Université de Montréal

# Capital Humain, Éducation, Crédit

# et Croissance

par

Ouafaâ Afifi

Département des Sciences Économiques

Faculté des Arts et Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences ( M. Sc. )

en sciences économiques

Avril 1995

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

" Capital humain, Éducation, Crédit

et Croissance"

présenté par :

Ouafaâ Afifi

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| Léonard Dudley | : | Président-rapporteur |
| Jean-Louis Arcand | : | Directeur de recherche |
| André Martens | : | Membre du jury |

Mémoire accepté le : 27 septembre 1995

# SOMMAIRE


Une revue de littérature spécialisée dans le domaine de la croissance et du capital humain nous a convaincu qu'il existe encore des lacunes à combler dans ce domaine.

Le capital humain représente une des composantes essentielles à la croissance économique.

Notre modèle théorique est un modèle à générations imbriquées à 3 périodes de vie. Le jeune emprunte sur son revenu futur pour financer ses études.

Nous avons d'abord supposé que l'agent représentatif n'était pas contraint dans son emprunt pour financer son éducation, son problème revient donc à maximiser son utilité intertemporelle, assujetti aux contraintes budgétaires habituelles. La simulation des équations dynamiques du système prouvent que les variables d'états (stocks de capital physique et humain ) tendent vers un état stationnaire, et l'étude de ce même état stationnaire montre qu'il est globalement stable et unique. Le taux de croissance de l'économie dans ce cas est positif.

Si l'agent est sujet à une contrainte sur le niveau de crédit à la première période, la dynamique du système est modifiée. Premièrement, il existe un état stationnaire dont la stabilité dépend fortement des paramètres utilisés. Deuxièmement, la valeur du taux de croissance à l'état stationnaire est égal à 1. Donc avec l'imposition d'une contrainte de crédit, on élimine la croissance.

Et finalement, l'imposition d'une contrainte de crédit proportionnelle réduit la croissance via la réduction de l'accumulation du capital humain.

Mots clés: Capital humain, éducation, crédit, croissance

# TABLE DES MATIÈRES

# LISTE DES FIGURES

# LISTE DES ANNEXES

À

Ma mère et à Mon père

Avec tout mon Amour

# REMERCIEMENTS

Au cours de ce travail, j'ai pu apprécier la disponibilité, l'écoute, les encouragements... pour ne citer que quelques unes des qualités de mon directeur de recherche, Jean Louis Arcand. Qu'il en soit vivement remercié.

Je tiens aussi à remercier toute l'équipe de recherche pour leur soutien.

À Nazem, mon mari, tout simplement un gros merci.

# A. INTRODUCTION

Après la révolution industrielle et l'arrivée du taylorisme avec son organisation scientifique du travail, la société s'est rendu compte de l'importance du capital humain dans le processus de la croissance.

La question que nous nous posons est : Faut - il vraiment investir pour l'accumulation de ce capital ?

Pour avoir une éducation valable est - il rentable d'emprunter sur notre revenu futur ?

D'où le titre de ma recherche: Capital humain, Éducation, Crédit et croissance.

Le but de ma recherche est d'établir un modèle théorique qui rende compte de l'effet du crédit sur la croissance et voir l'effet dominant de l'éducation ou de l'épargne sur cette croissance.

D'abord nous ferons un bref aperçu de la revue de la littérature pour justifier notre étude et voir l'avancement des recherches dans ce domaine. Nous enchaînerons ensuite par l'explication du modèle théorique que nous avons élaboré en présentant au préalable les hypothèses utilisées.

Nous étudierons 2 variétés de problème. Le premier sans contrainte de crédit et le second avec imposition d'une contrainte de crédit. Pour chacune des variétés nous étudierons la dynamique, l'état stationnaire et la stabilité du système. Comme exercice final, nous étudierons l'impact d'une contrainte de crédit proportionnelle sur le taux de croissance.

## B. REVUE DE LA LITTÉRATURE

Notre étude bibliographique constitue un aperçu des contributions de différents chercheurs dans le domaine de la croissance.

Nous résumerons d'abord les différents modèles de base décrit par Solow, Rebelo, Romer, Lucas, Azariadis et Drazen.... Nous nous pencherons ensuite sur les modèles avec contrainte de crédit.

Durant les années 80, on a assisté à un débat concernant le calcul du coût /bénéfice de la répression financière. Deux groupes se sont alors distingués: Le premier est constitué par les *nouveaux orthodoxes* représentés par McKinnon, Shaw et Fry *(McKinnon, 1973; Shaw, 1973; Fry, 1978,1982,1988; McKinnon et Mathieson,1981)*, qui stipulent qu'une contrainte sur le crédit diminue le taux de croissance; La deuxième école celle des *néo-structuralistes* trouve qu'une contrainte de crédit plus sévère a un effet positif sur la croissance.

Les résultats des différents auteurs essayant de fournir des microfondations pour les différents modèles cités plus haut sont disparates. Jappelli et Pagano (1992) confirment les résultats des néo-structuralistes, alors que Bencivenga et Smith (1988,1992) appuient la thèse de McKinnon, Shaw et Fry.

## 1. Modèles de base

### 1.1 Modèle classique de croissance

Dans le modèle néoclassique de base de ***Solow (1956)***, l'auteur fait l'hypothèse que la fonction de production est homogène de degré 1 et que les rendements à l'échelle sont constants.

$Y_t = A(t)F(K_t, L_t)$

Où

$F(K_t, L_t) = K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}$ = Fonction de production

$A(t)$= État de la technologie

$K_t$= Capital physique accumulé

$L_t$= Main d'oeuvre

En posant $g_Y, g_K, g_L$ comme étant, respectivement, les taux de croissance de la production , du capital et du travail, nous arrivons à la relation:

$g_Y = q + \left(1 - \alpha\right) g_K + \alpha g_L$

$q$ est appelé "résidu de Solow" et ne dépend que du progrès technologique exogène $A(t)$.

L'idée de Solow est de considérer une économie fermée dont la population croît à un taux $n = g_L$ et où l'investissement est fait uniquement à partir de l'épargne avec un taux d'épargne constant $s$.

Soit $k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$ le capital per capita

L'équation fondamentale de Solow est déduite à partir de l'identité de comptabilité nationale $I = S$, ou,

$$\dot{k}_t = \left(\frac{\dot{K_t}}{L_t}\right) = \frac{\dot{K}_t L_t - K_t \dot{L}_t}{L_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - n\frac{K_t}{L_t}$$

nous avons donc l'équation de Solow donnant l'évolution du capital per capita:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - nk_t$$

L'étude de cette équation à l'état stationnaire permet de conclure que l'augmentation du taux d'épargne entraîne une hausse du niveau du capital per capita. Il ne change pas le taux de croissance qui dépend uniquement de l'état de la technologie $A(t)$.

### 1.2 Un modèle de croissance endogène

***Rebelo (1991)*** considère un modèle de croissance endogène avec des rendements constants à l'échelle ainsi que des rendements constants au facteur d'accumulation, $K$; il utilise une fonction de production de la forme: $Y = AK$.

Où

$Y$ représente la production

$K$ est le capital accumulé

Le taux de croissance du capital qui est aussi le taux de croissance du PIB peut être décrit par:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = sA - (\delta + n)$$

$k$ est le capital par habitant

$s$ est le taux d'épargne

$n$ est le taux de croissance de la population (travailleurs), il n' y a pas de chômage dans ce modèle

$\delta$ est le taux de dépréciation du capital physique

Ce taux de croissance du capital est déterminé par les paramètres cités plus haut , un peu de statique comparative permet de voir les effets à l'équilibre du taux d'épargne, par exemple, sur le taux de croissance. Une augmentation du taux d'épargne a un effet positif sur la croissance à court terme.

Dans ce modèle le stock initial du capital n'a aucun effet sur le taux de croissance et une réduction de stock produite par une récession temporaire aura des effets permanents.

### 1.3 Introduction des externalités dans la fonction de production

Par opposition à Solow qui considère que le progrès technologique est exogène, ***Romer (1986)*** introduit le facteur "A" dans le capital et se retrouve avec des rendements croissants à l'échelle puisqu'il considère une fonction de production globale de l'économie de la forme:

$Y = aKL^{\alpha}$.

Dans le terme $K$, l'auteur introduit à la fois le capital et les connaissances (privé et sociale). Sachant que la fonction de production privée est à rendements constants à l'échelle et peut être exprimée par:

$Y_j = AK_j^{1-\alpha}L_j^{\alpha}$.

L'externalité de l'apprentissage par l'expérience est exprimée directement en supposant que le facteur "connaissance sociale" est égale à la somme des connaissances privées.

Romer établi dans un marché de concurrence parfaite , la possibilité d'un développement soutenu au cours duquel le stock de connaissances, la production et la consommation par habitant croissent à des taux identiques. Mais la stratégie pour parvenir à cette fin en préservant les hypothèses de concurrence pure et parfaite - l'introduction d'externalités - a pour conséquence la séparation de l'équilibre et de l'optimum.

Dans l'étude de ***Romer (1994)***, l'auteur fait une analyse de la croissance entre pays, à cette fin, il essaie d'exprimer cette croissance par le taux d'épargne s et le taux de croissance de l'emploi qui est le même que le taux de croissance de la population puisqu'on considère ici une économie sans chômage. Il écrit donc:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \left(1-\alpha\right)\left[sA(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - n\right] + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\ .$$

Le résultat est que le taux de croissance lui même est croissant et ce, avec une vitesse plus élevée dans les grands pays que dans les plus petits. Nous retiendrons que dans ce modèle le taux de croissance du PIB (par habitant) est corrélé positivement avec l'épargne.

### 1.4 Une première contribution à l'étude du capital humain

***Lucas (1988)*** commence son article par une revue du modèle de croissance néoclassique traditionnel avec ses différentes lacunes. Il déplore surtout le fait que les connaissances ne sont pas considérées comme facteur de production au même titre que le capital physique et le travail.

Afin de palier à ce problème et essayer de répondre à certaines défaillances des modèles existants, l'auteur introduit le capital humain comme facteur supplémentaire dans la fonction de production.

Lucas suggère deux modèles qui diffèrent par la façon dont se fait l'accumulation du capital humain.

Dans le premier modèle, les salariés consacrent une partie de leur temps de travail à l'amélioration de leurs capacités, c'est à dire à la formation. L'individu est donc seul maître pour choisir le temps qu'il veut consacrer à son éducation. De ce fait, il investit moins de temps que ce qui est nécessaire pour que cet investissement soit socialement optimal. Néanmoins, le fait d'investir en éducation engendre des externalités positives rendant ainsi les rendements à l'échelle croissants.

Lucas écrit une fonction de production de la forme:

$$Y = AK^{\beta}[uhL]^{1-\beta}h_a^{\Psi}$$

Où

$u$ est la part du temps consacré à la production

$h$ est un indicateur de l'efficience du capital humain

$h_a$ est le niveau social moyen de capital humain

$K$ est le capital physique

En présence d'individus identiques, $h = h_a$.

Le capital physique est accumulé selon l'équation:

$$\dot{K} = Y - C.$$

Le capital humain est accumulé selon une technologie linéaire:

$$\dot{h} = \phi h\left(1 - u\right).$$

Le taux de croissance du capital humain, $\dot{h}/h$, est proportionnel au temps consacré à l'éducation $\left(1 - u\right)\phi$ est une constante de proportionnalité.

La maximisation de l'utilité sous contraintes permet d'avoir, après quelques transformations $g_c$, $g_K$ et $g_h$ qui sont respectivement le taux de croissance de la consommation du capital physique et du capital humain:

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = \sigma^{-1}\left[\beta A K^{-\left(1-\beta\right)} u^{\left(1-\beta\right)} h^{\left(1+\psi-\beta\right)} - \rho\right].$$

De même:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = A K^{-\left(1-\beta\right)} u^{\left(1-\beta\right)} h^{\left(1+\psi-\beta\right)} - \frac{c}{k}.$$

On peut remarquer que:

$$g_k = g_c = g$$

et

$$g_h = \frac{\dot{h}}{h} = \frac{g(1-\beta)}{\left(1+\psi-\beta\right)}.$$

À l'équilibre, le capital humain croit à un taux :

$$g_h = \frac{(\phi - \rho)(1 - \beta)}{\sigma(1 + \psi - \beta) - \psi}.$$

Le second modèle proposé par Lucas considère l'apprentissage par l'expérience (learning by doing), l'amélioration des capacités des salariés vient de l'activité productrice elle-même. En contraste avec le premier modèle, l'individu n'a pas de choix à faire entre la perte de salaire engendré par la décision de se former dans l'attente d'un avenir meilleur. Dans ce deuxième modèle le choix se fait pour les secteurs les plus valorisants c'est à dire ceux qui permettent une expérience accrue facilitant ainsi l'avancement en milieu professionnel. L'externalité positive qui engendre la croissance provient du stock de connaissances transmis d'une génération à l'autre.

Lucas, à travers ses deux modèles, conclut que l'accumulation en capital humain engendre une augmentation du taux de croissance de l'économie.

## 2. Capital humain et croissance

### 2.1 Microfondations pour le modèle "*LUCAS*"

***Azariadis et Drazen (1990)*** fournissent un modèle d'accumulation du capital humain style Lucas (1988). On parle ici d'un modèle à générations imbriquées à 2 périodes de vie où le coût d'opportunité est le temps. Les auteurs se concentrent sur le problème de développement inégal entre pays ayant les mêmes structures économiques. Ils supposent que les économies auront des taux de croissances différents selon leurs dotations initiales en capital et en travail.

Azariadis et Drazen utilisent les effets de niveau (niveau critique du capital humain présentant des bifurcations à cause de l'accumulation à la fois du capital physique et humain ) pour expliquer les différents sentiers de croissance vers lesquels l'économie pourrait se diriger . Ils trouvent que l'investissement en accumulation du capital humain représente une externalité positive pouvant expliquer la différence entre le taux de croissance des pays développés et ceux en voie de développement.

Les auteurs distinguent entre deux situations selon que le taux de croissance du capital humain de l'économie dépend ou non de son niveau courant. Dans la première configuration, on suppose que le taux de croissance du capital humain ne dépend que du temps consacré à la formation. Azariadis et Drazen démontrent qu'il n'existe qu'un seul sentier de croissance équilibré. La seconde configuration consiste à supposer que le taux d'accumulation du capital humain est proportionnel au produit du temps moyen de formation et d'une fonction du stock de capital humain déjà accumulé. Lorsque ce taux est à productivité marginale décroissante, on peut distinguer deux états stationnaires. Le premier état, appelé "trappe de sous développement", correspond à une croissance nulle découlant d'une absence de l'investissement en capital humain en gardant toutes les autres variables constantes. Le deuxième équilibre correspond à une croissance régulière à un taux constant, du capital humain, de la consommation et de la production par tête.

