

**Université de Montréal**

**Temps de Branchement du Mouvement  
Brownien Branchant Inhomogène**

par

**Jean-Sébastien Turcotte**

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques

avril 2014

**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Temps de Branchement du Mouvement  
Brownien Branchant Inhomogène**

présenté par

**Jean-Sébastien Turcotte**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Sabin Lessard*

---

(président-rapporteur)

*Louis-Pierre Arguin*

---

(directeur de recherche)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le

*22 avril 2014*

---

## SOMMAIRE

---

Ce mémoire étudie le comportement des particules dont la position est maximale au temps  $t$  dans la marche aléatoire branchante et le mouvement brownien branchant sur  $\mathbb{R}$ , pour des valeurs de  $t$  grandes. Plus exactement, on regarde le comportement du maximum d'une marche aléatoire branchante dans un environnement inhomogène en temps, au sens où la loi des accroissements varie en fonction du temps. On compare avec des modèles connus ou simplifiés, en particulier le modèle i.i.d., où l'on observe des marches aléatoires indépendantes et le modèle de la marche aléatoire homogène. On s'intéresse par la suite aux corrélations entre les particules maximales d'un mouvement brownien branchant. Plus précisément, on étudie le temps de branchement entre deux particules maximales. Finalement, on applique les méthodes et les résultats des premiers chapitres afin d'étudier les corrélations dans un mouvement brownien branchant dans un environnement inhomogène. Le résultat principal du mémoire stipule qu'il y a existence de temps de branchement au centre de l'intervalle  $[0, t]$  dans le mouvement brownien branchant inhomogène, ce qui n'est pas le cas pour le mouvement brownien branchant standard. On présentera également certaines simulations numériques afin de corroborer les résultats numériques et pour établir des hypothèses pour une recherche future.

**Mots Clés :** Marche aléatoire branchante, mouvement brownien branchant, temps de branchement.

## SUMMARY

---

This thesis studies the behavior of particles that are maximal at time  $t$  in branching random walk and branching Brownian motion on  $\mathbb{R}$ , for large values of  $t$ . Precisely, we look at the behavior of the maximum in a branching random walk in a time-inhomogeneous environment, where the law of the increments varies with respect to time. We compare with known or simplified models such as the model where random walks are taken to be i.i.d. and the branching random walk in a time-homogeneous environment model. We then take a look at the correlations between maximal particles in a branching brownian motion. Specifically, we look at the branching time between those maximal particles. Finally, we apply results and methods from the first chapters to study those same correlations in branching Brownian motion in a inhomogeneous environment. The thesis' main result establishes existence of branching time at the center of the interval  $[0, t]$  for the branching Brownian motion in a inhomogeneous environment, which is not the case for standard branching brownian motion. We also present results of simulations that agree with theoretical results and help establishing new hypotheses for future research.

**Keywords :** Branching random walk, branching Brownian motion, branching time.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
<b>Liste des figures</b> .....	vii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	2
1.1. Présentation.....	2
1.2. Marche aléatoire branchante.....	3
1.3. Mouvement brownien branchant.....	11
1.4. Résultats de base et définitions.....	16
<b>Chapitre 2. Marches aléatoires branchantes en temps inhomogène</b>	19
2.1. Motivation.....	19
2.2. Résultats principaux.....	20
2.2.1. Énoncé des résultats.....	21
2.2.2. Comparaisons avec d'autres modèles.....	21
2.3. Profil croissant de variances.....	23
2.3.1. Fluctuation d'une marche aléatoire inhomogène.....	24
2.3.2. Démonstration du théorème 2.2.1.....	28
2.4. Profil décroissant de variances.....	36
2.4.1. Pont brownien discret : un estimé.....	36

2.4.2. Preuve du théorème 2.2.2 .....	36
2.5. Généralisation .....	45
<b>Chapitre 3. Temps de branchement pour le mouvement brownien branchant homogène .....</b>	<b>46</b>
3.1. Motivation .....	46
3.2. Résultats .....	47
3.2.1. Temps de branchement .....	47
3.2.2. Localisation des trajectoires extrêmes .....	48
3.3. Le pont brownien : quelques propriétés .....	52
3.4. Temps de branchement homogène .....	55
<b>Chapitre 4. Temps de branchement pour le mouvement brownien branchant inhomogène .....</b>	<b>64</b>
4.1. Motivation .....	64
4.1.1. Définitions et résultat principal .....	64
4.1.2. Simulations numériques .....	66
4.2. Temps de branchement inhomogène .....	69
<b>Chapitre 5. Conclusion .....</b>	<b>75</b>
5.1. Retour .....	75
5.2. Développement du cas continu .....	75
5.3. Temps de branchement en temps discret .....	76
<b>Bibliographie .....</b>	<b>77</b>

## LISTE DES FIGURES

---

1.1	Les premières générations d'un arbre ternaire.....	4
1.2	Un processus de Galton-Watson.....	5
1.3	Illustration du concept d'ancêtres et de parent de particules extrêmes.....	6
1.4	L'arbre d'une marche aléatoire branchante.....	6
1.5	Une marche aléatoire branchante.....	8
1.6	Une marche aléatoire inhomogène.....	11
1.7	$2^{12}$ marches aléatoires gaussiennes inhomogènes et indépendantes.....	11
1.8	Une réalisation d'un mouvement brownien approximé par une marche aléatoire.....	12
1.9	Propriété de Markov du mouvement brownien branchant (1).....	14
1.10	Propriété de Markov du mouvement brownien branchant (2).....	14
1.11	Illustration typique des temps de branchement des particules près du maximum.....	15
2.1	Marche aléatoire branchante inhomogène.....	20
2.2	Une marche aléatoire inhomogène et son enveloppe.....	25
2.3	Une marche aléatoire inhomogène suivant $G(k)$ et l'enveloppe $f(k) + G(k)$ .....	38
3.1	L'enveloppe supérieure du mouvement brownien branchant.....	49
3.2	La translation verticale de $-\frac{s}{t}m(t)$ .....	50
3.3	L'enveloppe entropique du mouvement brownien branchant.....	51
3.4	Les trois enveloppes du mouvement brownien branchant.....	52

3.5	Deux mouvements browniens branchants créés après la séparation des particules $u_1, v_1$ .....	58
4.1	Le cas $\sigma_1^2 = 0, \sigma_2^2 = 1$ .....	67
4.2	Le cas $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0$ .....	68
4.3	Le cas $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 15$ .....	68
4.4	Le cas $\sigma_1^2 = 15, \sigma_2^2 = 1$ .....	69
5.1	Enveloppes inhomogènes hypothétiques.....	76



## REMERCIEMENTS

---

Je remercie dans un premier temps Louis-Pierre Arguin, mon directeur de recherche, sans qui ce mémoire ne serait pas ce qu'il est aujourd'hui. Ses nombreux conseils et son soutien ont été d'une grande aide pendant toute la durée de ma maîtrise. Merci à l'ensemble de mes professeurs de mathématiques qui ont su allumer et entretenir cette passion que j'ai développée pour cette science. Merci également à ma famille et à mes amis pour leur soutien constant. Merci à Valérie pour avoir partagé ces dernières années. Ce mémoire est en quelque sorte aussi le tien. Finalement, merci aux membres du jury qui auront à lire ce mémoire, et dont les commentaires permettront d'en améliorer la qualité. Merci à tous ceux que j'ai pu oublier.

