

**Étude de la performance
de modèles d'évaluation d'options**

Rapport présenté

par

Charles Olivier Duranceau

Au

Département de Sciences économiques

pour l'obtention du diplôme de

Maîtrise

Université de Montréal

Montréal, Québec

décembre 2000

Sommaire

Ce rapport de recherche a pour but d'analyser la performance de différents modèles d'évaluation des options d'achat sur l'indice boursier S&P 500 (SPX). Depuis quelques années déjà, la littérature abonde au niveau de l'évaluation des produits dérivés et plus particulièrement des options. Suite aux biais rencontrés par le modèle original Black-Scholes, une panoplie de modèles ont été et sont encore développés. D'autre part, de nombreuses études s'intéressent aussi à la vérification empirique de ces modèles sur le marché des options. Ces études se divisent en deux grandes catégories : la première consiste à développer de nouveaux modèles en rejetant les hypothèses de Black-Scholes. La seconde catégorie englobe les modèles de correction et de prévision, mais conserve le modèle traditionnel. Ce rapport tentera d'évaluer l'apport des deux écoles aux moyens de vérifications empiriques.

Le modèle Black-Scholes servira d'étalon de mesure auquel sera comparé un modèle à volatilité stochastique et un modèle à volatilité stochastique avec saut pour lequel Heston (93) et Bakshi Cao et Chan (97) ont dérivé une forme analytique. En contrepartie de ces modèles, le modèle Black-Scholes sera ajusté pour corriger le biais. De cette façon, des modèles de prévisions de la volatilité tel GARCH (1,1), EGARCH (1,1) et GARCH-IV avec volatilité implicite seront utilisés pour corriger la volatilité. Finalement, des modèles plus simples, soit un modèle de décomposition matricielle de volatilité et un modèle de lissage de volatilité seront analysés.

Les modèles seront évalués au moyen de trois critères : A) la consistance et la stabilité des paramètres implicites, B) l'évaluation des prévisions hors-échantillon et, C) l'évaluation de la performance de la couverture. Les tests ont été faits sur les options d'achat (call) sur l'indice S&P 500 (SPX) transigées à la Bourse de Chicago durant la période du 2 janvier 1996 au 29 août 1997. Ces options sont de type européen, c'est à dire qu'elle ne peuvent être exercées qu'à la date d'expiration. Cette option présente les volumes de transaction les plus élevés au monde ce qui assure la liquidité du titre facilitant par le fait même l'analyse économétrique.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherche, M. René Garcia, pour la latitude et l'autonomie dont j'ai bénéficié, mais aussi pour les conseils qu'il m'a prodigués. En ce sens, je tiens à souligner les efforts de recherche et de pédagogie, à mon égard, de Marc-André Lewis, chercheur au CIRANO, qui m'a grandement éclairé et a assuré la vérification de certaines formules. Au cours de ce travail, j'ai eu la chance de m'entretenir avec des étudiants au doctorat qui en plus de partager leurs connaissances avec moi, m'ont apporté un support technique non-négligeable. Je veux donc remercier MM. Nicolas Audet, Denis Pelletier et Andrei Semenov. Dans la même veine, je reconnais le travail de Anca Jurca qui m'a fourni la base de données sur les options. J'ai aussi apprécié l'intérêt et les encouragements que m'ont témoignés les professeurs Bryan Campbell et Leonar Dudley. Je leur en suis fort reconnaissant. Un mot pour souligner le support de M. Williams Grant qui a su inspirer mes analyses. Finalement, j'aimerais remercier le travail de ma mère, Danielle Lafrenière qui a lu et relu, corrigé et recorrecté ces nombreuses pages écrites dans un langage peu compréhensible au profane.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	vii
INTRODUCTION	1
REVUE DE LA LITTÉRATURE	4
1.1 LES HYPOTHÈSES	4
1.2 LES DÉFAUTS DU MODÈLE.....	5
1.3 DIFFICULTÉS D'INFÉRENCE	6
1.3.1 <i>L'efficacité des marchés</i>	6
1.3.2 <i>Biais de sélection</i>	7
1.4 REJET DES HYPOTHÈSES.....	8
1.5 MAUVAISE SPÉCIFICATION DU PROCESSUS.....	9
1.5.1 <i>Approches paramétriques : le cas d'option européenne</i>	9
1.5.2 <i>Approches non-paramétriques</i>	10
1.5.3 <i>Correction des biais et prévision de la volatilité</i>	10
1.6 ÉTUDES CONTEMPORAINES	12
1.6.1 <i>Options sur indice</i>	12
1.6.2 <i>Évaluation économétrique</i>	13
1.6.3 <i>Études canadiennes</i>	14
ÉVALUATION EMPIRIQUE.....	15
2.1 DESCRIPTION DES CRITÈRES	15
2.2 MÉTHODOLOGIE	16
2.3 DONNÉES UTILISÉES	17
2.3.1 <i>Présentation des séries chronologiques</i>	17
2.3.2 <i>Statistiques sur options</i>	20
2.4 CHOIX DES MODÈLES	24
2.4.1 <i>Modèle Black-Scholes (BS)</i>	25
2.4.2 <i>Modèle à volatilité stochastique (SV)</i>	26
2.4.3 <i>Modèle à volatilité stochastique et saut (SVJ)</i>	27
2.4.4 <i>Analyse des modèles</i>	28
2.5 CORRECTION DES BIAIS ASSOCIÉS À LA VOLATILITÉ	29
2.5.1 <i>Lissage de la volatilité (LSP)</i>	29
2.5.2 <i>Matrice de volatilité (MVD)</i>	29
2.6 ESTIMATION DES PARAMÈTRES.....	31
2.7 ÉVALUATION DE LA PERFORMANCE (PREMIER CRITÈRE).....	32

2.7.1 Analyse des sourires.....	32
2.7.2 Pouvoir explicatif des modèles.....	33
2.7.3 Propriétés des paramètres implicites.....	35
2.8 PRÉVISION DE LA VOLATILITÉ.....	37
2.8.1 Prévion des paramètres implicites.....	38
2.8.2 Prévion de la volatilité historique.....	38
2.9 PRÉSENTATION DES MODÈLES.....	38
2.9.1 SDI.....	39
2.9.2 GAR.....	39
2.9.3 EGAR.....	39
2.9.4 GAR-IV.....	39
2.10 ESTIMATION DES PARAMÈTRES.....	40
2.10.1 Volatilité moyenne.....	41
2.10.2 Prime de risque.....	43
2.10.3 Volatilité par option.....	44
ÉVALUATION DE LA PERFORMANCE.....	46
3.1 ERREURS DE PRÉVISION.....	46
3.2 ERREURS DE COUVERTURE.....	50
3.2.1 Calcul du ratio delta.....	50
3.2.2 Approximation de la réalité.....	51
3.2.3 Erreurs.....	52
3.3 ANALYSE DES RÉSULTATS.....	55
3.4 CONCLUSION.....	56
ANNEXES.....	58
A) MÉTHODES D'ESTIMATION DES VOLATILITÉS.....	59
B) ASYMÉTRIE NÉGATIVE DES RENDEMENTS.....	60
B.1 Effet de levier.....	60
B.2 Renversement de la volatilité.....	60
C) STATISTIQUES SUR OPTIONS.....	61
D) DÉRIVATION DE LA FORMULE BLACK-SCHOLES.....	63
E) FORME ANALYTIQUE DES MODÈLES SV ET SVJ.....	65
F) MESURES D'ERREURS.....	68
G) VOLATILITÉ MOYENNE POUR MODÈLES ARCH.....	70
G.1 Modèle GARCH 11.....	70
G.2 Modèle EGARCH 11.....	71
H) RÉSULTATS.....	75

BIBLIOGRAPHIE	80
1.1 OUVRAGES DE RÉFÉRENCE	80
1.2 ARTICLES.....	81

LISTE DES GRAPHIQUES ET TABLEAUX

1. INDICE S&P 500	18
2. STATISTIQUES DES RENDEMENTS	18
3. TAUX DE DIVIDENDE ET D'INTÉRÊT	20
4. FILTRE SUR OPTIONS	21
5. STATISTIQUES SUR OPTIONS (94-97)	21
6. NAPPE DE VOLATILITÉ	22
7. STATISTIQUES SUR OPTIONS (2)	23
8. NOMBRE DE JOURS	30
9. SOURIRES DE VOLATILITÉ (96-97)	33
10. ERREURS EN ÉCHANTILLON (94-97)	34
11. ERREURS QUADRATIQUES - IMPLICITES	34
12. VOLATILITÉ IMPLICITE (BS)	35
13. PARAMÈTRES MODÈLE SV	36
14. PARAMÈTRES MODÈLE SVJ	36
15. PARAMÈTRES MODÈLE LSP	37
16. COEFFICIENTS AUTO-RÉGRESSIFS	41
17. VOLATILITÉS : HISTORIQUES ET IMPLICITE	43
18. PRIMES DE RISQUE	44
19. ERREURS DE PRÉVISION	46
20. ERREURS DE PRÉVISION QUADRATIQUES (1)	48
21. ERREURS DE PRÉVISION RELATIVES (1)	49
22. ERREURS DE COUVERTURE	52
23. ERREURS DE COUVERTURE QUADRATIQUES (1)	53
24. ERREURS DE COUVERTURE QUADRATIQUES (2)	54
25. MÉTHODES DE CALCUL DE LA VOLATILITÉ	59

26. STATISTIQUES SUR OPTIONS (3)	62
27. ERREURS QUADRATIQUES EN ÉCHANTILLON.....	76
28. ERREURS RELATIVES EN ÉCHANTILLON	77
29. ERREURS DE PRÉVISION QUADRATIQUES (2).....	78
30. ERREURS DE PRÉVISION RELATIVES (2).....	79

Introduction

Le modèle d'évaluation d'options développé par Fisher Black et Myron Scholes (Black 73) en 1973 allait révolutionner le monde des produits dérivés. Cette formule allait littéralement faire exploser le commerce des options et lui donner des proportions gigantesques. En 1998, on estimait la valeur nominale des produits dérivés sur actions et indices à plus de 29,3 billions de \$ U.S¹. . . Lorsqu'on pense à l'impact, mais surtout à l'immensité des sommes d'argent impliquées, on conçoit aisément que cette formule est probablement la plus utilisée de toutes les sciences sociales. Il n'est pas étonnant de voir que ces deux chercheurs (puis de Robert Merton), se soient vus décerner le prix Nobel d'économie (1992 et 1997).

Dès lors, au moyen d'une formule plus standard, il devient facile d'évaluer et donc de transiger des options. Une des propriétés de l'option est que sa valeur repose sur celle du sous-jacent¹ ce qui permet de profiter d'un effet de levier ou de l'utiliser en couverture. Cette dernière possibilité associée à la création d'un portefeuille sans risque, constitue la raison première de l'utilisation de ces outils financiers au même titre que les contrats à terme et autres produits dérivés.

Bien qu'il soit encore couramment utilisé par les courtiers, il fut démontré assez tôt que ce modèle comportait des lacunes. La volatilité implicite est la volatilité issue par le modèle Black-Scholes en fonction du prix observé. L'existence de plusieurs volatilités pour le même type d'option rejette l'hypothèse d'une volatilité constante, à la base du modèle. C'est ce qu'on appelle désormais : « sourire de volatilité », structure ou nappe de volatilité².

Plus globalement, la présence de multiples volatilités peut être causée par des problèmes au niveau des données, l'inefficience des marchés et finalement une mauvaise spécification du modèle. L'étude suivante est fondée sur le rejet de cette dernière. C'est à dire que la qualité des données et l'efficience du marché, seront reconnues et seule une mauvaise spécification du modèle sera prise en considération.

Depuis plus de vingt ans, le monde des options a été témoin d'un développement effréné de nouveaux modèles. Chaque modèle avait pour but de relaxer une des hypothèses du modèle Black-Scholes (73). Les modèles à taux d'intérêt stochastique de Merton (92)³ et Amin et Jarrow (92) rejettent le taux d'intérêt constant. Le modèle de diffusion à saut

¹ On désigne les options sur actions, sur indices et sur les contrats à termes portant sur les actions. Ces chiffres proviennent de l'International Federation of Stock Market.

¹ On définit le sous-jacent comme l'actif sur lequel repose l'option, ce peut être une action, un indice, une devise ou un contrat à terme.

² Représentation en 3 dimensions de la volatilité en fonction de la durée de vie de l'option et de la monétude.

³ Les propositions de Robert Merton ont été publiées en 1973 et 1976 dans le Bell Journal of Economics and Management Sciences et dans le Journal of Financial Economics,

de Merton (92) délaisse la continuité du processus. Les modèles markoviens de Rubinstein (94) n'imposaient pas de restriction au niveau de la distribution. Les modèles de variance à élasticité constante de Cox et Ross (76) et ceux à volatilité stochastique de Shanno (86) Hull et White (87), Wiggins (87) Melino et Turnbull (92), ignoraient la constante de la variance. Amin et Ng (93) incorporeront un taux d'intérêt stochastique à la volatilité déjà stochastique alors que Bates (95) incorpore les sauts dans le processus de diffusion du prix (Bates). Duan (95), Ritchen et Trevor (99) ont travaillé sur des modèles de type GARCH.

D'autres chercheurs ont tenté de voir s'il ne valait pas mieux essayer de vivre avec le modèle Black-Scholes en tentant de corriger les biais. De cette façon, une multitude de recherches ont été faites sur l'art de prévoir une forme de volatilité plus efficace. Les modèles de prévision de type ARCH et GARCH ont été largement utilisés pour déduire une estimation provenant de la volatilité historique. Cependant, des chercheurs comme Whaley (92), Dumais (92), Lamoureux (93) ont développé des techniques de prévisions utilisant les volatilités implicites.

Bien que la liste puisse paraître longue, elle oublie pourtant bien des noms. Dès lors, il serait possible de développer une infinité de modèles en recombinaison certaines caractéristiques. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que relâcher une hypothèse complexifie grandement le modèle et alourdit le processus de traitement de l'information. Sur le parquet de la bourse, les transactions se font presque instantanément et un modèle simple mais convivial sera préféré à un modèle plus précis mais impraticable. Le gain en précision d'un modèle doit donc être non seulement statistiquement, mais économiquement significatif.

L'objectif de cette recherche est donc de comparer différents modèles entre eux. En plus du modèle de Black-Scholes qui servira d'étalon de mesure, deux modèles d'évaluation, deux méthodes de correction de la volatilité et quatre techniques de prévision de la volatilité ont été comparées. Les tests porteront sur les options d'achat sur l'indice américain S&P 500 (SPX)⁴. Cette option a été préférée à une option sur action pour réduire le risque idiosyncratique⁵ et à cause de sa liquidité. De plus, les informations obtenues des paramètres implicites sont un meilleur reflet des anticipations du marché. Trois critères seront utilisés, soit la stabilité des paramètres implicites, l'erreur de prévision et l'erreur de couverture, pour déterminer lequel des modèles est le plus adapté.

Le déroulement de ce rapport comprend trois parties. La première partie⁶ présentera une revue de la littérature et passera en revue le modèle Black-Scholes, les biais qui y sont associés et les problèmes d'inférence statistique. Par la suite, un résumé des différentes solutions proposées sera présenté. Le rappel des résultats de quelques études empiriques portant sur l'évaluation de différents modèles conclura cette première partie. La seconde partie énoncera l'approche empirique et les méthodes utilisées pour l'évaluation économétrique.

⁴ Initialement, les tests voulaient porter sur les options canadiennes soit celle de l'indice TSE 35 (TXO). Ces options ayant été remplacées en 1999 par les options sur l'indice S&P 500, il a été jugé préférable d'utiliser un titre plus liquide et plus facilement accessible. L'auteur a par ailleurs conservé un regard sur la situation canadienne et rappelle quelques résultats au cours de l'étude.

⁵ Risque associé à la particularité d'une firme. L'indice se veut une réplique du marché ou le risque spécifique (idiosyncratique) a été complètement diversifié.

⁶ Le lecteur moins familier avec ce type d'actif trouvera plus d'explication en annexe ou quelques concepts associés aux options seront brièvement expliqués.

Introduction

Le choix des modèles retenus sera expliqué et justifié de même que les données utilisées. Une explication des différents procédés d'estimation des principaux problèmes rencontrés et les statistiques des paramètres estimés seront exposées et analysées . Finalement, la dernière partie présentera les résultats et l'analyse en découlant.

Partie 1

Revue de la littérature

Cette première partie fera un survol de la revue de la littérature. Elle débutera avec un rappel des hypothèses du modèle B-S et les confrontera à la réalité. Ensuite, une revue des recherches empiriques soulignera les problèmes du modèle. Cependant, il sera fait mention des principales difficultés d'inférence avant de conclure à l'inconsistance du modèle. La conclusion énoncera les principales solutions proposées.

1.1 Les Hypothèses

Les premières hypothèses posées concernent la distribution et l'évolution du sous-jacent. Le sous-jacent suivrait une marche aléatoire⁷ issue d'une distribution lognormale. De plus, ce processus implique l'utilisation du temps continu ce qui permet l'utilisation du calcul stochastique, (le rebalancement continu du portefeuille) pour garantir la couverture complète et la disparition du terme aléatoire. L'absence d'opportunité d'arbitrage assure le rendement de ce portefeuille sans risque et fournit l'équation différentielle partielle formulée par Fisher Black et Myron Scholes. Ensuite, l'option de type européen ne pouvant être exercée qu'à l'échéance, assure la condition terminale permettant de résoudre analytiquement l'équation différentielle. L'absence de versement de dividende et un taux d'intérêt constant sont aussi considérés lors de l'actualisation des flux. Finalement, des conditions sur l'efficacité des marchés sont implicitement imposées, à savoir l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'absence de coûts de transaction, la possibilité d'emprunter au taux sans risque et de vendre à découvert.

Robert Merton a grandement contribué au développement et à la diffusion de cette formule. Alors que Fisher Black et Myron Scholes ont développé leur formule dans le cadre du CAPM⁸ qui est un modèle d'équilibre général d'actif financier et nécessitant par le fait même de nombreuses hypothèses. Merton (72) a démontré qu'il était possible d'obtenir l'équation différentielle de Black-Scholes en n'utilisant que l'absence d'opportunité d'arbitrage. Il a énoncé plusieurs propositions sur les conditions que doivent satisfaire les options. Il a démontré en particulier qu'une option américaine ne versant pas de dividendes devait être traitée comme une option européenne puisqu'il n'était pas avantageux d'exercer avant la date d'expiration. Dans le cas contraire, une option américaine serait exercée juste avant la date ex-dividende. Il a proposé un modèle où le taux d'intérêt est stochastique et un modèle où l'évolution du sous-jacent permettait une discontinuité du processus en intégrant un saut par un processus de Poisson. Il a de plus développé une manière de tenir compte d'un versement de dividende lors de l'évaluation de l'option.

⁷ On dit aussi que le processus de diffusion suit un brownien géométrique.

⁸ Capital Asset Pricing Model, voir la référence dans Campbell, Lo, McKinglay

1.2 Les défauts du modèle

Si la présence de sourire de volatilité est reconnue comme le principal défaut du modèle Black-Scholes, c'est à Macbeth et Merville (79) que l'on doit la première étude détaillée du biais alors qu'ils étudièrent les prix des options sur cinq titres lors de la période 1977 à 1978. Ils ont démontré, en utilisant la méthode de Latané et Rendleman (93), que les volatilités implicites sont plus élevées pour les options dans la monnaie (ITM) et plus basse pour les options hors la monnaie (OTM), le modèle B-S tend donc à sous-évaluer une option dans la monnaie et surévaluer une option hors la monnaie. Rubinstein (85) utilisant des données intra-journalières et des tests non-paramétriques, montre l'inconsistance du modèle en soulignant des biais au niveau de la monétude et de la maturité. Il trouve une volatilité implicite anormalement élevée pour les actions à faible prix d'exercice et observe un effet de levier soit une corrélation négative entre le prix du sous-jacent et la volatilité. Il arrive cependant à des résultats contraires à ceux de Macbeth et Merville alors que le modèle B-S sous-estime les options hors la monnaie. Il voit tout de même ce biais se retourner lors de la seconde période de son échantillon. Il conclut à un biais au niveau du prix d'exercice et de la maturité et que ce biais varie en fonction du temps. Il rejette l'hypothèse jointe d'une diffusion en temps continu et d'une volatilité instantanée déterministe. Rubinstein tente d'expliquer ces faits par l'idée « catastrophia » (Rubinstein 96) que depuis le crash boursier d'octobre 1987, les investisseurs éprouvent une plus grande aversion au risque et exigent des rendements plus élevés pour compenser le risque. Cette idée reprend l'asymétrie des rendements.

Whaley (86) confirme les résultats de Rubinstein (85) montrant l'évolution de ce même biais au fil du temps (le biais varie donc dans le temps) sur les options sur contrats à terme. Il trouve de plus une différence significative entre les volatilités d'une option d'achat et d'une option de vente (issue des mêmes spécifications). Bien qu'il ne trouva pas de raison particulière, il tenta d'exprimer cette incohérence par le fait que les prix d'exercice des "Puts" sont en moyenne plus bas que ceux des "Calls". Stein (89) a, quant à lui, montré que la structure à terme des volatilités implicites se renversait dans la moyenne (mean reverting) pour les options à long terme sur les contrats à terme. Il a montré que l'effet d'un choc décroît très rapidement, mais que cette non-persistance n'est pas reconnue par le marché. Les options à long terme sont donc sous-évaluées. Il a rejeté l'hypothèse jointe que les anticipations étaient formées rationnellement et que le modèle B-S est valide.

Bates (95), dans un revue de la littérature approfondie, mentionne qu'au niveau des options sur indices (et sur actions), l'analyse des paramètres implicites montre un coefficient d'asymétrie (skewness) négatif et un coefficient d'aplatissement (kurtosis) excessif⁹. La distribution des rendements de l'indice signale qu'un petit nombre de rendements élevés « tirent » la moyenne vers la droite et que les queues de la distribution sont dominées par la présence de valeurs extrêmes. Ces deux caractéristiques rejettent le fait que les prix sous-

⁹ L'asymétrie est le troisième moment associé à la distribution d'une variable aléatoire, dans ce cas, il s'agit du rendement du sous-jacent. Ce moment met en relation la moyenne par rapport à la valeur médiane. Une variable normalement distribuée doit avoir un coefficient proche de 0. L'aplatissement est le moment d'ordre 4 et met en relation le nombre d'observations extrêmes face à la distribution théorique. Une variable normalement distribuée doit avoir un coefficient proche de 3.

jacents suivent une distribution lognormale associée au processus de diffusion du brownien géométrique.

1.3 Difficultés d'inférence

Dans le contexte d'un actif contingent¹⁰, il est extrêmement difficile d'inférer sur la performance d'un modèle à bien évaluer les actifs. Comme plusieurs chercheurs l'ont souligné, il s'agit en fait de vérifier une hypothèse jointe de l'efficience des marchés et de la bonne spécification du modèle. De plus, s'y rapporte des problèmes d'estimation et de qualité des données.

L'économie financière est probablement la discipline la plus empirique de toutes les sciences sociales. Ce qui la distingue des autres branches de l'économie c'est la présence centrale de l'incertitude. Sans cette caractéristique, les problèmes financiers se réduiraient à de simples questions d'optimisation. Aussi, le bruit relié à l'incertitude est tellement important qu'il est rarement possible d'aboutir à des conclusions explicites.

“There are two sources of uncertainty in the prediction made by the trader or the econometrician. The first is parameter estimation, and the second is model error.”

Jacquier et Jarrow (1995)

1.3.1 L'efficience des marchés

Les tests d'efficience partent de l'hypothèse que le modèle utilisé est le bon et qu'il permet de bien prévoir les prix des options. Par la suite, la stratégie d'arbitrage consiste à construire un portefeuille sans risque et à mesurer le profit. La présence de rendements anormaux, c'est à dire qu'il est possible de faire du profit de façon constante sans rien risquer (présence d'arbitrage), contribuerait à rejeter l'efficience. On dit que les marchés sont efficaces si l'information disponible est pleinement accessible à tous et ne permet pas de réaliser un gain certain.

Black et Scholes (72) ont testé l'efficience du marché des options transigées au comptoir. Ils ont montré qu'il était possible d'obtenir des profits au moyen d'une stratégie sans risque, donc qu'il y avait opportunité d'arbitrage, mais que ces profits disparaissaient avec les coûts de transaction. Gallai (77) étudiant les options transigées au CBOE¹¹ a trouvé la présence, au moyen d'une stratégie sans risque, de rendements anormaux, même avec des coûts de transaction. Il a donc rejeté l'efficience, mais en faisant l'hypothèse que le modèle était bien spécifié. Chiras et Manaster (79) sont arrivés aux mêmes conclusions, mais

¹⁰ Qui repose sur l'évolution d'un actif sous-jacent.

¹¹ Chicago Board of Option Exchange, la première et aujourd'hui la plus grande bourse de produits dérivés au monde

1.4 Rejet des hypothèses

cette fois-ci en utilisant les volatilités implicites. Du côté canadien, Mandron(79) a obtenu des résultats similaires.

