Université de Montréal

Essais sur l'analyse de la causalité dans les modèles ARMA multivariés.

par
David Tessier
Sciences économiques
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en sciences économiques

février 1995

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

Essais sur l'analyse de la causalité dans
les modèles ARMA multivariés.

présentée par:

David Tessier

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Président du jury	René Garcia
Directeur de recherche	Jean-Marie Dufour
Membre du jury	Roch Roy
Examinateur externe	Éric Renault

Thèse acceptée le : 3 novembre 1995

SOMMAIRE

Les tests de causalité sont devenus un outil essentiel pour étudier la dynamique entre les variables économiques. La majorité de ces tests s'effectuent en utilisant une représentation autorégressive d'ordre fini avec laquelle les tests se calculent facilement. Cette modélisation peut toutefois entraîner certaines interprétations trompeuses quant à la définition de Granger. Le premier essai démontre une caractérisation générale de la non-causalité (au sens de Granger) entre deux vecteurs X et Y, en terme de coefficients d'impulsion du processus, dans le cas où un autre vecteur Z de variables est utilisé pour améliorer la prévision. Nous observons que les caractérisations usuelles de la non-causalité en terme de coefficients d'impulsion ou de décompositions de variance sont erronées dans de telles situations. Les résultats sont illustrés au moyen d'un exemple numérique.

Le deuxième essai étudie les conséquences d'utiliser la modélisation VAR d'ordre fini pour effectuer les tests de causalité quand le processus générateur est un modèle ARMA multivarié. L'analyse s'effectue par des simulations incluant diverses paramétrisations, dont certaines proches de la zone non-inversible, rendant ainsi l'approximation autorégressive inadéquate. Le résultat de ces simulations de même que le calcul des projections théoriques confirment le besoin d'une modélisation plus générale afin de spécifier plus adéquatement un processus stationnaire nécessaire aux tests de causalité.

Comme les tests sous la forme VARMA présentent un avantage par rapport aux tests utilisant les VAR, plusieurs auteurs ont développé des tests de causalité dans ce cadre plus général. Toutefois, ces tests prennent la forme d'une suite de conditions non-linéaires de paramètres, pour lesquelles il n'y a pas d'ordre naturel dans laquelle effectuer les tests.

Le troisième essai vise donc à améliorer la procédure de test en développant des conditions utilisant la forme autorégressive associée au modèle VARMA. Même si la représentation autorégressive d'un processus ARMA est d'ordre infini, on démontre que sous l'hypothèse de non-causalité, il est suffisant de tester la nullité d'un nombre fini de paramètres autorégressifs. De plus, les conditions de non-causalité apparaissent dans un ordre plus naturel, ce qui permet le développement d'une procédure séquentielle pour tester ces conditions.

Le quatrième essai consiste à appliquer cette dernière méthodologie à des données macroéconomiques américaines (revenu, monnaie, prix et taux d'intérêt) estimées sous la forme échelon. Les tests effectués étudieront plus spécifiquement la relation causale entre la monnaie et le revenu et confirment, comme plusieurs études antérieures, l'importance des variables monétaires dans l'évolution du revenu national.

Mots clé: causalité, modèles ARMA multivariés, forme échelon.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES TABLEAUX

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très sincèrement Jean-Marie Dufour pour le soutien et la confiance qu'il m'a témoignés. Sa disponibilité et sa grande rigueur furent pour moi une grande source de motivation; ma méthode de travail en restera profondément marquée.

Je voudrais aussi remercier Saïd Nsiri pour l'intérêt manifesté envers cette thèse de même que pour les programmes nécessaires à la spécification du modèle empirique.

Enfin, les organismes subventionnaires F.C.A.R. et C.R.S.H. furent d'une importance primordiale, en rendant le plus agréable possible ce long périple.

INTRODUCTION GENERALE

Les tests de causalité sont devenus un outil essentiel pour étudier la dynamique entre variables économiques. Suite à l'important article de Granger (1969) dans lequel il donnait une définition opérationnelle de ce concept, plusieurs chercheurs développèrent différentes caractérisations de même que des tests conformes à la définition de Granger [voir à ce sujet l'excellente revue de Geweke (1984)]. Ces nouvelles caractérisations ont entraîné un grand nombre d'études empiriques, et ce dans les domaines les plus variés. La principale raison de cet engouement était que ces tests présentaient un attrait quant à la facilité avec laquelle on pouvait les effectuer. En effet, les premiers tests de causalité étaient principalement basés sur la forme autorégressive d'un processus, les rendant ainsi facilement opérationnels à l'aide de méthodes de moindres carrés.

Au début des années 80, on vit apparaître un intérêt soutenu à l'égard de l'analyse multivariée afin d'éviter certaines relations fausses entre les variables suite à l'oubli de variables importantes dans la formalisation du système d'équations, nécessaire aux tests de causalité [voir Lütkepohl (1982)]. Sims (1980a) ouvre la voie à l'analyse multivariée par l'emploi systématique des autorégressions vectorielles comme outil d'analyse. En plus d'être utile pour l'inférence sur la causalité, cette technique est très répandue à des fins de prévisions ou d'analyse de politiques. Sims justifie l'emploi de cette méthode car elle évite l'imposition de restrictions a priori sur la forme structurelle qui peuvent s'avérer injustifiées et entraîner inévitablement des conclusions erronées. Toutefois, Sims soulève le fait qu'il est difficile d'y interpréter les coefficients autorégressifs. Ainsi, l'analyse qu'il propose est basée essentiellement sur la représentation moyenne mobile d'un processus stationnaire, exprimée en fonction des innovations du processus (représentation de Wold). Une telle analyse est importante pour la théorie macroéconomique contemporaine car plusieurs recherches théoriques, basées principalement sur les anticipations rationnelles, ont porté sur les effets des chocs sur la politique économique.

On peut résumer l'analyse faite à l'aide de la représentation MA multivariée par l'utilisation de deux techniques: la décomposition de variance et les coefficients d'impulsion. Une telle analyse requiert que les innovations associées à chacune des variables soient non-corrélées, rendant ainsi interprétables les résultats. A cette fin, on doit procéder à l'orthogonalisation des innovations et Sims propose la décomposition de Choleski, dans laquelle l'ordre des variables dépend de l'exogénéité a priori des différentes séries.

Dans un cadre bivarié, il est aisé de démontrer que la caractérisation de la non-causalité sous la forme moyenne mobile est semblable à la caractérisation sous la forme autorégressive. Ainsi, une relation dynamique entre deux variables exprimée en termes de coefficients d'impulsion ou de décomposition de variance peut être associée à une relation de causalité à la Granger. Toutefois, une telle conclusion ne tient plus dans un cadre multivarié. En effet, malgré plusieurs mentions erronées dans la littérature, des coefficients d'impulsion significatifs ne peuvent être associés à la causalité à la Granger. Le premier essai corrige cette lacune en caractérisant les conditions de non-causalité sous la représentation moyenne mobile dans le cas multivarié, le cas bivarié ayant été traité par Sims (1972). On y démontre ainsi qu'il est faux de tirer des conclusions concernant la causalité à l'aide d'une telle méthodologie utilisant principalement la représentation MA multivariée.

Avec l'utilisation généralisée des VAR, on vit apparaître une multitudes d'études empiriques, entraînant plusieurs contradictions dans les différents résultats de tests de causalité sur des données similaires, plus particulièrement concernant la relation causale entre la monnaie et le revenu [Feige et Pearce (1979) et Stock et Watson (1989)]. Une étude plus approfondie du comportement de ces tests était donc rendue nécessaire et la première étude exhaustive fut celle de Nelson et Schwert (1979). Selon eux, les différentes conclusions peuvent s'expliquer par la puissance respective des divers tests utilisés. Utilisant des méthodes de simulation, ils ont comparé la puissance des principaux tests de causalité disponibles à l'époque et la principale conclusion est que les tests basés sur la bonne forme réduite sont les plus performants. Ce résultat n'est pas en lui-même très surprenant. De plus, dans l'expérience même, le processus générateur des données utilisé est un modèle autorégressif d'ordre un, modèle restrictif compte tenu de l'aspect autorégressif des test comparés, pouvant entraîner une surparamétrisation et par conséquent une faible puissance des tests. Ces auteurs soulèvent tout de même une question importante, soit la grande sensibilité de ces tests au préfiltrage et au choix de retards. Des modèles plus parsimonieux pourraient améliorer ainsi la puissance des ces tests et à cet effet, ils suggèrent le recours à la modélisation ARMA.

D'autres études ont été consacrées à la même problématique, les plus importantes étant celles de Guilkey et Salemi (1982) et Geweke, Meese et Dent (1983). Ces derniers ont comparé les puissances des principaux tests de causalité proposés au moyen du concept de pente approximative [Bahadur (1960)]. La conclusion, similaire à celle de Nelson et Schwert, soulève le fait que le test de Sims est sensible au préfiltrage, favorisant ainsi le test de Granger. Geweke, Meese et Dent utilisent aussi un processus générateur autorégressif, limitant donc l'étude du problème à une classe restreinte de processus stationnaires. Guilkey et Salemi remédient à cette lacune en incluant comme processus générateur la modélisation ARMA, ce qui met en lumière le problème de troncature associé aux modèles autorégressifs. Toutefois, la conclusion demeure la même, à savoir la supériorité du test de Granger sur le test de Sims. Quant au test de Pierce et Haugh, les précédentes études concluent toutes qu'il est systématiquement moins puissant.

Le message principal de ces différentes simulations est que les tests de causalité utilisés alors présentaient très peu de robustesse, faisant appel trop souvent à des choix arbitraires concernant la paramétrisation (choix de retard et préfiltrage), et étaient surtout limités à des processus autorégressifs. Le développement d'une modélisation plus générale pourrait ainsi remédier à certains des problèmes soulevés. D'une part, tel que mentionné précédemment, Nelson et Schwert proposèrent le recours à des modèles ARMA multivariés, ce qui conduit à des modèles plus parsimonieux pouvant potentiellement améliorer la puissance. Kang (1981) développa les conditions de non-causalité dans un cadre ARMA bivarié en suggérant une procédure de test approproprıée. Les conditions de non-causalité étant non-linéaires, Eberts et Steece (1984) et Newbold et Hotopp (1986) ont proposé une statistique de Wald pour effectuer les tests. Ces analyses s'effectuant dans un cadre bivarié, Boudjellaba, Dufour et Roy (1992,1994) ont généralisé le tout en dérivant les conditions de non-causalité dans des modèles ARMA multivariés pouvant inclure un troisième groupe de variables, ajouté à l'ensemble d'informations. Dans un contexte d'échantillon fini, le choix optimal du test asymptotique pour un modèle ARMA bivarié a été étudié par Taylor (1989). Il arrive à la conclusion que sous l'hypothèse nulle de non-causalité, le test du quotient de vraisemblance offre le niveau empirique le plus adéquat de même que la meilleure puissance.

Plus récemment, Lütkepohl et Poskitt (1992) développèrent une procédure de test de causalité qui conserve la simplicité du test de Granger sous la forme autorégressive, tout en permettant de s'appliquer à des processus plus généraux, tels les processus stationnaires inversibles. Ces derniers admettant une représentation autorégressive possiblement d'ordre infini, le test prend la forme d'une statistique de Wald appliquée aux paramètres d'un VAR d'ordre fini, mais dont l'ordre augmente avec l'échantillon, se confondant asymptotiquement avec un processus stationnaire inversible. Cependant, les résultats des simulations ne sont pas très concluants, car les tests proposés rejettent beaucoup trop souvent par rapport au niveau nominal du test.

Malgré le fait que les tests de causalité sous la forme ARMA multivariée s'avèrent une alternative intéressante, aucune étude comparant les performances de ces tests avec les tests plus classiques sous la forme VAR ne semble être disponible. Le but du deuxième essai est de combler cette lacune. Pour ce faire, l'analyse est effectuée à deux niveaux. Dans un premier temps, comme on sait que tout processus stationnaire inversible peut être approximé par un VAR d'ordre fini, il semble oppurtun d'étudier ce problème d'approximation en fonction du degré de troncation et de la proximité du processus par rapport à la zone non-inversible. Ainsi, par le calcul des projections, on pourra analyser formellement les distorsions induites par de telles approximations sur la structure de causalité du processus considéré. Par le fait même, comme les projections représentent la meilleure approximation possible, une distorsion à ce niveau théorique suggère que le niveau empirique des tests peut potentiellement être affecté. D'autre part, des simulations sont effectuées afin de comparer explicitement le niveau empirique et la puissance des divers tests. La principale conclusion est à l'effet que la caractérisation et les tests de causalité sous la forme autorégressive peuvent effectivement engendrer des distorsions, rendant ainsi plus efficace le recours à une modélisation plus générale. De plus, l'emploi de la statistique du quotient de vraisemblance fait disparaître le problème soulevé par Lütkepohl et Poskitt concernant le niveau empirique des tests avec les modèles VAR.

Comme les tests de causalité sous la forme ARMA constituent une alternative intéressante, le troisième essai présente une nouvelle caractérisation rendant plus opérationnelle cette méthodologie. Les premières caractérisations des conditions de non-causalité dans les modèles ARMA s'appliquaient aux modèles bivariés [Kang (1981), Newbold (1982), Eberts et Steece (1984) et Newbold et Hotopp (1984)]. La généralisation aux modèles multivariés fut principalement développée par Boudjellaba, Dufour et Roy (1992, 1994). Cependant, ces caractérisations ont le désavantage de présenter les conditions de non-causalité comme une suite de conditions non-linéaires apparaissant dans un ordre arbitraire et ainsi difficiles à tester conjointement.

Le troisième essai vise donc à améliorer la procédure de test en développant des conditions utilisant la forme autorégressive associée au modèle VARMA. Même si la représentation autorégressive d'un processus ARMA est d'ordre infini, on démontre que sous l'hypothèse de non-causalité, il est suffisant de tester la nullité d'un nombre fini de paramètres autorégressifs. Ce nombre fini sera décrit par une borne exprimée en terme des paramètres du modèle ARMA. On présentera aussi une caractérisation de la non-causalité dans le cadre de modèles sous la forme échelon [Hannan et Deistler (1988)]. Cette modélisation a l'avantage de spécifier un modèle ARMA sous une forme unique et identifiée. Ces modèles sont spécifiés à l'aide des indices de Kronecker et la détermination de ces indices se fera à partir de la matrice des autocorrélations empiriques du processus. Par la suite, exploitant l'ordre naturel dans lequel apparaissent les conditions de non-causalité, on développe une procédure séquentielle de tests appliquée à ces conditions.

Le dernier essai vise à appliquer cette nouvelle caractérisation des conditions de non-causalité dans un modèle ARMA multivarié. De plus, le modèle ARMA sera spécifié sous la forme échelon à partir des indices de Kronecker, selon la procédure récemment développée par Nsiri et Roy (1992). L'application portera sur des données macroéconomiques américaines en attachant une attention particulière à la relation de causalité entre les variables monétaires et le revenu, préoccupation empirique pour laquelle la littérature porte souvent des conclusions contradictoires [Feige et Pearce (1979), Stock et Watson (1989)].

Au cours des années 70, les tests de causalité appliqués à la relation monnaie-output étaient principalement effectués à l'aide de modèles bivariés [Sims (1972, 1980a), Feige et Pearce (1979)]. Suite à l'emploi généralisé des autorégressions vectorielles facilitant l'analyse multivariée, plusieurs contributions renouvelèrent l'analyse de la relation causale monnaie-output par l'ajout du taux d'intérêt dans la modélisation [Sims (1980b), Litterman et Weiss (1985), Boudjellaba, Dufour et Roy (1994)]. La principale conclusion de ces articles est à l'effet que le taux d'intérêt est une variable essentielle à la modélisation, pouvant même annuler la relation causale entre la monnaie et le revenu revenu observée dans les modèles bivariés [Sims (1980b), Litterman et Weiss (1985)].

Comme on le mentionnait plus haut, les tests de causalité seront effectués selon une caractérisation exploitant la représentation autorégressive du processus. Ainsi, cette caractérisation de la non-causalité consiste à tester séquentiellement la nullité d'un nombre fini de paramètres autorégressifs. Exception faite de la première condition, représentée par le premier paramètre de la représentation autorégressive, toutes les conditions ultérieures sont non-linéaires, ce qui peut créer des problèmes de régularité asymptotique sous l'hypothèse nulle [voir à ce sujet Boudjellaba, Dufour et Roy (1992), section 5]. A la lumière de cette difficulté, nous ne testerons que la première condition, ce qui représente une condition nécessaire à l'hypothèse de non-causalité. Ainsi, un rejet de cette hypothèse signifiera la conclusion d'une relation causale entre les variables en question. Dans plusieurs cas, nous montrerons aussi que ces conditions sont nécessaires et suffisantes. La conclusion empirique de cet essai va dans le sens de plusieurs études antérieures, soit l'importance des variables monétaires dans l'évolution du revenu national.

ESSAI 1

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN IMPULSE RESPONSE ANALYSIS, INNOVATION ACCOUNTING AND GRANGER CAUSALITY

(co-auteur avec Jean-Marie Dufour)

paru dans:

Economics Letters, 1993, vol. 42, p. 327-333

1. INTRODUCTION

Since the classical contributions of Sims (1980a, 1980b, 1982), vector autoregressive models (VAR) have been widely used to study the dynamic structure of economic time series. Especially important properties that are analyzed from such models include causality in the sense of Wiener (1956) and Granger (1969), impulse responses (coefficients of moving average representations) and innovation accounting (variance decompositions). These properties are linked. In particular, it is often argued that non-zero impulse responses (after an appropriate orthogonalization, if required) indicate the presence of Granger causality, while variance decompositions yield natural measures of Granger causal priority. For example, while discussing VAR systems with three and six variables, Sims (1982, pp. 131-132) states : "A natural measure of the degree to which Granger causal priority holds is the percentage of forecast error variance accounted for by a variable's own future disturbances in a multivariate linear autoregressive model (...). A variable that is optimally forecast from its own lagged values will have all its forecast error variance accounted for by its own disturbances"; see also Sims (1980b, pp. 251-252) for a similar statement. Several other authors who have analyzed multivariate VAR models with more than two variables have also used the same relationship between variance decompositions and Granger causality; see, for example, Faroque and Veloce (1990, p. 281), Kyereme (1991, pp. 1807-1808), McMillin (1988, pp. 325-326), Stam, DeLorme and Finkenstadt (1991, pp. 214 and 225), and Tegene (1991, p. 1374).

For bivariate stationary systems, the equivalence between Granger noncausality from a variable X_1 to a variable X_2 ($X_1 \not\rightarrow X_2$) and the nullity of the coefficients of the innovations of X_1 in the bivariate moving average (MA) representation of X_2 has been established by Sims (1972); see also Pierce and Haugh (1977, Theorem 4.2). It is then straightforward to see that the proportion of the variance of X_2 accounted for by the innovations of X_1 must be zero. Further, it is easy to obtain a similar result when X_1 and X_2 are vectors; see Caines and Chan (1975) and Lütkepohl (1991, section 2.3). Consequently, whenever a stationary process has an autoregressive (AR) representation, there is a simple duality between characterizations of noncausality based on AR coefficients and those based on MA coefficients. On the other hand, as the quotes and references given above show clearly, it is not widely recognized that the simple linear MA characterization of noncausality holding in bivariate systems does not extend to multivariate systems which include variables other than X_1 and X_2. In particular, no general MA characterization of noncausality for such systems appears to be available.

The main purpose of this paper is to give a general necessary and sufficient condition for noncausality in terms of MA coefficients between two vectors (or variables) inside a larger system that may include other variables as well. The setup considered is the class of second-order stationary and invertible (strictly indeterministic) stochastic processes, i.e. stationary indeterministic processes possessing an autoregressive representation (possibly of infinite order). The condition given involves nonlinear restrictions on the MA coefficients and clearly shows that the duality between AR and MA characterizations of noncausality, which occurs in bivariate systems, does not generally hold in multivariate systems, and why it is so. In particular, even if X_1 does not cause X_2 in the sense of Granger, the innovations of X_1 may account for a sizeable proportion of the variance of X_2. Conversely, even if the latter proportion is zero, it is quite possible that X_1 causes X_2. A simple numerical example illustrating such situations is given below. These complications occur irrespective of whether the innovations of the process are contemporaneously correlated (or not) and so are quite distinct from the familiar problems associated with the choice of an orthogonalization for the innovations of the model. We also deduce from our characterization a number of simpler (linear) sufficient conditions based on MA coefficients (or impulse responses) as well as a necessary condition which only depends on the first impulse coefficient.

In section 2, we give the required definitions and describe the setup considered. In section 3, we derive the conditions for noncausality proposed. A numerical illustration is presented in section 4. We conclude in section 5 by discussing some practical implications of our results.

2. FRAMEWORK

Let $\{X(t) : t \in \mathbb{Z}\}$ be a $m\times 1$ discrete-time vector stochastic process which possesses a moving average representation of the form :

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a(t-k) = \psi(B)a(t) \ , \ t \in \mathbb{Z} \, , \tag{1}$$

where ψ_k , $k \geq 0$, are $m\times m$ matrices such that $\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi_k\|^2$ is finite and $\psi_0 = I_m$, $\|\psi_k\|^2 = \mathrm{tr}(\psi_k \psi_k')$, $\psi(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k B^k$ is a matrix of formal series in the lag operator B,

$\{a(t) : t \in \mathbb{Z}\}$ is a white noise process with nonsingular covariance matrix, i.e. the vectors $a(t)$ are mutually uncorrelated such that $E[a(t)] = 0$ and $\det(V[a(t)]) \neq 0$; we also suppose that $a(t)$ is the innovation process of $X(t)$. Further, let us partition $X(t)$ and $a(t)$ into three subvectors : $X(t) = (X_1(t)', X_2(t)', X_3(t)')'$ and $a(t) = (a_1(t)', a_2(t)', a_3(t)')'$, where $X_i(t)$ and $a_i(t)$ have dimension $m_i \times 1$ with $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$, $m_3 \geq 0$ and $m_1 + m_2 + m_3 = m$. When $m_3 = 0$, the partition involves only two subvectors.

We say that the process $X(t)$ is *invertible* if it can be written in autoregressive form :

$$\Pi(B)X(t) = a(t) \quad , \quad t \in \mathbb{Z} , \tag{2}$$

where the matrix $\Pi(B)$ is defined by $\Pi(B) = \psi(B)^{-1} = I_m - \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k B^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|\Pi_k\| < \infty$, and we assume that the equation $\det[\psi(z)] = 0$ has all its roots outside the unit circle ($z \in \mathbb{C}$). Further, in the context of model (1), we say that X_1 *does not cause* X_2 in the sense of Granger (noted $X_1 \not\longrightarrow X_2$) if the following identity holds with probability 1 :

$$P[X_2(t+1) \mid \overline{X}(t)] = P[X_2(t+1) \mid \overline{X}_2(t), \overline{X}_3(t)], \text{ for all } t , \tag{3}$$

where $\overline{X}(t) = (X(\tau) : \tau \leq t)$, $\overline{X}_i(t) = (X_i(\tau) : \tau \leq t)$ and $P[X_2(t+1) \mid \cdot\ ]$ is the vector of the best linear predictors (in the mean square sense) of the components of $X_2(t+1)$ based on the list of variables appearing after the bar "|" (i.e., the linear projection operator). It is easy to see that (3) is equivalent to either one of the two following conditions :

$$V[\varepsilon(X_2(t+1) \mid \overline{X}(t))] = V[\varepsilon(X_2(t+1) \mid \overline{X}_2(t), \overline{X}_3(t))] \text{ , for all } t , \tag{4}$$

$$V[\varepsilon(x_{2i}(t+1) \mid \overline{X}(t))] = V[\varepsilon(x_{2i}(t+1) \mid \overline{X}_2(t), \overline{X}_3(t))] \text{ , } i = 1, \ldots , m_2, \text{ for all } t , \tag{5}$$

where $\varepsilon(X_2(t+1) \mid \cdot\ ) = X_2(t) - P[X_2(t) \mid \cdot\ ]$, $X_2(t) = [x_{2i}(t) : i = 1, \ldots , m_2]'$ and $\varepsilon(X_2(t+1) \mid \cdot\ ) = [\varepsilon(x_{2i}(t+1) \mid \cdot\ ) : i = 1, \ldots , m_2]'$; see Boudjellaba, Dufour and Roy (1992).