# Chapitre 1

---

## INTRODUCTION

### 1.1. PRÉSENTATION

Les processus de branchement sont des processus de Markov qui sont souvent utilisés pour modéliser une population qui évolue selon des règles de reproduction et de déplacement précises. On les retrouve autant dans des cas discrets que continus. Les deux processus de branchement qui nous intéressent dans ce mémoire sont la marche aléatoire branchante avec accroissements gaussiens, un processus en temps discret, et le mouvement brownien branchant, un processus en temps continu. Ces processus se prêtent bien à l'étude vu leur nature gaussienne et servent de point de départ pour l'étude de processus stochastiques plus complexes. Le mouvement brownien branchant et la marche aléatoire branchante étant des processus analogues, de nombreux résultats et méthodes peuvent être empruntés de chacun pour étudier leur comportement.

Plus particulièrement, on s'intéressera dans ce mémoire à la marche aléatoire branchante et au mouvement brownien branchant dans un environnement inhomogène en temps. Par environnement inhomogène, on entend un environnement où les accroissements des processus sont distribués avec loi normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma_1^2$  sur la première moitié de l'intervalle du temps et distribués avec loi normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma_2^2$  sur la seconde moitié de l'intervalle. Ce modèle constitue une première généralisation du mouvement brownien branchant standard et, comme nous le verrons, a des conséquences intéressantes :

le profil (croissant ou décroissant) de  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  a une influence importante sur la position attendue du maximum.

On souhaite étudier l'effet des corrélations introduites par le processus de branchement et l'environnement sur les particules et comparer les résultats à des modèles de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ou des modèles homogènes de marche aléatoire branchante ou de mouvement brownien branchant. Dans chacun de ces processus, l'aspect étudié est en étroite relation avec le maximum du processus. La compréhension des processus extrêmes a des répercussions dans plusieurs domaines, notamment en économie, en météorologie, en physique etc. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans la littérature, par exemple dans [Gu].

Le reste du chapitre 1 sera utilisé pour définir la marche aléatoire branchante et le mouvement brownien branchant. On y retrouve également des résultats de bases et autres définitions auxquels on fera parfois référence.

Le chapitre 2 se concentre sur la marche aléatoire branchante dans un environnement inhomogène. On établit les deux premiers ordres de convergence de la position du maximum pour le profil croissant et décroissant des variances.

Le chapitre 3 étudie le comportement des particules se retrouvant près du maximum d'un mouvement brownien branchant. Plus spécifiquement, on s'intéresse au temps de branchement entre ces différentes particules.

Le chapitre 4 combine les deux chapitres précédents, en étudiant les temps de branchement dans un mouvement brownien branchant en temps inhomogène. On y utilise les résultats du chapitre 2 et on adapte les méthodes du chapitre 3 pour démontrer les nouveaux résultats. Ce chapitre constitue la contribution originale de ce mémoire.

## 1.2. MARCHE ALÉATOIRE BRANCHANTE

La marche aléatoire branchante peut être vue comme un processus de Galton-Watson sur lequel on ajoute un déplacement. Les processus de Galton-Watson sont représentés par des arbres aléatoires, le nombre d'individus étant donné par une loi de reproduction.

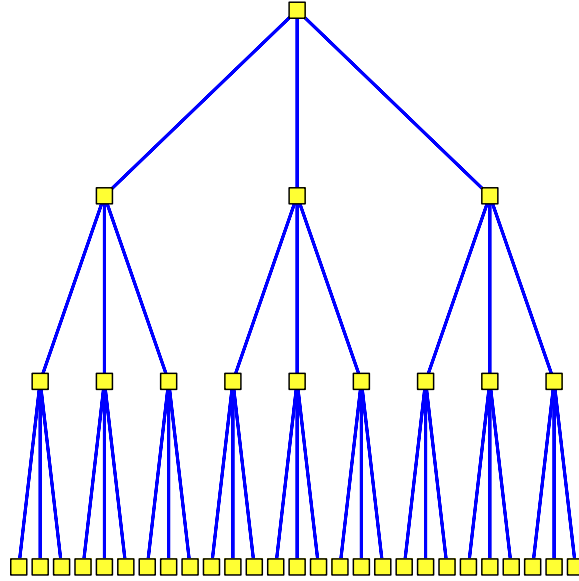


FIGURE 1.1. Les premières générations d'un arbre ternaire.

On commence avec un nombre  $Z_0$ , pouvant être aléatoire, d'individus qui forment la génération zéro, ou encore la racine (par analogie avec la représentation graphique du processus en arbre). Chaque particule au temps  $n, n \geq 0$ , donne naissance à un nombre d'individus au temps  $n + 1$  selon la loi de reproduction (on parlera parfois de la génération  $n$  pour parler du temps  $n$ , la représentation en arbre du processus rappelant un arbre généalogique). Le plus simple des ces processus est celui où l'on a un individu racine  $Z_0 = 1$ , et chaque enfant d'une génération  $n$  produit un nombre fixe  $k$  d'enfants à la génération  $n + 1$ . Pour bien visualiser le processus, on fait appel à la notion d'arbre en théorie des graphes. Le processus décrit ci-haut produit des arbres  $k$ -aires, comme celui illustré à la figure 1.1.

**Définition 1.2.1.** *Un arbre  $k$ -aire est un graphe connexe sans cycle dont le degré de chaque sommet est d'au plus  $k + 1$ .*

Dans ce qui suit, on considère un seul individu formant la génération initiale. Pour chaque  $n$ , on définit une famille de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières  $\{\xi_i^{(n)}\}_{i \geq 1}$  avec  $(\mathbb{P}(\xi_i = k) = p_k)$ . On fera parfois référence à la distribution des variables  $\xi_i^{(n)}$  comme étant la distribution de reproduction. Concrètement, on a :

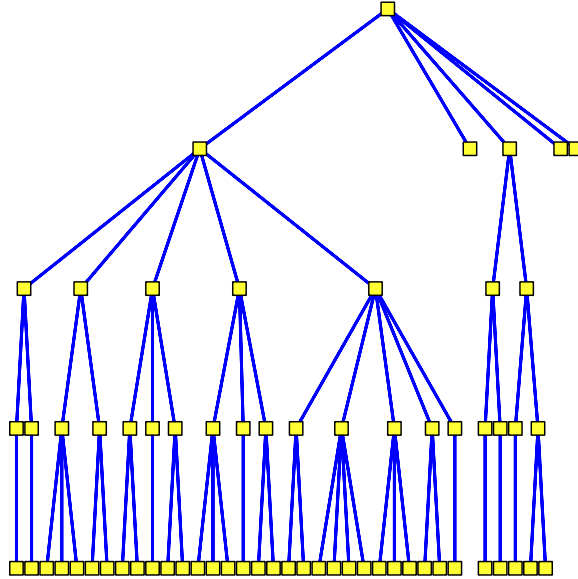


FIGURE 1.2. Un processus de Galton-Watson.