Un autre test de l'efficience consiste à montrer que les conditions initiales d'une option sont respectées ou que la parité entre une option d'achat et une option de vente est respectée (Put -Call Parity). De ce fait, Halper et Turnbull (85) testent les conditions de frontières sur les options du marché canadien. Bien que leurs résultats ne soient pas très robustes, ils démontrent plusieurs violations, notamment de l'erreur de premier type alors que plusieurs prix étaient inférieurs à leur valeur intrinsèque (équation(1)). Klemkosky et Resnick (79) se sont intéressés à la relation de parité et ont montré que les seules inefficiences provenaient des options d'achat surévaluées.

Mais des études plus récentes ont accepté l'efficience. Par exemple, Harvey et Whaley (92) utilise un modèle de type ARMAX pour prévoir la volatilité des options sur indice S&P 100. L'absence de profits certains les amènent à conclure à l'efficience du marché. Doidge et Wei (95) font une étude similaire sur l'indice canadien et aboutissent aux mêmes conclusions. Aujourd'hui, l'augmentation des participants, l'informatisation des transactions et la vitesse des communications ne peuvent qu'accroître l'efficience des marchés.

1.3.2 Biais de sélection

Il reste cependant difficile de faire abstraction des problèmes sur l'intégrité des données. Gallai (77) a été le premier à soulever ce point en montrant les biais causés par la non-synchronisation entre l'option et le sous-jacent. Il a montré que les prix étaient extrêmement sensibles à une différence de 15 minutes entre la cotation d'une action et le prix de l'option, alors qu'une opportunité d'arbitrage pouvait survenir et biaiser les résultats. Bates (95) résume les résultats de Whaley (90-95) en suggérant que les violations conduisant à l'arbitrage pouvaient provenir de l'écart " bid-ask " (lié à la liquidité du marché)¹² ou à une synchronisation imparfaite.

Don Chance (86) souligne le problème de non-synchronisation au niveau des options sur indice, mais il conclut que les biais sont diminués à cause de délais associés au calcul de l'indice. Bakshi et al. (97) soulignent ces problèmes en prenant les prix de la dernière option transigée qu'il jumelle avec la valeur de l'indice au même moment. Le problème se résorbe donc, mais cette démarche nécessite un tri supplémentaire au niveau de la base de données.

Finalement, Canina et Figlewski (93) ont soulevé un problème de censure. Alors que les études empiriques filtrent les données en rejetant les options ne satisfaisant pas aux conditions initiales, elles censurent à l'excès le prix des options¹³. Il importe donc de considérer ce problème sans toutefois conclure à une impossibilité d'inférer sur les prix.

¹² Il s'agit de l'écart entre le prix demandé (ask) pour vendre le titre et le prix offert (bid). Un écart trop important signifie que le marché est peu liquide. Il serait difficile et coûteux de réaliser des transactions.

¹³ Une option est rejetée si son prix est inférieur à sa valeur intrinsèque ce qui tend à surévaluer le prix moyen.

1.4 Rejet des hypothèses

Suivant ces enseignements, nous en arrivons à la conclusion d'une mauvaise spécification au niveau du modèle. Les hypothèses du modèle B-S seraient ainsi trop restrictives. Ici, il importe d'analyser non pas si une hypothèse est vérifiée ou non, mais de quelle façon son rejet influence le modèle. Ainsi, les études des années 80 ont porté sur les conséquences d'un relâchement des hypothèses.

“ I want to focus in this article on the third reason for a difference between value and price : that the Black-Scholes formula may be wrong. ” F. Black (1992)

La première hypothèse à être relaxée est celle où le sous-jacent verse un dividende. Merton (92) est le premier à proposer une solution en actualisant le flux de dividendes et en dérivant un taux d'actualisation. Cette méthode reste utilisée. Dans le cas d'un indice, Don Chance (86) propose la même méthode en spécifiant l'hypothèse d'un lissage au niveau de versements. Cette hypothèse est d'autant plus vérifiée que l'indice est volumineux. Bakshi, Cao et Chen (97) utilisent cette méthode lors de tests faits sur l'indice S&P 500.

Dans la même voie, si l'option est de type américain et que l'action sous-jacente verse des dividendes, la formule B-S est inutilisable. Nous sortons un peu de notre cadre, mais il importe de souligner que Roll et Geske (84) ont démontré la présence d'un biais si la correction était mal calculée. La variante américaine du modèle B-S pourrait expliquer certain biais du modèle associé aux options américaines. Ils ont aussi proposé une méthode de résolution analytique (79) d'une option américaine versant des dividendes. Il existe aussi plusieurs méthodes de résolution numérique. Don Chance (86) traite aussi de l'influence de ce type d'option sur les indices. Si l'option est liquide et que l'indice est composé de nombreux titres de telle sorte que les dividendes soient versés régulièrement (quotidiennement) et dans des proportions égales (les dividendes sont très lisses), alors il ne sera pas avantageux d'exercer ce genre d'option avant l'expiration.

D'autre part, les biais causés par la discrétisation des transactions (le rejet du temps continu), les frictions du marché (l'impossibilité d'emprunter au taux sans risque, la limite de ventes à découvert, et surtout les coûts de transaction) sont généralement de moindre importance. Wilmott (94) a proposé une correction pour tenir compte des coûts de transaction et de la discrétisation du temps (processus en temps discret). De plus, nous avons accepté l'efficience des marchés ce qui nous permet de réduire les conséquences des ces hypothèses.

L'hypothèse du taux de rendement sans risque est plus délicate. Merton (92) a proposé un modèle plus général pour tenir compte d'un taux d'intérêt stochastique. Cette modélisation a été reprise par Amin et Jarrow. Cependant, il a été démontré que la formule B-S demeure exacte lorsque le taux sans risque est stochastique si le taux est celui obtenu sur un bon du trésor de même échéance que l'option et que la distribution du sous-jacent est lognormale à l'échéance (Hull 99). De plus, Bakshi et al. (97) trouvent que le taux d'intérêt n'est pas de grande importance et qu'un modèle comportant un taux d'intérêt stochastique performe moins bien qu'un modèle plus simple. Bates (95) confirme les piètres résultats inférés à partir d'un modèle de la sorte. Au niveau de la démarche, le fait de rebalancer constamment le portefeuille réduit le risque d'une trop grande volatilité au niveau des taux.

1.5 Mauvaise spécification du processus

L'influence des taux d'intérêt est donc moins importante dans le cas d'options à court terme (maturité inférieure à un an). Il faut aussi souligner que la stationnarité relative des taux courts en Occident atténue l'effet de cette hypothèse.

L'hypothèse la plus contestée est donc au niveau du processus de diffusion. Rubinstein (85) démontre que les biais associés aux prix d'exercice et à la maturité sont résolus par différents modèles, mais qu'aucun ne se distingue dans l'ensemble. Les biais dépendent du temps et se renversent. Bakshi (98) montre clairement, sur des données intra-journalières, qu'un simple processus de diffusion n'est pas suffisant. Il a observé une corrélation négative entre le prix des options et du sous-jacent ce qui s'expliquerait par un effet de levier. Bates (86) quant à lui résume la situation par une revue détaillée de la littérature empirique confirmant cette hypothèse. Les erreurs de prix, la volatilité implicite ainsi que les autres paramètres dérivés à partir des prix observés confirment qu'il n'y a pas de forme simple de distribution qui pourrait éliminer les biais.

1.5 Mauvaise spécification du processus

Pour améliorer les résultats du modèle, il existe deux principales démarches. La première consiste à relaxer l'hypothèse de diffusion et à développer un nouveau modèle en utilisant la valorisation risque-neutre. Cette modélisation est paramétrique car elle impose des conditions au niveau de la distribution du sous-jacent. Cependant, Rubinstein a développé une modélisation non-paramétrique (79-94) en procédant avec des arbres binomiaux. Ces méthodes offrent la flexibilité nécessaire pour évaluer des options américaines, mais elles n'ont pas de solution analytique (sauf sous certaines conditions) et sont très intensives en calculs. La seconde façon d'améliorer les résultats est de corriger le modèle Black-Scholes pour le rendre plus précis en tenant compte des biais.

1.5.1 Approches paramétriques : dans le cas d'option européenne

Les modèles à taux d'intérêt stochastique de Merton (92) et Amin et Jarrow (92) rejettent le taux d'intérêt constant. Ils incorporent le processus de diffusion de taux d'intérêt au sein du modèle Black-Scholes. Merton (92) propose un modèle de diffusion à saut. L'utilisation d'un processus de Poisson permet de relaxer l'hypothèse de la continuité du processus. Bates (86) a par ailleurs affirmé que les biais associés à la volatilité sont de loin les plus importants dans la mauvaise spécification du modèle¹⁴. Aussi, nous concentrons nous davantage sur les modèles soulevant ce problème.

Les modèles de variance à élasticité constante de Cox et Ross (76) permettent à la volatilité de bouger, mais en lui imposant une forme déterministe. Ils sont peu utilisés dans le cas d'options sur indice puisqu'il est pratiquement impossible que le titre ait une valeur nulle. Cependant, à la fin des années 80, plusieurs chercheurs rejeteront plus radicalement

¹⁴ Cette affirmation est encore plus vraie dans le cas des options expirants dans une échéance inférieure à un an puisque le taux d'intérêt perd de son influence.

1.5 Mauvaise spécification du processus

l'idée d'une volatilité constante ou déterministe en permettant une forme stochastique de la volatilité. Scott (87) obtient des résultats intéressants avec un processus bivarié. Wiggins (87) montre que cette solution est limitée à certaines conditions, que le modèle Black-Scholes sera plus précis si la volatilité n'est pas persistante dans les chocs. Ils trouvent aussi que pour les indices, l'effet de surévaluation est plus important. Johnson et Shanno (87) proposent un modèle tenant compte d'une corrélation entre les deux browniens. Mais c'est Hull et White (87) qui sont les premiers à proposer une solution analytique au modèle à volatilité stochastique. Ils imposent toutefois que la corrélation entre les deux browniens soit nulle. Heston (92) développe un modèle similaire avec solution analytique, mais davantage applicable aux options sur devises. Amin et Ng (93) incorporeront un taux d'intérêt stochastique à la volatilité déjà stochastique alors que Bates (95) incorpore les sauts dans le processus de diffusion du prix (Bates). Duan (95) ainsi que Ritcher et Trevor (99) reprennent l'idée de la volatilité stochastique en temps discret et montre la convergence au moyen des modèles GARCH.

1.5.2 Approches non-paramétriques

Cox, Ross et Rubinstein (79) proposent une approche simplifiée sans ajouter une contrainte au niveau de la distribution. Ils développent le modèle d'arbre binomial où le prix ne prend que deux valeurs (modèles markoviens). En développant le processus ils démontrent la convergence vers le modèle Black-Scholes. Par la suite, Rubinstein (94), Derman et Kani (94) et Jackwerth et Rubinstein (96) ont développé l'idée des arbres binomiaux et des paramètres implicites dans le but de trouver une distribution implicite et augmenter l'information tirée des options.

1.5.3 Correction des biais et prévision de la volatilité

La volatilité est le seul paramètre non-observable du modèle Black-Scholes. L'idée est donc d'estimer, corriger et prévoir la volatilité et l'utiliser dans le modèle B-S. Cette méthode accepte implicitement l'hypothèse d'un simple processus de diffusion avec volatilité constante (déterministe à tout le moins). Puisqu'elle ne fait que corriger le modèle, elle ne peut, théoriquement espérer rivaliser en termes de précision avec une nouvelle formulation. Cependant, l'avantage de cette méthode est sa versatilité et sa convivialité. En comparaison, les modèles développés sont très complexes et il existe rarement une solution analytique. L'obtention de solutions se fait de façon numérique ou par simulation nécessitant des coûts de calculs élevés. Qui plus est, l'analyse numérique qui découle de ces modèles amène souvent des biais. Plusieurs tests d'efficacité ont été conduits en espérant améliorer le modèle et utiliser une stratégie risquée neutre.

“ Sometimes wonder people still use the Black-Scholes formula, since it is based on such simple assumptions - unrealistically simple assumptions. Yet that weakness is also its greatest strength. People like the model because they can

easily understand its assumptions. The model is often good as a first approximation, and if you can see the holes in the assumptions you can use the model in more sophisticated ways. ” F. Black (1992)

La prévision de la volatilité se divise essentiellement en deux parties : soit l'inférence à partir des séries chronologiques et l'estimation des volatilités implicites. Premièrement, il y a l'inférence à partir des séries chronologiques. L'hypothèse la plus simple est de filtrer les rendements pour ensuite calculer la volatilité. Ce raisonnement reprend l'hypothèse d'une volatilité constante, moyenne. Par la suite, les modèles ARCH et GARCH développés initialement par Engel (82) et Bolerslev (86) ont connu une forte popularité au début des années 90. Ces modèles de volatilité conditionnelle permettaient d'améliorer les effets de grappe de volatilité et expliquer la distribution leptokurtique des rendements boursiers. Hentschel (95) a développé une extension des différents modèles GARCH. Pour l'utilisation au niveau des options, on doit à Nelson (91) les principales percées dans ce domaine. Pour combler l'hypothèse d'asymétrie au niveau des rendements (effet de levier), il a développé le modèle EGARCH(1,1).

Pour trouver le meilleur estimateur, Brailsford et Faff (96) ont montré que la performance de la méthode dépend du critère utilisé. Dans le cas d'option d'achat, où la relation avec la volatilité est positive, le GJR-GARCH¹⁵ obtient les meilleurs résultats. Cependant, Doidge et Wei (95) n'ont pas retenu ce modèle pour l'évaluation des options canadiennes et ont préféré un modèle EGARCH.

L'autre méthode de prévision consiste à utiliser la volatilité implicite dérivée des prix des options. Cette volatilité est perçue comme une anticipation sur les attentes (forward looking) des agents. Si l'estimation est faite de manière simultanée, la solution devient dégénérée puisque la variable est estimée de l'observation et est ensuite utilisée pour retrouver ce même prix sur l'observation, il n'y a donc plus d'erreur résiduelle [Gouriéroux 97]. Cette particularité engendre le problème de l'inconsistance interne, exprimé entre autres par Hull et White (87) et Scott (87) i.e. le modèle devient conditionnel à la volatilité qui est ré-estimée à partir d'un modèle à volatilité constante (non-conditionnelle). Il serait alors tout aussi juste d'utiliser l'espérance de la variance du sous-jacent tout au long de la durée de l'option.

Canina et Figlewsky (93), lors d'une étude sur les options sur indice S&P100, montrèrent que la volatilité implicite est un estimateur biaisé et non efficace de la volatilité future. Arguant des données biaisées qui auraient conduit à des résultats non-concluants, Day et Lewis (92) ont montré que pour la même période, la volatilité implicite n'était que légèrement biaisée et fournissait de bons résultats pour la prévision. Ils ont par ailleurs conclu que les modèles GARCH et EGARCH apportait de l'information additionnelle au processus de prévision. Doidge et Wei (95), ont mélangé la volatilité implicite et sérielle. Ils n'ont toutefois pas obtenu plus de succès.

Lamoureux et Lastrapes (93) arrivèrent aux mêmes conclusions alors qu'ils examinèrent les volatilités implicites de dix options ne versant pas de dividende (CBOE) sur

¹⁵ Il s'agit d'un modèle de la classe des GARCH proposé par Glosten, Jagannathan et Runkle, permettant l'asymétrie des rendements

1.6 Études contemporaines

une période de deux ans. Ils les comparèrent avec les estimations historiques de volatilité (inférées à l'aide des modèles GARCH). Ils reconnurent que les volatilités implicites étaient biaisées mais informatives, mais que les volatilités historiques apportaient un surplus d'information.

Un des problèmes concernant l'utilisation de la volatilité implicite est l'estimation de cette dernière. Bates (95) a montré que le taux d'intérêt avait peu d'impact et que la solution non-linéaire conduisant à la volatilité implicite pour une option en fonction de son prix était stable. En fait, les sourires et nappes de volatilité expriment le fait qu'il existe différentes volatilités implicites pour chaque option. Il faut donc faire une moyenne entre les différentes volatilités, soit en fonction de la maturité et de la «monétude». Latané et Rendleman (76) sont les premiers à proposer une méthode qui pondère les volatilités en fonction de la sensibilité à la volatilité (véga). Cette méthode conduit à des résultats biaisés. Par la suite, Chiras et Manaster (78) y ont apporté des modifications, Schmalensee et Trippi (78), Beckers (81) et Whaley (82) ont proposé différentes formes¹⁶. Day et Lewis explorent plusieurs méthodes et concluent qu'il est préférable d'utiliser les moindres carrés généralisés en pondérant en fonction de la sensibilité de l'option à la volatilité (véga). Cependant, ils notent aussi l'importance d'inclure le volume transigé par option pour pondérer davantage les anticipations du marché.

Par la suite, il faut créer une série de volatilités implicites reliées temporellement à chaque date et estimer un modèle de prévision. Harvey et Whaley (92) soulignent le fait que comme la volatilité implicite est une fonction non-linéaire du modèle Black-Scholes, la meilleure prévision linéaire de la volatilité implicite n'est pas forcément la meilleure prévision du prix de l'option. Il faut donc user de parcimonie lors du traitement de la volatilité implicite. Dumas, Fleming et Whaley (98) sont arrivés à la conclusion que la composante temporelle n'avait aucun effet et qu'un simple modèle ad-hoc était plus performant. Une méthodologie ad-hoc consiste par ailleurs à utiliser une matrice de volatilité et à spécifier la volatilité appropriée aux caractéristiques de l'option.

1.6 Études contemporaines

La revue de la littérature concernant la formulation de nouveaux modèles, l'inconsistance de certaines propriétés de volatilité ou la vérification empirique est dense et parfois rébarbative d'un point de vue pratique. Cependant, trois articles ont marqué davantage cette recherche.

1.6.1 Options sur Indice

Don Chance (86) est un des premiers à traiter spécifiquement des options sur indice. L'option sur indice est sensiblement pareille à l'option sur une action particulière à l'exception de

¹⁶ Ces formes sont explicitement développées en annexe A2

quelques particularités. Premièrement, l'exercice de l'indice se fait en argent. Alors que pour une option sur action, le détenteur peut acheter l'action au prix d'exercice, pour une option sur indice, le détenteur recevra la différence en argent entre le niveau atteint par l'indice à l'exercice et le niveau préalablement fixé. Dans le cas d'une option américaine, le règlement se fera au niveau de l'indice calculé à la fermeture.

Le traitement des dividendes est aussi nuancé. Premièrement, à cause du grand nombre de titres versant des dividendes, il est plus vraisemblable d'estimer un taux de dividende et de traiter en temps continu le versement de dividendes. Il est néanmoins important de vérifier que le taux quotidien des dividendes (dividend yield) versés soit relativement lisse, c'est-à-dire que les dividendes soient versés de façon constante et non regroupés sur quelques jours de l'année. Plus un indice comporte un nombre élevé de titres, plus l'estimation d'un taux de dividendes (dividend yield) est réaliste. Dans le cas d'une option de type américain, cette nuance est importante puisque Merton (92) a démontré qu'il était avantageux d'exercer l'option juste avant la date ex-dividende. Un taux très lisse diminue la probabilité d'exercice précoce et permet de considérer l'option comme une option européenne. Dans notre étude, cette nuance perd de son importance puisque l'option est de type européen et expire seulement à maturité.

Un autre problème d'inférence soulevé est celui de la non-synchronisation. Dans le cas de l'indice, ce problème perd de son importance puisqu'un délai plus grand est nécessaire à la mise à jour de l'indice. Il énonce aussi les problèmes du rebalancement de portefeuille et donc d'obtenir une couverture étanche à cause de la difficulté de répliquer un indice. Contrairement à une option sur action où il ne s'agit que de vendre ou acheter l'action sous-jacente, le cas de l'indice est plus complexe puisqu'il impose de transiger sur le nombre de titres composants l'indice et ce en conservant les proportions associées. Cette stratégie est donc difficilement utilisable pour les petits investisseurs et onéreuse pour les institutionnels. Cependant, la création de fonds imitant l'indice apporte une solution à ce problème¹⁷. Il est aussi possible de transiger sur le marché à terme en utilisant les contrats à terme sur l'indice comme le sous-jacent. Cette stratégie est possible, mais le risque de base (basis risk) associé à l'écart entre les prix futur et spot peut engendrer une mauvaise construction du portefeuille sans risque.

1.6.2 Évaluation économétrique

Dans son article, Bates (95), en plus de faire un résumé de la littérature empirique, discute des méthodes économétriques employées pour tester les modèles d'évaluation d'options. Cette étude est très générale puisqu'elle énonce des conclusions pour les options sur actions, sur indices boursiers et sur les devises.

La méthodologie empirique s'inspire grandement d'une étude réalisée conjointement par Bakshi, Cao et Chan (1997). Cette étude teste la performance de quatre modèles d'options soit le modèle Black-Scholes (BS), le modèle à volatilité stochastique (SV), le modèle à volatilité et taux d'intérêt stochastiques (SVSI) ainsi que le modèle à volatilité

¹⁷ La récente apparition des options sur fonds indiciel (I60) à la bourse de Montréal illustre ce besoin

1.6 Études contemporaines

stochastique et saut (SVJ). Il compare les différents modèles au moyen de trois critères : a) consistance des paramètres implicites (spécification du modèle), b) meilleures prévisions et c) meilleure couverture. Les tests se font au moyen des prix d'options sur l'indice S&P 500 couvrant la période du premier juin 1988 au 31 mai 1991. Cet article est très important pour ce rapport étant donné la grande similitude des données utilisées, mais aussi pour la méthodologie proposée et la marche à suivre.

1.6.3 Études canadiennes

Initialement, l'étude voulait utiliser des données sur les options canadiennes. Dans cette perspective, une revue de la littérature canadienne a aussi été développée. Parmi les études percutantes, il faut souligner le travail de Melino et Turnbull (90) (91) qui proposent la méthode des moments généralisés pour l'estimation d'options sur devises. L'étude proposée par Doidge et Wei (95) a permis la distinction et l'évaluation de plusieurs modèles de prévision de volatilité associés à l'évaluation d'options au moyen de la formule Black-Scholes. Quelques modèles de prévision de la volatilité proposés par ces chercheurs seront repris pour les confronter aux autres modèles d'évaluation d'options. Cependant, les mesures d'erreurs porteront sur la différence entre les prix réels et estimés et non sur une possibilité d'arbitrage par la construction d'une stratégie (straddle). L'efficacité des marchés a déjà été reconnue.

Partie 2

Évaluation empirique

La partie précédente a fait une revue de la littérature en démontrant les principales faiblesses du modèle Black-Scholes. Après avoir résumé l'idée derrière la formule et signalé les principaux biais, la revue littéraire souligne les difficultés d'inférence et de conclusion quant aux problèmes de biais. La qualité des données et l'efficience du marché ont été reconnues, ce qui amène à conclure à la mauvaise spécification du modèle. Deux méthodes dans le but d'améliorer la performance du modèle Black-Scholes, s'offrent aux intervenants : la formulation de nouveaux modèles et la correction des biais associés à ce dernier. L'objectif de ce présent rapport est d'évaluer quels modèles, issus des deux méthodes proposées, donnent les meilleurs résultats.

Cette seconde partie expliquera, dans un premier temps, la méthodologie utilisée. Ainsi, la définition des critères d'évaluation et la présentation des données utilisées précéderont le choix des modèles et les méthodes d'estimation des paramètres. Une analyse descriptive des premiers résultats sera aussi présentée. Au moyen de ces estimations, il sera dès lors possible d'évaluer le prix des options et d'en calculer l'erreur de prévision et de couverture. Des résultats portant sur l'ensemble des options ainsi que ceux séparés en fonction du degré de monétude et de la maturité seront présentés dans le but d'expliquer les forces et faiblesses des modèles.

2.1 Description des critères

Comme le proposent Bakshi et al. (97), trois critères de mesure de la performance ont été retenus. Le premier critère repose sur la consistance des paramètres structurels estimés. Ce critère a pour but de mesurer si le modèle est bien spécifié à l'intérieur de l'échantillon. Pour se faire, les erreurs d'évaluation à l'intérieur et à l'extérieur de l'échantillon seront analysées. Par la suite, une analyse de stationnarité des paramètres sera apportée, ce qui permettra d'améliorer la prévision. Cependant, il faut noter que seulement les modèles utilisant des paramètres implicites seront présentés soit le modèle Black-Scholes avec volatilité implicite (BS), les modèles à volatilité stochastique et saut (SV et SVJ), la décomposition matricielle (MV) et le lissage de la volatilité (LSP).

Le second critère consiste à mesurer l'erreur de prévision hors-échantillon. Ce critère est d'une certaine manière plus efficace que le premier parce qu'il ne favorise pas un modèle comportant plusieurs paramètres. Le nombre de degrés de paramètres tend à augmenter le pouvoir explicatif d'un modèle à l'intérieur d'un échantillon. Tous les modèles dits implicites sont estimés à l'intérieur d'un échantillon et par conséquent, devraient être relativement précis. Par contre, rien n'assure pour autant qu'ils soient aussi bons pour la prévision. La prévision hors échantillon permet donc de mesurer la performance réelle d'un modèle.