Notons que dans ce travail, les auteurs ne considèrent pas le financement de l'éducation et de contraintes potentielles de crédit.

## 2.2 Essai empirique: Variables pertinentes pour le taux de croissance?

***BARRO (1991)*** a réalisé une étude empirique, où il rassemble les données concernant 98 pays pour la période entre 1960 et 1985. Son étude consiste en plusieurs régressions par la méthode des moindres carrés ordinaires. L'auteur trouve que le taux de croissance du PIB réel par habitant est positivement corrélé avec le niveau initial du capital humain représenté ici par les taux de scolarité en 1960. De même, ce taux de croissance est négativement relié au PIB réel par habitant de 1960. Les pays ayant un capital humain plus élevé se retrouvent avec un taux de fertilité plus faible et un taux d'investissement par rapport au PIB relativement élevé. La croissance est inversement corrélé avec les dépenses gouvernementales comme proportion du PIB, mais les coefficients estimés ne sont pas significatifs quand il s'agit des investissements publiques.

Le taux de croissance du PIB réel par habitant est positivement corrélé avec les mesures de stabilité politique (nombre de révolutions et de coups d'état par année, nombre d'assassinats par million d'habitants par année).

Les distorsions de marché mesurés par les déflateurs du PIB ont un impact négatif sur le taux de croissance du PIB réel par habitant.

## 3. Modèles avec contrainte de crédit

***Bencivenga et Smith (1988)*** fournissent un modèle de croissance endogène à la Romer (1986) , dans lequel on intègre un modèle de sélection adverse avec rationnement de crédit. Les auteurs considèrent que l'investissement est entièrement financé par le crédit. Ils trouvent que le problème de sélection adverse dont l'effet est assez fort sur le changement dans l'environnement économique, résulte dans un faible taux de croissance à l'équilibre.

Le second article de ***Bencivenga et Smith (1992)*** fournit un modèle à générations imbriquées, avec toujours une fonction de production ayant un terme d'externalités à la Romer, dans lequel ils mettent l'accent sur le changement au cours du temps du degré de financement du secteur intermédiaire. Ils trouvent que le financement par crédit a un effet positif sur la croissance.

Et enfin ***Jappelli et Pagano (1992)***, étudient l'effet d'une contrainte de liquidité sur l'épargne, sur la croissance ainsi que l'effet de la croissance sur l'épargne.

Ils considèrent un modèle simple à générations imbriquées à trois périodes de vie. Les ménages maximisent leurs utilités sujets à des contraintes de consommation et de crédit.

Les auteurs calculent la richesse nette, qui est égale à la richesse des adultes moins les emprunts des jeunes (comme la croissance de la population est nulle, les raisonnements en termes agrégés et en terme per capita sont identiques).

$$W_t = \frac{\beta\left(1-\phi\right)}{1+\beta} e_t L - \phi \frac{e_{t+1}}{R_{t+1}} L.$$

Où

$\beta$= facteur d'escompte psychologique
$\phi$=fraction de revenu totale que le jeune peut emprunter
$e_t$=salaire au temps t
$R_{t+1}$=taux d'intérêt réel entre le temps t et t+1
$L$= offre de travail

La richesse nette $W_t$ est plus élevée quand la contrainte de liquidité est plus sévère, c'est le cas lorsque $\phi$ est plus faible.

Les auteurs ont ensuite étudié deux cas différents selon l'expression du progrès technique dans la fonction de production.

$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L^{1-\alpha}$.

Jappelli et Pagano prennent la normalisation $L = 1$ et supposent une dépréciation totale du capital physique au cours de la première période de vie. Lorsque le progrès technique $A_t$ est exogène comme dans le modèle de Solow, on suppose qu'il a la forme suivante:

$A_t = A\left(1 + \rho\right)^t$.

Dans ce cas, le modèle prédit que la contrainte de liquidité augmente l'épargne et que l'effet de la croissance sur l'épargne est plus fort pour les économies avec une contrainte de liquidité. Ces deux prédictions sont valables aussi dans une petite économie ouverte avec une mobilité parfaite des capitaux, et où les taux d'intérêt sont déterminés de façon exogène par le marché international du capital . La principale différence avec le modèle pour l'économie ouverte réside sur l'effet ambigu qu'a la croissance sur l'épargne, en effet, d'une part la croissance augmente le revenu présent de l'adulte et sa richesse, d'autre part, il augmente le revenu futur du jeune lui permettant ainsi d'emprunter plus, ce dernier effet étant atténué par la présence de la contrainte de crédit.

Le second cas considéré est celui avec un progrès technologique endogène selon Romer:

$A_t = AK_t^{\eta}$.

Dans ce cas, le modèle prévoit qu'une économie avec une contrainte de liquidité croit plus rapidement. Le taux de croissance pour une économie avec une contrainte de liquidité est toujours plus élevé que dans une économie avec un marché de crédit parfait.

Les auteurs ont trouvé en outre que, sous certaines conditions, la contrainte de liquidité peut augmenter le bien être.

Ils montrent qu'à l'équilibre, les ménages subissant un rationnement de crédit augmentent leur taux d'épargne à cause de l'augmentation du ratio capital-output. Les études empiriques basées sur le crédit à l'habitation confirment que l'épargne augmente lorsque l'on fait face à une contrainte de liquidité sévère. Le taux de croissance du PIB par travailleur est donc positivement corrélé avec la sévérité de la contrainte de liquidité.

Les auteurs déduisent de leurs résultats que la déréglementation financière en 1980 a contribué au déclin de l'épargne national et du taux de croissance des pays de l'OCDE.

## 4. Conclusion

En Résumé, nous avons d'abord parcouru les modèles de base de la croissance en général. Ensuite, nous avons parlé du capital humain, *Azariadis et Drazen (1990)* ont suggéré un modèle d'accumulation du capital humain utilisant le temps comme coût d'opportunité. Enfin, Les auteurs ayant étudiés le crédit, l'ont fait pour financer les entreprises ou bien l'achat d'habitation, comme pour l'étude de *Jappelli et Pagano (1992)*.

Notre étude consiste à lier le taux de croissance au crédit à l'éducation et par conséquent à l'accumulation du capital humain.

## C. MODÈLE THÉORIQUE

## 1. Hypothèses du modèle

Nous allons, dans ce paragraphe, citer quelques hypothèses que nous utiliserons dans notre modèle, d'autres hypothèses seront mentionnées au fur et à mesure de l'établissement du modèle théorique.

Nous considérons un modèle à générations imbriquées (jeunes, adultes et vieux), à 3 périodes de vie (t ,t+1 et t+2).

Un individu maximise son utilité pendant ces 3 périodes.

Chaque individu a la même habileté et le même accès au crédit.

Comme il est standard dans les modèles de croissance endogène, nous supposons que la croissance de la population est nulle.

Nous considérons qu'il y a dépréciation totale du capital physique entre chaque période.

Pour introduire l'effet de la contrainte de crédit sur l'éducation , nous allons supposer que l'investissement en capital humain se fait par rapport au revenu et non par rapport au temps comme ce qui a été fait par Lucas (1988) et Azariadis et Drazen (1990).

## 2. Présentation du problème

Notre modèle constitue des microfondations à un modèle du type Lucas (1988). Nous considérons que durant la première période, l'individu jeune emprunte sur son revenu futur pour, d'une part financer ses études c'est à dire accumuler du capital humain, et d'autre part consommer.

Pendant la deuxième période de sa vie, l'individu adulte est actif, il travaille et reçoit un salaire qui est fonction, entre autre, de sa scolarité. Il rembourse donc l'emprunt contracté pendant la première période, épargne pour sa retraite et bien entendu, fait des dépenses pour sa consommation présente.

Enfin, pendant la troisième période, l'individu retraité consomme son épargne de la deuxième période (nous ne considérons pas dans notre modèle des revenus pouvant découler d'un système de sécurité sociale ou autres).

Le problème de l'individu naissant au temps t, revient donc à maximiser son utilité sujet aux contraintes citées plus haut.

Si nous posons:

$U_t$ : l'utilité totale de l'individu né au temps t;

$u(c_{1t})$: Son utilité pendant la première période de sa vie;

$u(c_{2t+1})$: Son utilité pendant la deuxième période de sa vie;

$u(c_{3t+2})$: Son utilité pendant la troisième période de sa vie;

$\beta$ : Le taux d'escompte psychologique;

$c_{1t}$: La consommation de l'individu pendant la première période;

$c_{2t+1}$ : Sa consommation pendant la deuxième période;

$c_{3t+2}$: Sa consommation pendant la troisième période;

$b_t$ : L'emprunt pour financer ses études à la première période;

$e_t$ : La consommation en éducation pendant la première période;

$\hat{w}_{t+1}$ : Le salaire pendant la deuxième période;

$s_{t+1}$ : L'épargne pendant la deuxième période;

$r_{t+1}$ : Le taux d'intérêt du marché financier pendant la deuxième période;

$r_{t+2}$ : Le taux d'intérêt pendant la troisième période.

Notre problème s'écrit donc:

$$Max\left(U_t\right) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) + \beta^2 u(c_{3t+2})$$

sujet aux contraintes de budget:

$$b_t \geq c_{1t} + e_t$$

$$\hat{w}_{t+1} \geq c_{2t+1} + s_{t+1} + \left(1 + r_{t+1}\right) b_t$$

$$s_{t+1}\left(1 + r_{t+2}\right) \geq c_{3t+2}$$

En serrant les contraintes, nous obtenons les consommations pendant les 3 périodes:

$$c_{1t} = b_t - e_t \tag{1}$$

$$c_{2t+1} = \hat{w}_{t+1} - s_{t+1} - \left(1 + r_{t+1}\right) b_t \tag{2}$$

$$c_{3t+2} = s_{t+1}\left(1 + r_{t+2}\right) \tag{3}$$

À des fins de simplifications, nous posons:

$$1 + r_{t+1} = R_{t+1}$$

et

$$1 + r_{t+2} = R_{t+2}$$

Nous allons considérer des fonctions d'utilités Logarithmiques et ceci dans le but d'éliminer les effets de revenu et de substitution qui pourraient pousser à une fausse interprétation des résultats (c. à. d. l'élasticité de l'épargne par rapport au taux d'intérêt sera nulle ). Nous supposerons donc que

$$u(c_{1t}) = Ln(c_{1t})$$

$$u(c_{2t+1}) = Ln(c_{2t+1})$$

$$u(c_{3t+2}) = Ln(c_{3t+2})$$

## 2.1 Conditions du premier ordre

Le problème étant posé, en écrivant le Lagrangien et en dérivant par rapport au crédit $b_t$, à l'éducation $e_t$ et à l'épargne $s_{t+1}$, nous pouvons déduire les conditions de premier ordre suivantes:

$$\frac{1}{b_t - e_t} - \frac{\beta R_{t+1}}{\hat{w}_{t+1} - s_{t+1} - R_{t+1} b_t} = 0 \tag{4}$$

$$-\frac{1}{b_t - e_t} + \frac{\beta \frac{\partial \hat{w}_{t+1}}{\partial e_t}}{\hat{w}_{t+1} - s_{t+1} - R_{t+1} b_t} = 0 \tag{5}$$

$$-\frac{\beta}{\hat{w}_{t+1} - s_{t+1} - R_{t+1} b_t} + \frac{\beta^2}{s_{t+1}} = 0 \tag{6}$$

Afin de pouvoir résoudre ce système d'équations, il faut calculer la dérivée du salaire $\hat{w}_{t+1}$ par rapport à l'éducation qui n'est rien d'autre que le rendement de l'éducation. Nous avons donc besoin de l'expression de ce salaire en fonction de l'éducation $e_t$, et pour ceci nous allons nous tourner du côté des firmes et de la technologie de production.

## 2.2 Maximisation des profits de la firme

Avant de poser les équations proprement dites, faisons un bref rappel des fondements des modèles de type Lucas (1988).

La fonction de production incorpore comme intrants, le stock du capital physique et un agrégat du travail effectif, ce dernier correspond à l'offre du travail physique nette multiplié par un indicateur d'efficience exprimant les effets positifs de l'éducation sur l'emploi et par conséquent sur le salaire.

Les rendements à l'échelle sont supposés constants pour le capital physique et le travail effectif. Cependant, l'amélioration du niveau de l'éducation des individus provoque aussi des effets collectifs. En effet, un individu né au temps t-1, ayant évolué dans un milieu socio-culturel favorisé bénéficie d'un effet externe positif découlant de l'effet de l'éducation moyenne de ses parents $\bar{e}_{t-2}$. Cet effet en conjonction avec le niveau d'éducation de sa propre génération $e_{t-1}$ détermine son salaire au temps t. L'adjonction de ces effets externes positifs rend les rendements à l'échelle globalement croissants.

Considérons alors une fonction de production de type Cobb-Douglas ayant la forme suivante:

$$F\left(K_t, L_t\right) = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \alpha \in \left(0, 1\right),$$

avec

$A$ : le facteur d'échelle,

$K_t$ : le capital au temps t,

$L_t$: nombre d'unité de travail effective, en unité d'efficience, où

$$L_t = N_t h\left(e_{t-1}, \bar{e}_{t-2}\right)$$

$N_t$: l'offre de travail au temps t,

$h\left(e_{t-1}, \bar{e}_{t-2}\right)$ :l'effet connu dans un modèle de type Lucas du capital humain sur la main d'oeuvre effective où

$e_{t-1}$ est l'éducation de l'individu et

$\bar{e}_{t-2}$ est l'éducation moyenne de la génération précédente.

Nous supposerons que la fonction $h(.)$ est homogène de degré 1:

$$h\left(e_t, \overline{e_{t-1}}\right) = e_t^{\lambda} \overline{e_{t-1}}^{1-\lambda}, \lambda \in \left(0, 1\right).$$

Nous introduisons aussi $k_{t+1} = K_{t+1}/L_{t+1}$, représentant le capital par unité d'efficience.

Les conditions de maximisation du profit de la firme nous donnent l'expression du salaire et de la productivité marginale du capital.