**Définition 1.2.2.** *Un processus de Galton-Watson est le processus stochastique  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  défini récursivement avec  $Z_0 = 1$  et*

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}.$$

La figure 1.2 illustre un arbre de Galton-Watson aléatoire.

Voici quelques éléments de terminologie qui seront utilisés dans le reste du mémoire.

**Définition 1.2.3.** *On note l'ensemble des particules à la génération  $n$  d'un arbre par  $\mathbb{D}_n$ .*

**Définition 1.2.4.** *Pour une particule  $u \in \mathbb{D}_n$ , on appelle l'ancêtre de  $u$  au temps  $k \leq n$  la particule dans  $\mathbb{D}_k$  qui se retrouve sur le chemin entre la racine et  $u$ . On écrira alors  $u(k)$ .*

**Définition 1.2.5.** *Pour deux particules  $u, v \in \mathbb{D}_n$ , on appelle le parent le dernier ancêtre qu'ils ont en commun, en commençant par la racine. On le notera par  $u \wedge v$ . De manière équivalente, le parent de  $u$  et  $v$  est le premier ancêtre qu'ils ont en commun en prenant les chemins de  $u$  et  $v$  vers la racine.*

La figure 1.3 donne quelques exemples des définitions d'ancêtres et de parent.

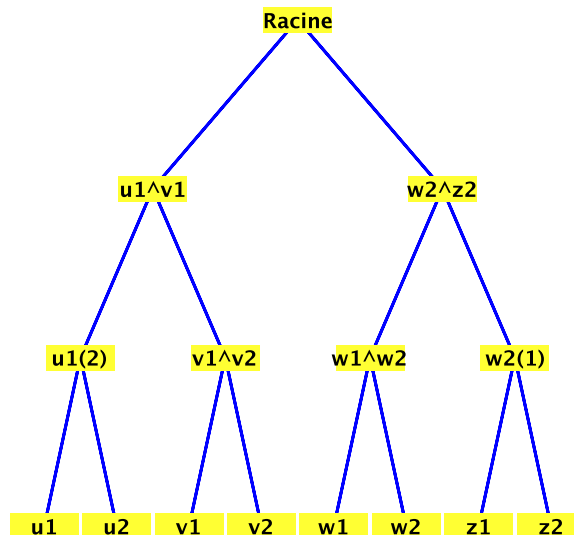


FIGURE 1.3. Illustration du concept d'ancêtres et de parent de particules extrêmes.

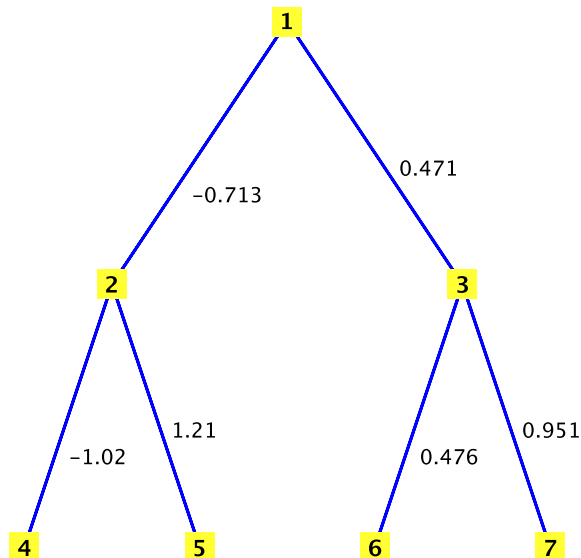


FIGURE 1.4. L'arbre d'une marche aléatoire branchante.

La marche aléatoire branchante (MAB) est un arbre de Galton-Watson augmenté de poids sur chacune des arêtes de l'arbre. Ces poids sont distribués selon une loi de probabilités  $X$  indépendante de la distribution de reproduction.

**Définition 1.2.6.** Soit  $u \in \mathbb{D}_n$  une particule quelconque. La position de  $u$  au temps  $n$  est donnée par

$$S_u(n) = \sum_{k=1}^n X_{u(k)},$$

où les variables aléatoires  $\{X_{u(k)}\}$  sont i.i.d. selon la loi de déplacement  $X$  et correspondent au poids des arêtes sur l'arbre de Galton-Watson. La variable  $X_{u(k)}$  correspond au poids sur l'arête entre  $u(k-1)$  et  $u(k)$ . La marche aléatoire branchante (MAB) est donnée par le processus

$$(S_v(n), v \in \mathbb{D}_n).$$

La figure 1.4 illustre l'arbre d'une marche aléatoire branchante avec loi de reproduction binaire et loi de déplacement gaussienne. On aurait par exemple  $X_3 = 0,471$  dans la marche donnée par l'arbre de la figure 1.4. On peut également voir le résultat graphique d'une marche aléatoire branchante dans la figure 1.5.

**Remarque 1.2.7.** Sauf avis contraire, lorsqu'on parle de MAB dans le reste du mémoire, on fera référence à la marche aléatoire branchante gaussienne de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$  et où les branchements sont binaires dans le processus de Galton-Watson, c'est-à-dire  $\mathbb{P}(\xi_i = 2) = 1$  pour tout  $i$ .

Une question intéressante est d'étudier le comportement de la position du maximum avec le temps, à savoir le comportement asymptotique de la variable aléatoire

$$M_n = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v(n). \quad (1.2.1)$$

Cette quantité varie selon les modèles observés. Elle est sensible aux corrélations et à l'environnement. Comprendre cette variation permet de mieux saisir l'impact des corrélations sur les variables aléatoires.

Le premier modèle considéré est celui des variables aléatoires i.i.d. puisque l'absence de corrélations permet l'obtention des résultats plus aisément. Il sert ensuite de référence pour étudier les cas corrélés. Les prochains résultats précisent la position du maximum de  $2^n$  variables aléatoires i.i.d. selon une loi normale de moyenne 0 et de variance  $n\sigma^2$ .

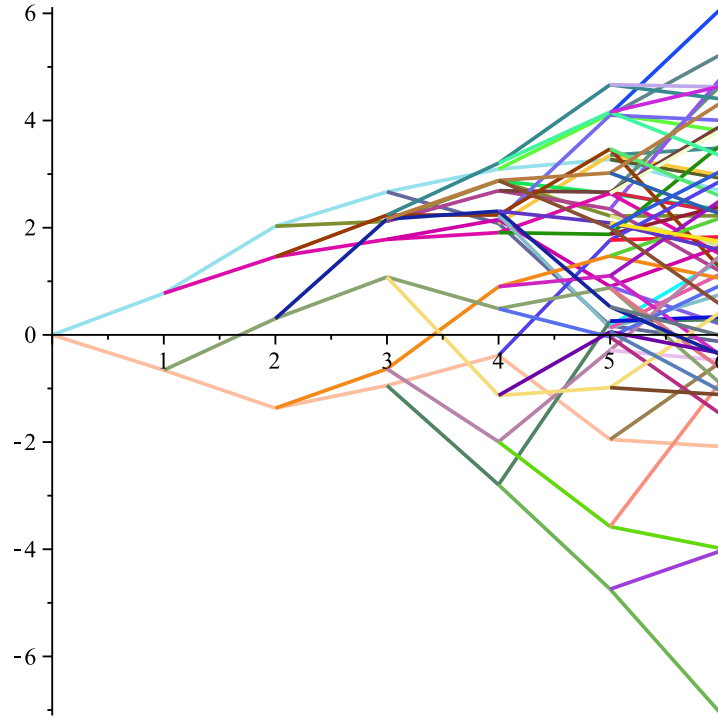


FIGURE 1.5. Une marche aléatoire branchante.