Let us now partition ψ_k, $\psi(B)$ and $\Pi(B)$ conformably with the partitions of a(t) and X(t) :

$$\psi(B) = [\psi_{ij}(B)]_{i,j=1,2,3} \; , \; \Pi(B) = [\Pi_{ij}(B)]_{i,j=1,2,3} \tag{6}$$

with $\psi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ijk} B^k$, where ψ_{ijk} , $\psi_{ij}(B)$ and $\Pi_{ij}(B)$ have dimensions $m_i \times m_j$ (i, j = 1, 2, 3), $\psi_{ij0} = I_{m_i}$ if i = j, and $\psi_{ij0} = 0$ if $i \neq j$. When the process X(t) is invertible and no auxiliary variables are present ($m_3 = 0$), it is easy to see that $\Pi_{21}(z) = 0$ if and only if $\psi_{21}(z) = 0$, where $|z| \leq 1$. For any positive real constant δ $(0 < \delta \leq 1)$, the condition $\Pi_{21}(z) = 0$ for $|z| \leq \delta$ is equivalent to stating that each coefficient in the power series $\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{21k} z^k$ is zero, i.e. $\Pi_{21k} = 0$ for k = 1, 2, ... , and similarly for other conditions of the same form, such as $\psi_{21}(z) = 0$ for $|z| \leq 1$. Further, the condition $\Pi_{21}(z) = 0$ for $|z| \leq 1$ is necessary and sufficient for $X_1 \nrightarrow X_2$ [see Boudjellaba, Dufour and Roy (1992, Proposition 1)], so that

$$X_1 \nrightarrow X_2 \;\Leftrightarrow\; \psi_{21}(z) \text{ for } |z| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \psi_{21k} = 0 \; , \; k = 1, 2, \dots . \tag{7}$$

Characterization (7) of noncausality is well known [see Lütkepohl (1991, section 2.3)] and allows a direct causality interpretation of the impulse response coefficients ψ_{21k}. However, such a simple interpretation no longer holds when auxiliary variables are present ($m_3 \geq 1$).

3. MOVING AVERAGE CHARACTERIZATIONS OF NONCAUSALITY

In the following proposition, we give a general characterization of Granger noncausality from X_1 to X_2 ($X_1 \nrightarrow X_2$) in terms of the coefficients of the MA representation (1), when $m_3 \geq 1$.

PROPOSITION 1 : Let X(t) be a second-order stationary process which satisfies (1), let $m_3 \geq 1$, and let δ be any real constant such that $0 < \delta \leq 1$ and $\det[\psi_{33}(z)] \neq 0$ for $|z| < \delta$. Then $X_1 \nrightarrow X_2$ if and only if

$$\psi_{21}(z) - \psi_{23}(z)\psi_{33}(z)^{-1}\psi_{31}(z) = 0 \;\; , \;\; \text{for } |z| < \delta . \tag{8}$$

Proof. By the invertibility condition, the process X(t) satisfies equation (2) where $\Pi(z) = \psi(z)^{-1}$ for $|z| \le 1$. Further, by Proposition 1 of Boudjellaba, Dufour and Roy (1992), we have

$$X_1 \nrightarrow X_2 \Leftrightarrow \Pi_{21}(z) = 0 \text{ for } |z| \le 1 .$$

Let $A_{22}(z) = [\psi_{ij}(z)]_{i,j=2,3}$ and $\psi_{22\cdot 3}(z) = \psi_{22}(z) - \psi_{23}(z)\psi_{33}(z)^{-1}\psi_{32}(z)$. Since $\psi_{ii}(0) = I_{m_i}$, $i = 1, 2, 3$, and $\psi_{ij}(0) = 0$ for $i \neq j$, the matrices $\psi_{ii}(z)$, $i = 1, 2, 3$, $A_{22}(z)$ and $\psi_{22\cdot 3}(z)$ are all invertible for $|z|$ sufficiently small, say for $|z| < \delta_0$, where $0 < \delta_0 < 1$. Let $A_{22}(z)^{-1} = [\tilde{\psi}^{ij}(z)]_{i,j=2,3}$ where $\tilde{\psi}^{ij}(z)$ is a $m_i \times m_j$ matrix ($|z| < \delta_0$). By standard formulas for the inversion of partitioned matrices [see Graybill (1983, section 8.2)], we see that, for $|z| < \delta_0$ (dropping the symbol z to simplify the notation),

$$\begin{bmatrix} \Pi_{21} \\ \Pi_{31} \end{bmatrix} = -A_{22}^{-1}\begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{31} \end{bmatrix} \tilde{\psi}_{11}^{-1} = -\begin{bmatrix} \tilde{\psi}^{22} & \tilde{\psi}^{23} \\ \tilde{\psi}^{32} & \tilde{\psi}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{31} \end{bmatrix} \tilde{\psi}_{11}^{-1}$$

where $\tilde{\psi}_{11}^{-1} = \psi_{11} - \tilde{\psi}_{12}A_{22}^{-1}\tilde{\psi}_{21}$ with $\tilde{\psi}_{12} = [\psi_{12}, \psi_{13}]$ and $\tilde{\psi}_{21} = [\psi_{21}', \psi_{31}']'$, $\tilde{\psi}^{22} = \psi_{22\cdot 3}^{-1}$ and $\tilde{\psi}^{23} = -\psi_{22\cdot 3}^{-1}\psi_{23}\psi_{33}^{-1}$; hence

$$\Pi_{21} = -\psi_{22\cdot 3}^{-1}[\psi_{21} - \psi_{23}\, \psi_{33}^{-1}\, \psi_{31}]\, \tilde{\psi}_{11}^{-1} .$$

Thus, $\Pi_{21} = 0$ for $|z| < \delta_0$ if and only if $\psi_{21} - \psi_{23}\psi_{33}^{-1}\psi_{31} = 0$ for $|z| < \delta_0$. Further, by the unicity of the coefficients of convergent power series, the identity (8) holds for $|z| < \delta_0$ if and only if it also holds for $|z| < \delta$, where δ is any constant such that $0 < \delta \le 1$ and $\det[\psi_{33}(z)] \neq 0$ for $|z| < \delta$. Q.E.D.

In Proposition 1, it is clear (by continuity) that the constant δ always exists because $\psi_{33}(0) = I_{m_3} \neq 0$. The relevant restrictions on the matrices ψ_k, $k \ge 1$, are obtained by setting equal to zero the coefficients of the formal series expansion of $\psi_{21}(z) - \psi_{23}(z)\psi_{33}(z)^{-1}\psi_{31}(z)$. Condition (8) implies that $\psi_{21}(z) = 0$ is neither necessary nor sufficient for $X_1 \nrightarrow X_2$. Causality from X_1 to X_2 also depends on the impulse responses of the innovations of X_1 on X_3 (ψ_{31}), those of X_3 on X_2 (ψ_{23}), and the own impulse responses of X_3 (ψ_{33}) : causality from X_1 to X_2 may be due to (or cancelled by) the joint effect of the innovations of X_1 on X_3 and the innovations of X_3

on X_2. However, it is easy to derive from (8) relatively simple sufficient conditions for $X_1 \not\longrightarrow X_2$. The following corollary provides such conditions.

COROLLARY 1 : Under the assumptions of Proposition 1, each one of the three following conditions is sufficient for $X_1 \not\longrightarrow X_2$:

(a) $\psi_{21}(z) = 0$ and $\psi_{23}(z)\,\psi_{33}(z)^{-1}\psi_{31}(z) = 0$, for $|z| < \delta$; (9)

(b) $\psi_{21}(z) = 0$ and $\psi_{23}(z) = 0$, for $|z| < \delta$; (10)

(c) $\psi_{21}(z) = 0$ and $\psi_{31}(z) = 0$, for $|z| < \delta$. (11)

Condition (10) can be interpreted as the case where the innovations of both X_1 and X_3 have no effect on X_2, while condition (11) is the case where the innovations of X_1 have no effect on both X_2 and X_3. In these cases, the matrix $\psi(B)$ can be put in a block-triangular form (after permuting either X_1 and X_2, or X_1 and X_3). Conversely, if we observe that

$$\psi_{23}(z)\psi_{33}(z)^{-1}\psi_{31}(z) = [\sum_{k=1}^{\infty} \psi_{23k}\, z^k][\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{33k}\, z^k]^{-1}[\sum_{k=1}^{\infty} \psi_{23k}\, z^k] = \sum_{k=2}^{\infty} c_k\, z^k \,,$$

we can see from (8) that ψ_{211}, the coefficient of $a_1(t-1)$ in the MA representation of $X_2(t)$, must be zero to have $X_1 \not\longrightarrow X_2$: $\psi_{211} = 0$ is a necessary condition for $X_1 \not\longrightarrow X_2$ (but $\psi_{21k} = 0$, for $k \geq 2$, is not).

COROLLARY 2 : Under the assumptions of Proposition 1, the condition $\psi_{211} = 0$ is necessary for $X_1 \not\longrightarrow X_2$.

Since the condition $\psi_{21}(z) = 0$ is neither necessary nor sufficient for $X_1 \not\longrightarrow X_2$, it remains of interest to know which restrictions on $\Pi(z)$ are equivalent to $\psi_{21}(z) = 0$. These can be obtained easily if we replace $\psi(B)$ by $\Pi(B) = \psi(B)^{-1}$ in model (1), yielding the following proposition.

PROPOSITION 2 : Let the assumptions of Proposition 1 hold, and let δ_0 be any real constant such that $0 < \delta_0 \leq 1$ and $\det[\Pi_{33}(z)] \neq 0$ for $|z| < \delta_0$. Then $\psi_{21}(z) = 0$ for $|z| < \delta_0$ if and only if

$$\Pi_{21}(z) - \Pi_{23}(z)\Pi_{33}(z)^{-1}\Pi_{31}(z) = 0 \text{ , for } |z| < \delta_0 \,.$$

4. NUMERICAL EXAMPLE

To illustrate that AR and MA coefficients can suggest very different "causality" interpretations, consider the following simple trivariate AR(1) model :

$$X(t) - \Pi_1 X(t-1) = a(t) \quad , \quad t \in \mathbb{Z}\ , \tag{12}$$

where $X(t) = (X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t))'$ and $a(t) = (a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t))'$ are vectors of dimension 3, and

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 & 0.2 \\ 0.0 & -0.1 & 0.6 \\ -0.8 & -0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \ , \ E[a(t)\, a(t)'] = I_3\ . \tag{13}$$

It is easy to see that all the roots of the equation $\det(I_3 - \Pi_1 z) = 0$ are outside the unit circle, so that the model is stationary. Further, the innovations a(t) have an identity covariance matrix so that there is no need to orthogonalize them to obtain a variance decomposition.

Since

$$X_2(t) = 0.1\, X_2(t-1) - 0.6\, X_3(t-1) + a_2(t)\ ,$$

it is clear that X_1 does not cause X_2 in the sense of Granger. On the other hand, when we look at the MA representation of $X_2(t)$,

$$X_2(t) = a_2(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\psi_{21k}\, a_1(t-k) + \psi_{22k}\, a_2(t-k) + \psi_{23k}\, a_3(t-k)]$$

where $\psi_k = \Pi_1^k = [\psi_{ijk}]_{i,j=1,2,3}$, we see that the coefficients ψ_{21k} of the innovations $a_1(t-k)$, $k \geq 1$, are quite sizeable; see Table 1. Correspondingly, the proportion of the k-step-ahead forecast error variance of $X_2(t)$ due to the innovations $a_1(t)$, i.e.

$$p_{21}(k) = \sum_{h=0}^{k} \psi_{21h}^2 \Big/ \Big(\sum_{j=1}^{3} \sum_{h=0}^{k} \psi_{2jh}^2\Big)$$

is different from zero; for example, for k = 50, it is equal to 0.389, clearly an important proportion of the total variance of $X_2(t)$.

Conversely, if we consider the trivariate MA(1) model

$$X(t) = a(t) - \Pi_1 a(t-1)\ ,\ t \in \mathbb{Z}$$

where Π_1 and a(t) satisfy (13), the impulse responses of $a_1(t-k)$, $k \geq 0$, on $X_2(t)$ are all zero so that the proportion $p_{21}(k)$ of the k-step-ahead forecast error variance of $X_2(t)$ is zero, irrespective of the value of k ($k \geq 1$). On the other hand, it is clear that X_1 causes X_2 in the sense of Granger.

5. CONCLUDING REMARKS

In general, the characterization of noncausality from X_1 to X_2 given in Proposition 1 [condition (8)] leads one to consider nonlinear restrictions on the MA coefficients of the model. It is easy to see that these restrictions involve multilinear forms in the MA coefficients (i.e. quadratic or higher order forms). In special cases, such as MA models of finite order (with possibly other restrictions on their coefficients), condition (8) may lead to relatively simple restrictions, which may be tested fairly easily with Wald-type or likelihood-ratio tests (under appropriate regularity conditions). It is also worthwhile noting that the sufficient conditions (10) or (11) and the necessary condition $\psi_{211} = 0$ are also linear in the MA coefficients, hence relatively easy to test. For AR models of finite order, however, such simplifications are unlikely to occur. Further, it is well known that standard asymptotic theory may not work for tests of multilinear restrictions; for an illustration, see Boudjellaba, Dufour and Roy (1992).

In contrast with (8), the equivalent characterization $\Pi_{21}(z) = 0$ always involves *linear* restrictions (on the AR coefficients). Consequently, when the model is estimated in autoregressive form, which is typically the case for VAR models of finite order, the characterization $\Pi_{21}(z) = 0$ clearly provides a simpler and more natural parametrization for testing Granger noncausality. Even though the asymptotic distribution of estimated impulse responses derived from VAR models can be established under general regularity conditions [see, e.g., Baillie (1987) and Lütkepohl (1990, 1991)], the impulse responses are nonlinear transformations of the autoregressive coefficients Π_k, $k \geq 1$, and there is no advantage in considering such impulses to test Granger causality. It is also important to remember that the often-used characterization $\psi_{21}(z) = 0$ can be misleading when a third vector of variable is used to forecast : it is *neither necessary nor sufficient* to have Granger noncausality from X_1 to X_2. Further, in this case, the proportion of the variance of X_2 accounted for by the innovations of X_1 is *not a measure of Granger causal priority* from X_1 to X_2. If it is related to "causality", the characterization $\psi_{21}(z) = 0$ must involve a different notion of causality.

Table 1

Impulse responses ψ_{21k} and variance proportions $p_{21}(k)$ from X_1 to X_2 in the trivariate AR(1) model (12)

k	1	2	3	4	5	10	25	50	100
ψ_{21k}	0	−0.480	−0.528	−0.365	−0.275	−0.166	−0.027	−0.001	0.000
$p_{21}(k)$	0	0.139	0.256	0.295	0.314	0.369	0.388	0.389	0.389

REFERENCES

Baillie, R.T., 1987, Inference in dynamic models containing "surprise" variables, Journal of Econometrics 35, 101-117.

Boudjellaba, H., J.-M. Dufour and R. Roy, 1992, Testing causality between two vectors in multivariate ARMA models, Journal of the American Statistical Association 87, 1082-1090.

Caines, P.E. and C.W. Chan, 1975, Feedback between stationary stochastic processes, IEEE Transactions on Automatic Control AC-20, 498-508.

Faroque, A. and W. Veloce, 1990, Causality and the structure of Canada's balance of payments : evidence from time series, Empirical Economics 15, 267-283.

Granger, C.W.J., 1969, Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, Econometrica 37, 424-438.

Graybill, F.A., 1983, Matrices with applications in statistics, second edition (Wadsworth International Group, Belmont, CA).

Kyereme, S.S., 1991, Exchange rate, price, and output inter-relationships in Ghana : evidence from vector autoregressions, Applied Economics 23, 1801-1810.

Lütkepohl, H., 1990, Asymptotic distributions of impulse response functions and forecast error variance decompositions of vector autoregressive models, Review of Economics and Statistics 72, 116-125.

Lütkepohl, H., 1991, Introduction to multiple time series analysis (Springer-Verlag, Berlin).

McMillin, W.D., 1988, Money growth volatility and the macroeconomy, Journal of Money, Credit and Banking 20, 319-335.

Pierce, D.A. and L.D. Haugh, 1977, Causality in temporal systems : characterizations and a survey, Journal of Econometrics 5, 265-293.

Sims, C.A., 1972, Money, income and causality, American Economic Review 62, 540-552.

Sims, C.A., 1980a, Macroeconomics and reality, Econometrica 48, 1-48.

Sims, C.A., 1980b, Comparison of interwar and postwar business cycles : monetarism reconsidered, American Economic Review 70, 250-257.

Sims, C.A., 1982, Policy analysis with econometric models, Brookings Papers on Economic Activity 1, 107-164.

Stam, A., C.D. DeLorme and B. Finkenstadt, 1991, Cross national money-income causality for the floating exchange rate period, Journal of Macroeconomics 13, 207-237.

Tegene, A., 1991, Trade flows, relative prices, and effective exchange rates : a VAR on Ethiopian data, Applied Economics 23, 1369-1376.

Wiener, N., 1956, The theory of prediction, in : E.F. Beckenback, ed., Modern mathematics for engineers (series 1), chapter 8 (McGraw-Hill, New York).

ESSAI 2

TESTS DE CAUSALITE SOUS FORME VAR

ET VARMA: UNE ETUDE COMPARATIVE

e tests
n causale
ofondie du
xhaustive fut
usions peuvent
des méthodes de
salité disponibles à
ne forme réduite sont
prenant. De plus, dans
st un modèle autorégressif
égressif des test comparés,
une faible puissance des tests.

1. INTRODUCTION

Les tests de causalité sont devenus un outil essentiel pour étudier la dynamique entre variables économiques. Suite à l'important article de Granger (1969) dans lequel il donnait une définition opérationnelle de ce concept, plusieurs chercheurs développèrent différentes caractérisations de même que des tests conformes à la définition de Granger [voir à ce sujet l'excellente revue de Geweke (1984)]. Ces nouvelles caractérisations ont entraîné un grand nombre d'études empiriques, et ce dans les domaines les plus variés. La principale raison de cet engouement était que ces tests présentaient un attrait quant à la facilité avec laquelle on pouvait les effectuer. En effet, les premiers tests de causalité étaient principalement basés sur la forme autorégressive d'un processus, les rendant ainsi facilement opérationnels à l'aide de méthodes de moindres carrés.

Cependant, plusieurs contradictions apparurent dans les différents résultats de tests de causalité sur des données similaires, plus particulièrement concernant la relation causale entre la monnaie et le revenu [Feige et Pearce (1979)]. Une étude plus approfondie du comportement de ces tests était donc rendue nécessaire et la première étude exhaustive fut celle de Nelson et Schwert (1979). Selon eux, les différentes conclusions peuvent s'expliquer par la puissance respective des divers tests utilisés. Utilisant des méthodes de simulations, ils ont comparé la puissance des principaux tests de causalité disponibles à l'époque et la principale conclusion est que les tests basés sur la bonne forme réduite sont les plus performants. Ce résultat n'est pas en lui-même très surprenant. De plus, dans l'expérience même, le processus générateur des données utilisé est un modèle autorégressif d'ordre un, modèle restrictif compte tenu de l'aspect autorégressif des test comparés, pouvant entraîner une surparamétrisation et par conséquent une faible puissance des tests.

Ces auteurs soulèvent tout de même une question importante, soit la grande sensibilité de ces tests au préfiltrage et au choix de retards. Des modèles plus parsimonieux pourraient améliorer ainsi la puissance des ces tests et à cet effet, ils suggèrent le recours à la modélisation ARMA.

D'autres études ont été consacrées à la même problématique, les plus importantes étant celles de Guilkey et Salemi (1982) et Geweke, Meese et Dent (1983). Ces derniers ont comparé les puissances des principaux tests de causalité proposés au moyen du concept de pente approximative [Bahadur (1960)]. La conclusion, similaire à celle de Nelson et Schwert, soulève le fait que le test de Sims est sensible au préfiltrage, favorisant ainsi le test de Granger. Geweke, Meese et Dent utilisent aussi un processus générateur autorégressif, limitant donc l'étude du problème à une classe restreinte de processus stationnaires. Guilkey et Salemi remédient à cette lacune en incluant comme processus générateur la modélisation ARMA, ce qui met en lumière le problème de troncature associé aux modèles autorégressifs. Toutefois, la conclusion demeure la même, à savoir la supériorité du test de Granger sur le test de Sims. Quant au test de Pierce et Haugh, les précédentes études concluent toutes qu'il est systématiquement moins puissant.

Le message principal de ces différentes simulations est que les tests de causalité utilisés alors présentaient très peu de robustesse, faisant appel trop souvent à des choix arbitraires concernant la paramétrisation (choix de retard et préfiltrage), et étaient surtout limités à des processus autorégressifs. Le développement d'une modélisation plus générale pourrait ainsi remédier à certains des problèmes soulevés. D'une part, tel que mentionné précédemment, Nelson et Schwert proposèrent le recours à des modèles ARMA multivariés, ce qui conduit à des modèles plus parsimonieux pouvant potentiellement améliorer la puissance. Kang (1981) développa les conditions de non-causalité dans un cadre ARMA bivarié en suggérant une procédure de test appropropriée. Les conditions de non-causalité étant non-linéaires, Eberts et Steece (1984) et Newbold et Hotopp (1986) ont proposé une statistique de Wald pour effectuer les tests. Ces analyses s'effectuant dans un cadre bivarié, Boudjellaba, Dufour et Roy (1992,1994) ont généralisé le tout en dérivant les conditions de non-causalité dans des modèles ARMA multivariés pouvant inclure un troisième groupe de variables, ajouté à l'ensemble d'informations. Dans un contexte d'échantillon fini, le choix optimal du test asymptotique pour un modèle ARMA bivarié a été étudié par Taylor (1989). Il arrive à la conclusion que sous l'hypothèse nulle de non-causalité, le test du quotient de vraisemblance offre le niveau empirique le plus adéquat de même que la meilleure puissance.

Plus récemment, Lütkepohl et Poskitt (1992) développèrent une procédure de test de causalité qui conserve la simplicité du test de Granger sous la forme autorégressive, tout en permettant de s'appliquer à des processus plus généraux, tels les processus stationnaires inversibles. Ces derniers admettant une représentation autorégressive possiblement d'ordre infini, le test prend la forme d'une statistique de Wald appliquée aux paramètres d'un VAR d'ordre fini, mais dont l'ordre augmente avec l'échantillon, se confondant asymptotiquement avec un processus stationnaire inversible. Cependant, les résultats des simulations ne sont pas très concluants, car les tests proposés rejettent beaucoup trop souvent par rapport au niveau nominal du test.