Le salaire au temps t+1 est égal au produit marginal du travail:

$$\hat{w}_{t+1} = \frac{\partial F(K_{t+1}, L_{t+1})}{\partial N_{t+1}} = \left(1-\alpha\right) A K_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{-\alpha} h\left(e_t, \bar{e}_{t-1}\right).$$

En remplaçant la fonction $h(.)$ par son expression en fonction de l'éducation nous obtenons le revenu salarial brut:

$$\hat{w}_{t+1} = (1-\alpha) A k_{t+1}^{\alpha} e_t^{\lambda} \overline{e_{t-1}}^{1-\lambda}. \tag{7}$$

En dérivant par rapport à $e_t$, nous arrivons à l'expression du rendement de l'éducation:

$$\frac{\partial \hat{w}_{t+1}}{\partial e_t} = \lambda (1-\alpha) A K_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{-\alpha} e_t^{\lambda-1} \overline{e_{t-1}}^{1-\lambda} .$$

Que nous pouvons réécrire :

$$\frac{\partial \hat{w}_{t+1}}{\partial e_t} = \lambda \frac{\hat{w}_{t+1}}{e_t}. \tag{7)'$$

La deuxième condition de maximisation du profit de la firme donne le taux d'intérêt comme le produit marginal du capital:

$$R_{t+1} = \frac{\partial F(K_{t+1}, L_{t+1})}{\partial K_{t+1}}.$$

Ou plus explicitement:

$$R_{t+1} = \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} . \tag{8}$$

## 2.3 Accumulation du capital physique

L'accroissement du capital physique dans le temps, qui n'est nul autre que l'investissement, est égal à l'épargne moins la dépréciation:

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t$$

Où

$K_{t+1}$ est le capital au temps t+1,
$K_t$ est le capital au temps t,
$S_t$ est l'épargne net au temps t,
$\delta$ est le taux de dépréciation du capital,
L'hypothèse de la dépréciation totale du capital revient à poser : $\delta = 1$

En plus nous pouvons exprimer l'épargne net par l'épargne des adultes moins l'emprunt des jeunes au temps t, ce qui s'écrit:

$$S_t = N_t\left(s_t - b_t\right)$$

Où

$N_t$ est l'offre de travail,
$s_t$ est l'épargne des adultes au temps t,
$b_t$ est l'emprunt contraint des jeunes au même temps t,

Donc, si nous considérons l'équilibre du marché des biens en supposant une dépréciation totale du capital physique, nous pouvons écrire:

$$K_{t+1} - K_t = N_t\left(s_t - b_t\right) - K_t. \tag{9}$$

Ainsi l'épargne réelle de la période t est égale à $N_t s_t$. Elle finance deux types de dépenses : d'une part les dépenses d'éducation des jeunes qui sont nés à la date t , $N_t b_t$, et d'autre part le stock de capital physique $K_{t+1}$ qui servira à la production à la période suivante.

## 3. Problème sans contrainte de crédit

À partir des équations (4), (5) et (6) représentant les conditions du premier ordre, nous pouvons déduire par des substitutions consécutives les expressions de l'emprunt, de l'éducation et de l'épargne.

Si nous remplaçons dans l'équation (5) $\frac{\partial \hat{w}_{t+1}}{\partial e_t}$, par son expression dans l'équation (7)' et en faisant une soustraction des équations (5)+(4) nous arrivons à l'équation suivante:

$$\frac{\beta\lambda\frac{\hat{w}_{t+1}}{e_t}}{\hat{w}_{t+1} - s_{t+1} - R_{t+1}b_t} - \frac{\beta R_{t+1}}{\hat{w}_{t+1} - s_{t+1} - R_{t+1}b_t} = 0.$$

Ceci implique donc que $e_t = \frac{\lambda}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1}$;

De même en réécrivant l'équation (6), et en isolant l'épargne $s_{t+1}$,

$$s_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\hat{w}_{t+1} - \frac{\beta}{1+\beta}\left(1 + R_{t+1}\right)b_t. \tag{6)'$$

En remplaçant l'épargne ainsi exprimé et $e_t$ de l'avant dernière équation dans l'équation (4) découlant des conditions du premier ordre nous arrivons à:

$$\frac{1}{b_t - \frac{\lambda}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1}} - \frac{\beta R_{t+1}}{\hat{w}_{t+1} - \left[\frac{\beta}{1+\beta}\left(\hat{w}_{t+1} - \left(1 + R_{t+1}\right)b_t\right)\right] - R_{t+1}b_t} = 0.$$

En isolant l'emprunt $b_t$ et en posant $\gamma = \frac{1 + \beta\lambda + \beta^2\lambda}{1 + \beta + \beta^2}$ nous aurons:

$$b_t = \frac{\gamma}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1}\,; \tag{10}$$

$$e_t = \frac{\lambda}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1}\,; \tag{11}$$

En substituant $b_t$ de l'équation (10) dans l'équation (6)', nous avons aisément l'expression de l'épargne à la période t+1 en fonction du salaire,

$$s_{t+1} = \beta\frac{1-\gamma}{1+\beta}\hat{w}_{t+1}\,. \tag{12}$$

### 3.1 Dynamique sans contrainte de crédit

Rappelons que l'un des buts de notre étude est de voir l'effet de l'éducation, de l'épargne ... etc sur le taux de croissance de l'économie. Pour ceci, introduisons une variable $g_t$ représentant le taux de croissance du stock du capital humain. Nous démontrerons par la suite que ce taux de croissance est équivalent au taux de croissance de l'économie dans les conditions de l'état stationnaire.

Nous posons donc:

$$g_t = \frac{e_t}{e_{t-1}}. \tag{13}$$

Si nous substituons $\hat{w}_{t+1}$ et $R_{t+1}$ de l'équation (11) par leurs expressions dans les équations (7) et (8) respectivement, nous obtenons l'expression du taux de croissance du stock du capital humain $g_t$ en fonction du capital par travailleur effectif $k_{t+1}$ :

$$e_t = \lambda \frac{A(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha} e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}}{A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}};$$

$$\left(\frac{e_t}{\bar{e}_{t-1}}\right)^{1-\lambda} = \lambda \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1}.$$

Comme les individus sont identiques, il s'en suit que $\bar{e}_{t-1} = e_{t-1}$ ; donc nous pouvons réécrire le taux de croissance du stock du capital humain comme:

$$g_t = \left[\lambda \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1}\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}. \qquad (13)'$$

L'équation (9) de l'accumulation du capital physique devient, en remplaçant $s_t$ et $b_t$ par leurs expressions dans les équations (10) et (12):

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{N_t}{N_{t+1} e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}} \left[ \frac{\beta}{1+\beta}\left(1-\gamma\right)\hat{w}_t - \frac{\gamma}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1} \right].$$

Comme nous considérons un taux de croissance de la population nul, nous avons:

$$N_{t+1} = N_t.$$

De même en remplaçant $\hat{w}_t$, $\hat{w}_{t+1}$ ainsi que $R_{t+1}$ par les expressions des équations (7) et (8), nous arrivons à :

$$k_{t+1} = \frac{1}{e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}} \left[ \frac{\beta}{1+\beta}\left(1-\gamma\right)\left(1-\alpha\right) A k_t^{\alpha} e_{t-1}^{\lambda} \bar{e}_{t-2}^{1-\lambda} - \frac{\gamma}{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}(1-\alpha) A k_{t+1}^{\alpha} e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda} \right]$$

En remplaçant par l'expression de $g_t$ dans l'équation (13):

$$k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(1-\gamma\right)\left(1-\alpha\right)Ak_t^{\alpha}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{1-\lambda} - \gamma\frac{\left(1-\alpha\right)}{\alpha}k_{t+1}.$$

D'où

$$k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)Ak_t^{\alpha}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{1-\lambda}. \tag{14}$$

Cette équation représente donc l'évolution du capital physique par unité d'efficience, il est entre autre, fonction des paramètres $\beta, \alpha, \lambda$, du facteur d'échelle A et bien entendu du taux de croissance du capital humain. Un coup d'oeil rapide à cette équation ne permet de faire aucune conclusion à ce stade. Une étude plus approfondie de cette évolution passe donc par l'étude de l'état stationnaire.

Donc d'après (14):

$$k_{t+2} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)Ak_{t+1}^{\alpha}\left(\frac{1}{g_{t+1}}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{1-\lambda}.$$

Et en remplaçant dans l'équation (14)

$$k_{t+2} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)A\left[\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)Ak_t^{\alpha}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha}\left(\frac{1}{g_{t+1}}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{1-\lambda}.$$

Or l'équation (13)' peut s'écrire

$$g_{t+1} = \left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+2}\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Ce qui nous donne

$$g_{t+1} = \left[ \lambda \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\beta}{1+\beta} \left( \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha+\gamma(1-\alpha)} \right) A \left[ \frac{\beta}{1+\beta} \left( \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha+\gamma(1-\alpha)} \right) A k_t^{\alpha} \left( \frac{1}{g_t} \right)^{\lambda} \left( \frac{1}{g_{t-1}} \right)^{1-\lambda} \right]^{\alpha} \left( \frac{1}{g_{t+1}} \right)^{\lambda} \left( \frac{1}{g_t} \right)^{1-\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

Ce qui revient à

$$g_{t+1} = \lambda \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[ \frac{\beta}{1+\beta} \left( \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha+\gamma(1-\alpha)} \right) A \right]^{1+\alpha} \left( \frac{1}{g_t} \right)^{1-\lambda+\alpha\lambda} \left( \frac{1}{g_{t-1}} \right)^{\alpha(1-\lambda)} k_t^{\alpha^2} \quad (15)$$

La même conclusion que pour l'équation (14) pourrait être invoquée à ce stade.

En résumé, nous avons établi l'équation (14) traduisant la dynamique du capital par unité d'efficience, ainsi que l'équation (15) qui définit la dynamique du taux de croissance du capital humain.

### 3.2 État stationnaire

Au début de cette section nous allons introduire le taux de croissance de l'économie que nous définissons comme le changement relatif de la production . En effet, comme:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha};$$

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{AK_{t-1}^{\alpha} L_{t-1}^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} L_t \left(\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}}\right)^{-\alpha} \left(1/L_{t-1}\right) = \left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^{\alpha} \left(\frac{N_t e_{t-1}^{\lambda} e_{t-2}^{1-\lambda}}{N_{t-1} e_{t-2}^{\lambda} e_{t-3}^{1-\lambda}}\right);$$

Comme nous considérons une population constante dans notre modèle nous pouvons simplifier par $N_t$ et $N_{t-1}$,

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^{\alpha} \left(\frac{e_{t-1}}{e_{t-2}}\right)^{\lambda} \left(\frac{e_{t-2}}{e_{t-3}}\right)^{1-\lambda}.$$

L'état stationnaire (ou encore, du sentier de croissance équilibré) est défini par les deux conditions suivantes:

1. Le stock du capital physique croît au même rythme que le stock de main d'oeuvre en unités d'efficience, ce qui implique que $k_t$ est constant à travers le temps et nous pouvons écrire pour simplifier:

$$k_t = k_{t+1} = k.$$

2. Le taux de croissance du stock du capital humain est constant à travers le temps, ce qui entraîne:

$$\frac{e_t}{e_{t-1}} = \frac{e_{t-1}}{e_{t-2}} = \frac{e_{t-2}}{e_{t-3}} = \dots$$

et en éliminant tous les indices "t" qui représente le temps, nous avons alors:

$g_{t-1} = g_t = g_{t+1} = g.$

De l'équation explicitant le taux de croissance de l'économie, nous pouvons facilement déduire que dans le cas de l'état stationnaire:

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = g_t,$$

donc, à l'état stationnaire le taux de croissance de l'économie peut être représenté par le taux de croissance du stock du capital humain.

Avec l'élimination des indices "t", l'équation (14) devient :

$$k = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)Ak^{\alpha}\left(\frac{1}{g}\right),$$

ou bien

$$g = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)Ak^{\alpha-1}. \tag{16}$$

De même, l'équation (15) donne:

$$g = \lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\left[\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)A\right]^{1+\alpha}\left(\frac{1}{g}\right)^{1-\lambda+\alpha}k^{\alpha^2},$$

ou

$$g=\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\left[\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)A\right]^{1+\alpha}k^{\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2-\lambda+\alpha}} \quad . \tag{17}$$

En éliminant $g$ des équations (16) et (17), nous obtenons une équation en fonction de la seule inconnue $k$

$$\bar{k}=\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)(\lambda-1)-1}}\left[\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)A\right]^{\frac{\lambda-1}{(1-\alpha)(\lambda-1)-1}} \quad . \tag{18}$$

Et en remplaçant dans l'équation (16) nous trouvons le taux de croissance à l'état stationnaire

$$\bar{g}=\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{(1-\alpha)(\lambda-1)-1}}\left[\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)A\right]^{\frac{-1}{(1-\alpha)(\lambda-1)-1}} \quad . \tag{19}$$

Remarquons que ce taux de croissance $\bar{g}$ à l'état stationnaire dépend du facteur d'échelle[2] $A$ et des paramètres $\beta$ représentant le taux d'escompte psychologique, $\alpha$ lié à la fonction de production et $\lambda$ lié directement à

---

[2] La résolution numérique de l'équation (19) avec le logiciel Matlab, nous a permis de voir l'effet d'une augmentation du facteur d'échelle $A$ sur le taux de croissance à l'état stationnaire. En effet, pour des valeurs raisonnables des autres paramètres, le facteur $A$ a un effet positif "faible" sur la croissance.

l'effet du niveau du capital humain et de l'externalité sur la productivité de la main d'oeuvre.

Afin d'avoir une idée plus précise de cet équilibre, c'est à dire, voir s'il est explosif ou pas, nous allons utiliser des méthodes d'analyses appropriées pour l'étude de la stabilité de l'état stationnaire.

### 3.3 Stabilité de l'état stationnaire

Pour simplifier les expressions à utiliser, nous posons:

$$\phi = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\right)}{\alpha+\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)A.$$

Les équations dynamiques (14) et (15) s'écrivent alors:

$$k_{t+1} = \phi k_t^{\alpha}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{1-\lambda};$$

$$g_{t+1} = \phi^{1+\alpha}\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{1-\lambda+\alpha\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{\alpha(1-\lambda)}k_t^{\alpha^2}.$$

Nous avons donc un système d'équations dynamiques dont nous pouvons étudier la stabilité selon la région où l'on se trouve dans le graphique 1 qui illustre la stabilité asymptotique dans un plan selon la valeur du déterminant D' et de la trace T ainsi que des valeurs des racines de l'équation caractéristique du système. C'est de ce fait que découle l'utilité d'évaluer la matrice Jacobienne du système dynamique que nous dénoterons par J.

