda]} \quad (2.2.30)$$

$$q_{51} = \frac{G'(0) \beta_1^v r \gamma_1^v}{(1 - (1 - \gamma_1^v) \alpha_{21}^v) (1 - \alpha_{31}^v)} \quad (2.2.31)$$

$$q_{53} = \frac{G'(0) \beta_1^v r}{(1 - \alpha_{31}^v)} \quad (2.2.32)$$

$$q_{62} = \frac{G'(0) \beta_2^v r' \gamma_2^v}{(1 - (1 - \gamma_2^v) \alpha_{22}^v) (1 - \alpha_{32}^v)} \quad (2.2.33)$$

$$q_{64} = \frac{G'(0) \beta_2^v r'}{(1 - \alpha_{32}^v)} \quad (2.2.34)$$

En utilisant la formule du calcul du déterminant d'une matrice présentée sous forme de blocs, les racines du polynôme caractéristique $\det(Q - \lambda I) = 0$ donnent la valeur du rayon spectral. Ce calcul donne donc la valeur de R_0 comme

$$\max(\sqrt{q_{15} q_{51}}, \sqrt{q_{26} q_{62}}) \quad (2.2.35)$$

Le DFE est localement asymptotiquement stable si $R_0 \leq 1$, et est instable si $R_0 > 1$.

Le théorème suivant nous renseigne sur l'intervalle dans lequel se trouverait R_0 [16] :

Théorème Supposons une matrice standard d'un modèle de la dynamique des populations satisfaisant :

1) $X_{n+1} = P X_n, n=0,1,\dots$

2) $P = F + T$ avec $\rho(T) < 1$. Si on note $\rho(P)$ le facteur de croissance et $\rho(Q) = R_0$, alors une des expressions suivantes est valable :

$$\rho(P) = \rho(Q) = 1 \text{ ou } 1 < \rho(P) \leq R_0 \text{ ou } 0 \leq R_0 \leq \rho(P) < 1$$

2.3. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS DE R_0 ET SA DÉPENDANCE EN Λ

Vu la forme de R_0 , il est difficile d'obtenir son expression exacte car on ne sait pas laquelle des deux valeurs est la plus grande par rapport à l'autre, car elles dépendent des paramètres qui peuvent changer suivant le lieu. On ne peut pas donc facilement conclure sur l'influence du déplacement sur l'augmentation ou la diminution de R_0 .

Des expressions

$$\begin{aligned} q_{15} &= \frac{\gamma_1^h \beta_1^h r S_{01}^v}{S_{01}^h [1 - (1 - \gamma_1^h) \alpha_{21}^h] [1 - (1 - \eta_1^h) \alpha_{31}^h]} \\ q_{51} &= \frac{G'(0) \beta_1^v r \gamma_1^v}{(1 - (1 - \gamma_1^v) \alpha_{21}^v) (1 - \alpha_{31}^v)} \\ q_{26} &= \frac{\gamma_2^h \beta_2^h r' S_{02}^v}{S_{02}^h [1 - (1 - \gamma_2^h) \alpha_{22}^h + \Lambda] [1 - (1 - \eta_2^h) \alpha_{32}^h + \Lambda]} \\ q_{62} &= \frac{G'(0) \beta_2^v r' \gamma_2^v}{(1 - (1 - \gamma_2^v) \alpha_{22}^v) (1 - \alpha_{32}^v)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_{01}^v &= \frac{b_1^v \alpha_{b1}^v (1 - \alpha_{31}^v + \gamma_1^v)}{\gamma_1^v (1 - \alpha_{11}^v - b_1^v \alpha_{b1}^v)} \\ S_{02}^v &= \frac{b_2^v \alpha_{b2}^v (1 - \alpha_{32}^v + \gamma_2^v)}{\gamma_2^v (1 - \alpha_{12}^v - b_2^v \alpha_{b2}^v)} \\ S_{01}^h &= \frac{(1 + \Lambda - \alpha_{12}^h) \epsilon_1 + \Lambda \epsilon_2}{(1 + \Lambda - \alpha_{12}^h) (1 - \alpha_{11}^h)} \\ S_{02}^h &= \frac{\epsilon_2}{1 + \Lambda - \alpha_{12}^h} \end{aligned}$$

avec les paramètres, $\alpha_{11}^h = 0.6$; $\alpha_{12}^h = 0.5$; $\alpha_{21}^h = 0.8$; $\alpha_{22}^h = 0.5$; $\alpha_{31}^h = 0.7$; $\alpha_{32}^h = 0.3$; $\gamma_1^h = 0.7$; $\beta_1^h = 0.15$; $\beta_2^h = 0.09$; $\eta_1^h = 0.25$; $\eta_2^h = 0.15$; $r = 7$; $r' = 5$; $\alpha_{11}^v = 0.5$; $\alpha_{12}^v = 0.3$; $\alpha_{31}^v = 0.5$; $\alpha_{b1}^v = 0.4$; α_{b2}^v ; $b_1^v = 0.3$; $b_2^v = 0.2$; $\gamma_1^v = 0.8$; $\gamma_2^v = 0.5$; $\epsilon_1 = 5$; $\epsilon_2 = 2$; $\Lambda = 0.1$ on a : $S_{01}^v = 0.513$; $S_{02}^v = 2.25$; $S_{01}^h = 13.33$ et $S_{02}^h = 3.33$ qui donneront finalement $q_{15} = 0.0682$; $q_{26} = 2.247$; $q_{51} = 3.73G'(0)$; $q_{62} = 0.84G'(0)$.