Malgré le fait que les tests de causalité sous la forme ARMA multivariée s'avèrent une alternative intéressante, aucune étude comparant les performances de ces tests avec les tests plus classiques sous la forme VAR ne semble être disponible. Le but de cet essai visera donc à combler cette lacune. Pour ce faire, l'analyse s'effectuera à deux niveaux. Dans un premier temps, comme on sait que tout processus stationnaire inversible peut être approximé par un VAR d'ordre fini, il semble oppurtun d'étudier ce problème d'approximation en fonction du degré de troncation et de la proximité du processus par rapport à la zone non-inversible. Ainsi, par le calcul des projections, on pourra analyser formellement les distorsions induites par de telles approximations sur la structure de causalité du processus considéré. Par le fait même, comme les projections représentent la meilleure approximation possible, une distorsion à ce niveau théorique suggère que le niveau empirique des tests pourrait être affecté. D'autre part, des simulations seront effectuées afin de comparer explicitement le niveau empirique et la puissance des divers tests. La principale conclusion est à l'effet que la caractérisation et les tests de causalité sous la forme autorégressive peuvent effectivement engendrer des distorsions, rendant ainsi plus efficace le recours à une modélisation plus générale.

Dans la prochaine section, les résultats du calcul des projections théoriques seront présentés en fonction de différents modèles, y compris des modèles presque non-inversibles, pour lesquels l'approximation VAR est particulièrement mauvaise. Par la suite, on décriera le cadre dans lequel seront effectuées les différentes simulations de même que les résultats associés.

2. CALCUL DES PROJECTIONS

Comme on le mentionnait précédemment, la majorité des tests de causalité sont effectués à partir de la représentation autorégressive d'un processus stationnaire multivarié, sous la forme d'un VAR(p). Cette modélisation étant le résultat d'une approximation, il semble opportun dans un premier temps de mesurer l'effet de cette approximation sur la structure de la causalité. Dans cette section, nous allons analyser la relation entre un processus stationnaire de second ordre et son approximation autorégressive par le calcul des projections théoriques. Ceci permettra en particulier de montrer que l'approximation VAR induit une distorsion dans la structure de causalité apparente du processus.

La classe de processus stationnaires retenue pour cette étude correspond aux modèles VARMA multivariés, modèles caractérisés par une paramétrisation parsimonieuse sur la base de laquelle les conditions de non-causalité seront faciles à caractériser. De plus, la paramétrisation sera telle qu'il sera facile de mesurer la proximité de ces processus par rapport à la zone non-inversible; dans ce cas, la représentation autorégressive n'est plus définie.

Soit $\{X_t: t \in Z\}$ un processus stationnaire de second ordre de dimension m de moyenne $E[X_t] = 0$ et dont la fonction d'autocovariance sera dénotée par:

$$\Gamma(k) = E(X_t X'_{t+k}) \quad , \quad k \geq 0 \; .$$

Les autocovariances de ce processus stationnaire sont déterminées par les équations de Yule-Walker:

$$\Gamma(k) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{nj} \, \Gamma(k-j) \; , \qquad k = 1 \; , \; ... \; , \; n \; .$$

Dénotons $P[X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n]$ la meilleure prévision linéaire de X_{n+1} basée sur le passé $(X_1, \ldots, X_n)$, et ce au sens de l'erreur quadratique moyenne. Cette prévision doit satisfaire la condition d'orthogonalité:

$$X_{n+1} - P[X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] \perp X_{n+1-i} \; , \qquad i = 1 \; , \; \ldots \; , \; n.$$

Dans l'espace L^2, le vecteur X est défini comme étant orthogonal au vecteur Y si $E[XY'] = 0$. Cette projection étant unique, la prévision linéaire s'écriera:

$$\hat{X}_{n+1} = \Phi_{n1} X_n + \ldots . + \Phi_{nn} X_1 \; , \qquad n = 1, \; 2, \; \ldots$$

où les matrices Φ_{nj} représentent les coefficients de projection associés au processus.

Les matrices peuvent être calculées de manière récursive en utilisant l'algorithme de Durbin-Levinson [Brockwell et Davis (1991, chapitre 11)]. Soient:

$$\tilde{X}_0 = P[X_0|X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_n] = \tilde{\Phi}_{n1}X_1 + \dots + \tilde{\Phi}_{nn}X_n\ ,$$

$$V_n = E[\ (X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})\ (X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})']\ = \Gamma(0) - \Phi_{n1}\Gamma(-1) - \dots - \Phi_{nn}\Gamma(-n)\ ,$$

$$\tilde{V}_n = E[\ (X_0 - \tilde{X}_0)\ (X_0 - \tilde{X}_0)] = \Gamma(0) - \tilde{\Phi}_{n1}\Gamma(1) - \dots - \tilde{\Phi}_{nn}\Gamma(n)\ ,$$

$$\Delta_n = E[\ (X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})\ X_0'] = \Gamma(n+1) - \Phi_{n1}\Gamma(n) - \dots - \Phi_{nn}\Gamma(1)\ ,$$

$$\tilde{\Delta}_n = E[\ (X_0 - \tilde{X}_0)\ X_{n+1}'] = \Gamma(-n-1) - \tilde{\Phi}_{n1}\Gamma(-n) - \dots - \tilde{\Phi}_{nn}\Gamma(-1)\ .$$

Alors, on peut calculer les matrices Φ_{nk} et V_n au moyen des formules de récurrence:

$$\Phi_{nn} = \Delta_{n-1}\ \tilde{V}_{n-1}^{-1}\ , \qquad \tilde{\Phi}_{nn} = \tilde{\Delta}_{n-1}\ V_{n-1}^{-1}\ ,$$

$$\Phi_{nk} = \Phi_{n-1,k} - \Phi_{nn}\ \tilde{\Phi}_{n-1,n-k}\ , \qquad k = 1,\ \dots\ ,\ n-1\ ,$$

$$\tilde{\Phi}_{nk} = \tilde{\Phi}_{n-1,k} - \tilde{\Phi}_{nn}\ \Phi_{n-1,n-k}\ , \qquad k = 1,\ \dots\ ,\ n-1\ ,$$

avec comme conditions initiales:

$$V_0 = \tilde{V}_0 = \Gamma(0)\ , \qquad \Delta_0 = \tilde{\Delta}_O' = \Gamma(1)\ .$$

Comme illustration, considérons le modèle suivant:

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0.3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{t2} \end{pmatrix}$$

où X_2 ne cause pas X_1. De plus, comme la racine du polynôme caractéristique de ce processus est $1/\alpha$, la valeur $\alpha = 1$ correspond à un modèle non-inversible pour lequel il n'existe pas de représentation autorégressive, mais dont les matrices de projection existent. Pour être cohérent avec la section suivante sur les simulations, les matrices de projection sont calculées pour des modèles autorégressifs d'ordre p = 1, 2, 4, 8. Quant au paramètre caractérisant le MA(1), on retient α = 0.5, 0.7, 0.9 et 1. Nous ne considérons pas de valeurs de α inférieures à 0.5 car elles entraînent des coefficients de projection d'ordre inférieure à 10^{-5}.

Les valeurs des coefficients de projection présentées au tableau 1 correspondent aux éléments de la première ligne et de la deuxième colonne des différentes matrices de projection. Comme le modèle est tel que X_2 ne cause pas X_1, on devrait s'attendre à observer des coefficients de projection égaux à 0, conformément à la caractérisation de la non-causalité dans les modèles autorégressifs. Mais on s'aperçoit que ces coefficients sont non-nuls, et de plus en plus élevés lorsque α s'approche de 1, ce qui est naturel étant donnée la caractéristique d'un modèle non-inversible. De plus, un ordre plus élevé d'approximation ne semble guère améliorer la situation. On peut donc conclure que l'approximation autorégressive de processus stationnaires peut créer des distorsions dans le calcul des paramètres autorégressifs, affectant ainsi la structure de la causalité apparente dans les modèles VAR.

Une telle distorsion peut en principe affecter le niveau des tests de non-causalité sous les modèles VAR. Ainsi, elle pourrait expliquer le comportement erratique des niveaux des tests de causalité dans Lütkepohl et Poskitt (1994). En effet, par des simulations de tests de causalité sous la forme VAR, effectuées à partir d'un processus générateur MA(1), ils démontrent que les tests proposés rejettent beaucoup trop souvent par rapport au niveau nominal. On peut voir aussi que le niveau empirique s'éloigne du niveau nominal lorsque le modèle s'approche de la zone non-inversible. De plus, la longueur de l'ordre autorégressif n'améliore pas systématiquement le niveau des tests, comme le démontrent les projections théoriques. La distorsion due à l'approximation peut donc être suffisante pour rendre inopérationnelles de telles statistiques de tests.

3. TESTS DE CAUSALITE ET SIMULATIONS

Comme on vient de le voir, le fait d'approximer un processus stationnaire par un VAR(p) entraîne des distorsions dans les paramètres autorégressifs, et par conséquent peut affecter la caractérisation de la non-causalité. Cette analyse étant d'ordre théorique, il apparaît intéressant d'effectuer la même comparaison au niveau statistique en étudiant l'effet de l'approximation sur le niveau et la puissance des tests de causalité.

Il existe plusieurs tests de causalité basés sur la représentation autorégressive d'un processus. Cependant, suite aux conclusions des études comparatives discutées plus haut de même que par la grande fréquence d'utilisation dans divers travaux empiriques, le test fondé sur un VAR d'ordre fini semble le plus approprié à des fins de comparaison. Quant aux tests de causalité utilisant une modélisation plus générale, les tests sous la forme ARMA multivariée [Kang (1981) et Boudjellaba, Dufour et Roy (1992, 1994)] constituent l'alternative la plus opérationnelle.

3.1 L'HYPOTHESE NULLE

Soit $\{X_t : t \in Z\}$ un processus stationnaire de dimension m de moyenne nulle possédant la représentation de Wold:

$$X_t = u_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \, u_{t-i} = \Theta(L) \, u_t$$

où

$$\Theta(L) = I_m + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \, L^i$$

et u_t est l'innovation du processus et constitue un bruit blanc dont la matrice de covariance est non-singulière. Dans un contexte bivarié, Sims (1972) a caractérisé la condition de non-causalité de ce processus:

$$X_2 \nrightarrow X_1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{12,i} = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Si les racines du polynôme $\Theta(z)$ sont toutes à l'extérieur du cercle unité, alors le processus est inversible et on peut alors l'exprimer sous la forme autorégressive:

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i \, X_{t-i} + u_t \ .$$

La caractérisation de la non-causalité associée à cette forme autorégressive est décrite par la proposition 1 dans BDR (1992):

$$X_j \nrightarrow X_i \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{ij,k} = 0 \ , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Dans la cas général, cette dernière caractérisation suggère de tester une infinité de conditions. Pour remédier à ce problème, on approxime le processus par un VAR(p) où p est fini. Une telle approximation a l'avantage de s'estimer facilement par la méthode des moindres carrés, rendant ainsi cette forme de modélisation très populaire. Cependant, le choix de l'ordre du VAR demeure toujours problématique et les comparaisons effectuées dans la prochaine section viseront à étudier explicitement ces conséquences.

3.2 SIMULATIONS

Pour les fins de cette simulation, nous allons étudier des modèles bivariés. Tout au long des expériences, nous allons supposer un processus générateur de données ayant la forme MA(1):

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

où le vecteur des innovations est tiré d'une loi normale bivariée, c'est-à-dire $u_t \sim N(0, I_2)$, provenant du générateur de nombres aléatoires fourni dans le logiciel GAUSS 3.0. Les valeurs de paramètres considérées pour l'expérience seront les suivantes:

$$\alpha = \pm 0.2 \ , \ \pm 0.5 \ , \ \pm 0.8 \quad \textit{et} \quad \beta = 0 \ , \ \pm 0.2 \ , \ \pm 0.4 \ , \ \pm 0.6 \ .$$

Ce jeu de paramètres n'inclue pas $\alpha = 1$ car l'algorithme d'estimation du modèle VARMA n'est plus opérationnel, utilisant une approximation autorégressive dans le calcul de la vraisemblance qui est inexistante dans un tel cas. L'avantage de cette formulation MA(1) est que le paramètre α représente la distance du processus par rapport à la région non-inversible. En effet, la racine du polynôme associé au MA(1) dans ce cas est $1/\alpha$. A mesure que α s'approche de 1, l'approximation VAR sera de moins en moins adéquate, facilitant ainsi la comparaison entre une bonne et une mauvaise approximation. L'hypothèse nulle considérée sera:

$$H_0 : \ X_2 \nrightarrow X_1 \ ,$$

ce qui est équivalent pour le modèle considéré à tester l'hypothèse:

$$H_0 : \ \beta = 0 \ .$$

L'expérience consistera à comparer le niveau et la puissance de tests de causalité de X_2 vers X_1 au moyen de 5 modèles différents, soient:

- VAR(p) p = 1, 2, 4, 8
- VARMA(1,1) .

Les tests de causalité sous la forme VAR(p) consistent à estimer l'équation:

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \Pi_i X_{t-i} + u_t \quad ,$$

et à tester l'hypothèse:

$$H_o : \ \pi_{12,k} = 0 \quad , \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots , p \ .$$

En ce qui concerne le modèle sous la forme VARMA(1,1), il est représenté par:

$$X_t = \Phi X_{t-1} + \Theta u_{t-1} + u_t$$

et il sera estimé par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle, utilisant l'algorithme décrit dans Lütkepohl [1991 (chapitre 8)]. L'hypothèse testée sera:

$$H_o : \ \phi_{12} = \theta_{12} \ .$$

Que ce soit pour les modèles VAR(p) ou le modèle VARMA(1,1), la statistique utilisée pour effectuer les tests de causalité est celle du quotient de vraisemblance:

$$\lambda_{LR} = 2 \ [L(\hat{\theta}) - L(\theta^0)] \quad \sim \quad \chi^2(n)$$

où L est la fonction du log de la vraisemblance, prise respectivement à la valeur non-contrainte et contrainte de l'estimateur. Le nombre de degrés de liberté n correspond au nombre d'hypothèses à tester; dans la cas d'un test de causalité sur un VAR(p), cette valeur sera de p et pour le modèle VARMA(1,1), elle sera de 1. On utilise ce test car plusieurs études ont démontré une meilleure performance par rapport aux autres tests asymptotiques [Taylor (1989) et Dagenais et Dufour (1991)].

Pour chaque jeu de paramètres, la simulation est effectuée en générant 1000 échantillons de longueur 150, desquels on ne conserve que les 100 derniers éléments, ce qui favorise la stationnarité de la série générée. De plus, les modèles sont estimés avec les mêmes échantillons, rendant ainsi plus adéquate la comparaison entre les différents modèles.

Les résultats consistent en la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle. Sous la nulle, cette fréquence de rejet représente le niveau empirique du test, tandis que sous l'alternative elle représente la puissance du test. Pour le niveau empirique des tests, la valeur critique provient de la distribution chi-deux à 5%. Mais en échantillon fini, la distribution de la statistique du quotient de vraisemblance pouvant être différente de la distribution asymptotique, la puissance des tests est calculée au moyen de la valeur critique à 5% simulée sous la nulle.

Les résultats apparaissent aux tableaux 2 à 4. Concernant le niveau, tous les modèles présentent un niveau empirique adéquat, exception faite du VARMA(1,1) avec $\alpha = 0.8$. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnel étant approximatif, la justesse de l'approximation devient de moins en moins bonne lorsque l'on s'approche de la zone non-inversible. Quant à la puissance, les tests sous la forme VAR sont tous dominés par les tests sous la forme VARMA. Ce résultat n'est pas surprenant compte tenu de la meilleure spécification du modèle VARMA. Ainsi, comme on n'a aucune idée de la caractéristique du processus générateur a priori, si ce n'est que les données en résultant sont stationnaires, il semble donc naturel d'effectuer directement les tests sous une forme la plus générale possible.

Un résultat surprenant, en fonction des conclusions de la section précédente sur les projections théoriques et des résultats observés dans Lütkepohl et Poskitt, est à l'effet que les tests de causalité sous la forme VAR ont un niveau empirique cohérent avec le niveau nominal. De plus, le niveau empirique est invariant par rapport à la longueur du VAR et à la proximité du processus de la zone non-inversible. Des simulations supplémentaires ont été effectuées pour calculer le niveau empirique des tests de causalité sous la forme VAR à partir de données générées par un modèle non-inversible, c'est-à-dire le modèle MA(1) avec $\alpha = 1$. Les résultats sont les suivants:

ordre du var	niveau empirique
1	6.50
2	7.10
4	6.20
8	5.50

Malgré le fait que dans un tel cas la représentation autorégressive n'est plus définie, le niveau empirique des tests sous la forme VAR demeure adéquat. Avec un choix approprié concernant la statistique de test, les VAR peuvent donc demeurer une alternative valide. Le point essentiel expliquant de telles différences est l'utilisation de la statistique du quotient de vraisemblance par rapport au choix d'une statistique de type Wald pour les résultats de Lütkepohl et Poskitt. Cependant, à ce stade de ce travail, aucune intuition semble ressortir pour en suggérer une quelconque explication.

4. CONCLUSION

Que ce soit par une investigation théorique ou statistique, l'approximation de processus stationnaires par une représentation autorégressive d'ordre fini crée des distorsions dans la structure de la causalité et réduit la puissance des tests. Une telle conclusion encourage donc l'utilisation d'une classe de modèles plus large, tels les VARMA, afin de minimiser le risque d'une mauvaise spécification pouvant affecter la performance des tests. De plus, à la différence de la conclusion de Lütkepohl et Poskitt à l'effet que des tests de type Wald dans les modèles VAR présentent un niveau empirique inadéquat, les résultats de cet essai démontrent que la statistique du quotient de vraisemblance procure des tests ayant un niveau empirique cohérent avec le niveau nominal.

TABLEAU 1

Calcul des coefficients de projection Φ_{12j} , j = 1, ... ,p

α	ordre du var	coefficients de projection			
0.5	1	-0.045			
	2	-0.022	0.029		
	4	-0.003	0.006	0.008	0.008
	8	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000
0.7	1	-0.064			
	2	-0.055	0.062		
	4	-0.024	0.040	-0.046	0.036
	8	-0.003 -0.012	0.005 0.013	-0.008 -0.013	0.010 0.010
0.9	1	-0.072			
	2	-0.085	0.088		
	4	-0.075	0.117	-0.121	0.084
	8	-0.041 -0.117	0.074 0.110	-0.098 -0.089	0.112 0.053
1.0	1	-0.073			
	2	-0.094	0.094		
	4	-0.102	0.153	-0.153	0.102
	8	-0.083 -0.208	0.146 0.188	-0.188 -0.146	0.208 0.083

TABLEAU 2

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(1)

α / ß	0.2	0.5	0.8
0	4.2	5.2	6.3
0.2	44.1	24.0	12.1
0.4	94.6	72.2	35.4
0.6	99.8	96.2	68.0

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(2)

α / ß	0.2	0.5	0.8
0	3.1	4.3	6.1
0.2	41.9	35.9	16.6
0.4	94.0	88.9	53.3
0.6	99.8	99.7	87.7

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(4)

α / ß	0.2	0.5	0.8
0	3.4	3.5	4.7
0.2	31.0	37.2	27.6
0.4	86.1	91.1	80.5
0.6	99.6	99.9	97.7

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(8)

α / ß	0.2	0.5	0.8
0	3.4	4.0	4.6
0.2	20.5	25.7	36.1
0.4	73.2	82.2	91.1
0.6	98.2	99.1	99.8

FREQUENCE DE REJET POUR UN VARMA(1,1)

α / ß	0.2	0.5	0.8
0	6.0	5.5	9.7
0.2	48.5	59.4	65.9
0.4	96.8	98.9	99.0
0.6	100	100	99.9

TABLEAU 3

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(1)

α / ß	-0.2	-0.5	-0.8
0	3.7	4.1	5.7
0.2	44.8	29.7	14.6
0.4	94.9	75.8	39.5
0.6	100	97.8	69.7

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(2)

α / ß	-0.2	-0.5	-0.8
0	3.4	4.1	6.2
0.2	40.7	35.4	17.9
0.4	93.4	89.1	57.1
0.6	99.8	99.8	90.1

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(4)

α / ß	-0.2	-0.5	-0.8
0	3.5	3.6	4.7
0.2	29.6	37.5	26.8
0.4	87.7	91.5	79.9
0.6	99.5	99.8	98.8

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(8)

α / ß	-0.2	-0.5	-0.8
0	3.8	4.1	3.9
0.2	21.5	26.8	35.0
0.4	75.1	83.5	90.1
0.6	98.2	99.3	99.8

FREQUENCE DE REJET POUR UN VARMA(1,1)

α / ß	-0.2	-0.5	-0.8
0	6.5	6.6	10.5
0.2	46.3	53.1	61.0
0.4	96.0	97.8	98.3
0.6	100	100	100

TABLEAU 4

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(1)

ß \ α	0.2	0.5	0.8
0	4.2	5.2	6.3
-0.2	46.4	27.0	12.6
-0.4	95.7	74.3	36.5
-0.6	99.9	97.6	65.2

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(2)

ß \ α	0.2	0.5	0.8
0	3.1	4.3	6.1
-0.2	44.8	36.8	17.9
-0.4	95.0	89.4	54.5
-0.6	99.9	99.8	89.0

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(4)

ß \ α	0.2	0.5	0.8
0	3.4	3.5	4.7
-0.2	31.5	38.4	28.0
-0.4	87.7	92.6	80.9
-0.6	99.7	100	98.1

FREQUENCE DE REJET POUR UN VAR(8)

ß \ α	0.2	0.5	0.8
0	3.4	4.0	4.6
-0.2	21.4	25.1	36.2
-0.4	74.4	82.4	92.1
-0.6	98.8	99.3	99.9

FREQUENCE DE REJET POUR UN VARMA(1,1)

ß \ α	0.2	0.5	0.8
0	6.0	5.5	9.7
-0.2	50.0	61.4	67.4
-0.4	96.3	98.3	99.0
-0.6	100	100	99.9

BIBLIOGRAPHIE

Boudjellaba, H., J.M. Dufour and R. Roy, 1992, Testing Causality between Two Vectors in Multivariate ARMA Models, Journal of the American Statistical Association 87, 1081-1090.

Boudjellaba, H., J.M. Dufour and R. Roy, 1994, Simplified Conditions for Non-Causality between Vectors in Multivariate ARMA Models. Journal of Econometrics 62, 271-287.

Brockwell, P.J. and R.A. Davis, 1991, Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlag, Berlin.

Eberts, R.W. and B.M. Steece, 1984, A Test for Granger-Causality in a Multivariate ARMA Model, Empirical Economics 9, 51-58.

Feige, E.L. and D.K. Pearce, 1979, The Casual Causal Relationship between Money and Income : Some Caveats for Time Series Analysis, Review of Economics and Statistics 61, 521-533.

Geweke, J., 1984, Inference and Causality in Economic Time Series Models, in: Handbook of Econometrics, Z. Griliches and M.D. Intriligator eds. (Elsevier Science Publishers).

Geweke, J., R. Meese and W.T. Dent, 1983, Comparing Alternative Tests of Causality in Temporal Systems, Journal of Econometrics 21, 161-194.

Granger, C.W.J., 1969, Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, Econometrica 37, 424-438.

Guilkey, D.K. and M.K. Salemi, 1982, Small Sample Properties of Three Tests for Granger-Causal Ordering in a Bivariate Stochastic System, Review of Economics and Statistics 64, 562-571.

Kang, H., 1981, Necessary and Sufficient Conditions for Causality Testing in Multivariate ARMA Models, Journal of Time Series Analysis 2, 95-101.

Lütkepohl, H., 1991, Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, Berlin.

Lütkepohl, H. and D.S. Poskitt, 1994, Testing for Causation Using Infinite Order Vector Autoregressive Processes, Econometric Theory.

Nelson, C.R. and G.W. Schwert, 1982, Tests for Predictive Relationships between Time Series Variables: A Monte Carlo Investigation, Journal of the American Statistical Association 77, 11-18.

Newbold, P., 1982, Causality Testing in Economics, in: Time Series Analysis: Theory and Practice (vol. 1), O.D. Anderson ed., 701-716.

Newbold, P. and S.M. Hotopp, 1986, Testing Causality Using Efficiently Parametrized Vector ARMA Models, Applied Mathematics and Computation 20, 329-348.

