Université de Montréal

Système complet de demande de facteurs de production physiques et financier sous rationnement quantitatif.

par

Marie–Chantale Parent
Département de sciences économiques
Faculté des arts et des sciences.

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître es sciences (M.Sc.)
en sciences économiques

Décembre 1988

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

"Système complet de demande de facteurs de production physiques et financier sous rationnement quantitatif"

présenté par:

Marie-Chantale Parent

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Marcel Dagenais, Président-rapporteur

Pierre Ouellette, membre

Lise Salvas-Bronsard, membre

Mémoire accepté le: 11 avril 1989

SOMMAIRE

Table des matières

L'objet de ce mémoire est la reformulation du problème du producteur dans un contexte temporaire de façon à pouvoir définir un système complet de demande de facteurs de production physiques et financier. De par sa spécification, ce système se caractérise par une structure locale de Slutsky mettant en évidence certaines relations de substitution–complémentarité entre les facteurs de production.

A partir de données canadiennes trimestrielles non désaisonnalisées, le modèle est ensuite estimé par moindres carrés généralisés avec comme restrictions *a priori* les implications empiriques qui le caractérisent. Les résultats obtenus démontrent que ces restrictions ne peuvent être rejetées et que le modèle fournit une bonne explication du comportement du producteur.

Introduction

Depuis Coen et Hickman (1970), la théorie du producteur et son analyse empirique ont été l'objet de nombreuses recherches. Cependant, malgré l'introduction des anticipations (Gould (1968), Ando et al. (1974), Meese (1980)), des coûts d'ajustement (Lucas (1967), Treadway (1969), Mortensen (1973), Nickell (1977), Meese (1980), Berndt et Morrison (1981)) et des rationnements quantitatifs (Grossman (1972)), ces études continuent de supposer que les opérations financières du producteur sont indépendantes de ses décisions sur les biens physiques (voir Epstein et Denny (1983), Diewert et Wales (1987) parmi les plus récentes)

Dans ce mémoire, la demande d'actifs financiers du producteur est explicitement introduite dans un système complet de demande de facteurs de production. Ce système est caractérisé par une structure locale de Slutsky: la spécification du modèle entraîne un ensemble de propriétés microéconomiques telles que l'homogénéité, la symétrie, l'additivité et la négativité semi–définie.

Pour parvenir à un tel modèle, il faut tout d'abord reformuler le problème du producteur dans un contexte d'équilibre temporaire (Grandmont (1983), Bronsard et Salvas–Bronsard (1983)). Essentiellement, dans un modèle d'équilibre temporaire, le commerce en biens futurs se fait indirectement à travers les marchés financiers, les marchés futurs étant soit incomplets, soit inexistants. Le producteur prend des décisions à la date t sans connaître son environnement futur. En effet, les prix et les revenus à venir lui sont alors inconnus. Il doit donc les prévoir dans le but d'effectuer ses choix, d'où l'introduction des anticipations. Ainsi, à chaque période, lorsqu'il détermine sa production nette de biens courants, le producteur doit aussi acheter ou vendre des actifs financiers de manière à pouvoir réaliser la production future qu'il a planifiée en fonction de ses anticipations. Cette façon de procéder implique la détermination simultanée des demandes de facteurs physiques et financier. L'équilibre est temporaire parce que les décisions doivent être révisées à chaque période avec l'arrivée de nouvelles informations sur l'avenir.

La difficulté majeure de cette approche réside dans la caractérisation des anticipations de façon à respecter les théorèmes de la théorie microéconomique (Polemarchakis (1983), Bronsard et Salvas–Bronsard (1986)). Dans ce mémoire, il est permis de voir sous quelles conditions ces théorèmes seront respectés.

Enfin, la possibilité d'un rationnement quantitatif sur la production nette de biens de consommation et l'exogénéité des variations dans les inventaires sont envisagées.

Le reste du texte s'organise de la façon suivante:

Les modèles théoriques se retrouvent dans le premier chapitre. La section 1.1 fait la présentation du modèle de base dans un cadre atemporel. Dans la section 1.2 , ce modèle est transposé dans un contexte temporaire par l'introduction des anticipations et de la demande pour un actif financier. Un cas particulier est ensuite traité dans la section suivante. Enfin, la section 1.4 montre la paramétrisation du modèle à la manière de Rotterdam.

Le deuxième chapitre décrit les méthodes d'estimation, les hypothèses stochastiques et les tests sur les propriétés. Dans le dernier chapitre, qui présente l'analyse empirique, les résultats révèlent que le modèle n'est pas rejeté et qu'il fournit une représentation adéquate du comportement du producteur. Les démonstrations plus complexes et la description des sources de données sont regroupées en annexes.

Chapitre I : Modèles théoriques

Chapitre II : Méthodes d'estimation et tests de symétrie

L'objet de ce chapitre est la description des différentes méthodes d'estimation et tests de symétrie appliqués au modèle théorique paramétrisé à la section 1.4 .

2.1 Moindres carrés généralisés

On veut estimer le modèle (1.4.1) sujet à des restrictions linéaires et non–linéaires.

Lorsque les variables explicatives sont indépendantes des erreurs aléatoires et que les rectrictions non–linéaires sont mises de côté, le modèle se réduit à un système complet d'équations soumises à des contraintes linéaires.

Soit le modèle

$$y = X\beta + \varepsilon \qquad \text{où } \begin{aligned} E(\varepsilon) &= 0 \\ E(\varepsilon\varepsilon') &= \Omega \\ &= \Omega_c \otimes I \,. \end{aligned}$$

Il devient alors possible d'employer la méthode des moindres carrés généralisés développée par Zellner (1962) sous contraintes linéaires.

Mais tout d'abord, il faut définir l'estimateur des moindres carrés généralisés sans contraintes. Cet estimateur peut s'écrire:

$$\hat{\beta}_G = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X' \Omega^{-1} y \qquad (2.1.1)$$

avec une variance telle que:

$$V(\hat{\beta}) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (2.1.2) \,.$$

Le modèle étudié présente cependant un cas particulier des moindres carrés généralisés. En effet, on retrouve les mêmes variables explicatives d'une équation à l'autre. Soit la matrice X telle que:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_1 \end{bmatrix} = I \otimes X_1 \;;$$

on a alors:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_G &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1}y \\ &= \left[(I \otimes X_1)' (\Omega_c^{-1} \otimes I)(I \otimes X_1)\right]^{-1} \left[(I \otimes X_1)' (\Omega_c^{-1} \otimes I)\right] y \\ &= (\Omega_c^{-1} \otimes X_1'X_1)^{-1} (\Omega_c^{-1} \otimes X_1')\, y \\ &= \left[I \otimes (X_1'X_1)^{-1} X_1'\right] y \end{aligned} \qquad (2.1.3)$$

et

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_G) &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \\ &= \Omega_c \otimes (X_1' X_1)^{-1} \end{aligned} \qquad (2.1.4)\,.$$

Il serait maintenant opportun de discuter des contraintes imposées a priori; tel que démontré dans la section 1.2 , les propriétés de symétrie et de négativité entraînent des restrictions non–linéaires entre les équations. Or, ce genre de restrictions est difficilement imposable a priori. Il est toutefois possible de retrouver certaines restrictions linéaires de symétrie en utilisant des partitions sur T et sur $\hat{A}$.

Soit:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$T_{11} = (\mu - 1)I\,,\; T_{12} = [\,0\;0\,]\,,\; T_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\text{ et }\; T_{22} = \begin{bmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}.$$

Il ne semble pas alors exister de différence fondamentale entre tester la symétrie de chaque bloc diagonal de $T\hat{A}$ ou celle de chaque bloc diagonal de $\hat{A}$. Il faut toutefois rappeler que la symétrie de $T\hat{A}$ implique que:

$$(\mu - 1)\hat{A}_{12} = \hat{A}_{21}\, \mu \, ,$$

ce qui représente des restrictions non–linéaires qui ne sauraient être imposées a priori. Dans le cas présent, la symétrie sera donc seulement imposée au bloc diagonal $\hat{A}_{22}$.

Comme la négativité engendre elle aussi des restrictions non–linéaires, elle ne sera pas non plus imposée a priori. Elle demeurera cependant aisément vérifiable de par sa condition nécessaire, la négativité diagonale de la matrice de Slutsky.

Enfin, la paramétrisation construit le système de façon à obtenir automatiquement l'additivité.

Les seules contraintes linéaires à imposer et à tester seront donc celles de la symétrie de $\hat{A}_{22}$ qui peuvent s'écrire ainsi:

$$R\beta_G = r \qquad (2.1.5)\ .$$

L'estimateur des moindres carrés généralisés sous contraintes linéaires sera donc:

$$\bar{\beta}_G = \hat{\beta}_G + \left[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R' \left[R\ [\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}]\ R'\right]^{-1} (r - R\hat{\beta}_G) \quad (2.1.6)$$

avec variance:

$$V(\bar{\beta}_G) = V(\hat{\beta}_G) - \left[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R' \left[R\ \left[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R'\right]^{-1} R\ \left[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] \quad (2.1.7)\ .$$

Jusqu'à présent, il a été plus commode pour l'exposition de supposer que la matrice Ω_c était connue alors, qu'en fait, elle ne l'est pas. Il faudra donc procéder par itérations afin d'en obtenir un estimé convergent.

La première étape consiste à appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires sur chacune des équations du système.

Soit

$$\Omega_c = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \cdots & \omega_{mm} \end{bmatrix} .$$

Cette première étape permet d'obtenir

$$\hat{\omega}_{11} = \frac{\Sigma_t \hat{\epsilon}_{1t}^2}{T} , \quad \hat{\omega}_{12} = \frac{\Sigma_t \hat{\epsilon}_{1t} \hat{\epsilon}_{2t}}{T} , \quad \hat{\omega}_{mm} = \frac{\Sigma_t \hat{\epsilon}_{mt}^2}{T} , \text{ etc...} ,$$

$$\text{où } \hat{\epsilon}_{1t} = y_{1t} - x'_{1t} \hat{\beta}_1$$
$$\hat{\epsilon}_{2t} = y_{2t} - x'_{2t} \hat{\beta}_2$$
$$\cdots$$

c'est-à-dire $\hat{\Omega}_c$.

Il est ensuite possible de passer à l'estimation de:

$$\tilde{\tilde{\beta}}_G = \hat{\beta}_G + \left[\hat{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R' \left[R \left[\hat{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R'\right]^{-1} (r - R\hat{\beta}_G)$$

où $\hat{\beta}_G$ est tel que défini en (2.1.3) mais avec une variance de

$$V(\hat{\beta}_G) = \hat{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1} \quad \text{au lieu de (2.1.4)} .$$

Ainsi,

$$V(\tilde{\tilde{\beta}}_G) = V(\hat{\beta}_G) - \left[\hat{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R' \left[R\left[\hat{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R'\right]^{-1} R\left[\hat{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] ,$$

et $\tilde{\tilde{\beta}}_G$ est un estimateur centré, convergent et asymptotiquement efficace.

L'étape suivante consiste à recalculer des valeurs

$$\overset{\approx}{\epsilon}_G = y - X\overset{\approx}{\beta}_G ,$$

qui permettront d'obtenir $\overset{\approx}{\Omega}_c$. A son tour, $\overset{\approx}{\Omega}_c$ rendra possible le calcul d'un autre estimateur et les itérations continueront ainsi jusqu'à la convergence. A la fin, il restera $\overset{\infty}{\Omega}_c$ et $\overset{\infty}{\beta}_G$, un estimateur équivalent à celui du maximum de vraisemblance.

On trouvera dans la section suivante la discussion des tests de symétrie.

2.2 Tests de symétrie

Cette section présente trois façons de tester la symétrie du bloc diagonal $\hat{A}_{22}$.

i) Le critère de Wald

$$(R\overset{\infty}{\beta}_G - r)' \left[R \left[\overset{\infty}{\Omega}_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}\right] R'\right]^{-1} (R\overset{\infty}{\beta}_G - r) \underset{T\to\infty}{\tilde{}} \chi_q^2 \qquad (2.2.1)$$

avec q degrés de liberté où q représente le nombre de restrictions linéaires. Il faut noter que le critère de Wald n'est valide qu'asymptotiquement.

ii) Le rapport de vraisemblance

Ce test est asymptotiquement équivalent au critère de Wald. Il s'agit de faire le rapport des fonctions de vraisemblance contrainte et non contrainte:

$$\hat{L} = (2\pi)^{-mT/2} |\Omega_c|^{-T/2} \exp\{-1/2 \sum_t \hat{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\epsilon}_t\} \text{ non contrainte,}$$
$$\tilde{L} = (2\pi)^{-mT/2} |\Omega_c|^{-T/2} \exp\{-1/2 \sum_t \tilde{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \tilde{\epsilon}_t\} \text{ contrainte.}$$

Le test est $\quad -2\log\lambda \sim \chi^2 q \quad$ où

$$\lambda = \frac{\tilde{L}}{\hat{L}} = \exp\{-1/2 \sum_t \tilde{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \tilde{\epsilon}_t + 1/2 \sum_t \hat{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\epsilon}_t\}$$

$$\begin{aligned}
-2\log\lambda &= \sum_t \tilde{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \tilde{\epsilon}_t - \sum_t \hat{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\epsilon}_t \\
&= \mathrm{tr} \sum_t \tilde{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \tilde{\epsilon}_t - \mathrm{tr} \sum_t \hat{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\epsilon}_t \\
&= \mathrm{tr} \sum_t \Omega_c^{-1} \tilde{\epsilon}_t \tilde{\epsilon}'_t - \mathrm{tr} \sum_t \Omega_c^{-1} \hat{\epsilon}'_t \hat{\epsilon}_t \\
&= \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1} T \tilde{\Omega}_c - \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1} T \hat{\Omega}_c \\
&= T\, \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1} (\tilde{\Omega}_c - \hat{\Omega}_c) \sim \chi^2 q
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Le rapport de vraisemblance n'a plus que des propriétés asymptotiques lorsqu'un estimateur convergent remplace Ω_c^{-1}.

iii) Le test de Fisher

Il consiste à diviser (2.2.1) ou (2.2.2) par $\sum_t \hat{\epsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\epsilon}_t$ ou encore par $T\, \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1} \hat{\Omega}_c$.