Pour $r = 50$ et $r' = 30$, nous avons $q_{15} = 0.487$; $q_{26} = 13.487334$; $q_{51} = 26.642G'(0)$; $q_{62} = 5.04G'(0)$. Avec les mêmes valeurs qu'au premier cas mais avec $\Lambda = 0.2$ et $\epsilon_2 = 1$ on a q_{51} et q_{62} qui restent inchangés avec $q_{15} = 0.0682$ puis $q_{26} = 0.357$. En fin, pour $r = 50$, $r' = 30$, $\Lambda = 0.4$, $\epsilon_1 = 30$ et $\epsilon_2 = 20$ on a $S_{01}^h = 97.22$, $S_{02}^h = 25$ $q_{15} = 0.06692$ et $q_{26} = 0.096$

La grande difficulté est celle de trouver la valeur de $G'(0)$ même si l'on sait que $0 \leq G(L) < 1$.

En supposant aussi que le terme $G'(0)$ présent dans q_{51} et q_{62} a la même valeur en q_{51} et en q_{62} , on aurait R_0 qui proviendrait essentiellement de $\sqrt{q_{26}q_{62}}$ ce qui s'interpréterait comme l'apport du déplacement dans la diminution ou l'augmentation de R_0 .

Le problème majeur reste celui de déterminer les valeurs de Λ pour lesquelles on aura $q_{15}q_{51} \geq q_{26}q_{62}$ ou vice versa car S_{01}^h varie dans le même sens que Λ et S_{02}^h varie en sens contraire avec Λ . Si Λ augmente, S_{01}^h augmente mais q_{15} diminue tandis que S_{02}^h

2.4. POINTS FIXES ENDÉMIQUES

Supposons que le paramètre R_0 défini à la section 2.1 et donné par l'équation (2.2.35) satisfasse $R_0 > 1$, puis étudions l'existence des points d'équilibre endémique, avec des composantes positives. Revenant à la formulation du modèle dans la Section 1.5.2, en exprimant E_2^h, I_2^h et R_2^h en fonction de S_2^h , puis E_1^h, I_1^h et R_1^h en fonction de S_1^h , on a :

$$\begin{aligned}
E_2^h &= \frac{\lambda_2^h}{A_{22}^h} S_2^h \\
I_2^h &= \frac{\gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h} S_2^h \\
R_2^h &= \frac{\eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h} S_2^h \\
S_2^h &= \frac{\epsilon_2}{[(1 + \Lambda - (1 - \lambda_2^h)\alpha_{12}^h) - \frac{\theta_2^h \eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h}]} \\
E_1^h &= \frac{\lambda_1^h}{A_{21}^h} S_1^h + \frac{\Lambda \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{21}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} \\
I_1^h &= \frac{\gamma_1^h}{A_{31}^h} \left(\frac{\lambda_1^h}{A_{21}^h} S_1^h + \frac{\Lambda \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{21}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} \right) + \frac{\Lambda \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} \\
R_1^h &= \frac{\eta_1^h \gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} S_1^h + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \\
S_1^h &= \frac{\epsilon_1}{A_{11}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \\
N_2^h &= \frac{\epsilon_2}{[(1 + \Lambda - (1 - \lambda_2^h)\alpha_{12}^h) - \frac{\theta_2^h \eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h}]} + \frac{\gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} + \frac{\lambda_2^h}{A_{22}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} + \frac{\eta_2^h \gamma_2^h \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1^h &= \frac{\epsilon_1}{A_{11}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \\
&+ \frac{\lambda_1^h}{A_{21}^h} \left[\frac{\epsilon_1}{A_1^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right] \\
&+ \frac{\gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h} \left[\frac{\epsilon_1}{A_1^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right] \\
&+ \frac{\Lambda \lambda_2^h}{A_{22}^h A_{21}^h} \frac{\epsilon_2}{A_{12}^h} + \frac{\Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h} + \frac{\Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h} + \\
&\frac{\eta_1^h \gamma_1^h \lambda_1^h}{A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} \left[\frac{\epsilon_1}{A_1^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\theta_1^h \eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} \right. \\
&\left. + \frac{\theta_1^h \eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{11}^h A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h} \right] + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_1^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{21}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_1^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{31}^h A_{41}^h} + \frac{\eta_2^h \Lambda \epsilon_2 \lambda_2^h \gamma_2^h}{A_{12}^h A_{22}^h A_{32}^h A_{42}^h A_{41}^h}
\end{aligned}$$

On a donc $(1 - \alpha_{31}^h)I_1^v = \gamma_1^v E_1^v$ qui implique

$$I_1^v = \frac{\gamma_1^v}{(1 - \alpha_{31}^v)} E_1^v, \quad (11')$$

puis (10) qui donne $(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v)E_1^v = \lambda_1^v S_1^v$ et

$$E_1^v = \frac{\lambda_1^v}{(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v)} S_1^v \quad (10')$$

et donc, combinant ces deux dernières équations, $I_1^v = \frac{\gamma_1^v}{(1 - \alpha_{31}^v)} \frac{\lambda_1^v}{(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v)} S_1^v$.

D'autre part, l'équation (9) donne

$$S_1^v = \frac{b_1^v \alpha_{b1}^v (N_1^v) N_1^v}{(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{11}^v)}$$

et puisque $N_1^v = S_1^v + E_1^v + I_1^v$,

$$N_1^v = \left(1 + \frac{1}{(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v)} \left(\frac{\gamma_1^v}{1 - \alpha_{31}^v} + 1 \right) \lambda_1^v \right) S_1^v$$

et donc $N_1^v = (1 + B_{11}^v \lambda_1^v) S_1^v$ avec $B_{11}^v = \frac{1}{(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{21}^v)} \left(1 + \frac{\gamma_1^v}{1 - \alpha_{31}^v} \right)$,
 $\frac{b_1^v \alpha_{b1}^v (1 + B_{11}^v \lambda_1^v)}{(1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{11}^v)} = 1$ et $\alpha_{b1}^v (N_1^v) = \frac{1 - (1 - \gamma_1^v)\alpha_{11}^v}{(1 + B_{11}^v \lambda_1^v) b_1^v}$.