Pierce, D.A. and L.D. Haugh, 1977, Causality in Temporal Systems: Characterizations and a Survey, Journal of Econometrics 5, 265-293.

Sims, C.A., 1972, Money, Income and Causality, American Economic Review 62, 540-552.

Taylor, S.A., 1989, A Comparison of Classical Tests of Criterion when Determining Granger Causality with a Bivariate ARMA Model, Empirical Economics 14, 257-271.

ESSAI 3

PARSIMONIOUS AUTOREGRESSIVE CONDITIONS FOR NONCAUSALITY IN MULTIVARIATE ARMA MODELS

(co-auteur avec Jean-Marie Dufour et Saïd Nsiri)

Version écourtée de ce texte à paraître dans:
Papers and Proceedings of the American Statistical Association

1. INTRODUCTION

Causality tests have become a widely used tool for studying the dynamic properties of economic variables. Since the seminal papers of Granger (1969) and Sims (1972), most causality tests are performed using finite order VAR models. These models have the big advantage of being estimable by ordinary least squares. Furthermore, the parameter restrictions implied by noncausality conditions are linear. Nevertheless, simulation studies have noted that the results of the tests are sensitive to the choice of an appropriate order for the VAR [see Nelson and Schwert (1982) and Guilkey and Salemi (1982)]. The same auhors have also observed that using an approximation of a stationary process can lead to less powerful tests. In order to overcome these problems, several authors have proposed to perform the noncausality tests in the more general framework of multivariate ARMA models [Kang (1981), Newbold (1982), Eberts and Steece (1984), Newbold and Hotopp (1986), Boudjellaba, Dufour and Roy (1992, 1994)]. However, these tests lead one to consider nonlinear conditions which can be quite difficult to test jointly or even sequentially (because the restrictions have no natural ordering). For further discussion of these difficulties, see Boudjellaba, Dufour and Roy (1992, 1994).

The aim of this paper is to improve the latter procedures by deriving noncausality conditions based on the autoregressive representation of a multivariate ARMA model. Even though the AR representation of an ARMA process has infinite order, we demonstrate that, under the hypothesis of noncausality, it is sufficient to test the nullity of a *finite* number of autoregressive coefficients. More precisely, we develop bounds on the number of conditions to consider. These bounds can be formulated in terms of the parameters defining the ARMA model or in terms Kronecker indices (which characterize the echelon representation of an ARMA model). Further, these conditions have a natural ordering which makes them much easier to test. Hence, we outline a sequential procedure that exploits this characteristic and can as well improve the upper bound on the number of conditions to test.

The second section presents the general framework used in the paper. In the third section, we derive the bounds on the number of conditions which need to be verified. The next section presents an other bound in terms of Kronecker indices. In the last section, we outline the sequential test procedure.

2. FRAMEWORK

Let $(X(t) : t \in \mathbb{Z})$ be a $m \times 1$ second-order stationary strictly indeterministic stochastic process possessing an ARMA representation :

(2.1) $\Phi(B)\, X(t) = \Theta(B)\, a(t)\, ,\ t \in \mathbb{Z}\, ,$

where $\Phi(B) = [\phi_{ij}(B)]_{i,j=1,\ldots,m}$, $\Theta(B) = [\theta_{ij}(B)]_{i,j=1,\ldots,m}$, $\phi_{ij}(B)$ is a polynomial (in B) of degree $\deg(\phi_{ij}) = p_{ij}$, $\Theta(B)$ is a polynomial of degree $\deg(\theta_{ij}) = q_{ij}$, $(a(t) : t \in \mathbb{Z})$ is a white noise process of order two, and the equation $\det[\Phi(z)] = 0$ for $z \in \mathbb{C}$ has all its roots outside the unit circle. Without loss of generality for the purpose of this paper, it is assumed that X(t) has mean zero. Note that the process X(t) may possess several representations which satisfy the above assumptions : we simply assume that (2.1) is one of them. In particular, in order to allow for the "echelon" form of the model, we do not impose the usual restriction $\Phi(0) = \Theta(0) = I_m$. Under the above conditions, the process X(t) has the moving average (MA) representation

(2.2) $X(t) = \Psi(B)\, a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k\, a(t-k)\, ,\ t \in \mathbb{Z}\, ,$

where $\Psi(B) = \Phi(B)^{-1}\Theta(B) = [\psi_{ij}(B)]_{i,j=1,\ldots,m}$, and $\psi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ijk}\, B^k$. Further, if the equation $\det[\Theta(z)] = 0$ has all its roots outside the unit circle, X(t) also has an autoregressive (AR) representation :

(2.3) $\Pi(B)\, X(t) = \psi_0\, a(t)\, ,\ t \in \mathbb{Z}\, ,$

where

(2.4) $\psi_0 = \Phi(0)^{-1}\Theta(0)\, ,\ \Pi(B) = \psi_0\, \Theta(B)^{-1}\, \Phi(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k\, B^k = [\pi_{ij}(B)]_{i,j=1,\ldots,m}\, ,$

$\Pi_0 = I_m$ and $\pi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{ijk}\, B^k$. In the usual special case where $\Phi(0) = \Theta(0) = I_m$ or when the model is in echelon form [which entails $\Phi(0) = \Theta(0)$], it is clear that $\Psi_0 = I_m$.

In this paper, we give parsimonious conditions such that the nullity of the series $\psi_{ij}(B)$ and $\pi_{ij}(B)$ is ensured by the nullity of finite numbers of coefficients in the same series. In other words, for $i \neq j$, we give conditions of the type :

$$\psi_{ijk} = 0 \,,\ \forall k \geq 0 \Leftrightarrow \psi_{ijk} = 0 \,,\ k = 0, \ldots, \bar{q}_{ij} \,,$$

$$\pi_{ijk} = 0 \,,\ \forall k \geq 1 \Leftrightarrow \pi_{ijk} = 0 \,,\ k = 1, \ldots, \bar{p}_{ij} \,,$$

where $\bar{q}_{ij}$ and $\bar{p}_{ij}$ are finite integers chosen to be as small as possible. These results improve earlier conditions of the same type given by Lütkepohl (1991, 1993). The conditions obtained are then applied to obtain convenient characterizations of noncausality in multivariate ARMA models.

3. PARSIMONIOUS AR AND MA CHARACTERIZATIONS

To obtain the results proposed, we will need two lemmas. The first of these lemmas gives a general property of power series that can be factorized as the product of a polynomial with another power series. Proofs are given in the Appendix.

Lemma 1 : Let $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ be a power series in $z \in \mathbb{C}$ (with $a_j \in \mathbb{C}$, for $j \geq 0$) which is convergent for $|z| < \delta$, where $\delta > 0$, and such that

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \left[\sum_{k=0}^{p} b_k z^k\right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell z^\ell\right], \text{ for } |z| < \delta$$

where $\sum_{k=0}^{p} b_k z^k$ is some polynomial of given order p and $\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell z^\ell$ is a power series with $c_0 = 1$. Then

$$a_j = 0 \,,\ \forall j \geq 0 \Leftrightarrow a_j = 0 \,,\ j = 0, 1, \ldots, p \,.$$

Now, for any polynomial $f(z) = \sum_{k=0}^{p} b_k z^k$, let us denote by deg(f) the degree p of the polynomial. Further, for any $n \times n$ matrix of polynomials $A(z) = [f_{ij}(z)]_{i,j=1,\ldots,n}$, let us denote by $|A(z)|$ the determinant of A(z) and define :

$$(3.1)\quad d_0(A) = \operatorname{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n} \deg(f_{ij_i}) : (j_1, \ldots, j_n) \in P(n)\right\}$$

where P(n) is the set of permutations of the integers (1, 2, ... , n),

(3.2) $d_{i\cdot}(A) = \mathrm{Max}\{\deg(f_{ij}) : j = 1, \dots , n\}$, $i = 1, \dots , n$,

(3.3) $d_{\cdot j}(A) = \mathrm{Max}\{\deg(f_{ij}) : i = 1, \dots , n\}$, $j = 1, \dots , n$,

(3.4) $d_1(A) = \mathrm{Min}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_{i\cdot}(A) \, , \, \sum_{j=1}^{m} d_{\cdot j}(A)\right\}$,

(3.5) $\bar{d}(A) = \mathrm{Max}\{\deg(f_{ij}) : i, j = 1, \dots , n\}$.

It is easy to see that $d_{i\cdot}(A)$ is the maximal degree of the polynomials on the i-th row of A, $d_{\cdot j}(A)$ is the maximal degree of the polynomials on the j-th column of A, while $\bar{d}(A)$ is the maximal degree over all the elements of A.

The second lemma gives useful properties of determinants and inverses of polynomial matrices.

Lemma 2 : Let $\Theta(z) = [\theta_{ij}(z)]_{i,j=1,\dots,m}$ and $\Phi(z) = [\phi_{ij}(z)]_{i,j=1,\dots,m}$ be two $m \times m$ matrices of complex-coefficient polynomials in $z \in \mathbb{C}$. Let also $\Theta_{(j,i)}(z)$ be the $(m-1) \times (m-1)$ matrix obtained by deleting the j-th row and the i-th column of $\Theta(z)$. Then, using the notations defined in (3.1)-(3.5), the following properties hold :

(a) $|\Theta(z)|$ is a polynomial such that

$$\deg(|\Theta(z)|) \le d_0(\Theta) \le d_1(\Theta) \le m\bar{d}(\Theta) ;$$

(b) for any z such that $|\Theta(z)| \ne 0$,

$$|\Theta(z)|\,\Theta(z)^{-1} = [\theta^*_{ij}(z)]_{i,j=1,\dots,m}$$

where $\theta^*_{ij}(z)$ is a polynomial in z such that

$$\deg(\theta^*_{ij}) = \deg(|\Theta_{(j,i)}(z)|) \leq d_0(\Theta_{(j,i)}) \leq d_1(\Theta_{(j,i)}) \leq (m-1)\,\bar{d}(\Theta_{(j,i)}) \leq (m-1)\,\bar{d}(\Theta)\,,$$

with

$$d_1(\Theta_{(j,i)}) = \mathrm{Min}\{d^{(j,i)}_{1R}(\Theta)\,,\, d^{(j,i)}_{1C}(\Theta)\}\,,$$

$$d^{(j,i)}_{1R}(\Theta) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{k\ell}) : 1 \leq \ell \leq m\,,\, \ell \neq i\}\,,$$

$$d^{(j,i)}_{1C}(\Theta) = \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{m} \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{k\ell}) : 1 \leq k \leq m\,,\, k \neq j\}\,,$$

$$\bar{d}(\Theta_{(j,i)}) = \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{k\ell}) : k, \ell = 1, \dots, m\,,\, k \neq j\,,\, \ell \neq i\}\,;$$

(c) for any z such that $|\Theta(z)| \neq 0$,

$$|\Theta(z)|\,\Theta(z)^{-1}\,\Phi(z) = [\pi^*_{ij}(z)]_{i,j=1,\dots,m}$$

where $\pi^*_{ij}(z)$ is a polynomial in z such that

$$\begin{aligned}\deg(\pi^*_{ij}) &\leq \underset{1\leq k\leq m}{\mathrm{Max}}\{\deg(\theta^*_{ik}) + \deg(\phi_{kj})\} \leq \underset{1\leq k\leq m}{\mathrm{Max}}\{d_0(\Theta_{(k,i)}) + \deg(\phi_{kj})\}\\ &\leq \underset{1\leq k\leq m}{\mathrm{Max}}\{d_1(\Theta_{(k,i)}) + \deg(\phi_{kj})\} \leq \underset{1\leq k\leq m}{\mathrm{Max}}\{(m-1)\,\bar{d}(\Theta_{(k,i)}) + \deg(\phi_{kj})\}\\ &\leq (m-1)\,\bar{d}(\Theta) + d_{\cdot j}(\Phi) \leq (m-1)\,\bar{d}(\Theta) + \bar{d}(\Phi)\,.\end{aligned}$$

By applying the two previous lemmas, it is straightforward to obtain the following proposition on the coefficients of the moving average representation (2.2).

Proposition 1 : For the process described by (2.1)-(2.2), we have, for $i \neq j$,

(3.6) $\psi_{ijk} = 0\,,\ \forall k \geq 0 \Leftrightarrow \psi_{ijk} = 0$, for $k = 0, \dots, \bar{q}_{ij}$

where $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, and

$$(3.7)\quad \bar{q}_{ij} = \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{\deg(\phi^*_{ik}) + \deg(\theta_{kj})\} \le \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{d_0(\Phi_{(k,i)}) + \deg(\theta_{kj})\}$$

$$\le \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{d_1(\Phi_{(k,i)}) + \deg(\theta_{kj})\} \le \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{(m-1)\,\bar{d}(\Phi_{(k,i)}) + \deg(\theta_{kj})\}$$

$$\le (m-1)\,\bar{d}(\Phi) + d_{\cdot j}(\Theta) \le (m-1)\,\bar{d}(\Phi) + \bar{d}(\Theta)$$

where $\phi^*_{ik}(z)$ is defined by $|\Phi(z)|\Phi(z)^{-1} = [\phi^*_{k\ell}(z)]_{k,\ell=1,\dots,m}$ for $|z| \le 1$, $\Phi_{(k,i)}(z)$ is the $(m-1)\times(m-1)$ matrix obtained by deleting the k-th row and the i-th column of $\Phi(z)$.

For the case where $\Theta(B) = I_m$ (pure finite order autoregressive process), the largest bound in (3.7) coincides with the one given by Lütkepohl (1991, p. 45; 1993). For mixed cases, the same bound is also given (without proof) by Lütkepohl (1991, p. 240). In the next section, we will see that the other bounds in (3.7) can provide substantial improvement over this rather crude bound.

Proposition 2 : Let the process X(t) described by (2.1)-(2.2) be invertible with autoregressive representation (2.3). Then, for $i \ne j$, a sufficient condition for $X_j \nrightarrow X_i$ is given by

$$(3.8)\quad \pi_{ijk} = 0\ ,\ \text{for } k = 1, 2, \dots, \bar{p}_{ij}$$

where $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, and

$$(3.9)\quad \bar{p}_{ij} = \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{\deg(\theta^*_{ik}) + \deg(\phi_{kj})\} \le \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{d_0(\Theta_{(k,i)}) + \deg(\phi_{kj})\}$$

$$\le \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{d_1(\Theta_{(k,i)}) + \deg(\phi_{kj})\} \le \underset{1\le k\le m}{\mathrm{Max}} \{(m-1)\,\bar{d}(\Theta_{(k,i)}) + \deg(\phi_{kj})\}$$

$$\le (m-1)\,\bar{d}(\Theta) + d_{\cdot j}(\Phi) \le (m-1)\,\bar{d}(\Theta) + \bar{d}(\Phi)$$

where $\theta^*_{ik}(z)$ is defined by $|\Theta(z)|\Theta(z)^{-1} = [\theta^*_{k\ell}(z)]_{k,\ell=1,\dots,m}$ for $z \in \mathbb{C}$ such that $|\Theta(z)| \ne 0$, and $\Theta_{(k,i)}$ is defined as in Lemma 2. Further, if the white noise process a(t) has a nonsingular covariance matrix, the condition (3.8) is necessary and sufficient for $X_j \nrightarrow X_i$.

To illustrate how Propositions 1 and 2 can be applied, consider the case of a bivariate process (m = 2). Then, from Proposition 1, we see that

$$\bar{q}_{21} = \text{Max}\{\deg(\phi^*_{21}) + \deg(\theta_{11}) \,,\, \deg(\phi^*_{22}) + \deg(\theta_{21})\}$$

$$= \text{Max}\{\deg(\phi_{21}) + \deg(\theta_{11}) \,,\, \deg(\phi_{11}) + \deg(\theta_{21})\} \le p + q \,.$$

where $q = \bar{d}(\Theta)$ and $p = \bar{d}(\Phi)$. Similarly,

$$\bar{p}_{21} = \text{Max}\{\deg(\theta^*_{21}) + \deg(\phi_{11}) \,,\, \deg(\theta^*_{22}) + \deg(\phi_{21})\}$$

$$= \text{Max}\{\deg(\theta_{21}) + \deg(\phi_{11}) \,,\, \deg(\theta_{11}) + \deg(\phi_{21})\} \le q + p$$

For example, if $\deg(\phi_{11}) = \deg(\theta_{11}) = 0$, $\deg(\phi_{22}) = \deg(\theta_{22}) = 10$ and the other degrees are all equal to 1, we have $\bar{q}_{12} = 1$, $\bar{p}_{21} = 1$ while $p + q = 20$. Thus, the hypothesis $X_1 \not\rightarrow X_2$ can be tested by considering only one restriction, namely $\pi_{211} = 0$, instead of 20 restrictions (as suggested by $q + p = 20$).

4. DYNAMIC DIMENSION AND ECHELON CHARACTERIZATIONS

In this section, we elaborate on the previous results in two ways : first, we show that the dynamic dimension of an ARMA model can also be used to bound the number of restrictions which characterize noncausality properties; secondly, we give a compact expression for the noncausality conditions, which is directly applicable to models written in the related *echelon form* (although it also holds for other representations).

The conditions for noncausality given in the previous section depend on the particular ARMA representation (or model) used to describe the process. We will now give a condition for noncausality which is model-free and depends only on the process itself. It is well known that the dynamic structure of a m-dimensional ARMA process can be obtained from m non-negative integers $n_1, \ldots, n_m$ called the Kronecker indices; see, for example, Deistler (1985). These indices allow one to define a unique ARMA representation of the process called the ARMA echelon form of the model. The autoregressive and moving-average polynomials of this model are defined by $\Phi(B) = [\phi_{ij}(B)]$ and $\Theta(B) = [\theta_{ij}(B)]$ where

$$(4.1)\quad \phi_{ij}(B) = \delta_{ij} + \sum_{k=n_i+1-n_{ij}}^{n_i} \phi_{ijk} B^k\,,\ \theta_{ij}(z) = \phi_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{n_i} \theta_{ijk}\, B^k\,,\ i, j = 1, \ldots, m\,,$$

and

$$(4.2)\quad n_{ij} = \begin{cases} \min(n_i + 1, n_j)\,, & \text{if } i > j\,, \\ \min(n_i, n_j)\,, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

Note that the matrix $\Phi(0)$ is lower triangular with ones on the diagonal and $\Phi(0) = \Theta(0)$. For more details, we refer the reader to Tsay (1991) and Nsiri and Roy (1992).

The sum of the Kronecker indices, $n = n_1 + \ldots + n_m$, is called the *dynamic dimension* of the process. The following result gives a characterization of noncausality in terms of the dynamic dimension n and the coefficients π_{ijk} of the decomposition of the innovation process a(t) on the present and the past of the process X(t).

Proposition 3 : Under the assumptions of Proposition 2, the condition

$$(4.3)\quad \pi_{ijk} = 0 \ \text{ for } \ k = 1, 2, \ldots, n$$

is sufficient for $X_j \not\rightarrow X_i$ $(i \neq j)$, where n is the dynamic dimension of the process X(t). If furthermore the white-noise process a(t) has a nonsingular covariance matrix, the condition (4.3) is necessary and sufficient for $X_j \not\rightarrow X_i$.

This characterization is simple and does not depend on the ARMA representation used to describe X(t). We can then use identification methods, like those proposed by Tsay (1991) or Nsiri and Roy (1992), to specify the bound n and to define tests of the hypothesis $X_j \not\rightarrow X_i$.

Consider now a m-dimensional second-order stationary process $(X(t) : t \in \mathbb{Z})$ possessing the ARMA model given by (2.2) where

$$(4.4)\quad \Phi(B) = \sum_{i=0}^{p} \Phi_i\, B^i\,,\quad \Theta(B) = \sum_{j=0}^{q} \Theta_j\, B^j\,,\ \Phi_0 = \Theta_0\,.$$

We assume $\Phi_0 = \Theta_0$ to simplify the formulation of the restrictions. When $\Phi(0)$ is nonsingular [as assumed in (2.2)], it is always possible to redefine the white noise process a(t) so that $\Phi_0 = \Theta_0$ holds [e.g., by taking $\tilde{a}(t) = \Phi_0^{-1}\Theta_0 a(t)$ as the white noise of the model]. In order to include ARMA echelon form models, we do not suppose, however, that $\Phi_0 = \Theta_0 = I_m$. In ARMA echelon representations, it is assumed that $\Phi_0 = \Theta_0$ where Φ_0 is a lower triangular matrix with ones on the diagonal, so that the representation (4.4) includes (4.1) as a special case.

Let us write $\Phi_i = 0$ for $i > p$, $\Theta_j = 0$ for $j > q$, and $\Gamma_k = \Phi_k - \Theta_k$ for $k \geq 1$. From (2.1), (2.3), and (4.1), we then have for any integer $K \geq 1$,

(4.5) $\Gamma = \Delta\, \Pi$

where

$$(4.6)\quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_K \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Theta_0 & 0 & \dots & 0 \\ \Theta_1 & \Theta_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{K-1} & \Theta_{K-2} & & \Theta_0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_K \end{bmatrix}.$$

At this point, we find it useful to introduce some additional notations. For any $m_1 \times m_2$ matrix M, $A \subseteq \{1, \dots, m_1\}$ and $B \subseteq \{1, \dots, m_2\}$, where A and B are nonempty, let us denote by M_{AB} the submatrix of M obtained by selecting from M the elements which belong to the rows and columns of M corresponding to the indices in A and B respectively (keeping the original order). We also denote $M_{A\cdot} = M_{A\{1, \dots, m_2\}}$ the rows k of M such that $k \in A$, $M_{\cdot B} = A_{\{1, \dots, m_1\}B}$ the columns k of M such that $k \in B$, M_{Ak} the k-th column of $M_{A\cdot}$ (if it exists) and M_{kB} the k-th row of $M_{\cdot B}$. In particular, if I_{m_i} is the identity matrix of order m_i $(i = 1, 2)$, we can define the "selection" matrices

$$(4.7)\quad S(m_i)_{A\cdot} = (I_{m_i})_{A\cdot}\,, \quad S(m_i)_{\cdot B} \equiv (I_{m_i})_{\cdot B} = [S(m_i)_{B\cdot}]'$$

and it is easy to see that

$$(4.8)\quad M_{AB} = S(m_1)_{A\cdot}\, M\, S(m_2)_{\cdot B}\,, \quad M_{A\cdot} = S(m_1)_{A\cdot}\, M\,, \quad M_{\cdot B} = M\, S(m_2)_{\cdot B}\,,$$

$$M_{Ak} = S(m_1)_{A\cdot}\, M\, S(m_2)_{\cdot k}\,, \quad M_{kB} = S(m_1)_{k\cdot}\, M\, S(m_2)_{\cdot B}\,.$$

We shall consider here submatrices of Γ and Δ obtained by selecting rows and/or columns indexed by the sets

$$(4.9)\quad J(j) = \{j, j+m, \dots, j+(K-1)\,m\}\ ,\ \bar{J}(j) = \{1, 2, \dots, Km\} \setminus J(j)\ .$$

Using the above notations, we then get the following characterization of noncausality.

Proposition 4 : Let the assumptions of Proposition 2 hold with $\Phi(0) = \Theta(0)$. Then, for $K \geq \bar{p}_{ij}$ and $i \neq j$, the condition

$$(4.10)\quad \Gamma_{J(i)j} = \Delta_{J(i)\bar{J}(i)}\,[\Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)}]^{-1}\,\Gamma_{\bar{J}(i)j}$$

is sufficient for $X_j \nrightarrow X_i$, where the matrices Γ and Δ are defined by (4.5)-(4.6) and $\bar{p}_{ij}$ is defined by (3.9). Furthermore, if the white-noise process $a(t)$ has a nonsingular covariance matrix, the condition (4.10) is necessary and sufficient for $X_j \nrightarrow X_i$.