Les 4 termes de cette matrice peuvent être écrites comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial k_t}k_{t+1} = \phi\alpha k_t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{1-\lambda};$$

$$\frac{\partial}{\partial g_t}k_{t+1} = -\phi\lambda k_t^{\alpha}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{1+\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{1-\lambda};$$

$$\frac{\partial}{\partial k_t}g_{t+1} = \phi^{1+\alpha}\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\alpha^2 k_t^{\alpha^2-1}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{1-\lambda+\alpha\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{\alpha(1-\lambda)};$$

$$\frac{\partial}{\partial g_t}g_{t+1} = -\phi^{1+\alpha}\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\lambda+\alpha\lambda\right)k_t^{\alpha^2}\left(\frac{1}{g_t}\right)^{2-\lambda+\alpha\lambda}\left(\frac{1}{g_{t-1}}\right)^{\alpha(1-\lambda)}.$$

Évaluée à l'état stationnaire la matrice Jacobienne devient:

$$\begin{pmatrix} \lambda\left(1-\alpha\right)-1 & \alpha^2\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{2-\alpha}{(2-\lambda)(1-\alpha)+\alpha}}\left(\phi\right)^{\frac{\lambda}{(2-\lambda)(1-\alpha)+\alpha}} \\ -\lambda\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{-\frac{2-\alpha}{(2-\lambda)(1-\alpha)+\alpha}}\left(\phi\right)^{-\frac{\lambda}{(2-\lambda)(1-\alpha)+\alpha}} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Le déterminant et la trace sont donnés par:

$$\det J = \alpha\left(\lambda-1\right);$$

$$trJ = \left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right).$$

L'équation caractéristique s'écrit donc:

$$p\left(\mu\right) = \mu^2 - \mu\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) + \alpha\left(\lambda-1\right) = 0\,.$$

Le discriminant est strictement positif et égal à:

$$\Delta = \left(\lambda - 1\right)^2 \left(1 - \alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda - 1\right).$$

Et les racines de l'équation caractéristique sont données par:

$$\mu_1 = \frac{\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) - \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2\left(1-\alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda-1\right)}}{2}$$

$$\mu_2 = \frac{\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) + \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2\left(1-\alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda-1\right)}}{2}$$

L'équation caractéristique peut donc être écrite comme:

$$p(a) = \left(a - \frac{\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) - \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2\left(1-\alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda-1\right)}}{2}\right)\ldots$$

$$\times\left(a - \frac{\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) + \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2\left(1-\alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda-1\right)}}{2}\right).$$

Les racines du cercle unitaire sont données par:

$$p\left(1\right) = \left(1 - \frac{\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) - \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2\left(1-\alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda-1\right)}}{2}\right)\ldots$$

$$\times\left(1 - \frac{\left(1-\alpha\right)\left(\lambda-1\right) + \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2\left(1-\alpha\right)^2 - 4\alpha\left(\lambda-1\right)}}{2}\right); \text{ et}$$

$$p(-1)=\left(-1-\frac{(1-\alpha)(\lambda-1)-\sqrt{(\lambda-1)^2(1-\alpha)^2-4\alpha(\lambda-1)}}{2}\right)\ldots$$

$$\times\left(-1-\frac{(1-\alpha)(\lambda-1)+\sqrt{(\lambda-1)^2(1-\alpha)^2-4\alpha(\lambda-1)}}{2}\right).$$

Nous pouvons déduire à ce stade que :

$\det J<0$ et $trJ<0$.

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et de signes opposés; aussi, nous avons:

$p(1)>0$ et $p(-1)>0$ .

Le graphique 1 est divisé en 8 régions suivant les valeurs des racines du cercle unitaire:

Région 1: $p(1)<0$ et $p(-1)>0$ les deux valeurs propres se trouvent du même côté de -1 et dans différents côtés de 1. La seule possibilité est qu'une des valeurs propres se trouve en (-1,1) et l'autre en $(1,\infty)$. L'état stationnaire est un point de selle.

Région 2: $p(1) < 0$ et $p(-1) < 0$ . Les deux valeurs propres se trouvent de signes opposés à l'extérieur du cercle unitaire; l'état stationnaire est une source.

Région 3: $p(1) > 0$ et $p(-1) < 0$ . L'état stationnaire est dans ce cas aussi un point de selle.

Région 4: $p(1) > 0$ et $p(-1) > 0$ . Les deux valeurs propres se trouvent du même côté de 1 et de -1. Nous avons aussi, D'>0 et les deux valeurs propres sont négatives dans $(-\infty, -1)$, avec une trace T<-2 . L'état stationnaire est une source.

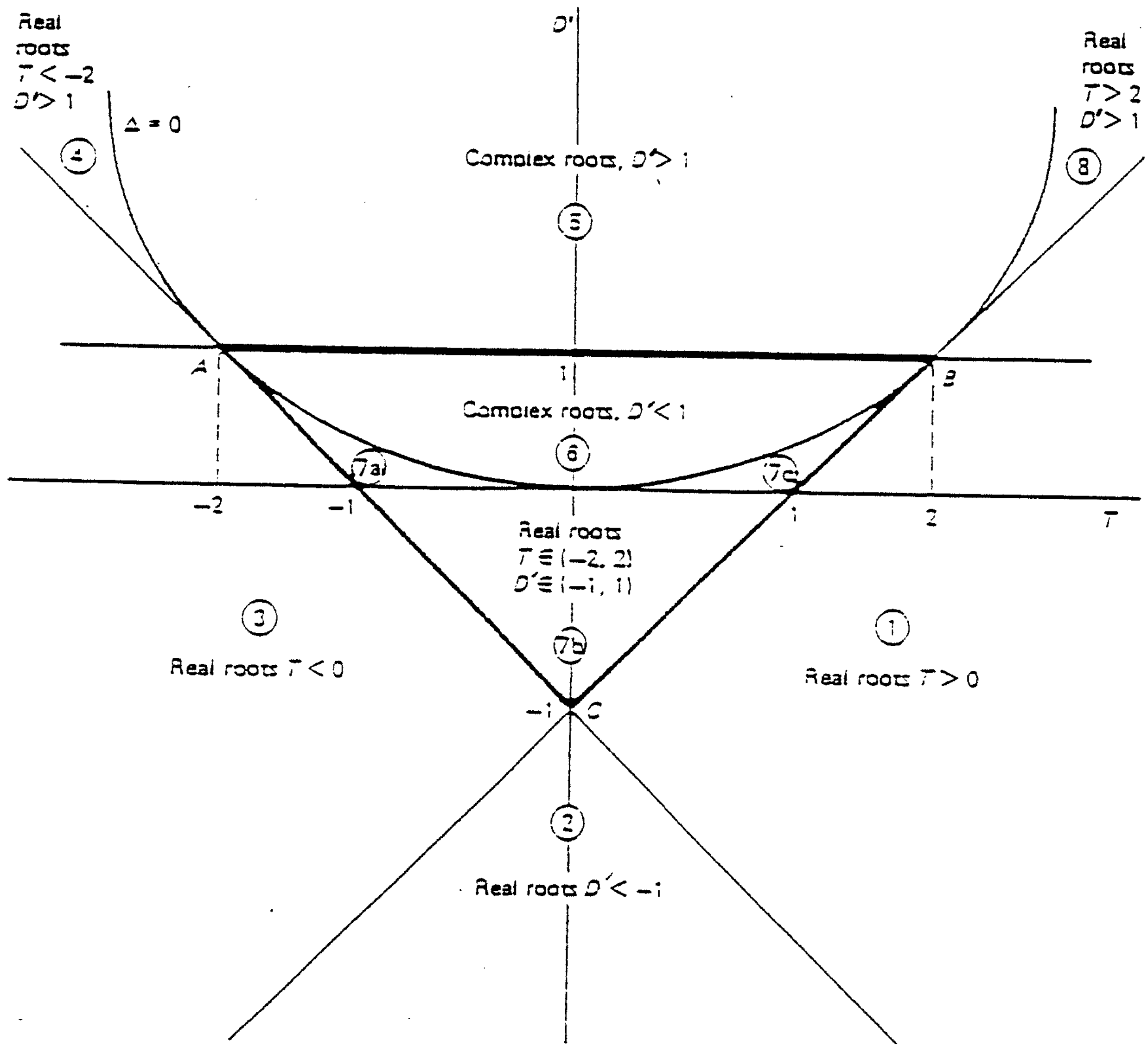
Régions 5 et 6: Les valeurs propres sont complexes. On a dans ce cas des oscillations. La région 6 correspond cependant à des spirales stables alors que dans la région 5 les spirales sont instables.

Région 7: $p(1) > 0$ et $p(-1) > 0$ , la trace $T \in (-2, 2)$ et $D' \in (-1, 1)$. Les 2 valeurs propres tombent dans l'intervalle (-1,1) et on a un puits.

Région 8: $p(1) > 0$ et $p(-1) > 0$ . Ici D'>0 et T>2 , les 2 valeurs propres sont positives et se trouvent du même côté de 1 et -1. L'état stationnaire est une source.

Dans notre cas et vu les valeurs des différents paramètres mentionnés plus haut, nous nous trouvons dans la région 7b du graphique 1, qui représente un puits avec des spirales stables, il n' y a donc pas à ce stade de problème d'oscillations.

# Graphique 1




Stabilité asymptotique dans le plan

Tiré du livre de C. Azariadis, "Intertemporal Macroeconomics",

(Basil Blackwell: 1994)

## 4. Problème avec contrainte de crédit en première période

Nous imposons à l'agent, pendant la première période de sa vie, une contrainte de crédit de telle façon que le crédit $\bar{b}$ dans ces conditions soit inférieur à l'emprunt $b_t$ qu'il aurait choisi s'il maximisait son utilité. Nous exprimons cette idée à travers la contrainte $b_t \leq \bar{b}$ où $b_t$ est l'emprunt optimal du problème sans contrainte.

Nous remplaçons donc l'équation (4) par:

$$b_t = \bar{b} \tag{4)'$$

Dans ce qui va suivre nous allons essayer d'exprimer les relations dynamiques ainsi que l'état stationnaire pour le capital physique par unité d'efficience et pour la consommation en éducation. Pour ce faire, nous devons d'abord trouver l'expression de l'épargne $s_{t+1}$, en fonction du salaire et du crédit. En éliminant $e_t$ par substitution dans (5) et (6), nous arrivons à l'équation suivante:

$$s_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\hat{w}_{t+1} - R_{t+1}\bar{b}\right). \tag{20}$$

### 4.1 Dynamique avec contrainte de crédit

Nous allons essayer d'exprimer l'évolution du capital physique par unité d'efficience $k_t$ ainsi que l'évolution de l'accumulation du capital humain $e_t$ dans le cas où l'agent fait face à une contrainte de crédit constante.

Notons qu'à ce stade du problème, l'introduction d'une expression quelconque exprimant le taux de croissance ne ferait que compliquer les équations mathématiques au lieu de les simplifier.

Avec des substitutions adéquates du côté de l'accumulation du capital physique par unité d'efficience (Éq. (7), (8), (9) et (20) ):

$$k_{t+1} = \frac{s_t - \bar{b}}{e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}} = \frac{\frac{\beta}{1+\beta}\left(A\left(1-\alpha\right)k_t^{\alpha} e_{t-1}^{\lambda} \bar{e}_{t-2}^{1-\lambda} - A\alpha k_t^{\alpha-1}\bar{b}\right) - \bar{b}}{e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}}. \tag{21}$$

De même, en éliminant $s_{t+1}$, l'épargne à la période t+1, en la remplaçant par l'équation (20) dans les équations (5) et (6), nous pouvons exprimer $e_t$ en fonction de $\bar{b}$ et $\hat{w}_{t+1}$, soit:

$$e_t = \frac{\beta(1+\beta)\lambda \hat{w}_{t+1}\bar{b}}{(1+\beta\lambda+\beta^2\lambda)\hat{w}_{t+1} - R_{t+1}\bar{b}}.$$

Si nous substituons $\hat{w}_{t+1}$ et $R_{t+1}$ de la dernière équation par leurs expressions dans l'équation (7) et (8), nous obtenons l'expression de l'accumulation du capital humain:

$$e_{t+1} = \frac{\beta\left(1+\beta\right)\lambda A\left(1-\alpha\right)k_{t+2}^{\alpha}e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_{t}^{1-\lambda}\bar{b}}{\left(1+\beta\lambda+\beta^{2}\lambda\right)A\left(1-\alpha\right)k_{t+2}^{\alpha}e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_{t}^{1-\lambda} - A\alpha k_{t+2}^{\alpha-1}\bar{b}}. \qquad (22)$$

Afin de simplifier les expressions de $k_{t+1}$ et $e_{t+1}$ posons:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{1+\beta}A\left(1-\alpha\right);$$

$$\sigma = \frac{\beta}{1+\beta}A\alpha;$$

$$\delta = \left(\beta\lambda+\beta^{2}\lambda\right)\frac{\left(1-\alpha\right)}{\alpha};$$

$$\eta = \left(1+\beta\lambda+\beta^{2}\lambda\right)\frac{\left(1-\alpha\right)}{\alpha}.$$

Les équations (21) et (22) peuvent alors s'écrire:

$$k_{t+1} = \frac{\varepsilon k_{t}^{\alpha}e_{t-1}^{\lambda}\bar{e}_{t-2}^{1-\lambda} - \sigma k_{t}^{\alpha-1}\bar{b} - \bar{b}}{e_{t}^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}} \qquad (23)$$

$$e_{t+1} = \frac{\delta\bar{b}k_{t+2}e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_{t}^{1-\lambda}}{\eta k_{t+2}e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_{t}^{1-\lambda} - \bar{b}} \qquad (24)$$

Remarquons qu'il faut retenir ces deux équations puisqu'elles représentent les équations de base dans l'étude de la dynamique et de l'état stationnaire.

Nous allons dans ce qui suit essayer de leur donner une forme plus simple à interpréter en procédant à des transformations de variables successives.

Considérons maintenant la transformation de variables suivante:

$x_{t+1} = k_{t+1} e_t^{\lambda} \bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}$.

La variable $x$ ainsi définie, ne représente qu'un artifice de calcul pour résoudre, entre autre, le problème de l'état stationnaire.