Un calcul similaire conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
E_2^v &= \frac{\lambda_2^v}{(1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{22}^v)} S_2^v \\
I_2^v &= \frac{\gamma_2^v}{(1 - \alpha_{32}^v)} \frac{\lambda_2^v}{(1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{22}^v)} S_2^v \\
S_2^v &= \frac{b_2^v \alpha_{b2}^v (N_2^v) N_2^v}{(1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{12}^v)} \\
N_2^v &= (1 + B_{12}^v \lambda_2^v) S_2^v
\end{aligned}$$

$$B_{12}^v = \frac{1}{(1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{22}^v)} \left(1 + \frac{\gamma_2^v}{1 - \alpha_{32}^v}\right)$$
$$\alpha_{b2}^v(N_2^v) = \frac{1 - (1 - \gamma_2^v)\alpha_{12}^v}{(1 + B_{12}^v\lambda_2^v)b_2^v}$$

Chapitre 3

COMPARAISON AVEC LE MODÈLE EN TEMPS CONTINU

Dans ce chapitre, nous allons formuler un modèle semblable à celui du premier chapitre mais en temps continu, déterminer l'existence et la stabilité du point d'équilibre sans maladie et calculer R_0 pour voir s'il serait influencé par le déplacement de la population entre les deux régions considérées.

3.1. FORMULATION DU MODÈLE EN TEMPS CONTINU

Pour formuler ce modèle, nous allons nous baser sur la combinaison des modèles de Ngwa-Shu [19] et celui de Chitnis [3] auxquels nous allons ajouter des déplacements des humains de la campagne vers la ville comme pour le modèle en temps discret. Contrairement au modèle de Ngwa-Shu, les humains infectieux ne reviendront à la classe des Susceptibles qu'après avoir acquis une immunité (tous les humains infectieux doivent passer dans la classe R_1^h avant de devenir susceptibles). Le modèle se présente comme suit :

$$\frac{dS_1^h}{dt} = g_1^h N_1^h + \theta_1^h R_1^h - (\mu_1^h + \mu_1^h N_1^h) S_1^h - \left(\frac{C_1^{vh} a_1 I_1^v}{N_1^h} \right) S_1^h + \Lambda S_2^h \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dE_1^h}{dt} = \left(\frac{C_1^{vh} a_1 I_1^v}{N_1^h} \right) S_1^h - (\nu_1^h + \mu_1^h + \mu_1^h N_1^h) E_1^h + \Lambda E_2^h \quad (3.1.2)$$

$$\frac{dI_1^h}{dt} = \nu_1^h E_1^h - (q_1^h + \mu_{d1} + \mu_1^h + \mu_1^h N_1^h) I_1^h + \Lambda I_2^h \quad (3.1.3)$$

$$\frac{dR_1^h}{dt} = q_1^h I_1^h - (\theta_1^h + \mu_1^h + \mu_1^h N_1^h) R_1^h + \Lambda R_2^h \quad (3.1.4)$$

$$\frac{dS_1^v}{dt} = g_1^v N_1^v - (\mu_1^v + \mu_1^v N_1^v) S_1^v - \left(\frac{C_1^{hv} a_1 I_1^h}{N_1^h} \right) S_1^v - \left(\frac{\tilde{C}_1^{hv} a_1 R_1^h}{N_1^h} \right) S_1^v \quad (3.1.5)$$

$$\frac{dE_1^v}{dt} = \left(\frac{C_1^{hv} a_1 I_1^h}{N_1^h} \right) S_1^v + \left(\frac{\tilde{C}_1^{hv} a_1 R_1^h}{N_1^h} \right) S_1^v - (\nu_1^v + \mu_1^v + \mu_1^v N_1^v) E_1^v \quad (3.1.6)$$

$$\frac{dI_1^v}{dt} = \nu_1^v E_1^v - (\mu_1^v + \mu_1^v N_1^v) I_1^v \quad (3.1.7)$$

Le modèle pour la campagne s'écrit comme suit :

$$\frac{dS_2^h}{dt} = g_2^h N_2^h + \theta_2^h R_2^h - (\mu_2^h + \mu_2^h N_2^h) S_2^h - \left(\frac{C_2^{vh} a_2 I_2^v}{N_2^h} \right) S_2^h - \Lambda S_2^h \quad (3.1.8)$$

$$\frac{dE_2^h}{dt} = \left(\frac{C_2^{vh} a_2 I_2^v}{N_2^h} \right) S_2^h - (\nu_2^h + \mu_2^h + \mu_2^h N_2^h) E_2^h - \Lambda E_2^h \quad (3.1.9)$$

$$\frac{dI_2^h}{dt} = \nu_2^h E_2^h - (q_2^h + \mu_2^h + \mu_2^h N_2^h) I_2^h - \Lambda I_2^h \quad (3.1.10)$$

$$\frac{dR_2^h}{dt} = q_2^h I_2^h - (\theta_2^h + \mu_2^h + \mu_2^h N_2^h) R_2^h - \Lambda R_2^h \quad (3.1.11)$$

$$\frac{dS_2^v}{dt} = g_2^v N_2^v - (\mu_2^v + \mu_2^v N_2^v) S_2^v - \left(\frac{C_2^{hv} a_2 I_2^h}{N_2^h} \right) S_2^v - \left(\frac{\tilde{C}_2^{hv} a_2 R_2^h}{N_2^h} \right) S_2^v \quad (3.1.12)$$

$$\frac{dE_2^v}{dt} = \left(\frac{C_2^{hv} a_2 I_2^h}{N_2^h} \right) S_2^v + \left(\frac{\tilde{C}_2^{hv} a_2 R_2^h}{N_2^h} \right) S_2^v - (\nu_2^v + \mu_2^v + \mu_2^v N_2^v) E_2^v \quad (3.1.13)$$

$$\frac{dI_2^v}{dt} = \nu_2^v E_2^v - (\mu_2^v + \mu_2^v N_2^v) I_2^v \quad (3.1.14)$$

avec

$g_1^h, g_2^h, g_1^v, g_2^v$: taux de naissance chez les humains et les vecteurs aux deux régions ;

θ_1^h, θ_2^h : taux de perte d'immunité chez les humains

Λ : taux d'émigration de la campagne vers la ville ;

C_1^{vh}, C_2^{vh} : infectiosité des vecteurs ;

C_1^{hv}, C_2^{hv} : infectiosité des humains infectieux (I_1^h, I_2^h respectivement) ;

$\tilde{C}_1^{hv}, \tilde{C}_2^{hv}$: infectiosité des humains qui ont récupéré (R_1^h, R_2^h respectivement)

a_1, a_2 : taux de piqûres des moustiques aux humains en ville et à la campagne respectivement

$\mu_1^h, \mu_2^h, \mu_1^v, \mu_2^v$: taux de mortalité des humains et des vecteurs suites à la maladie ;

$\mu_1^h, \mu_2^h, \mu_1^v, \mu_2^v$: taux de mortalité des humains et des vecteurs non dus à la maladie.