It follows from the previous section that the result of Proposition 4 also holds if K is equal to the dynamic dimension n of the process X(t). Note also that characterization (4.10) holds as well for models which are not in echelon form, provided $\Phi_0 = \Theta_0$, for example, when the usual condition $\Phi_0 = \Theta_0 = I_m$ holds.

5. SEQUENTIAL PROCEDURE

Let us now consider the problem of testing the hypothesis of noncausality between X_j and X_i (for $i \neq j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$) :

$$(5.1)\quad H_0 : X_j \nrightarrow X_i\ .$$

By Proposition 2, we know this can be done by testing a finite number of constraints on the AR and MA parameters of the model, namely :

$$(5.2)\quad H_0 : \pi_{ijk} = 0\ ,\ k = 1, \dots, \bar{p}_{ij}\ ,$$

where the π_{ijk} are coefficients of the autoregressive representation of X(t) [see equations (2.3) and (2.4)]. Furthermore, we can easily calculate the different π_{ijk} from the recursive formula :

$$(5.3) \quad \Pi_k = (\Phi_k - \Theta_k) + \sum_{\ell=1}^{k-1} \Theta_\ell \, \Pi_{k-\ell} \, , \; k = 1, 2, \ldots,$$

where $\Pi_0 = I_m$.

We will now propose a sequential procedure for testing H_0, by which we can improve the upper bound $\bar{p}_{ij}$ representing the maximal number of tests to perform. This procedure will exploit the fact that the restrictions imposed by the identification stage of the model may imply that some of the conditions in (5.2) may hold exactly, which can reduce the number of tests to be performed.

Let $\hat{\Phi}(B)$ and $\hat{\Theta}(B)$ be the estimators of the identified VARMA model, and let

$$(5.4) \quad \hat{\Pi}(B) = \hat{\Theta}(B)^{-1} \, \hat{\Phi}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\Pi}_k \, B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\Pi}_k^{(0)} \, B^k$$

be the corresponding $\Pi(B)$ series, with $\hat{\Pi}_k = [\hat{\pi}_{pqk}]_{p,q=1,\ldots,m}$. It will be useful to introduce here estimates of the Π_k's constrained by various subsets of the restrictions in (5.2). Namely, we first define

$$(5.5) \quad \hat{\Pi}_k^{(1)} = [\Delta_{pqk}(i, j, 1) \, \hat{\pi}_{pqk}]_{p,q=1,\ldots,m} = [\hat{\pi}_{pqk}^{(1)}]_{p,q=1,\ldots,m} \, ,$$

for $k \geq 1$, where

$$(5.6) \quad \Delta_{pqk}(i, j, \ell) = 1 - \delta_{ip} \, \delta_{jq} \, \delta_{k\ell} \begin{array}{l} = 1, \text{ if } p = i, \, q = j \text{ and } k = \ell \\ = 0, \text{ otherwise ,} \end{array}$$

i.e., the matrices $\hat{\Pi}_k^{(1)}$, k = 1, 2, ..., are identical to $\hat{\Pi}_k$ except for the element $\hat{\pi}_{ijk}^{(1)}$ which is set equal to zero (following H_0). Then we recursively compute

(5.7) $\Pi_k^{(\ell+1)} = (\hat{\Theta}_k - \hat{\Phi}_k) + \sum_{p=1}^{k-1} \hat{\Theta}_p \hat{\Pi}_{k-p}^{(\ell)} = [\tilde{\pi}_{pqk}^{(\ell+1)}]_{p,q=1,\ldots,m}$,

(5.8) $\hat{\Pi}_k^{(\ell+1)} = [\Delta_{pqk}(i, j, \ell)\, \tilde{\pi}_{pqk}^{(\ell+1)}] = [\hat{\pi}_{pqk}^{(\ell+1)}]_{p,q=1,\ldots,m}$,

for $\ell = 1, 2, \ldots$ (and $k \geq 1$). In other words, the matrices $\hat{\Pi}_k^{(\ell)}$ are obtained from (3.3) imposing recursively the restrictions $\hat{\pi}_{ijk}^{(\ell)} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, \ell$.

We then proceed as follows.

1. We first consider $H_0^{(1)} : \pi_{ij1} = 0$.

   a) If $\hat{\pi}_{ij1} = 0$, $H_0^{(1)}$ holds exactly and we proceed to test $H_0^{(2)}$. In other words, $H_0^{(1)}$ is accepted at level $\alpha_1 = 0$.

   b) If $\hat{\pi}_{ij1} \neq 0$, we need to test $H_0^{(1)}$.

      1) To do this, we first check whether $H_0^{(1)}$ is sufficient for H_0 to hold by recomputing the recursion (5.3), setting $\hat{\Pi}_{ij1} = 0$. This yields the modified estimators $\hat{\Pi}_{ijk}^{(1)}$, $k = 2, \ldots, \bar{p}_{ij}$, defined in (5.5).

      2) If $\hat{\pi}_{ijk}^{(1)} = 0$ for $k = 2, \ldots, \bar{p}_{ij}$, we test $H_0^{(1)}$ at level $\alpha_1 = \alpha$. H_0 is rejected or accepted, depending on whether $H_0^{(1)}$ is rejected or accepted, and the procedure stops.

      3) If $\hat{\pi}_{ijk}^{(1)} \neq 0$ for some $2 \leq k \leq \bar{p}_{ij}$, we test $H_0^{(1)}$ at level $\alpha_1 = \alpha/2$. If $H_0^{(1)}$ is rejected, H_0 is rejected. If $H_0^{(1)}$ is accepted, we proceed to test $H_0^{(2)}$.

2. Suppose now that $H_0^{(k)}$, $k = 1, \ldots, \ell - 1$ have all been accepted (where $\ell \geq 2$). We need to test $H_0^{(\ell)}$. Let $\bar{\alpha}_{\ell-1} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\ell-1}$.

a) If $\hat{\pi}_{ij\ell}^{(\ell-1)} = 0$, $H_0^{(\ell)}$ holds exactly and we proceed to test $H_0^{(\ell+1)}$. In other words, $H_0^{(\ell)}$ is accepted at level $\alpha_\ell = 0$.

b) If $\hat{\pi}_{ij\ell}^{(\ell-1)} \neq 0$, we need to test $H_0^{(\ell)}$.

1) We first check whether $H_0^{(\ell)}$ is sufficient (given $H_0^{(k)}$, $k = 1, \ldots, \ell - 1$) for H_0 to hold by computing $\hat{\pi}_{ijk}^{(\ell)}$, $k = \ell + 1, \ldots, \bar{p}_{ij}$.

2) If $\hat{\pi}_{ijk}^{(\ell)} = 0$ for $k = \ell + 1, \ldots, \bar{p}_{ij}$, we test $H_0^{(\ell)}$ at level $\alpha_\ell = \alpha - \bar{\alpha}_{\ell-1}$. H_0 is rejected or accepted, depending on whether $H_0^{(\ell)}$ is accepted or rejected.

3) If $\hat{\pi}_{ijk}^{(\ell)} \neq 0$ for some $\ell + 1 \leq k \leq \bar{p}_{ij}$, we test $H_0^{(\ell)}$ at level $\alpha_\ell = (\alpha - \bar{\alpha}_{\ell-1})/2$. If $H_0^{(\ell)}$ is rejected, H_0 is rejected. If $H_0^{(\ell)}$ is accepted, we proceed to test $H_0^{(\ell+1)}$.

The procedure is repeated until $\ell = \bar{p}_{ij}$.

6. CONCLUSION

In this essay, we have developed an alternative for the non-causality conditions in the multivariate ARMA models by deriving an upper bound for the number of conditions to test. Furthermore, these conditions appear in a well-defined and natural order. Then, we have developed a sequential test procedure that can improve this upper bound. In the next essay, we will apply this sequential procedure to U.S. macroeconomic data on production, money price and interest rate, specifying a multivariate ARMA model under the echelon form.

APPENDIX

Proof of Lemma 1. The necessary part of the equivalence (⇒) is obvious. To show sufficiency (⇐), let us set $b_k = 0$ for $k > p$. For $|z| < \delta$, we can write

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{j} b_k c_{j-k} \right] z^j ,$$

hence

$$a_j = \sum_{k=0}^{j} b_k c_{j-k} , j = 0, 1, \ldots$$

and, since $c_0 = 1$ and $b_k = 0$ for $k > p$,

$$\begin{aligned} a_j &= b_0 , & &\text{if } j = 0 \\ &= b_j + \sum_{k=0}^{j-1} b_k c_{j-k} , & &\text{if } 1 \le j \le p \\ &= \sum_{k=0}^{p} b_k c_{j-k} , & &\text{if } j \ge p+1 . \end{aligned}$$

From the latter identity, we see easily that

$$a_j = 0 , j = 0, 1, \ldots , p \Rightarrow b_j = 0 , j = 0, 1, \ldots , p \Rightarrow a_j = 0 , \forall j \ge 0 . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Proof of Lemma 2. By the definition of a determinant, $|\Theta(z)|$ can be written in the form

$$|\Theta(z)| = \sum_{J \in P(m)} \delta(J) \prod_{i=1}^{m} \theta_{ij_i}(z)$$

where $J = (j_1, j_2, \ldots , j_m)$, $P(m)$ is the set of permutations of the integers $(1, \ldots , m)$ and $\delta(J) \in \{-1, +1\}$. Since $\prod_{i=1}^{m} \theta_{ij_i}(z)$ is a polynomial of degree $\sum_{i=1}^{m} \deg(\theta_{ij_i})$ at most, $|\Theta(z)|$ is a polynomial whose degree does not exceed

$$d_0(\Theta) = \mathrm{Max}\left\{ \sum_{i=1}^{m} \deg(\theta_{ij_i}) : (j_1, \ldots, j_m) \in S(m) \right\} .$$

Further, for $1 \le i \le m$ and $1 \le k \le m$, we have

$$\deg(\theta_{ij_i}) \le \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{ij}) : j = 1, \ldots, m\} = d_{i\cdot}(\Theta) \le \bar{d}(\Theta) ,$$

$$\deg(\theta_{ij_i}) \le \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{\ell j_i}) : \ell = 1, \ldots, m\} = d_{\cdot j_i}(\Theta) \le \bar{d}(\Theta) ,$$

so that

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(\theta_{ij_i}) \le \sum_{i=1}^{m} d_{i\cdot}(\Theta) \le m\bar{d}(\Theta) ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(\theta_{ij_i}) \le \sum_{j=1}^{m} d_{\cdot j}(\Theta) \le m\bar{d}(\Theta) ,$$

where we take into account the fact $(j_1, \ldots, j_m)$ is a permutation of $(1, \ldots, m)$; hence

$$d_0(\Theta) \le \mathrm{Min}\left\{ \sum_{i=1}^{m} d_{i\cdot}(\Theta) , \sum_{j=1}^{m} d_{\cdot j}(\Theta) \right\} = d_1(\Theta) \le m\bar{d}(\Theta) .$$

This completes the proof of (a). To prove (b), we observe that, for $|z| < \delta$,

$$|\Theta(z)|\Theta(z)^{-1} = [\theta^*_{ij}(z)]_{i,j=1,\ldots,m}$$

where $\theta^*_{ij}(z)$ is the cofactor associated with $\theta_{ji}(z)$, i.e.

$$\theta^*_{ij}(z) = (-1)^{i+j} \, |\Theta_{(j,i)}(z)|$$

hence, by applying part (a) of the lemma to the matrix $\Theta_{(j,i)}(z)$,

$$\deg(\theta^*_{ij}) = \deg(|\Theta_{(j,i)}(z)|) \le d_0(\Theta_{(j,i)}) \le d_1(\Theta_{(j,i)}) \le (m - 1)\, \bar{d}(\Theta_{(j,i)}) \le (m - 1)\, \bar{d}(\Theta)$$

where it is easy to see that

$$d_1(\Theta_{(j,i)}) = \mathrm{Min}\left\{d_{1R}^{(j,i)}(\Theta)\ ,\ d_{1C}^{(j,i)}(\Theta)\right\},$$

with

$$d_{1R}^{(j,i)}(\Theta) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{k\ell}) : 1 \le \ell \le m\ ,\ \ell \neq i\}\ ,$$

$$d_{1C}^{(j,i)}(\Theta) = \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{m} \mathrm{Max}\{\deg(\theta_{k\ell}) : 1 \le k \le m\ ,\ k \neq j\}\ ,$$

which completes the proof of (b). Finally, to get (c), we observe that, for $|z| < \delta$,

$$|\Theta(z)|\Theta(z)^{-1}\ \Phi(z) = [\pi^*_{ij}(z)]_{i,j=1,\dots,m}$$

where

$$\pi^*_{ij}(z) = \sum_{k=1}^{m} \theta^*_{ik}(z)\ \phi_{kj}(z)\ ,$$

so that $\pi^*_{ij}(z)$ is a polynomial such that

$$\deg(\pi^*_{ij}) \le \mathrm{Max}_{1\le k\le m}\ \{\deg(\theta^*_{ik}) + \deg(\phi_{kj})\}\ .$$

The other inequalities in (c) follow by applying parts (b) and (c) of the lemma. Q.E.D.

Proof of Proposition 1. By definition,

$$\Psi(z) = \Phi(z)^{-1}\ \Theta(z) = \frac{1}{|\Phi(z)|}\ \Psi^*(z)\ ,\ \text{for } |z| \le 1$$

where $\Psi^*(z) = |\Phi(z)|\Phi(z)^{-1}\ \Theta(z) = [\psi^*_{ij}(z)]_{i,j=1,\dots,m}$. By Lemma 2 (on permuting Φ and Θ), it follows that $\psi^*_{ij}(z)$ is a polynomial in z whose degree satisfies the inequalities (3.7). Thus

$$\psi_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ijk}\, z^k = \psi^*_{ij}(z) \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{\phi}_{ijk}\, z^{\ell}$$

where $\sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{\phi}_{ij\ell}\, z^{\ell}$ is the power series expansion of $|\Phi(z)|^{-1}$; hence, by Lemma 1,

$$\psi_{ijk} = 0\ ,\ \forall k \geq 0 \Leftrightarrow \psi_{ijk} = 0\ ,\ k = 0, 1, \dots, \bar{q}_{ij}\ . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Proof of Proposition 2. Using an argument analogous to the one in the proof of Proposition 1, we have

$$\pi_{ijk} = 0\ ,\ \forall k \geq 0 \Leftrightarrow \pi_{ijk} = 0, 1, \dots, \bar{p}_{ij}$$

where $\bar{p}_{ij}$ satisfies (3.9). Consequently, since $\Pi_0 = \Pi(0) = I_m$, we have $\pi_{ij0} = 0$ for $i \neq j$ and $\pi_{ijk} = 0$, $\forall k \geq 1 \Leftrightarrow \pi_{ijk} = 0$, $k = 1, \dots, \bar{p}_{ij}$. Further, it is straightforward to see that $\pi_{ijk} = 0$, $\forall k \geq 0$, is a sufficient condition for $X_j \not\rightarrow X_i$. Finally, when the process is regular (nonsingular covariance matrix of the innovations), the fact that $\pi_{ijk} = 0$, $\forall k \geq 1$, is a necessary and sufficient condition for $X_j \not\rightarrow X_i$ follows from Proposition 1 of Boudjellaba, Dufour and Roy (1992). Q.E.D.

Proof of Proposition 3. We consider $\Phi = \Phi(z)$ and $\Theta = \Theta(z)$ the polynomial matrices associated with the autoregressive and moving-average operators of the ARMA echelon form model given by (4.1). We will show that $n \geq \bar{p}_{ij}$ where $\bar{p}_{ij}$ is defined by (3.9) from the representation (4.1). Proposition 3 then follows from the result of Proposition 2. Let $\Theta^* = [\theta^*_{\ell k}]$ be the adjoint matrix of Θ. We thus have, using the notations of Lemma 2,

$$\theta^*_{\ell k} = (-1)^{k+\ell}\, |\Theta_{(k,\ell)}|\ .$$

Let us write $\{k(1), \dots, k(m-1)\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}$ and $\{\ell(1), \dots, \ell(m-1)\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{\ell\}$. Then

$$|\Theta_{(k,\ell)}| = \sum_{L \in S} \delta(L) \prod_{j=1}^{m-1} \theta_{k(j)\bar{\ell}(j)}$$

where $L = (\bar{\ell}(1), \dots, \bar{\ell}(m-1))$, S is the set of permutations of the $m-1$ integers $(\ell(1), \dots, \ell(m-1))$ and $\delta(L) \in \{-1, 1\}$. Now, for all L in S,

$$\deg\left[\prod_{j=1}^{m-1} \theta_{k(j)\bar{\ell}(j)}\right] \le \sum_{j=1}^{m-1} \deg[\theta_{k(j)\bar{\ell}(j)}] \le \sum_{j=1}^{m-1} n_{k(j)} = n - n_k ,$$

since, from (4.1), $\deg(\theta_{ij}) \le n_i$ for all i and $n = n_1 + \dots + n_m$. It then follows that

$$\deg(\theta^*_{\ell k}) \le n - n_k$$

hence, using (3.9) and (4.1) ,

$$\bar{p}_{ij} = \underset{1 \le k \le m}{\text{Max}} \{\deg(\theta^*_{ik}) + \deg(\phi_{kj})\} \le \underset{1 \le k \le m}{\text{Max}} \{n - n_k + n_k\} = n . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Proof of Proposition 4. We first note that

$$\pi_{ijk} = 0 \text{ for } k = 1, \dots, K \Leftrightarrow \Pi_{J(i)j} = 0 .$$

Thus, by Proposition 2, it will be sufficient to prove that $\Pi_{J(i)j} = 0$ is equivalent to the condition (4.10). Let $S_{J(i)} = S(Km)_{J(i)\cdot}$ and $S_{\bar{J}(i)} = S(Km)_{\bar{J}(i)\cdot}$, where $S(Km)_{J(i)\cdot}$ and $S(Km)_{\bar{J}(i)\cdot}$ are defined as in (4.7). Then, the $(Km) \times (Km)$ matrix $S = [S'_{J(i)} \vdots (S_{\bar{J}(i)})']'$ is orthogonal, i.e., $S'S = SS' = I_{Km}$, and

$$S'_{J(i)} S_{J(i)} + (S_{\bar{J}(i)})' S_{\bar{J}(i)} = I_{Km} .$$

From (4.5), we have

$$\text{(A.1)} \quad \Gamma_{\cdot j} = \Gamma S_j = \Delta \Pi S_j = \Delta \Pi_{\cdot j}$$

hence

$$\Gamma_{\cdot j} = \Delta[S'_{J(i)} S_{J(i)} + (S_{\bar{J}(i)})' S_{\bar{J}(i)}] \Pi_{\cdot j}$$

$$= \Delta_{\cdot J(i)} \Pi_{J(i)j} + \Delta_{\cdot \bar{J}(i)} \Pi_{\bar{J}(i)j} .$$

Now, if $\Pi_{J(i)j} = 0$, we have

$$\Gamma_{\cdot j} = \Delta_{\cdot \bar{J}(i)} \Pi_{\bar{J}(i)j}$$

so that

$$\Gamma_{J(i)j} = S_{J(i)} \Gamma_{\cdot j} = S_{J(i)} \Delta_{\cdot \bar{J}(i)} \Pi_{\bar{J}(i)j} = \Delta_{J(i)\bar{J}(i)} \Pi_{\bar{J}(i)j} ,$$

$$\Gamma_{\bar{J}(i)j} = S_{\bar{J}(i)} \Gamma_{\cdot j} = \Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)} \Pi_{\bar{J}(i)j} .$$

Since the matrix $\Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)}$ is invertible, it follows that $\Pi_{\bar{J}(i)j} = [\Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)}]^{-1} \Gamma_{\bar{J}(i)j}$ and (4.10) holds. To complete the proof, we have to show that (4.10) implies $\Pi_{J(i)j} = 0$. Suppose that (4.10) holds and define

(A.2) $\tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} = [\Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)}]^{-1} \Gamma_{\bar{J}(i)j}$, $\tilde{\Pi}_{J(i)j} = 0$.

Then, from (4.10) and (A.2), we have

$$\Gamma_{J(i)j} = \Delta_{J(i)\bar{J}(i)} \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} , \; \Gamma_{\bar{J}(i)j} = \Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)} \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} ,$$

hence

$$\text{(A.3)} \quad S\,\Gamma_{\cdot j} = \begin{bmatrix} S_{J(i)} \\ S_{\bar{J}(i)} \end{bmatrix} \Gamma_{\cdot j} = \begin{bmatrix} S_{J(i)} \Gamma_{\cdot j} \\ S_{\bar{J}(i)} \Gamma_{\cdot j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{J(i)j} \\ \Gamma_{\bar{J}(i)j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta_{J(i)\bar{J}(i)} \\ \Delta_{\bar{J}(i)\bar{J}(i)} \end{bmatrix} \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} = \begin{bmatrix} S_{J(i)} \Delta (S_{\bar{J}(i)})' \\ S_{\bar{J}(i)} \Delta (S_{\bar{J}(i)})' \end{bmatrix} \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{J(i)} \\ S_{\bar{J}(i)} \end{bmatrix} \Delta (S_{\bar{J}(i)})' \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} = S \Delta S' \tilde{\Pi}_{\cdot j}$$

where

$$\tilde{\Pi}_{\cdot j} = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_{J(i)j} \\ \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} \end{bmatrix} .$$

Thus, on combining (A.1) and (A.3), we have

$$\Gamma_{\cdot j} = \Delta\,\Pi_{\cdot j} = \Delta\,S'\,\tilde{\Pi}_{\cdot j}$$

hence, since Δ is nonsingular,

$$\Pi_{\cdot j} = S'\,\tilde{\Pi}_{\cdot j}$$

and

$$\begin{bmatrix} \Pi_{J(i)j} \\ \Pi_{\bar{J}(i)j} \end{bmatrix} = S\,\Pi_{\cdot j} = SS'\,\tilde{\Pi}_{\cdot j} = \tilde{\Pi}_{\cdot j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\Pi}_{\bar{J}(i)j} \end{bmatrix}$$

so that $\Pi_{J(i)j} = 0$. Q.E.D.

REFERENCES

Boudjellaba, H., J.-M. Dufour and R. Roy (1992), "Testing Causality Between Two Vectors in Multivariate ARMA Models," *Journal of the American Statistical Association* 87, 1082-1090.

Boudjellaba, H. J.-M. Dufour and R. Roy (1993), "Simplified Conditions for Noncausality Between Vectors in Multivariate ARMA Models," *Journal of Econometrics* (forthcoming).

Deistler, M. (1985), "General Structure and Parametrization of ARMA and State-Space Systems and Its Relation to Statistical Problems," in : E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah and M.M. Rao (eds.), *Handbook of Statistics, Vol. 5*, Amsterdam, North Holland, 257-77.

Eberts, R.W. and B.M. Steece (1984), "A Test for Granger-Causality in a Multivariate ARMA Model," *Empirical Economics* 9, 51-58.

Granger, C.W.J. (1969), "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods," *Econometrica* 37, 424-438.

Kang, H. (1981), "Necessary and Sufficient Conditions for Causality Testing in Multivariate ARMA Models," *Journal of Time Series Analysis* 2, 95-101.

Lütkepohl, H. (1991), "Introduction to Multiple Time Series Analysis," Springer-Verlag, Berlin.

Lütkepohl, H. (1993), "Testing for Causation Between Two Variables in Higher Dimensional VAR Models," in : H. Schneeweiss and K. Zimmermann (eds.), *Studies in Applied Econometrics*, Physica-Verlag, Heidelberg.

Nelson, C.R. and G.W. Schwert (1982), "Tests for Predictive Relationships Between Time Series Variables : A Monte Carlo Investigation," *Journal of the American Statistical Association* 77, 11-18.