Le test de Fisher s'écrit alors:

$$\frac{T\ \mathrm{tr}\ \Omega_c^{-1}(\tilde{\Omega}_c - \hat{\Omega}_c)\ /\ q}{T\ \mathrm{tr}\ \Omega_c^{-1}\hat{\Omega}_c\ /\ (n-1)\ (T-K)} \sim Fq\ ,\ (n-1)(T-k) \tag{2.2.3}$$

où T représente le nombre d'observations, n le nombre d'équations et k le nombre de variables explicatives.

Encore une fois, si un estimateur convergent prend la place de Ω_c^{-1}, le test n'est plus valide qu'asymptotiquement.

Chapitre III : Résultats empiriques

Les estimations des modèles (1.2.28) et (1.3.2) présentés au chapitre I ont été faites à partir d'un échantillon de données canadiennes trimestrielles non désaisonnalisées per capita couvrant la période 1962 I – 1983 IV.

Le vecteur $\hat{a}$ de variation de la demande de facteurs de production a été décomposé de la façon suivante: $\hat{a}_1$ représente la valeur de la variation matérielle des inventaires tandis que $\hat{a}_2$ regroupe le niveau de l'emploi, l'investissement en construction non résidentielle, l'investissement en machinerie et en équipement et les emprunts nets.

Le prix des inventaires est fourni par l'indice de prix de vente dans l'industrie. Sur le marché du travail, le prix a été obtenu en divisant le revenu du travail privé par l'emploi privé. Les prix de l'investissement en construction non résidentielle et de l'investissement en machinerie et en équipement ont été construits en divisant les dépenses en dollars courants par les dépenses en dollars de 1981. Le prix des emprunts nets est un facteur d'escompte $\gamma_t = 1 / (1 + r_t)$ où r_t représente le rendement d'une obligation à long terme du gouvernement. (Voir l'Annexe A.6 pour une description détaillée des sources de données.)

Les résultats de l'estimation du modèle (1.2.28) par moindres carrés généralisés sont présentés au tableau I. La symétrie de la matrice de Slutsky ne peut être rejetée avec les résultats obtenus aux tests de Fisher et χ^2 (0,9566 et 9,2162 respectivement, pour des valeurs critiques de $F_{10,252} \cong 1{,}87$ et $\chi^2_{10} = 18{,}307$).

La négativité de la matrice de Slutsky n'est pas rejetée même si trois des éléments de la diagonale ne sont pas significativement différents de zéro.

L'examen des autres éléments significatifs de la matrice permet de voir que le travail est substitut aux emprunts nets, aux variations dans les inventaires et à l'investissement en machinerie et en équipement. Pour sa part, l'investissement en machinerie et en équipement est substitut aux variations dans les inventaires et complémentaire aux emprunts nets de même qu'à l'investissement en construction non résidentielle.

Le vecteur des propensions marginales à dépenser est hautement significatif et montre la proportion accordée à chacun des facteurs dans la dépense totale. Ainsi, les inventaires se placent au premier rang suivis des emprunts nets, de l'emploi, de l'investissement en machinerie et en équipement et de l'investissement en construction non résidentielle.

Il est intéressant de constater que plusieurs variables retardées exercent des effets significatifs sur la demande de facteurs, notamment l'investissement en construction non résidentielle retardé d'un et de quatre trimestres, l'indice de prix de vente dans l'industrie retardé d'un trimestre, l'emploi et le taux de salaire retardés de quatre trimestres et l'investissement en machinerie et en équipement retardé d'un trimestre. Le PNB a également un effet important.

D'après les statistiques R^2 obtenues par les moindres carrés ordinaires, le modèle possède un bon pouvoir explicatif.

Les résultats de la deuxième estimation présentés au tableau II concernent le modèle (1.3.2) où les variations dans les inventaires sont maintenant considérées comme une variable exogène. Le modèle ne comporte plus que quatre équations.

D'après les résultats des tests de Fisher et χ^2 (0,9580 et 5,5781 pour des valeurs critiques de $F_{6,189} \cong 2{,}14$ et $\chi^2 = 12{,}592$), la symétrie de la matrice de Slutsky ne peut être rejetée.

De son côté, la négativité n'est pas clairement rejetée; cependant, trois des quatre éléments de la diagonale ne sont pas significativement différents de zéro. Ici encore, l'emploi est substitut aux emprunts nets et à l'investissement en machinerie et en équipement.

Comme précédemment, le vecteur de la propension marginale à dépenser est très significatif et chacun des facteurs conserve sensiblement la même proportion dans la dépense totale.

Les variables retardées les plus significatives sont l'investissement en construction non résidentielle retardé d'un et de quatre trimestres, l'investissement en machinerie et en équipement retardé d'un trimestre et le taux d'escompte retardé de quatre trimestres. Le PNB montre encore un effet très significatif.

L'exogénéité de la variation des inventaires exerce un effet de débordement significativement positif sur l'investissement en machinerie et en équipement mais n'a aucun effet sur les autres facteurs.

Il est intéressant de constater que le fait de traiter les variations dans les inventaires de façon exogène n'influence pas les coefficients des variables retardées et du PNB, de même que leur signification (par rapport à la première estimation).

Les coefficients R^2 calculés par les moindres carrés ordinaires permettent de voir que le modèle possède, cependant, un bon pouvoir explicatif.

Il faudrait effectuer d'autres expériences pour améliorer la performance du modèle. L'estimation par la méthode des variables instrumentales pourrait obtenir de meilleurs résultats. Une deuxième expérience consisterait à créer une variable retardée d'une période pour chacune des variables endogènes et exogènes au lieu d'utiliser des variables retardées arbitraires; cette façon de procéder pourrait alors se comparer à un modèle dans lequel on corrigerait pour l'autocorrélation d'ordre un.

1.1 Modèle de base avec rationnement quantitatif

Dans ce modèle, le producteur désire maximiser la fonction de rendement suivante

$$Pr = p_1b_1 + p_2b_2 \tag{1.1.1}$$

où b_1 représente le vecteur d'output de biens de consommation et b_2 les vecteurs d'outputs de travail et de biens de capital physique. Certains éléments de ces vecteurs peuvent être nuls. p_1 et p_2 sont les vecteurs de prix associés à b_1 et b_2 . (Il serait également possible de maximiser les profits comme le font Malinvaud (1982) et Nadiri (1982); ceci ne changerait que les niveaux des multiplicateurs de Lagrange).

Cependant, le producteur doit faire face à des contraintes technologique et budgétaire, de même qu'à un rationnement quantitatif sur sa production nette de biens de consommation (notée y_1).

La contrainte technologique est donnée par la fonction de production

$$F(b_1 , b_2 , -a_1 , -a_2) = 0 \qquad (1.1.2),$$

où a_1 et a_2 sont les vecteurs d'inputs.

La contrainte budgétaire s'écrit:

$$p_1a_1 + p_2a_2 = R \tag{1.1.3}$$

où R représente le montant des dépenses sur les inputs.

Finalement, la production nette de biens de consommation est rationnée de la façon suivante:

$$b_1 - a_1 = \bar{y}_1 \qquad (1.1.4).$$

Le problème du producteur consiste alors à maximiser (1.1.1) sous les contraintes (1.1.2) , (1.1.3) et (1.1.4) par la méthode du lagrangien L où

$$\begin{aligned} L = p_1 b_1 + p_2 b_2 - \phi\, F(b_1\,,\, b_2\,,\, -a_1\,,\, -a_2) \\ - \lambda\, [b_1 - a_1 - \bar{y}_1] \\ - \mu\, [p_1 a_1 + p_2 a_2 - R] \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Les conditions de 1er ordre sont:

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = p_1 - \phi \frac{\partial F}{\partial b_1} - \lambda \qquad = 0 \tag{1.1.6}$$,

$$\frac{\partial L}{\partial b_2} = p_2 - \phi \frac{\partial F}{\partial b_2} \qquad = 0 \tag{1.1.7}$$,

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = \phi \frac{\partial F}{\partial a_1} + \lambda - \mu p_1 \qquad = 0 \tag{1.1.8}$$,

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = \phi \frac{\partial F}{\partial a_2} - \mu p_2 \qquad = 0 \tag{1.1.9}$$,

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -F(b_1\,,\, b_2\,,\, -a_1\,,\, -a_2) \qquad = 0 \tag{1.1.10}$$,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -b_1 + a_1 + \bar{y}_1 \qquad = 0 \tag{1.1.11}$$,

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -p_1 a_1 - p_2 a_2 + R \qquad = 0 \tag{1.1.12}$$.

Ces relations peuvent encore s'écrire:

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = 0 \tag{1.1.13}$$

où $Z = [b_1 \;\; b_2 \;\; a_1 \;\; a_2 \;\; \lambda \;\; \phi \;\; \mu]'$.

Par le théorème des fonctions implicites, si la matrice $[\partial^2 L \, / \, \partial Z \partial Z]$ est de rang maximal, les conditions de 1er ordre impliqueront l'existence d'une fonction Ψ continûment dérivable telle que:

$$Z = \Psi(X) \qquad (1.1.14)$$

où $\qquad X = [p_1 \;\; p_2 \;\; \bar{y}_1 \;\; R]'$.

Dans ce cas, il sera possible de substituer (1.1.14) dans (1.1.13) qui deviendra vérifiée sur tout le voisinage V(X) définissant (1.1.14) .

Puisque $[\partial^2 L \, / \, \partial Z \partial Z]$ est de rang maximal, (voir la preuve à l'Annexe A.1), il existe alors des fonctions

$$b = b^* (p \, , \bar{y}_1 \, , R) \qquad b^* \in C^1 \qquad (1.1.15) \, ,$$

$$a = a^* (p \, , \bar{y}_1 \, , R) \qquad a^* \in C^1 \qquad (1.1.16) \, ,$$

$$\lambda = \lambda^* (p \, , \bar{y}_1 \, , R) \qquad \lambda^* \in C^1 \qquad (1.1.17) \, ,$$

$$\phi = \phi^* (p \, , \bar{y}_1 \, , R) \qquad \phi^* \in C^1 \qquad (1.1.18) \, ,$$

$$\mu = \mu^* (p \, , \bar{y}_1 \, , R) \qquad \mu^* \in C^1 \qquad (1.1.19) \, ,$$

continûment dérivables; de même, par (1.1.16), (1.1.3) s'écrit:

$$R = p' \, a^* (p \, , \bar{y}_1 \, , R) \qquad (1.1.20) \, .$$

Les différentielles de (1.1.15) , (1.1.16) et (1.1.20) sont:

$$db = \frac{\partial b}{\partial p} dp + \frac{\partial b}{\partial \bar{y}_1} d\bar{y}_1 + \frac{\partial b}{\partial R} dR \qquad (1.1.21) \, ,$$

$$da = \frac{\partial a}{\partial p} dp + \frac{\partial a}{\partial \bar{y}_1} d\bar{y}_1 + \frac{\partial a}{\partial R} dR \qquad (1.1.22) \, ,$$

$$dR = p'da + a'dp \qquad (1.1.23) \, .$$

L'examen de (1.1.20) permet également de déduire que:

$$p' \frac{\partial a}{\partial p} = -a',$$

$$p' \frac{\partial a}{\partial \bar{y}_1} = 0 ,$$

$$p' \frac{\partial a}{\partial R} = 1 .$$

En tenant compte de (1.1.23) , (1.1.21) et (1.1.22) peuvent aussi s'écrire:

$$db = B\ dp + \frac{\partial b}{\partial \bar{y}_1}\ d\bar{y}_1 + \frac{\partial b}{\partial R}\ p'da$$

$$da = A\ dp + \frac{\partial a}{\partial \bar{y}_1}\ d\bar{y}_1 + \frac{\partial a}{\partial R}\ p'da$$

où $B = \left[\frac{\partial b}{\partial p} + \frac{\partial b}{\partial R}\ a' \right]$ et $A = \left[\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial a}{\partial R}\ a' \right]$ représentent les matrices des effets de substitution.