2.2 Méthodologie

Cette partie requiert deux actions. Dans un premier temps, il faut estimer les paramètres implicites et ensuite tenter de prévoir ces derniers (volatilité ou autres) pour les insérer dans la formule appropriée afin d'en obtenir le prix et l'erreur de prévision pour les contrats d'option. Dans cette optique les estimations de tous les paramètres seront effectuées de manière existante c'est-à-dire avec l'information disponible au moment présent, sans pour autant connaître les paramètres estimés à ce moment. C'est à ce niveau que seront introduits les modèles de prévision de la volatilité. Il est important de conserver en mémoire que ces tests n'utilisent aucune information du futur et que le paramètre estimé en t sert à prévoir le prix de l'option en $t + 1$.

Le troisième critère consiste à mesurer la performance de couverture d'un modèle. En théorie, le modèle a été développé sous l'idée d'une couverture parfaite, or la discrétisation empêche une couverture totale. C'est à dire que même si le portefeuille est rebalancé fréquemment, il ne garantit pas pour autant l'absence d'une variation de valeur contrairement à l'idée de la valorisation risque-neutre. Un bon modèle permettra une bonne couverture et donc une erreur très faible. Contrairement au second critère, nous allons suivre la performance du modèle tout au long de la vie de l'option pour analyser l'évolution ou l'adaptation des modèles. Ce critère peut être considéré comme une mesure dynamique puisque l'erreur découle de la dynamique associée au rebalancement du portefeuille. Pour construire le portefeuille d'arbitrage et mesurer cette erreur, les ratios de couverture (delta hedge) seront dérivés au moyen des paramètres estimés de la prévision.

2.2 Méthodologie

Il faut retenir que certains modèles utiliseront les paramètres dits objectifs, issus de l'analyse de l'indice (sous-jacent) alors que d'autres utiliseront des paramètres dérivés implicitement donc subjectifs à la valorisation risque-neutre. De plus, ce type d'évaluation implique la modélisation en temps continu et l'utilisation de processus de diffusion. Cette formulation diffère grandement de l'estimation en temps discret utilisé lors de l'estimation des modèles pour la prévision de la volatilité.

L'estimation des paramètres de prévision proviendra d'un échantillon roulant de taille fixe (rolling window)¹⁸ utilisant les 500 dernières observations disponibles. Lamoureux et Lastrappe (93) ont trouvé qu'il était préférable d'utiliser un échantillon cumulatif (upgrading), mais la première forme a été retenue puisqu'elle offrait la même pondération pour toutes les observations. De cette façon, les options de la première journée reçoivent la même quantité d'information que celles de la fin. Une orientation donnée à ce rapport réside au niveau de l'estimation des paramètres implicites. Les paramètres seront estimés quotidiennement, en minimisant la somme pondérée des erreurs au carré (score). Les données des options seront pondérées en fonction de leur volume quotidien. Cette approche

¹⁸ De même formulation qu'une moyenne mobile où la dernière information remplace la première.

$$\sum_{i=1}^{n+i} y_i$$

trouve sa motivation du fait qu'elle est peu utilisée dans les études empiriques et qu'elle utilise la totalité de l'information provenant du marché (demande et offre observées). Par ailleurs, elle a tendance à surpondérer les valeurs extrêmes augmentant ainsi l'erreur.

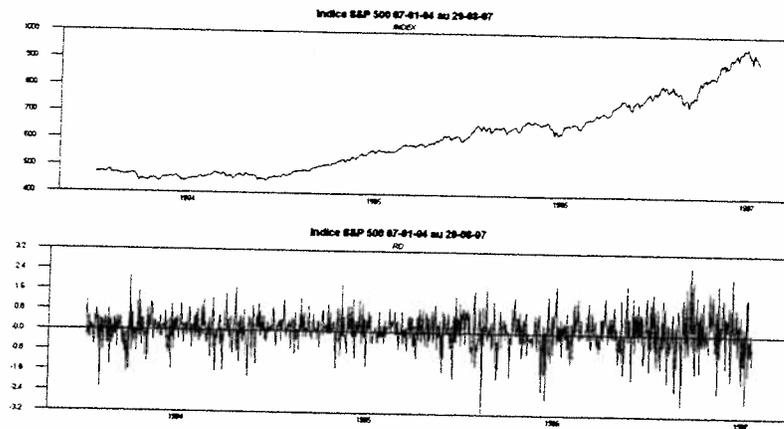
2.3 Données utilisées

Les tests porteront sur les options d'achat de l'indice S&P 500 (SPX) transigées à la Bourse de Chicago (CBOE). Ce sont les options de type européen les plus transigées et qui ont été amplement utilisées lors d'études antérieures. L'indice S&P 500 représente une moyenne pondérée des valeurs boursières des 500 plus grandes entreprises américaines ce qui en fait une bonne approximation du portefeuille de marché et de l'état de la conjoncture. La période s'étend du 2 janvier 1996 au 29 août 1997 et comprend 422 jours. Cependant, nos estimations ont nécessité l'apport de données antérieures. Une plage des 500 jours précédents la première observation, soit les données comprises entre le 7 janvier 1994 et le 29 décembre 1995 a été utilisée. Ce point marque aussi une distinction par rapport aux études précédentes qui utilisent des plages de données beaucoup plus longues. Les résultats portent sur une période relativement récente et empreinte à de fortes transformations. Ils seront fortement influencés par l'effet cyclique sans pour autant avoir la possibilité d'amélioration issue de la théorie asymptotique. Le prix de chaque option est la moyenne entre le prix offert et demandé (bid-ask). Étant donné la très grande liquidité, il y a présomption que l'écart soit faible. Cependant, aucune investigation approfondie n'a été faite en matière de microstructure du marché. Le prix de l'indice sous-jacent a été calculé simultanément avec les prix d'option à la fermeture, ce qui diminue la possibilité de biais relié à la non-synchronisation. Le taux sans risque utilisé est le taux provenant des bons du trésor américains à trois mois (90 jours). Le taux de dividende est calculé en fonction de l'indice S&P 500. Le taux de rendement de l'indice utilisé est la différence logarithmique quotidienne du niveau de l'indice $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$. Cette formule trouve sa motivation du fait que les modèles d'évaluation reposent sur la lognormalité des prix du sous-jacent. Les calculs ont été effectués sur une base annuelle de 360 jours soit en fonction de l'année américaine. Toutes les données proviennent de la base de données DATASTREAM.

2.3.1 Présentation des séries chronologiques

Le présent graphique montre l'évolution de l'indice S&P 500 (premier graphique) ainsi que les rendements quotidiens (deuxième graphique) de janvier 1994 à septembre 1997. On constate que la formidable ascension qui a été entamée à la fin de 1994 a connu deux importantes corrections avant le début de la crise asiatique soit au mois d'août 1996 ainsi qu'au mois de mars 1997.

2.3 Données utilisées



Indice SP 500

Cette dernière période (96-97) a été accompagnée par une hausse de la volatilité. On peut voir une dispersion plus accentuée des rendements autour de la moyenne. De plus, on peut voir poindre les premiers effets de la productivité reliés aux technologies de l'information et à la croissance de l'internet. Aussi, le graphique permet de visualiser la propagation de la crise financière asiatique à la bourse américaine, lorsque la Thaïlande a dû dévaluer sa devise le 2 juillet 1997. Cette crise financière allait se propager aux autres économies du Sud-Est asiatique et toucher les marchés nord-américains près d'un mois plus tard alors que l'indice boursier a fortement chuté au début du mois d'août 1997 (3^e grande correction) et a continué à se déprécier par la suite.

Statistiques en % par jour
Rendement $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$

	94-97	94-95	96-97
<i>observations</i>	922	500	422
<i>moyenne</i>	0.071	0.0553	0.091
<i>pvalue</i>	0.002	0.03	0.03
<i>écart-type</i>	0.023	0.0252	0.041
<i>skewness</i>	-0.366	-0.294	-0.402
<i>pvalue</i>	0	0.007	0
<i>kurtosis</i>	1.71	1.48	1.03
<i>pvalue</i>	0	0	0
<i>corr ordre1</i>	0.07	0.01	0.1
<i>Lung-Box (20)</i>	15.66	34.99	17.25
<i>pvalue</i>	0.74	0.02	0.635

Statistiques des rendements

Le tableau précédent montre les statistiques des rendements de l'indice pour les périodes 94-95 et 96-97. On constate premièrement qu'il y a eu augmentation de la moyenne

2.3 Données utilisées

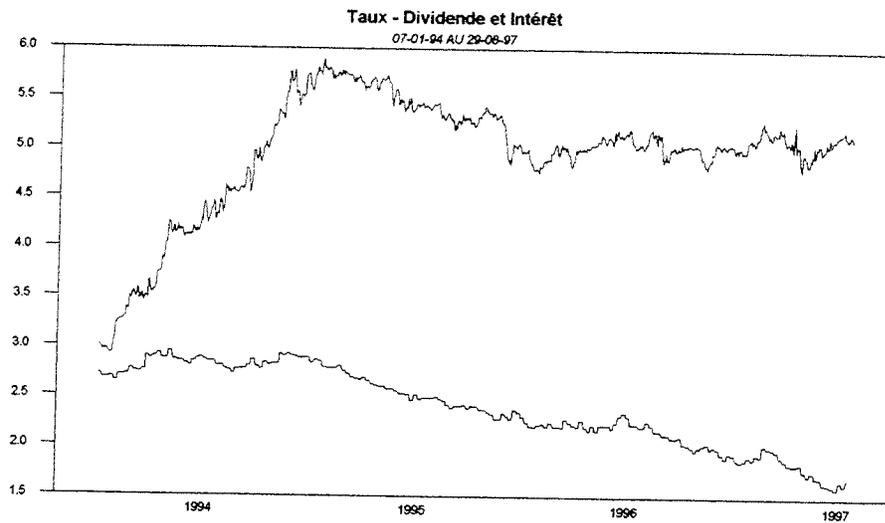
des rendements mais aussi de la volatilité. Au niveau des moments d'ordre supérieur, on est à même de voir la violation des hypothèses de Black et Scholes en ce qui a trait à la distribution des prix. Les coefficients d'asymétrie (skewness) sont significativement négatifs¹⁹ ce qui peut être interprété par un effet de levier (voir annexe B) alors que les coefficients d'aplatissement (kurtosis) sont quant à eux significativement positifs ce qui implique que les distributions sont plus leptokurtiques c'est-à-dire qu'il y a plus de rendements anormaux que le permettrait une distribution lognormale. Une étude plus approfondie au niveau de la différence des paramètres est néanmoins nécessaire pour une confirmation statistique. Finalement, une analyse des coefficients de corrélation montre que les rendements ne sont pas corrélés ce qui témoigne de l'efficiency du marché boursier. La statistique Ljung-Box vient confirmer l'absence de corrélation sérielle sauf peut-être pour la période 94-95 alors que les coefficients d'ordre supérieur (de 2 à 5)²⁰ étaient anormalement élevés. Cette incohérence du marché pourrait avoir des implications lors de l'estimation des volatilités objectives.

Dans un contexte d'évaluation d'option, l'évolution du sous-jacent est moins importante que d'autres variables. La volatilité, bien que difficilement observable, est sans doute le paramètre le plus influent. Cependant, il importe de considérer l'évolution du taux d'intérêt et du taux de dividende pour s'assurer du réalisme des hypothèses qui seront posées ultérieurement. Aussi, peut-on voir sur le graphique des taux, que l'évolution du taux de rendement sur les bons à trois mois du trésor américain a fluctué grandement au début de la période sans pour autant varier fortement de façon journalière. Le taux de dividende s'est avéré particulièrement lisse suivant une courbe descendante. Cette diminution du taux de distribution vient confirmer la venue dans la composition de l'indice, de firmes en nouvelles technologies, alors que ces dernières misent avant tout sur le gain en capital provenant des anticipations de revenus potentiels. Ce changement explique à la fois l'augmentation des rendements et de la volatilité. Signalons la présence de racine unitaire pour ces deux séries

¹⁹ Les coefficients sont centrés

²⁰ Pour ces coefficients on enregistre une moyenne (valeur absolue) de 0.0535

2.3 Données utilisées



Taux de dividende et d'intérêt

2.3.2 Statistiques sur options

Dans le but d'assurer une consistance aux estimations, un filtre a été apporté aux options pour éviter de prendre des options trop peu liquides, ou hors-cours, qui auraient signifié la présence d'arbitrage et auraient biaisé les résultats. Les options qui avaient un volume inférieur à 10 contrats, celles dont le prix était inférieur à 0.375 \$ (3/8 U.S. \$), celles dont la maturité était inférieure à 7 jours ou supérieure à un an (360 jours) et finalement celles dont le prix était inférieur à la valeur intrinsèque ont été rejetées.

$$Call(t, T) < \max(0, S_t - KB_{(t,T)}) \quad (1)$$

Où S_t est l'indice au temps t , K est le prix d'exercice, $B_{(t,T)}$ est la valeur du bon du trésor (taux sans risque) pendant la durée de vie de l'option. Cette relation implique que la valeur intrinsèque d'une option d'achat ne peut-être supérieure à son prix sans quoi, une opportunité d'arbitrage se dessinerait

Résultats du filtre

PÉRIODES	1994-1995	1996-1997
NOMBRE TOTAL DE CONTRATS	20 988	24 704
CRITERES (nombre de rejet)		
Volume < à 10 contrats	3 849	6 527
Prix < à 0.375 \$	2 196	1 267
Maturité < 7 jours	1 378	1 593
Maturité > 360 jours	84	657
Prix < à valeur intrinsèque	3 329	3 212
NOMBRE TOTAL DE REJETS	8 627	10 355
NOMBRE D'OPTIONS RESTANTES	12 361	14 349

Filtre sur options

On constate premièrement qu'un grand nombre d'options ont été rejetées (près de 40 %), mais qu'entre 12 % et 15 % des contrats offraient une opportunité d'arbitrage. Cependant, il faut mentionner que cette interprétation témoigne plus du : «bruit» découlant de la liquidité et d'un biais au niveau de la synchronisation des prix. De plus, en tenant compte des coûts de transaction, les opportunités d'arbitrage tendent à disparaître.

Les statistiques sur les options ont été calculées en fonction de la pondération par le volume. On constate des différences lorsque les calculs sont faits en accordant la même pondération à tous les contrats (voir annexe C). Cette disparité accroît l'importance des méthodes d'estimation (mcg). Le tableau suivant montre les caractéristiques des options en fonction d'une décomposition matricielle. Il est à noter que ces critères sont les mêmes qui seront utilisés dans le modèle de la décomposition matricielle (MV).

STATISTIQUES sur OPTIONS

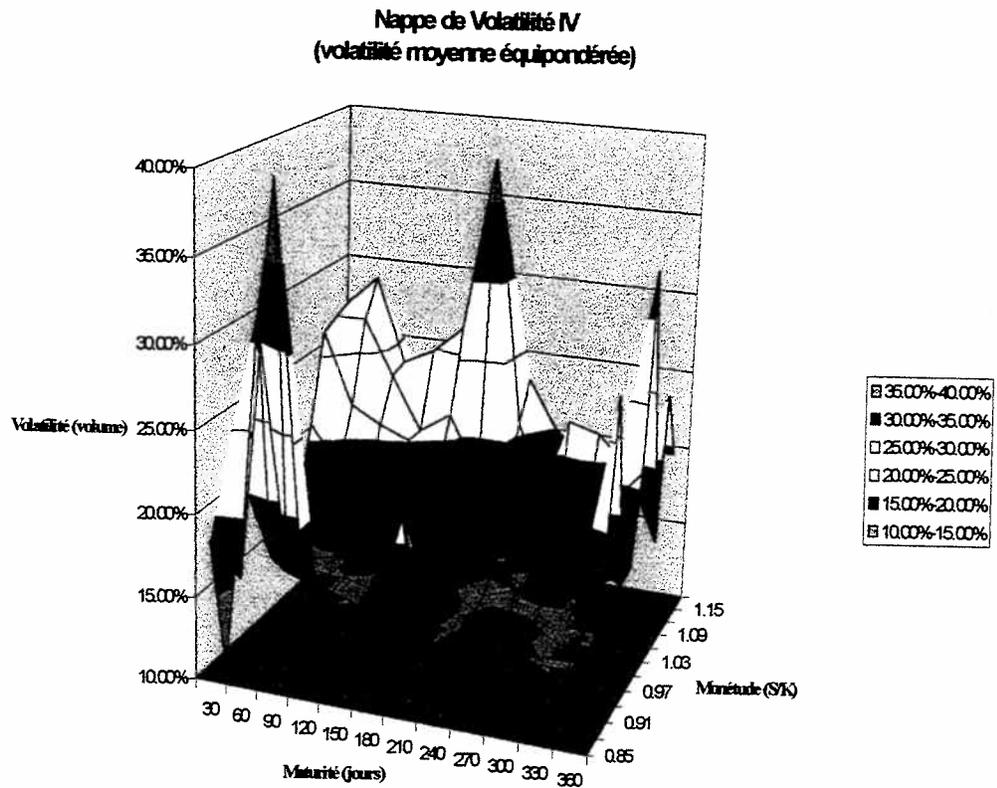
	Option 94-95		Option 96-97	
	Volume	Contrat	Volume	Contrat
Nombre	15 600 039	12 361	11 586 863	14 349
Prix moyen	7.07 \$	10.79 \$	18.32 \$	23.11 \$
Écart-type	10.13 \$	13.74 \$	27.74 \$	31.13 \$
Volatilité moy.	10.39%	10.97%	15.60%	16.43%
Écart-type	2.29%	3.20%	4.30%	5.12%

Statistiques sur options (94-97)

Les graphiques et tableaux suivants montrent la nappe de volatilité et la décomposition matricielle pour les options de tout l'échantillon pour la période 96-97. À la lumière de ce

2.3 Données utilisées

graphique, l'hypothèse d'une volatilité constante est évidemment rejetée alors qu'on aurait dû observer une nappe complètement plate. On voit donc que la volatilité implicite (et donc le prix) dépend du degré de monétude (S/K) et de la maturité. Les options à très brèves échéances, dont le degré de monétude s'éloigne de la parité (hors cours ou dans le cours), ont tendance à manifester une plus grande volatilité, mais aussi une plus grande disparité autour de la volatilité moyenne. Il est à noter qu'une pondération uniforme tend à lisser la volatilité moyenne, mais à augmenter l'écart-type autour de la volatilité moyenne.



2.3 Données utilisées

POPULATION 96-97

Monétude	S/K	Modèles	jours avant expiration			
			< 60	60 - 180	> 180	
	< 0.94	Poid	3.46%	4.84%	2.41%	10.70%
		Prix moyen	1.70 \$	6.95 \$	16.77 \$	7.46 \$
		Écart-type	2.63 \$	8.78 \$	13.05 \$	10.28 \$
		Volatilité moy.	15.88%	14.97%	15.32%	15.34%
		Écart-type	4.34%	4.31%	3.66%	4.20%
	0.94 - 0.97	Poid	15.76%	3.81%	0.81%	20.38%
		Prix moyen	3.45 \$	12.49 \$	35.59 \$	6.41 \$
		Écart-type	3.17 \$	9.49 \$	20.03 \$	9.37 \$
		Volatilité moy.	14.65%	14.70%	16.00%	14.71%
		Écart-type	3.06%	3.64%	4.40%	3.25%
	0.97 - 1.00	Poid	32.54%	5.32%	1.80%	39.65%
		Prix moyen	8.06 \$	24.67 \$	45.48 \$	11.98 \$
		Écart-type	5.64 \$	11.22 \$	16.89 \$	11.87 \$
		Volatilité moy.	14.57%	16.14%	15.98%	14.85%
		Écart-type	3.51%	3.46%	3.82%	3.57%
	1.00 - 1.03	Poid	15.57%	2.54%	1.40%	19.51%
		Prix moyen	17.84 \$	33.05 \$	50.74 \$	22.18 \$
		Écart-type	7.89 \$	10.88 \$	11.95 \$	12.81 \$
		Volatilité moy.	15.68%	16.87%	15.71%	15.83%
		Écart-type	4.01%	3.12%	2.66%	3.85%
	1.03 - 1.06	Poid	3.30%	0.73%	0.22%	4.25%
		Prix moyen	35.61 \$	51.83 \$	68.17 \$	40.09 \$
		Écart-type	8.48 \$	13.98 \$	15.50 \$	13.49 \$
		Volatilité moy.	19.80%	17.47%	17.59%	19.28%
		Écart-type	4.74%	3.41%	3.72%	4.59%
	1.06 <	Poid	2.49%	2.15%	0.86%	5.50%
		Prix moyen	108.66 \$	88.61 \$	95.23 \$	98.73 \$
		Écart-type	83.81 \$	27.57 \$	38.42 \$	61.63 \$
		Volatilité moy.	22.06%	21.32%	17.60%	21.08%
		Écart-type	9.90%	3.97%	2.36%	7.33%
Maturité	WEITH		73.13%	19.40%	7.48%	11 586 863
	PM		13.52 \$	27.07 \$	42.52 \$	18.32 \$
	PSD		25.47 \$	27.75 \$	30.65 \$	27.74 \$
	IVM		15.38%	16.29%	15.95%	15.60%
	IVSD		4.36%	4.22%	3.58%	4.30%

** Les moyennes et écart-types sont pondérées par le volume

Statistiques sur options (2)

2.4 Choix des modèles

Trois modèles seront examinés dans ce rapport. Le modèle initialement développé par Black-Scholes servira d'étalon de mesure (BS). Le modèle à volatilité stochastique (SV) développé par Hull et White (87) et le modèle à volatilité stochastique et saut (SVJ) développé par Bates (95) ont été retenus. La forme analytique développée par Heston (93) et Bakshi et al. (97) sera utilisée. Les résultats des précédentes études ont montré que ces modèles procuraient de meilleurs résultats que les modèles conventionnels. Le prix de l'option d'achat engendré par ces modèles s'écrit sous la forme standard et sera appliqué à tous les modèles.

$$Call = S_t P_1 - K B_{(t,T)} P_2 \quad (2)$$

P_1 et P_2 sont les probabilités que l'option soit exercée (densité cumulative). Pour chaque modèle, il suffit de trouver les probabilités P_i respectives au moyen des paramètres et des caractéristiques de l'option.

$$B_t = e^{-r_t(T-t)/360} \quad (3)$$

Le prix du bon B_t est calculé avec le taux courant (spot) r_t en vigueur sur les bons du trésor au temps t , actualisé en fonction de la durée de vie (T) annuelle de l'option. L'hypothèse d'un taux sans risque constant est implicitement reconnue, mais en plus, le taux courant, et non la moyenne sur la durée de vie de l'option, a été adopté et appliqué à tous les modèles. Cette méthode est plus réaliste puisqu'elle ne nécessitait pas l'hypothèse d'anticipation parfaite des taux futurs.

Cependant, comme l'a montré l'analyse des séries chronologiques, le taux sur les bons du trésor est loin d'être constant et la présence d'une racine unitaire accroît son caractère stochastique. Par ailleurs, aucun modèle pour incorporer un processus de taux d'intérêt stochastique n'a retenu l'attention. Les études antérieures, en particulier celle de Bakshi et al. (97), ont démontré que de faibles variations du taux d'intérêt pour l'évaluation des options à courte échéance (inférieures à un an) ont très peu d'impact et que cette composante n'ajoutait pas au pouvoir explicatif du modèle. Finalement, notons que pour les options dont l'expiration coïncide avec celle des contrats à terme sur les bons du trésor, il est possible de se prémunir contre le risque de taux en prenant une position inverse sur le marché à terme²¹.

Par ailleurs, le fait que la formulation des modèles découle de la création d'un portefeuille d'arbitrage implique la valorisation dans un monde où les agents seraient neutres

²¹ Généralement pour l'élaboration d'une stratégie de couverture, mais pas pour la valorisation de l'option.

2.4 Choix des modèles

face au risque. Or, les compagnies composant l'indice boursier (sous-jacent) versent des dividendes, ce qui contredit l'évolution sans risque. Pour remédier à ce problème, il a fallu retrancher de l'indice, la valeur actualisée des dividendes qui seront touchées avant l'expiration de l'option.

$$S_i = S - \sum_{s=1}^{T-t} e^{-r(t+s)s/360} D(t+s) \quad (4)$$

S_i est le nouvel indice et $D(t+s)$ est le dividende en argent que reçoit quotidiennement le détenteur de l'indice. Il y a donc un sous-jacent pour chaque contrat d'option qui dépend de la durée de vie et de la date pour le dividende et le taux. Cette formulation suppose une analyse ex-post puisqu'il y a anticipation parfaite du taux de dividendes qui seront versés d'ici l'expiration. Contrairement à ce qui a été appliqué au niveau du taux sans risque, cette méthode d'ajustement des dividendes s'explique par la relative prévisibilité des dividendes²². Une rapide analyse permet de constater que la faiblesse et la constance du taux de dividendes n'apportent que de faibles variations par rapport au sous-jacent initial. De même, il est reconnu que le taux d'intérêt évolue de façon beaucoup plus stochastique.

Ces deux hypothèses, à moins de variations exceptionnelles, ne sauraient modifier considérablement les résultats. Il faut rappeler que l'objectif premier est la comparaison de différents modèles et que tous les modèles se sont vu appliqués le même processus de dividendes et de taux.