Newbold, P. (1982), "Causality Testing in Economics," in : O.D. Anderson (ed.), *Time Series Analysis : Theory and Practice* 1, 701-716.

Newbold, P. and S.M. Hotopp (1986), "Testing Causality Using Efficiently Parametrized Vector ARMA Models," *Applied Mathematics and Computation* 20, 329-348.

Nsiri, S. and R. Roy (1992), "On the Identification of ARMA Echelon Form Models," *Canadian Journal of Statistics* 20, 369-386.

Sims, C.A. (1972), "Money, Income and Causality," *American Economic Review* 62, 540-552.

Tsay, R.S. (1991), "Two Canonical Forms of Vector ARMA Processes," *Statistica Sinica* 1, 247-269.

ESSAI 4

TESTS DE CAUSALITE SOUS LA FORME ECHELON: UNE APPLICATION

1. INTRODUCTION

Cet essai vise à appliquer la nouvelle caractérisation des conditions de non-causalité dans un modèle ARMA multivarié, telle que développée dans l'essai précédent. De plus, le modèle ARMA sera spécifié sous la forme échelon à partir des indices de Kronecker, selon la procédure récemment développée par Nsiri et Roy (1992). L'application portera sur des données macroéconomiques américaines en attachant une attention particulière à la relation de causalité entre les variables monétaires et le revenu, préoccupation empirique pour laquelle la littérature porte souvent des conclusions contradictoires [Feige et Pearce (1979), Stock et Watson (1989)].

Au cours des années 70, les tests de causalité appliqués à la relation monnaie-output étaient principalement effectués à l'aide de modèles bivariés [Sims (1972, 1980a), Feige et Pearce (1979)]. Suite à l'emploi généralisé des autorégressions vectorielles facilitant l'analyse multivariée, plusieurs contributions renouvelèrent l'analyse de la relation causale monnaie-output par l'ajout du taux d'intérêt dans la modélisation [Sims (1980b), Litterman et Weiss (1985), Boudjellaba, Dufour et Roy (1994)]. La principale conclusion de ces articles est à l'effet que le taux d'intérêt est une variable essentielle à la modélisation, pouvant même annuler la relation causale entre la monnaie et le revenu observée dans les modèles bivariés.

Comme on le mentionnait plus haut, les tests de causalité seront effectués selon une caractérisation exploitant la représentation autorégressive du processus. Ainsi, cette caractérisation de la non-causalité consiste à tester séquentiellement la nullité d'un nombre fini de paramètres autorégressifs. Exception faite de la première condition, représentée par le premier paramètre de la représentation autorégressive, toutes les conditions ultérieures sont non-linéaires, ce qui peut créer des problèmes de régularité asymptotique, par la singularité de la matrice de covariance dans la statistique de Wald sous l'hypothèse nulle [voir à ce sujet Boudjellaba, Dufour et Roy (1992), section 5]. A la lumière de cette difficulté, nous ne testerons que la première condition, ce qui représente une condition nécessaire à l' hypothèse de non-causalité. Ainsi, un rejet de cette hypothèse signifiera la conclusion d'une relation causale entre les variables en question.

La prochaine section présentera le cadre général dans lequel s'effectueront les estimations, en attachant une préoccupation particulière à la description des modèles ARMA multivariés sous la forme échelon. La troisième section traitera plus spécifiquement de la procédure empirique visant à déterminer les indices de Kronecker. Quant à la dernière section, elle consistera à décrire précisément les données de même que les transformations nécessaires à la stationnarité. Par la suite seront présentés les estimations de même que les résultats des tests de causalité effectués.

2. MODELES ARMA SOUS LA FORME ECHELON

Soit $\{X_t : t \in Z\}$ un processus stationnaire de second ordre de dimension m pouvant s'exprimer sous la représentation ARMA(p,q):

$$\Phi(L)\, X_t = \Theta(L)\, u_t$$

où

$$\Phi(L) = I_m + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i\, L^i$$

et

$$\Theta(L) = I_m + \sum_{j=1}^{q} \Theta_j L^j .$$

Si les racines des équations det[Φ(z)] et det[Θ(z)] sont toutes à l'extérieur du cercle unité, alors le modèle sera stationnaire et inversible.

Une des premières tentatives de spécification d'un modèle de ce type fut celle de Tiao et Box (1981). Cette méthode de spécification est directement associée à la méthode de Box-Jenkins (1976) pour le cas univarié. Mais, contrairement aux modèles univariés, la détermination des paramètres p et q n'entraîne pas nécessairement un modèle unique et identifié.

Pour remédier à ce problème, deux classes de modèles ont été proposées. D'une part, Tiao et Tsay (1989) ont développé une représentation canonique utilisant des modèles à composantes scalaires. D'autre part, on peut représenter un modèle sous la forme échelon, défini de manière unique et identifié à l'aide des indices de Kronecker [Hannan et Deistler (1988)]. Ces indices de Kronecker sont basés sur la dépendance linéaire entre les composantes des vecteurs de prévisions à différents horizons.

En supposant que le processus { X_t : t $\in$ Z } est stationnaire sans composante strictement déterministe, il possède une représentation de Wold:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i u_{t-i} + u_t$$

où μ est un vecteur de constantes. Si la matrice de covariance Σ est non-singulière, alors les matrices associées à la représentation de Wold seront définies de manière unique.

Denotons $X_{t+i|t}$ la projection orthogonale, composante par composante, de X_{t+i} sur l'espace généré par le passé du processus, soit { X_t, X_{t-1}, ...}. Par les équations de prévisions de Wiener-Kolmogorov, on peut écrire:

$$F_{t+1|t} = \Psi_{-}^{\infty} U_t$$

où

$$F_{t+1|t} = \begin{pmatrix} X_{t+1|t} \\ X_{t+2|t} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \quad , \quad \Psi_{-}^{\infty} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & . & . & . \\ \Psi_2 & \Psi_3 & . & . & . \\ . & . & . & & \\ . & . & & . & \\ . & . & & & . \end{pmatrix} \quad , \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} .$$

L'espace généré par les composantes $F_{t+1|t}$ est dénoté par P_t et la dimension de P_t est appelée la dimension dynamique du processus. Si cette dimension est finie, on peut alors démontrer qu'il existe une représentation ARMA pour le processus X_t [Gouriéroux et Monfort (1990, chapitre 8)]. Si dim P_t = n, un choix naturel de base sera les n premières composantes linéairement indépendantes de $F_{t+1|t}$. Si ces éléments apparaissent aux positions $k_1, \ldots, k_n$, on peut montrer que l'ensemble $I_Z = \{k_1, \ldots, k_n\}$ a la propriété suivante:

$$(\forall k \in N) \ : \ k \notin I_Z \ \Rightarrow \ (k+d) \ \notin \ I_Z \, .$$

De cette propriété, on peut déduire d entiers non-négatifs $n_1, \ldots, n_d$ tels que:

$$I_z = \{1, \ 1+d, \ \ldots \ , \ 1+(n_1-1)d \ ; \ \ldots \ ; \ d, \ d+d, \ \ldots \ , \ d+(n_d-1)d \ \}$$

avec la convention que $n_i = 0$ si et seulement si i n'appartient pas à l'ensemble I_Z. Ces entiers sont appelés indices de Kronecker ou indices dynamiques du processus et ils sont suffisants pour spécifier un modèle ARMA multivarié unique et identifié. Ainsi, on pourra spécifier les polynômes associés au modèle ARMA par:

$$\Phi_{ij}(L) = \Phi_{ij}(0) + \sum_{k=n_i+1-n_{ij}}^{n_i} \Phi_{ijk} L^k$$

et

$$\Theta_{ij}(L) = \Phi_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{n_i} \Theta_{ijk} L^k$$

où

$$n_{ij} = \begin{cases} \min(n_i+1 \ , \ n_j) \ , \ pour \quad i > j \\ \min(n_i \ , \ n_j) \quad , \ ailleurs \ . \end{cases}$$

On notera que $\Phi(0) = \Theta(0)$. De plus, ces matrices sont triangulaires vers le bas. Les indices de Kronecker sont donc suffisants à la détermination complète d'un modèle ARMA unique. Le problème demeure toutefois la détermination empirique de ces indices, ce à quoi sera consacrée la prochaine section.

3. SPECIFICATION DU MODELE

La première phase de la spécification consiste à la détermination empirique des indices de Kronecker. La procédure utilisée dans le cadre de cet essai sera celle développée par Nsiri et Roy (1992). Cette procédure est basée sur la dépendance linéaire entre les lignes de la matrice de corrélations du processus. Une fois déterminés les indices de Kronecker et par le fait même les ordres des polnômes autorégressifs et moyenne mobile, on peut écrire chaque ligne du modèle ARMA ainsi:

$$\sum_{k=0}^{n_i} \Phi_{i.}(k)\ X_{t-k} = \quad + \sum_{k=0}^{n_i} \Theta_{i.}(k)\ u_{t-k}$$

où $\Phi_{i.}(k)$ et $\Theta_{i.}(k)$ sont les i^e lignes associées aux matrices $\Phi(k)$ et $\Theta(k)$.

Par la suite, étant données les indices de Kronecker, Nsiri et Roy (1993) ont développé une procédure supplémentaire permettant de réduire, pour chaque variable, l'ordre autorégressif et moyenne mobile. Ainsi, on pourra écrire chaque ligne du modèle sous la forme raffinée:

$$\sum_{k=0}^{p_i} \Phi_{i.}(k)\ X_{t-k} = \quad + \sum_{k=0}^{q_i} \Theta_{i.}(k)\ u_{t-k}$$

où p_i et q_i sont tels que $\Phi_{i.}(p_i) \neq 0$ et $\Theta_{i.}(q_i) \neq 0$.

3.1 DETERMINATION DES INDICES DE KRONECKER

Akaike (1974) a démontré que les indices de Kronecker peuvent être déterminés par les n premières lignes linéairement indépendantes de la matrice de Hankel associée aux matrices de covariances et Nsiri et Roy (1992) ont démontré l'équivalent pour les matrices de corrélations $\{ \rho(k), k > 0\}$. De plus, cette matrice de Hankel, même si elle est de dimension infinie, est de rang n. L'avantage de cette formulation est que la matrice d'autocorrélations s'estime facilement avec des propriétés asymptotiques bien définies. C'est donc par cette matrice de Hankel de dimension finie:

$$\rho_s^s = \begin{pmatrix} \rho(1) & \dots & \rho(s) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \rho(s) & \dots & \rho(2s-1) \end{pmatrix} , \qquad \forall\, s \geq n$$

que seront basés les tests déterminant les indices de Kronecker.

Dénotons par $U^{(i)}$ la i^e ligne de la matrice de Hankel des corrélations. Le but sera de définir une statistique pour tester la dépendance linéaire entre les ligne de cette matrice. Soient U, $U^{(1)}$, ... , $U^{(q)}$ un ensemble de lignes de la matrice de Hankel. Le test consistera à vérifier l'hypothèse:

$$H_0 \quad : \quad U \in E$$

où E est l'espace linéaire généré par les vecteurs $U^{(1)}$, ... ,$U^{(q)}$.

Soient:

$$M = [\ U^{(1)}, \ \dots\ ,\ U^{(q)}\ ]$$

et

$$P = M\ (\ M'\ M\ )^{-1}\ M'$$

la matrice de projection orthogonale sur E. L'hypothèse H_0 : $U \in E$ peut alors s'écrire:

$$H_0 \quad : \quad V = 0$$

où V = (I-P) U. De plus, soit V_N = (I-P) U_N où U_N est le vecteur des corrélations empiriques associé au vecteur U. Une statistique pour ce test, de même que sa distribution asymptotique, sont définis par le théorème 1 de Nsiri et Roy (1992):

$$S_N = N\,(V_N - V\,)'\,\Lambda^{-1}\,(V_N - V\,) \quad \rightarrow \quad \chi^2\,(m-q)$$

où

$$\Lambda = (I-P\,)\,\Sigma\,(I-P\,) + M\,M'$$

et Σ est la matrice de variance asymptotique du vecteur de corrélations empiriques:

$$N^{1/2}\,(U_N - U\,) \quad \rightarrow \quad N\,(\,0,\,\Sigma\,)\quad .$$

En pratique, cette dernière matrice ainsi que M doivent être estimées. Toutefois, Nsiri et Roy (1994) ont démontré que l'on peut remplacer dans la statistique S_N ces matrices par leur équivalent empirique sans affecter la distribution asymptotique (théorèmes 3.1 et 3.2).

La procédure consiste à tester séquentiellement l'indépendance linéaire de chaque ligne, de la première jusqu'à la détermination complète des indices de Kronecker. Pour chaque ligne k, si H_0 est rejetée, alors le vecteur correspondant à la ligne k sera ajouté dans la base servant à générer l'espace linéaire; on passe par la suite à la ligne k+1. Si au contraire on accepte H_0, c'est-à-dire que la ligne k est dépendante des précédentes, on conclut alors que le l'indice de Kronecker $n_i = j$, où i et j sont les entiers définis de manière unique par la relation k = i + jm. Par la suite, il ne sera pas nécessaire de tester les lignes k + jm pour j > 1 car elles seront nécessairement dépendantes des précédentes, selon la définition des indices de Kronecker donnée précédemment.

Tous les tests visant à déterminer les indices de Kronecker de même que les tests nécessaires au raffinement du modèle ont été effectués à l'aide de programmes développés par Nsiri avec le logiciel S [Becker, Chambers et Wilks (1988)].

4. ESTIMATIONS

Les données avec lesquelles s'effectueront les tests de causalité proviennent de la banque de données historiques (trimestrielles) de Balke-Gordon qui va de 1875 à 1983 inclusivement. Pour éviter les changements structurels, l'échantillon conservé va de 1954.1 à 1983.4, ce qui procure 120 observations. Les variables retenues sont:

- produit national brut réel (Y)
- taux d'intérêt commercial (R)
- base monétaire (B)
- multiplicateur monétaire (M1/B)
- déflateur (P)

dont on prend le logarithme naturel de chacune (par la suite, on notera le multiplicateur monétaire par la variable M). De plus, comme l'estimation d'un modèle ARMA impose la stationnarité des données, celles-ci seront différenciées de sorte à les rendre stationnaires. Les vecteur de variables avec lesquelles sera estimé le modèle sera X_t = [$(1\text{-}L)\ Y_t$, $(1\text{-}L)^2\ P_t$, $(1\text{-}L)\ M_t$, $(1\text{-}L)\ R_t$, $(1\text{-}L)^2\ B_t$].

La première phase de la spécification du modèle consiste à déterminer les indices de Kronecker de même que les ordres autorégressifs et moyenne mobile, en appliquant la procédure de Nsiri et Roy. Pour chaque ligne de la matrice de Hankel, dont la dimension est fixée à 15 pour les estimations, les valeurs de la P-value pour la statistique S_N apparaissent au tableau 1. En ce qui concerne les statistiques associées à la procédure de raffinement, on peut référer à Nsiri et Roy (1993). Les résultats nécessaires à la spécification du modèle sous la forme échelon sont les suivants:

i	n_i	p_i	q_i
1	1	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1
4	2	0	1
5	2	1	0

Par l'application de la théorie exposée dans la section 2, l'ensemble de ces valeurs est suffisant à la détermination d'un modèle ARMA(1,1) sous la forme échelon:

$$X_t + \Phi\, X_{t-1} = \mu + u_t + \Theta\, u_{t-1}$$

où chaque matrice Φ et Θ contient des paramètres égaux à 0 par les contraintes de spécification. L'estimation de ce modèle a été effectuée par maximum de vraisemblance conditionnelle à l'aide d'un algorithme défini dans Lütkepohl [1991, chapitre 8]. Les résultats de l'estimation sont:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.177 & -0.012 & 0.506 & 0.082 & 0.402 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.150 & -0.172 & 0.876 & 0.215 & 0.417 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.121 & -0.441 \end{bmatrix}$$

et

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.069 & -0.708 & -0.146 & 0.083 & 0.170 \\ 0.247 & -0.024 & -0.274 & -0.509 & -0.345 \\ 0.156 & 0.372 & -0.382 & 0.612 & 0.032 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

et dont les matrices des écarts-type sont:

$$\sigma_{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.085 & 0.196 & 0.122 & 0.065 & 0.157 \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ 0.343 & 0.188 & 0.301 & 0.165 & 0.336 \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & 0.029 & 0.077 \end{bmatrix}$$

et

$$\sigma_{\Theta} = \begin{bmatrix} --- & --- & --- & --- & --- \\ 0.026 & 0.065 & 0.057 & 0.026 & 0.075 \\ 0.345 & 0.195 & 0.308 & 0.162 & 0.357 \\ 0.064 & 0.233 & 0.155 & 0.065 & 0.227 \\ --- & --- & --- & --- & --- \end{bmatrix}$$

En ce qui a trait aux constantes, elles sont toutes non-significatives (on inclut dans les parenthèses les écarts-type):

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.000 \\ 0.007 \\ 0.003 \\ 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.002) \\ (0.003) \\ (0.006) \\ (0.004) \\ (0.001) \end{bmatrix}$$

Les tests de causalité effectués sont basés sur les conditions de non-causalité développées dans l'essai précédent, utilisant la représentation autorégressive du processus. Sous la forme autorégressive, le modèle devient:

$$X_t + \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k X_{t-k} = u_t$$

Dans le cas d'un ARMA(1, 1), les paramètres autorégressifs sont équivalents à:

$$\Pi_1 = \Phi - \Theta \quad , \quad \Pi_k = \Theta\, \Pi_{k-1} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Les tests de causalité consistent à tester la nullité d'un nombre fini de paramètres autorégressifs. Ainsi, par la proposition 2 de l'essai précédent, une condition suffisante pour que X_j ne cause pas X_i est:

$$\pi_{ijk} = 0 \quad , \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots, \bar{p}_{ij}$$

où:

$$\bar{p}_{ij} = Max_{1 \le k \le m} \; \{ \; deg(\Theta_{ik}^{*}) + deg(\Phi_{kj}) \; \}$$

et $\Theta^{*}(z)$ est la matrice des cofacteurs de $\Theta(z)$, soit $\Theta(z)^{*} = |\Theta(z)| \; \Theta(z)^{-1}$. Pour le cas du modèle estimé précédemment, ces valeurs sont égales à:

$$deg(\Theta^{*}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad deg(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \bar{p}_{ij} = \begin{pmatrix} - & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & - & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & - & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & - & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Compte tenues des bornes définies ci-dessus, il est suffisant de considèrer seulement les quatre premières matrices de la représentation autorégressive, pour lesquelles on remplace les paramètres par les estimations correspondant aux matrices Φ et Θ:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0.177 & -0.012 & 0.506 & 0.082 & 0.402 \\ -0.069 & 0.708 & 0.146 & -0.083 & -0.170 \\ -0.397 & -0.148 & 1.150 & 0.724 & 0.762 \\ -0.156 & -0.372 & 0.382 & -0.612 & -0.032 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.121 & -0.441 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.106 & -0.511 & -0.205 & -0.113 & -0.041 \\ 0.234 & 0.210 & -0.388 & 0.177 & 0.063 \\ 0.058 & 0.090 & -0.072 & -0.673 & -0.325 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.104 & 0.339 & 0.196 & -0.002 & -0.007 \\ -0.096 & -0.091 & 0.148 & 0.297 & 0.149 \\ -0.014 & -0.215 & 0.028 & -0.521 & -0.238 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_4 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.087 & -0.244 & -0.158 & -0.085 & -0.036 \\ 0.036 & 0.126 & -0.059 & 0.184 & 0.081 \\ -0.011 & 0.029 & 0.033 & -0.433 & -0.206 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

Comme on l'a mentionné précédemment, pour éviter les problèmes de régularité asymptotique, on ne considère que les test s'appliquant à la première matrice autorégressive, ce qui correspond à tester l'hypothèse:

$$H_0 \ : \quad \phi_{ij} = \theta_{ij} \ , \qquad \forall \ i \neq j \quad ,$$

condition nécessaire à $X_j \nrightarrow X_i$. Cette condition deviendra suffisante si $\pi_{ijk} = 0$, k = 2, 3, 4. Lorsque tous les éléments π_{ijk} sont nuls, on conclut que la condition de non-causalité tient de manière exacte.

La statistique utilisée pour tester cette condition linéaire sera celle du quotient de vraisemblance:

$$\lambda_{LR} = 2[L(\hat{\theta}) - L(\theta^0)]$$

où L est la fonction du log de la vraisemblance, prise à la valeur non-contrainte et contrainte de l'estimateur. Cette statistique suit une distribution $\chi^2(1)$ où le nombre de degrés de liberté correspond au nombre d'hypothèses à tester. Les résultats apparaissent au tableau 2 (le point critique pour tous les tests est de 3.84).

Une des premières constatations est que l'indice des prix et le multiplicateur monétaire paraissent endogènes, dans le sens où ils sont causés par la majorité des variables. Ce résultat n'est pas surprenant quant à l'indice des prix, car c'est une variable fortement sensible aux variables monétaires et à la conjoncture. Quant à la base, les résultats n'infirment pas qu'elle soit exogène, ce qui semble cohérent avec le fait que cette variable est une variable de décision des autorités monétaires. De plus, les variables monétaires (base et multiplicateur) ont une relation causale avec le revenu, confirmant ainsi les conclusions d'études antérieures concernant l'importance des variables monétaires sur l'évolution du revenu national. [Sims (1972, 1980a) et Boudjellaba, Dufour et Roy (1992)].

Par contre, à la différence de Sims (1980b), Litterman et Weiss (1985) et Boudjellaba, Dufour et Roy (1994), le taux d'intérêt perd de son influence sur la revenu. Toutefois, le taux d'intérêt a une forte relation causale à la fois sur le multiplicateur et sur la base. Ainsi, une chaîne de relations causales entre le taux d'intérêt et la revenu pourrait passer par l'intermédiaire des variables monétaires. Mais l'étude de la causalité telle que définie dans cet essai ne permet pas de pouvoir conclure sur l'existence de tels liens intermédiaires.

4. CONCLUSION

Les conditions de non-causalité dans les modèles ARMA multivariés apparaissent souvent difficiles à tester. Or, cet essai démontre que la procédure développée dans l'essai précédent, qui consiste à caractériser la non-causalité par un nombre fini de conditions associées à la représentation autorégressive, semble très avantageuse du point de vue opérationnel. En effet, en plus d'avoir à tester les conditions de non-causalité dans un ordre naturel, dont la première est linéaire, le nombre de tests à effectuer peut être sensiblement réduit par la structure particulière de la représentation autorégressive. De plus, malgré le fait que l'on ne teste que la première condition, qui est une condition nécessaire, le nombre de résultats concluants demeure suffisant pour une interprétation intéressante, cohérente avec les résultats antérieurs et soutenant l'importance des variables monétaires dans l'évolution du revenu national.

TABLEAU 1

SPECIFICATION DES INDICES DE KRONECKER

Ligne	S_N	P-Value
1	45.6	0
2	95.1	0
3	65.9	0
4	28.3	0.01
5	68.9	0
6	6.7	0.75
7	9.2	0.51
8	11.7	0.30
9	21.9	0.02
10	21.1	0.01
14	3.7	0.89
15	13.1	0.11

TABLEAU 2

RESULTATS DES TESTS DE CAUSALITE

H_0	Condition	λ_{LR}
$Y \nrightarrow P$	nécessaire	5.58^*
$Y \nrightarrow M$	nécessaire	4.74^*
$Y \nrightarrow R$	nécessaire	5.51^*
$Y \nrightarrow B$	exact	---
$P \nrightarrow Y$	néc. et suf.	0.00
$P \nrightarrow M$	nécessaire	2.86
$P \nrightarrow R$	nécessaire	1.94
$P \nrightarrow B$	exact	---
$M \nrightarrow Y$	néc. et suf.	13.46^*
$M \nrightarrow P$	nécessaire	4.16^*
$M \nrightarrow R$	nécessaire	2.62
$M \nrightarrow B$	exact	---
$R \nrightarrow Y$	néc. et suf.	1.48
$R \nrightarrow P$	nécessaire	6.92^*
$R \nrightarrow M$	nécessaire	16.16^*
$R \nrightarrow B$	néc. et suf.	15.32^*
$B \nrightarrow Y$	néc. et suf.	6.19*
$B \nrightarrow P$	nécessaire	4.06^*
$B \nrightarrow M$	nécessaire	4.30^*
$B \nrightarrow R$	nécessaire	0.04

(Les statistiques affectées d'une étoile signifient le rejet de l'hypothese nulle.)