De plus, si $\frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} = I$, (i.e. si la demande du marché est satisfaite soit par la production courante, soit par des variations dans les inventaires), et si $b_2 = \bar{b}_2$, alors,

$$\begin{aligned} db_1 - da_1 = {} & (B_{11} - A_{11})\ dp_1 + (B_{12} - A_{12})\ dp_2 \\ & + \left[\frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} \right] d\bar{y}_1 + \left[\frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} \right] p'da \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} d\bar{y}_1 = {} & (B_{11} - A_{11})\ dp_1 + (B_{12} - A_{12})\ dp_2 \\ & + d\bar{y}_1 + \left[\frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} \right] p'da \end{aligned}$$

pour tout dp_1 , dp_2 et p'da . Ceci implique que:

$$B_{11} = A_{11} ,$$
$$B_{12} = A_{12} ,$$
$$\frac{\partial b_1}{\partial R} = \frac{\partial a_1}{\partial R} .$$

Par ailleurs, $b_2 = \bar{b}_2$ implique que

$$B_{21} = 0 , B_{22} = 0 , \frac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial b_2}{\partial R} = 0 .$$

Ainsi, la symétrie de $[B - \mu A]$ se réduit à celle de

$$\begin{bmatrix} (1-\mu)A_{11} & (1-\mu)A_{12} \\ -\mu A_{21} & -\mu A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\mu) I & 0 \\ 0 & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} .$$

La fonction (1.1.16) conduit donc au système

$$\begin{bmatrix} da_1 \\ da_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial \bar{y}_1 \\ \partial a_2/\partial \bar{y}_1 \end{bmatrix} d\bar{y}_1 + \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial R \\ \partial a_2/\partial R \end{bmatrix} p'da \qquad (1.1.24)$$

caractérisé par une structure locale de Slutsky généralisée dont les propriétés sont:

i) $\begin{bmatrix} (\mu-1) I & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mu-1) I & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}$,

ii) $p'_1A_{11} = 0$ (puisque $p'B = 0$ et $B_{21} = 0$ impliquent $p'_1B_{11} = 0$) ,

iii) $p'A = 0$,

iv) $p'_1 \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} + p'_2 \frac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} = 0$,

v) $p_1' \dfrac{\partial a_1}{\partial R} = \mu$ (puisque $p'\partial b/\partial R = \mu$ et $\partial b_2/\partial R = 0$ impliquent $p_1'\partial b_1/\partial R = \mu$) ,

vi) $p_1' \dfrac{\partial a_1}{\partial R} + p_2' \dfrac{\partial a_2}{\partial R} = 1$,

vii) $$\zeta' \begin{bmatrix} (\mu - 1)A_{11} & (\mu - 1)A_{12} \\ \mu\, A_{12} & \mu\, A_{22} \end{bmatrix} \zeta < 0$$

pour tout $\zeta \neq \alpha \begin{bmatrix} p_1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Voir les démonstrations complètes de ces propriétés dans l'Annexe A.2) .

1.2 Modèle temporaire avec rationnement quantitatif

Dans cette section, la spécification du système (1.1.24) dans un cadre temporaire confère au modèle une réalité empirique car les décisions se prennent toujours dans de tels contextes.

Soit la partition suivante:

$b_1 = (b_{1t}', \tilde{b}_1')'$

$b_2 = (b_{2t}', \tilde{b}_2')'$

$a_1 = (a_{1t}', \tilde{a}_1')'$

$a_2 = (a_{2t}', \tilde{a}_2')'$

$p_1 = (p_{1t}', \gamma \tilde{p}_1')'$

$p_2 = (p_{2t}', \gamma \tilde{p}_2')'$

$\bar{y}_1 = (\bar{y}_{1t}', \tilde{\bar{y}}_1')'$

$R = R_t + \gamma \tilde{R}$

où les indices t et ~ définissent respectivement les variables courantes et les variables anticipées. $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ sont actualisés à t + 1 et γ représente le facteur d'actualisation.

Les expressions (1.1.1) , (1.1.2) , (1.1.3) et (1.1.4) deviennent alors:

$$Pr = p'_{1t}\, b_{1t} + p'_{2t}\, b_{2t} + \gamma\,(\tilde{p}'_1 \tilde{b}_1 + \tilde{p}'_2 \tilde{b}_2) \qquad (1.2.1)\,,$$

$$F(b_{1t}, b_{2t}, -a_{1t}, -a_{2t}; \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, -\tilde{a}_1, -\tilde{a}_2) = 0 \qquad (1.2.2)\,,$$

$$p'_{1t}\, a_{1t} + p'_{2t}\, a_{2t} + \gamma\,(\tilde{p}'_1 \tilde{a}_1 + \tilde{p}'_2 \tilde{a}_2) = R_t + \gamma \tilde{R} \qquad (1.2.3)\,,$$

$$b_{1t} - a_{1t} = \bar{y}_{1t} \qquad (1{,}2.4)\,,$$

$$\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1 = \tilde{\bar{y}}_1 \qquad (1.2.5)\,.$$

De plus, s'il existe un marché financier parfait, (1.2.3) est équivalent à

$$p'_{1t}\, a_{1t} + p'_{2t}\, a_{2t} + \gamma\, a_{0\,t+1} = R_t \qquad (1.2.6)$$

$$\tilde{p}'_1 \tilde{a}_1 + \tilde{p}'_2 \tilde{a}_2 - a_{0\,t+1} = \tilde{R} \qquad (1.2.7)$$

où $a_{0\,t+1}$ représente la valeur nominale à t + 1 d'un actif d'une période que le producteur peut acheter (vendre) en empruntant (prêtant) au temps t .

Dans ce contexte, $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ peuvent être perçus comme des prix actualisés anticipés tandis que $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ sont les demandes de facteurs planifiées.

Le problème temporaire du producteur se réduit alors à:

$$\begin{aligned} L = {} & p_{1t}\, b_{1t} + p_{2t}\, b_{2t} + \gamma\,(\tilde{p}_1 \tilde{b}_1 + \tilde{p}_2 \tilde{b}_2) \\ & - \phi\, F(b_{1t}, b_{2t}, -a_{1t}, -a_{2t}; \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, -\tilde{a}_1, -\tilde{a}_2) \\ & - \lambda\, [b_{1t} - a_{1t} - \bar{y}_{1t}] \\ & - \rho\, \left[\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1 - \tilde{\bar{y}}_1 \right] \end{aligned}$$

$$- \mu \left[p'_{1t}\, a_{1t} + p'_{2t}\, a_{2t} + \gamma a_{0\,t+1} - R_t \right]$$

$$- \upsilon \left[\tilde{p}'_1 \tilde{a}_1 + \tilde{p}'_2 \tilde{a}_2 - a_{0\,t+1} - \tilde{R} \right] \qquad (1.2.8)\ .$$

Les conditions de 1er ordre de l'optimum temporaire sont donc:

$$\frac{\partial L}{\partial b_{1\,t}} = p_{1t} - \phi \frac{\partial F}{\partial b_{1\,t}} - \lambda = 0 \qquad (1.2.9)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_{2\,t}} = p_{2t} - \phi \frac{\partial F}{\partial b_{2\,t}} = 0 \qquad (1.2.10)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_{1\,t}} = \phi \frac{\partial F}{\partial a_{1\,t}} + \lambda - \mu\, p_{1t} = 0 \qquad (1.2.11)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_{2\,t}} = \phi \frac{\partial F}{\partial a_{2\,t}} - \mu\, p_{2t} = 0 \qquad (1.2.12)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_{o\ t+1}} = - \mu\, \gamma + \upsilon = 0 \qquad (1.2.13)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{b}_1} = \gamma\, \tilde{p}_1 - \phi \frac{\partial F}{\partial \tilde{b}_1} - \rho = 0 \qquad (1.2.14)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{b}_2} = \gamma\, \tilde{p}_2 - \phi \frac{\partial F}{\partial \tilde{b}_2} = 0 \qquad (1.2.15)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{a}_1} = \phi \frac{\partial F}{\partial \tilde{a}_1} + \rho - \upsilon\, \tilde{p}_1 = 0 \qquad (1.2.16)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{a}_2} = \phi \frac{\partial F}{\partial \tilde{a}_2} - \upsilon\, \tilde{p}_2 = 0 \qquad (1.2.17)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = - F(b_{1t}\, ,\, b_{2t}\, ,\, -a_{1t}\, ,\, -a_{2t}\, ;\, \tilde{b}_1\, ,\, \tilde{b}_2\, ,\, -\tilde{a}_1\, ,\, -\tilde{a}_2\,) = 0 \qquad (1.2.18)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\, b_{1t} + a_{1t} + \bar{y}_{1t} = 0 \qquad (1.2.19)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = -\, \tilde{b}_1 + \tilde{a}_1 - \tilde{\bar{y}}_1 = 0 \qquad (1.2.20)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -\, p_{1t}' a_{1t} - p_{2t}' a_{2t} - \gamma a_{0\,t+1} + R_t = 0 \qquad (1.2.21)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \upsilon} = -\, \tilde{p}_1' \tilde{a}_1 - \tilde{p}_2' \tilde{a}_2 + a_{0\,t+1} + \tilde{R} = 0 \qquad (1.2.22)\ .$$

Ces conditions peuvent aussi s'écrire:

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = 0 \qquad (1.2.23)$$

où $Z = [\ b_{1t}\ b_{2t}\ a_{1t}\ a_{2t}\ a_{0\,t+1}\ \tilde{b}_1\ \tilde{b}_2\ \tilde{a}_1\ \tilde{a}_2\ \phi\ \lambda\ \rho\ \mu\ \upsilon\ ]'$.

Comme dans la section précédente, si $[\partial^2 L\ /\ \partial Z \partial Z]$ est de rang maximal,il sera possible d'obtenir une fonction Ψ continûment dérivable telle que

$$Z = \Psi\ (X) \qquad (1.2.24)$$

où $X = [\ p_{1t} p_{2t} \gamma \tilde{p}_1\ \gamma \tilde{p}_2\ \bar{y}_1\ R_t + \gamma \tilde{R}\ ]'$.

Puisque $[\partial^2 L\ /\ \partial Z \partial Z]$ est de rang maximal (voir la preuve dans l'Annexe A.3) , il devient possible de représenter ainsi le comportement présent:

$$a_{1t} = a_{1t}^{*}\Big[\, p_{1t}\,,\, p_{2t}\,,\, \gamma \tilde{p}_1\,,\, \gamma \tilde{p}_2\,,\, \bar{y}_1\,,\, R_t + \gamma \tilde{R}\, \Big] \qquad (1.1.25)$$

$$a_{2t} = a_{2t}^{*}\Big[\, p_{1t}\,,\, p_{2t}\,,\, \gamma \tilde{p}_1\,,\, \gamma \tilde{p}_2\,,\, \bar{y}_1\,,\, R_t + \gamma \tilde{R}\, \Big] \qquad (1.1.26)$$

$$\begin{aligned} a_{0\,t+1} = {} & \tilde{p}_1' \tilde{a}_1^{*}\Big[\, p_{1t}\,,\, p_{2t}\,,\, \gamma \tilde{p}_1\,,\, \gamma \tilde{p}_2\,,\, \bar{y}_1\,,\, R_t + \gamma \tilde{R}\, \Big] \\ & + \tilde{p}_2' \tilde{a}_2^{*}\Big[\, p_{1t}\,,\, p_{2t}\,,\, \gamma \tilde{p}_1\,,\, \gamma \tilde{p}_2\,,\, \bar{y}_1\,,\, R_t + \gamma \tilde{R}\, \Big] - \tilde{R} \end{aligned} \qquad (1.2.27)\ .$$

Ces relations possèdent une structure locale de Slutsky généralisée.

En effet, la différentielle de (1.2.25) , (1.2.26) et (1.2.27) est:

$$d\hat{a} = \hat{A}\, d\hat{p} + \frac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{y}_1}\, d\bar{y}_1 + \frac{\partial \hat{a}}{\partial R}\, \hat{p}' d\hat{a} \tag{1.2.28}$$

où $\hat{a} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{0\,t+1} \end{bmatrix}$, $\hat{p} = \begin{bmatrix} p_{1t} \\ p_{2t} \\ \gamma \end{bmatrix}$

et $\hat{A} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \tilde{p}_1' & 0 & \tilde{p}_2' \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_1 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_2 \end{bmatrix}$.

Le système (1.2.28) est caractérisé par les relations:

$$\begin{bmatrix} (\mu-1)I & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \hat{A} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \tilde{p}_1' & 0 & \tilde{p}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mu-1)I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_1 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_2 \end{bmatrix}$$

qui impliquent les propriétés suivantes:

i) $\hat{p}' \dfrac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{y}_1} = 0$

ii) $\hat{p}' \dfrac{\partial \hat{a}}{\partial R_t} = 1$

iii) $\hat{p}' \hat{A} = 0$

iv) $T\hat{A} = \hat{A}' T'$

v) $\quad \hat{\zeta}' T\hat{A}\hat{\zeta} < 0$, pour $\mu > 1$, tout $\hat{\zeta} \neq \theta\hat{p}$, $\theta \in \mathbb{R} \quad T = \begin{bmatrix} (\mu-1)I & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix}$.