**Théorème 1.2.8** (Proposition 2.5 dans [Ap]). Soient  $\{X_i\}_{i=1}^{2^n}$  des variables aléatoires i.i.d. de loi normale avec moyenne 0 et variance  $n\sigma^2$ . Alors le maximum

$$M_n^{ind} := \max_{i=1, \dots, 2^n} X_i \quad (1.2.2)$$

recentré converge en loi vers la distribution Gumbel  $F(x) = e^{-e^{-\frac{x}{\sigma}}}$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n^{ind} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow F(x) \quad (1.2.3)$$

quand  $n \rightarrow \infty$ , avec

$$a_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \log(2)}}$$

et

$$b_n = \sqrt{2\sigma^2 \log(2)n} - \frac{1}{2} \frac{\sigma \log(n)}{\sqrt{2 \log(2)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log(n)}}\right).$$

Le théorème 1.2.8 montre la convergence du maximum recentré. On en déduit le corollaire plus faible 1.2.10. Avant de le citer, on présente la notion de tension pour une suite de variables aléatoires.



**Définition 1.2.9.** Une suite de variables aléatoires  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dite tendue si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $M$  tel que

$$\mathbb{P}(|X_n| > M) < \epsilon$$

pour tout  $n$ . On note ceci par  $X_n = O_P(1)$ .

**Corollaire 1.2.10** (Proposition 2.6 dans [Ap]). Soient  $\{X_i\}_{i=1}^{2^n}$  des variables aléatoires i.i.d. de loi normale avec moyenne 0 et variance  $n\sigma^2$ . Alors

$$M_n^{ind} = \left( \sqrt{2\sigma^2 \log(2)} \right) n - \frac{1}{2} \frac{\sigma \log(n)}{\sqrt{2 \log(2)}} + O_P(1). \quad (1.2.4)$$

On peut trouver une démonstration de ces résultats dans [Ap]. On présente ci-dessous un argument heuristique qui offre une perspective intéressante sur les corrélations dans la marche aléatoire branchante ou le mouvement brownien branchant. On note par  $N(t) = \#\{X_i \geq t\}$  le nombre de variables aléatoires  $X_i$  qui sont supérieures ou égales à  $t$ . On cherche  $t$  de sorte que  $\mathbb{P}(N(t) \geq 1)$  se comporte comme une constante. L'inégalité de Markov (lemme 1.4.4) et l'estimé gaussien (corollaire 1.4.2) présentés dans la section 1.4 montrent que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) \geq 1) &\leq \mathbb{E}(N(t)) \\ &= 2^n \mathbb{P}(X_i \geq t) \\ &\leq \frac{2^n \sqrt{n\sigma} e^{-\frac{t^2}{2n\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}t}. \end{aligned}$$

On constate que  $t$  devra être choisi pour que le terme  $2^n \sqrt{n}$  puisse s'éliminer avec la combinaison de l'exponentielle et du terme  $1/t$ . Un choix éclairé donné par

$$t = \sqrt{2\sigma^2 \log(2)} n - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(n)$$

nous permet d'obtenir ce que nous voulons.

Ce qui est intéressant avec l'heuristique ci-dessus, c'est que le même résultat aurait été obtenu dans le cas où les variables aléatoires avaient été corrélées, puisque l'inégalité de Markov fait abstraction de ces corrélations. On verra ci-dessous et discutera dans le chapitre 2 que le terme de recentrage reste le même pour la marche aléatoire branchante homogène, mais que l'on retrouve un facteur  $\frac{3}{2}$  devant le terme logarithmique plutôt qu'un facteur  $\frac{1}{2}$ .

Dans le cas de la marche aléatoire branchante, on retrouve entre autres dans [Ba]

**Théorème** (Position du maximum dans une MAB). *On considère une marche aléatoire branchante  $(S_v(n), v \in \mathbb{D}_n)$  avec branchements binaires et accroissements gaussiens de variance  $\sigma^2$  (voir définition 1.2.6). Soit*

$$M_n^= = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v(n).$$

Alors

$$M_n^= = \sqrt{2 \log(2)} \sigma n - \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1).$$

Le cas étudié au chapitre 2 est un cas particulier de marche aléatoire branchante, dans un environnement inhomogène au niveau de la loi des accroissements. Le processus considéré est la marche aléatoire branchante binaire avec accroissements gaussiens de variance  $\sigma_1^2$  sur l'intervalle  $[0, \frac{n}{2}]$  et accroissements gaussiens de variance  $\sigma_2^2$  sur l'intervalle  $[\frac{n}{2}, n]$ . On y présente la position attendue du maximum (1.2.1) autant pour un profil croissant que décroissant de variances. Le théorème principal du chapitre 2 est dû à Fang et Zeitouni dans [FZ1].

**Théorème** (Résultat principal du chapitre 2). *On considère une marche aléatoire branchante  $(S_v^\uparrow(n), v \in \mathbb{D}_n)$  avec branchements binaires en temps inhomogène avec accroissements gaussiens de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  avec  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ . Soit  $(S_v^\downarrow(n), v \in \mathbb{D}_n)$  la marche aléatoire branchante définie de manière similaire avec  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ . Soient*

$$M_n^\uparrow = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v^\uparrow(n) \quad \text{et} \quad M_n^\downarrow = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v^\downarrow(n).$$

Alors

$$M_n^{\uparrow, \downarrow} = \sqrt{2 \log(2)} \sigma_{\text{eff}} n - \beta \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1),$$

pour des valeurs de  $\sigma_{\text{eff}}$  et  $\beta$  dépendant du profil de variances, à savoir  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$  ou  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ .

Une discussion comparative entre différents modèles dont la MAB homogène, inhomogène et celui de marches aléatoires régulières est faite au début du chapitre 2. À titre indicatif, la figure 1.6 illustre une MAB inhomogène jusqu'au temps 12 alors que la figure 1.7 illustre  $2^{12}$  marches aléatoires gaussiennes inhomogènes indépendantes. La figure 1.5 montrait quant à elle une MAB homogène.