BIBLIOGRAPHIE.

Akaike, H., 1974, Markovian Representation of Stochastic Processes and its Application to the Analysis of ARMA Processes, Annals of Statistical Mathematics 26, 363-387.

Becker, R.A., J.M. Chambers et A.R. Wilks, 1988, The New S Language, Wadsworth Edition, Pacific Grove.

Boudjellaba, H., J.M. Dufour et R. Roy, 1992, Testing Causality between Two Vectors in Multivariate ARMA Models, Journal of the American Statistical Association 87, 1081-1090.

Boudjellaba, H., J.M. Dufour et R. Roy, 1994, Simplified Conditions for Non-Causality between Vectors in Multivariate ARMA Models, Journal of Econometrics 62, 271-287.

Box, G.E.P. et G.M. Jenkins, 1976, Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco.

Feige, E.L. et D.K. Pearce, 1979, The Casual Causal Relationship between Money and Income: Some Caveats for Time Series Analysis, Review of Economics and Statistics 61, 521-533.

Gouriéroux, C. et A. Monfort, 1990, Séries Temporelles et Modèles Dynamiques, Economica, Paris.

Litterman, R.B. et L. Weiss, 1985, Money, Real Interest Rates, and Output: A Reinterpretation of Postwar U.S. Data, Econometrica 53, 129-156.

Lutkepohl, H., 1991, Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, Berlin.

Nsiri, S. et R. Roy, 1992, On the Identification of ARMA Echelon Form Models, Canadian Journal of Statistics 20, 369-386.

Nsiri, S. et R. Roy, 1993, Identification of Refined ARMA Echelon Form Models for Multivariate Time Series, cahier de recherche du C.R.D.E. (1493).

Sims, C.A., 1972, Money, Income and Causality, American Economic Review 62, 540-552.

Sims, C.A., 1980a, Macroeconomic and Reality, Econometrica 48, 1-48.

Sims, C.A., 1980b, Comparison of Interwar and Postwar Business Cycles: Monetarism Reconsidered, American Economic Review 70, 250-257.

Stock, J.H. et M.W. Watson, 1989, Interpreting the Evidence on Money-Income Causality, Journal of Econometrics 40, 161-181.

Tiao, G.C. et G.E.P. Box, 1981, Modeling Multiple Time Series with Applications, Journal of the American Statistical Association 76, 802-816.

Tiao, G.C. et R.S. Tsay, 1989, Model Specification in Multivariate Time Series, Journal of Royal Statistical Society 51, 157-213.

CONCLUSION GENERALE

Cette thèse propose l'étude de divers sujets reliés à la caractérisation des conditions de non-causalité dans les modèles VAR et ARMA multivariés. Le premier essai démontre une caractérisation de la non-causalité sous la représentation moyenne mobile. Ce travail ne vise pas à proposer une nouvelle méthode pour tester la causalité, car peu applicable étant donnée la forme complexe de la condition de non-causalité. Toutefois, cette condition de non-causalité s'est révélée fort utile pour étudier la non-symétrie entre les diverses représentations de séries temporelles quant à l'impact dynamique des variables entre elles, selon des conditions définies a priori (causalité à la Granger, coefficients d'impulsion, décomposition de variances). On a ainsi démontré que l'on ne peut associer une décomposition de variances ou des coefficients d'impulsion significatifs à une relation de causalité à la Granger.

Le deuxième essai présente une étude comparative entre des tests de causalité fondés sur une approximation VAR et ceux fondés sur un modèle VARMA. Que ce soit par une investigation théorique ou statistique, l'approximation de processus stationnaires par une représentation autorégressive d'ordre fini crée des distorsions dans la structure de la causalité et réduit la puissance des tests. Une telle conclusion encourage donc l'utilisation d'une classe de modèles plus large afin de minimiser le risque d'une mauvaise spécification pouvant affecter la performance des tests. De plus, à la différence de la conclusion de Lütkepohl et Poskitt à l'effet que des tests de type Wald dans les modèles VAR présentent un niveau empirique inadéquat, les résultats de cet essai démontrent que la statistique du quotient de vraisemblance procure des tests ayant un niveau empirique cohérent avec le niveau nominal.

Ce dernier essai encourage donc le recours à une modélisation VARMA pour effectuer les tests de causalité. Toutefois, les conditions de non-causalité dans les modèles ARMA multivariés apparaissent souvent difficiles à tester. Le troisième essai développe une caractérisation de la non-causalité qui s'exprime par un nombre fini de conditions associées à la représentation autorégressive. Cette caractérisation semble très avantageuse du point de vue opérationnel. En effet, en plus d'avoir à tester un nombre fini de conditions, ces dernières apparaissent dans un ordre naturel, dont la première est linéaire. De plus, une telle caractérisation facilite le développement d'une procédure séquentielle qui peut réduire davantage le nombre de tests à effectuer.

Le quatrième essai a consisté à appliquer cette dernière caractérisation à un ensemble de données américaines dans le but d'étudier la relation causale entre la monnaie et le revenu. Malgré le fait que l'on ne teste que la première condition, qui est une condition nécessaire, le nombre de résultats concluants demeure suffisant pour une interprétation intéressante. Ainsi, les résultats sont cohérents avec plusieurs travaux empiriques antérieurs à l'effet que les variables monétaires sont déterminantes dans l'évolution du revenu national.

APPENDICE A

PROGRAMMES

(en langage Gauss 3.0)

CALCUL DES PROJECTIONS

```
output file=res1 on;
format /rd 5,4;
d=8;
a1=1;
b1=0.7;
psi=a1*eye(2);
psi[2,1]=b1;
sig=eye(2);
gam0 = sig+psi*sig*psi';
gam1 = psi*sig;
a = zeros(2*d,2*d);
b = a;
f = zeros(2,2*d);
g = f;
v = f;
w = f ;
a[1:2,1:2] = gam1*inv(gam0);
b[1:2,1:2] = gam1'*inv(gam0);
f[1:2,1:2] =-a[1:2,1:2]*gam1;
g[1:2,1:2] =-b[1:2,1:2]*gam1';
v[1:2,1:2] = gam0 - a[1:2,1:2]*gam1';
w[1:2,1:2] = gam0 - b[1:2,1:2]*gam1;
n=2;
do while n <= d;
   a[(2*n-1):(2*n),(2*n-1):(2*n)] = f[1:2,(2*(n-1)-1):(2*(n-1))] *
                              inv(w[1:2,(2*(n-1)-1):(2*(n-1))]);
   b[(2*n-1):(2*n),(2*n-1):(2*n)] = g[1:2,(2*(n-1)-1):(2*(n-1))] *
                              inv(v[1:2,(2*(n-1)-1):(2*(n-1))]);
   k=1;
   do while k < n;
     a[(2*n-1):(2*n),(2*k-1):(2*k)] = a[(2*(n-1)-1):(2*(n-1)),(2*k-1):(2*k)] -
                             a[(2*n-1):(2*n),(2*n-1):(2*n)] *
                             b[(2*(n-1)-1):(2*(n-1)),(2*(n-k)-1):(2*(n-k))];
```

```
    b[(2*n-1):(2*n),(2*k-1):(2*k)] = b[(2*(n-1)-1):(2*(n-1)),(2*k-1):(2*k)] -
                               b[(2*n-1):(2*n),(2*n-1):(2*n)] *
                               a[(2*(n-1)-1):(2*(n-1)),(2*(n-k)-1):(2*(n-k))];
    k=k+1;
  endo;
  v[1:2,(2*n-1):(2*n)] = gam0 - a[(2*n-1):(2*n),1:2]*gam1';
  w[1:2,(2*n-1):(2*n)] = gam0 - b[(2*n-1):(2*n),1:2]*gam1;
  f[1:2,(2*n-1):(2*n)] =-a[(2*n-1):(2*n),(2*n-1):(2*n)]*gam1;
  g[1:2,(2*n-1):(2*n)] =-b[(2*n-1):(2*n),(2*n-1):(2*n)]*gam1';
  n=n+1;
endo;
print "theta=";
print psi;
print;
p=1;
do while p <= d;
    r=zeros(1,p);
    i=1;
    do while i <= p;
        r[1,i]=a[2*p-1,2*i];
        i=i+1;
    endo;
    print r;
    print;
    p=p*2;
endo;
end;
```

SIMULATIONS POUR LES VAR

```
output file = resvarb-1 reset;
format /rd 8,4;
disable;
sim=1000;
niv=(0.95*sim)+1;
let ki2=3.84 5.99 0 9.49 0 0 0 15.51;
mmm=0;
do while mmm <= 2;
      aa1=0.2 + mmm*0.3;
crit=zeros(8,1);
a1=zeros(2,2);
m1=aa1*eye(2);
print "Theta=";
print m1;
print;
nul=1;
goto nulle;
/**********************
DETERMINATION DES THETA
**********************/
alter:
nul=0;
mm=1;
do while mm <= 2;
     bb1=0.2*mm;
     m1[1,2]=-bb1;
     print "Theta=";
     print m1;
     print;
/*******************
GENERATION DES SERIES
*******************/
nulle:
p=1;
do while p <= 8;
vraisem=zeros(sim,1);
vraicont=zeros(sim,1);
pas=4;
hh=1;
```

```
do while hh <= sim;
n=150;
d=2;
q=1;
t=100;
sig1=1;
sig2=1;
y=zeros(d,n);
cc1= 2.7 + hh*pas;
rndseed cc1;
u1=sig1*rndn(1,n-q);
cc2= 1.4 + hh*pas;
rndseed cc2;
u2=sig2*rndn(1,n-q);
u1=zeros(1,q)~u1;
u2=zeros(1,q)~u2;
u=u1 | u2;
i=2;
do while i <= n;
      y[.,i]=a1*y[.,i-1] + m1*u[.,i-1] + u[.,i];
      i=i+1;
endo;
a=y[1,(n-t+1):n];
b=y[2,(n-t+1):n];
y=(a')~(b');
/************************************
DETERMINATION DES PARAMETRES INITIAUX
************************************/
g=rows(y);
y=y';
k=2;
gm=p*(k^2);
pp1=ones(gm,1);
bin=1;
contr:
if bin == 0;
      gm=gm-p;
      i=1;
      do while i <= p;
            pp1[3+4*(i-1),1]=0;
            i=i+1;
      endo;
endif;
```

```
ga2=zeros(1,gm);
ga=pp1;
lga=rows(ga);
tt=seqa(1,1,lga);
gai=ga.*tt;
c=1;
i=1;
do while i <= lga;
        if gai[i,1] < 1;
              goto bye;
        else;
              ga2[1,c]=gai[i,1];
        endif;
        c=c+1;
        bye:
        i=i+1;
endo;
r=diagrv(eye(lga),ga);
r=submat(r,0,ga2);
rc=r;
x=zeros(k*p,g-p);
yt=y[1:k,p+1:g];
/****************
ESTIMATION DU VAR
****************/
i=1;
do while i <= g-p;
        b=y[1:k,i:i+p-1];
        x[1:k*p,i]=vec(b);
        i=i+1;
endo;
bu=eye(k);
gammao=inv(rc'*((x*x').*.bu)*rc)*rc'*(x.*.bu)*vec(yt);
betao=rc*gammao;
parao=reshape(betao,k*p,k);
parao=parao';
      /*************************
      CALCUL DE LA VRAISEMBLANCE
      *************************/
      t=1;
      do while t <= g-p;
            z=y[1:k,t:t+p-1];
            past=parao[1:k,1:k*p]*vec(z);
```

```
            u[1:k,t]=y[1:k,t+p] - past;
            t=t+1;
    endo;
    sigma=(u*u')/(g-p);
    dt=det(sigma);
    vr=0;
    t=1;
    do while t <= g-p;
            b=u[1:k,t];
            vr=vr + b'*inv(sigma)*b;
            t=t+1;
    endo;
    vrai=-((g-p)/2)*ln(dt)-0.5*vr;
/****************************************
CHANGEMENT DU NON-CONTRAINT AU CONTRAINT
****************************************/
if bin == 1;
   vraisem[hh,1]=vrai;
   bin=0;
   goto contr;
endif;
vraicont[hh,1]=vrai;
hh=hh+1;
endo;
/*************************************
CALCUL DE LA STATISTIQUE ET DU NIVEAU
*************************************/
lr=2*(vraisem-vraicont);
if nul == 1;
   test=lr.>ki2[p,1];
   a=(sumc(test)/sim)*100;
   rang=rankindx(lr,1);
   comprg=niv*ones(sim,1);
   binrg=rang.==comprg;
   cri=lr.*binrg;
   crit[p,1]=sumc(cri);
   print "Ordre du var:";
   print p;
   print;
   print "Pourcentage de rejet:";
   print a;
   print;
```

```
    print "Point critique a 95%:";
    print crit[p,1];
    print;
/********************
CALCUL DE LA PUISSANCE
********************/
else;
    test=lr.>crit[p,1];
    a=(sumc(test)/sim)*100;
    print "Ordre du var:";
    print p;
    print;
    print "Pourcentage de rejet:";
    print a;
    print;
endif;
p=p*2;
endo;
if nul == 1;
     goto alter;
endif;
mm=mm+1;
endo;
mmm=mmm+1;
endo;
end;
```

SIMULATIONS POUR LE VARMA

```
output file = resmab-1 reset;
format /rd 8,4;
disable;
sim=1000;
mmm=0;
do while mmm <= 2;
    aa1= 0.2 + mmm*0.3;
a1=zeros(2,2);
m1=aa1*eye(2);
print "Theta=";
print m1;
print;
nul=1;
goto nulle;
/********************
DETERMINATION DE THETA
********************/
alter:
nul=0;
mm=1;
do while mm <= 3;
    bb1=0.2*mm;
    m1[1,2]=-bb1;
    print "Theta=";
    print m1;
    print;
/*******************
GENERATION DES SERIES
*******************/
nulle:
vraisem=zeros(sim,1);
vraicont=zeros(sim,1);
pas=4;
hh=1;
do while hh <= sim;
n=150;
d=2;
q=1;
t=100;
```

```
sig1=1;
sig2=1;
y=zeros(d,n);
cc1= 2.7 + hh*pas;
rndseed cc1;
u1=sig1*rndn(1,n-q);
cc2= 1.4 + hh*pas;
rndseed cc2;
u2=sig2*rndn(1,n-q);
u1=zeros(1,q)~u1;
u2=zeros(1,q)~u2;
u=u1 | u2;
i=2;
do while i <= n;
     y[.,i]=a1*y[.,i-1] + m1*u[.,i-1] + u[.,i];
     i=i+1;
endo;
a=y[1,(n-t+1):n];
b=y[2,(n-t+1):n];
y=(a')~(b');
/************************************
DETERMINATION DES PARAMETRES INITIAUX
************************************/
g=rows(y);
y=y';
k=2;
p=1;
q=1;
po=2;
gm=4;
nb=30;
pp1=zeros(gm,1);
mm1=ones(gm,1);
bin=1;
contr:
if bin == 0;
     gm=gm-1;
     mm1[3,1]=0;
endif;
m=maxc(p|q);
ga2=zeros(1,gm);
ga=pp1|mm1;
lga=rows(ga);
```

```
tt=seqa(1,1,lga);
gai=ga.*tt;
c=1;
i=1;
do while i <= lga;
        if gai[i,1] < 1;
              goto bye;
        else;
              ga2[1,c]=gai[i,1];
        endif;
        c=c+1;
        bye:
        i=i+1;
endo;
r=diagrv(eye(lga),ga);
r=submat(r,0,ga2);
r=r|zeros(k^2,gm);
rr=zeros(k,k*(p+q))~eye(k);
rr=vec(rr);
rc=r;
zz=zeros(k*po,g-po);
x=zeros(k*(p+q),g-po-m);
zt=zeros(k,p);
vt=zeros(k,q);
u=zeros(k,g-p+q);
du=zeros(k,gm*(g-p+q));
dvt=zeros(k*q,gm);
ialpha=zeros(k^2,k^2*(p+q))~eye(k^2);
ibeta=eye(k^2*(p+q))~zeros(k^2*(p+q),k^2);
gammao=zeros(gm,nb+1);
vvrai=zeros(nb+1,1);
/****************************
CALCUL DE L'ESTIMATEUR INITIAL
****************************/
i=1;
do while i <= g-po;
       zi=y[1:k,i:i+po-1];
       zz[1:(k*po),i]=vec(zi);
       i=i+1;
endo;
yt=y[1:k,po+1:g];
bch=yt*zz'*inv(zz*zz');
uch=yt-bch*zz;
```

```
i=1;
do while i <= g-po-m;
        b=yt[1:k,i+m-p:i+m-1];
        c=uch[1:k,i+m-q:i+m-1];
        x[1:k*(p+q),i]=vec(b)|vec(c);
        i=i+1;
endo;
b=uch[1:k,m+1:g-po];
bu=(b*b')/(g-p);
bu=inv(bu);
c=yt[1:k,m+1:g-po];
a=b-c;
x=xla;
gammao[.,1]=inv(rc'*((x*x').*.bu)*rc)*rc'*(x.*.bu)*vec(c);
betao=rc*gammao[.,1];
parao=reshape(betao,k*(p+q+1),k);
parao=parao';
parao=(zeros(k,k*(p+q))~eye(k))+parao;
/***********************
MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE
***********************/
j=1;
do while j <= nb;
      y[1:k,1:p]=zeros(k,p);
      s=0.8;
      /***************************
      CALCUL DE LA DERIVE PREMIERE
      ***************************/
      t=1;
      do while t <= g-p;
            z=y[1:k,t:t+p-1];
            v=u[1:k,t:t+q-1];
            past=parao[1:k,1:k*(p+q)]*(vec(z)|vec(v));
            i=1;
            do while i <= p;
                  zt[1:k,i]=z[1:k,p+1-i];
                  i=i+1;
            endo;
            i=1;
            do while i <= q;
                  vt[1:k,i]=v[1:k,q+1-i];
                  i=i+1;
            endo;
```

```
        l=(vec(zt))'~(vec(vt))';
        i=1;
        do while i <= q;
                dvt[k*i-(k-1):k*i,1:gm]=
                        du[1:k,gm*(t+i-1)-(gm-1):gm*(t+i-1)];
                i=i+1;
        endo;
        dp=parao[1:k,(k*p)+1:k*(p+q)]*dvt;
        ao=parao[1:k,k*(p+q)+1:k*(p+q+1)];
        du[1:k,gm*(t+q)-(gm-1):gm*(t+q)]=
                        ((inv(ao)*past)'.*.inv(ao))*ialpha*r
                        -(l.*.inv(ao))*ibeta*r
                        -inv(ao)*dp;
        u[1:k,t+q]=y[1:k,t+p]-inv(ao)*past;
        t=t+1;
endo;
/****************************************
CALCUL DE LA VRAISEMBLANCE ET DU HESSIEN
****************************************/
ug=u[1:k,q+1:q+g-p];
sigma=(ug*ug')/(g-p);
dt=det(sigma);
dl=0;
h=0;
vr=0;
t=1;
do while t <= g-p;
        b=u[1:k,t+q];
        c=du[1:k,gm*(t+q)-(gm-1):gm*(t+q)];
        dl=dl+b'*inv(sigma)*c;
        h =h +c'*inv(sigma)*c;
        vr=vr+b'*inv(sigma)*b;
        t=t+1;
endo;
vrai=-((g-p)/2)*ln(dt)-0.5*vr;
if j==1;
     vvrai[1,1]=vrai;
endif;
/*******************************
CALCUL ITERATIF DE L'ESTIMATEUR
*******************************/
cc=1;
first:
```

```
gammao[.,j+1]=gammao[.,j]-s*inv(h)*dl';
gam=gammao[.,j+1];
comp=0.95*ones(gm,1);
lg=gam.<comp;
gam=lg.*gam;
compg=-0.95*ones(gm,1);
lgg=gam.>compg;
gam=lgg.*gam;
lg1=ones(gm,1)-lg;
lgg1=ones(gm,1)-lgg;
gam=gam+(0.95*lg1)+(-0.95*lgg1);
betao=r*gam+rr;
parao=reshape(betao,k*(p+q+1),k);
parao=parao';
/************************
CALCUL DE LA VRAISEMBLANCE
************************/
t=1;
do while t <= g-p;
        z=y[1:k,t:t+p-1];
        v=u[1:k,t:t+q-1];
        past=parao[1:k,1:k*(p+q)]*(vec(z)|vec(v));
        u[1:k,t+q]=y[1:k,t+p] - inv(ao)*past;
        t=t+1;
endo;
ug=u[1:k,q+1:q+g-p];
sigma=(ug*ug')/(g-p);
dt=det(sigma);
vr=0;
t=1;
do while t <= g-p;
        b=u[1:k,t+q];
        vr=vr + b'*inv(sigma)*b;
        t=t+1;
endo;
vrai=-((g-p)/2)*ln(dt)-0.5*vr;
/****************************
COMPARAISON DES VRAISEMBLANCES
****************************/
if vrai < vvrai[j,1];
        s=s/2;
        cc=cc+1;
```

```
            if cc > 40;
                  vrai=vvrai[j,1];
                  goto second;
            endif;
            goto first;
      else;
            vvrai[j+1,1]=vrai;
      endif;
      stp=vrai-vvrai[j,1];
      if stp < 0.0002;
            goto second;
      endif;
      j=j+1;
endo;
/*************************************
CHANGEMENT DU NON-CONTRAINT AU CONTRAINT
*************************************/
second:
if bin == 1;
    vraisem[hh,1]=vrai;
    bin=0;
    goto contr;
endif;
vraicont[hh,1]=vrai;
hh=hh+1;
endo;
/******************************
CALCUL DE LA STATISTIQUE DE TEST
******************************/
lr=2*(vraisem-vraicont);
complr=zeros(sim,1);
binlr=lr.>complr;
nonul=sumc(binlr);
print nonul;
print;
lrnonul=zeros(nonul,1);
c=1;
i=1;
do while i <= sim;
    if lr[i,1] <= 0;
       goto byy;
```

```
    else;
       lrnonul[c,1]=lr[i,1];
    endif;
    c=c+1;
    byy:
    i=i+1;
endo;
/**************************
POINT CRITIQUE SOUS LA NULLE
**************************/
if nul == 1;
    test=lrnonul.>3.84;
    a=(sumc(test)/nonul)*100;
    rang=rankindx(lrnonul,1);
    niv=(0.95*nonul)+1;
    niv=round(niv);
    comprg=niv*ones(nonul,1);
    binrg=rang.==comprg;
    crit=lrnonul.*binrg;
    crit=sumc(crit);
    print "Pourcentage de rejet:";
    print a;
    print;
    print "Point cririque a 95%:";
    print crit;
    print;
/********************
CALCUL DE LA PUISSANCE
********************/
else;
    test=lrnonul.>crit;
    a=(sumc(test)/nonul)*100;
    print "Pourcentage de rejet:";
    print a;
    print;
endif;
if nul == 1;
      goto alter;
endif;
mm=mm+1;
endo;
mmm=mmm+1;
endo;
```