3.2. EQUILIBRE SANS MALADIE ET STABILITÉ

L'équilibre sans maladie correspond à l'état du système où toutes les classes sont nulles sauf les classes des susceptibles. Ainsi, ce point correspond à

$$(E_1^h, E_2^h, E_1^v, E_2^v, I_1^h, I_2^h, I_1^v, I_2^v, R_1^h, R_2^h, S_1^h, S_2^h, S_1^v, S_2^v) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, S_1^{h*}, S_2^{h*}, S_1^{v*}, S_2^{v*})$$

En ce point, les équations (3.1.1), (3.1.5), (3.1.8), (3.1.12) s'écrivent :

$$\frac{dS_1^h}{dt} = g_1^h S_1^h - (\mu_1'^h + \mu_1^h S_1^h) S_1^h + \Lambda S_2^h \quad (3.2.1)$$

$$\frac{dS_1^v}{dt} = g_1^v S_1^v - (\mu_1'^v + \mu_1^v S_1^v) S_1^v \quad (3.2.2)$$

$$\frac{dS_2^h}{dt} = g_2^h S_2^h - (\mu_2'^h + \mu_2^h S_2^h) S_2^h - \Lambda S_2^h \quad (3.2.3)$$

$$\frac{dS_2^v}{dt} = g_2^v S_2^v - (\mu_2'^v + \mu_2^v S_2^v) S_2^v \quad (3.2.4)$$

et $g_2^h S_2^h - (\mu_2'^h + \mu_2^h S_2^h) S_2^h - \Lambda S_2^h = 0$ implique $S_2^h (g_2^h - \mu_2'^h - \mu_2^h S_2^h - \Lambda) = 0$
 $S_2^h = 0$ ou

$$S_2^{h*} = \frac{g_2^h - \mu_2'^h - \Lambda}{\mu_2^h} > 0 \quad (3.2.5)$$

car $g_2^h > \mu_2'^h + \Lambda$

(3.2.1) s'écrit $g_1^h S_1^h - (\mu_1'^h + \mu_1^h S_1^h) S_1^h + \Lambda S_2^h = 0$; $\mu_1^h [S_1^h]^2 + [\mu_1'^h - g_1^h] S_1^h - \Lambda S_2^h = 0$

$$S_1^h = \frac{g_1^h - \mu_1'^h \pm \sqrt{(\mu_1'^h - g_1^h)^2 + 4\Lambda\mu_1^h S_2^h}}{2\mu_1^h} \quad (3.2.6)$$

Puisque nous avons besoin de $S_1^h > 0$,

$$S_1^{h*} = \frac{g_1^h - \mu_1'^h + \sqrt{(\mu_1'^h - g_1^h)^2 + 4\Lambda\mu_1^h S_2^h}}{2\mu_1^h} \quad (3.2.7)$$

(3.2.2) donne $g_1^v S_1^v - (\mu_1'^v + \mu_1^v S_1^v) S_1^v = 0$

$S_1^v = 0$ ou

$$S_1^{v*} = \frac{g_1^v - \mu_1'^v}{\mu_1^v} > 0 \quad (3.2.8)$$

De même, l'équation (3.2.4) donne

$$S_2^{v*} = \frac{g_2^v - \mu_2'^v}{\mu_2^v} > 0 \quad (3.2.9)$$

Le point d'équilibre sans maladie $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, S_1^h, S_2^h, S_1^v, S_2^v)$ existe et est unique. Ce DFE sera stable si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne obtenue en linéarisant le système des 14 équations ont leurs parties réelles négatives. Il sera instable si une de ces valeurs propres a une partie réelle positive [28].

3.3. CALCUL DE R_0

Pour calculer R_0 pour le système formé des équations (3.1.1) – (3.1.14), nous allons suivre la procédure de P. van den Driessche et Watmough [28] de même que le modèle de Daozhou Gao et Shigui Ruan [5].

Ainsi, pour un système $\dot{\mathcal{X}}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x)$, R_0 est donné par le rayon spectral de FV^{-1} où $F = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0)$ et $V = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0)$. Les éléments de la matrice F qui est positive représentent les nouvelles infections.

Les variables sont rangées comme pour le DFE et nous avons :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{28} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{35} & 0 & 0 & 0 & F_{39} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{46} & 0 & 0 & 0 & F_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

et

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -V_{51} & 0 & 0 & 0 & V_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -V_{62} & 0 & 0 & 0 & V_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -V_{73} & 0 & 0 & 0 & V_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -V_{84} & 0 & 0 & 0 & V_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -V_{95} & 0 & 0 & 0 & V_{99} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V_{10,6} & 0 & 0 & 0 & V_{10,10} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

où

$$V_{11} = \nu_1^h + \mu_1'^h + \mu_1^h S_1^{h*};$$

$$V_{22} = \nu_2^h + \Lambda + \mu_2'^h + \mu_2^h S_2^{h*};$$

$$V_{33} = \nu_1^v + \mu_1'^v + \mu_1^v S_1^{v*};$$

$$V_{44} = \nu_2^v + \mu_2'^v + \mu_2^v S_2^{v*};$$

$$V_{51} = \nu_1^h; V_{55} = q_1^h + \mu_{d1} + \mu_1'^h + \mu_1^h S_1^{h*};$$

$$V_{62} = \nu_2^h; V_{66} = q_2^h + \mu_{d2} + \mu_2'^h + \Lambda + \mu_2^h S_2^{h*};$$