Les équations dynamiques (23) et (24) peuvent donc être écrites

$$x_{t+1} = k_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t - \sigma \bar{b}\right) - \bar{b};$$

$$e_{t+1} = \frac{\delta x_{t+2} \bar{b}}{\eta x_{t+2} - \bar{b}};$$

Et puisque

$$k_t = \frac{x_t}{e_{t-1}^{\lambda}\, \bar{e}_{t-2}^{1-\lambda}},$$

de ce qui précède nous pouvons aussi écrire

$$e_{t-1} = \frac{\delta x_t \bar{b}}{\eta x_t - \bar{b}};$$

$$e_{t-2} = \frac{\delta x_{t-1} \bar{b}}{\eta x_{t-1} - \bar{b}};$$

En remplaçant dans l'expression de $k_t$, nous obtenons

$$k_t = \frac{x_t}{\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\eta x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda} \left(\frac{\delta x_{t-1} \bar{b}}{\eta x_{t-1} - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}}.$$

Nous pouvons donc exprimer la dynamique de la variable $x$ par une équation de différence du 2ème degré:

$$x_{t+1} = \frac{x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t - \sigma\bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\eta x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta x_{t-1}\bar{b}}{\eta x_{t-1} - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha-1}} - \bar{b}. \tag{25}$$

Considérons ensuite une deuxième transformation de variables qui permet de passer d'une équation de second ordre à un système de deux équations du premier ordre.

Définissons les variables auxiliaires suivantes:

$y_t = x_{t-1}$;

$y_{t+1} = x_t$.

Le nouveau système d'équations peut donc être écrit:

$$x_{t+1} = \frac{x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t - \sigma\bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\eta x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{\eta y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha-1}} - \bar{b}; \tag{26}$$

$$y_{t+1} = x_t. \tag{27}$$

L'étude du système d'équations du premier ordre représenté par (26) et (27) est beaucoup plus facile à faire que celui des équations (23) et (24) que nous cherchons véritablement à étudier, mais la transformation inverse permettra de tirer toutes les conclusions nécessaires.

## 4.2 État stationnaire avec contrainte de crédit

À l'état stationnaire, par définition, nous pouvons écrire:

$x_{t+1} = x_t = x^*;$

$y_{t+1} = y_t = y^*.$

Et en plus de l'équation (27) nous avons:

$y^* = x^*.$

D'après les équations (26) et (27), $x^*$ de l'état stationnaire satisfait

$$x^* = \frac{x^{*(\alpha-1)}\left(\varepsilon x^* - \sigma\bar{b}\right)}{\left(\frac{\delta x^* \bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right)^{\alpha-1}} - \bar{b};$$

en simplifiant

$$x^* = \frac{\left(\varepsilon x^* - \sigma\bar{b}\right)}{\left(\frac{\delta \bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right)^{\alpha-1}} - \bar{b}.$$

Ce qui peut être développé en

$$\left(x^* + \bar{b}\right)\left(\delta\bar{b}\right)^{\alpha-1} = \left(\varepsilon x^* - \sigma\bar{b}\right)\left(\eta x^* - \bar{b}\right)^{\alpha-1};$$

ou bien

$$\left(x^* + \bar{b}\right)\left(\frac{\eta x^* - \bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha} - \left(\varepsilon x^* - \sigma\bar{b}\right) = 0.$$

À titre d'illustration, considérons d'abord le cas particulier où $\alpha = \frac{1}{2}$, ce qui donne:

$\sigma = \varepsilon$ et $\eta = \delta + 1$.

Élevons le tout au carré

$$\left(x^* + \bar{b}\right)^2\left(\eta x^* - \bar{b}\right) = \delta\bar{b}\left(\varepsilon x^* - \sigma\bar{b}\right)^2.$$

Il s'en suit que

$$\left(x^{*2} + 2x^*\bar{b} + \bar{b}^2\right)\left(\eta x^* - \bar{b}\right) = \delta\bar{b}\left(\varepsilon^2 x^{*2} - 2\varepsilon\sigma x^*\bar{b} + \sigma^2\bar{b}^2\right);$$

ou

$$\eta x^{*3} - x^{*2}\bar{b} + 2\eta x^{*2}\bar{b} - 2x^*\bar{b}^2 + \eta x^*\bar{b}^2 - \bar{b}^3 = \varepsilon^2\delta x^{*2}\bar{b} - 2\varepsilon\sigma\delta x^*\bar{b}^2 + \sigma^2\delta\bar{b}^3;$$

$$\eta x^{*3} - x^{*2}\bar{b}\left(1 - 2\eta + \varepsilon^2\delta\right) - 2x^*\bar{b}^2\left(1 - \tfrac{\eta}{2} - \varepsilon\sigma\delta\right) - \bar{b}^3\left(1 + \sigma^2\delta\right) = 0.$$

Et en éliminant $\eta$ et $\sigma$ nous arrivons à

$$\left(1 + \delta\right)x^{*3} + x^{*2}\bar{b}\left(1 + 2\delta - \varepsilon^2\delta\right) - x^*\bar{b}^2\left(1 - \delta - 2\varepsilon^2\delta\right) - \bar{b}^3\left(1 + \varepsilon^2\delta\right) = 0.$$

En divisant toute l'équation par $1 + \delta$ nous arrivons à l'équation du 3e ordre suivante:

$$x^{*3} + x^{*2}\bar{b}\left(\tfrac{1+2\delta-\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right) - x^*\bar{b}^2\left(\tfrac{1-\delta-2\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right) - \bar{b}^3\left(\tfrac{1+\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right) = 0.$$

Pour simplifier les notations nous posons

$$B = \left(\frac{1 + 2\delta - \varepsilon^2\delta}{1 + \delta}\right)\bar{b};$$

$$C = -\left(\frac{1 - \delta - 2\varepsilon^2\delta}{1 + \delta}\right)\bar{b}^2;$$

$$D = -\left(\frac{1+\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)\bar{b}^3;$$

L'équation cubique devient donc

$$x^{*3} + Bx^{*2} + Cx^* + D = 0.$$

Utilisons la transformation de variable suivante:

$$x^* = z - \frac{B}{3}.$$

Ce qui nous donne

$$\left(z - \frac{B}{3}\right)^3 + B\left(z - \frac{B}{3}\right) + C\left(z - \frac{B}{3}\right) + D = 0;$$

En rassemblant les termes au carré

$$\frac{1}{27}\left(3z + 2B\right)\left(3z - B\right)^2 + C\left(\frac{3z - B}{3}\right) + D = 0;$$

en développant

$$\frac{1}{27}\left(3z + 2B\right)\left(9z^2 - 6zB + B^2\right) + C\left(\frac{3z - B}{3}\right) + D = 0;$$
$$\frac{1}{27}\left(27z^3 - 9B^2z + B^3\right) + Cz - \left(\frac{BC}{3}\right) + D = 0;$$

et enfin, en mettant l'équation sous forme d'une cubique, nous obtenons:

$$z^3 + \left(C - \frac{B^2}{3}\right)z + \left(\frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3} + D\right) = 0.$$

La résolution de cette équation par la méthode de Cardano nous donne le discriminant suivant:

$$\Delta = 4\left(C - \frac{B^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3} + D\right)^2.$$

En développant cette dernière équation nous arrivons à l'expression du discriminant

$$\Delta = -\frac{320}{27}B^6 + \frac{320}{9}B^4C - B^2C^2 + 4C^3 + 27D^2 + 4DB^3 - 18BCD.$$

En remplaçant B, C et D par leur expression le discriminant devient

$$\Delta = -\frac{320}{27}\left(\frac{1+2\delta-\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^6\bar{b}^6 - \frac{320}{9}\left(\frac{1+2\delta-\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^4\left(\frac{1-\delta-2\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)\bar{b}^6 - \left(\frac{1+2\delta-\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^2\left(\frac{1-\delta-2\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^2\bar{b}^6 - \ldots$$
$$4\left(\frac{1-\delta-2\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^3\bar{b}^6 + 27\left(\frac{1+\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^2\bar{b}^6 - 4\left(\frac{1+\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)\left(\frac{1+2\delta-\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)^3\bar{b}^6 - 18\left(\frac{1+2\delta-\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)\left(\frac{1-\delta-2\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)\left(\frac{1+\varepsilon^2\delta}{1+\delta}\right)\bar{b}^6$$

Remarquons que le discriminant est une fonction linéaire de $\bar{b}^6$, donc la valeur et la nature de l'état stationnaire pour la variable $x$(que ce soit un nombre réel ou complexe) ne dépend que des paramètres et il est indépendant de la valeur de la contrainte de crédit.

Afin d'alléger la notation, posons:

$$\Delta = \Phi\bar{b}^6$$

Les racines de l'équation cubique satisfont donc la formule de Cardano

$$z = \left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3} + D\right)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3} + D\right)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

ce qui peut aussi s'écrire:

$$z=\left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27}-\frac{BC}{3}+D\right)}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\Phi\bar{b}^6}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27}-\frac{BC}{3}+D\right)}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Phi\bar{b}^6}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

En retransformant, pour obtenir les racines en terme de la variable $x$, nous pouvons écrire:

$$x^*=\bar{b}\left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27}-\frac{BC}{3}+D\right)}{2\bar{b}^3}+\frac{1}{2}\sqrt{\Phi}\right]^{\frac{1}{3}}+\bar{b}\left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27}-\frac{BC}{3}+D\right)}{2\bar{b}^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Phi}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}-\bar{b}\frac{B}{3\bar{b}}.$$

Pour simplifier la notation, posons

$$\Psi=\left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27}-\frac{BC}{3}+D\right)}{2\bar{b}^3}+\frac{1}{2}\sqrt{\Phi}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{\left(\frac{2B^3}{27}-\frac{BC}{3}+D\right)}{2\bar{b}^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Phi}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}-\frac{B}{3\bar{b}}.$$

Il faut insister à ce stade que la valeur de $\Psi$ est indépendante de la contrainte de crédit $\bar{b}$.

La valeur de $x^*$ à l'état stationnaire est donc de la forme suivante:

$x^*=\Psi\bar{b}$.

Donc l'état stationnaire pour la variable $x$ est linéaire dans la valeur de $\bar{b}$.

Retransformons maintenant pour avoir la valeur du capital humain et du capital physique par unité d'efficience à l'état stationnaire, comme nous avions:

$$k^*=\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}},$$

et

$$e^* = \frac{\delta x^* \bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}.$$

En substituant par la valeur de $x^*$ fonction de la contrainte de crédit, nous arrivons à:

$$k^* = \frac{\eta\Psi - 1}{\delta},$$

de même

$$e^* = \frac{\delta\Psi\bar{b}}{\eta\Psi - 1}.$$

Les valeurs de $\eta$ et $\Psi$ sont supérieures à 1, $k^*$ et $e^*$ sont donc positifs. Le capital par unité d'efficience est indépendant de la contrainte de crédit, de même qu'une contrainte de crédit plus sévère a un effet négatif sur l'éducation et par conséquent sur l'accumulation du capital humain à l'état stationnaire.

## 4.3 Étude de la stabilité de l'état stationnaire

### 4.3.1 Cas où alpha=1/2

Reprenons les équations dynamiques (26) et (27) et remplaçons $\alpha$ , $\sigma$ et $\eta$ par leurs valeurs ($\sigma = \varepsilon$ et $\eta = \delta + 1$) ce qui revient donc à :

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=\left(\Psi+1\right)\left[\left(\frac{-1}{2\Psi}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\delta\varepsilon^2}\left(\frac{\Psi+1}{\Psi-1}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{\left(\Psi-1\right)}\right)\right];$$

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=\left[\frac{\left(\Psi+1\right)}{\left(\Psi-1\right)}-\left(\frac{\left(\Psi+1\right)}{2\Psi}+\left(\frac{\lambda}{\delta\varepsilon^2}\right)\frac{\left(\Psi+1\right)^3}{2\Psi\left(\Psi-1\right)^2}\right)\right].$$

Cherchons maintenant l'expression du deuxième terme de la première rangée du Jacobien

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t}=\frac{\varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t-\bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{(1+\delta)x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{(1+\delta)y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\left(1+\delta\right)x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{-\delta\bar{b}^2}{\left(\left(1+\delta\right)y_t-\bar{b}\right)^2}\right)\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\left(1+\delta\right)y_t-\bar{b}}\right)^{-\lambda}.$$

Les mêmes simplifications que pour ce qui précède nous donnent

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t}=\frac{\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)}{\left(y_t\right)}\left(-\frac{1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\bar{b}}{\left(\left(1+\delta\right)y_t-\bar{b}\right)}\right)=\left(-\frac{1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)\bar{b}}{y_t\left(\left(1+\delta\right)y_t-\bar{b}\right)}\right).$$

À l'état stationnaire $x_{t+1}=y_t=x^*=\Psi\bar{b}$, et donc

$$\left(\frac{\bar{b}}{\left(1+\delta\right)x^*-\bar{b}}\right)=\frac{1}{\delta\varepsilon^2}\left[\frac{\left(x^*+\bar{b}\right)}{\left(x^*-\bar{b}\right)}\right]^2=\frac{1}{\left(1+\delta\right)\Psi-1}=\frac{1}{\delta\varepsilon^2}\left[\frac{\left(\Psi+1\right)}{\left(\Psi-1\right)}\right]^2.$$

Substituons dans l'expression pour $\dfrac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t}$, ce qui donne:

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t}=\left(-\frac{1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\left(\Psi+1\right)\bar{b}^2}{\Psi\bar{b}\left(\left(1+\delta\right)\Psi\bar{b}-\bar{b}\right)}\right)=-\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi}\right)\left(\frac{1}{\left(\left(1+\delta\right)\Psi-1\right)}\right)$$

$$x_{t+1} = \frac{\varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{(1+\delta)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{(1+\delta)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}} - \bar{b};$$

$$y_{t+1} = x_t.$$

La matrice Jacobienne du système s'écrit

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} \\ \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial y_{t+1}}{\partial y_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le premier terme de la rangée supérieure du Jacobien est donné par:

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{\left(1+\delta\right)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}\left[-\varepsilon\frac{1}{2}x_t^{-\frac{3}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right) + \varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right)\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{(1+\delta)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{(1+\delta)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{(1+\delta)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda-1}\left(\frac{-\delta\bar{b}^2}{\left((1+\delta)x_t - \bar{b}\right)^2}\right)\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{(1+\delta)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}$$

ou

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x_t}\right)\frac{\varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{(1+\delta)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{(1+\delta)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1}{\left(x_t - \bar{b}\right)}\right)\frac{\varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{(1+\delta)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{(1+\delta)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\lambda}{2}\frac{\varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{(1+\delta)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{(1+\delta)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}}\right)^{-1}\left(\frac{-\delta\bar{b}^2}{\left(\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}\right)^2}\right).$$

Notons que

$$x_{t+1} + \bar{b} = \frac{\varepsilon x_t^{-\frac{1}{2}}\left(x_t - \bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t \bar{b}}{\left(1+\delta\right)y_t - \bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}} ,$$