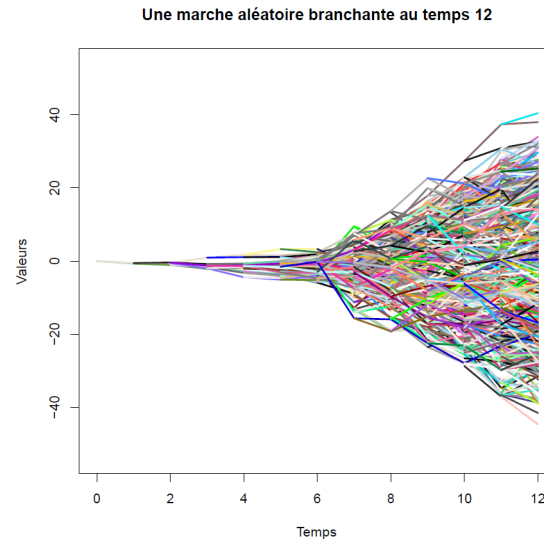


FIGURE 1.6. Une marche aléatoire inhomogène.

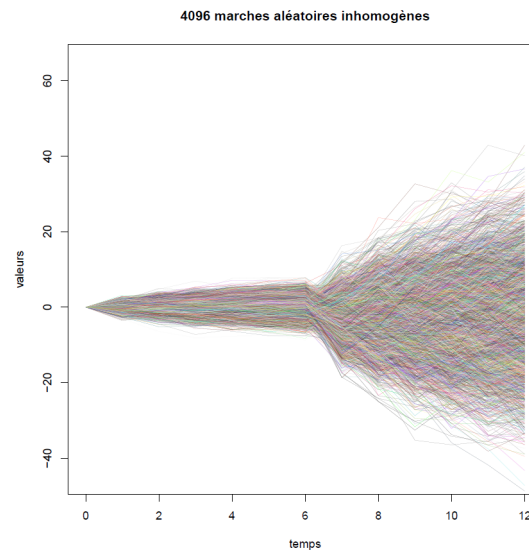


FIGURE 1.7.  $2^{12}$  marches aléatoires gaussiennes inhomogènes et indépendantes.

### 1.3. MOUVEMENT BROWNIEN BRANCHANT

Le mouvement brownien standard est un processus stochastique de Markov qui est étudié dans plusieurs domaines, comme les mathématiques pures, la physique ou l'économie. Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , un processus  $(x_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien standard [Du] si

$$(1) \quad x_0 = 0,$$

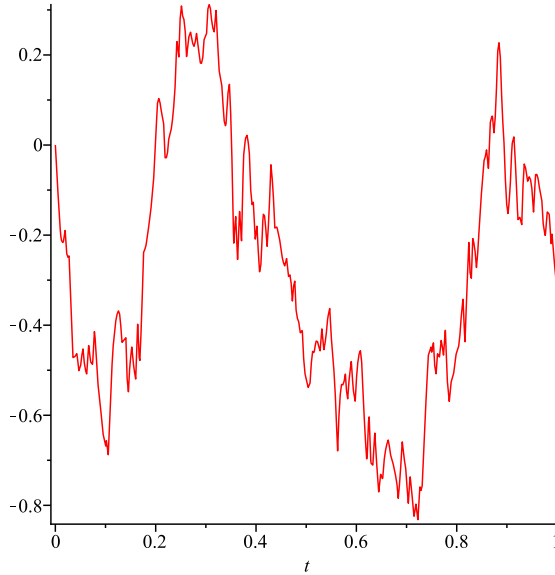


FIGURE 1.8. Une réalisation d'un mouvement brownien approximé par une marche aléatoire.

- (2) Pour  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $t \rightarrow x_t(\omega)$  est continue presque sûrement,
- (3) Les accroissements de  $x_t$  sont indépendants avec  $x_t - x_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ , ( $0 \leq s < t$ ), où  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  représente la loi normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ .

La figure 1.8 montre un exemple d'un mouvement brownien standard sur l'intervalle  $[0, 1]$  approximé par une marche aléatoire.

Le mouvement brownien branchant est une généralisation du mouvement brownien standard. C'est aussi un processus de Markov en temps continu (voir la proposition 1.3.3). Une particule initiale issue de l'origine effectue un mouvement brownien standard  $x$  pour un temps aléatoire exponentiel  $T$ , avec  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-t}$ . Au temps  $T$ , la particule se sépare indépendamment de  $T$  et  $x$  en  $k$  descendants avec probabilité  $p_k$ , où  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = 2$  et  $K = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k < \infty$ . Chacune de ces  $k$  nouvelles particules effectue à son tour un mouvement brownien standard sujet aux mêmes règles de durée de vie et de reproduction. Suivant la notation de la définition 1.2.3, on note par  $\mathbb{D}_t$  l'ensemble des particules au temps  $t$ . Puisque  $\mathbb{D}_t$  contient un nombre aléatoire de particules, on note également  $n(t) = \#\{\mathbb{D}_t\}$ , avec  $\mathbb{E}(n(t)) = e^t$  (voir [AN] chapitre 3 section 4). Ces particules sont situées à  $x_{v_i}(t)$ ,  $1 \leq i \leq n(t)$ .

Concrètement, on a :

**Définition 1.3.1.** *Le mouvement brownien branchant est le processus*

$$x(t) = (x_v(t), v \in \mathbb{D}_t),$$

où pour chaque particule  $v \in \mathbb{D}_t$ ,  $(x_v(s), 0 \leq s \leq t)$  est un mouvement brownien standard sur l'intervalle  $[0, t]$ .

Le mouvement brownien branchant possède une propriété de Markov. Avant de la citer, on introduit le concept de descendants d'une particule.

**Définition 1.3.2.** *Soit  $w \in \mathbb{D}_s$ ,  $s < t$ , une particule. On note par  $\mathbb{D}_t^{(w)} \subseteq \mathbb{D}_t$  l'ensemble des particules au temps  $t$  issues de  $w$ . Ces particules sont les descendants de  $w$ .*

**Proposition 1.3.3** (Propriété de Markov du mouvement brownien branchant). *Soit  $\mathcal{F}_t = \sigma(x(t'), t' \leq t)$  la filtration naturelle du mouvement brownien branchant. Le processus  $(x_v(t), v \in \mathbb{D}_t)$  conditionné sur  $\mathcal{F}_s$  est égal en loi au processus*

$$(x_w(s) + x_v^{(w)}(t-s), w \in \mathbb{D}_s, v \in \mathbb{D}_{t-s}^{(w)}),$$

où  $(x_v^{(w)}, v \in \mathbb{D}_{t-s}^{(w)})$  sont des mouvements browniens branchants indépendants de longueur  $t-s$  pour chaque  $w \in \mathbb{D}_s$ . La notation  $\mathbb{D}_{t-s}^{(w)}$  est utilisée pour rappeler que ces mouvements browniens branchant sont issues d'une particule  $w$ .