(Voir les démonstrations complètes de ces propriétés dans l'Annexe A.4) .

1.3 Cas particulier du modèle

Dans cette section, l'exogénéité de la production du bien 1 est envisagée. Il s'ensuit alors que $b_1 = \bar{b}_1$, $d\bar{y}_1 = -da_1$ et que da_1 est exogène. Le système (1.1.24) devient ainsi:

$$da_2 = A_{22}\, dp_2 - \frac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} da_1 + \frac{\partial a_2}{\partial R} p'da \tag{1.3.1}$$

caractérisé par une structure locale de Slutsky et par les propriétés suivantes:

i) $\quad A_{22} = A_{22}'$,

ii) $\quad A_{22}p_2 = 0$,

iii) $\quad p_2' \dfrac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} = 0$,

iv) $\quad p_2' \dfrac{\partial a_2}{\partial R} = 1$,

v) $\quad \zeta_2' A_{22} \zeta_2 < 0 \quad$ pour tout $\zeta_2 \neq \theta p_2$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Sous sa forme temporaire, (1.3.1) s'écrit

$$da^* = A^*\, dp^* + \frac{\partial a^*}{\partial \bar{y}_1} da_{1t} + \frac{\partial a^*}{\partial R} p^{*\prime}da^* \tag{1.3.2}$$

où $\quad a^* = \begin{bmatrix} a_{2t} \\ a_{0\,t+1} \end{bmatrix} \quad$ et $\quad p^* = \begin{bmatrix} p_{2t} \\ \gamma \end{bmatrix}$.

Le système (1.3.2) se caractérise également par une structure locale de Slutsky et possède ces propriétés:

vi) $\quad A^* = A^{*\prime}$,

vii) $\quad p^{*\prime} A^* = 0$,

viii) $\quad p^{*\prime} \dfrac{\partial a^*}{\partial \bar{y}_1} = 0$,

ix) $\quad p^{*\prime} \dfrac{\partial a^*}{\partial R_t} = 1$,

x) $\quad \zeta^{*\prime} A^* \ \zeta^* < 0$ pour tout $\zeta^* \neq \theta p^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(Voir la démonstration à l'Annexe A.5).

1.4 Paramétrisation du modèle temporaire

Le but de cette section est de donner une forme structurelle au système (1.2.28) qui le rendra à la fois estimable et testable.

La première étape consiste à agréger le modèle à l'ensemble des producteurs afin d'obtenir la compatibilité avec les données utilisées. La méthode d'agrégation employée peut être jugée similaire à celle décrite dans les systèmes de demande de biens de consommation de Barten (1977) et de Bronsard et Salvas–Bronsard (1984).

Il s'agit ensuite de paramétriser le modèle à la manière de Rotterdam telle que développée par Barten (1967), Barnett (1979) et Theil (1980).

Soit P et P^{-1} des matrices diagonales telles que $P\iota = \hat{p}$ et $d\log \hat{p} = P^{-1}d\hat{p}$ ou ι est un vecteur composé de uns. Après la paramétrisation, la forme différentielle de (1.2.27) devient une forme de différences finies et le nouveau système peut s'écrire:

$$Pd\hat{a} = c_{11}d\log\hat{p} + c_{12}Pk_1Y + c_1\iota'P'd\hat{a} + Mdz + \delta + \varepsilon \tag{1.4.1}$$

où $c_{11} = P\hat{A}P$ représente une transformation de la matrice des effets de substitution, c_{12} une transformation du vecteur des effets de débordement, $c_1 = P\partial\hat{a}/\partial R$ une transformation du vecteur des effets contraints de richesse et M la matrice des coefficients contraints associés aux variables retardées affectant les anticipations (vecteur z). En effet, les prix et les revenus anticipés $\tilde{p}$ et $\tilde{R}$ étant difficilement observables, on les a supposés dépendants de certaines variables explicatives retardées. Il faut noter que Pk_1Y remplace $P\,\dfrac{\partial\hat{a}}{\partial\bar{y}_1}\,d\bar{y}_1$ car les données disponibles n'existent que sous forme de scalaire. Par conséquent, Y représente le produit national brut. Enfin, un vecteur δ d'ordonnées à l'origine et un vecteur ϵ d'erreurs aléatoires ont été ajoutés comme dans Barten (1967) et Theil (1980).

Il semble presque inutile d'énoncer que ce système paramétrisé possède les mêmes propriétés que celui dont il est issu.

TABLEAU I

Résultats de l'estimation du modèle (1.2.28)

	Taux d'escompte	Taux de salaire	Prix de la construction non résidentielle	Prix de la machinerie et de l'équipement	Indice de prix de vente dans l'industrie	Propension marginale à dépenser	Ordonnée à l'origine	(1)	(2)	(3)
mprunts nets	0,0998 (0,1437)	0,0595 (0,0352) **	0,0041 (0,0579)	−0,1193 (0,0776) *	−0,0441 (0,1260)	0,2425 (0,0375) **	−0,0211 (0,0030) **	0,1161 (0,1254)	0,1052 (0,1824)	−0,3227 (0,1691) **
mploi	0,0595 (0,0352) **	−0,2940 (0,0268) **	0,0048 (0,0156)	0,0365 (0,0209) **	0,1932 (0,0420) **	0,1599 (0,0269) **	0,0027 (0,0021)	0,0009 (0,0893)	−0,6322 (0,1268) **	−0,1992 (0,1152) **
vestissement construction non sidentielle	0,0041 (0,0579)	0,0048 (0,0156)	0,0844 (0,0699)	−0,0725 (0,0527) *	−0,0208 (0,0705)	0,0269 (0,0161) **	−0,0038 (0,0014) **	0,0841 (0,0540) *	0,7096 (0,0783) **	−0,1253 (0,0714) **
vestissement machinerie équipement	−0,1193 (0,0776) *	0,0365 (0,0209) **	−0,0725 (0,0527) *	−0,0139 (0,0796)	0,1691 (0,0802) **	0,1341 (0,0216) **	0,0037 (0,0018) **	−0,2998 (0,0717) **	0,2209 (0,1037) **	0,0292 (0,0954)
ventaires	−0,0441 (0,1260)	0,1932 (0,0420) **	−0,0208 (0,0705)	0,1691 (0,0802) **	−0,2974 (0,1658) **	0,4366 (0,0445) **	0,0185 (0,0036) **	0,0987 (0,1497)	−0,4035 (0,2174) **	0,6180 (0,1993) **

s écarts-types sont entre parenthèses. *: significatif à 90% , **: significatif à 95% .

$_{mc0}$ = [0,7667 0,9554 0,9971 0,9951 0,8784].

W_{mc0} = [1,3159 2,1794 1,8057 1,9519 1,6681].

= 0,9566 et $\chi^2 = 9,2162$.

) Emploi retardé d'un trimestre.

) Investissement en construction non résidentielle retardé d'un trimestre.

) Indice de prix de vente dans l'industrie retardé d'un trimestre.

TABLEAU I (suite)

	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	PNB
nprunts nets	–0,0153 (0,1326)	0,4563 (0,1640) **	–0,0740 (0,1699)	–0,0032 (0,0627)	0,0021 (0,0553)	–1,0350 (0,2164) **	0,0438 (0,2235)	–0,1376 (0,3084)	–0,5908 (0,3256) **	–0,0083 (0,0030) **
nploi	0,6383 (0,0906) **	0,3140 (0,1129) **	0,0413 (0,1199)	0,0286 (0,0453)	0,2184 (0,0381) **	0,0620 (0,1485)	–0,0324 (0,1584)	0,1459 (0,2204)	0,1098 (0,2333)	0,0006 (0,0021)
vestissement construction non sidentielle	0,3536 (0,0587) **	0,1013 (0,0699) *	0,1010 (0,0730) *	0,0163 (0,0272)	0,1353 (0,0239) **	0,2994 (0,0903) **	–0,1990 (0,0997) **	–0,1617 (0,1299)	0,3107 (0,1384) **	0,0059 (0,0013) **
vestissement machinerie équipement	–0,0137 (0,0758)	–0,2544 (0,0931) **	0,1145 (0,0980)	–0,1245 (0,0361) **	0,0019 (0,0314)	0,6479 (0,1219) **	0,0603 (0,1290)	0,2234 (0,1756)	0,2554 (0,1860) *	0,0130 (0,0017) **
ventaires	–0,9629 (0,1579) **	–0,6172 (0,1932) **	–0,1828 (0,1998)	0,0828 (0,0751)	–0,3578 (0,0657) **	0,0257 (0,2522)	0,1272 (0,2675)	–0,0700 (0,3666)	–0,0851 (0,3888)	–0,0113 (0,0035) **

Emploi retardé de quatre trimestres.
Investissement en construction non résidentielle retardé de quatre trimestres.
Indice de prix de vente dans l'industrie retardé de quatre trimestres.
Taux de salaire retardé d'un trimestre.
Taux de salaire retardé de quatre trimestres.
Investissement en machinerie et équipement retardé d'un trimestre.
) Investissement en machinerie et équipement retardé de quatre trimestres.
) Taux d'escompte retardé d'un trimestre.
) Taux d'escompte retardé de quatre trimestres.

TABLEAU II

Résultats de l'estimation du modèle (1.3.2)

	Taux d'escompte	Prix de la construction non résidentielle	Prix de la machinerie et de l'équipement	Taux de salaire	Effets de débordement	Propension marginale à dépenser	Ordonnée à l'origine	(1)	(2)	(3)
Emprunts nets	-0,0829 (0,3097)	0,0273 (0,1052)	-0,0023 (0,1183)	0,0490 (0,0368) *	-0,1991 (0,1882)	0,2302 (0,0392) **	-0,0211 (0,0031) **	0,1169 (0,1255)	0,0902 (0,1826)	-0,2498 (0,1930) *
Investissement en construction non résidentielle	0,0273 (0,1052)	0,0953 (0,0752)	-0,0569 (0,0540)	0,0041 (0,0157)	-0,0130 (0,0799)	0,0275 (0,0164) **	-0,0040 (0,0014) **	0,0843 (0,0539) *	0,7092 (0,0781) **	-0,1386 (0,0801) **
Investissement en machinerie et équipement	-0,0023 (0,1183)	-0,0569 (0,0540)	-0,0267 (0,0798)	0,0399 (0,0208) **	0,2747 (0,1052) **	0,1408 (0,0218) **	0,0033 (0,0017) **	-0,3020 (0,0709) **	0,2344 (0,1028) **	-0,0440 (0,1062)
Emploi	0,0490 (0,0368) *	0,0041 (0,0157)	0,0399 (0,0208) **	-0,2961 (0,0269) **	0,1147 (0,1186)	0,1572 (0,0271) **	0,0029 (0,0022) *	0,0073 (0,0894)	-0,6527 (0,1296) **	-0,1535 (0,1319)

Les écarts-types sont entre parenthèses. *: significatif à 90% , **: significatif à 95% .

$R^2_{mc0} = [\ 0{,}7701 \quad 0{,}9971 \quad 0{,}9952 \quad 0{,}9558\ ].$

$DW_{mc0} = [\ 1{,}3159 \quad 1{,}8057 \quad 1{,}9519 \quad 2{,}1794\ ].$

$F = 0{,}9580$ et $\chi^2 = 5{,}5781$.

Les variables retardées sont les mêmes que pour le Tableau I.

TABLEAU II (suite)

	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	PNB
emprunts nets	–0,0228 (0,1338)	0,4648 (0,1644) **	–0,0911 (0,1716)	–0,0084 (0,0632)	–0,0005 (0,0554)	–1,0422 (0,2151) **	0,0803 (0,2265)	–0,1412 (0,3066)	–0,5976 (0,3251) **	–0,0088 (0,0030) **
Investissement en construction non résidentielle	0,3551 (0,0586) **	0,1024 (0,0699) *	0,0920 (0,0741)	0,0165 (0,0272)	0,1354 (0,0239) **	0,2961 (0,0902) **	–0,1970 (0,0993) **	–0,1644 (0,1294)	0,3082 (0,1380) **	0,0058 (0,0013) **
Investissement en machinerie et équipement	–0,0006 (0,0754)	–0,2484 (0,0922) **	0,0978 (0,0975)	–0,1222 (0,0357) **	0,0057 (0,0312)	0,6333 (0,1209) **	0,0449 (0,1278)	0,2128 (0,1736)	0,2572 (0,1838) *	0,0130 (0,0017) **
Emploi	0,6202 (0,0939) **	0,2976 (0,1150) **	0,0513 (0,1204)	0,0293 (0,0451)	0,2119 (0,0390) **	0,0860 (0,1520)	–0,0162 (0,1593)	0,1609 (0,2205)	0,0984 (0,2329)	0,0006 (0,0021)

CONCLUSION

Dans la partie théorique de ce mémoire, le problème du producteur a été reformulé dans un contexte temporaire afin d'obtenir un système complet de demande de facteurs de production physiques et financier. Ce système a ensuite été caractérisé par une structure locale de Slutsky. La possibilité de rationnements quantitatifs sur la production de biens de consommation et l'exogénéité des inventaires ont également été considérés.