En remplaçant cette expression dans l'équation précédente nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \left(-\frac{1}{2x_t}\right)\left(x_{t+1} + \bar{b}\right) + \left(\frac{1}{\left(x_t - \bar{b}\right)}\right)\left(x_{t+1} + \bar{b}\right) - \frac{\lambda}{2}\left(x_{t+1} + \bar{b}\right)\left(\frac{\delta x_t \bar{b}}{\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}}\right)^{-1}\left(\frac{\delta \bar{b}^2}{\left(\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}\right)^2}\right),$$

ou

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \left(x_{t+1} + \bar{b}\right)\left[\left(\frac{-1}{2x_t}\right)\left(1 + \frac{\lambda \bar{b}}{\left(\left(1+\delta\right)x_t - \bar{b}\right)}\right) + \left(\frac{1}{\left(x_t - \bar{b}\right)}\right)\right]$$

Rappelons que la valeur de $x^*$ à l'état stationnaire vérifie la relation

$$\left(\frac{\bar{b}}{\left(1+\delta\right)x^* - \bar{b}}\right) = \frac{1}{\delta\varepsilon^2}\left[\frac{\left(x^* + \bar{b}\right)}{\left(x^* - \bar{b}\right)}\right]^2 .$$

Donc à l'état stationnaire,

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \left(x^* + \bar{b}\right)\left[\left(\frac{-1}{2x^*}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\delta\varepsilon^2}\left(\frac{\left(x^* + \bar{b}\right)}{\left(x^* - \bar{b}\right)}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{\left(x^* - \bar{b}\right)}\right)\right].$$

En substituant $x^*$ par $\Psi\bar{b}$, nous obtenons

ou

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = -\left(\frac{1-\lambda}{2\delta\varepsilon^2}\right)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi}\right)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi-1}\right)^2.$$

Ainsi le déterminant du Jacobien s'écrit

$$\det J = -\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = \left(\frac{1-\lambda}{2\delta\varepsilon^2}\right)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi}\right)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi-1}\right)^2.$$

Comme la valeur de $\Psi$ est strictement positive et même supérieure à 1, nous pouvons déduire de l'équation précédente que le déterminant est positif, ceci limite donc le déplacement de l'état stationnaire au cadran supérieur du graphique 1, mais ne nous donne aucune indication quand à la stabilité du système.

La trace est donnée par

$$trJ = \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \frac{\left(\Psi+1\right)}{\left(\Psi-1\right)} - \left(\frac{\left(\Psi+1\right)}{2\Psi} + \left(\frac{\lambda}{\delta\varepsilon^2}\right)\frac{\left(\Psi+1\right)^3}{2\Psi\left(\Psi-1\right)^2}\right).$$

Le signe de la trace dépend des valeurs des paramètres $\Psi$ , $\delta$ , $\varepsilon$ et $\lambda$.

L'équation caractéristique est donnée par

$$p\left(\mu\right) = \mu^2 - \mu trJ + \det J.$$

Avec les substitutions adéquates, nous pouvons écrire

$$p\left(\mu\right) = \mu^2 - \mu\left[\frac{\left(\Psi+1\right)}{\left(\Psi-1\right)} - \frac{\left(\Psi+1\right)}{2\Psi}\left(1 + \left(\frac{\lambda}{1+2\delta}\right)\left(\frac{\left(\Psi+1\right)}{\left(\Psi-1\right)}\right)^2\right)\right] + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi}\right)\left(\frac{1}{\left(\left(1+\delta\right)\Psi-1\right)}\right).$$

De même le discriminant est donné par

$$\Delta=\left[\frac{(\Psi+1)}{(\Psi-1)}-\frac{(\Psi+1)}{2\Psi}\left(1+\left(\frac{\lambda}{1+2\delta}\right)\left(\frac{(\Psi+1)}{(\Psi-1)}\right)^{2}\right)\right]^{2}-2(1-\lambda)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi}\right)\left(\frac{1}{((1+\delta)\Psi-1)}\right).$$

Les racines de l'équation caractéristique dépendent fortement des paramètres, puisque le signe du discriminant en dépend. Ainsi dans le cas où nous pouvons considérer un $\Delta$ positif ces racines s'écrivent

$$\mu_1,\mu_2=\frac{1}{2}\left(trJ\pm\sqrt{\Delta}\right).$$

La factorisation de l'équation caractéristique nous donne donc

$$p(a)=(a-\mu_1)(a-\mu_2).$$

La relation des racines avec le cercle unitaire est

$$p(1)=(1-\mu_1)(1-\mu_2);$$
$$p(-1)=(-1-\mu_1)(-1-\mu_2).$$

Donc en variant les différents paramètres du système nous pouvons nous déplacer facilement dans la partie supérieure du graphique 1, là où le déterminant est positif, ce qui implique que l'état stationnaire pourrait être stable s'il se trouve dans les régions 6, 7a et 7c. Dans la région 6 où les racines sont complexes nous avons des spirales stables alors que dans les régions 7a et 7c, les racines sont réelles et nous avons des noeuds stables.

Si l'état stationnaire se localise en dehors des régions précitées, nous nous retrouvons en présence de problème d'oscillations et l'état stationnaire est instable. Dans la région 5, les racines sont complexes, l'état stationnaire est une source instable. Dans ce dernier cas, le système dynamique peut perdre sa stabilité autour de l'état stationnaire et des bifurcations Hopf peuvent survenir. Enfin, dans les régions 4 et 8 les racines sont réelles et l'état stationnaire représente une source instable.

### 4.3.2 Cas avec alpha quelconque

Considérons maintenant le Jacobien dans le cas général ou alpha est quelconque. Reprenons les équations dynamiques du système

$$x_{t+1} = \frac{x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t - \sigma\bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha-1}} - \bar{b};$$

$$y_{t+1} = x_t.$$

Cherchons la dérivée par rapport à $x_t$

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=\frac{\left[\left(\alpha-1\right)x_t^{\alpha-2}\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)+\varepsilon x_t^{\alpha-1}\right]\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha-1}-\ldots}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{2\left(\alpha-1\right)}}$$

$$\frac{\ldots-x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{\left(1-\lambda\right)\left(\alpha-1\right)}\lambda\left(\alpha-1\right)\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda\left(\alpha-1\right)-1}\left(\frac{\delta\bar{b}\left(\eta x_t-\bar{b}\right)-\eta\delta x_t\bar{b}}{\left(\eta x_t-\bar{b}\right)^2}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{2\left(\alpha-1\right)}};$$

ou

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=\frac{\left[\left(\alpha-1\right)x_t^{\alpha-2}\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)+\varepsilon x_t^{\alpha-1}\right]}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\left(\alpha-1\right)}}-\frac{\lambda\left(\alpha-1\right)x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{\left(1-\lambda\right)}\right]^{\left(\alpha-1\right)}\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{-1}\left(\frac{-\delta\bar{b}^2}{\left(\eta x_t-\bar{b}\right)^2}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{2\left(\alpha-1\right)}}$$

en rassemblant l'expression de $x_{t+1}+\bar{b}$

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=\frac{\left(\alpha-1\right)x_t^{-1}x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)+\varepsilon x_t^{\alpha-1}}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\left(\alpha-1\right)}}+\frac{x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\left(\alpha-1\right)}}\lambda\left(\alpha-1\right)\left(\frac{\bar{b}}{x_t\left(\eta x_t-\bar{b}\right)}\right);$$

en remplaçant par $x_{t+1}+\bar{b}$

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=\frac{\left(\alpha-1\right)\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)}{x_t}+\varepsilon\frac{\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)}{\left(\varepsilon x_t-\sigma\bar{b}\right)}+\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)\lambda\left(\alpha-1\right)\left(\frac{\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right);$$

et en factorisant, nous arrivons à l'expression suivante:

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}=-\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left[\frac{1}{x_t}\left(1+\frac{\lambda\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)-\frac{1}{\left(\left(1-\alpha\right)x_t-\alpha\bar{b}\right)}\right].$$

De même la dérivée par rapport à $y_t$ peut être déduite des équations dynamiques:

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = -\frac{x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t - \sigma\bar{b}\right)\left(\alpha-1\right)\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha-2}\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(1-\lambda\right)\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{-\lambda}\left(\frac{\delta\bar{b}\left(\eta y_t-\bar{b}\right)-\delta\eta y_t\bar{b}}{\left(\eta y_t-\bar{b}\right)^2}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{2\left(\alpha-1\right)}}$$

ou

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = -\frac{x_t^{\alpha-1}\left(\varepsilon x_t - \sigma\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\left(\frac{\bar{b}}{y_t\left(\eta y_t-\bar{b}\right)}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)^{\lambda}\left(\frac{\delta y_t\bar{b}}{\eta y_t-\bar{b}}\right)^{1-\lambda}\right]^{\alpha-1}};$$

ce qui donne

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = -\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\left(\frac{\bar{b}}{y_t\left(\eta y_t-\bar{b}\right)}\right).$$

Nous pouvons donc construire la matrice Jacobienne du système dynamique

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dont le premier terme est donné par

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = -\left(1-\alpha\right)\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)\left[\frac{1}{x_t}\left(1+\frac{\lambda\bar{b}}{\eta x_t-\bar{b}}\right)-\frac{1}{\left(1-\alpha\right)x_t-\alpha\bar{b}}\right];$$

le second terme de la première rangée s'écrit

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = -\left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\frac{\bar{b}\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)}{y_t\left(\eta y_t - \bar{b}\right)}.$$

Ainsi le déterminant de la matrice s'écrit

$$\det J = -\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = \left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\frac{\bar{b}\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)}{y_t\left(\eta y_t - \bar{b}\right)}.$$

Et la trace est donnée par

$$trJ = \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = -\left(1-\alpha\right)\left(x_{t+1}+\bar{b}\right)\left[\frac{1}{x_t}\left(1+\frac{\lambda\bar{b}}{\eta x_t - \bar{b}}\right) - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)x_t - \alpha\bar{b}}\right].$$

Les valeurs et les signes du déterminant et de la trace dépendent des valeurs des paramètres utilisés, donc par un choix adéquat des paramètres nous pouvons rester dans la zone de stabilité du graphique 1.

Dans le cas simple où $\alpha = \frac{1}{2}$, nous avons pu déduire la valeur de $x^*$ à l'état stationnaire et nous avions trouvé que c'est une fonction linéaire de $\bar{b}$, ce qui nous a donné une matrice Jacobienne indépendante de la contrainte de crédit. Nous allons dans ce qui suit essayer de voir si dans le cas général ou $\alpha$ est quelconque cette tendance se maintient.

Comme il paraît assez compliqué analytiquement de trouver l'expression du point de l'état stationnaire, nous allons étudier l'effet d'un changement de la contrainte de crédit sur le Jacobien. Pour ceci, nous calculons la dérivée de chacun des termes du Jacobien par rapport à $\bar{b}$, ce qui revient à dériver le déterminant et la trace à l'état stationnaire. Dans ce cas nous avons, à l'état stationnaire, d'après les équations dynamiques (26) et (27).

$x_{t+1} = x_t = y_t = x^*$ .

En remplaçant, le déterminant devient

$$\det J = \left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\frac{\bar{b}\left(x^* + \bar{b}\right)}{x^*\left(\eta x^* - \bar{b}\right)}.$$

La dérivée par rapport à $\bar{b}$ est donnée par

$$\frac{d\det J}{d\bar{b}} = \left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\frac{\left[\left(x^* + \bar{b}\right) + \bar{b}\left(\frac{dx^*}{d\bar{b}} + 1\right)\right]x^*\left(\eta x^* - \bar{b}\right) - \bar{b}\left(x^* + \bar{b}\right)\left[\frac{dx^*}{d\bar{b}}\left(\eta x^* - \bar{b}\right) + x^*\left(\eta\frac{dx^*}{d\bar{b}} - 1\right)\right]}{\left[x^*\left(\eta x^* - \bar{b}\right)\right]^2}$$

Nous avons démontré en Annexe 1 que

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}} = \frac{x^*}{\bar{b}}.$$

Ceci implique que la valeur de l'état stationnaire augmente quand la contrainte de crédit est relâchée puisque la dérivée est positive et en plus, linéaire en $\frac{1}{\bar{b}}$.

En remplaçant dans l'équation précédente, nous obtenons:

$$\frac{d\det J}{d\bar{b}} = \left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda\right)\frac{\left\lfloor\left(x^* + \bar{b}\right) + \bar{b}\left(\frac{x^* + \bar{b}}{\bar{b}}\right)\right\rfloor x^*\left(\eta x^* - \bar{b}\right) - \bar{b}\left(x^* + \bar{b}\right)\left\lfloor\frac{x^*}{\bar{b}}\left(\eta x^* - \bar{b}\right) + x^*\left(\frac{\eta x^* - b}{\bar{b}}\right)\right\rfloor}{\left[x^*\left(\eta x^* - \bar{b}\right)\right]^2};$$

donc

$$\frac{d\det J}{d\bar{b}} = 0.$$

Ceci prouve donc que le déterminant est indépendant de la contrainte de crédit. De même pour la trace nous avons:

$$trJ = -\left(1-\alpha\right)\left(x^* + \bar{b}\right)\left[\frac{1}{x^*}\left(1 + \frac{\lambda\bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right) - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)x^* - \alpha\bar{b}}\right],$$

$$\frac{dtrJ}{d\bar{b}} = -\left(1-\alpha\right)\left\{\left(\frac{dx^*}{d\bar{b}} + 1\right)\left[\frac{1}{x^*}\left(1 + \frac{\lambda\bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right) - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)x^* - \alpha\bar{b}}\right] + \ldots\right\}$$

$$\ldots\left(x^* + \bar{b}\right)\left[-\frac{\frac{dx^*}{d\bar{b}}}{x^{*2}}\left(1 + \frac{\lambda\bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right) + \frac{1}{x^*}\left(\frac{\lambda\left(\eta x^* - \bar{b}\right) - \lambda\bar{b}\left(\eta\frac{dx^*}{d\bar{b}} - 1\right)}{\left(\eta x^* - \bar{b}\right)^2}\right) + \frac{\left(\left(1-\alpha\right)\frac{dx^*}{d\bar{b}} - \alpha\right)}{\left(\left(1-\alpha\right)x^* - \alpha\bar{b}\right)^2}\right];$$

avec des substitutions adéquates nous arrivons à :

$$\frac{dtrJ}{d\bar{b}} = -\left(1-\alpha\right)\frac{1}{\bar{b}}\left(x^* + \bar{b}\right)\left\{\left[\frac{1}{x^*}\left(1 + \frac{\lambda\bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right) - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)x^* - \alpha\bar{b}}\right] - \left[\frac{1}{x^*}\left(1 + \frac{\lambda\bar{b}}{\eta x^* - \bar{b}}\right) - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)x^* - \alpha\bar{b}}\right]\right\};$$

d'où

$$\frac{dtrJ}{d\bar{b}} = 0.$$

Nous avons donc démontré que la matrice Jacobienne est indépendante de la contrainte de crédit et par conséquent que la valeur de la nouvelle variable $x^*$ à l'état stationnaire est une fonction linéaire de cette contrainte.