La propriété de Markov est illustrée à la figure 1.9 et à la figure 1.10. Conditionné sur  $\mathcal{F}_s$ , le mouvement brownien branchant illustré dans la figure est égal en loi à quatre mouvements browniens branchants de longueur  $[t-s]$  issus respectivement de  $w_1, w_2, w_3$  et  $w_4$ . Tout comme pour la MAB, on peut se demander quelle est la position attendue de la variable aléatoire

$$M(t) = \max_{v \in \mathbb{D}_t} x_v(t).$$

Cette question a été résolue par Bramson [Br1]. Il a démontré que

$$M(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t) + O_P(1).$$

Les méthodes utilisées dans son article sont reprises et parfois généralisées tout au long du chapitre 3, dans lequel on étudie non pas la position des particules, mais la position sur l'axe du temps des parents des particules qui sont près du

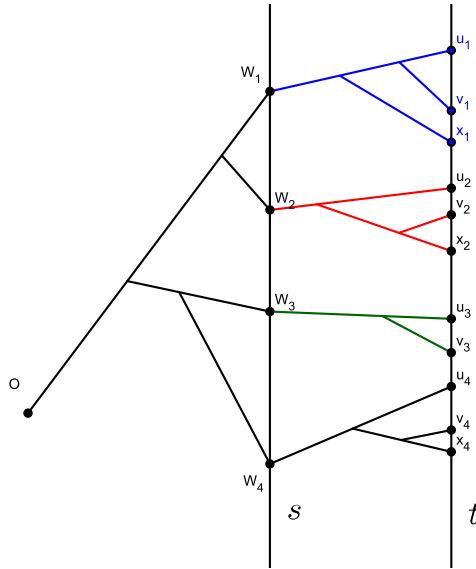


FIGURE 1.9. Propriété de Markov du mouvement brownien branchant (1).

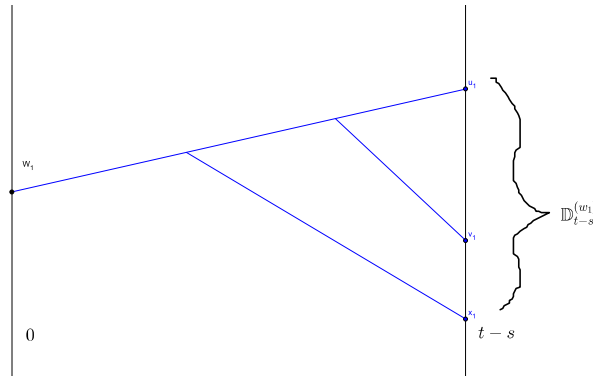


FIGURE 1.10. Propriété de Markov du mouvement brownien branchant (2).

maximum. Au temps  $t$ , on a l'équivalent d'environ  $e^t$  mouvements browniens standards, à la différence qu'ils sont corrélés comparativement à la situation où  $e^t$  mouvements browniens standards indépendants sur  $[0, t]$  seraient considérés. Ces corrélations sont données en fonction de

$$Q_t(u, v) = \sup\{s \leq t : x_u(s') = x_v(s'), \forall 0 \leq s' \leq s\},$$

représentant le temps de branchement entre  $u, v$ , ou de façon équivalente le temps où vit le parent des particules  $u$  et  $v$ . Le chapitre 3 précise les intervalles dans lequel  $Q_t(u, v)$  se retrouve avec grande probabilité pour  $u, v$  près du maximum.

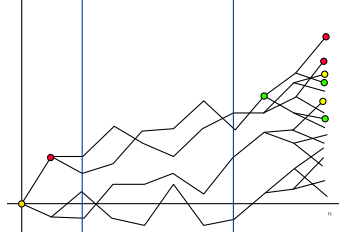


FIGURE 1.11. Illustration typique des temps de branchement des particules près du maximum.

Le résultat principal du chapitre 3 est dû à Arguin, Bovier et Kistler dans leur article [ABK].

**Théorème** (Résultat principal du chapitre 3). *Soient  $D \subset \mathbb{R}$  un compact et  $m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t)$ ,  $\mathbb{D}_t(D) = \{u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in m(t) + D\}$ , alors*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 3r} \mathbb{P}(\exists u, v \in \mathbb{D}_t(D) : Q_t(u, v) \in (r, t - r)) = 0.$$

La figure 1.11 illustre le théorème ci-dessus. Il nous dit que les paires de particules qui se retrouve près du maximum proviennent ou bien d'un parent qui vit relativement tôt dans l'intervalle  $[0, t]$ , ou bien d'un parent qui vit relativement tard dans  $[0, t]$ .

Qu'en est-il dans le cas d'un mouvement brownien branchant inhomogène, processus identique au mouvement brownien branchant décrit ci-dessus mais avec un coefficient de diffusion  $\sigma_1^2$  sur  $[0, \frac{t}{2}]$  et  $\sigma_2^2$  sur  $[\frac{t}{2}, t]$ ? Est-ce que la présence d'une transition de variance influence l'allure des temps de branchement entre les particules près du maximum d'un mouvement brownien branchant? Et si on répond par l'affirmative à la question précédente, est-ce que le profil des variances importe, à savoir est-ce que  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$  ou  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  a une importance particulière. En combinant les chapitres 2 et 3 et en y adaptant les résultats, on démontre dans le chapitre 4 la contribution principale de ce mémoire :

**Théorème** (Théorème principal du chapitre 4). *Soient  $0 < \sigma_2^2 < \sigma_1^2$ . On considère le mouvement brownien branchant inhomogène avec profil de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ . Soit  $D$  un compact. Alors*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \mathbb{D}_t : x_u(t), x_v(t) \in \hat{m}(t) + D, \right. \\ \left. Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} + r\right] \right) > 0, \quad (1.3.1)$$

où  $\hat{m}(t) = \sqrt{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_2) \log\left(\frac{t}{2}\right)$ .

On remarque la différence immédiate avec le résultat principal du chapitre 3 qui stipulait que tous les temps de branchement entre les particules près du maximum étaient soit dans l'intervalle  $[0, r]$ , soit dans l'intervalle  $[t - r, t]$ .

#### 1.4. RÉSULTATS DE BASE ET DÉFINITIONS

Cette section vise à introduire certains résultats classiques en probabilités ou à présenter des lemmes généraux qui seront utilisés à travers le mémoire. On présente également quelques définitions et on établit certains éléments de notation. Le premier résultat est un estimé donnant des bornes sur une exponentielle négative. Il permet de simplifier les calculs dans de nombreuses équations où la densité gaussienne est présente et sera utilisé à maintes reprises dans le mémoire.

**Lemme 1.4.1** (Estimé gaussien). *Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et soit  $x > 0$  un réel. Alors*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(z+x)^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_0^\infty \exp(-zx) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_0^\infty \exp(-zx) dz \\ &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$



pour obtenir le majorant. Pour ce qui est du minorant, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \left(1 - \frac{3}{z^4}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Le résultat se généralise aisément en effectuant un simple changement de variable pour obtenir

**Corollaire 1.4.2.** *Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  et soit  $x > 0$  un réel. Alors*

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sigma^2}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \leq \mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\sigma}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Le prochain résultat est un autre estimé pour un événement gaussien.

**Lemme 1.4.3.** *Posons  $m(n) = Cn - K \log(n)$ , pour  $C, K > 0$ . Soit  $D \subset \mathbb{R}$  un compact et  $Z_n$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, n)$ ,  $n \geq 2$ . Alors on a*

$$\mathbb{P}(Z_n - m(n) \in D) \leq \kappa n^{CK - \frac{1}{2}} e^{-C^2 \frac{n}{2}} \int_D \exp(-Cx) dx,$$

pour une certaine constante  $\kappa > 0$ .