2.4.1 Modèle Black-Scholes (BS)

Le modèle Black-Scholes(73) est dérivé à partir d'un processus de diffusion du prix de type brownien géométrique.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB \quad \text{où} \quad dB \sim N(0, 1) \quad (5)$$

Pour un développement de ce modèle, se référer à l'annexe D. La solution de l'équation différentielle partielle dans le cas d'une option d'achat de type européen est donnée par la formule

²² Il aurait été dans doute plus réaliste d'utiliser la formule : $D_a = \sum_{s=1}^{T-t} e^{-rs/360} D$ où le taux et le montant de dividende sont ceux de la dernière période. En tous les cas, les changements auraient été négligeables

2.4 Choix des modèles

$$P_1 = N_c(d1) \text{ et } P_2 = N_c(d2) \quad (6)$$

$$d_1 = \left[\frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (7)$$

Où N_c est la densité cumulative de la loi normale qui s'interprète comme la probabilité que l'option soit exercée. En effet, on peut voir qu'à la date d'expiration, T est zéro et que la N_c tend vers 1 dès que le sous-jacent est supérieur au prix d'exercice. L'option sera exercée et sa valeur sera sa valeur intrinsèque. σ est la volatilité moyenne exprimée sur une base annuelle et est considérée constante lors de la durée de vie de l'option. La volatilité implicite est donc le paramètre σ qui permet d'inverser la formule avec le prix observé et doit être interprétée comme la volatilité qui prévaudra dans un univers risque-neutre d'ici la date d'expiration de l'option. L'estimation de la volatilité implicite est celle proposée par Whaley (82). Day et Lewis (88 et 92) et Doidge et Wei (95) ont également utilisé cette méthode.

$$\sigma_t = \arg \min \sum_{i=1}^N w_{it} (P_{it} - P_{BS}(\sigma_{it}))^2 \quad (8)$$

Le paramètre de la volatilité quotidienne est estimé pour chaque jour t . Cette volatilité sert maintenant à valoriser chaque contrat d'option émis en t à l'aide du modèle Black-Scholes. De plus, une série chronologique des volatilités implicites est obtenue et peut être comparée avec les volatilités en probabilités objectives (Garch, Egarch).

2.4.2 Modèle à volatilité stochastique (SV)

Pour corriger la présence d'un sourire, des modèles ont été développés en permettant à la volatilité d'être stochastique et non constante comme dans le cas de Black-Scholes. Dans le modèle développé par Bakshi, Cao et Chen (97), la valorisation se fait sous une mesure de probabilité risque-neutre (le rendement est celui du taux sans risque). Le processus de diffusion du prix suit un brownien géométrique et celui de la volatilité est un processus de retour à la moyenne de type Ornstein-Uhlenbeck.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = R(t)dt + \sqrt{V(t)}dw_s(t) \quad (9)$$

$$dV(t) = [\theta_v - \kappa_v V(t)] dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} dw_v(t) \quad (10)$$

$R(t)$ est le taux sans risque instantané en (t) ,

$\sqrt{V(t)}$ est la volatilité instantanée en (t)
 $\kappa_v, \frac{\theta_v}{\kappa_v}, \sigma_v$ sont respectivement la vitesse d'ajustement, la moyenne de long terme et le coefficient de variation de la diffusion de volatilité $\sqrt{V(t)}$
 $dw_s(t), dw_v(t)$ sont les accroissements de browniens associés à la diffusion du prix et de la volatilité. La covariance entre ces deux termes est donnée par $COV [w_s(t), w_v(t)] = \rho dt$.

Il faut souligner qu'aucune contrainte n'est imposée à la corrélation entre les innovations (mouvements browniens), ce qui permet la réalisation de l'effet de levier. Cette forme plus souple n'a toutefois pas de forme analytique générale comme la formule de Black-Scholes et la valorisation de l'option au moyen de cette formule se fait habituellement par simulation. Heston (93) a été le premier à proposer une solution à l'équation différentielle partielle par la formule suivante.

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(\Phi; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (11)$$

pour $j = 1, 2$ où f_j est la fonction caractéristique donnée par les équations (54) et (59).

2.4.3 Modèle à volatilité stochastique et saut (SVJ)

Le modèle à volatilité stochastique et saut a été dérivé dans un cadre plus général que le modèle précédent. Le processus de diffusion permet au prix (indice) de prendre des valeurs extrêmes ce qui a été confirmé lors de corrections boursières ou de vives ascensions du titre.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [R(t) - \lambda \mu_j] dt + \sqrt{V(t)} dw_s(t) + J(t) dq(t) \quad (12)$$

$$dV(t) = [\theta_v - \kappa_v V(t)] dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} dw_v(t) \quad (13)$$

$$\ln[1 + J(t)] \sim N \left(\ln[1 + \mu_j] - \frac{1}{2} \sigma_j^2, \sigma_j^2 \right) \quad (14)$$

λ est la fréquence annuelle de saut

J est la taille du saut en pourcentage de variation du prix (conditionnel à la réalisation du saut). Ce taux est indépendamment et identiquement distribué (temporellement) selon une loi lognormale de moyenne μ_j et variance σ_j^2 (inconditionnel)

$q(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ ce qui implique que $\Pr(dq(t) = 1) = \lambda(t)$ et que $\Pr(dq(t) = 0) = 1 - \lambda(t)$

2.5 Correction des biais associés à la volatilité

Comme le saut est imprévisible par nature, $q(t)$ et $J(t)$ sont non corrélés avec $w_s(t), w_v(t)$.
Sous cette modélisation, la variance totale du rendement peut être décomposée en deux parties.

$$\frac{1}{dt} Var_t \left(\frac{\partial S(t)}{S(t)} \right) = V(t) + V_j(t) \quad (15)$$

Où $V(t)$ est le carré de la volatilité et $V_j(t)$ est la variance instantanée associée au saut

$$V_j(t) = \frac{1}{dt} Var_t [J(t)dq(t)] = \lambda \left[\mu_j^2 + (e^{\sigma_j^2} - 1)(1 + \mu_j)^2 \right] \quad (16)$$

La solution de ce modèle emboîte celle du modèle de volatilité stochastique au niveau de la fonction caractéristique (f_i) alors qu'il faut ajuster la variance en fonction de la volatilité découlant de la probabilité de saut.

2.4.4 Analyse des modèles

L'hypothèse de la distribution lognormale des rendements proposée par Black-Scholes est très contraignante et reflète mal la réalité empirique. En particulier, il apparaît que A), la volatilité n'est pas constante, B) il y a un effet de levier (asymétrie négative) et C) on retrouve beaucoup plus de valeurs extrêmes (kurtosis positif). Les deux derniers modèles (SV) et (SVJ), assouplissent certaines hypothèses. Le modèle avec saut (SVJ) englobe les deux autres et est le moins contraignant. Cette distribution du rendement du sous-jacent est semblable à celle utilisée par Bates(96) pour modéliser le prix des devises. Elle offre suffisamment de flexibilité par rapport à la réalité empirique alors que l'asymétrie (skewness) est contrôlée par la corrélation ρ et la moyenne du saut μ_j . L'aplatissement (kurtosis) est quant à lui modélisé par la diffusion de la volatilité σ_v et l'amplitude de la composante de saut. Ces possibilités ont aussi été développées en temps discret par Nelson (91) dans son modèle d'hétéroscédasticité conditionnelle logarithmique (Egarch).

L'avantage majeur des modèles à volatilité stochastique réside dans la possibilité pour la composante de volatilité $V(t)$ de générer assez de corrélation négative (asymétrie négative) et d'excès de kurtosis (distribution leptokurtique). Toutefois, pour le modèle (SV), cet aspect est limité par le processus de diffusion continu de $V(t)$. L'incorporation des paramètres de saut μ_j, λ, σ_j brise cette continuité et permet de filtrer tout niveau d'asymétrie et de kurtosis laissant place à une meilleure représentation empirique de la distribution des rendements de l'indice. Par ailleurs, le modèle ainsi obtenu compte maintenant huit paramètres à estimer ce qui rend plus difficile la recherche d'un optimum.

2.5 Correction des biais associés à la volatilité

Dans le but d'améliorer le modèle Black-Scholes, deux techniques relativement simples ont été retenues. Toutes deux tentent de réduire l'effet de sourire de la volatilité implicite associée au modèle Black-Scholes. Au moyen d'une meilleure estimation de la volatilité, il serait possible d'utiliser adéquatement le modèle Black-Scholes même si certaines des hypothèses sont contraignantes. La première consiste à expliquer la volatilité implicite au moyen d'une régression linéaire (LSP). La seconde méthode est généralement utilisée par les négociants d'options et consiste à calculer une volatilité moyenne en fonction d'une nappe de volatilité, soit sur un échantillon d'options répondant au critère de la nappe. Ces deux méthodes, beaucoup plus simples, seront comparées en tous points avec les deux modèles précédents (SV) et (SVJ).

2.5.1 Lissage de la volatilité (LSP)

Cette méthode consiste à estimer la volatilité implicite en fonction des variables de monétude (SK) et de maturité (T) au moyen d'une relation linéaire.

$$\sigma_i = \beta_0 + \beta_1 SK + \beta_2 SK^2 + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 SK \cdot T \quad (17)$$

Où σ_i est la volatilité implicite pour chaque option et SK est le ratio du sous-jacent sur le prix d'exercice. Pour chaque période d'observation, soit pour chaque jour, les paramètres (β_i) seront estimés en minimisant la somme pondérée des carrés des erreurs (moindres carrés généralisés) de la régression.

$$\beta_i = \arg \min \sum_{i=1}^N w_i (\sigma_i - x_i \beta_i)^2 \quad (18)$$

Où w_i est la pondération de chaque option i en fonction de son volume quotidien, N le nombre de contrats pour ce jour et x_i est le vecteur des variables associées à cette option.

2.5.2 Matrice de volatilité (MVP)

Dans le même ordre d'idée, la matrice de volatilité vise à isoler chaque partie de la nappe en fonction des critères de monétude et d'expiration. Les estimations se font comme pour la volatilité implicite développée précédemment (BS) à la différence que seules les options correspondant aux critères sont incluses. Cette méthode semble au premier plan justifiée,

2.6 Estimation des paramètres

parce qu'elle permet de découper la nappe et de réduire la dispersion des résultats. Seulement, pour certaines catégories d'options, comme les options à longue échéance et fortement dans le cours, on retrouve peu de transactions. Le tableau suivant montre le nombre de jours pour lesquels on dénote une activité et pour lesquels les prix des options transigées serviront à l'estimation de la volatilité. On constate que le nombre de journées manquantes est assez élevé puisqu'on compte 500 et 422 jours respectivement en 94-95 et en 96-97.

Nombre de jours d'activité

MONÉTUDE		MATURITÉ		
		< 60	60 - 180	> 180
< 0.94	94-95	45	349	355
	96-97	289	364	276
0.94 - 0.97	94-95	454	451	197
	96-97	417	368	154
0.97 - 1.00	94-95	500	471	200
	96-97	422	388	211
1.00 - 1.03	94-95	500	381	129
	96-97	418	301	144
1.03 - 1.06	94-95	286	145	65
	96-97	317	159	53
1.06 <	94-95	124	55	16
	96-97	223	179	74

Nombre de jours

Ce manque de liquidité nuit à une bonne estimation alors qu'il n'y pas un nombre suffisant d'observations pour reconstituer la série par interpolation. Pour pallier ce problème et extraire des séries de volatilité pour chaque catégorie d'options, les séries ont été reconstituées par cointégration avec la série générale (BS).

$$\sigma_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \sigma_i + \beta_2 \sigma_i^2 \quad (19)$$

Cependant, le faible coefficient de détermination (R^2) témoignant de la force de la relation ainsi que le faible nombre d'observations laissent entrevoir les difficultés de prévision et les erreurs pour ce type de modèle.

2.6 Estimation des paramètres

Les calculs ont été faits à l'aide du logiciel de programmation matricielle GAUSS. Les paramètres ont été estimés quotidiennement par la minimisation des carrés des erreurs pondérées par le volume. L'estimation des paramètres pour les modèles BS, LSP et MV n'a pas suscité d'énormes difficultés de calculs et s'est déroulée assez simplement. Cela ne saurait toutefois pas assurer la validité et la robustesse des paramètres. Par contre, l'estimation des paramètres des modèles SV et SVJ a été beaucoup plus problématique. Premièrement, l'estimation quotidienne fournissait en moyenne 24 et 34 contrats pour les périodes 94-95 et 96-97 et exigeait l'estimation de 5 et 8 paramètres respectivement pour les modèles SV et SVJ. Tout cela est relativement complexe puisqu'il faut diviser un espace restreint (observations disponibles) en plusieurs parties (nombre de paramètres) ce qui laisse très peu de flexibilité d'ajustement des paramètres. Deuxièmement, l'équation à minimiser est fortement non-linéaire ce qui ralentit la convergence et n'assure en rien l'atteinte d'un optimum global. Finalement, l'évaluation numérique des probabilités respectives P_j nécessite la programmation d'une intégrale de limite infinie ce qui est source d'imprécisions et d'erreurs potentielles.

Plusieurs quadratures ont été testées au moyen de données simulées. Ces quadratures sont des approximations polynomiales de la fonction et sont d'autant plus précises que la fonction converge rapidement. Dans ce cas, la fonction caractéristique f_j converge en effet rapidement et est particulièrement lisse. Le meilleur compromis entre la précision et l'économie computationnelle a été obtenu à l'aide d'un polynôme de Laguerre d'ordre 15 (Abramowitz et Stegun, 1968).

$$\int_0^{\infty} g(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n=15} w_i e^{x_i} g(x_i) \quad (20)$$

Où $g(x)$ est la fonction à intégrer, w_i et x_i sont les poids et les racines caractéristiques du polynôme. Cette quadrature est davantage spécifiée pour les formes exponentielles où l'exposant de la variation est positif. Dans le cas présent, l'exposant est négatif. De surcroît, les problèmes de calculs numériques principalement dûs à l'erreur d'arrondissement et à l'inversion des matrices, n'ont pas permis la convergence vers le prix de Black-Scholes lorsque le paramètre σ_v tend vers 0. En ce sens, les données simulées ont montré un biais croissant négatif lorsque les options devenaient hors cours (OTM). L'erreur de mesure pour le degré de monétude (S/K) visé variait de 0.15 % à 2% des prix.²³

Aussi, étant conscient des erreurs et de la sensibilité de ces formules, les estimations ont été faites avec parcimonie. Les techniques d'optimisation conventionnelles utilisant le gradient (DFP ou BFGS) ont été vite rejetées à cause de la difficulté à calculer le gradient. Les tests préalablement effectués ont montré l'absence de convergence après plus de

²³ L'utilisation plus extensive du logiciel Mathematica aurait permis combler ces erreurs d'approximations numériques (round-off).

2.7 Évaluation de la performance (premier critère)

20 000 itérations et ce, avec des valeurs initiales relativement plausibles²⁴. L'algorithme du Simplex proposé par Spendey et al. (1962) a été choisi pour l'estimation des paramètres implicites. Cette technique un peu désuète converge moins rapidement, mais est plus robuste puisqu'elle ne nécessite pas le calcul de dérivés dans la recherche de l'optimum. Un seuil de tolérance assez élevé et un nombre d'itérations assez faible (1000) ont été imposés pour accélérer les procédures et empêcher l'explosion des valeurs. Les efforts de calcul ont été investis au niveau de la recherche de valeurs initiales. Dans le but d'assurer l'atteinte vers un optimum global, la détermination des valeurs initiales a été réalisée à l'aide d'une grille de 50 000 (pour chaque paramètre) valeurs simulées à partir de valeurs théoriques et empiriques. Certains paramètres sont temporellement indépendants comme la vitesse d'ajustement, le coefficient de diffusion de la volatilité et du saut alors que d'autres, comme la volatilité instantanée et la corrélation ont été tirées en fonction de leur valeur précédente. Dans le cas du modèle SVJ, les valeurs initiales des paramètres de diffusion de la volatilité proviennent des résultats du modèle SV. Pour empêcher l'obtention de valeurs aberrantes au niveau de l'interprétation, certains paramètres ont été contraints (contrainte de positivité).

2.7 Évaluation de la performance (premier critère)

Les paramètres implicites ont été estimés pour la période du 07 janvier 1994 au 29 août 1997. Les 500 premiers paramètres serviront lors de l'estimation des paramètres auto-régressifs de la prévision. Auparavant, il apparaît important d'examiner la performance des modèles et des estimations. L'analyse des critères portera sur les deux échantillons (94-95 et 96-97). La première étape aura pour but de comparer graphiquement les sourires de volatilité pour les modèles BS, SV et SVJ. Les volatilités ont été estimées en fixant les autres paramètres. La seconde étape sera d'évaluer les erreurs d'ajustement, c'est-à-dire l'erreur d'évaluation provenant des modèles au moyen des paramètres implicitement dérivés. La dernière étape visera, en complément à la première, à mesurer la consistance de la volatilité implicite. En dernier lieu, une analyse de stationnarité de l'ensemble des paramètres sera proposée.

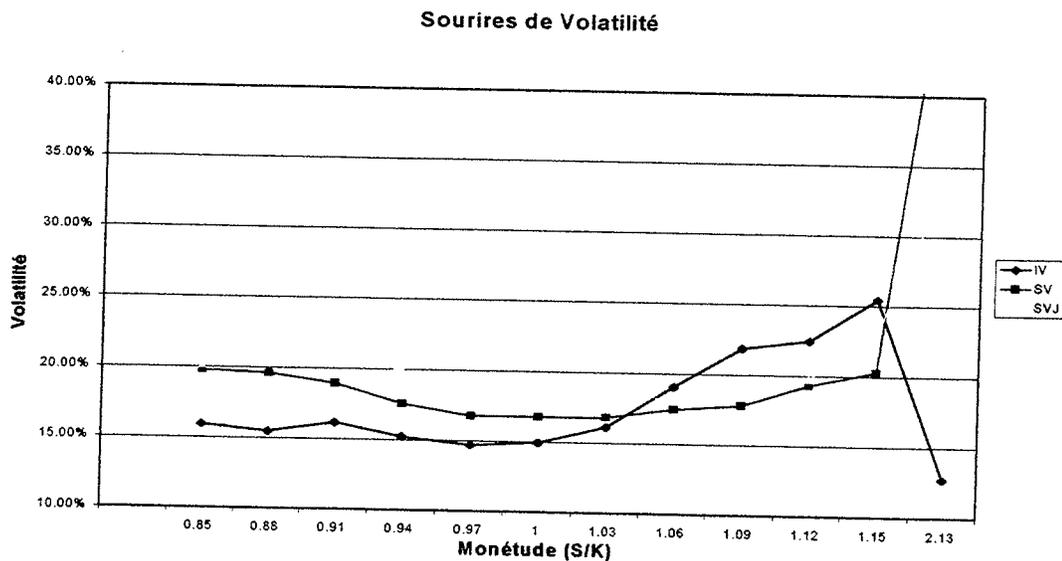
2.7.1 Analyse des sourires

Un bon modèle d'évaluation d'option devrait réussir à enlever le biais relatif à la monétude de l'option. La volatilité en fonction du prix d'exercice (S/K) devrait donc être lisse. Le graphique suivant montre un biais pour le modèle standard (IV) fortement croissant en fonction du degré de monétude. Les sourires pour les modèles SV et SVJ sont plus lisses mais on voit un biais lorsque l'option est hors-cours. Il reste que ces modèles tendent à surestimer la volatilité et donc auront tendance à surpondérer les options hors cours (par

²⁴ Dans tous les cas, il a été impossible de retomber avec précision sur les valeurs initiales.

2.7 Évaluation de la performance (premier critère)

rapport au modèle standard). Les volatilités ont été estimées en fixant les autres paramètres implicites.



Sourires de volatilité (96-97)

2.7.2 Pouvoir explicatif des modèles

Les erreurs présentées sont l'erreur moyenne quadratique (RMSE) et l'erreur moyenne relative (MPE).²⁵ L'erreur de prévision (OUT) est issue du modèle naïf où les paramètres insérés dans le modèle proviennent de l'estimation à la journée précédente ($\Phi_{(t)} = \Phi_{(t-1)}$). De cette façon, il est possible d'analyser la stationnarité des paramètres.

²⁵ Voir annexe D pour explications des mesures d'erreurs

2.7 Évaluation de la performance (premier critère)

ERREURS INTERNES (94-97) (Paramètres implicites)

modèles	MAE	MPE	RMSE
LSP	0.44 \$	-10.27%	8.51 \$
BS	0.89 \$	0.66%	2.07 \$
MVD	0.34 \$	-1.68%	3.12 \$
SV	1.23 \$	-0.50%	11.36 \$
SVJ	5.23 \$	228.36%	15.28 \$

Erreurs en échantillon 94-97

Selon les résultats provenant du tableau précédent, et présentant les erreurs sur une plage de 922 journées, on voit que le modèle standard (BS) affiche de très bons résultats, notamment au niveau de l'erreur quadratique ce qui signifie que les grands écarts sont moindres et implique que le modèle surpondère les options plus dispendieuses. Cette performance est d'autant plus remarquable que ce modèle n'a qu'un seul paramètre et devrait être désavantagé par rapport aux autres. La décomposition matricielle (MVD) montre des résultats intéressants, mais on constate le prix de la reconstitution de séries. Comme cette forme englobe le modèle BS, il semble raisonnable de penser que la reconstitution des 18 séries a nui à cette technique bien qu'au niveau de l'erreur absolue cette technique présente la plus faible erreur. Les résultats du lissage (LSP) sont un peu décevants. Cette technique présente l'avantage de contrebalancer les erreurs, mais permet aussi plus de grands écarts comme le montrent les erreurs quadratiques et relatives. Les modèles à volatilité stochastique (SV et SVJ) affichent de mauvais résultats. Les problèmes d'estimations sont directement reliés. Le modèle SV étonne toutefois au niveau de l'erreur relative en affichant la meilleure performance. On peut donc penser qu'il pondère davantage les options de faibles prix et permet des écarts importants avec les options plus coûteuses.

ERREURS QUADRATIQUES \$ (Paramètres implicites)

modèles	IN 94-95	IN 96-97	OUT 94-95	OUT 96-97
LSP	0.49 \$	2.18 \$	6.30 \$	11.13 \$
BS	0.76 \$	2.92 \$	0.95 \$	3.39 \$
MVD	0.41 \$	1.81 \$	0.87 \$	5.79 \$
SV*	7.07 \$	23.62 \$	5.24 \$	18.62 \$
SVJ*	9.00 \$	31.35 \$	8.46 \$	23.35 \$

Erreurs quadratiques - implicites

2.7 Évaluation de la performance (premier critère)

Le second tableau montre les résultats décomposés sur les 2 périodes. En comparaison avec les résultats de 94-95, les erreurs de 96-97 sont beaucoup plus élevées tant au niveau de l'explication (IN) que de la prévision (OUT). Même les erreurs hors échantillon pour la période 94-95 sont supérieures à l'erreur en échantillon. Ces observations confirment le caractère fortement aléatoire des prix d'options et la difficulté d'inférence et de prévision pour la période 96-97. La nervosité et l'augmentation de la volatilité présente sur le marché boursier semble donc s'être transmise aux marchés des options. Il est ironique que dans ces conditions, les modèles conditionnés (SV et SVJ) affichent des médiocres résultats. Le fait que les résultats des prévisions soient supérieurs à ceux à l'intérieur de l'échantillon montre la sensibilité de ces modèles et la difficulté d'estimation des paramètres. Des résultats plus détaillés peuvent être consultés en annexe (tableau ??).

2.7.3 Propriétés des paramètres implicites

Il est intéressant, dans un contexte de prévision, d'analyser l'évolution des paramètres implicites à travers le temps. Les statistiques ont été calculées pour les modèles BS, LSP, SV et SVJ et sont présentées pour chacun des modèles.

Volatilité implicite (BS)

VOLATILITE	94-97	94-95	96-97
<i>moyenne</i>	0.1269	0.1033	0.1550
<i>écart-type</i>	0.0011	0.0006	0.0015
<i>corr ordre1</i>	0.9910	0.9935	0.9889

Volatilité implicite (BS)

L'augmentation de la moyenne et de l'écart-type de la volatilité confirme les changements envisagés lors de la période 96-97. L'analyse du coefficient d'autocorrélation permet de juger du niveau de persistance temporelle de la volatilité implicite. Les tests Dicky-Fuller augmentés, favorisent le non-rejet de l'hypothèse nulle à savoir la présence de racine unitaire, mais ne sont pas corroborés par les tests de Philips-Perron qui eux, rejettent la marche aléatoire. On retrouve les mêmes effets pour les modèles SV et SVJ alors que la volatilité implicite suit une marche aléatoire.

2.7 Évaluation de la performance (premier critère)

Modèle SV

Statistiques Paramètres SV 94-97

	moyenne	écart-type	corr ordre1
<i>kappa</i>	7.7073	0.3330	0.5083
<i>teta</i>	0.1471	0.0082	0.4828
<i>sigma</i>	0.6656	0.0539	0.1848
<i>rho</i>	-0.6079	0.0126	0.8963
<i>volatilité</i>	0.1469	0.0014	0.9659

Paramètres modèle SV

On constate une très grande variation dans le paramètre de la vitesse d'ajustement (κ). Cette variation est normale puisque cette variable est en quelque sorte la soupape d'ajustement des déviations. Les autres paramètres sont beaucoup moins dispersés. Par ailleurs, les paramètres sont tous supérieurs à ceux obtenus par Bakshi et al. (97) sauf dans le cas de la volatilité instantanée. Il ne faut pas s'étonner de voir la forte dépendance temporelle de la volatilité et de la corrélation puisqu'elle découle du principe d'estimation.