### 4.3.3 Discussion

Si nous posons pour le cas où $\alpha$ est quelconque, la valeur de l'état stationnaire $x^* = \Psi_g \bar{b}$ (notons que $\Psi_g \neq \Psi$ et indépendant de la valeur de $\bar{b}$) nous pouvons avec le même processus que pour le cas ou $\alpha = 1/2$ déduire les valeurs du capital physique par unité d'efficience ainsi que du capital humain:

$$k^* = \frac{\eta\Psi_g - 1}{\delta\Psi_g};$$

$$e^* = \frac{\delta\Psi_g\bar{b}}{\eta\Psi_g - 1}.$$

Reprenons l'expression du taux de croissance:

$$g_t = \frac{e_t}{e_{t-1}},$$

et comme

$$e_t = \frac{\delta x_{t+1}\bar{b}}{\eta x_{t+1} - \bar{b}};$$

$$e_{t-1} = \frac{\delta x_t\bar{b}}{\eta x_t - \bar{b}}.$$

si nous substituons dans l'équation du taux de croissance:

$$g_t = \frac{x_{t+1}\left(\eta x_t - \bar{b}\right)}{x_t\left(\eta x_{t+1} - \bar{b}\right)}$$

et en plus à l'état stationnaire nous pouvons écrire:

$$x_{t+1} = x_t = x^*$$

La valeur du taux de croissance à l'état stationnaire est donc constante et est égale à 1. Ceci nous pousse donc à conclure que la croissance à l'état stationnaire est indépendante du niveau de crédit. Avec l'imposition d'une contrainte de crédit nous arrivons à éliminer la croissance.

Les mêmes conclusions s'imposent quand il s'agit d'étudier la stabilité de la dynamique. En effet, dépendant de la valeur des paramètres $\eta, \delta$... la dynamique pourrait être instable lorsqu'on relâche la contrainte.

Pour examiner l'effet sur la croissance lorsque celle-ci est positive, nous examinons maintenant une spécification de la contrainte de crédit où celle-ci est proportionnelle à l'emprunt optimal.

## 5. Imposition d'une contrainte de crédit proportionnelle

Nous supposerons dans ce qui suit, que l'individu ne peut emprunter qu'une fraction $\theta_t$ de la somme dont il a besoin pour maximiser son utilité.

Dans ce cas l'épargne, l'équation de l'accumulation du capital humain ainsi que la contrainte de crédit s'écrivent respectivement:

$$s_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(\hat{w}_{t+1} - R_{t+1}\bar{b}_t\right);$$

$$e_t = \frac{\beta\left(1+\beta\right)\lambda\bar{b}_t\hat{w}_{t+1}}{\hat{w}_{t+1}\left(1+\beta\lambda\left(1+\beta\right)\right) - R_{t+1}\bar{b}_t};$$

$$\bar{b}_t = \theta_t\frac{\gamma}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1}\ .$$

Où

$$\gamma = \frac{1+\beta\lambda+\beta^2\lambda}{1+\beta+\beta^2} \quad \text{et} \quad \theta_t \in \left(0,1\right),$$

remarquons ici que le cas $\theta_t = 1$ correspond au problème sans contrainte de crédit.

### 5.1 Dynamique du problème

En remplaçant l'emprunt $\bar{b}_t$ par son expression, fonction de l'emprunt optimal qu'il aurait demandé s'il n'avait que ses contraintes de consommation, dans les équations de l'épargne et du capital humain nous aboutissons aux deux équations suivantes:

$$s_{t+1} = \frac{\beta\left(1-\gamma\theta_t\right)}{1+\beta}\hat{w}_{t+1};$$

$$e_t = \left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_t}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_t}\right]\frac{\lambda}{R_{t+1}}\hat{w}_{t+1}.$$

Utilisons la relation de l'équilibre du marché du capital et remplaçons par les expressions de l'épargne et du crédit

$$k_{t+2} = \frac{s_{t+1} - \bar{b}_{t+1}}{e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_t^{1-\lambda}} = \frac{\frac{\beta\left(1-\gamma\theta_t\right)}{1+\beta}\hat{w}_{t+1} - \theta_{t+1}\frac{\gamma}{R_{t+2}}\hat{w}_{t+2}}{e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_t^{1-\lambda}};$$

ou bien

$$k_{t+2} = \frac{\frac{\beta\left(1-\gamma\theta_t\right)}{1+\beta}A\left(1-\alpha\right)k_{t+1}^{\alpha}e_t^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda} - \theta_{t+1}\gamma\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)k_{t+2}e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_t^{1-\lambda}}{e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_t^{1-\lambda}};$$

ce qui donne

$$k_{t+2} = \frac{\frac{\beta\left(1-\gamma\theta_t\right)}{1+\beta}\left(1-\alpha\right)Ak_{t+1}^{\alpha}}{\left(1+\theta_{t+1}\gamma\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)}\left[\frac{e_t^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}}{e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_t^{1-\lambda}}\right].$$

De même nous avons

$$e_t = \lambda\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_t}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_t}\right]\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)k_{t+1}e_t^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}.$$

Rappellons à ce stade, que ce que nous cherchons c'est l'évolution du capital physique par unité d'efficience $k_t$ et du capital humain $e_t$. Ainsi les équations dynamiques s'écrivent:

$$k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}Ak_t^{\alpha}\left[\frac{e_{t-1}^{\lambda}\bar{e}_{t-2}^{1-\lambda}}{e_t^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda}}\right];$$

$$e_{t+1} = \lambda\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t+1}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t+1}}\right]\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)k_{t+2}e_{t+1}^{\lambda}\bar{e}_t^{1-\lambda} \quad ;$$

Donc en utilisant la première équation de $k_{t+1}$

$$k_{t+1}e_t^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}Ak_t^{\alpha}e_{t-1}^{\lambda}\bar{e}_{t-2}^{1-\lambda}.$$

Considérons ensuite le changement de variables suivant:

$$x_{t+1} = k_{t+1}e_t^{\lambda}\bar{e}_{t-1}^{1-\lambda};$$

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, cette transformation de variable est utile pour permettre une interprétation plus facile des équations mathématiques.

En remplaçant dans l'avant dernière équation nous arrivons à:

$$x_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}Ak_t^{\alpha-1}x_t.$$

De même pour l'équation en $e_{t+1}$

$$e_{t+1} = \lambda\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t+1}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t+1}}\right]\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x_{t+2}.$$

Sachant que

$$k_t = \frac{x_t}{e_{t-1}^{\lambda}\bar{e}_{t-2}^{1-\lambda}};$$

$$x_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}A\left(\frac{1}{e_{t-1}^{\lambda}\bar{e}_{t-2}^{1-\lambda}}\right)^{\alpha-1}x_t^{\alpha}.$$

Nous avons aussi

$$e_{t-1} = \lambda\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-1}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-1}}\right]\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x_t,$$

$$e_{t-2} = \lambda\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-2}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-2}}\right]\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x_{t-1}.$$

Ainsi

$$x_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}A\left(\frac{1}{\left(\frac{\beta(1+\beta)\theta_{t-1}}{1+\beta(1+\beta)-\theta_{t-1}}x_t\right)^{\lambda}\left(\frac{\beta(1+\beta)\theta_{t-2}}{1+\beta(1+\beta)-\theta_{t-2}}x_{t-1}\right)^{1-\lambda}}\right)^{\alpha-1}x_t^{\alpha};$$

$$x_{t+1} = \frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}{\left(\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-1}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-1}}\right)^{\lambda\left(\alpha-1\right)}\left(\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-2}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-2}}\right)^{\left(1-\lambda\right)\left(\alpha-1\right)}} x_t^{\lambda\left(1-\alpha\right)+\alpha} x_{t-1}^{\left(1-\lambda\right)\left(1-\alpha\right)}$$

Définissons la variable auxiliaire, pour permettre le passage à un système d'équations du premier ordre.

$y_{t+1} = x_t$.

Nous pouvons donc écrire le système d'équations dynamiques comme suit:

$$x_{t+1} = \frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\frac{\left(1-\gamma\theta_{t-1}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta_t\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}{\left(\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-1}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-1}}\right)^{\lambda\left(\alpha-1\right)}\left(\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-2}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-2}}\right)^{\left(1-\lambda\right)\left(\alpha-1\right)}} x_t^{\lambda\left(1-\alpha\right)+\alpha} y_t^{\left(1-\lambda\right)\left(1-\alpha\right)}$$

$y_{t+1} = x_t$.

Définissons maintenant le taux de croissance du capital humain comme le rapport

$g_t = \frac{e_t}{e_{t-1}}$. Il suit que:

$$g_t = \frac{\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_t}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_t}\right]x_{t+1}}{\left[\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta_{t-1}}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta_{t-1}}\right]x_t}.$$

ou

$$g_t = \frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta_{t-1})}{\alpha+\theta_t\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta_{t-1}}{1+\beta(1+\beta)-\theta_{t-1}}\right]^{\alpha}\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta_t}{1+\beta(1+\beta)-\theta_t}\right]^{-1}} g_{t-1}^{(\lambda-1)(1-\alpha)} .$$

Ainsi la dynamique du système en fonction du taux de croissance du capital humain peut être exprimée par l'équation suivante:

$$g_{t+1} = \frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta_t)}{\alpha+\theta_{t-1}\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta_t}{1+\beta(1+\beta)-\theta_t}\right]^{\alpha}\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta_{t+1}}{1+\beta(1+\beta)-\theta_{t+1}}\right]^{-1}} g_t^{(\lambda-1)(1-\alpha)} .$$

Posons

$$\Omega_t = \frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta_t)}{\alpha+\theta_{t-1}\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta_t}{1+\beta(1+\beta)-\theta_t}\right]^{\alpha}\left[\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta_{t+1}}{1+\beta(1+\beta)-\theta_{t+1}}\right]^{-1}} .$$

Un coup d'oeil rapide sur l'expression de $\Omega_t$ nous montre que cette fonction est strictement positive et inférieure à 1.

L'équation dynamique s'écrit donc

$$g_{t+1} = \Omega_t g_t^{(\lambda-1)(1-\alpha)} .$$

### 5.2 État stationnaire

À l'état stationnaire, tous les indices qui représentent le temps sont éliminés et comme nous l'avons démontré dans le cas sans contrainte de crédit , le taux de croissance du stock de capital humain et le taux de croissance économique sont équivalent. Ce qui nous donne à la valeur du taux de croissance suivante:

$$\bar{g} = \left[ \frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta)}{\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}} .$$

Remarquons ici que cette équation est strictement la même que l'équation (19) dans le cas où l'on considère une fraction de crédit $\theta = 1$. Ceci confirme donc l'hypothèse que ce problème est équivalent au problème sans contrainte pour ce cas particulier.

### 5.3 Stabilité de l'état stationnaire

L'étude de la stabilité de l'état stationnaire passe par la recherche du signe du Jacobien.

À partir de l'équation dynamique, nous cherchons la dérivée de $g_{t+1}$ par rapport à $g_t$:

$$\frac{dg_{t+1}}{dg_t} = \left(\lambda - 1\right)\left(1 - \alpha\right)\Omega_t g_t^{\left(\lambda-1\right)\left(1-\alpha\right)-1}.$$

évaluée à l'état stationnaire où

$$\bar{g} = \Omega_t^{\frac{1}{1-\left(\lambda-1\right)\left(1-\alpha\right)}}.$$

Dans ce qui suit nous allons considérer le cas où la contrainte de crédit proportionnelle est constante à travers le temps, soit:

$\theta_{t-1} = \theta_t = \theta_{t+1} = \theta.$

Nous avons alors

$$\frac{dg_{t+1}}{dg_t}|_{\bar{g}} = \left(\lambda - 1\right)\left(1 - \alpha\right).$$

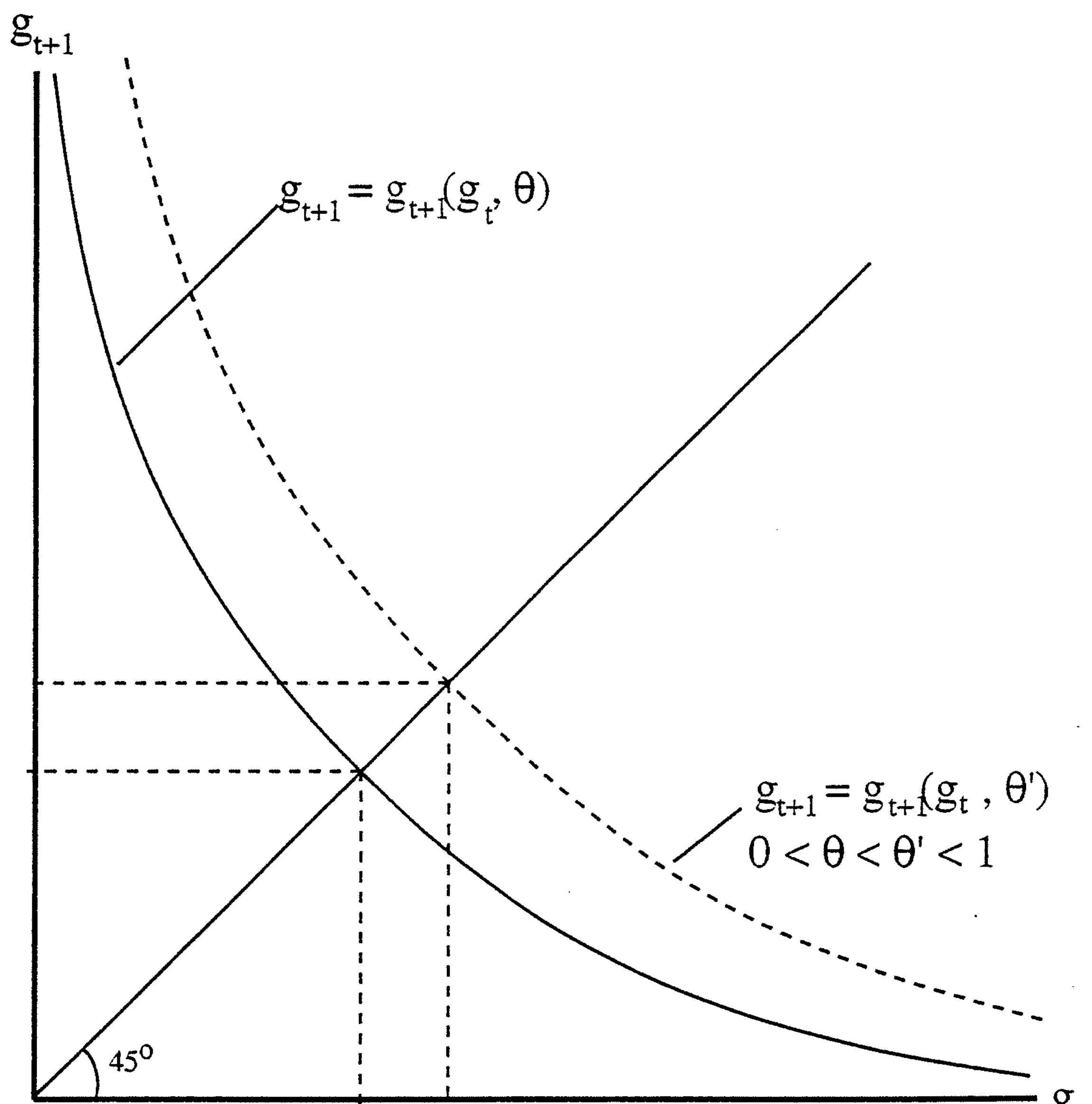
Nous sommes donc en présence d'une dynamique stable, où l'état stationnaire représente une spirale stable puisque

$$\left|\frac{dg_{t+1}}{dg_t}|_{\bar{g}}\right| < 1$$

Dans le graphique 2, nous représentons la dynamique du taux de croissance $g_t$.