$$V_{73} = \nu_1^v; V_{77} = \mu_1'^v + \mu_1^v S_1^{v*};$$

$$V_{84} = \nu_2^v; V_{88} = \mu_2'^v + \mu_2^v S_2^{v*};$$

$$V_{95} = q_1^h; V_{99} = \theta_1^h + \mu_1'^h + \mu_1^h S_1^{h*}; V_{10,10} = \theta_2^h + \mu_2'^h + \Lambda + \mu_2^h S_2^{h*}$$

et

$$\begin{aligned} F_{12} &= \Lambda; F_{17} = C_1^{vh} a_1; F_{28} = C_2^{vh} a_2; \\ F_{35} &= C_1^{hv} a_1 \frac{S_1^{v*}}{S_1^{h*}}; F_{39} = \tilde{C}_1^{hv} a_1 \frac{S_1^{v*}}{S_1^{h*}}; F_{46} = C_2^{hv} a_2 \frac{S_2^{v*}}{S_2^{h*}}; F_{4,10} = \tilde{C}_2^{hv} a_2 \frac{S_2^{v*}}{S_2^{h*}}; \\ F_{56} &= \Lambda; F_{9,10} = \Lambda \end{aligned}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{V_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{44}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{V_{51}}{V_{11}V_{55}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{55}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V_{62}}{V_{22}V_{66}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{66}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_{73}}{V_{33}V_{77}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{77}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{V_{84}}{V_{44}V_{88}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{88}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V_{95}}{V_{55}V_{99}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{99}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V_{10,6}}{V_{66}V_{10,10}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_{10,10}} \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

La matrice de seconde génération est alors donnée par :

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & 0 & 0 & 0 & q_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{24} & 0 & 0 & 0 & q_{28} & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & 0 & 0 & q_{35} & 0 & 0 & 0 & q_{39} & 0 \\ 0 & q_{42} & 0 & 0 & 0 & q_{46} & 0 & 0 & 0 & q_{4,10} \\ 0 & q_{52} & 0 & 0 & 0 & q_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{96} & 0 & 0 & 0 & q_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } q_{12} &= \frac{F_{12}}{V_{22}}; q_{13} = \frac{F_{17}V_{73}}{V_{33}V_{77}}; q_{17} = \frac{F_{17}}{V_{77}}; q_{24} = \frac{F_{28}V_{84}}{V_{44}V_{88}}; q_{28} = \frac{F_{28}}{V_{88}}; q_{31} = \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}}; \\ q_{35} &= \frac{F_{35}}{V_{22}} + \frac{F_{39}V_{95}}{V_{55}V_{99}}; q_{39} = \frac{F_{39}}{V_{99}}; q_{42} = \frac{F_{46}V_{62}}{V_{22}V_{66}}; q_{46} = \frac{F_{46}}{V_{66}} + \frac{F_{4,10}V_{10,6}}{V_{66}V_{10,10}}; q_{4,10} = \frac{F_{4,10}}{V_{10,10}}; \\ q_{52} &= \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}}; q_{56} = \frac{F_{56}}{V_{66}}; q_{96} = \frac{F_{9,10}V_{10,6}}{V_{66}V_{10,10}}; q_{9,10} = \frac{F_{9,10}}{V_{10,10}} \end{aligned}$$

R_0 sera le rayon spectral de la matrice FV^{-1} . En utilisant les formules de l'algèbre matricielle sur le calcul des déterminants énoncées au deuxième chapitre, on a :

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

avec

$$(FV^{-1} - \lambda I) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

C étant une matrice nulle, $\det(FV^{-1} - \lambda I) = \det(AD)$ avec A,D des matrices 5x5 et I la matrice unité 5x5.

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda \frac{F_{12}}{V_{22}} & -\lambda \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} & 0 & 0 \\ \frac{F_{28}V_{84}F_{9,10}V_{10,6}}{V_{44}V_{88}V_{66}V_{10,10}} & \lambda^2 & 0 & 0 & \frac{F_{28}F_{9,10}V_{84}}{V_{44}V_{88}V_{10,10}} \\ -\lambda \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ -\lambda \frac{F_{9,10}V_{10,6}}{V_{66}V_{10,10}} & -\lambda \frac{F_{46}V_{62}}{V_{22}} V_{66} & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}} & 0 & 0 & 0\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

$$\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$$

$$\lambda^2 D \det \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda \frac{F_{12}}{V_{22}} & -\lambda \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} & 0 \\ \frac{F_{28}V_{84}F_{9,10}V_{10,6}}{V_{44}V_{88}V_{66}V_{10,10}} & \lambda^2 & 0 & \frac{F_{28}F_{9,10}V_{84}}{V_{44}V_{88}V_{10,10}} \\ -\lambda \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} & 0 & \lambda^2 & 0 \\ -\lambda \frac{F_{9,10}V_{10,6}}{V_{66}V_{10,10}} & -\lambda \frac{F_{46}V_{62}}{V_{22}} V_{66} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}} & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.7)$$

$$\lambda^4 \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda \frac{F_{12}}{V_{22}} & -\lambda \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} \\ \frac{F_{28}V_{84}F_{9,10}V_{10,6}}{V_{44}V_{88}V_{66}V_{10,10}} & \lambda^2 & 0 \\ -\lambda \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} & 0 & \lambda^2 \end{vmatrix} + \lambda^2 \frac{F_{28}F_{9,10}V_{84}}{V_{44}V_{88}V_{10,10}} \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda \frac{F_{12}}{V_{22}} & -\lambda \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} \\ -\lambda \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} & 0 & \lambda^2 \\ -\lambda \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\lambda^{10} - \lambda^8 \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} + \left(\frac{F_{12}}{V_{22}} + \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}} \frac{F_{28}F_{9,10}V_{84}}{V_{44}V_{88}V_{10,10}} \right) \lambda^7 - \lambda^5 \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}} \frac{F_{28}F_{9,10}V_{84}}{V_{44}V_{88}V_{10,10}} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} + (F_{12}V_{10,6} + F_{56}V_{62}) \frac{F_{28}V_{84}F_{9,10}}{V_{22}V_{44}V_{66}V_{88}V_{10,10}} \lambda^2 - \frac{F_{12}V_{73}}{V_{33}V_{77}} \frac{F_{35}V_{51}}{V_{11}V_{55}} \frac{F_{56}V_{62}}{V_{22}V_{66}} \frac{F_{28}F_{9,10}V_{84}}{V_{44}V_{88}V_{10,10}} \quad (3.3.9)$$