**DÉMONSTRATION.** Remarquons que  $Z_n - m(n)$  a pour loi une distribution normale de moyenne  $-m(n)$  et de variance  $n$ . La densité est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(\frac{-(x + m(n))^2}{2n}\right).$$

On veut donc borner la quantité

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(\frac{-(x + m(n))^2}{2n}\right) dx. \quad (1.4.1)$$

Remarquons d'abord qu'en factorisant l'intérieur de l'exponentielle, on obtient

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{n} - xC + \frac{xK \log(n)}{n} - \frac{1}{2} nC^2 + CK \log(n) - \frac{1}{2} \frac{K^2 (\log(n))^2}{n}\right).$$

En factorisant les différentes exponentielles et en bornant certaines des négatives par 1, on trouve que la quantité (1.4.1) est inférieure ou égale à

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-Cx) \exp\left(\frac{Kx \log(n)}{n}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}C^2n\right) \exp(CK \log(n)) dx,$$

que l'on peut écrire comme

$$\frac{n^{CK-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}C^2n\right) \int_D \exp(-Cx) \exp\left(\frac{Kx \log(n)}{n}\right) dx.$$

Pour compléter la preuve, on remarque que  $\exp\left(\frac{Kx \log(n)}{n}\right) = n^{Kx/n}$ . Pris comme fonction de  $n$  et  $x$ , on peut borner cette exponentielle d'abord en  $x$  avec le supremum dans  $D$  et ensuite en  $n$  pour finalement obtenir  $n^{Kx/n} \leq e^{\bar{D}K/e}$ , où  $\bar{D} = \sup\{x \in D\}$ .  $\square$

On rappelle le résultat classique souvent appelé l'inégalité de Markov dans la littérature.

**Lemme 1.4.4** (Inégalité de Markov). *Soit  $X \geq 0$  une variable aléatoire et  $t > 0$  un nombre réel. Alors*

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

**Remarque 1.4.5.** *Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , alors l'inégalité de Markov permet d'obtenir un majorant à la probabilité*

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X).$$

*Cette forme du résultat sera souvent utilisée également sous l'appellation d'inégalité de Markov.*

L'inégalité de Markov est souvent appelée la méthode du premier moment. On présente ci-dessous la méthode du deuxième moment.

**Lemme 1.4.6** (Méthode du deuxième moment). *Soit  $X \geq 0$ . Alors*

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

*Le résultat sera également utilisé sous la forme*

$$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X^2)} = \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)},$$

*pour  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .*

# Chapitre 2

---

## MARCHES ALÉATOIRES BRANCHANTES EN TEMPS INHOMOGÈNE

Le but de ce chapitre est d'établir le déplacement maximum d'une marche aléatoire branchante dans un environnement inhomogène par rapport au temps. Plus précisément, on considère une marche aléatoire branchante avec des branchements binaires, dont les accroissements suivent une loi normale de moyenne 0. La variance de la loi des déplacements change selon le temps. Il sera démontré que le profil des variances est important pour déterminer la position du maximum. Les résultats de ce chapitre sont tirés de l'article [FZ1].

### 2.1. MOTIVATION

Dans le cas homogène, le premier résultat sur la position du maximum est dû à Bramson dans son article [Br1], pour le mouvement brownien branchant. Des résultats similaires ont été démontrés dans [AB] et [Ai] pour la marche aléatoire branchante. Ces résultats montrent qu'en moyenne, la position du maximum croît linéairement avec le temps, avec une correction logarithmique. De plus, lorsque recentrée par sa médiane, la variable aléatoire du maximum est tendue. Voici maintenant la situation qui sera étudiée dans le reste du chapitre.

On dénote par  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  la loi normale de moyenne zéro et variance  $\sigma^2$ . Soient  $n$  un entier positif et  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$  des réels. Une particule sur la droite réelle débute au temps 0 en 0 et effectue une marche aléatoire branchante binaire selon le modèle de la section 1.2. Les accroissements du temps  $k$  au temps  $k + 1$  sont tirés d'une

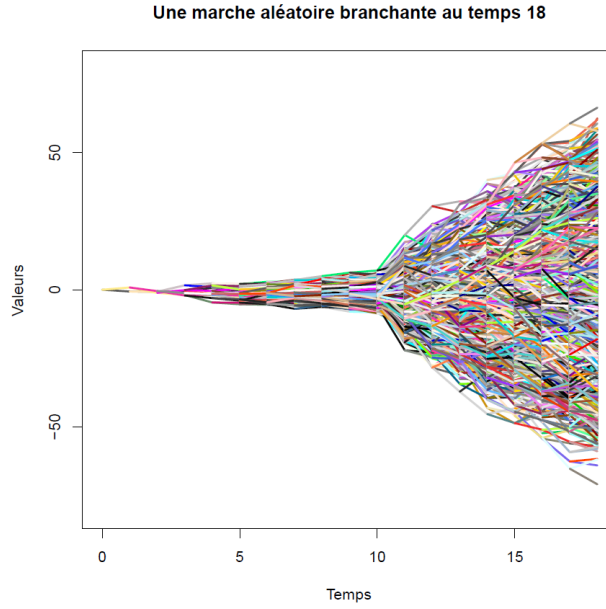


FIGURE 2.1. Marche aléatoire branchante inhomogène.

loi  $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$  pour  $0 \leq k < \frac{n}{2}$  et d'une loi  $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$  pour  $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ . On dénote par  $\mathbb{D}_k$  l'ensemble des particules au temps  $k$ . Pour  $v \in \mathbb{D}_k$  une particule, on note par  $S_v(i)$  la position de la particule ancestrale à  $v$  au temps  $i$ , pour  $i \leq k$ , et on s'intéresse à la quantité  $\max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v(n)$  pour des valeurs de  $n$  très grandes. La figure 2.1 illustre une marche aléatoire branchante en temps inhomogène jusqu'au temps  $n = 18$  avec  $\sigma_1^2 = 1$  et  $\sigma_2^2 = 5$ . Le profil des variances est important, ainsi on définit

$$M_n^\uparrow = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v(n) \quad \text{si } \sigma_1^2 < \sigma_2^2,$$

$$M_n^\downarrow = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v(n) \quad \text{si } \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \text{ et}$$

$$M_n^\equiv = \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v(n) \quad \text{si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

## 2.2. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans cette section, on énonce les deux théorèmes principaux du chapitre et on effectue différentes comparaisons entre les modèles. Les démonstrations seront faites dans les sections suivantes.

### 2.2.1. Énoncé des résultats

Tel que mentionné plus haut, le profil des variances, à savoir  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$  ou  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  est important. Les résultats principaux de ce chapitre sont les deux théorèmes suivants.