Modèle SVJ

Statistiques Paramètres SVJ 94-97

	moyenne	écart-type	corr ordre1
<i>kappa</i>	19.7856	8.7215	0.0049
<i>teta</i>	1.0565	0.5912	0.0024
<i>sigma</i>	7.7283	4.9370	0.0003
<i>rho</i>	-0.4594	0.0149	0.7014
<i>volatilité</i>	0.3789	0.0019	0.9892
<i>lamda</i>	0.2946	0.0090	0.5163
<i>mu</i>	-0.1481	0.0065	0.3906
<i>sigmaj</i>	0.3243	0.0055	0.7811
<i>volatilitéj</i>	0.1831	0.0050	0.5737

Paramètres modèle SVJ

On retrouve sensiblement les mêmes caractéristiques pour les paramètres communs avec le modèle SV ce qui confirme la bonne spécification du modèle. Cependant, la moyenne et l'écart-type des coefficients κ, θ, σ sont anormalement élevés. L'absence d'autocorrélation confirme l'instabilité des paramètres et les problèmes relatifs à l'estimation. Pour les paramètres de saut, l'amplitude est de moyenne négative (μ_j) ce qui implique que les sauts sont plus souvent des corrections. La volatilité instantanée (V_j) ajoute à la variance totale du modèle ce qui augmente considérablement la volatilité.

2.8 Prédiction de la volatilité

Correction LSP

L'interprétation des paramètres de ce modèle est très différente puisque ces derniers tentent d'expliquer quotidiennement la volatilité implicite au moyen des variables de biais. Dans certains cas, les variables de maturité n'étaient pas significatives alors que celles de monétude l'étaient. Cette situation évoluait en alternance au fil des jours. La forte dispersion indiquée par l'écart-type et la faiblesse de la relation temporelle confirment ces constatations. Le modèle pourrait être mal spécifié dans un contexte de prédiction. Cependant, aucune relation temporelle n'a été imposée, contrairement aux modèles précédents. Il faut noter que l'estimation sur l'ensemble de la période (14 349 observations) a montré des résultats intéressants alors que tous les coefficients étaient significatifs.

Statistiques Paramètres LSP 94-97

	moyenne	écart-type	corr ordre1
<i>constante</i>	1.871	0.226	0.130
<i>monétude</i>	-4.136	0.453	0.131
<i>monétude2</i>	2.392	0.227	0.131
<i>maturité</i>	0.698	0.083	0.023
<i>maturité2</i>	-0.105	0.014	0.244
<i>moné-maturité</i>	-0.622	0.083	0.019

Paramètres modèle LSP

Pour la décomposition matricielle (MVD), l'analyse sera omise puisqu'elle est pareille à celle du modèle BS. Le même modèle de prédiction sera apporté à la seule différence qu'il sera étendu sur les 18 séries composant cette forme de correction.

2.8 Prédiction de la volatilité

L'analyse précédente montre que les modèles implicites sont en mesure de bien représenter la réalité, en particulier les simples modèles de correction MVD et LSP. Seulement, l'évaluation des résultats a été faite à l'intérieur même de l'échantillon favorisant les modèles comptant le plus de paramètres. En examinant les erreurs hors-échantillon, on voit que le pouvoir de ces modèles diminue grandement. Il est donc intéressant de poser la question à savoir s'il n'est pas mieux de conserver la simple formule Black-Scholes mais en tentant d'améliorer la prédiction de la volatilité. Cette section tente de répondre à cette question et vise à trouver le modèle qui permettrait de mieux prévoir le prix des options.

Pour y répondre de façon rigoureuse, il faut diviser cette section en deux étapes. Premièrement, au moyen des propriétés des paramètres implicites, il sera possible d'en estimer les paramètres de prédiction. et ensuite d'évaluer le prix de l'option. Il sera aussi possible de voir si le modèle naïf de prédiction présenté à la section précédente est meilleur ou s'il est possible d'améliorer le modèle en misant sur la dépendance temporelle. La

2.9 Présentation des modèles

seconde étape consiste à prévoir la volatilité future au moyen des séries chronologiques et ensuite, de valoriser l'option à l'aide de la formule Black-Scholes.

2.8.1 Prévision des paramètres implicites

Pour les modèles BS et MV, les prévisions de la volatilité implicite ont été effectuées à l'aide d'un modèle de type ARIMA(1,1,1) sans constante. L'analyse de plusieurs modèles a montré que la composante moyenne-mobile (MA) rendait les résidus bruit blanc et faisait disparaître l'autocorrélation résiduelle. L'hypothèse de la présence de racine unitaire a été retenue, mais en relation avec cette dernière, la présence d'une constante significativement non nulle impliquerait une explosion de la volatilité future et en diminuerait le caractère aléatoire.

Les 6 paramètres du modèle LSP ont été estimés indépendamment les uns des autres par un modèle auto-régressif d'ordre 1 (AR). De cette façon, les paramètres des modèles SV et SVJ ont été estimés par cette méthode, bien que certains paramètres affichent une racine unitaire.

2.8.2 Prévision de la volatilité historique

La volatilité historique, associée à l'évolution du sous-jacent, n'est pas une variable directement observable et dépend de la modélisation de ce dernier. Par exemple, la volatilité variera si le rendement suit un processus AR(1) ou un ARMA(1,1). Il est donc plus difficile d'estimer cette variable puisque la mesure d'erreur est inexistante. Pour cette raison, les mesures d'erreurs de la prévision de la volatilité n'ont pas été présentées. L'évaluation des modèles se fera au niveau de la valorisation de l'option.

2.9 Présentation des modèles

La modélisation de la volatilité repose premièrement sur le processus de la dynamique du sous-jacent. Il a été convenu que les rendements de l'indice suivent un processus auto-régressif d'ordre 1 (AR 1). Bien que la faiblesse des coefficients de corrélation soit très proche de 0, il a été reconnu que le choix d'un AR 1 dans la modélisation d'un rendement boursier permettait de retirer la corrélation résiduelle associée aux imperfections du marché.

$$\varepsilon_t = y_t - c - \varphi y_{t-1} \quad (21)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sqrt{h}) \quad (22)$$

2.9 Présentation des modèles

où y_t est le rendement à t et h est la volatilité. Cette dernière peut être homocédastique, mais peut être également conditionnellement hétéroscédastique. En ce sens, les modèles auto-régressifs d'hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH) seront développés.

2.9.1 SD1

SD1 est l'écart-type standard calculé sur les erreurs du modèle de rendement du sous-jacent de l'équation (21).

$$SD1_t = \sqrt{\frac{\sum_{t=499}^{t-1} \varepsilon_t^2}{500}} \quad (23)$$

2.9.2 GAR

Est un modèle GARCH 1,1 où la volatilité en t est fonction de la volatilité (h_{t-1}) et de l'innovation (ξ_{t-1}) précédente. Cette modélisation permet d'expliquer l'effet de regroupement de volatilité par période (clustering) et la distribution leptokurtique des rendements. En contraste avec le processus de volatilité stochastique, il n'y a qu'une seule source d'incertitude, mais l'hypothèse du retour vers une moyenne de long terme est plausible lorsque $\beta_1 + \beta_2 < 1$. Lors de l'estimation, il faut contraindre à la positivité les paramètres β_i pour éviter qu'une volatilité soit négative.

$$\xi_t \sim N(0, 1) \text{ où } \xi_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \quad (24)$$

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 \xi_{t-1}^2 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-1} \quad (25)$$

2.9.3 EGAR,

Est le modèle EGARCH 11 où le logarithme de la volatilité est modélisé. Cette forme a été proposée par Nelson (91) dans le but d'éviter les contraintes de positivité, mais aussi afin d'incorporer l'effet de levier, soit la corrélation (négative) entre les rendements et la volatilité, en permettant l'asymétrie.

$$\ln(h_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(h_{t-1}) + \beta_2 \xi_{t-1} + \beta_3 \left[|\xi_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (26)$$

On retrouve en β_1 le logarithme de la volatilité passée. Le second terme, l'innovation retardée (β_2), apporte l'asymétrie alors que le coefficient β_3 multiplie le facteur d'amplitude. Par exemple, si $\beta_2 = 0$ et $\beta_3 > 0$, alors l'innovation (ξ_t) dans la volatilité ($\ln(h_t)$) aura un effet positif (négatif) si l'amplitude de (ξ_t) est plus grande (faible) que l'anticipation. Dans le cas où $\beta_2 < 0$ et $\beta_3 = 0$, l'innovation dans la volatilité est positive (négative) si les innovations des rendements sont négatifs (positifs).

2.9.4 GAR-IV

Est un modèle GARCH 11 auquel on ajoute la volatilité implicite de la période précédente. Ce modèle tente de réunir l'information historique avec les anticipations futures (volatilité implicite). Doidge et Wei(95) ont obtenu les meilleurs résultats dans l'évaluation d'un portefeuille d'arbitrage.

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 \xi_{t-1}^2 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-1} + \beta_3 \sigma_{t-1}^2 \quad (27)$$

2.10 Estimation des paramètres

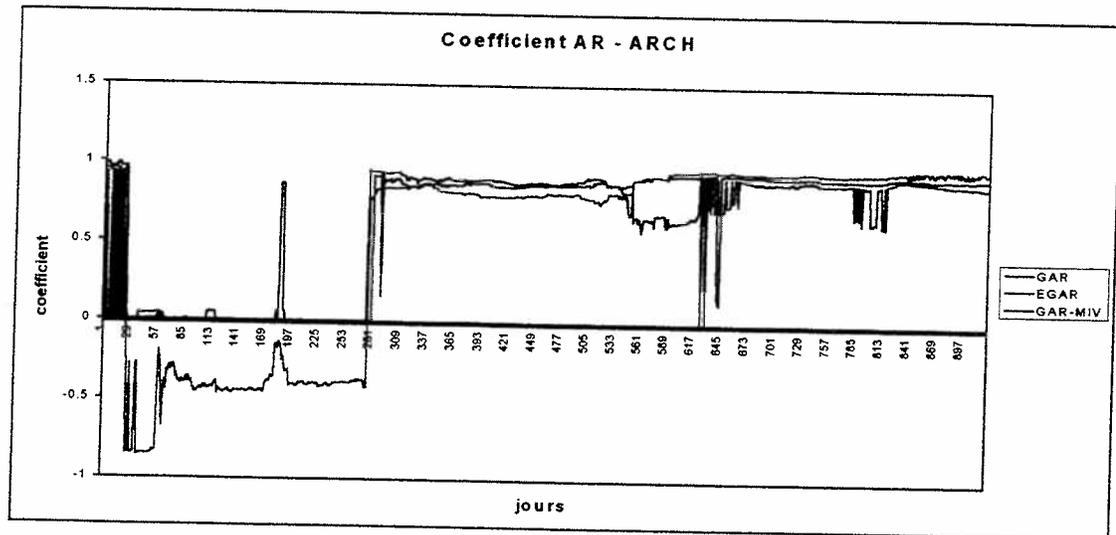
Les paramètres pour les périodes 94-95 et 96-97 ont été estimés sur la base d'un échantillon roulant de taille fixe comprenant les 500 dernières observations. Les modèles proposés ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance avec l'algorithme d'optimisation BHHH, couramment utilisé pour l'estimation des modèles ARCH. Des contraintes de positivité ont été apportées aux modèles GARCH 11 et GARCH-IV.

Des difficultés de convergence pour les modèles GARCH et EGARCH ont incité l'estimation de modèles en niveau (seulement une constante pour les rendements). Cette formulation se fonde sur le caractère de marche aléatoire issue des modèles en temps continu. Dans ces deux cas, les résultats furent plus intéressants tant au niveau de la stabilité des paramètres qu'au niveau de la performance pour la valorisation des options.

Le graphique suivant illustre une fois de plus le caractère erratique de la série des rendements financiers au cours de la période visée. Ce graphique montre, pour les modèles ARCH estimés, les paramètres autorégressifs des modèles respectifs. On constate une stabilité relative en fin de période alors que les paramètres approchent de la racine unitaire qui viendrait confirmer l'intégration de la volatilité. Les brisures fréquentes au niveau du modèle GARCH-IV s'expliquent par l'augmentation de la volatilité de la volatilité implicite. Le phénomène de grappe de volatilité est ici illustré, alors qu'en début de période

2.10 Estimation des paramètres

(jours 275) la volatilité n'est pas corrélée et qu'il y a changement de régime dans lequel la volatilité se retrouvera fortement intégrée.



Coefficients auto-régressifs

2.10.1 Volatilité moyenne

Les modèles de prévision de volatilité fournissent des paramètres et une prévision pour le jour suivant. Il est possible d'étendre cette prévision sur un horizon de plusieurs périodes en tenant compte de la dynamique issue de chaque modèle. Mais, comme les paramètres sont réestimés quotidiennement, l'horizon à un jour est suffisant. Néanmoins, pour utiliser correctement la formule d'évaluation de Black-Scholes, il faut prendre la volatilité prévue au cours de la durée de vie de l'option. Pour ce faire, il faut utiliser un modèle de prévision sur plusieurs périodes et en calculer la moyenne des volatilités. La validité des paramètres estimés prend ici une importance considérable puisque sur une très courte échéance, l'erreur de prévision sera faible, mais à long terme, une mauvaise spécification peut fournir des prévisions complètement irréalistes.

Dans le cas de l'écart-type (SD1), la volatilité moyenne est la même pour toutes les options en t . Pour les modèles GAR, EGAR et GAR-IV, il est possible d'en calculer la moyenne à condition qu'il y ait retour à une valeur centrale (la volatilité n'est pas intégrée i.d. $\beta_1 + \beta_2 < 1$). Les formules du calcul de la moyenne de la volatilité par option (en fonction de la durée de vie) sont présentées ici-bas et s'inspire de Heynen et al. (94) L'annexe fournit la démonstration de ces formules. Il est à noter que ces formes corrigent le biais en fonction de l'expiration (structure de volatilité), mais ne prennent pas en considération le biais associé à la monétude (sourire).

2.10 Estimation des paramètres

GAR (Garch 11)

$$\sigma_{AV(t,T)}^2 = \bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}_{t+1}^2 + (\bar{\sigma}_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2) \frac{1}{T} \frac{1 - \gamma^T}{1 - \gamma} \quad (28)$$

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2 \text{ et } \bar{\sigma}^2 = \frac{\beta_0}{1 - \gamma} \quad (29)$$

EGAR (Egarch 11)

$$\ln \sigma_{AV(t,T)}^2 = \ln \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{T} [(1 - \beta_1^T) f(t) + g(t)] \quad (30)$$

$$f(t) = \left(\ln \bar{\sigma}_{t+1}^2 + \frac{(\beta_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \beta_0)}{1 - \beta_1} \right) \frac{1}{1 - \beta_1} \quad (31)$$

$$g(t) = -\frac{\frac{1}{2}(\beta_2^2 + \beta_3^2)}{1 - \beta_1^2} \frac{1 - \beta_1^{2T}}{1 - \beta_1^2} + \sum_{k=1}^{T-1} \Gamma_k - Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad (32)$$

$$\Gamma_k = \left[\sum_{m=0}^{k-1} \ln [F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)] - Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \right] \quad (33)$$

$$F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = N_c[\beta_1^m (\beta_3 + \beta_2)] \exp[\beta_1^m \beta_3 \beta_2] \quad (34)$$

$$Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \ln [F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)] \quad (35)$$

Si $|\beta_1| < 1$ la série converge et $Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{a^0}{1-a}$ où $a = \ln [F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)]$

GAR-IV (Garch-IV)

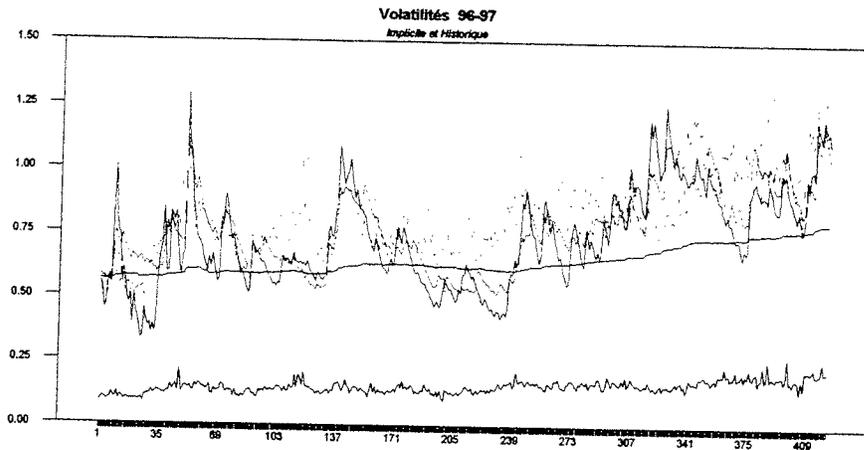
La formule est la même que pour le modèle GAR, à l'exception que la constante incorpore la volatilité implicite.

$$\beta_0 = \beta_0 + \beta_3 \sigma_{iv(t-1)}^2 \quad (36)$$

Cette formulation fait l'hypothèse qu'il y a indépendance entre la volatilité historique et la volatilité implicite. Des tests pour confirmer cette hypothèse ont été faits en utilisant la dynamique de la volatilité implicite, mais n'ont pas donné les résultats escomptés.

2.10.2 Prime de risque

La volatilité historique repose sur l'évolution passée du sous-jacent alors que la volatilité implicite découle de la valorisation dans un monde de neutralité face au risque. La distinction entre la volatilité historique (objective) et la volatilité implicite a des implications au niveau de la perception et l'analyse des marchés par exemple, la volatilité implicite s'interprète comme la volatilité moyenne anticipée pendant la durée de vie de l'option.



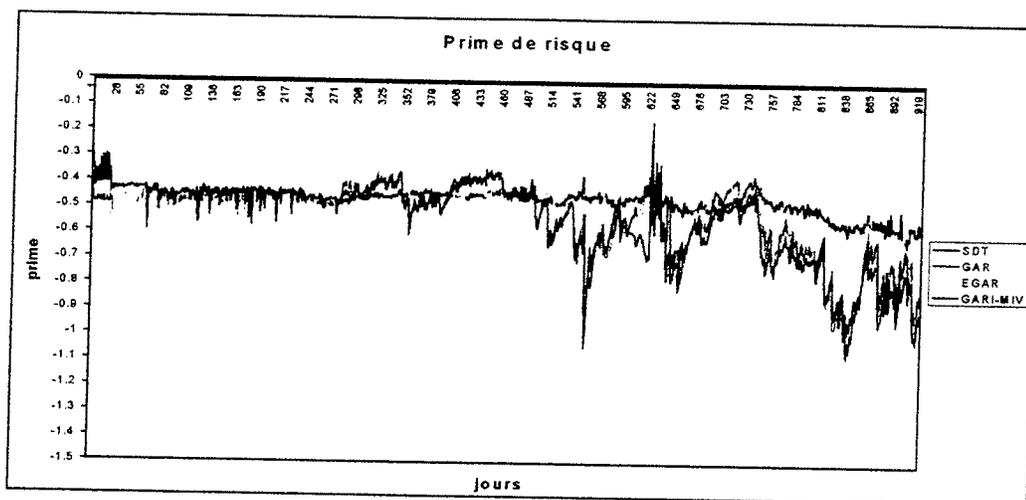
Volatilités : historique et implicite

Le graphique précédent montre l'évolution de la volatilité implicite (BS - au plus bas de l'écran) et la volatilité prévue à l'aide des modèles ARCH (niveau supérieur). On constate entre ces deux séries de volatilité une franche démarcation et l'utilisation de la volatilité objective sans transformation engendre des résultats désastreux. Pour combler l'écart entre ces deux mondes, il a fallu estimer une prime de risque pour chaque modèle de volatilité historique permettant de convertir la volatilité objective sous une forme plus semblable à la volatilité implicite. La prime pour chaque modèle a été construite avec le différentiel des valeurs passées et la volatilité implicite calculée avec le modèle BS.

$$\sigma_{it} = h_{it} + Pe_{it} \quad (37)$$

$$Pe_{it} = \sigma_{t-1} - h_{it} \quad (38)$$

Le graphique suivant montre la prime de risque pour les différents modèles. Il est intéressant de constater la diminution de la prime et l'augmentation de son caractère erratique en fin de période. Ces variations coïncident avec les événements macroéconomiques mentionnés auparavant.



Primes de risque

On constate une prime négative et qui semble fortement intégrée. Cette observation s'explique par le fait que la prime est déterminée à l'aide de la volatilité implicite (BS) qui elle, suit une marche aléatoire. Pour modéliser la prime de risque, deux méthodes ont été testées. L'une fait appel au caractère dynamique de la prime. La prime de risque suivra un processus auto-régressif ARIMA(1,1,1), sans constante pour les mêmes raisons que dans le cas de la modélisation de la volatilité implicite. Seul le cas de la prime associée à l'écart-type (SDT) semble le plus lisse. Cette caractéristique augmente le pouvoir de prévision.

$$Pe_{it} = Pe_{it-1} + \phi \Delta_{it} + \theta e_{it-1} \quad (39)$$

$$Pe_{it} = c + \phi h_{it} + \theta \sigma_{t-1} \quad (40)$$

La seconde méthode consiste à estimer la prime à l'aide des deux variables aléatoires, soit la volatilité prévue et la volatilité implicite passée. Cette seconde méthode a été retenue parce qu'elle a donné de meilleurs résultats. Une prime sera donc estimée au moyen d'un échantillon des 500 observations passées. La prime anticipée sera ajoutée à la volatilité historique en fonction du modèle de prévision.

2.10.3 Volatilité par option

L'instabilité de certains paramètres (LSP et MV) a produit des résultats incohérents pour certaines options. De plus, les difficultés de convergences, notamment dans les cas des modèles EGARCH et GARCH-IV ont donné des prévisions de volatilités incohérentes. L'analyse a permis de constater la présence de telles données alors que des volatilités sont négatives. Suivant l'analyse précédente, un filtre a été passé sur l'ensemble des volatilités prévues. Les volatilités négatives ont été remplacées par la volatilité implicite du modèle

2.10 Estimation des paramètres

étalon (BS). Cette méthode avantage donc les modèles plus paramétrisés, mais implique aussi une analyse des résultats intermédiaires.

Partie 3

Analyse de performance

Cette dernière partie a pour objectif de présenter et d'analyser les principaux résultats obtenus. À la suite des estimations précédentes il a été possible d'insérer les paramètres dans les modèles appropriés pour calculer le prix de l'option et en déduire l'erreur. L'analyse des deux derniers critères sera reprise dans l'ordre initial alors que les erreurs de prévision et de couverture seront présentées.

3.1 Erreurs de prévision

Les erreurs ont été calculées uniquement sur la période de 1996 à 1997 et en raffinant le modèle de prévision des paramètres implicites (dynamique auto-régressive).

ERREURS de PRÉVISION

modèles	MAE \$	MPE %	RMSE \$
<i>SDT</i>	1.69 \$	-10.77%	3.55 \$
<i>LSP_F</i>	1.87 \$	1.27%	5.26 \$
<i>BS(arima)</i>	3.49 \$	-21.98%	6.04 \$
<i>EGARCH</i>	4.00 \$	-13.02%	6.63 \$
<i>MV(arima)</i>	4.17 \$	-15.88%	7.84 \$
<i>GARCH</i>	5.27 \$	10.90%	8.15 \$
<i>GAR-IV</i>	5.38 \$	-33.77%	9.40 \$
<i>BS(arma)</i>	3.75 \$	-23.68%	6.46 \$
<i>SV</i>	3.84 \$	-2.76%	23.62 \$
<i>SVJ</i>	5.06 \$	58.11%	29.40 \$

Erreurs de prévision

Les résultats provenant des erreurs de prévision montrent que les modèles implicites performant généralement mieux que les modèles de prévision historiques. La seule exception réside au niveau de la méthode de l'écart-type (SDT). Dans l'analyse de la prime, le caractère moins stochastique de la volatilité et de la prime a été souligné. Cette raison explique que cette technique performe mieux que les autres modèles au niveau de l'erreur quadratique. Le modèle de lissage (LSP) affiche des résultats surprenants ce qui implique

3.1 Erreurs de prévision

une relative stabilité au niveau des paramètres. En effet, ce modèle implicite est le seul à montrer une amélioration par rapport aux modèles naïfs (tableau 11 Erreurs quadratiques - implicites). Le modèle standard (BS) se classe relativement bien, mais affiche une erreur relative très élevée. La meilleure performance du modèle naïf confirme le caractère aléatoire de la volatilité implicite. Au niveau des modèles ARCH, seul le modèle EGARCH montre des résultats intéressants en se classant dans le premier groupe.

Les modèles à volatilité stochastique sont moins performants et particulièrement le modèle SVJ. La difficulté de prévoir les paramètres est un problème majeur surtout lorsqu'on constate que les erreurs sont largement plus élevées que celles provenant d'un modèle naïf ce qui confirme l'hypothèse de marche aléatoire et l'absence de causalité des paramètres. Cependant, l'erreur relative du modèle à volatilité stochastique (SV) est très faible et s'explique par le fait que le modèle a réussi à évaluer chaque option indépendamment de son prix. Les erreurs proviennent de grandes variations avec le prix observé, ce qui explique la raison des erreurs quadratiques très élevées. Les erreurs absolues et relatives sont comparables à celles des autres modèles. Lors de la minimisation, les options de grandes valeurs sont souvent plus pondérées.