Dans la partie empirique, le système a été estimé par moindres carrés généralisés à partir de données canadiennes trimestrielles non désaisonnalisées. Les résultats obtenus permettent de conclure que les restrictions imposées au modèle ne sont pas rejetées par les données et que le modèle fournit une bonne représentation du comportement du producteur.

BIBLIOGRAPHIE

ANDO, A.K., F. MODIGLIANI, R. RASCHE et S.J. TURNOVSKI, 1974, "On the Role of Expectations of Price and Technological Change in an Investment Function", *International Economic Review*, 15, 384–414.

BARNETT, W.A., 1979, "Theoretical Foundations for the Rotterdam Model", *Review of Economic Studies*, 46, 109–129.

BARTEN, A.P., 1967, "Evidence on the Slutsky Conditions for Demand Equations", *The Review of Economics and Statistic*, 49, 77–84.

BARTEN, A.P., 1977, "The Systems of Consumer Demand Function Approach: A Review", *Econometrica*, 45, 23–51.

BERNDT, E. et C. MORRISON, 1981, "Short Run Labour Productivity in a Dynamic Model", *Journal of Econometrics*, 16, 339–365.

BRONSARD, C. et L. SALVAS–BRONSARD, 1983, "Théorie du producteur dans un contexte temporaire", *Recherches economiques de Louvain*, 49, 139–154.

BRONSARD, C. et L. SALVAS–BRONSARD, 1984, On price exogeneity in complete demand systems", *Journal of Econometrics*, 24, 235–249.

BRONSARD, C. et L. SALVAS–BRONSARD, 1986, "Commodity and Asset Demand with and without Quantity Constraints in the Labor Market", *Journal of Applied Econometrics*, 1, 185–208.

BRONSARD, C. et L. SALVAS–BRONSARD, 1988, "A Skeleton Key to the Econometrics of the Producer's Behavior", *Cahier 8810*, Département de sciences économiques, Université de Montréal

COEN, R.M. et B.G. HICKMAN, 1970, "Constrained Joint Estimation of Factor Demand and Production Functions", *Review of Economics and Statistics*, 52, 287–300.

DIEWERT, W.E. et T.J. WALES, 1987, "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", *Econometrica*, 55, 43–69.

EPSTEIN, L.G. et M.G.S. DENNY, 1983, "The Multivariate Flexible Accelerator Model: its Empirical Restrictions and an Application to U.S. Manufacturing", *Econometrica*, 51, 647–675.

GOULD, J.P., 1968, "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm", *Review of Economic Studies*, 35, 47–55.

GRANDMONT, J.M., 1983, *Money and Value: a Reconsideration of Classical and Neoclassical Monetary Theories*, Cambridge University Press.

GROSSMAN, H.I., 1972, "A Choice – Theoretic Model of an Income – Investment Accelerator", *American Economic Review*, 62, 630–641.

LUCAS, R., 1967, "Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator", *International Economic Review*, 8, 78–85.

MALINVAUD, E., 1982, *Leçons de théorie microéconomique*, Dunod, Paris, 4e édition.

MEESE, R., 1980, "Dynamic Factor Demand Schedules for Labour and Capital Under Rational Expectations", *Journal of Econometrics*, 14, 141–158.

MORTENSEN, D., 1973, "Generalized Costs of Adjustment and Dynamic Factor Demand Theory", *Econometrica*, 41, 657–666.

NADIRI, M.I., 1982, "Producers Theory", in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, K.J. Arsow and M.D. Intritigator ed., North–Holland Publishing Compagny.

NICKELL, J., 1977, "Uncertainty and Lags in the Investment Decisions of Firms", *Review of Economic Studies*, 44, 249–263.

POLEMARCHAKIS, H.M., 1983, "Expectations, Demand and Observability", *Econometrica*, 51, 320–331.

THEIL, H., 1980, *The System-Wide Approach to Microeconomics*, The University of Chicago Press, Chicago.

TREADWAY, A., 1969, "On Rational Entrepreneurial Behavior and the Demand for Investment", *Review of Economic Studies*, 36, 227–239.

ZELLNER, A, 1962, "An efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Asymptotic Bias", *Journal of American Statistics Association* ,57, 348–368.

ANNEXES

Annexe A.1

Lemme: la matrice $[\partial^2 L / \partial Z\partial Z]$ est de rang maximal. Preuve par l'absurde: si la matrice $[\partial^2 L / \partial Z\partial Z]$ n'est pas de rang maximal, il existe un vecteur $\zeta^{**} \neq 0$ tel que $[\partial^2 L / \partial Z\partial Z]\ \zeta^{**} = 0$.

Dans cette relation, la jacobienne $(\partial^2 L / \partial Z\partial Z)$ s'écrit:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Z\partial Z} = \begin{bmatrix} -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_1^2} & -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_1\partial b_2} & \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_1\partial a_1} & \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_1\partial a_2} & -I_1 & \dfrac{-\partial F}{\partial b_1} & 0 \\ -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_2\partial b_1} & -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_2^2} & \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_2\partial a_1} & \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_2\partial a_2} & 0 & \dfrac{-\partial F}{\partial b_2} & 0 \\ \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1\partial b_1} & \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1\partial b_2} & -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} & -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_1\partial a_2} & I_1 & \dfrac{\partial F}{\partial a_1} & -p_1 \\ \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_2\partial b_1} & \phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_2\partial b_2} & -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_2\partial a_1} & -\phi\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_2^2} & 0 & \dfrac{\partial F}{\partial a_2} & -p_2 \\ -I_1 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left[\dfrac{\partial F}{\partial b_1}\right]' & -\left[\dfrac{\partial F}{\partial b_2}\right]' & \left[\dfrac{\partial F}{\partial a_1}\right]' & \left[\dfrac{\partial F}{\partial a_2}\right]' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1' & -p_2' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou, en changeant la notation,

$$F^{**} = \begin{bmatrix} -\phi F_{11} & -\phi F_{12} & \phi F_{13} & \phi F_{14} & -I_1 & -F_1 & 0 \\ -\phi F_{21} & -\phi F_{22} & \phi F_{23} & \phi F_{24} & 0 & -F_2 & 0 \\ \phi F_{31} & \phi F_{32} & -\phi F_{33} & -\phi F_{34} & I_1 & F_3 & -p_1 \\ \phi F_{41} & \phi F_{42} & -\phi F_{43} & -\phi F_{44} & 0 & F_4 & -p_2 \\ -I_1 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F_1' & -F_2' & F_3' & F_4' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1' & -p_2' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \zeta^{**} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \theta \\ \zeta_6 \end{bmatrix} .$$

$F^{**}\ \zeta^{**} = 0$ implique que

$$- \phi F_{11}\zeta_1 - \phi F_{12}\zeta_2 + \phi F_{13}\zeta_3 + \phi F_{14}\zeta_4 - \zeta_5 - F_1\ \theta = 0 \qquad (A.1.1)$$
$$- \phi F_{21}\zeta_1 - \phi F_{22}\zeta_2 + \phi F_{23}\zeta_3 + \phi F_{24}\zeta_4 - F_2\ \theta = 0 \qquad (A.1.2)$$
$$\phi F_{31}\zeta_1 + \phi F_{32}\zeta_2 - \phi F_{33}\zeta_3 - \phi F_{34}\zeta_4 + \zeta_5 + F_3\ \theta = 0 \qquad (A.1.3)$$
$$\phi F_{41}\zeta_1 + \phi F_{42}\zeta_2 - \phi F_{43}\zeta_3 - \phi F_{44}\zeta_4 + F_4\ \theta = 0 \qquad (A.1.4)$$
$$- \zeta_1 + \zeta_3 = 0 \qquad (A.1.5)$$
$$- F'_1\zeta_1 - F'_2\zeta_2 + F'_3\zeta_3 + F'_4\zeta_4 = 0 \qquad (A.1.6)$$
$$- p'_1\zeta_3 - p'_2\zeta_4 = 0 \qquad (A.1.7)\ .$$

Les relations (A.1.1) , (A.1.2) , (A.1.3) et (A.1.4) peuvent s'écrire:

$$F^*\zeta^* + \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta_5 + \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \zeta_6 = 0 \qquad (A.1.8)$$

$$\text{où } F^* = \begin{bmatrix} -\phi F_{11} & -\phi F_{12} & \phi F_{13} & \phi F_{14} \\ -\phi F_{21} & -\phi F_{22} & \phi F_{23} & \phi F_{24} \\ \phi F_{31} & \phi F_{32} & -\phi F_{33} & -\phi F_{34} \\ \phi F_{41} & \phi F_{42} & -\phi F_{43} & -\phi F_{44} \end{bmatrix} \quad \text{et } \zeta^* = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} .$$

En prémultipliant (A.1.8) par $\zeta^{*'}$, on obtient

$$\zeta^{*'}F^{*}\zeta^{*} + \zeta^{*'} \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta_5 + \zeta^{*'} \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \theta + \zeta^{*'} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \zeta_6 = 0 \qquad \text{(A.1.9)},$$

ou

$$\zeta^{*'}F^{*}\zeta^{*} + \zeta^{*'} \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \theta - \zeta_1'\zeta_5 + \zeta_3'\zeta_5 - \zeta_3'p_1\zeta_6 - \zeta_4'p_2\zeta_6 = 0 \qquad \text{(A.1.10)}$$

qui se réduit consécutivement à:

i) $\zeta^{*'}F^{*}\zeta^{*} - \zeta_1'\zeta_5 + \zeta_3'\zeta_5 - \zeta_3'p_1\zeta_6 - \zeta_4'p_2\zeta_6 = 0$ par (A.1.6)
ii) $\zeta^{*'}F^{*}\zeta^{*} - \zeta_3'p_1\zeta_6 - \zeta_4'p_2\zeta_6 = 0$ par (A.1.5)
iii) $\zeta^{*'}F^{*}\zeta^{*} = 0$ par (A.1.7)

ce dernier résultat est impossible, (par A.1.6 $F^{*}\zeta^{*} = 0$), à moins que ζ^{*} soit nul.

Dans le cas où ζ^{*} est nul, (A.1.8) devient

$$\begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta_5 + \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \zeta_6 = 0 \qquad \text{(A.1.11)}.$$

Or, l'examen de (A.1.2) permet de conclure que $\theta = 0$. Dans (A.1.11), $\theta = 0$ implique que $\zeta_5 = 0$ et $\zeta_6 = 0$. Il en résulte que $\zeta^{**} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Annexe A.2

Démonstrations des propriétés.

Soit $F^{**}J = -G$ (A.2.1)

où F^{**} est la matrice de l'Annexe A.1 ,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial p_1} & \frac{\partial b_1}{\partial p_2} & \frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial b_1}{\partial R} \\ \frac{\partial b_2}{\partial p_1} & \frac{\partial b_2}{\partial p_2} & \frac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial b_2}{\partial R} \\ \frac{\partial a_1}{\partial p_1} & \frac{\partial a_1}{\partial p_2} & \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_1}{\partial R} \\ \frac{\partial a_2}{\partial p_1} & \frac{\partial a_2}{\partial p_2} & \frac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_2}{\partial R} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} & \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial R} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p_1} & \frac{\partial \phi}{\partial p_2} & \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \phi}{\partial R} \\ \frac{\partial \mu}{\partial p_1} & \frac{\partial \mu}{\partial p_2} & \frac{\partial \mu}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \mu}{\partial R} \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial b_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial b_1 \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b_1 \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial b_1 \partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial b_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial b_2 \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b_2 \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial b_2 \partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ -\mu I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1' & -a_2' & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En postmultipliant (A.2.1) par la matrice:

$$L = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \\ a_1' & a_2' & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

on obtient

$$F^{**}\, JL = -GL \tag{A.2.2}$$

$$\text{où } GL = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ -\mu I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\text{et } JL = \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial b_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial b_1}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial b_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial b_1}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial b_1}{\partial R} \\
\dfrac{\partial b_2}{\partial p_1} + \dfrac{\partial b_2}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial b_2}{\partial p_2} + \dfrac{\partial b_2}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial b_2}{\partial R} \\
\dfrac{\partial a_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial a_1}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial a_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial a_2}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial R} \\
\dfrac{\partial a_2}{\partial p_1} + \dfrac{\partial a_2}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial a_2}{\partial p_2} + \dfrac{\partial a_2}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial R} \\
\dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} \\
\dfrac{\partial \phi}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \phi}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial \phi}{\partial p_2} + \dfrac{\partial \phi}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial \phi}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial R} \\
\dfrac{\partial \mu}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \mu}{\partial R}\,a_1' & \dfrac{\partial \mu}{\partial p_2} + \dfrac{\partial \mu}{\partial R}\,a_2' & \dfrac{\partial \mu}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \mu}{\partial R}
\end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
B_{11} & B_{12} & \partial b_1/\partial \bar{y}_1 & \partial b_1/\partial R \\
B_{21} & B_{22} & \partial b_2/\partial \bar{y}_1 & \partial b_2/\partial R \\
A_{11} & A_{12} & \partial a_1/\partial \bar{y}_1 & \partial a_1/\partial R \\
A_{21} & A_{22} & \partial a_2/\partial \bar{y}_1 & \partial a_2/\partial R \\
\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \partial \lambda/\partial \bar{y}_1 & \partial \lambda/\partial R \\
\dfrac{\partial \phi^c}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \phi^c}{\partial p_2} & \dfrac{\partial \phi}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial R} \\
\dfrac{\partial \mu^c}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \mu^c}{\partial p_2} & \dfrac{\partial \mu}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \mu}{\partial R}
\end{bmatrix} .
$$