R_0 sera la plus grande valeur absolue (ou module dans le cas complexe) de la racine de l'équation (3.3.9). En réécrivant l'équation (3.3.9) sous la forme

$$\lambda^5 - A\lambda^3 + (b_1 + b_2)\lambda^2 - Ab_2 \quad (3.3.10)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_{12}V_{73} F_{35}V_{51}}{V_{33}V_{77} V_{11}V_{55}} \\ b_1 &= \frac{F_{12}V_{10,6}F_{28}V_{84}F_{9,10}}{V_{22}V_{44}V_{66}V_{88}V_{10,10}} \\ b_2 &= \frac{F_{56}V_{62}F_{28}V_{84}F_{9,10}}{V_{22}V_{44}V_{66}V_{88}V_{10,10}} \end{aligned}$$

nous avons :

$P(0) = -Ab_2 < 0$ et $P(1) = 1 - A + b_1 + b_2 - Ab_2$ équivalent à

$P(1) = (1 - A)(1 + b_2) + b_1$. Avec les valeurs de A qui sont toujours inférieures à 1, $P(1) > 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution entre 0 et 1. De plus, la dérivée $P'(\lambda) = 5\lambda^4 - 3A\lambda^2 + (b_1 + b_2)\lambda$ est toujours positive dans $[1, +\infty[$ et $P(\lambda)$ est continue sur \mathbb{R} . On conclut alors qu'il n'existe pas de racine du polynôme $P(\lambda)$ dans $[1, +\infty[$ car il est monotone.

Règle de Descartes

Soit $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ et soit $v(P(\lambda))$ le nombre de variations dans les coefficients de $P(\lambda)$. Alors le nombre de racines réelles positives de $P(\lambda)$, compte tenu des multiplicités, est soit égal à $v(P(\lambda))$, soit inférieur à $v(P(\lambda))$ d'un nombre impair.[26]

En se référant à cette règle, le nombre de variations de signes dans l'équation (3.3.10) est 3. Le nombre de racines réelles positives est soit 3 ou 1.

Le théorème de Frobenius [10] sur les matrices non-négatives irréductibles nous permet de conclure sur la valeur de R_0 .

Théorème de Frobenius

Une matrice non-négative irréductible $M = \| m_{ik} \|_1^n$ a toujours une valeur caractéristique positive r qui est une racine simple de l'équation caractéristique. Les modules de toutes les autres valeurs caractéristiques ne sont pas supérieurs à r . À la valeur caractéristique «maximale» r , il correspond un vecteur caractéristique de coordonnées positives. De plus, si M possède h valeurs caractéristiques $\lambda_0 = r, \lambda_0, \dots, \lambda_{h-1}$ de module r , ces nombres sont distincts et sont des racines de l'équation $\lambda^h - r^h$.

La matrice A dans l'expression(3.3.5) est-non négative et irréductible ; la matrice D possède la seule valeur propre 0 de multiplicité 5, ce qui rend la matrice de (3.3.4) irréductible et satisfaisant les hypothèses du théorème de Frobenius ; d'où $R_0 < 1$.

Chapitre 4

COMPARAISON DU MODÈLE AVEC D'AUTRES MODÈLES

Dans ce chapitre, nous allons établir une comparaison entre notre modèle et un certain nombre d'autres modèles de propagation de la malaria récemment analysés. Nous identifierons d'abord les similitudes entre ces modèles, incluant le nôtre, puis les différences et terminerons par une description de leurs forces et faiblesses.

4.1. INTÉGRATION DU DÉPLACEMENT DANS LE MODÈLE

La persistance de la malaria est liée au déplacement des populations d'une région à l'autre mais la façon de l'intégrer dans un modèle reste discutée et non consensuelle. Dans le modèle de Ross-Macdonald, qui était très simplifié, les populations des humains et des vecteurs étaient constantes mais aussi l'immunité partielle n'était pas prise en compte. Torres-Sorando [6] distingue deux types de déplacement : un déplacement entre les régions, unidirectionnel et donc sans retour, et une visite, où les individus retournent à leur compartiment de départ après en avoir visité au moins un autre.

Les deux types de mouvement sont intégrés dans le modèle de Cosner *et al* [6] comme suit :

$$\frac{dX_i}{dt} = \left(\sum_{j=1}^N A_{ij} Y_j \right) (H_i - X_i) - r_i X_i \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dY_i}{dt} = \left(\sum_{j=1}^N B_{ij} X_j \right) (V_i - Y_i) - \mu_i Y_i \quad (4.1.2)$$

pour les visites et

$$\frac{dX_i}{dt} = A_i Y_i (H_i^* - X_i) - r_i X_i + \sum_{j=1}^N C_{ij} X_j \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dY_i}{dt} = B_i X_i (V_i^* - X_i) - \mu_i Y_i + \sum_{j=1}^N D_{ij} Y_j \quad (4.1.4)$$