3.1 Erreurs de prévision

		ERREUR QUADRATIQUE \$			
		jours avant expiration			
Monétude		< 60	60 - 180	> 180	monétude
S/K	Modèles				
< 0.94	SDT	2.47 \$	6.29 \$	7.87 \$	5.77 \$
	LSP_F	2.53 \$	6.31 \$	13.50 \$	7.84 \$
	BS(arima)	2.97 \$	8.79 \$	13.46 \$	8.83 \$
	EGARCH	3.19 \$	9.29 \$	14.63 \$	9.48 \$
	MV(arima)	3.12 \$	11.78 \$	15.28 \$	10.79 \$
0.94 - 0.97	SDT	1.11 \$	4.38 \$	13.02 \$	3.33 \$
	LSP_F	1.03 \$	4.36 \$	20.82 \$	4.56 \$
	BS(arima)	2.85 \$	7.63 \$	20.38 \$	5.77 \$
	EGARCH	3.23 \$	7.93 \$	21.49 \$	6.14 \$
	MV(arima)	2.89 \$	8.70 \$	24.14 \$	6.57 \$
0.97 - 1.00	SDT	1.54 \$	4.60 \$	9.74 \$	2.90 \$
	LSP_F	1.34 \$	4.37 \$	13.35 \$	3.28 \$
	BS(arima)	3.79 \$	8.28 \$	17.78 \$	5.75 \$
	EGARCH	4.59 \$	8.89 \$	19.60 \$	6.53 \$
	MV(arima)	3.96 \$	9.00 \$	21.68 \$	6.45 \$
1.00 - 1.03	SDT	1.96 \$	4.20 \$	4.90 \$	2.64 \$
	LSP_F	1.58 \$	4.32 \$	10.80 \$	3.37 \$
	BS(arima)	4.05 \$	7.04 \$	9.08 \$	5.00 \$
	EGARCH	4.69 \$	7.67 \$	9.81 \$	5.62 \$
	MV(arima)	4.57 \$	8.42 \$	18.15 \$	6.77 \$
1.03 - 1.06	SDT	3.28 \$	5.79 \$	8.32 \$	4.38 \$
	LSP_F	2.57 \$	5.59 \$	10.82 \$	4.24 \$
	BS(arima)	3.71 \$	8.19 \$	11.99 \$	5.76 \$
	EGARCH	3.95 \$	8.46 \$	12.18 \$	5.98 \$
	MV(arima)	5.16 \$	10.85 \$	19.89 \$	8.17 \$
1.06 <	SDT	4.37 \$	5.56 \$	3.58 \$	4.79 \$
	LSP_F	17.98 \$	8.87 \$	9.56 \$	14.24 \$
	BS(arima)	4.38 \$	5.89 \$	7.12 \$	5.36 \$
	EGARCH	4.37 \$	6.14 \$	7.64 \$	5.53 \$
	MV(arima)	17.87 \$	14.10 \$	9.69 \$	15.74 \$
Maturité	SDT	1.86 \$	5.11 \$	8.54 \$	3.55 \$
	LSP_F	3.48 \$	5.46 \$	13.89 \$	5.26 \$
	BS(arima)	3.63 \$	7.93 \$	14.60 \$	6.04 \$
	EGARCH	4.24 \$	8.40 \$	15.81 \$	6.63 \$
	MV(arima)	4.96 \$	10.22 \$	18.40 \$	7.84 \$

Erreurs de prévision quadratiques (1)

3.1 Erreurs de prévision

		ERREUR RELATIVE %			
		jours avant expiration			
Monétude		< 60	60 - 180	> 180	monétude
S/K	Modèles				
< 0.94	SDT	-25.07%	-31.34%	-34.32%	-29.88%
	LSP_F	33.62%	-0.40%	-43.59%	1.23%
	BS(arima)	-46.79%	-45.14%	-55.67%	-48.15%
	EGARCH	-48.97%	-51.23%	-62.41%	-53.05%
	MV(arima)	-9.53%	-40.66%	-29.82%	-27.46%
0.94 - 0.97	SDT	-25.36%	-11.65%	-0.18%	-21.70%
	LSP_F	8.57%	3.28%	3.90%	7.35%
	BS(arima)	-52.06%	-22.34%	2.31%	-44.14%
	EGARCH	-40.70%	-21.74%	1.28%	-35.37%
	MV(arima)	-30.94%	-18.61%	28.29%	-26.28%
0.97 - 1.00	SDT	-10.88%	2.71%	0.91%	-8.56%
	LSP_F	-1.12%	1.85%	1.11%	-0.63%
	BS(arima)	-22.52%	2.48%	-1.33%	-18.27%
	EGARCH	-2.42%	3.21%	-4.35%	-1.71%
	MV(arima)	-19.76%	-0.93%	18.68%	-15.73%
1.00 - 1.03	SDT	1.86%	2.29%	0.52%	1.84%
	LSP_F	-0.54%	-1.29%	-0.45%	-0.65%
	BS(arima)	-0.85%	2.50%	-0.84%	-0.36%
	EGARCH	5.98%	1.68%	-1.30%	4.94%
	MV(arima)	-7.31%	7.46%	7.56%	-4.32%
1.03 - 1.06	SDT	5.52%	4.67%	4.05%	5.24%
	LSP_F	1.77%	-2.64%	-3.20%	0.44%
	BS(arima)	4.72%	6.31%	7.15%	5.23%
	EGARCH	4.90%	5.65%	7.59%	5.21%
	MV(arima)	-2.07%	10.96%	19.40%	2.17%
1.06 <	SDT	3.42%	3.97%	2.41%	3.52%
	LSP_F	-0.65%	-4.12%	-4.12%	-2.38%
	BS(arima)	3.36%	3.80%	3.05%	3.50%
	EGARCH	3.32%	4.19%	2.43%	3.56%
	MV(arima)	-5.27%	-0.83%	8.51%	-2.03%
Maturité	SDT	-11.26%	-8.31%	-12.83%	-10.77%
	LSP_F	3.13%	0.46%	-16.76%	1.27%
	BS(arima)	-24.25%	-13.85%	-21.44%	-21.98%
	EGARCH	-11.37%	-15.08%	-24.98%	-13.02%
	MV(arima)	-18.11%	-12.45%	-1.60%	-15.88%

Erreurs de prévision relatives (1)

Les tableaux précédents indiquent la décomposition des erreurs en fonction des variables de biais. On peut voir qu'en valeur, les erreurs augmentent en fonction de la maturité, mais aussi lorsque l'option est hors cours (le degré de monétude est faible). Bakshi et al. (97) ont obtenu ce même biais qu'ils ont expliqué par le fait que les prix des options dans le cours sont plus élevés et qu'ils sont avantagés dans le programme de minimisation. On peut aussi voir la présence du sourire alors que les erreurs des options au cours ($SK = 1$) sont moins élevées. Cependant, l'analyse des erreurs relatives confirme le biais en fonction de l'échéance alors que les options hors-cours sont généralement sous-évaluées. Le modèle de lissage (LSP) ressort du fait que l'erreur est la moins biaisée. Les résultats du second groupe, qui sont présentés en annexe (tableau 3), permettent de voir que, contrairement aux autres modèles, le modèle SV est moins influencé par le biais associé à la monétude.

3.2 Erreurs de couverture

L'erreur de couverture est l'erreur provenant du rebalancement du portefeuille d'arbitrage jusqu'à l'expiration de l'option. Ce critère mesure la capacité du modèle à répliquer le portefeuille d'arbitrage ou à contrebalancer les variations du sous-jacent. L'opération consiste à vendre une option au moment présent, à acheter la proportion du sous-jacent nécessaire à la couverture et à emprunter la différence en bons du trésor. Au prochain moment du rebalancement, l'agent renverse sa position en vendant le nombre d'action et en rachetant l'emprunt et l'option. Cette opération est répétée jusqu'à l'expiration de l'option. Selon les principes de valoriation, l'agent devrait avoir le même montant à la fin de l'opération. L'erreur calculée correspond à la moyenne des écarts tout au long de la couverture.

$$H = \Delta_t S_{t+s} + E_{(t)} e^{r(t)s} - Call(t+s, T-s) \quad (41)$$

$$E = Call(t, T) - \Delta_t S_t \quad (42)$$

H est l'erreur et consiste à la différence de trésorerie suite à la construction du portefeuille.

Δ_t est le ratio delta ou la proportion du sous-jacent nécessaire au contrebalancement pour une option.

$E_{(t)}$ est l'emprunt (si $E < 0$) à la période t et s est la fréquence de rebalancement. Dans ce cas, le portefeuille est rebalancé quotidiennement ce qui implique que $s = 1$.

3.2.1 Calcul du ratio delta

Pour le modèle Black-Scholes (BS) et toutes les techniques associées, le ratio delta est en fait la probabilité P_1 de l'équation d'évaluation (équation (6)). Cette même probabilité

est la dérivée du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent. Pour les modèles à volatilité stochastique (SV et SVJ), le calcul du ratio est légèrement différent. Il faut comprendre que dans ces modèles, la couverture consiste à se prémunir contre une variation du sous-jacent, mais aussi contre la variation de la volatilité qui est aussi stochastique. L'obtention du ratio provient du programme de minimisation de la variance de l'erreur de couverture et prend la forme générale suivante :

$$\Delta_t = \frac{Cov[dS_t, dC_{(t,T)}]}{Var[dS_t]} = \frac{V}{V + V_j} \Delta_{s(t,T)} + \rho \sigma_v \Delta_{v(t,T)} \frac{V}{S_t(V + V_j)} + \frac{\lambda}{S_t(V + V_j)} [\Lambda_1(t) - \Lambda_2(t) - \mu_j C_{(t,T)}] \quad (43)$$

$\Delta_{s(t,T)}$ et $\Delta_{v(t,T)}$ sont les dérivées du prix de l'option respectivement en rapport avec une variation du sous-jacent et de la volatilité.

$\Lambda_1(t)$ et $\Lambda_2(t)$ sont développés en annexe, équations (66) et (67).

En l'absence de saut (i.e. $\lambda = 0$) et d'une volatilité déterministe et non corrélée avec les innovations du sous-jacent ($\sigma_v = 0$ et $\rho = 0$) alors la construction du portefeuille ne nécessite que l'achat de $\Delta_{s(t,T)}$ indice. Si la volatilité est stochastique et corrélée avec les innovations, alors la position doit tenir compte de l'impact direct du sous-jacent, mais aussi de l'impact indirect des changements de la volatilité qui sont corrélés avec les variations du sous-jacent. Si le risque de saut est présent, alors la couverture doit être augmentée pour contrer le risque additionnel.

3.2.2 Approximation de la réalité

Idéalement, le rebalancement devrait être effectué de façon continue, c'est-à-dire que $s \rightarrow 0$. De plus, à cause du filtre initial, les options de l'échantillon n'atteignent jamais leur maturité et l'erreur moyenne n'est que partielle puisqu'elle omet la dynamique proche de l'expiration. Un autre problème dans la construction du portefeuille est que contrairement à une action ou une devise, il n'existe pas de contrat à proprement parlé de l'indice²⁶. Pour pallier ce problème, il est possible de prendre position sur le marché à terme où un contrat sur l'indice S&P 500 est transigé, mais la corrélation entre ces deux produits n'est pas toujours parfaite ce qui augmente le risque de couverture. Cependant, dans le cadre de ce travail, l'indice sera considéré comme le sous-jacent. Dans le but d'assurer une comparaison équitable entre les différents modèles, la couverture ne comprendra qu'un seul instrument, c'est-à-dire l'utilisation d'un seul sous-jacent. Sous cette contrainte, l'incertitude qui affecte le prix de l'option, mais qui est non corrélée avec l'évolution du sous-jacent ne peut-être

²⁶ Certaines bourses offrent maintenant des contrats au comptant (spot) sur l'indice

3.2 Erreurs de couverture

couverte. Par ailleurs, des imperfections du marché tels que les coûts de transaction rendent plus applicable l'utilisation d'un seul instrument.

3.2.3 Erreurs

ERREURS de COUVERTURE

modèles	MAE \$	ME \$	RMSE \$
<i>SDT</i>	1.62 \$	-0.04 \$	0.98 \$
<i>LSP_F</i>	1.62 \$	-0.05 \$	0.98 \$
<i>BS(arima)</i>	1.64 \$	-0.03 \$	1.00 \$
<i>EGARCH</i>	1.66 \$	-0.04 \$	1.02 \$
<i>MV(arima)</i>	1.67 \$	-0.06 \$	1.03 \$
<i>GARCH</i>	1.77 \$	-0.11 \$	1.12 \$
<i>GAR-IV</i>	1.73 \$	-0.06 \$	1.09 \$
<i>BS(arma)</i>	1.65 \$	-0.03 \$	1.00 \$
<i>SV</i>	1.75 \$	-0.06 \$	1.11 \$
<i>SVJ</i>	2.46 \$	-0.11 \$	1.72 \$

Erreurs de couverture

Contrairement aux erreurs de prévision, les résultats sont beaucoup plus homogènes alors que les erreurs avoisinent la même moyenne. L'erreur moyenne indique, à la fin de l'opération de rebalancement, la différence de portefeuille. Les résultats dans l'ensemble sont beaucoup plus satisfaisants que ceux pour les erreurs de prévision ce qui implique, pour l'ensemble des modèles, une bonne capacité d'ajustement. Il faut souligner la remontée des modèles de type ARCH qui imitent les mêmes résultats que les modèles SDT et LSP, bien que le modèle GARCH présente des erreurs élevées. Cependant, la déception provient de la faible performance des modèles implicites SV et SVJ qui ont beaucoup de difficultés, étant donné leur paramétrisation, à reproduire le portefeuille d'arbitrage. Notons que l'erreur quadratique qui était la plus élevée est maintenant inférieure à l'erreur absolue parce que les erreurs sont inférieures en moyenne à l'unité.

3.2 Erreurs de couverture

Monétude S/K	Modèles	ERREUR QUADRATIQUE \$ jours avant expiration			monétude
		< 60	60 - 180	> 180	
< 0.94	SDT	0.36	1.39	3.94	1.75
	LSP_F	0.31	1.42	3.88	1.74
	BS(arima)	0.39	1.46	3.77	1.75
	EGARCH	0.41	1.45	3.77	1.75
	MV(arima)	0.37	1.56	4.00	1.85
0.94 - 0.97	SDT	0.35	1.63	4.31	1.10
	LSP_F	0.32	1.66	4.55	1.11
	BS(arima)	0.40	1.64	4.34	1.14
	EGARCH	0.43	1.65	4.86	1.20
	MV(arima)	0.39	1.65	5.20	1.20
0.97 - 1.00	SDT	0.42	2.16	4.62	1.34
	LSP_F	0.41	2.16	4.62	1.34
	BS(arima)	0.43	2.17	4.61	1.35
	EGARCH	0.48	2.17	4.64	1.38
	MV(arima)	0.43	2.18	4.61	1.36
1.00 - 1.03	SDT	0.68	2.15	4.28	1.35
	LSP_F	0.68	2.14	4.31	1.35
	BS(arima)	0.73	2.17	4.27	1.38
	EGARCH	0.76	2.15	4.23	1.40
	MV(arima)	0.72	2.19	4.44	1.40
1.03 - 1.06	SDT	1.45	3.52	6.91	2.35
	LSP_F	1.42	3.47	6.85	2.32
	BS(arima)	1.47	3.66	7.20	2.42
	EGARCH	1.45	3.66	7.19	2.41
	MV(arima)	1.49	3.98	7.28	2.53
1.06 <	SDT	1.81	3.01	4.01	2.44
	LSP_F	1.85	2.97	4.06	2.44
	BS(arima)	1.84	3.09	3.95	2.48
	EGARCH	1.88	3.15	3.99	2.52
	MV(arima)	1.95	3.21	4.32	2.61
Maturité	SDT	0.60	1.92	4.28	0.98
	LSP_F	0.58	1.93	4.29	0.98
	BS(arima)	0.63	1.96	4.20	1.00
	EGARCH	0.66	1.96	4.28	1.02
	MV(arima)	0.63	2.01	4.48	1.03

Erreurs de couverture quadratiques (1)

3.2 Erreurs de couverture

Monétude S/K	Modèles	ERREUR QUADRATIQUE \$ jours avant expiration			monétude
		< 60	60 - 180	> 180	
< 0.94	GARCH	0.41	1.68	4.06	1.93
	GAR-IV	0.49	1.70	4.72	2.13
	BS(arma)	0.42	1.44	3.77	1.75
	SV	0.38	1.61	4.16	1.92
	SVJ	1.20	2.76	5.82	3.11
0.94 - 0.97	GARCH	0.55	1.94	5.68	1.43
	GAR-IV	0.50	1.80	5.36	1.32
	BS(arma)	0.42	1.65	4.41	1.16
	SV	0.40	1.84	4.90	1.25
	SVJ	0.99	2.50	8.10	2.05
0.97 - 1.00	GARCH	0.58	2.22	4.67	1.46
	GAR-IV	0.48	2.21	4.67	1.40
	BS(arma)	0.43	2.17	4.62	1.35
	SV	0.56	2.21	6.09	1.55
	SVJ	1.10	3.26	6.63	2.27
1.00 - 1.03	GARCH	0.87	2.56	4.75	1.62
	GAR-IV	0.69	2.36	4.48	1.43
	BS(arma)	0.72	2.15	4.23	1.37
	SV	0.83	2.40	4.43	1.52
	SVJ	1.74	3.38	5.21	2.45
1.03 - 1.06	GARCH	1.56	3.85	7.31	2.54
	GAR-IV	1.54	3.62	6.84	2.44
	BS(arma)	1.45	3.66	7.19	2.41
	SV	1.45	3.46	6.37	2.30
	SVJ	2.74	4.12	6.90	3.38
1.06 <	GARCH	1.86	3.25	4.60	2.60
	GAR-IV	1.88	3.12	3.39	2.45
	BS(arma)	1.88	3.15	3.99	2.52
	SV	2.51	3.62	5.28	3.16
	SVJ	4.06	4.17	9.66	4.65
Maturité	GARCH	0.75	2.17	4.63	1.12
	GAR-IV	0.68	2.09	4.80	1.09
	BS(arma)	0.64	1.95	4.21	1.00
	SV	0.72	2.10	4.79	1.11
	SVJ	1.49	3.03	6.43	1.72

Erreurs de couverture quadratiques (2)

L'analyse des erreurs de couverture en fonction des variables de biais montrent que dans l'ensemble, les erreurs sont plus élevées en fonction de l'échéance. Ce qui peut s'expliquer par le fait que les options à longue échéance sont évaluées sur une courte période durant laquelle le renversement de position n'est pas atteint. Il faut aussi noter que le biais en fonction de la monétude est croissant contrairement à celui rencontré au niveau des erreurs de prévision.

3.3 Analyse des résultats

Il ressort de ces tests que les modèles plus simples de correction de la volatilité donnent de meilleurs résultats. L'intérêt dans le modèle LSP est qu'il permet de tenir compte des variables de biais ce que ne fait pas le modèle SDT. En moyenne, ce dernier est plus robuste au sens où il y a moins de prévisions incohérentes, au même titre que le modèle standard (BS). Des améliorations au niveau de la taille de l'échantillon pour le calcul de l'écart-type et une correction au niveau de la prime de risque pour tenir compte des biais pourraient être apportées à cette technique (SDT). Pour le modèle de lissage (LSP), la prévision des paramètres peut elle aussi être raffinée. Il serait par exemple possible d'estimer les paramètres sur une période de plusieurs jours pour faciliter la prévision. Ces modèles relativement simples ont démontré des propriétés intéressantes.

Le modèle à volatilité stochastique (SV) en dépit de l'erreur quadratique élevée, est sans doute habilité à répondre aux exigences de l'évaluation. Il démontre un compromis entre l'unicité paramétrique de Black-Scholes et une surparamétrisation compliquant l'estimation implicite comme le modèle SVJ. Il a démontré de bonnes propriétés au niveau des paramètres et aussi a surclassé les modèles simples pour la prévision au niveau de l'erreur relative et le dynamisme de son processus a permis de réduire l'erreur de couverture. Le modèle plus général (SVJ) a donné des résultats exécrables et la difficulté d'en estimer les paramètres le rend moins attrayant bien que son processus cadre mieux avec la réalité empirique observée. Il faut par contre rappeler que ces modèles sont dérivés sous l'hypothèse du temps continu alors que les tests ont nécessité une discrétion temporelle qui avantage les autres modèles.

Par ailleurs, les modèles de prévision de la volatilité ont donné des résultats plus décevants. Le modèle EGARCH a pu se classer dans le premier groupe alors que les modèles GARCH et GARCH-IV ont fait piètre figure. Les difficultés d'estimations et la non stabilité des paramètres doivent être retenues comme des raisons de ces sous-performances. Ces estimations ont toutefois permis de constater des changements importants dans la volatilité historique.

L'analyse comparative des volatilités historiques a clairement démontré l'existence d'une prime dont il fallait tenir compte pour la comparaison. Au moyen de cette prime il a été possible de réduire les écarts et d'établir les comparaisons. La prime permet de diminuer le caractère aléatoire de la volatilité implicite. Cependant, l'interprétation économique est quelque peu déconcertante. Alors que la volatilité et l'incertitude gagne le marché boursier

3.4 CONCLUSION

en fin de période, on constate une diminution de la prime (la prime devient plus négative). Or, on devrait s'attendre à l'effet contraire d'autant plus que l'absence de prime signifie un monde neutre face au risque. L'explication qui peut être apportée est que face à cet accroissement de la volatilité, les options demeurent un instrument de gestion de risque en demande, ce qui contribue à en faire augmenter le prix et donc diminuer la prime.

Finalement la période de l'étude, marquée par des changements structurels, des crises et une augmentation de la volatilité a certes nui à l'obtention de bons résultats, mais il est ironique de constater que les modèles principalement développés pour faire face à cette réalité sont ceux qui offrent les moins bons résultats. Cependant, la difficulté des estimations et le choix des algorithmes sont aussi des causes potentielles à la réussite des modèles plus simples.

3.4 CONCLUSION

Au terme de ce rapport, plusieurs constats peuvent être établis. L'objectif principal était de tester différents modèles et méthodes pour l'évaluation d'option d'achat. Trois types de méthodes ont été examinées : des modèles à volatilité stochastique avec une solution analytique, des techniques de correction de la volatilité implicite et des modèles de prévision de la volatilité historique. Il ressort de ces tests que le modèle à volatilité stochastique (SV) a montré des résultats intéressants, mais peut causer de grandes variations. Son principal défaut réside dans l'imprécision numérique, la difficulté d'estimation des paramètres et leur instabilité. Une technique originale a été développée en vue de l'estimation et mérite d'être approfondie. Malgré tout, les formes analytiques proposées par Heston(93) et Bakshi et al. (97) apportent une méthode réaliste et rapide d'évaluation.

Le modèle conventionnel de Black-Scholes a montré de très bons résultats. La majorité des méthodes proposées utilisent sa formule d'évaluation, mais en raffinant le paramètre de la volatilité. Il est dans un certain sens étonnant de voir que le modèle conventionnel ait été si performant. Par ailleurs, deux méthodes relativement simples ont affiché les meilleurs résultats. Le lissage (LSP) qui explique mieux la nappe de volatilité a permis de produire de bonnes prévisions. Le modèle SDT, qui repose sur la volatilité historique, s'est bien comporté à cause de ses propriétés de lissage. En ce sens, une voie à développer dans le contexte de la prévision consiste à raffiner la modélisation de la prime de risque en y incorporant les variables de monétude. La réflexion de Fisher Black se concrétise alors qu'il est possible de préférer un modèle moins réaliste, mais plus simple. Cependant, il faut admettre que si les agents utilisent toujours le modèle Black-Scholes pour évaluer le prix d'un option et que cette action se concrétise dans le prix, il est normal que le modèle affiche de bons résultats. La prophétie se réalise parce que le monde le veut bien.

La méthode d'estimation en fonction de la pondération par le volume se justifie empiriquement, mais a contribué à augmenter l'erreur alors que des options se situant aux extrêmes, possiblement assujetties à un biais, ont reçu une plus forte pondération et ont influencé l'estimation des paramètres. Il aurait été intéressant d'évaluer quelle méthode de pondération est la plus apte à fournir des estimations convenables.

3.4 CONCLUSION

Finalemment, ce rapport aura permis d'examiner une période mouvementée caractérisée par une crise financière importante, mais aussi l'impact des transformations au sein de la structure même de l'économie. L'année 1996 marque un tournant alors qu'est survenue l'arrivée massive des entreprises technologiques. Aussi, il est vraisemblable de penser à l'apparition d'un changement structurel qui aurait influencé les différents marchés financiers (au niveau de la volatilité). Les résultats des estimations en ont évidemment soufferts lorsqu'on les compare à ceux obtenus par d'autres chercheurs. La plage de données était non seulement courte, mais aussi encline à des événements majeurs qui allaient en altérer les résultats. Néanmoins, la performance d'un modèle doit être inconditionnelle à la période, et en ce sens, ils corroborent les résultats des études antérieures, mais avec des erreurs plus fortes.