La 5e ligne de (A.2.2) donne les relations:

$$- B_{11} + A_{11} = 0$$
$$- B_{12} + A_{12} = 0$$

$$- \frac{\partial b_1}{\partial \overline{y}_1} + \frac{\partial a_1}{\partial \overline{y}_1} = -I_1$$

$$- \frac{\partial b_1}{\partial R} + \frac{\partial a_1}{\partial R} = 0$$

ou $A_{11} = B_{11}$ (A.2.3) ,

$A_{12} = B_{12}$ (A.2.4) ,

$$\frac{\partial b_1}{\partial \overline{y}_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \overline{y}_1} = I_1 \qquad (A.2.5) ,$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial R} = \frac{\partial a_1}{\partial R} \qquad (A.2.6) .$$

Par ailleurs, la 7e ligne de (A.2.2) peut s'écrire:

$$- p_1' A_{11} - p_2' A_{21} \quad = 0 \qquad (A.2.7) ,$$
$$- p_1' A_{12} - p_2' A_{22} \quad = 0 \qquad (A.2.8) ,$$

$$- p_1' \frac{\partial a_1}{\partial \overline{y}_1} - p_2' \frac{\partial a_2}{\partial \overline{y}_1} \quad = 0 \qquad (A.2.9) ,$$

$$- p_1' \frac{\partial a_1}{\partial R} - p_2' \frac{\partial a_2}{\partial R} \quad = -1 \qquad (A.2.10) ,$$

ou $p'A = 0$ (A.2.11) ,

$$p' \frac{\partial a}{\partial \overline{y}_1} = 0 \qquad (A.2.12) ,$$

$$p' \frac{\partial a}{\partial R} = 1 \qquad (A.2.13) .$$

De plus, l'examen de la 6e ligne de (A.2.2) permet d'obtenir les relations suivantes:

$$F_1' B_{11} + F_2' B_{21} - F_3' A_{11} - F_4' A_{21} \qquad = 0$$
$$F_1' B_{12} + F_2' B_{22} - F_3' A_{21} - F_4' A_{22} \qquad = 0$$

$$F_1' \frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} + F_2' \frac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} - F_3' \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} - F_4' \frac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} \qquad = 0$$

$$F_1' \frac{\partial b_1}{\partial R} + F_2' \frac{\partial b_2}{\partial R} - F_3' \frac{\partial a_1}{\partial R} - F_4' \frac{\partial a_2}{\partial R} \qquad = 0\,.$$

En utilisant les conditions de 1er ordre (1.1.16) , (1.1.7) , (1.1.8) et (1.1.9) , ces relations deviennent:

$$(p_1 - \lambda)' B_{11} + p_2' B_{21} + (\lambda - \mu p_1)' A_{11} - \mu p_2' A_{21} = 0$$
$$(p_1 - \lambda)' B_{12} + p_2' B_{22} + (\lambda - \mu p_1)' A_{12} - \mu p_2' A_{22} = 0$$

$$(p_1 - \lambda)' \frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} + p_2' \frac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} + (\lambda - \mu p_1)' \frac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} - \mu p_2' \frac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} = 0$$

$$(p_1 - \lambda)' \frac{\partial b_1}{\partial R} + p_2' \frac{\partial b_2}{\partial R} + (\lambda - \mu p_1)' \frac{\partial a_1}{\partial R} - \mu p_2' \frac{\partial a_2}{\partial R} = 0\,,$$

et se réduisent finalement à:

$$p_1' B_{11} + p_2' B_{21} = 0 \qquad \text{par (A.2.3) et (A.2.11)}$$
$$p_1' B_{21} + p_2' B_{22} = 0 \qquad \text{par (A.2.4) et (A.2.11)}$$

$$p_1' \frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} + p_2' \frac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} - \lambda' = 0 \qquad \text{par (A.2.5) et (A.2.12)}$$

$$p_1' \frac{\partial b_1}{\partial R} + p_2' \frac{\partial b_2}{\partial R} - \mu = 0 \qquad \text{par (A.2.6) et (A.2.13)}$$

soit,

$$p'B = 0 \tag{A.2.14}$$

$$p_1' \frac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} + p_2' \frac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} = \lambda' \tag{A.2.15}$$

$$p_1' \frac{\partial b_1}{\partial R} + p_2' \frac{\partial b_2}{\partial R} = \mu \tag{A.2.16}$$

Il est aussi possible d'écrire (A.2.2) sous les formes:

$$JL = -\left[F^{**}\right]^{-1} GL$$

et $$L'G'JL = -L'G'\left[F^{**}\right]^{-1} GL \tag{A.2.17}$$

où $-L'G'\left[F^{**}\right]^{-1} GL$ est une matrice symétrique.

Donc, $L'G'JL =$

$$= \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -\mu I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & -\mu I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \partial b_1/\partial \bar{y}_1 & \partial b_1/\partial R \\ B_{21} & B_{22} & \partial b_2/\partial \bar{y}_1 & \partial b_2/\partial R \\ A_{11} & A_{12} & \partial a_1/\partial \bar{y}_1 & \partial a_1/\partial R \\ A_{21} & A_{22} & \partial a_2/\partial \bar{y}_1 & \partial a_2/\partial R \\ \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \partial \lambda/\partial \bar{y}_1 & \partial \lambda/\partial R \\ \partial \phi^c/\partial p_1 & \partial \phi^c/\partial p_2 & \partial \phi/\partial \bar{y}_1 & \partial \phi/\partial R \\ \partial \mu^c/\partial p_1 & \partial \mu^c/\partial p_2 & \partial \mu/\partial \bar{y}_1 & \partial \mu/\partial R \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} - \mu A_{11} & B_{12} - \mu A_{12} & \dfrac{\partial b_1}{\partial \bar{y}_1} - \mu \dfrac{\partial a_1}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial b_1}{\partial R} - \mu \dfrac{\partial a_1}{\partial R} \\ B_{21} - \mu A_{21} & B_{22} - \mu A_{22} & \dfrac{\partial b_2}{\partial \bar{y}_1} - \mu \dfrac{\partial a_2}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial b_2}{\partial R} - \mu \dfrac{\partial a_2}{\partial R} \\ \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial R} \\ \dfrac{\partial \mu^c}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \mu^c}{\partial p_2} & \dfrac{\partial \mu}{\partial \bar{y}_1} & \dfrac{\partial \mu}{\partial R} \end{bmatrix}$$

qui est aussi une matrice symétrique.

Or, par (A.2.3) et (A.2.4),

$$\begin{bmatrix} B_{11}-\mu A_{11} & B_{12}-\mu A_{12} \\ B_{21}-\mu A_{21} & B_{22}-\mu A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\mu)A_{11} & (1-\mu)A_{12} \\ B_{21}-\mu A_{21} & B_{22}-\mu A_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.2.18)} .$$

Si $B_{21} = 0$ et $B_{22} = 0$, (A.2.18) implique la symétrie de la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} (1-\mu)A_{11} & (1-\mu)A_{12} \\ -\mu A_{21} & -\mu A_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.2.19)}$$

où $\mu - 1 = p_2' \dfrac{\partial b_2}{\partial R} - p_2' \dfrac{\partial a_2}{\partial R}$ par (A.2.6) , (A.2.10) et (A.2.16) .

Enfin, dans le cas où $\mu > 1$, il est aisé de montrer que (A.2.18) est une matrice positive semi-définie.

En effet, en prémultipliant (A.2.2) par L'J' , on obtient:

$$L'J'F^{**}JL = -L'J'GL \text{ qui contient le bloc } B - \mu A = [B'\ A']\ F \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \qquad \text{(A.2.20)}$$

où F est le hessienne de la fonction de production.

Soit $\zeta' F \zeta > 0$ pour tout ζ tel que $\Delta F \cdot \zeta = 0$ où ΔF est le gradient de ζ .

On pose $\zeta = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \xi$.

(A.2.2) donne $\Delta F \cdot \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = 0$. Il s'ensuit que $\xi' (B - \mu A)\, \xi > 0$ pour tout ξ .

Annexe A.3

Lemme: la matrice $[\partial^2 L / \partial Z \partial Z]$ est de rang maximal. Preuve par l'absurde:

La matrice $[\partial^2 L / \partial Z \partial Z]$ n'est pas de rang maximal. Il existe alors un vecteur $\zeta^{**} \neq 0$ tel que $\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial Z \partial Z} \right] \zeta^{**} = 0$,

où $\dfrac{\partial^2 L}{\partial Z \partial Z} = F^{**}$ (voir les matrices B1 et B2 aux pages 23 et 24) ,

$$\text{et } \zeta^{**} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \theta_1 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \\ \zeta_7 \\ \zeta_8 \\ \omega \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} .$$

$F^{**}\zeta^{**} = 0$ implique les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &- \phi F_{11}\zeta_1 - \phi F_{12}\zeta_2 + \phi F_{13}\zeta_3 + \phi F_{14}\zeta_4 - \phi F_{15}\zeta_5 - \phi F_{16}\zeta_6 \\ &+ \phi F_{17}\zeta_7 + \phi F_{18}\zeta_8 - F_1\omega - \theta_2 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.3.1)}$$

$$\begin{aligned} &- \phi F_{21}\zeta_1 - \phi F_{22}\zeta_2 + \phi F_{23}\zeta_3 + \phi F_{24}\zeta_4 - \phi F_{25}\zeta_5 - \phi F_{26}\zeta_6 \\ &+ \phi F_{27}\zeta_7 + \phi F_{28}\zeta_8 - F_2\omega = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.3.2)}$$

$$\begin{aligned} &\phi F_{31}\zeta_1 + \phi F_{32}\zeta_2 - \phi F_{33}\zeta_3 - \phi F_{34}\zeta_4 + \phi F_{35}\zeta_5 + \phi F_{36}\zeta_6 \\ &- \phi F_{37}\zeta_7 - \phi F_{38}\zeta_8 + F_3\omega + \theta_2 - p_{1t}\theta_4 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.3.3)}$$

$$\phi F_{41}\zeta_1 + \phi F_{42}\zeta_2 - \phi F_{43}\zeta_3 - \phi F_{44}\zeta_4 + \phi F_{45}\zeta_5 + \phi F_{46}\zeta_6$$
$$- \phi F_{47}\zeta_7 - \phi F_{48}\zeta_8 + F_4\omega + - p_{2t}\theta_4 = 0 \quad \text{(A.3.4)}$$

$$- \gamma\,\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad \text{(A.3.5)}$$

$$- \phi F_{51}\zeta_1 - \phi F_{52}\zeta_2 + \phi F_{53}\zeta_3 + \phi F_{54}\zeta_4 - \phi F_{55}\zeta_5 - \phi F_{56}\zeta_6$$
$$+ \phi F_{57}\zeta_7 + \phi F_{58}\zeta_8 - F_5\omega - \theta_3 = 0 \quad \text{(A.3.6)}$$

$$- \phi F_{61}\zeta_1 - \phi F_{62}\zeta_2 + \phi F_{63}\zeta_3 + \phi F_{64}\zeta_4 - \phi F_{65}\zeta_5 - \phi F_{66}\zeta_6$$
$$+ \phi F_{67}\zeta_7 + \phi F_{68}\zeta_8 - F_6\omega = 0 \quad \text{(A.3.7)}$$

$$\phi F_{71}\zeta_1 + \phi F_{72}\zeta_2 - \phi F_{73}\zeta_3 - \phi F_{74}\zeta_4 + \phi F_{75}\zeta_5 + \phi F_{76}\zeta_6$$
$$- \phi F_{77}\zeta_7 - \phi F_{78}\zeta_8 + F_7\omega + \theta_3 - \tilde{p}_1\theta_5 = 0 \quad \text{(A.3.8)}$$

$$\phi F_{81}\zeta_1 + \phi F_{82}\zeta_2 - \phi F_{83}\zeta_3 - \phi F_{84}\zeta_4 + \phi F_{85}\zeta_5 + \phi F_{86}\zeta_6$$
$$- \phi F_{87}\zeta_7 - \phi F_{88}\zeta_8 - \tilde{p}_2\theta_5 = 0 \quad \text{(A.3.9)}$$

$$-F'_1\zeta_1 - F'_2\zeta_2 + F'_3\zeta_3 + F'_4\zeta_4 - F'_5\zeta_5 - F'_6\zeta_6 + F'_7\zeta_7 + F'_8\zeta_8$$
$$= 0 \quad \text{(A.3.10)}$$

$$- \zeta_1 + \zeta_3 = 0 \quad \text{(A.3.11)}$$

$$- \zeta_5 + \zeta_7 = 0 \quad \text{(A.3.12)}$$

$$- p_{1t}\zeta_3 - p_{2t}\zeta_4 - \gamma\theta_1 = 0 \quad \text{(A.3.13)}$$

$$- \theta_1 - \tilde{p}_1\zeta_7 - \tilde{p}_2\zeta_8 = 0 \quad \text{(A.3.14)}\ .$$