pour le déplacement sans retour avec $A_i = \frac{a_i b_i \exp(-\mu_i \tau_i)}{H_i^*}$ et $B_i = \frac{a_i c_i}{H_i^*}$, X_i et Y_i désignant le nombre d'humains et de vecteurs infectés respectivement et H_i et V_i désignant le nombre total d'humains et de vecteurs dans le i ème compartiment en isolation, respectivement. De plus, r_i et μ_i sont respectivement le taux de guérison des humains et le taux de mortalité des vecteurs, A_{ij} et B_{ij} mesurent les taux avec lesquels un vecteur provenant du compartiment j pique et infecte un hôte du compartiment i et un hôte du compartiment i est infecté par un vecteur du compartiment j , respectivement, a_i et τ_i sont respectivement le taux d'alimentation humain et la période d'incubation innée de la malaria avec les moustiques, b_i et c_i mesurent respectivement la transmission efficace par un moustique infecté à une personne susceptible et par une personne infectée à un moustique susceptible dans le compartiment i , et C_{ij} et D_{ij} sont respectivement les taux de déplacement des humains et des moustiques du compartiment j au compartiment i ; (H_1^*, \dots, H_N^*) et (V_1^*, \dots, V_N^*) sont respectivement les tailles des humains et des moustiques à l'équilibre. Ces paramètres satisfont à des conditions particulières.

La force du modèle réside dans les termes A_{ij} et B_{ij} qui ne sont pas présents dans notre modèle car les interactions entre les humains et les vecteurs se font entre ceux qui se trouvent dans le même compartiment (région). L'exemple numérique pour deux compartiments isolés montre que $R_0 < 1$ avec les valeurs considérées. Une fois le déplacement autorisé, R_0 peut devenir légèrement supérieur à 1. La valeur de R_0 avec le déplacement des humains est toujours comprise entre les R_0 des différents sous groupes lorsqu'ils sont isolés. «Pour le cas de deux compartiments, le nombre de reproduction de base R_0 varie de façon monotone avec les taux de déplacement des humains exposés, infectieux, et guéris, qui dépendent de l'état de la maladie. Lorsque le taux d'émigration est indépendant de l'état de la maladie, mais pouvant ou ne pouvant pas être indépendante de la résidence, la relation entre R_0 et le taux apparent des humains exposés, infectieux et guéris devient encore plus compliquée et la dépendance non-monotone peut se produire» [6].

Une fois les paramètres fixés, la maladie disparaît si le nombre des humains infectieux, exposés et guéri devient petit ou grand ce qui rejoint notre cas où le polynôme caractéristique est monotone dans $]1, +\infty[$.

A partir du moment où le système non linéaire du modèle de Gao et Ruan est de dimension élevé, il est difficile de déterminer la dynamique globale du système. Les

techniques de la théorie de la persistance peuvent être utilisées pour déterminer la persistance uniforme de la maladie dans tous les sous groupes à condition que R_0 soit supérieur à 1 [6].

4.2. INTÉGRATION ET ESTIMATION DES PARAMÈTRES DANS LE MODÈLE

Pour deux modèles semblables, la définition des termes joue un rôle non négligeable. Ainsi par exemple, les « Remis » sont définis par Chitnis comme des individus temporairement immunisés mais qui restent infectieux aux moustiques tandis que McKenzie les définit comme temporairement immunisés mais pas infectieux [6,29]. Anderson et May intègrent les délais dans la progression du compartiment des exposés à celui des infectés tant pour les hôtes que pour les vecteurs [29]. L'intégration des paramètres dans un modèle dépend non seulement du type de modèle que l'on veut construire mais aussi des étapes indispensables pour que le modèle soit biologiquement acceptable et cela rend le modèle de plus en plus compliqué. Après le choix des paramètres, les valeurs pouvant être prises par ces dernières est aussi problématique car elles dépendent du lieu et sont parfois difficiles à estimer. Ainsi par exemple, le taux d'inoculation entomologique en Afrique Subsaharienne ne peut pas être le même qu'au Canada et il est souvent difficile de trouver des résultats exacts étant donné la lourde tâche de compter les piqûres des moustiques parfois invisibles.

CONCLUSION

Nous avons formulé et analysé un modèle mathématique de la propagation de la malaria en temps discret. Un couplage de deux modèles mathématiques semblables a été fait avec interaction entre les hôtes de deux régions suivant le schéma *SEIR*, et sans interaction entre les vecteurs que sont les moustiques. Nous avons analysé ce modèle pour déterminer dans quelle mesure le déplacement de la population influence la persistance ou la réduction de la maladie pour l'ensemble des deux régions.

Mathématiquement, nous avons construit un modèle mathématique prenant la forme d'un système de 14 équations aux différences finies permettant de déterminer la dynamique dans la population du temps t au temps $t + 1$. Nous avons déterminé le point d'équilibre sans maladie (Disease Free Equilibrium (DFE)) puis nous avons linéarisé le système autour du point d'équilibre pour calculer R_0 et déterminer la stabilité locale du système. Étant donné la dimension et la complexité du système, nous n'avons pas pu déterminer de façon explicite la valeur de R_0 car il dépend de plusieurs paramètres. En supposant que $R_0 > 1$, nous avons déterminé un point d'équilibre endémique.

Nous avons ensuite formulé le même type de modèle mathématique en temps continu et nous avons utilisé la théorie de P. van den Driessche [28] pour déterminer le point d'équilibre sans maladie puis R_0 . Le même problème de complexité du système est apparu compliquant ainsi le calcul explicite de R_0 . Enfin, nous avons comparé notre modèle avec d'autres afin de déterminer les forces et les faiblesses de notre modèle.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Linda J.S.Allen et P. van den Driessche. The Basic Reproduction Number in Some Discrete-Time Epidemic Models (2008) Journal of Difference Equations and Applications, **Vol.14** pp 1127-46.