Partie 4
ANNEXES

Annexe A

Méthode d'estimation des volatilités

Ce tableau montre les différentes formules proposées pour l'estimation de la volatilité implicite.

modèle	Equation	Commentaires
Schmalensee et Trippi (1978)	$\tilde{\sigma} = \frac{1}{n} \sum \sigma_i$	Poids égaux, doit exclure les options fortement hors la monnaie « Deep-Out »
Latané et Rendleman (1976)	$\tilde{\sigma} = \frac{\sum w_i^2 \sigma_i^2}{\sum w_i^2} \rightarrow w_i = \frac{\partial O_i}{\partial \sigma} \Big _{\alpha}$	Les poids sont en fonction de la sensibilité de l'option face à la volatilité (véga) Les poids ne totalisent pas 1 ce qui crée des biais.
Latané et Rendleman (1976) -- modifiée	$\tilde{\sigma} = \frac{\sum w_i \sigma_i}{\sum w_i} \rightarrow w_i = \frac{\partial O_i}{\partial \sigma} \Big _{\alpha}$	Pondère davantage les options à la monnaie Poids symétrique pour, dans et hors la monnaie
Whaley (1982)	$\tilde{\sigma} = \operatorname{argmin} \sum w_i (O_i - O_i(\sigma))^2$ $\approx \frac{\sum w_i^2 \sigma_i}{\sum w_i^2} \rightarrow w_i = \frac{\partial O_i}{\partial \sigma} \Big _{\alpha}$	Pondère encore plus que la version modifiée de Latané et Rendleman les options à la monnaie
Beckers (1981)	$\tilde{\sigma} = \operatorname{argmin} \sum w_i O_i - O_i(\sigma) ^2$ $\approx \frac{\sum w_i^3 \sigma_i}{\sum w_i^3} \rightarrow w_i = \frac{\partial O_i}{\partial \sigma} \Big _{\alpha}$	Pondère encore plus les options à la monnaie que Whaley
Chiras and Manaster (1978)	$\tilde{\sigma} = \frac{\sum w_i \sigma_i}{\sum w_i} \rightarrow w_i = \frac{\sigma}{O_i} \frac{\partial O_i}{\partial \sigma} \Big _{\alpha}$	Pondère en fonction de l'élasticité Pondère davantage les options à faible prix et fortement hors la monnaie.
À la monnaie (ATM)	$\tilde{\sigma} = \sigma_{ATM}$	Devient le standard, principalement utilisé dans l'industrie

Méthodes de calcul de la volatilité

σ_i est la volatilité implicite de chaque option

$\bar{\sigma}$ est la volatilité implicite quotidienne (moyenne)

O_i est le prix de l'option

Ce tableau est tiré de celui présenté par Bates (1995) table 1 p.33, voir aussi Day et Lewis (1998) pour la méthodologie.

Annexe B

Asymétrie négative des rendements

Un coefficient d'asymétrie négatif témoigne d'un effet de levier. Cet effet provient du fait que les innovations positives associées à la volatilité seraient corrélées avec les innovations négatives des rendements du même actif. Cette corrélation négative ($\rho < 0$) entre rendements et volatilités peut s'expliquer par l'effet de levier (*leverage effect hypothesis*) développé par Black(76) ou par l'hypothèse de retour de la volatilité (*volatility-feedback hypothesis*) de Campbell et Hentschel(1992).

B.1 Effet de levier

Cette hypothèse propose que lorsque la valeur marchande de l'action chute, la part du ratio d'endettement augmente (l'avoir des actionnaires diminue par rapport à celui des créanciers). Comme les actionnaires supportent le plein risque de l'entreprise (contrairement aux créanciers), le niveau de volatilité de l'action devrait augmenter. De plus, cette diminution de valeur augmente le coût total du capital et par le fait même contribue à élever le risque financier. (le fardeau de la dette devient plus important) créant une pression sur les liquidités de l'entreprise (paiement des intérêts).

B.2 Hypothèse du retour de la volatilité

Une alternative est de voir le phénomène en sens inverse. Une innovation positive au niveau de la volatilité diminue le rendement. Si les anticipations des rendements futurs augmentent lorsque la volatilité augmente, et si les dividendes anticipés restent les mêmes, alors le prix de l'action devrait chuter immédiatement par souci de cohérence avec la théorie des anticipations rationnelles, ce qui cause un rendement négatif.

Annexe C

Statistiques sur options

POPULATION 96-97

Monétude	S/K	Modèles	jours avant expiration			
			< 60	60 - 180	> 180	
< 0.94		Poid	5.36%	7.21%	4.26%	16.82%
		Prix moyen	2.18 \$	7.54 \$	19.28 \$	8.81 \$
		Écart-type	3.75 \$	10.38 \$	15.27 \$	12.33 \$
		Volatilité moy.	16.28%	15.41%	15.78%	15.78%
		Écart-type	6.46%	5.08%	4.81%	5.51%
0.94 - 0.97		Poid	13.83%	6.67%	1.28%	21.78%
		Prix moyen	4.07 \$	13.92 \$	37.23 \$	9.03 \$
		Écart-type	3.44 \$	11.70 \$	17.68 \$	11.71 \$
		Volatilité moy.	14.78%	15.24%	15.69%	14.98%
		Écart-type	3.07%	4.58%	4.08%	3.67%
0.97 - 1.00		Poid	19.51%	7.81%	1.97%	29.28%
		Prix moyen	10.42 \$	23.69 \$	52.78 \$	16.80 \$
		Écart-type	6.44 \$	11.66 \$	21.35 \$	14.87 \$
		Volatilité moy.	15.36%	15.86%	16.89%	15.59%
		Écart-type	3.59%	3.77%	4.87%	3.76%
1.00 - 1.03		Poid	13.88%	3.98%	1.15%	19.01%
		Prix moyen	21.70 \$	35.22 \$	61.25 \$	26.92 \$
		Écart-type	8.06 \$	12.89 \$	17.00 \$	14.33 \$
		Volatilité moy.	16.95%	16.30%	16.36%	16.78%
		Écart-type	4.23%	3.72%	3.68%	4.11%
1.03 - 1.06		Poid	4.96%	1.51%	0.43%	6.89%
		Prix moyen	39.28 \$	55.31 \$	81.75 \$	45.40 \$
		Écart-type	8.97 \$	16.32 \$	17.98 \$	16.31 \$
		Volatilité moy.	20.31%	18.52%	18.11%	19.78%
		Écart-type	5.41%	4.23%	5.25%	5.23%
1.06 <		Poid	3.45%	2.10%	0.66%	6.21%
		Prix moyen	100.65 \$	106.29 \$	120.44 \$	104.65 \$
		Écart-type	70.35 \$	55.61 \$	47.00 \$	63.77 \$
		Volatilité moy.	23.70%	21.62%	18.77%	22.48%
		Écart-type	10.38%	7.24%	4.20%	9.05%
Maturité		WEITH	61.00%	29.27%	9.73%	14 349
		PM	18.27 \$	26.62 \$	42.90 \$	23.11 \$
		PSD	28.79 \$	31.47 \$	34.80 \$	31.13 \$
		IVM	16.54%	16.22%	16.36%	16.43%
		IVSD	5.26%	4.93%	4.68%	5.12%

** Les moyennes et écart-types sont pondérées par contrats

Statistiques sur options (3)

Annexe D

Dérivation de la formule Black-Scholes

Scholes et Fischer Black est que l'évolution du sous-jacent (S) suit un mouvement brownien géométrique

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB \quad \text{où} \quad dB \sim N(0, 1) \quad (44)$$

On utilise ∂S pour montrer un changement de très faible amplitude au niveau du sous-jacent. On peut l'interpréter comme la variation du prix d'une action entre deux jours. La variation de prix en log donne une approximation du rendement. Le terme ∂B est un mouvement brownien représentant l'incertitude associée à l'évolution du sous-jacent. Il ne prend que deux valeurs à l'intérieur d'un interval provenant d'une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1. Au moyen du lemme d'Itô, il est possible de dériver une variable (F) en fonction du sous-jacent (S). Ce lemme est l'équivalent du développement de Taylor pour le calcul stochastique.

$$\partial F = \left[\frac{\partial F}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right] dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dB \quad (45)$$

Si nous posons que F est une option d'achat, nous voyons donc que son évolution (∂F) dépend entièrement de l'évolution de la variable S (∂S). L'option est donc un produit dérivé du sous-jacent (S). De plus, nous constatons que le terme aléatoire ∂B est le même pour les deux variables. Il serait donc possible de créer une troisième variable (G) de telle sorte à faire disparaître ce terme aléatoire.

$$G = F - \Delta S \quad \text{où} \quad \Delta = \frac{\partial F}{\partial S} \quad (46)$$

Δ est la dérivée de l'option par rapport à l'action, c'est-à-dire la variation dans le prix d'une option pour une très faible variation du prix de l'action. En substituant les équations (44) et (45) dans (46), nous obtenons une équation parfaitement déterministe en (47).

$$dG = \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right] dt \quad (47)$$

L'idée est la création d'un portefeuille composé d'une option F et de Δ actions S de telle sorte qu'une variation du prix de l'action soit complètement contrebalancée par

celle de l'option. Le portefeuille G est donc sans risque. Le rendement de ce portefeuille dG est donc parfaitement déterminé par l'équation (47). Sous l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage, il faut que le rendement de ce portefeuille soit le même qu'un actif non risqué i.e. le taux sans risque r . Si tel n'est pas le cas, par exemple le taux sans risque est supérieur, alors un "arbitrageur" vendra à découvert le portefeuille G et investira la somme dans des bons du trésor. Il obtiendra un profit positif assuré. L'équation du rendement du portefeuille d'arbitrage est donc

$$dG = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} = 0 \quad (48)$$

Qui est la célèbre équation différentielle de Black-Scholes. Dans le cas d'une option européenne, à l'expiration, la valeur de cette équation sera égale au maximum de la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice ou 0.

$$Call(K, T) = \max(S - K, 0) \quad (49)$$

Cette condition permet de borner l'équation et de trouver une unique solution. La dérivation conduisant à cette forme est très complexe et repose sur le principe de la diffusion thermique. Il est aussi possible de dériver cette équation à partir d'un arbre binomial comme l'a démontré Cox-Ross et Rubinstein [76] et en utilisant le théorème de Donsker. La formule d'évaluation dépend du prix du sous-jacent (S) à l'instant présent, du prix d'exercice (X), du taux sans risque (r) et de la période du temps avant la maturité (T) et de la volatilité du sous-jacent (s).

Annexe E

Forme analytique des modèles SV et SVJ

Il faut d'abord voir que le modèle SVJ englobe le modèle SV et que la solution de ce dernier n'est que le cas particulier où $\lambda = 0$. Selon le même principe de dérivation du portefeuille sans risque, il est possible d'obtenir l'équation différentielle. Cette forme peut aussi être dérivée dans un contexte d'équilibre général où les composantes stochastiques sont rémunérées par une prime de risque proportionnelle aux facteurs (Bates 1996).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + [R - \lambda\mu_j]S\frac{\partial C}{\partial S} + \rho\sigma_v VS\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V\frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \\ & + [\theta - \kappa_v V]\frac{\partial C}{\partial V} - \frac{\partial C}{\partial t} - RC + \lambda E\{C(t, T, S(1+J), R, V) - C(t, T, S, R, V)\} \quad (50) \end{aligned}$$

En appliquant la transformation $L(t) = \ln[S(t)]$ et $K = \ln[K], (\tau = (T-t)/360)$ et en insérant la solution de l'équation de prix on obtient les équations différentielles partielles pour les probabilités risque-neutre Π_j pour $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial L^2} + \left(R - \lambda\mu_j + \frac{1}{2}V\right)\frac{\partial \Pi_1}{\partial L} + \rho\sigma_v V\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial L\partial V} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial V^2} \\ & + [\theta - \kappa_v V]\frac{\partial \Pi_1}{\partial V} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial t} \\ & + \lambda E_Q\{\Pi_1(1 + \ln(1+J), R, V)\Pi_1(t, T, L + (1+J), R, V) - \Pi_1(t, T, L, R, V)\} \quad (51) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial L^2} + \left(R - \lambda\mu_j + \frac{1}{2}V\right)\frac{\partial \Pi_2}{\partial L} + \rho\sigma_v V\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial L\partial V} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial V^2} \\ & + [\theta - \kappa_v V]\frac{\partial \Pi_2}{\partial V} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial t} \\ & + \lambda E_Q\{\Pi_2(t, T, L + (1+J), R, V) - \Pi_2(t, T, L, R, V)\} \quad (52) \end{aligned}$$

L'idée est donc de trouver des mesures de probabilité $P_j (j = 1, 2)$ satisfaisant la solution de cette équation différentielle. Sachant que les mêmes conditions s'appliquent aux équations caractéristiques respectives, il est possible d'exprimer la fonction caractéristique sous une forme pour obtenir la solution du système.

$$\begin{aligned} f_1(t, T, S(t), R(t), V(t); \phi) &= \exp\{(u(\tau) + x_v(\tau)V(t) + i\phi \ln[S(t)])\} \\ f_2(t, T, S(t), R(t), V(t); \phi) &= \exp\{(z(\tau) + y(\tau)V(t) + i\phi \ln[S(t)] - \ln[B(t, T)])\} \end{aligned} \quad (53)$$

En résolvant simultanément le système d'équations différentielles avec $u(0) = x_v(0) = z(0) = z(0) = 0$ et $B(t + \tau, 0) = 1$, on obtient les fonctions caractéristiques suivantes

$$f_1 = \{\exp -i\phi \ln[B(t, T)] + A + B + C + D\} \quad (54)$$

$$A = -\frac{\theta_v}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v\tau})}{2\xi_v} \right) \right] \quad (55)$$

$$B = +\frac{\theta_v}{\sigma_v^2} [\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v] \tau + i\phi \ln[S(t)] \quad (56)$$

$$C = +\lambda(1 + \mu_j)\tau[1 + \mu_j]^{i\phi} e^{(i\phi/2)(1+i\phi)\sigma_j^2} - 1] - \lambda i\phi \mu_j \tau \quad (57)$$

$$D = \frac{i\phi(1 + i\phi)(1 - e^{-\xi_v\tau})}{2\xi_v - [\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v\tau})} V(t) \quad (58)$$

et

$$f_2 = \{\exp -i\phi \ln[B(t, T)] + A + B + C + D\} \quad (59)$$

$$A = -\frac{\theta_v}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi_v^* - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v^*\tau})}{2\xi_v^*} \right) \right] \quad (60)$$

$$B = \frac{\theta_v}{\sigma_v^2} [\xi_v - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v] \tau + i\phi \ln[S(t)] \quad (61)$$

$$C = \lambda\tau[1 + \mu_j]^{i\phi} e^{(i\phi/2)(1+i\phi)\sigma_j^2} - 1] - \lambda i\phi \mu_j \tau \quad (62)$$

$$D = \frac{i\phi(i\phi - 1)(1 - e^{-\xi_v^*\tau})}{2\xi_v^* - [\xi_v^* - \kappa_v + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi_v^*\tau})} V(t) \quad (63)$$

Où

$$\xi_v = \sqrt{[\kappa_v - (1 + i\phi)\rho\sigma_v]^2 - i\phi(1 + i\phi)\sigma_v^2} \quad (64)$$

$$\xi_v^* = \sqrt{[\kappa_v - i\phi\rho\sigma_v]^2 - i\phi(i\phi - 1)\sigma_v^2} \quad (65)$$

Pour dériver le ratio delta optimal permettant la couverture, il faut dériver l'expression $\frac{Cov[\partial S_t, \partial C(t, T)]}{Var[\partial S_t]}$

et évaluer $E_t[JC(S(1 + J), R, V)]$. En utilisant les équations (12) et (2), on obtient directement l'espérance conditionnelle et avec simplification, on retrouve les coefficients de l'équation (43).

$$\Lambda_1 = \frac{S(t)}{2} \left[\mu_j + \mu_j^2 + (e^{\sigma_j^2} - 1)(1 + \mu_j)^2 \right] + \frac{S(t)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi \ln[K]} \frac{f_1(\Phi)m_1}{i\phi} \right] \partial\phi \quad (66)$$

et

$$\Lambda_2 = \frac{KB(t,T)\mu_j}{2} + \frac{KB(t,T)}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi \ln[K]} \frac{f_2(\Phi)m_2}{i\phi} \right] \partial\phi \quad (67)$$

où

$$m_1 = \exp \left((2 + i\phi) \left(\ln[1 + \mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2] + \frac{1}{2}(2 + i\phi)\sigma_j^2 \right) \right) - \exp \left((1 + i\phi) \left(\ln[1 + \mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2] + \frac{1}{2}(1 + i\phi)\sigma_j^2 \right) \right) \quad (68)$$

et

$$m_2 = \exp \left((1 + i\phi) \left(\ln[1 + \mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2] + \frac{1}{2}(1 + i\phi)\sigma_j^2 \right) \right) - \exp \left(i\phi \left(\ln[1 + \mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2] + \frac{1}{2}\phi^2\sigma_j^2 \right) \right) \quad (69)$$

Annexe F

Mesures d'erreur

Pour l'évaluation de la performance des modèles au niveau des critères d'évaluation à l'intérieur de l'échantillon et de prévision (extérieur de l'échantillon), les mesures d'erreur retenues sont : l'erreur moyenne absolue (MAE) en \$, l'erreur moyenne relative en pourcentage du prix (MPE) et l'erreur moyenne quadratique en \$ (RMSE). Une moyenne pondérée en fonction du volume ($w_i = \frac{vol_i}{\sum_{i=1}^N vol_i}$) a été préférée par souci de cohérence avec l'estimation des paramètres. Les erreurs calculées avec une moyenne équipondérée ($w_i = 1/N$) sont exposées en annexe. La moyenne pondérée en fonction du volume tend à diminuer les erreurs et favoriser les modèles implicites.

$$MAE = \sum_{i=1}^N w_i |Call_i - Call_i(\Phi)| \quad (70)$$

L'erreur moyenne absolue est la forme la plus standard. Elle est de moindre utilité puisqu'elle pénalise également toutes les erreurs et ne permet pas de voir la présence d'un biais (si les écarts positifs ne compensent pas les écarts négatifs).

$$MPE = 100 * \sum_{i=1}^N w_i \left[\frac{Call_i - Call_i(\Phi)}{Call_i} \right] \quad (71)$$

L'erreur moyenne relative permet de constater la présence de biais et ajuste l'erreur en fonction du prix estimé. Cette mesure diminue l'erreur puisque les écarts ont tendance à se compenser, mais surpondère les erreurs commises sur les options hors cours (qui ont un faible prix).

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (Call_i - Call_i(\Phi))^2} \quad (72)$$

L'erreur quadratique moyenne est la plus utilisée en statistique puisqu'elle pénalise plus fortement les déviations importantes (à cause de la puissance). Elle est donc plus informative que l'erreur moyenne absolue.

Ces deux dernières mesures d'erreur ont été préconisées pour l'analyse de performance.

Pour l'erreur de couverture, l'erreur moyenne relative (MPE) a été modifiée en erreur moyenne en \$.

$$ME = \sum_{i=1}^N w_i [he_i - he_i(\Phi)] \quad (73)$$

De plus, la moyenne est calculée de façon équipondérée ($w_i = 1/N$).

Annexe G

Volatilité moyenne pour modèles ARCH

Les dérivations conduisant à la formule de la moyenne de la volatilité pour les modèles GARCH 11 et EGARCH 11 sont présentées. Les coefficients β_i sont temporellement indépendants et ζ_t est bruit blanc gaussien suivant une normale de moyenne 0 et d'écart-type 1 ($\zeta_t \sim N_c(0, 1)$).

G.1 Modèles GARCH 11

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + (\beta_1 \zeta_{t-1}^2 + \beta_2) \sigma_{t-1}^2 \quad (74)$$

$$\sigma_{av(t,T)}^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T E_t [\sigma_{t+k}^2] \quad (75)$$

La volatilité moyenne au cours de la période consiste à prendre la moyenne des volatilités futures prévues à l'aide du modèles. On peut développer le terme σ_{t+k}^2 .

$$\sigma_{t+k}^2 = \beta_0 + \beta_0 \sum_{m=1}^{k-1} \prod_{n=1}^m (\beta_1 \zeta_{t+k-n}^2 + \beta_2) + \sigma_t^2 \prod_{n=1}^m (\beta_1 \zeta_{t+k-n}^2 + \beta_2) \quad (76)$$

En utilisant l'indépendance des innovations ζ_t^2 , on prend l'espérance conditionnelle (E_t) pour calculer la valeur de σ_{t+k}^2 .

$$E_t[\sigma_{t+k}^2] = \beta_0 + \beta_0 \sum_{m=1}^{k-1} (\beta_1 + \beta_2)^m + (\beta_1 + \beta_2)^{k-1} + \sigma_t^2 (\beta_1 + \beta_2) \quad (77)$$

On peut simplifier l'expression sous la forme.

$$E_t[\sigma_{t+k}^2] = \beta_0 + \beta_0 \frac{\gamma - \gamma^k}{1 - \gamma} + \gamma^{k-1} (\beta_1 \zeta_t^2 + \beta_2) \sigma_t^2 \quad (78)$$

avec $\gamma = \beta_1 + \beta_2$. Ensuite, il est possible de calculer la moyenne avec $\bar{\sigma}^2 = \frac{\beta_0}{1-\gamma}$.

$$\sigma_{av(t,T)}^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T E_t [\sigma_{t+k}^2] = \bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}_{t+1}^2 + (\bar{\sigma}_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2) \frac{1}{T} \frac{1 - \gamma^T}{1 - \gamma} \quad (79)$$

G.2 Modèle EGARCH 11

$$\ln \sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \beta_2 \zeta_{t-1} + \beta_3 \left[|\xi_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (80)$$

La méthode est la même que pour le modèle GARCH. Pour calculer la moyenne, il faut trouver la forme réduite de la volatilité à $t+k$. Pour se faire, il est pratique d'apporter les transformations suivantes :

$$y_t = \ln \sigma_t^2 \text{ et } A_t = \beta_2 \zeta_{t-1} + \beta_3 \left[|\xi_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (81)$$

On peut donc développer la série

$$y_{t+k} = \beta_0 + \beta_1 \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m + \beta_1^k y_t + \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m A_{k+t-m-1} \quad (82)$$

$$\sigma_{t+k}^2 = \sigma_t^{2\beta_1^k} \exp \left[\beta_0 \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m + \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m A_{k+t-m-1} \right] \quad (83)$$

En utilisant l'espérance conditionnelle et en factorisant on obtient pour $\kappa > 1$.

$$E_t[\sigma_{t+k}^2] = \sigma_t^{2\beta_1^k} \exp \beta_1^k A_t \times \exp \left[\beta_0 \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m \right] \prod_{m=0}^{k-2} E_t [\exp (\beta_1^m A_{k+t-m-1})] \quad (84)$$

et pour $\kappa = 1$ $E_t[\sigma_{t+1}^2] = \sigma_{t+1}^2$. La moyenne peut être calculée s'il est possible d'évaluer les facteurs

$$E_t [\exp (\beta_1^m A_{k+t-m-1})].$$

Sachant l'indépendance de ζ_t , dans A_t , il n'y a qu'à évaluer l'expression :

$$E_t \left[\exp \beta_1^m \left(\beta_2 \zeta_t + \beta_3 \left[|\xi_t| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \right) \right] = \Upsilon.$$

En développant, on obtient cette forme :

$$\begin{aligned} \Upsilon = \exp \left[-\beta_1^m \beta_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] N_c (\beta_1^m (\beta_3 + \beta_2)) \exp \left[\frac{1}{2} \beta_1^m (\beta_3 + \beta_2)^2 \right] \\ + N_c (\beta_1^m (\beta_3 - \beta_2)) \exp \left[\frac{1}{2} \beta_1^m (\beta_3 - \beta_2)^2 \right] \end{aligned} \quad (85)$$

En remplaçant dans l'espérance $E_t[\sigma_{t+k}^2]$, on obtient la forme simplifiée suivante.

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+k}^2] = \sigma_t^{2\beta_1^k} \exp \beta_1^k A_t \times \\ \exp \left[\left(\beta_0 - \beta_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \frac{1 - \beta_1^k}{1 - \beta_1} + \beta_3 \beta_1^{k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{2} (\beta_2^2 + \beta_3^2) \right] \\ \times \prod_{m=0}^{k-2} N_c ([\beta_1^m (\beta_3 + \beta_2)] \exp [\beta_1^m (\beta_3 \beta_2)]) + N_c ([\beta_1^m (\beta_3 - \beta_2)] \exp [-\beta_1^m (\beta_3 \beta_2)]) \end{aligned} \quad (86)$$

De cette expression il est possible de calculer la moyenne $\sigma_{av(t,T)}^2$. Pour simplifier l'expression, il faut identifier la partie inconditionnelle de la volatilité au moyen de la structure du processus Egarch. et ensuite l'additionner aux déviations comme dans le cas du modèle GARCH 11. $\ln \sigma_{av(t,T)}^2 = \ln \bar{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^k (\ln \bar{\sigma}^2 - \ln \sigma_{t+k}^2)$,

$$\bar{\sigma}^2 = \exp \left[\frac{\beta_0 - \beta_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1 - \beta_1} + \frac{1}{2} \frac{(\beta_2^2 + \beta_3^2)}{1 - \beta_1^2} \times \prod_{m=0}^{\infty} [F_m(\beta_1 \beta_3 \beta_2) + F_m(\beta_1 \beta_3 - \beta_2)] \right] \quad (87)$$

où on écrit $F_m(\beta_1 \beta_3 \beta_2) = N_c ([\beta_1^m (\beta_3 + \beta_2)] \exp [\beta_1^m (\beta_3 \beta_2)])$ pour simplifier les calculs.