Une augmentation de la fraction empruntée nous donne un sentier de croissance plus élevé.

# Graphique 2



Les signes des dérivées première (-) et seconde (+), nous permettent de conclure que le taux de croissance à la période *t+1* est une fonction convexe et décroissante du taux de croissance à la période *t*.

## 5.4 Statique comparée à l'état stationnaire

Considérons maintenant l'impact d'une variation de la sévérité de la contrainte de crédit $\theta$ sur le taux de croissance $\bar{g}$ à l'état stationnaire

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}=\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}\left[\frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta)}{\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left(\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}-1}\cdots$$

$$\times -A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\alpha(1-\alpha)\left[\frac{\left(-\gamma\frac{(\alpha+\theta\gamma(1-\alpha))+(1-\gamma\theta)(1-\alpha)}{(\alpha+\theta\gamma(1-\alpha))^{2}}\right)\left(\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{\alpha-1}}{\left(\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{2(\alpha-1)}}+\cdots\right];$$

où

$$\cdots=\frac{\left(\frac{(1-\gamma\theta)}{\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)}\right)(\alpha-1)\left(\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{\alpha-2}\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\beta(1+\beta)\frac{(1+\beta(1+\beta)-\theta)+\theta}{(1+\beta(1+\beta)-\theta)^{2}}}{\left(\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{2(\alpha-1)}}$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial\bar{g}}{\partial\theta}=\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}\left[\frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta)}{\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}-1}\cdots$$

$$\times A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\alpha(1-\alpha)\left[\frac{\left(\frac{\gamma}{\left(\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)\right)^{2}}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{\theta}\left(\frac{1-\gamma\theta}{\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)}\right)\left(\frac{1+\beta(1+\beta)}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{(\alpha-1)}}\right];$$

en factorisant par le numérateur par le même terme, nous obtenons:

$$\frac{\partial\bar{g}}{\partial\theta}=\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}\left[\frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha(1-\alpha)(1-\gamma\theta)}{\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{1}{1-(\lambda-1)(1-\alpha)}-1}\cdots$$

$$\times A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\alpha(1-\alpha)\left[\frac{\left(\frac{1}{\left(\alpha+\theta\gamma(1-\alpha)\right)}\right)\left(\frac{\gamma\theta(1+\beta(1+\beta)-\theta)+(1-\alpha)(\alpha+\theta\gamma(1-\alpha))}{\theta(\alpha+\theta\gamma(1-\alpha))(1+\beta(1+\beta)-\theta)}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta(1+\beta)\theta}{1+\beta(1+\beta)-\theta}\right)^{(\alpha-1)}}\right];$$

et finalement

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial \theta}=\frac{1}{1-\left(\lambda-1\right)\left(1-\alpha\right)}\left[\frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)\left(1-\gamma\theta\right)}{\alpha+\theta\gamma\left(1-\alpha\right)}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta}\right)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{1}{1-\left(\lambda-1\right)\left(1-\alpha\right)}-1}\cdots$$

$$\times\left[\frac{\left(\frac{A\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\alpha+\theta\gamma\left(1-\alpha\right)\right)}\right)\left(\frac{-\gamma\theta^{2}+\theta\gamma\left(1+\beta\left(1+\beta\right)+\left(1-\alpha\right)^{2}\right)+\left(1-\alpha\right)\alpha}{\theta\left(\alpha+\theta\gamma\left(1-\alpha\right)\right)\left(1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta\right)}\right)}{\left(\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\beta\left(1+\beta\right)\theta}{1+\beta\left(1+\beta\right)-\theta}\right)^{\left(\alpha-1\right)}}\right]$$

l'avant dernière équation nous montre clairement que $\frac{\partial \overline{g}}{\partial \theta}>0$ ce qui implique qu'une relâche de la contrainte de crédit contribue à augmenter le taux de croissance à l'état stationnaire.

# D. CONCLUSION GÉNÉRALE

Tout au long de notre travail, nous avons essayé de voir les effets que pourrait avoir l'imposition ou non d'une contrainte de crédit, ainsi que la nature de cette contrainte sur le taux de croissance.

Pour ce faire, nous avons utilisé un modèle à générations imbriquées à 3 périodes de vie. L'individu maximise son utilité soumis à des contraintes de consommation et de crédit.

Le stock de connaissance transmis d'une génération à l'autre constitue une externalité qui induit des rendements à l'échelle croissants.

Nous avons étudié 3 cas différents: d'abord le problème sans contrainte de crédit nous montre clairement que le taux de croissance à l'état stationnaire est positif et que cet état stationnaire est stable.

Ensuite, nous avons imposé une contrainte de niveau sur le crédit que nous avons dénoté par $\bar{b}$. Nous avons démontré qu' à l'état stationnaire la croissance est nulle. La dynamique, quant à elle peut devenir instable suite à un relâchement de cette contrainte. En effet, cette dynamique dépend fortement des paramètres utilisés.

Et enfin, une contrainte de crédit proportionnelle est étudiée. Dans ce cas, l'individu ne peut emprunter qu'une fraction $\theta$ du crédit optimal qu'il aurait demandé s'il maximisait son utilité sans contrainte de crédit. Nous sommes arrivés à conclure que la dynamique est stable et qu'une relâche de la contrainte de crédit augmente la croissance.

La question, comme elle est abordée par McKinnon-Shaw-Fry et les néo-structuralistes est plus complexe que ne le fait sembler cette dichotomie. En fait, libéraliser le crédit ou le contraindre n'est pas la bonne interrogation. Les vraies questions sont plutôt:

Quelle est la nature de la contrainte de crédit en place?

Est-ce une contrainte de niveau $\bar{b}$ ou bien une contrainte proportionnelle $\theta$?

Si la contrainte est sur le niveau de crédit, les responsables de la politique gouvernementale doivent procéder avec attention dans le choix des paramètres afin d'éviter les zones d'instabilité qui pourraient avoir des conséquences néfastes sur la croissance.

À part ces considérations du domaine de la politique gouvernementale, nous avons démontré que le résultat de l'étude de Jappelli et Pagano (1992) stipulant qu'une contrainte de liquidité sévère augmente la croissance, n'est pas général. En effet, il contraste avec notre conclusion dans le cas de l'imposition d'une contrainte de crédit proportionnelle. Ici, la contrainte de crédit proportionnelle réduit la croissance. Ce genre de contrainte sur le crédit devrait donc être utilisé avec beaucoup de précaution. En effet, la consommation en biens parrait être " incompressible" et toute réduction du crédit à la proportionnelle passe directement par une diminution de la consommation en éducation. C'est donc l'effet de réduction sur l'accumulation du capital humain qui domine l'effet sur l'épargne en capital physique.

# E. BIBLIOGRAPHIE

# RÉFÉRENCES


1. AZARIADIS, C., et DRAZEN, A. (1990), "Threshold Externalities in Economic Development," Quarterly Journal of Economics 105: 501-526.

2. BARRO, R. J. (1991), "Economic Growth in a Cross Section of Countries," Quarterly Journal of Economics; 407-443.

3. BARRO, R. J., et BECKER, G. S. (1989), "Fertility choice in a model of Economic Growth,"Econometrica, Vol. 57, No. 2 ;481-501.

4. BENCIVENGA, V., et SMITH, B. (1988), "Some Consequences of Credit Rationing in an Endogenous Growth Model," mimeo,University of Western Ontario.

5. BENCIVENGA, V., et SMITH, B. (1991), "Financial Intermediation and Endogenous Growth," Review of Economic Studies 58:195-209.

6. BUFFIE, E. (1991),"Credit Rationing and Capital Accumulation," Economica 58:299-316.

7. FRY, M. (1978), "Money and Capital or Financial Deepening in Economic Development?" Journal of Money, Credit and Banking 10:464-475.

8. FRY, M. (1982), " Models of Financially Repressed Developing Economies,"World Development 10:731-750.

9. FRY, M. (1988) Money, Interest and Banking in Economic Development (Baltimore : The Johns Hopkins University Press).

10. GROSSMAN, G. et HELPMAN, E. (1991b) "Innovation and Growth in the Global Economy" (Cambridge, MA: MIT Press).

11. JAPPELLI,T. et PAGANO, M. (1994), "Saving, Growth and Liquidity Constraints", Quarterly Journal of Economics 83-109.

12. LUCAS, R.E.(1988),"On the Mechanics of Economic Development", Journal of Monetary Economics 22:3-42.

13. MCKINNON, R. et MATHIESON, D. (1981),"How to Manage a Repressed Economy," Princeton Essays in International Finance, No.145.

14. MCKINNON, R. (1986) Financial Liberalization in Retrospect: Interest Rate Policies in LDCs, Center for Economic Policy Research Publication No. 74, Stanford University (July).

15. MCKINNON, R.(1991) The Order of Economic Liberalization: Financial Control in the Transition to a Market Economy (Baltimore and London: Johns Hopkins University Press).

16. REBELO, S.(1991),"Long Run Policy Analysis and Long Run Growth", Journal of Political Economy, 99:500-521.

17. ROMER, P.M. (1986),"Increasing Returns and Long Run Growth," Journal of Political Economy 94:1002-1038.

18. ROMER, P.M. (1990), "Endogenous Technological Change", Journal of Political Economy, 98:S71-S130.

19. ROMER, P.M. (1994), "The Origins of Endogenous Growth", Journal of Economic Perspectives, No 1,8:3-22.

20. SHAW, E. (1973) Financial Deepening in Economic Development (New York: Oxford University Press).

21. SALA-I-MARTIN, X. (1990),"Lecture notes on Economic Growth:," Center Discussion Paper No.621.

22. SOLOW, R. (1956), " A Contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, 70:65-94.

# F. ANNEXES

# Annexe 1

Nous avons à trouver l'expression de la dérivée de $x^*$ à l'état stationnaire par rapport à la contrainte de crédit $\bar{b}$ .

Sachant qu'à l'état stationnaire nous avons la relation suivante:

$$\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}-\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)=0$$

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}}=-\frac{\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{-\alpha}\left(\frac{-\delta\bar{b}-\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\delta}{\left(\delta\bar{b}\right)^2}\right)+\sigma}{\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{-\alpha}\left(\frac{\eta\delta\bar{b}}{\left(\delta\bar{b}\right)^2}\right)-\varepsilon}$$

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}}=-\frac{\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{-\eta x^*}{\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}\right)+\sigma}{\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\eta}{\left(\eta x^*-\bar{b}\right)}\right)-\varepsilon}$$

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}}=-\frac{\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}\left[1-\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\frac{\eta x^*}{\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}\right]+\sigma}{\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}\left[1+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\frac{\eta}{\eta x^*-\bar{b}}\right]-\varepsilon}$$

Or

$$\left(\frac{\eta x^*-\bar{b}}{\delta\bar{b}}\right)^{1-\alpha}=\frac{\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}}{x^*+\bar{b}}$$

En remplaçant

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}} = -\frac{\frac{\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}}{x^*+\bar{b}}\left[1-\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\frac{\eta x^*}{\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}\right]+\sigma}{\frac{\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}}{x^*+\bar{b}}\left[1+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\frac{\eta}{\eta x^*-\bar{b}}\right]-\varepsilon}$$

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}} = -\frac{\left[\frac{\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}}{x^*+\bar{b}}-\left(1-\alpha\right)\left(x^*+\bar{b}\right)\frac{\eta x^*\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)}{\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}\right]+\sigma}{\left[\frac{\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}}{x^*+\bar{b}}+\left(x^*+\bar{b}\right)\left(1-\alpha\right)\frac{\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}}{x^*+\bar{b}}\frac{\eta}{\eta x^*-\bar{b}}\right]-\varepsilon}$$

Mettons le numérateur et le dénominateur sur le même dénominateur

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}} = -\frac{\left[\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\bar{b}-\left(1-\alpha\right)\left(x^*+\bar{b}\right)\eta x^*\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\right]+\sigma\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}{\left[\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\bar{b}+\eta\left(1-\alpha\right)\bar{b}\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\right]-\varepsilon\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}$$

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}} = -\frac{\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\bar{b}\left[-\frac{x^*}{\bar{b}}\right]+\eta\left(1-\alpha\right)\bar{b}\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\left[-\frac{x^*}{\bar{b}}\right]-\left[-\frac{x^*}{\bar{b}}\right]\varepsilon\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}{\left[\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\bar{b}+\eta\left(1-\alpha\right)\bar{b}\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\varepsilon x^*-\sigma\bar{b}\right)\right]-\varepsilon\left(x^*+\bar{b}\right)\left(\eta x^*-\bar{b}\right)\bar{b}}$$

Ce qui donne

$$\frac{dx^*}{d\bar{b}} = \frac{x^*}{\bar{b}}.$$