ESTIMATION DU MODELE SOUS LA FORME ECHELON

```
output file = res reset;
format /rd 8,5;
disable;
load y[118,5]= nsiri;
g=rows(y);
y=y*100;
y[.,4]=y[.,4]/10;
y=y';
k=5;
po=2;
gm=27;
nb=30;
p=1;
q=1;
m=maxc(p|q);
ialpha=zeros(k^2,k^2*(p+q))~eye(k^2);
ibeta=eye(k^2*(p+q))~zeros(k^2*(p+q),k^2);
zz=zeros(k*po,g-po);
x=zeros(k*(p+q),g-po-m);
ga2=zeros(1,gm);
let p1= 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1;
let m1= 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0;
ga=p1|m1;
lga=rows(ga);
tt=seqa(1,1,lga);
gai=ga.*tt;
c=1;
i=1;
do while i <= lga;
        if gai[i,1] < 1;
              goto bye;
              else;
              ga2[1,c]=gai[i,1];
        endif;
        c=c+1;
        bye:
        i=i+1;
endo;
r=diagrv(eye(lga),ga);
```

```
t=1;
do while t <= g-p;
        z=y[1:k,t:t+p-1];
        v=u[1:k,t:t+q-1];
        past=parao[1:k,1:k*(p+q)]*(vec(z)|vec(v));
        i=1;
        do while i <= p;
                zt[1:k,i]=z[1:k,p+1-i];
                i=i+1;
        endo;
        i=1;
        do while i <= q;
                vt[1:k,i]=v[1:k,q+1-i];
                i=i+1;
        endo;
        l=(vec(zt))'~(vec(vt))';
        i=1;
        do while i <= q;
                dvt[k*i-(k-1):k*i,1:gm]=
                        du[1:k,gm*(t+i-1)-(gm-1):gm*(t+i-1)];
                i=i+1;
        endo;
        dp=parao[1:k,(k*p)+1:k*(p+q)]*dvt;
        ao=parao[1:k,k*(p+q)+1:k*(p+q+1)];
        du[1:k,gm*(t+q)-(gm-1):gm*(t+q)]=
                ((inv(ao)*past)'.*.inv(ao))*ialpha*r
                -(l.*.inv(ao))*ibeta*r
                -inv(ao)*dp;
        u[1:k,t+q]=y[1:k,t+p]-inv(ao)*past;
        t=t+1;
endo;
ug=u[1:k,q+1:q+g-p];
sigma=(ug*ug')/(g-p);
dt=det(sigma);
dl=0;
h=0;
vr=0;
t=1;
do while t <= g-p;
        b=u[1:k,t+q];
        c=du[1:k,gm*(t+q)-(gm-1):gm*(t+q)];
        dl=dl+b'*inv(sigma)*c;
        h =h +c'*inv(sigma)*c;
```

```
r=submat(r,0,ga2);
r=r|zeros(k^2,gm);
rr=zeros(k,k*(p+q))~eye(k);
rr=vec(rr);
rc=r;
zt=zeros(k,p);
vt=zeros(k,q);
u=zeros(k,g-p+q);
du=zeros(k,gm*(g-p+q));
dvt=zeros(k*q,gm);
gammao=zeros(gm,nb+1);
vvrai=zeros(nb+1,1);
i=1;
do while i <= g-po;
        zi=y[1:k,i:i+po-1];
        zz[1:(k*po),i]=vec(zi);
        i=i+1;
endo;
yt=y[1:k,po+1:g];
bch=yt*zz'*inv(zz*zz');
uch=yt-bch*zz;
i=1;
do while i <= g-po-m;
        b=yt[1:k,i+m-p:i+m-1];
        c=uch[1:k,i+m-q:i+m-1];
        x[1:k*(p+q),i]=vec(b)|vec(c);
        i=i+1;
endo;
b=uch[1:k,m+1:g-po];
bu=(b*b')/(g-p);
bu=inv(bu);
c=yt[1:k,m+1:g-po];
a=b-c;
x=x|a;
gammao[.,1]=inv(rc'*((x*x').*.bu)*rc)*rc'*(x.*.bu)*vec(c);
betao=rc*gammao[.,1];
parao=reshape(betao,k*(p+q+1),k);
parao=parao';
parao=(zeros(k,k*(p+q))~eye(k))+parao;
j=1;
do while j <= nb;
      y[1:k,1:p]=zeros(k,p);
      s=0.8;
```

```
        vr=vr+b'*inv(sigma)*b;
        t=t+1;
endo;
vrai=-((g-p)/2)*ln(dt)-0.5*vr;
if j==1;
    vvrai[1,1]=vrai;
endif;
first:
gammao[.,j+1]=gammao[.,j]-s*inv(h)*dl';
gam=gammao[.,j+1];
comp=ones(gm,1);
lg=gam.<comp;
gam=lg.*gam;
compg=-ones(gm,1);
lgg=gam.>compg;
gam=lgg.*gam;
lg1=ones(gm,1)-lg;
lgg1=ones(gm,1)-lgg;
gam=gam+(0.95*lg1)+(-0.95*lgg1);
betao=r*gam+rr;
parao=reshape(betao,k*(p+q+1),k);
parao=parao';
t=1;
do while t <= g-p;
        z=y[1:k,t:t+p-1];
        v=u[1:k,t:t+q-1];
        past=parao[1:k,1:k*(p+q)]*(vec(z)|vec(v));
        u[1:k,t+q]=y[1:k,t+p] - inv(ao)*past;
        t=t+1;
endo;
ug=u[1:k,q+1:q+g-p];
sigma=(ug*ug')/(g-p);
dt=det(sigma);
vr=0;
t=1;
do while t <= g-p;
        b=u[1:k,t+q];
        vr=vr+b'*inv(sigma)*b;
        t=t+1;
endo;
vrai=-((g-p)/2)*ln(dt)-0.5*vr;
if vrai < vvrai[j,1];
        s=s/2;
```

```
        goto first;
else;
        vvrai[j+1,1]=vrai;
endif;
stp=vrai-vvrai[j,1];
if stp < 0.00002;
      t=1;
      do while t <= g-p;
              z=y[1:k,t:t+p-1];
              v=u[1:k,t:t+q-1];
              past=parao[1:k,1:k*(p+q)]*(vec(z)|vec(v));
              i=1;
              do while i <= p;
                      zt[1:k,i]=z[1:k,p+1-i];
                      i=i+1;
              endo;
              i=1;
              do while i <= q;
                      vt[1:k,i]=v[1:k,q+1-i];
                      i=i+1;
              endo;
              l=(vec(zt))'~(vec(vt))';
              i=1;
              do while i <= q;
                      dvt[k*i-(k-1):k*i,1:gm]=
                           du[1:k,gm*(t+i-1)-(gm-1):gm*(t+i-1)];
                      i=i+1;
              endo;
              dp=parao[1:k,(k*p)+1:k*(p+q)]*dvt;
              ao=parao[1:k,k*(p+q)+1:k*(p+q+1)];
              du[1:k,gm*(t+q)-(gm-1):gm*(t+q)]=
                          ((inv(ao)*past)'.*.inv(ao))*ialpha*r
                          -(l.*.inv(ao))*ibeta*r
                          -inv(ao)*dp;
              u[1:k,t+q]=y[1:k,t+p]-inv(ao)*past;
              t=t+1;
      endo;
      ug=u[1:k,q+1:q+g-p];
      sigma=(ug*ug')/(g-p);
      dt=det(sigma);
      h=0;
      t=1;
```

```
        do while t <= g-p;
            c=du[1:k,gm*(t+q)-(gm-1):gm*(t+q)];
            h =h +c'*inv(sigma)*c;
            t=t+1;
        endo;
        bch=parao[1:k,1:k*(p+q)];
        rv=r[1:lga,.];
        var=inv(h);
        var=diag(var);
        var=rv*var;
        se=var^0.5;
        se=reshape(se,k*(p+q),k);
        se=se';
        goto second;
    endif;
    j=j+1;
endo;
second:
a=parao[1:k,1:k];
print a;
b=parao[1:k,k+1:2*k];
print b;
end;
```

APPENDICE B

DONNEES

(provenant de Balke-Gordon)

	m1	m2	base
1947.0000	108.07000	196.69000	36.520000
1947.2500	109.66000	199.58000	36.760000
1947.5000	110.54000	201.77000	37.010000
1947.7500	111.04000	203.56000	37.090000
1948.0000	110.74000	204.11000	37.010000
1948.2500	110.03000	203.01000	37.090000
1948.5000	110.08000	203.28000	37.670000
1948.7500	109.54000	202.87000	39.070000
1949.0000	109.13000	202.18000	38.820000
1949.2500	109.22000	202.73000	37.830000
1949.5000	108.90000	202.32000	36.520000
1949.7500	109.05000	202.32000	35.530000
1950.0000	110.20000	203.97000	35.440000
1950.2500	111.75000	206.58000	35.610000
1950.5000	112.95000	208.09000	35.690000
1950.7500	113.93000	209.32000	35.860000
1951.0000	115.08000	211.11000	37.170000
1951.2500	116.19000	212.75000	38.000000
1951.5000	117.76000	215.64000	38.490000
1951.7500	119.89000	219.48000	38.910000
1952.0000	121.31000	222.64000	39.400000
1952.2500	122.37000	224.83000	39.630000
1952.5000	123.64000	227.58000	40.030000
1952.7500	124.72000	230.46000	40.500000
1953.0000	125.33000	232.24000	40.730000
1953.2500	126.05000	234.44000	40.930000
1953.5000	126.22000	235.81000	41.270000
1953.7500	126.37000	237.32000	41.170000
1954.0000	126.54000	239.25000	41.270000
1954.2500	127.18000	241.44000	41.270000
1954.5000	128.38000	244.74000	41.270000
1954.7500	129.72000	247.34000	41.530000
1955.0000	131.07000	250.09000	41.530000
1955.2500	131.88000	251.74000	41.670000
1955.5000	132.40000	252.97000	41.700000
1955.7500	132.64000	253.93000	41.830000

1956.0000	133.11000	254.62000	42.070000
1956.2500	133.38000	255.85000	42.100000
1956.5000	133.48000	256.95000	42.130000
1956.7500	134.09000	258.60000	42.400000
1957.0000	134.29000	260.80000	42.470000
1957.2500	134.36000	262.72000	42.530000
1957.5000	134.26000	264.50000	42.530000
1957.7500	133.48000	265.19000	42.530000
1958.0000	133.72000	267.93000	42.700000
1958.2500	135.22000	274.52000	43.200000
1958.5000	136.64000	279.33000	43.370000
1958.7500	138.48000	282.62000	43.530000
1959.0000	140.35000	286.60000	43.700000
1959.2500	141.75000	291.00000	43.900000
1959.5000	142.23000	294.90000	44.070000
1959.7500	141.20000	296.10000	43.930000
1960.0000	140.83000	297.20000	43.870000
1960.2500	140.83000	299.90000	43.930000
1960.5000	142.00000	305.30000	44.030000
1960.7500	141.98000	309.80000	44.070000
1961.0000	142.85000	314.80000	44.700000
1961.2500	143.88000	320.70000	44.670000
1961.5000	144.90000	326.20000	45.130000
1961.7500	146.18000	331.80000	45.800000
1962.0000	147.18000	338.90000	46.100000
1962.2500	147.95000	345.90000	46.570000
1962.5000	147.90000	351.30000	46.900000
1962.7500	148.93000	358.40000	47.400000
1963.0000	150.45000	366.30000	47.930000
1963.2500	151.93000	374.20000	48.500000
1963.5000	153.38000	381.90000	49.170000
1963.7500	154.80000	389.30000	49.870000
1964.0000	155.85000	395.80000	50.570000
1964.2500	157.20000	402.50000	51.170000
1964.5000	159.75000	411.70000	52.000000
1964.7500	161.63000	420.20000	52.730000
1965.0000	162.90000	428.50000	53.400000
1965.2500	163.90000	435.70000	54.030000
1965.5000	166.05000	444.10000	54.770000
1965.7500	169.10000	454.00000	55.830000

1966.0000	171.95000	462.50000	56.630000
1966.2500	172.98000	468.30000	57.470000
1966.5000	172.80000	471.30000	58.130000
1966.7500	173.33000	476.20000	58.470000
1967.0000	175.25000	484.00000	59.330000
1967.2500	178.10000	495.50000	60.200000
1967.5000	181.93000	509.50000	61.170000
1967.7500	184.73000	520.30000	62.230000
1968.0000	187.15000	529.30000	63.270000
1968.2500	190.63000	538.10000	64.100000
1968.5000	194.30000	549.00000	65.170000
1968.7500	198.55000	561.80000	66.470000
1969.0000	201.73000	571.20000	67.400000
1969.2500	203.18000	576.50000	67.930000
1969.5000	204.18000	580.30000	68.500000
1969.7500	206.10000	585.20000	69.430000
1970.0000	207.90000	587.30000	70.200000
1970.2500	209.78000	593.10000	71.330000
1970.5000	212.78000	603.50000	72.670000
1970.7500	216.08000	619.10000	74.000000
1971.0000	220.28000	640.40000	75.630000
1971.2500	225.25000	666.60000	77.100000
1971.5000	228.45000	684.60000	78.670000
1971.7500	230.70000	702.90000	79.600000
1972.0000	235.60000	725.20000	81.000000
1972.2500	239.38000	744.30000	82.630000
1972.5000	244.55000	768.50000	84.100000
1972.7500	250.70000	793.40000	86.230000
1973.0000	254.80000	813.80000	88.230000
1973.2500	258.40000	827.90000	89.970000
1973.5000	261.03000	840.30000	91.730000
1973.7500	264.68000	851.60000	93.230000
1974.0000	268.77000	868.70000	95.370000
1974.2500	271.23000	880.00000	97.570000
1974.5000	273.73000	889.60000	99.470000
1974.7500	276.73000	902.40000	101.60000
1975.0000	278.75000	920.10000	103.20000
1975.2500	283.80000	954.30000	105.20000
1975.5000	288.13000	989.10000	107.40000
1975.7500	290.88000	1014.0000	109.40000

1976.0000	295.18000	1046.0000	111.50000
1976.2500	299.53000	1080.0000	114.30000
1976.5000	303.35000	1110.0000	116.30000
1976.7500	309.35000	1152.0000	118.60000
1977.0000	316.55000	1192.0000	120.80000
1977.2500	321.80000	1225.0000	121.00000
1977.5000	327.60000	1254.0000	123.80000
1977.7500	334.80000	1285.0000	126.50000
1978.0000	341.13000	1309.0000	129.50000
1978.2500	348.70000	1334.0000	132.50000
1978.5000	355.45000	1361.0000	135.30000
1978.7500	361.38000	1393.0000	138.10000
1979.0000	367.08000	1415.0000	140.60000
1979.2500	376.10000	1451.0000	143.30000
1979.5000	384.58000	1489.0000	146.40000
1979.7500	388.38000	1517.3000	149.40000
1980.0000	394.30000	1518.9000	152.30000
1980.2500	390.00000	1535.7000	154.60000
1980.5000	405.50000	1588.0000	158.50000
1980.7500	416.10000	1625.8000	162.60000
1981.0000	420.90000	1654.5000	163.80000
1981.2500	429.30000	1697.7000	166.40000
1981.5000	432.60000	1731.7000	168.30000
1981.7500	437.50000	1777.2000	169.90000
1982.0000	448.80000	1819.8000	173.50000
1982.2500	451.30000	1853.2000	177.00000
1982.5000	458.20000	1896.6000	180.00000
1982.7500	475.70000	1946.7000	183.80000
1983.0000	490.90000	2046.3000	189.00000
1983.2500	505.20000	2100.4000	194.10000
1983.5000	517.20000	2136.6000	197.60000
1983.7500	523.40000	2181.9000	201.40000

	revenu	deflateur	taux
1947.0000	466.05000	48.300000	1.0000000
1947.2500	469.88000	48.800000	1.0000000
1947.5000	470.02000	49.700000	1.0100000
1947.7500	475.63000	51.300000	1.1300000
1948.0000	479.85000	52.100000	1.3500000
1948.2500	488.62000	52.700000	1.3800000
1948.5000	492.55000	53.700000	1.4600000
1948.7500	497.94000	53.400000	1.5600000
1949.0000	492.44000	52.900000	1.5600000
1949.2500	490.46000	52.400000	1.5600000
1949.5000	495.03000	52.300000	1.4600000
1949.7500	491.01000	52.300000	1.3600000
1950.0000	512.64000	52.200000	1.3100000
1950.2500	525.81000	52.700000	1.3100000
1950.5000	543.91000	54.200000	1.4600000
1950.7500	555.90000	55.100000	1.7100000
1951.0000	564.09000	56.800000	1.9500000
1951.2500	575.97000	57.000000	2.1900000
1951.5000	587.72000	57.000000	2.2500000
1951.7500	588.89000	57.600000	2.2600000
1952.0000	593.58000	57.600000	2.3800000
1952.2500	593.92000	57.600000	2.3200000
1952.5000	600.69000	57.900000	2.3100000
1952.7500	614.33000	58.600000	2.3100000
1953.0000	622.62000	58.800000	2.3300000
1953.2500	628.23000	58.800000	2.6200000
1953.5000	624.41000	59.000000	2.7500000
1953.7500	618.57000	58.700000	2.3700000
1954.0000	610.27000	59.400000	2.0400000
1954.2500	607.89000	59.600000	1.6300000
1954.5000	616.30000	59.500000	1.3600000
1954.7500	628.09000	59.800000	1.3100000
1955.0000	643.78000	60.300000	1.6100000
1955.2500	652.72000	60.700000	1.9700000
1955.5000	663.61000	61.000000	2.3300000
1955.7500	669.38000	61.400000	2.8300000
1956.0000	666.88000	61.900000	3.0000000

1956.2500	670.51000	62.400000	3.2600000
1956.5000	671.16000	63.100000	3.3500000
1956.7500	678.34000	63.700000	3.6300000
1957.0000	683.54000	64.400000	3.6300000
1957.2500	683.62000	64.700000	3.6800000
1957.5000	688.21000	65.300000	3.9500000
1957.7500	678.90000	65.400000	3.9900000
1958.0000	665.85000	65.600000	2.8200000
1958.2500	669.76000	65.800000	1.7200000
1958.5000	685.65000	66.200000	2.1300000
1958.7500	702.26000	66.500000	3.2100000
1959.0000	711.94000	67.000000	3.3000000
1959.2500	725.74000	67.600000	3.6000000
1959.5000	721.24000	67.800000	4.1900000
1959.7500	727.94000	68.000000	4.7600000
1960.0000	741.08000	68.400000	4.6900000
1960.2500	738.05000	68.600000	4.0700000
1960.5000	737.30000	68.900000	3.3700000
1960.7500	731.59000	69.000000	3.2700000
1961.0000	737.59000	68.900000	3.0100000
1961.2500	750.29000	69.200000	2.8600000
1961.5000	760.00000	69.500000	2.9000000
1961.7500	778.48000	69.700000	3.0600000
1962.0000	789.46000	70.200000	3.2400000
1962.2500	798.16000	70.500000	3.2000000
1962.5000	805.81000	70.600000	3.3300000
1962.7500	807.74000	71.100000	3.2600000
1963.0000	815.13000	71.400000	3.3100000
1963.2500	826.15000	71.500000	3.3200000
1963.5000	839.33000	71.700000	3.7000000
1963.7500	848.20000	72.200000	3.9100000
1964.0000	863.67000	72.400000	3.9500000
1964.2500	873.28000	72.600000	3.9300000
1964.5000	880.55000	73.000000	3.9100000
1964.7500	886.34000	73.200000	4.0600000
1965.0000	906.23000	73.800000	4.3000000
1965.2500	919.97000	74.100000	4.3800000
1965.5000	933.51000	74.600000	4.3800000
1965.7500	956.27000	75.000000	4.4700000
1966.0000	975.56000	75.700000	4.9700000

1966.2500	979.11000	76.600000	5.4300000
1966.5000	987.79000	77.000000	5.7900000
1966.7500	996.01000	77.800000	6.0000000
1967.0000	997.06000	78.300000	5.4500000
1967.2500	1004.5900	78.500000	4.7200000
1967.5000	1016.0200	79.300000	4.9700000
1967.7500	1027.8400	80.100000	5.3000000
1968.0000	1036.2200	81.180000	5.5800000
1968.2500	1056.0200	82.120000	6.0800000
1968.5000	1068.7200	82.800000	5.9600000
1968.7500	1071.2800	84.040000	5.9600000
1969.0000	1084.1500	84.970000	6.6600000
1969.2500	1088.7300	86.100000	7.5400000
1969.5000	1091.9000	87.490000	8.4900000
1969.7500	1085.5300	88.620000	8.6200000
1970.0000	1081.3200	89.890000	8.5500000
1970.2500	1083.0100	91.070000	8.1700000
1970.5000	1093.3700	91.790000	7.8400000
1970.7500	1084.6000	93.030000	6.2900000
1971.0000	1111.5500	94.400000	4.5900000
1971.2500	1116.9300	95.700000	5.0400000
1971.5000	1125.7800	96.520000	5.7400000
1971.7500	1135.4300	97.390000	5.0700000
1972.0000	1157.2100	98.720000	4.0600000
1972.2500	1178.5400	99.420000	4.5800000
1972.5000	1193.1200	100.25000	4.9400000
1972.7500	1214.7900	101.54000	5.3300000
1973.0000	1246.7200	102.95000	6.2800000
1973.2500	1248.3100	104.75000	7.4700000
1973.5000	1255.7000	106.53000	9.8700000
1973.7500	1266.0500	108.74000	8.9800000
1974.0000	1253.3400	110.72000	8.3000000
1974.2500	1254.6700	113.48000	10.460000
1974.5000	1246.8600	116.42000	11.530000
1974.7500	1230.3200	119.79000	9.0500000
1975.0000	1204.2600	122.88000	6.5600000
1975.2500	1218.8200	124.44000	5.9200000
1975.5000	1246.0500	126.68000	6.6700000
1975.7500	1257.3100	128.99000	6.1200000
1976.0000	1284.9700	130.12000	5.2900000

1976.2500	1293.6800	131.30000	5.5700000
1976.5000	1301.0800	132.89000	5.5300000
1976.7500	1313.0600	134.99000	4.9900000
1977.0000	1341.2300	136.80000	4.8100000
1977.2500	1363.2800	139.01000	5.2400000
1977.5000	1385.8000	141.03000	5.8100000
1977.7500	1388.5100	143.24000	6.5900000
1978.0000	1400.0100	145.12000	6.8000000
1978.2500	1436.9700	148.89000	7.2000000
1978.5000	1448.8200	152.02000	8.0800000
1978.7500	1468.4000	155.38000	9.9000000
1979.0000	1472.5700	158.60000	10.100000
1979.2500	1469.2000	161.85000	10.030000
1979.5000	1486.5900	165.13000	10.600000
1979.7500	1489.3800	168.05000	13.100000
1980.0000	1496.4000	171.94000	14.250000
1980.2500	1461.4000	176.46000	10.620000
1980.5000	1464.2000	180.24000	9.6500000
1980.7500	1477.9000	185.13000	14.510000
1981.0000	1513.5000	190.01000	14.520000
1981.2500	1511.7000	193.03000	15.350000
1981.5000	1522.1000	197.71000	16.270000
1981.7500	1501.3000	201.69000	12.940000
1982.0000	1483.5000	203.98000	13.700000
1982.2500	1480.5000	206.77000	13.480000
1982.5000	1477.1000	208.52000	11.530000
1982.7500	1478.8000	210.28000	8.8100000
1983.0000	1491.0000	212.86000	8.3400000
1983.2500	1524.8000	214.26000	8.6100000
1983.5000	1550.2000	215.88000	9.4400000
1983.7500	1572.7000	218.20000	9.1900000