[2] Liming Cai et Xuezhi Li. “Analysis of a Simple Vector-Host Epidemic Model with Direct Transmission,” Discrete Dynamics in Nature and Society (2010)**2010**, doi :10.1155/2010/679613, 12 pages, [http ://www.hindawi.com/journals/ddns/2010/679613/cta](http://www.hindawi.com/journals/ddns/2010/679613/cta)

[3] Nakul Rashmin Chitnis. Using mathematical models in controlling the spread of malaria, PhD Thesis(Applied Mathematic(2005),University of Arizona. [http ://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/dynsyst/2009/uke44/chitnis.pdf](http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/dynsyst/2009/uke44/chitnis.pdf)

[4] Nakul Chitnis, J. M. Cushing et J. M. Hyman. “Bifurcation analysis of a mathematical model for malaria transmission”, SIAM J. Appl. Math (2006)**67**,pp 24-25.

[5] Daozhou Gao et Shigui Ruan. A multi-patch malaria model with logistic growth populations,SIAM J Appl Math.(2012) ; **72** : 819–841.

[6] Daozhou and Shigui Rouan. Malaria models with spatial effects (2014) [http ://www.math.miami.edu/dzgao/GaoRuan-BookChapter2014.pdf](http://www.math.miami.edu/dzgao/GaoRuan-BookChapter2014.pdf)

[7] Klaus Dietz. Advances in Applied Probability,**3**, No. 2 (Autumn, 1971), pp. 208-10.

[8] Dietz K, Molineaux L, Thomas A. A malaria model tested in the African savannah(1974) Bull World Health Organ **50** : 347–357.

[9] Farba Balle Khodia FAYE. Le paludisme à Plasmodium ovale dans un village africain (Dielmo, Sénégal),Dakar(2000).

[10] F.R.Gantmacher. Théorie des Matrices tome 2,DUNOD,Paris 1966

[11] Norbert GUALDE. Immunité et Humanité :essai d’immunologie des populations(1994). L’Harmattan,208 pages

[12] Hawass, Z., Gad, Y.Z., Ismail, S., *et al.* (2010). Ancestry and pathology in king Tutankhamun’s family. JAMA, **303**(7) : 638–647.

[13] Institut de Recherche pour le Développement(IRD). Paludisme :La vie de dame anophèle. Panneau 3 de l’exposition Vaincre le Paludisme : un défi pour la

recherche

(<https://www.ird.fr/la-mediatheque/expositions/expositions-disponibles-en-pret/vaincre-le-paludisme-un-defi-pour-la-recherche> consulté le 03 Octobre 2014)

- [14] J. Labadin et al. Deterministic Malaria Transmission Model with Acquired Immunity. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2009 Vol II, WCECS 2009, October 20-22, 2009, San Francisco, USA.
- [15] Mark A. Lewis *et al.* A Comparison of Continuous and Discrete-Time West Nile Virus Models, *Bulletin of Mathematical Biology* (2006) **68** : 491–509.
- [16] Chi-Kwon Li et Hans Schneider. Applications of Perron-Frobenius Theory to Population Dynamics. *J. Math. Biol.*(2002) **44**,450-462
- [17] Jia Li. Simple discrete-time malarial models. *Journal of Difference Equations and Applications*(2013), **19** :4, 649-666,
- [18] Sandip Mandal, Ram Rup Sarkar et Somdatta Sinha. Mathematical models of malaria - a review(2011) *Malaria Journal*,**10** doi :10.1186/1475-2875-10-202 <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3162588/pdf/1475-2875-10-202.pdf>
- [19] G. A. Ngwa and W. S. SHU. A Mathematical Model for Endemic Malaria with Variable Human and Mosquito Populations. *Mathematical and Computer Modelling*(2000) **32**, 747-763
- [20] Robert C. Reiner Jr *et al.* A systematic review of mathematical models of mosquito-borne pathogen transmission :1970-2010 *J R Soc Interface*(2013)**10**(81) : 20120921. doi : 10.1098/rsif.2012.0921.
- [21] G.Sallet. Modélisation et simulation en épidémiologie(2010)INRIA et IRD <http://www.math.univ-metz.fr/sallet/Basic-epidemiology.pdf> consulté le 03/10/2014
- [22] Balbir Singh *et al.* “A large focus of naturally acquired Plasmodium knowlesi infections in human beings”, *The Lancet* (2004) **363** 1017-1024
- [23] Laurence Slutsker. Malaria : Past, Present and Future. Center for Disease Control (2012) <http://www.cdc.gov/cdcgrandrounds/pdf/phgrmalaria18nov2010.pdf> consulté le 03/10/2014
- [24] Smith DL, Battle KE, Hay SI, Barker CM, Scott TW, *et al.* Ross, Macdonald, and a Theory for the Dynamics and Control of Mosquito-Transmitted Pathogens(2012). *PLoS Pathog* **8**(4) : e1002588. doi :10.1371/journal.ppat.1002588
- [25] J. Tumwiine, J.Y.T. Mugisha et L.S. Luboob. A mathematical model for the dynamics of malaria in human host and mosquito vector with temporary immunity(2007), *Applied Mathematics and Computation* **189** 1953–1965.
- [26] Jean Turgeon. Calcul Appliqué, Notes du cours MAT 1431, Université de Montréal(1975)

- [27] Université Médicale Virtuelle Francophone. Paludisme, Université de Nantes (2014) <http://umvf.univ-nantes.fr/parasitologie/enseignement/paludisme/site/html/cours.pdf> consulté le 03/10/2014
- [28] P.van den Driessche et James Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission (2002) *Math. Biosci.***180** :29–48.
- [29] Dorothy I Wallace et al. A comparison of five malaria transmission models : benchmark tests and implications for disease control. *Malaria Journal* (2014), **13** :268(<http://www.malariajournal.com/content/13/1/268>)
- [30] Hui wan et Jing-an Cui. A Malaria Model with two Delays. Hindawi Publishing Corporation, *Discrete Dynamics in Nature and Society* (2013)**2013**, dx.doi.org/10.1155/2013/601265
<http://www.cdc.gov/cdcgrandrounds/pdf/phgrmalaria18nov2010.pdf>
- [31] WHO. Roll Back Malaria, www.rollbackmalaria.org
- [32] WHO. World Malaria Report 2011,
http://www.who.int/malaria/world_malaria_report_2011/wmr2011_summary_keypoints_fr