Pour démontrer la dernière équation, il faut faire tendre κ vers l'infini dans l'expression de la volatilité future

$y_{t+k} = \beta_0 + \beta_0 \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m + \beta_1^k y_t + \sum_{m=0}^{k-1} \beta_1^m A_{k+t-m-1}$, l'espérance inconditionnelle de y_t converge si $|\beta| < 1$ et est donnée par :

$$\lim_{y_k \rightarrow \infty} = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_1^m \left[\beta_2 \zeta_{t-m-1} + \beta_3 \left[|\xi_{t-m-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \right] \quad (88)$$

Il est dès lors possible d'évaluer la volatilité moyenne inconditionnelle C.Q.F.D.

En combinant cette expression avec le résultat de la volatilité et en évaluant la somme sur l'indice κ , on obtient,

$$\begin{aligned} T [\ln \sigma_{av}^2(t, T) - \ln(\bar{\sigma}^2)] &= \left(\ln \sigma_{t+1}^2 + \frac{(\beta_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \beta_0)}{1 - \beta_1} \right) \times \\ &\quad - \frac{\frac{1}{2}(\beta_2^2 + \beta_3^2)}{1 - \beta_1^2} \frac{1 - \beta_1^{2T}}{1 - \beta_1^2} + \sum_{k=1}^{T-1} \Gamma_k - Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \Gamma_k &= \left[\sum_{m=0}^{k-1} \ln [F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)] - Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \right] \\ Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \sum_{m=0}^{\infty} \ln [F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)] \quad (89) \end{aligned}$$

Si $|\beta| < 1$, $Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ converge lorsque $m \rightarrow \infty$.

- $N_c[\beta_1^m(\beta_3 + \beta_2)] = 0.5$ car $\beta_1^\infty = 0$ et que $N_c(0) = 0.5$
- $\exp[\beta_1^m(\beta_3\beta_2)] = 1$ car $\beta_1^\infty = 0$ et que $\exp(0) = 1$ donc $F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 0.5$
- Le résultat est le même pour $F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)$ puisque que β_1^∞ domine les autres termes.

il s'en suit que :

- $\ln[F_\infty(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_\infty(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)] = 0$ car $\ln[0.5 + 0.5] = 0$.

La série converge donc et il est possible d'évaluer $Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ au moyen du théorème sur les séries de puissance.

G.2 Modèle EGARCH 11

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^m = \frac{a^0}{1-a} \quad (90)$$

$$a^m = \ln[F_m(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + F_m(\beta_1, -\beta_2, \beta_3)] \quad (91)$$

Annexe H

Résultats

ERREUR QUADRATIQUE \$

Monétude S/K	Modèles	jours avant expiration			monétude
		< 60	60 - 180	> 180	
< 0.94	LSP	1,23 \$	5,40 \$	25,61 \$	14,67 \$
	BS	1,37 \$	3,25 \$	4,24 \$	3,16 \$
	MVD	1,36 \$	4,03 \$	4,92 \$	3,77 \$
	SV	1,24 \$	3,13 \$	4,54 \$	3,17 \$
	SVJ	4,16 \$	8,19 \$	16,02 \$	10,27 \$
0.94 - 0.97	LSP	0,61 \$	3,29 \$	10,99 \$	2,81 \$
	BS	0,95 \$	2,59 \$	5,70 \$	1,86 \$
	MVD	0,54 \$	2,76 \$	10,54 \$	2,54 \$
	SV	0,66 \$	2,34 \$	5,40 \$	1,63 \$
	SVJ	1,79 \$	3,92 \$	7,22 \$	2,86 \$
0.97 - 1.00	LSP	0,82 \$	8,16 \$	14,53 \$	4,71 \$
	BS	1,05 \$	2,65 \$	4,86 \$	1,68 \$
	MVD	0,92 \$	2,67 \$	7,84 \$	2,14 \$
	SV	0,85 \$	2,50 \$	5,04 \$	1,59 \$
	SVJ	1,04 \$	2,84 \$	6,56 \$	1,90 \$
1.00 - 1.03	LSP	1,19 \$	9,45 \$	14,20 \$	5,06 \$
	BS	1,41 \$	2,58 \$	3,85 \$	1,81 \$
	MVD	1,36 \$	3,10 \$	6,77 \$	2,50 \$
	SV	1,23 \$	2,47 \$	3,85 \$	1,74 \$
	SVJ	1,47 \$	3,19 \$	6,71 \$	2,36 \$
1.03 - 1.06	LSP	2,26 \$	5,39 \$	23,36 \$	7,89 \$
	BS	2,38 \$	3,58 \$	4,83 \$	2,84 \$
	MVD	2,28 \$	4,72 \$	9,01 \$	3,61 \$
	SV	4,63 \$	3,18 \$	4,49 \$	4,25 \$
	SVJ	13,81 \$	8,04 \$	10,44 \$	12,89 \$
1.06 <	LSP	36,81 \$	15,25 \$	21,02 \$	30,51 \$
	BS	3,18 \$	3,97 \$	2,90 \$	3,41 \$
	MVD	4,48 \$	11,41 \$	6,09 \$	8,89 \$
	SV	85,49 \$	24,95 \$	5,78 \$	66,88 \$
	SVJ	119,07 \$	13,33 \$	9,34 \$	92,29 \$
Maturité	LSP	5,65 \$	9,08 \$	21,25 \$	8,51 \$
	BS	1,29 \$	2,90 \$	4,41 \$	2,07 \$
	MVD	1,26 \$	4,87 \$	6,97 \$	3,12 \$
	SV	12,62 \$	7,18 \$	4,73 \$	11,36 \$
	SVJ	17,20 \$	6,73 \$	11,02 \$	15,28 \$

Erreurs quadratiques en échantillon

		ERREUR RELATIVE %			
		jours avant expiration			
Monétude S/K	Modèles	< 60	60 - 180	> 180	monétude
< 0.94	LSP	11,41%	-13,44%	1,66%	5,77%
	BS	-50,77%	-43,40%	-22,68%	-20,03%
	MVD	-8,43%	-3,34%	-5,87%	2,34%
	SV	-23,96%	-11,46%	-7,60%	-4,84%
	SVJ	307,76%	241,58%	230,79%	151,13%
0.94 - 0.97	LSP	3,58%	-1,50%	1,04%	4,16%
	BS	-34,42%	-23,26%	0,89%	-16,80%
	MVD	-3,32%	-3,97%	8,03%	0,66%
	SV	-14,93%	-7,19%	2,20%	-5,05%
	SVJ	65,74%	46,25%	8,44%	41,61%
0.97 - 1.00	LSP	-2,60%	1,57%	3,29%	2,63%
	BS	-10,57%	2,45%	3,64%	-2,67%
	MVD	-5,29%	-0,49%	8,61%	-0,24%
	SV	-0,52%	0,14%	0,09%	3,02%
	SVJ	2,05%	-0,29%	-5,47%	4,81%
1.00 - 1.03	LSP	-1,46%	1,58%	-4,33%	1,82%
	BS	2,73%	3,95%	3,94%	3,03%
	MVD	-1,46%	0,62%	5,97%	1,14%
	SV	-0,79%	-1,68%	-1,75%	0,89%
	SVJ	-3,20%	-5,25%	-7,75%	-0,09%
1.03 - 1.06	LSP	1,25%	-2,26%	7,26%	3,18%
	BS	5,67%	4,11%	3,62%	4,50%
	MVD	-0,08%	3,29%	8,62%	2,41%
	SV	2,76%	-0,27%	-0,06%	3,04%
	SVJ	1,94%	-5,35%	-11,14%	8,26%
1.06 <	LSP	3,53%	-1,23%	-7,10%	19,45%
	BS	3,27%	4,51%	2,32%	3,93%
	MVD	-1,51%	-3,16%	1,68%	5,53%
	SV	29,34%	1,46%	-1,52%	51,32%
	SVJ	29,86%	-2,52%	-8,17%	60,09%
Maturité	LSP	-0,61%	-2,88%	1,30%	-0,95%
	BS	-11,45%	-13,58%	-5,82%	-11,63%
	MVD	-3,66%	-2,57%	2,63%	-2,98%
	SV	-2,92%	-4,50%	-2,68%	-3,29%
	SVJ	18,35%	60,70%	81,00%	30,77%

Erreurs relatives en échantillon

ERREUR QUADRATIQUE \$

Monétude S/K	Modèles	jours avant expiration			monétude
		< 60	60 - 180	> 180	
< 0.94	GARCH	3,22 \$	9,17 \$	16,63 \$	10,17 \$
	GAR-IV	4,77 \$	12,65 \$	19,12 \$	12,68 \$
	BS(arma)	3,19 \$	9,28 \$	14,61 \$	9,47 \$
	SV	2,59 \$	7,40 \$	20,20 \$	10,97 \$
	SVJ	6,77 \$	14,71 \$	28,41 \$	17,18 \$
0.94 - 0.97	GARCH	3,74 \$	10,17 \$	27,29 \$	7,69 \$
	GAR-IV	6,21 \$	14,64 \$	30,77 \$	10,36 \$
	BS(arma)	3,16 \$	7,90 \$	21,41 \$	6,10 \$
	SV	2,15 \$	7,38 \$	26,98 \$	6,45 \$
	SVJ	3,23 \$	8,67 \$	28,30 \$	7,27 \$
0.97 - 1.00	GARCH	5,75 \$	12,01 \$	22,52 \$	8,13 \$
	GAR-IV	5,34 \$	14,49 \$	23,69 \$	8,57 \$
	BS(arma)	4,09 \$	8,79 \$	19,60 \$	6,23 \$
	SV	3,74 \$	14,47 \$	20,06 \$	7,45 \$
	SVJ	2,49 \$	7,35 \$	13,57 \$	4,41 \$
1.00 - 1.03	GARCH	6,06 \$	11,46 \$	16,13 \$	7,95 \$
	GAR-IV	5,02 \$	12,66 \$	19,70 \$	8,10 \$
	BS(arma)	4,28 \$	7,61 \$	9,78 \$	5,34 \$
	SV	4,58 \$	42,18 \$	58,12 \$	21,63 \$
	SVJ	2,56 \$	8,60 \$	15,57 \$	5,46 \$
1.03 - 1.06	GARCH	4,61 \$	9,63 \$	17,86 \$	7,29 \$
	GAR-IV	4,59 \$	13,35 \$	16,88 \$	8,51 \$
	BS(arma)	3,78 \$	8,46 \$	12,18 \$	5,90 \$
	SV	8,81 \$	7,42 \$	27,99 \$	10,28 \$
	SVJ	10,14 \$	7,67 \$	17,00 \$	10,04 \$
1.06 <	GARCH	4,47 \$	6,98 \$	8,97 \$	6,15 \$
	GAR-IV	4,75 \$	9,28 \$	10,20 \$	7,50 \$
	BS(arma)	4,36 \$	6,14 \$	7,64 \$	5,53 \$
	SV	113,60 \$	35,68 \$	147,27 \$	96,79 \$
	SVJ	183,65 \$	46,33 \$	15,60 \$	133,37 \$
Maturité	GARCH	5,24 \$	10,42 \$	19,22 \$	8,15 \$
	GAR-IV	5,42 \$	13,42 \$	21,49 \$	9,40 \$
	BS(arma)	3,89 \$	8,36 \$	15,79 \$	6,46 \$
	SV	20,33 \$	20,82 \$	50,24 \$	23,62 \$
	SVJ	32,47 \$	16,82 \$	22,79 \$	29,40 \$

Erreurs de prévision quadratiques (2)

Monétude S/K	Modèles	ERREUR RELATIVE % jours avant expiration			monétude
		< 60	60 - 180	> 180	
< 0.94	GARCH	4,21%	-0,13%	34,41%	9,39%
	GAR-IV	-148,68%	-113,37%	-41,60%	-108,80%
	BS(arma)	-53,68%	-51,00%	-62,28%	-54,54%
	SV	-25,48%	-3,51%	-13,20%	-13,30%
	SVJ	479,74%	303,79%	219,32%	344,52%
0.94 - 0.97	GARCH	-0,85%	18,52%	31,17%	4,19%
	GAR-IV	-76,96%	-44,96%	-26,19%	-68,72%
	BS(arma)	-56,52%	-21,63%	0,75%	-47,46%
	SV	-18,67%	5,86%	9,03%	-12,78%
	SVJ	82,53%	46,70%	21,00%	73,13%
0.97 - 1.00	GARCH	12,42%	22,37%	19,96%	14,08%
	GAR-IV	-18,40%	-7,69%	-4,09%	-16,38%
	BS(arma)	-22,75%	2,52%	-4,36%	-18,57%
	SV	1,23%	3,70%	0,50%	1,55%
	SVJ	9,08%	7,09%	-1,16%	8,43%
1.00 - 1.03	GARCH	14,70%	15,35%	14,91%	14,80%
	GAR-IV	0,04%	-0,74%	-12,94%	-0,82%
	BS(arma)	-1,59%	1,94%	-1,24%	-1,06%
	SV	1,64%	1,20%	-3,68%	1,27%
	SVJ	-0,70%	-0,31%	-2,18%	-0,73%
1.03 - 1.06	GARCH	8,24%	8,94%	19,44%	8,95%
	GAR-IV	1,93%	-4,45%	-1,19%	0,21%
	BS(arma)	4,53%	5,65%	7,59%	4,95%
	SV	4,91%	1,71%	0,62%	3,92%
	SVJ	1,76%	-1,34%	-1,45%	0,85%
1.06 <	GARCH	3,54%	5,30%	7,04%	4,61%
	GAR-IV	2,34%	-1,07%	-0,57%	0,70%
	BS(arma)	3,27%	4,19%	2,43%	3,54%
	SV	21,15%	1,77%	-3,50%	10,91%
	SVJ	21,16%	-2,73%	-2,77%	9,25%
Maturité	GARCH	9,01%	13,10%	25,18%	10,90%
	GAR-IV	-33,33%	-39,13%	-22,49%	-33,77%
	BS(arma)	-25,89%	-15,16%	-24,99%	-23,68%
	SV	-3,83%	1,85%	-4,77%	-2,76%
	SVJ	48,45%	83,79%	87,32%	58,11%

Erreurs de prévision relatives (2)

BIBLIOGRAPHIE

1.1 Ouvrages de référence

- Abramowitz, M. et I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions, 3^e édition, Dover Publications Inc, New York, 1968, 1043p.
- Bass, J. Éléments de calculs des probabilités, 3^e édition, Masson et Cie, Paris, 1974, 275p.
- Burden, R.L. et J.D. Faires, Numerical analysis, 4^e édition, PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1988, 659 p.
- Campbell, J.Y., Lo, A. W. and A. C. Mackinlay, The Econometrics of Financial Markets. 1^{ère} édition, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1997
- Gourieroux, C., Scaillet, O., et A. Szafarz.. Économétrie de la Finance - Analyse Historique.. coll. Économie et Statistiques Avancée, Économica, Paris, 1997
- Greene, W.H., Econometric Analysis, 3^e édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997, 1075 p.
- Hamilton, J, Time Seies Analysis, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1994, 799 p.
- Hull, John C., Options, Futures & Other Derivatives. 4^e édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999
- Jacoby, S.L.S, Kowalin, J.S., and J.T. Pizzo. Iteratives Methods for Nonlinear Optimization Problems. Series in aomatic Computation, ed. George Forsythe, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972, 272p.
- Karr, A, F. Probability, Springer Texts in Statistics, ed. Springer-Verlag, New York, 1993, 282p.
- Kendall, M et A. Stuart, The advanced theory of statistics, vol.1, 2^e édition, Charles Griffin & Company Limited, Londres, 1968, 433 p.

BIBLIOGRAPHIE

Merton, R.C., Continuous-Time Finance. édition révisée, Blackwell publisher, Cambridge, Massachusetts, 1992

Roger L.C.G. et D. Talay. Numerical Methods in Finance, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1997

Wilmott, P., Dewynne, J. and S. Howison, Options Pricing Mathematical model and computation. 1ère édition, Oxford Financial Press, Oxford, 1993

1.2 Articles

Amin, K. and V. Ng, "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", Journal of Finance, 48, (1993), 881-910

Amin, K. and R. Jarrow, "Pricing Option on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy", Mathematical Finance, 2, (1992), 217-237

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", Journal of Finance, 52, (1997) 2003-49.

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. "Do "Call" Price and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction ? ", working paper, (1998) Finance Department, Robert H. Smith School of Business, University of Maryland, www.mbs.umd.edu/finance/gbakshi/;

Bates, D.S., "Pricing Options on Jump-Diffusion Processes", working paper, (1988), Rodney L. White Center, Wharton School

Bates, D.S., "Testing Option Pricing Models", working paper, (1995), National Bureau of Economic Research, Cambridge, Ma

Black, F. and M. Scholes. "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency", Journal of Finance, 27, (1972), 399-418

Black, F. and M. Scholes. "The Pricing of Option and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81, (1973), 637-654

Bollerslev, T. "Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", Journal of Econometrics, 31, (1986), 307-327

BIBLIOGRAPHIE

- Brailsford, T., and R. Faff, " An Evaluation of Volatility Forecasting Techniques ", *Journal of Banking and Finance*, 20, (1996), 419-438
- Canina, L., and S. Figlewski, " The Informtional Content of Implied Volatility ", *Review of Financial Studies*, 6, (1993), 659-681
- Chance, D.M. " Empirical Tests of the Pricing of Index "Call" Options ", *Advances in Futures and Option Research*, 1,pt.A (1986), 141-66
- Chernov, M. and Ghysels, E. " What Data Sould Be Used to Price Options ? ", working paper, CIRANO, (1998) ; 98s-22
- Chiras D., and S. Manaster. " The information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency ", *Journal of Financial Economics*, 6 (1978), 213-34
- Cox, J. C., and S.A. Ross, " The Valuation of Option for Alternatives Stochastic Process ", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 145-66.
- Cox, J. C., S.A. Ross and M. Rubinstein. " Option Pricing : A Simplified Approach ", *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), 229-63.
- Day, T and Lewis, C. " The Behavior of the Volatility Implicit in the Price of Stock Index Options ", *Journal of Financial Economics*, 22,(1988), 103-122
- Doidge, C. and Wei, J.Z. " Volatility Forecasting and the Efficiency of the Toronto 35 Inde Option Market ", *Revue canadienne des sciences de l'administration*, 15, (1998), 28-38
- Duan, J-C. " The GARCH Option Pricing Model ", *Mathematical Finance*, vol. 5 (1995), 13-32.
- Duan, J-C. " Cracking the Smile ", *RISK*, 9, (1996), 55-59.
- Dumas, B., J. Fleming, and R.E. Whaley. " Implied Volatility Functions : Empirical Tests ", *Journal of Finance*, 53, (1998), 2059-210
- Dupire, B. " PricingWith A Smile ", *RISK*, 7 ,(1994), 18-20
- Gagnon, L. and Lypny, G. " Hedging Canadian Corporate Debt : A Comparative Study of the Hedging Effectiveness of Canadian and U.S. Bond Futures ", *Journal of Futures Markets*, 9, (1989), 29-39
- Garcia , R. et É. Renault. " A Note on Hedging in Arch and Stochastic Volatility Option Pringing Model ", working paper, CIRANO, (1997) ; 97s-13 (ISSN 1198-8177)

BIBLIOGRAPHIE

- Garcia , R., Luger R. et É. Renault. " Empirical Assessment of an Intertemporal Option Pricing Model with Latent Variables ", working paper, CIRANO, (2000) ;
- Garcia , R. et R. Gençay "Pricing and Hedging Derivative Securities with Neural Networks and a Homogeneity Hint ", working paper , CIRANO, (1998) ; 98s-35 (ISSN 1198-8177)
- Geske, R. and R. Roll. " A Note On Analytical Valuation Formula for Unprotected American "Call" option with Know Dividend", Journal of Financial Economics, 7, (1979), p. 375-380
- Geske, R. and R. Roll. " On Valuing American "Call" Option with the Black-Scholes European Formula ", Journal of Finance, 39, (1984), p. 443
- Halpern, P. and Turnbull, S. "Empirical Tests of Boundary Condition for Toronto Stock Exchange Options ", Journal of Finance, 4 (1985), 481-500
- Harvey, C.R. and R.E. Whaley. " S&P 100 Index Option Volatility ", Journal of Finance, 46 (1991), 1551-61.
- Harvey, C. and Whaley, R. " Market Volatility Prediction and the Efficiency of the S&P 100 Index Option Market", Journal of Financial Economics, 32, (1992) , 43-73
- Hentschel, I. "All in the Family : Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models ", Journal of Financial Economics, 39, (1995), 71-104
- Heston, S. "A Closed-Form Solution for Option with Stochastic Volatility with application to Bond and Currency Options ", Review of Financial Studies, 6, (1992), 327-343
- Heston, S. "Invisible Parameter in Option Prices ", Journal of Finance, 48, (1993), 933-948
- Heynen, R, Kemna, A and T. Vort.t " Analysis of term structure of implied volatilities ", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29, (march 1994), 31-53
- Hull, J., and A. White. " The Pricing of Options on Assets with Stochastics Volatilities ", Journal of Finance, 42, (1987), 281-300
- Hull, J., and A. White. " An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility ", Advance in Futures and Options Research, 3 (1988), 27-61
- Jackwerth, J.C. and M. Rubinstein. " Recovering Probability Distribution from Option Prices ", Journal of Finance, 51, (1996), 1611-31

BIBLIOGRAPHIE

- Johnson H. et P. Shanno. "Option pricing When Variance is Changing", *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 22, (1987), 143
- Klemkosky, R.C., and B. G. Resnick. "Put - Call" Parity and Market Efficiency", *Journal of Finance*, 34, (1979), 1141-55.
- Latané, H.A. et R.J. Rendleman. "Standar Deviation of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", *Journal of Finance*, 31, 1976, 369-381
- Macbeth, J.D., and L.J. Merville. "An Empirical Examination of the Black-Scholes "Call" Option Pricing Model", *Journal of Finance*, 34, (1979), 1173-86
- MacMillan, L. "Analytic Approximation for the American "Put" Option", *Advances in Futures and Option Research*, 1,pt.A (1986), 119-140
- Mandron, A. "Some Empirical Evidence about Canadian Stock Options", *Revue Canadienne des Sciences de l'Administration*, 5, (1988), 1-13
- Melino. A. et S. Turnbull, "Pricing Foreing Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, 45, (1990), 239-265
- Melino. A. et S. Turnbull, "The Pricing of Foreing Currency Options", *Canadian Journal of Econometrics*, 24, (1991), 251-281
- Nandi, S. "How Important is the Correlation Between Returns and Volatility in a Stochastic Volatility Model - Empirical Evidence from Pricing and hedging in the S&P 500 Index Options Market", *Journal of Banking and Finance*, 22, (1998), 589-610
- Nelder, J.A. and R. Mead, A simplex method for function minimiztion. *The Computer Journal*, 1964, 308-313
- Nelson, D.B. "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 45, (1990), 7-38
- Nelson, D.B. and K. Ramaswamy, "Simple Binomial Process as Diffusion Approximations in Financial Models", *Review of Financial Studies*, 3, (1990), 393-430
- Nelson, D. "Conditional Heteroskedasticity in Assets returns : A New Approach", *Econometrica*, 59, (1991), 347-370
- Ritchken, P. and Trevor, R. "Pricing Option Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Process", *Journal of Finance*, 54, (1999) 377-402

BIBLIOGRAPHIE

- Rubinstein, M. " Nonparametric Test of Alternative Option Pricing Models Using All reported Trades and Quotes on the 30 Most Actives CBOE Option Class from August 23, 1976 trough August 31, 1978 ", Journal of Finance, 40 (1985), 455-80
- Rubinstein, M. " Implied Binomial Trees ", Journal of Finance, 49, 3 (1994), 771-
- Scott, Louis. " Option Pricing When the Variance Change Randomly : Theory, Estimators and Applications ", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, (1987), 727-752
- Scott, Louis. " Pricing Stock Options n a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates : Application of Fourrier Inversion Methods ", Mathematical Finance (1997)
- Stein, J. " Overreaction in the Options Market ", Journal of Finance, 44 , (1989), 1011-1023
- Stein, J and E. Stein. "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility ", Reviews of Financials Studies, 4 , (1991), 727-752
- Stoll, H. and Whaley R. " New Option Instruments : Arbitrgeable Linkages and Valuation ", Advances in Futures and Option Research, 1,pt.A (1986), 25-62
- Wiggins, J. " Option Values under Stochastic Volatilities ", Journal of Financial Economics, 19, (1987), 351-372
- Wilmott, P., " Discrete Charms ", RISK, 7 (1994), 43-47
- Wilmott, P., " Discrete Charms ", RISK, (v7 #3) March 1994. P.43-47