(A.3.1) , (A.3.2) , (A.3.3) , (A.3.4) , (A.3.6) , (A.3.7) , (A.3.8) et (A.3.9) peuvent aussi s'écrire:

$$F^*\zeta^* + \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ -F_5 \\ -F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_1 \\ 0 \\ -I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_{1t} \\ -p_{2t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{p}_1 \\ -\tilde{p}_2 \end{bmatrix} \theta_5 = 0 \qquad \text{(A.3.15)}$$

$$\text{où } F^* = \begin{bmatrix} -\phi F_{11} & -\phi F_{12} & \phi F_{13} & \phi F_{14} & -\phi F_{15} & -\phi F_{16} & \phi F_{17} & \phi F_{18} \\ -\phi F_{21} & -\phi F_{22} & \phi F_{23} & \phi F_{24} & -\phi F_{25} & -\phi F_{26} & \phi F_{27} & \phi F_{28} \\ \phi F_{31} & \phi F_{32} & -\phi F_{33} & -\phi F_{34} & \phi F_{35} & \phi F_{36} & -\phi F_{37} & -\phi F_{38} \\ \phi F_{41} & \phi F_{42} & -\phi F_{43} & -\phi F_{44} & \phi F_{45} & \phi F_{46} & -\phi F_{47} & -\phi F_{48} \\ -\phi F_{51} & -\phi F_{52} & \phi F_{53} & \phi F_{54} & -\phi F_{55} & -\phi F_{56} & \phi F_{57} & \phi F_{58} \\ -\phi F_{61} & -\phi F_{62} & \phi F_{63} & \phi F_{64} & -\phi F_{65} & -\phi F_{66} & \phi F_{67} & \phi F_{68} \\ \phi F_{71} & \phi F_{72} & -\phi F_{73} & -\phi F_{74} & \phi F_{75} & \phi F_{76} & -\phi F_{77} & -\phi F_{78} \\ \phi F_{81} & \phi F_{82} & -\phi F_{83} & -\phi F_{84} & \phi F_{85} & \phi F_{86} & -\phi F_{87} & -\phi F_{88} \end{bmatrix} \text{ et } \zeta^* = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \\ \zeta_7 \\ \zeta_8 \end{bmatrix}.$$

En prémultipliant par $\zeta^{*\prime}$, (A.3.15) devient:

$$\zeta^{*\prime}F^*\zeta^* + \zeta^{*\prime} \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ -F_5 \\ -F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{bmatrix} \omega + \zeta^{*\prime} \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_2 + \zeta^{*\prime} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_3 + \zeta^{*\prime} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_{1t} \\ -p_{2t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_4 + \zeta^{*\prime} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{p}_1 \\ -\tilde{p}_2 \end{bmatrix} \theta_5 = 0 \qquad \text{(A.3.16)}$$

ou

$$\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}+\zeta^{*\prime}\begin{bmatrix}-F_1\\-F_2\\F_3\\F_4\\-F_5\\-F_6\\F_7\\F_8\end{bmatrix}\omega-\zeta_1'\theta_2+\zeta_3'\theta_2-\zeta_5'\theta_3+\zeta_7'\theta_3-\zeta_3'p_{1t}\theta_4-\zeta_4'p_{2t}\theta_4$$
$$-\zeta_7'\tilde{p}_1\theta_5-\zeta_8'\tilde{p}_2\theta_5=0 \qquad \text{(A.3.17)}\,.$$

Cette expression se simplifie graduellement à:

i) $\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}-\zeta_1'\theta_2+\zeta_3'\theta_2-\zeta_5'\theta_3+\zeta_7'\theta_3-\zeta_3'p_{1t}\theta_4-\zeta_4'p_{2t}\theta_4$
$-\zeta_7'\tilde{p}_1\theta_5-\zeta_8'\tilde{p}_2\theta_5=0$ par (A.3.10)

ii) $\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}-\zeta_5'\theta_3+\zeta_7'\theta_3-\zeta_3'p_{1t}\theta_4-\zeta_4'p_{2t}\theta_4-\zeta_7'\tilde{p}_1\theta_5$
$-\zeta_8'\tilde{p}_2\theta_5=0$ par (A.3.11)

iii) $\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}-\zeta_3'p_{1t}\theta_4-\zeta_4'p_{2t}\theta_4-\zeta_7'\tilde{p}_1\theta_5-\zeta_8'\tilde{p}_2\theta_5=0$ par (A.3.12)

iv) $\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}-\gamma\theta_1\theta_4-\zeta_7'\tilde{p}_1\theta_5-\zeta_8'\tilde{p}_2\theta_5=0$ par (A.3.13)

v) $\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}+\gamma\theta_1\theta_4-I_1\theta_1\theta_5=0$ par (A.3.14)

vi) $\zeta^{*\prime}F^{*}\zeta^{*}=0$ par (A.3.15)

ce qui est impossible à moins que ζ^{*} soit nul car par (A.3.10) , $F^{*}\zeta^{*}=0$.

Or, si ζ^* est nul (A.3.15) devient:

$$\begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ -F_5 \\ -F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_1 \\ 0 \\ I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_{1t} \\ -p_{2t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{p}_1 \\ -\tilde{p}_2 \end{bmatrix} \theta_5 = 0 \quad \text{(A.3.18)}$$

La 2e ligne de (A.3.18) permet de voir que $\omega = 0$. Si $\omega = 0$, alors les 1ère, 4e , 5e et 8e lignes indiquent respectivement que $\theta_2 = 0$, $\theta_4 = 0$, $\theta_3 = 0$ et $\theta_5 = 0$. Enfin, (A.3.13) implique que $\theta_1 = 0$. On a donc $\zeta^{**} = 0$, ce qui contredit le point de départ.

MATRICE B1

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial Z} =
\begin{bmatrix}
-\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}^2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial b_{2t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial a_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial a_{2t}} & 0 & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial \bar{b}_1} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial \bar{b}_2} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial \tilde{a}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{1t}\partial \tilde{a}_1} & \frac{-\partial F}{\partial b_{1t}} & -I_1 & 0 & 0 & 0 \\
-\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial b_{1t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}^2} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial a_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial a_{2t}} & 0 & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial \bar{b}_1} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial \bar{b}_2} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial \tilde{a}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial b_{2t}\partial \tilde{a}_2} & \frac{-\partial F}{\partial b_{2t}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial b_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial b_{2t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}^2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial a_{2t}} & 0 & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial \bar{b}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial \bar{b}_2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial \tilde{a}_1} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial \tilde{a}_2} & \frac{\partial F}{\partial a_{1t}} & I_1 & 0 & -p_{1t} & 0 \\
\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial b_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial b_{2t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial a_{1t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}^2} & 0 & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial \bar{b}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial \bar{b}_2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial \tilde{a}_1} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial \tilde{a}_2} & \frac{\partial F}{\partial a_{2t}} & 0 & 0 & -p_{2t} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & I_1 \\
-\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial b_{1t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial b_{2t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial a_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial a_{2t}} & 0 & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1^2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial \bar{b}_2} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial \tilde{a}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_1\partial \tilde{a}_2} & \frac{-\partial F}{\partial \bar{b}_1} & 0 & -I_1 & 0 & 0 \\
-\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial b_{1t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial b_{2t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial a_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial a_{2t}} & 0 & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial \bar{b}_1} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2^2} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial \tilde{a}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{b}_2\partial \tilde{a}_2} & \frac{-\partial F}{\partial \bar{b}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial b_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial b_{2t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial a_{1t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial a_{2t}} & 0 & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial \bar{b}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial \bar{b}_2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1^2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_1\partial \tilde{a}_2} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{a}_1} & 0 & I_1 & 0 & -\tilde{p}_1 \\
\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial b_{1t}} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial b_{2t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial a_{1t}} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial a_{2t}} & 0 & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial \bar{b}_1} & \phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial \bar{b}_2} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2\partial \tilde{a}_1} & -\phi\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{a}_2^2} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{a}_2} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{p}_2 \\
-\left[\frac{\partial F}{\partial b_{1t}}\right]' & -\left[\frac{\partial F}{\partial b_{2t}}\right]' & \left[\frac{\partial F}{\partial a_{1t}}\right]' & \left[\frac{\partial F}{\partial a_{2t}}\right]' & 0 & -\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{b}_1}\right]' & -\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{b}_2}\right]' & \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{a}_1}\right]' & \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{a}_2}\right]' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-I_1 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_1 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -p_{1t} & -p_{2t} & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & -\tilde{p}_1 & -\tilde{p}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

MATRICE B2

$$
F^{**} = \begin{bmatrix}
-\phi F_{11} & -\phi F_{12} & \phi F_{13} & \phi F_{14} & 0 & -\phi F_{15} & -\phi F_{16} & \phi F_{17} & \phi F_{18} & -F_1 & -I_1 & 0 & 0 & 0 \\
-\phi F_{21} & -\phi F_{22} & \phi F_{23} & \phi F_{24} & 0 & -\phi F_{25} & -\phi F_{26} & \phi F_{27} & \phi F_{28} & -F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\phi F_{31} & \phi F_{32} & -\phi F_{33} & -\phi F_{34} & 0 & \phi F_{35} & \phi F_{36} & -\phi F_{37} & -\phi F_{38} & F_3 & I_1 & 0 & -p_{1t} & 0 \\
\phi F_{41} & \phi F_{42} & -\phi F_{43} & -\phi F_{44} & 0 & \phi F_{45} & \phi F_{46} & -\phi F_{47} & -\phi F_{48} & F_4 & 0 & 0 & -p_{2t} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & I_1 \\
-\phi F_{51} & -\phi F_{52} & \phi F_{53} & \phi F_{54} & 0 & -\phi F_{55} & -\phi F_{56} & \phi F_{57} & \phi F_{58} & -F_5 & 0 & -I_1 & 0 & 0 \\
-\phi F_{61} & -\phi F_{62} & \phi F_{63} & \phi F_{64} & 0 & -\phi F_{65} & -\phi F_{66} & \phi F_{67} & \phi F_{68} & -F_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\phi F_{71} & \phi F_{72} & -\phi F_{73} & -\phi F_{74} & 0 & \phi F_{75} & \phi F_{76} & -\phi F_{77} & -\phi F_{78} & F_7 & 0 & I_1 & 0 & -\tilde{p}_1 \\
\phi F_{81} & \phi F_{82} & -\phi F_{83} & -\phi F_{84} & 0 & \phi F_{85} & \phi F_{86} & -\phi F_{87} & -\phi F_{88} & F_8 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{p}_2 \\
-F'_1 & -F'_2 & F'_3 & F'_4 & 0 & -F'_5 & -F'_6 & F'_7 & F'_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-I_1 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_1 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -p_{1t} & -p_{2t} & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & -\tilde{p}_1 & -\tilde{p}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Annexe A.4

Soit $$d\hat{a} = \hat{A}d\hat{p} + \frac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{y}_1} d\bar{y}_1 + \frac{\partial \hat{a}}{\partial R}\hat{p}'d\hat{a} \qquad \text{(A.4.1)} ,$$

$$R = p'_{1t}a_{1t} + p'_{2t}a_{2t} + \gamma\, a_{0\,t+1} \qquad \text{(A.4.2)} ,$$

et $$a_{0\,t+1} = \tilde{p}'_1\tilde{a}_1 + \tilde{p}'_2\tilde{a}_2 \qquad \text{(A.4.3)} ,$$

où

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{0\,t+1} \\ \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{0\,t+1} \\ \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{0\,t+1} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.4.4)} .$$

$\hat{A}$ est aussi définie de la façon suivante:

$$\hat{A} = B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \tilde{p}'_1 & 0 & \tilde{p}'_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_1 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.4.5)} .$$

et

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} \tilde{a}'_1 & \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} \tilde{a}'_2 \\ \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} \tilde{a}'_1 & \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} \tilde{a}'_2 \\ \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} \tilde{a}'_1 & \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} \tilde{a}'_2 \\ \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} \tilde{a}'_1 & \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} \tilde{a}'_2 \end{bmatrix}$$

La matrice B peut alors s'écrire ainsi:

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t} & \left[\dfrac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\dfrac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2 \\ \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t} & \left[\dfrac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\dfrac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2 \\ \tilde{p}'_1\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{1t}\right] + \tilde{p}'_2\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{1t}\right] & \tilde{p}'_1\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{2t}\right] + \tilde{p}'_2\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{2t}\right] & \begin{array}{l} \tilde{p}'_1\left[\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2\right] + \\ + \tilde{p}'_2\left[\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2\right] \end{array} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t} & \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1}\tilde{p}_1 + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2}\tilde{p}_2 + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R}\left[\tilde{a}'_1\tilde{p}_1 + \tilde{a}'_2\tilde{p}_2\right] \\ \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t} & \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1}\tilde{p}_1 + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2}\tilde{p}_2 + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R}\left[\tilde{a}'_1\tilde{p}_1 + \tilde{a}'_2\tilde{p}_2\right] \\ \tilde{p}'_1\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{1t}} + \tilde{p}'_2\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{1t}} + \left[\tilde{p}'_1\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} + \tilde{p}'_2\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}\right] a'_{1t} & \tilde{p}'_1\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{2t}} + \tilde{p}'_2\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{2t}} + \left[\tilde{p}'_1\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} + \tilde{p}'_2\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}\right] a'_{2t} & \begin{array}{l} \tilde{p}'_1\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_1}\tilde{p}_1 + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_2}\tilde{p}_2 + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R}(\tilde{a}'_1\tilde{p}_1 + \tilde{a}'_2\tilde{p}_2)\right] + \\ + \tilde{p}'_2\left[\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_1}\tilde{p}_1 + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_2}\tilde{p}_2 + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}(\tilde{a}'_1\tilde{p}_1 + \tilde{a}'_2\tilde{p}_2)\right] \end{array} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t} & \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{0\,t+1} \\ \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t} & \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{0\,t+1} \\ \dfrac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{1t}} + \dfrac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{1t} & \dfrac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{2t}} + \dfrac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{2t} & \tilde{p}'_1 \left[\dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{0\,t+1} \right] + \tilde{p}'_2 \left[\dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{0\,t+1} \right] \end{bmatrix} \quad \text{par (A.4.2) et (A.4.3)} .$$

Enfin, l'élément (3.3) de B peut se récrire:

$$B_{33} = \tilde{p}_1' \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma} + \tilde{p}_2' \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma} + \left[\tilde{p}_1' \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} + \tilde{p}_2' \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} \right] a_{0\,t+1}'$$

$$= \frac{\partial a_{0\ t+1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{0\ t+1}}{\partial R}\, a_{0\,t+1}' \qquad \text{par (A.4.3) .}$$

Ces transformations successives de B prouvent (A.4.5) .

Les relations (A.4.5) permettent de démontrer aisément que:

$$\begin{bmatrix} (\mu-1)I & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \hat{A} = C = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \tilde{p}_1' & 0 & \tilde{p}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mu-1)I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_1 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.4.6) .}$$

En effet, on peut écrire la matrice C de la façon suivante:

$$
C = \begin{bmatrix}
(\mu-1)\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t}\right] & (\mu-1)\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t}\right] & (\mu-1)\left[\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2\right] \\
(\mu)\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t}\right] & (\mu)\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t}\right] & (\mu)\left[\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2\right] \\
\mu\left[\tilde{p}'_1\left[\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{1t}\right] + \tilde{p}'_2\left[\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{1t}\right]\right] & \mu\left[\tilde{p}'_1\left[\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R} a'_{2t}\right] + \tilde{p}'_2\left[\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R} a'_{2t}\right]\right] & \mu\left[\tilde{p}'_1\left[\left[\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2\right] + \right. \\
 & & \left. + \tilde{p}'_2\left[\left[\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_1} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}\tilde{a}'_1\right]\tilde{p}_1 + \left[\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \gamma\tilde{p}_2} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial R}\tilde{a}'_2\right]\tilde{p}_2\right]\right]
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
(\mu-1)\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t}\right] & (\mu-1)\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t}\right] & (\mu-1)\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{0\,t+1}\right] \\
\mu\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t}\right] & \mu\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t}\right] & \mu\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{0\,t+1}\right] \\
\mu\left[\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{1t}\right] & \mu\left[\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{2t}\right] & \mu\left[\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{0\,t+t}\right]
\end{bmatrix}
$$

par (A.4.5)

$$
= \begin{bmatrix} (\mu-1)I & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \hat{A} \,.
$$

Puisque la symétrie de A a déjà été démontrée dans l'Annexe A.2 , par (A.4.6) il devient trivial de démontrer que $T\hat{A}$ est symétrique.

Il est également possible de se servir de (A.4.6) pour la démonstration de

$$\hat{\zeta}'\, T\hat{A}\, \hat{\zeta} < 0 \text{ pour tout } \hat{\zeta} \neq \theta\, \hat{p} \;,\; \theta \in \mathbb{R}\,.$$

En effet, dans l'Annexe A.2 la négativité de A a été prouvée. Si on pose $\mu > 1$, la prémultiplication de $\hat{A}$ par T ne change pas son signe. Ainsi, $T\hat{A}$ est aussi de signe négatif.

Il reste donc à montrer que:

$$\hat{p}'\hat{A} = 0\,,$$

$$\hat{p}'\,\frac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{y}_1} = 0\,,$$

$$\hat{p}'\,\frac{\partial \hat{a}}{\partial R_t} = 1 \quad .$$

Soit $F^{***}J = -G$ (A.4.7)

$$\text{où } F^{***} = \begin{bmatrix} -\phi\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}^2} & -\phi\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_{1t}\partial a_{2t}} & \dfrac{\partial F}{\partial a_{1t}} & -p_{1t} \\ -\phi\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}\partial a_{1t}} & -\phi\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_{2t}^2} & \dfrac{\partial F}{\partial a_{2t}} & -p_{2t} \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial a_{1t}}\right]' & \left[\dfrac{\partial F}{\partial a_{2t}}\right]' & 0 & 0 \\ -p'_{1t} & -p'_{2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{***} = \begin{bmatrix} -\phi F_{33} & -\phi F_{34} & 0 & F_3 & -p_{1t} \\ -\phi F_{43} & -\phi F_{44} & 0 & F_4 & -p_{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ F_3' & F_4' & 0 & 0 & 0 \\ -p_{1t}' & -p_{2t}' & -\gamma & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} \\ \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} \\ \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{1t}} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{2t}} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \gamma} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p_{1t}} & \frac{\partial \phi}{\partial p_{2t}} & \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} & \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \phi}{\partial R} \\ \frac{\partial \mu}{\partial p_{1t}} & \frac{\partial \mu}{\partial p_{2t}} & \frac{\partial \mu}{\partial \gamma} & \frac{\partial \mu}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \mu}{\partial R} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial a_{1\,t}\partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{1\,t}\partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{1\,t}\partial \gamma} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{1\,t}\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{1\,t}\partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_{2\,t}\partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{2\,t}\partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{2\,t}\partial \gamma} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{2\,t}\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{2\,t}\partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_{0\,t+1}\partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{0\,t+1}\partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{0\,t+1}\partial \gamma} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{0\,t+1}\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_{0\,t+1}\partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \phi\partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi\partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi\partial \gamma} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \phi\partial R} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \mu\partial p_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu\partial p_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu\partial \gamma} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu\partial R} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (I-\mu)I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a'_{1t} & -a'_{2t} & -a'_{0\,t+1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En postmultipliant (A.4.7) par la matrice

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ a'_{1t} & a'_{2t} & a'_{0\,t+1} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

on obtient $F^{***}JL = -GL$ (A.4.8)

où

$$GL = \begin{bmatrix} (I-\mu)I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } JL = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} a'_{0\,t+1} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_{1t}}{\partial R} \\ \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} a'_{0\,t+1} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_{2t}}{\partial R} \\ \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} a'_{0\,t+1} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial \phi}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial \phi}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial \phi}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \phi}{\partial R} a'_{0\,t+1} & \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \phi}{\partial R} \\ \frac{\partial \mu}{\partial p_{1t}} + \frac{\partial \mu}{\partial R} a'_{1t} & \frac{\partial \mu}{\partial p_{2t}} + \frac{\partial \mu}{\partial R} a'_{2t} & \frac{\partial \mu}{\partial \gamma} + \frac{\partial \mu}{\partial R} a'_{0\,t+1} & \frac{\partial \mu}{\partial \bar{y}_1} & \frac{\partial \mu}{\partial R} \end{bmatrix}.$$

La 5e ligne de (A.4.8) donne les relations suivantes:

$$-p'_{1t}\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{1t}}+\frac{\partial a_{1t}}{\partial R}a'_{1t}\right]-p'_{2t}\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{1t}}+\frac{\partial a_{2t}}{\partial R}a'_{1t}\right]-\gamma\left[\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{1t}}+\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R}a'_{1t}\right]=0 \qquad \text{(A.4.9)}$$

$$-p'_{1t}\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial p_{2t}}+\frac{\partial a_{1t}}{\partial R}a'_{2t}\right]-p'_{2t}\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial p_{2t}}+\frac{\partial a_{2t}}{\partial R}a'_{2t}\right]-\gamma\left[\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial p_{2t}}+\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R}a'_{2t}\right]=0 \qquad \text{(A.4.10)}$$

$$-p'_{1t}\left[\frac{\partial a_{1t}}{\partial \gamma}+\frac{\partial a_{1t}}{\partial R}a'_{0\,t+1}\right]-p'_{2t}\left[\frac{\partial a_{2t}}{\partial \gamma}+\frac{\partial a_{2t}}{\partial R}a'_{0\,t+1}\right]-\gamma\left[\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \gamma}+\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R}a'_{0\,t+1}\right]=0 \qquad \text{(A.4.11)}$$

$$-p'_{1t}\frac{\partial a_{1t}}{\partial \bar{y}_1}-p'_{2t}\frac{\partial a_{2t}}{\partial \bar{y}_1}-\gamma\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial \bar{y}_1}=0 \qquad \text{(A.4.12)}$$

$$-p'_{1t}\frac{\partial a_{1t}}{\partial R}-p'_{2t}\frac{\partial a_{2t}}{\partial R}-\gamma\frac{\partial a_{0\,t+1}}{\partial R}=-1 \qquad \text{(A.4.13)}\ .$$

(A.4.9) , (A.4.10) et (A.4.11) démontrent $\hat{p}'\hat{A} = 0$, tandis que (A.4.12) et (A.4.13) prouvent respectivement $\hat{p}'\frac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{y}_1} = 0$ et $\hat{p}'\frac{\partial \hat{a}}{\partial R} = 1$.

ANNEXE A.5

Tel que démontré dans Bronsard et Salvas–Bronsard (1988).

Soit $F^{**}J = -G$ (A.5.1)

où $$F^{**} = \begin{bmatrix} -\phi F_{aa} & F_a \\ F_a & 0 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} \partial a_2/\partial p_2 & \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2 \\ \partial \phi/\partial p_2 & \partial \phi/\partial x_1 & \partial \phi/\partial x_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{et } G = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -Fx_1 & -Fx_2 \end{bmatrix}.$$

(A.5.1) peut alors s'écrire:

$$\begin{bmatrix} -\phi F_{aa} & F_a \\ F_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial a_2/\partial p_2 & \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2 \\ \partial \phi/\partial p_2 & \partial \phi/\partial x_1 & \partial \phi/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -Fx_1 & -Fx_2 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$p_2' \left[\partial a_2/\partial p_2 \right] = 0$$

$$\left[\partial a_2/\partial p_2 \right] = \left[\partial a_2/\partial p_2 \right]'$$

$$\zeta_2' \left[\partial a_2/\partial p_2 \right] \zeta_2 < 0 \quad \text{pour tout} \quad \zeta_2 \neq \theta p_2 \,, \; \theta \in \mathbb{R}$$

$$p_2' \left[\partial a_2/\partial x_1 \right] = -\phi F x_1$$

$$p_2' \left[\partial a_2/\partial x_2 \right] = -\phi F x_2$$

ANNEXE A.6

Description des sources de données

Données canadiennes trimestrielles non désaisonnalisées, 1962–1983, provenant des matrices de CANSIM 1986.

variable			
Population			D1
Emprunts nets ou prêts nets des corporations non financières et des entreprises publiques non financières			D150079 D150136
Formation brute de capital en construction non résidentielle		$ courants $ 1981	D10287 D10301
Formation brute de capital en machinerie et en équipement		$ courants $ 1981	D10288 D10302
Valeur des variations matérielles dans les inventaires		$ courants $ 1981	D10020 D10041
Emploi	Total sans l'agriculture		D736145
	Public		D736130
	Agricole		D739831
Revenu de travail	Des firmes		D10089
	Des individus		D10092
	Des firmes agricoles		D10093
	Des firmes individuelles non agricoles incluant les rentes nettes		D10094
	Rentes nettes		D10095
Produit national brut		$ courants $ 1981	D10057 D10031
Indice de prix de vente dans l'industrie			D500000
Rendement d'une obligation à long terme du gouvernement (10 ans et plus)			D14013

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Madame Lise Salvas–Bronsard d'avoir accepté de diriger ce mémoire de même que pour sa patience, son appui financier et sa constante disponibilité.

Je veux aussi remercier Monsieur Jean Roy qui a produit ce mémoire sur traitement de texte scientifique T^3.