**Théorème 2.2.1** (Profil Croissant (Théorème 1 dans [FZ1])). *Pour une marche aléatoire branchante binaire inhomogène avec un profil de variances  $\sigma_1 < \sigma_2$ , le déplacement maximum est donné par*

$$M_n^\uparrow = \left( \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)} \right) n - \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{4\sqrt{\log(2)}} \log(n) + O_P(1). \quad (2.2.1)$$

**Théorème 2.2.2** (Profil Décroissant (Théorème 2 dans [FZ1])). *Pour une marche aléatoire branchante binaire inhomogène avec un profil de variances  $\sigma_1 > \sigma_2$ , le déplacement maximum est donné par*

$$M_n^\downarrow = \frac{\sqrt{2 \log(2)}(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} n - \frac{3(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1). \quad (2.2.2)$$

### 2.2.2. Comparaisons avec d'autres modèles

**Remarque 2.2.3.** *Il est possible de réécrire les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 sous la forme*

$$M_n = \left( \sqrt{2 \log(2)} \sigma_{\text{eff}} \right) n - \beta \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1). \quad (2.2.3)$$

Le théorème 2.2.1 est de la forme (2.2.3) avec  $\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ , alors que le théorème 2.2.2 s'écrit avec  $\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  et  $\beta = 3$ .

Une première comparaison est de regarder le résultat équivalent dans le cas homogène. On retrouve, par exemple, dans [AB], [Ai] ou [Ba] une forme du résultat suivant :

**Théorème 2.2.4.** *Soit une marche aléatoire branchante binaire avec  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . Alors*

$$M_n^\pm = \left( \sqrt{2 \log(2)} \sigma \right) n - \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1); \quad (2.2.4)$$

de la forme de l'équation (2.2.3)  $\sigma_{\text{eff}} = \sigma$  et  $\beta = \frac{3}{2}$ .

On peut également se demander où serait le maximum si on considérait un modèle plus simple de  $2^n$  particules indépendantes. Soient  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$  indépendants pour  $i \in \mathbb{N}$ . Une marche aléatoire inhomogène au temps  $n$  est le processus donné par

$$S(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} X_i + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n Y_i. \quad (2.2.5)$$

On prend  $2^n$  copies de cette marche et on regarde le maximum. Il est donné par (1.2.4)

$$M_n^{ind} = \left( \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)} \right) n - \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{4\sqrt{\log(2)}} \log(n) + O_P(1), \quad (2.2.6)$$

et ce, peu importe le choix de  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$ . Remarquons qu'il est aussi de la forme (2.2.3) avec  $\sigma_{eff} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2}, \beta = 1/2$ .

Un autre modèle simple à considérer est celui du maximum obtenu en ne considérant que les descendants de la particule maximale au temps  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , soit

$$M_n^s = \max_{v \in \mathbb{D}_n} \left\{ S_v(n) : S_v \left( \frac{n}{2} \right) \text{ est le maximum} \right\}.$$

On en déduit que ce maximum est donné par l'addition des maximums de deux marches aléatoires branchantes homogènes. On obtient en appliquant deux fois le théorème 2.2.4 avec  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , une première fois avec variance  $\sigma_1^2$ , et une deuxième fois avec variance  $\sigma_2^2$ , la position

$$M_n^s = \frac{\sqrt{2 \log(2)} (\sigma_1 + \sigma_2)}{2} n - \frac{3(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1). \quad (2.2.7)$$

Avant de passer aux démonstrations des théorèmes 2.2.1 et 2.2.2, on fait quelques remarques sur les différentes formes des variables aléatoires  $M_n$ .

- (1) Au premier ordre,  $M_n^=$  et  $M_n^{ind}$  concordent. La différence dans le terme logarithmique provient de la dépendance entre les particules dans le cas branchant, et leur indépendance dans l'autre cas. Le lecteur pourra consulter la discussion dans [Br1] pour plus de détails.

- (2) Les deux premiers termes du sous-maximum  $M_n^s$  et du maximum pour le profil décroissant  $M_n^\downarrow$  correspondent. De plus, chacun des termes déterministes de ces maximums est obtenu par l'addition de deux termes de maximums homogènes de la forme (2.2.4). Ce fait sera utilisé dans le chapitre 4
- (3) Le cas croissant  $M_n^\uparrow$  est quant à lui bien approximé par le maximum d'une MAB homogène avec variance  $\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}$ .
- (4) Si on utilise les mêmes variances  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$ , mais dans l'ordre inverse, alors un calcul simple terme à terme nous fait voir que  $M_n^\uparrow$  est plus grand que  $M_n^\downarrow$  avant l'erreur.
- (5) Enfin, il est intéressant de remarquer qu'il y a une continuité par rapport à  $\sigma_1, \sigma_2$  pour le terme de premier ordre dans (2.2.4), (2.2.1) et (2.2.2), c'est-à-dire qu'ils coïncident lorsque l'on prend  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Cette continuité n'est pas présente dans le terme de correction logarithmique. On y observe trois termes différents exhibant un phénomène de transition de phase.

Finalement, on énonce un résultat qui dit que les suites  $M_n^\uparrow$  et  $M_n^\downarrow$  sont tendues lorsque recentrées par leur médiane. On réfère le lecteur intéressé au lemme 1 et à la discussion en fin de section 1 dans [FZ1].

**Lemme 2.2.5.** *Les suites  $\{M_n^\uparrow - \text{Med}(M_n^\uparrow)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{M_n^\downarrow - \text{Med}(M_n^\downarrow)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sont tendues, avec  $\text{Med}(X) = \sup\{x : \mathbb{P}(X \leq x) \leq 1/2\}$  qui représente la médiane.*

Ceci permet de dire que les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 donnent un ordre de grandeur précis du déplacement effectué par la marche aléatoire branchante. Dans ce qui suit, on utilise la lettre  $C$  pour une constante positive arbitraire, qui peut dépendre de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On considère également que  $n \equiv 0 \pmod{4}$  pour fin de simplicité, en notant qu'il suffirait d'ajuster les preuves avec la fonction partie entière pour le cas général.

### 2.3. PROFIL CROISSANT DE VARIANCES

Dans cette section, on démontre le théorème 2.2.1. On aura besoin d'un lemme sur les fluctuations de la marche aléatoire inhomogène définie en (2.2.5).

### 2.3.1. Fluctuation d'une marche aléatoire inhomogène

On montre que la trajectoire d'une marche aléatoire inhomogène peut être décrite avec une certaine précision si l'on connaît son point d'arrivée au temps  $n$ . On définit les fonctions

$$s_{k,n}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} x, & \text{si } 0 \leq k \leq \frac{n}{2}, \\ \frac{\sigma_1^2 \frac{n}{2} + \sigma_2^2 \left(k - \frac{n}{2}\right)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} x, & \text{si } \frac{n}{2} \leq k \leq n, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

et

$$f_{k,n} = \begin{cases} c_f k^{2/3}, & \text{si } 0 \leq k \leq \frac{n}{2}, \\ c_f (n - k)^{2/3}, & \text{si } \frac{n}{2} \leq k \leq n, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

pour  $c_f$  une constante positive. On remarque que les fonctions  $s_{k,n}(x)$  sont en fait l'interpolation linéaire par morceaux de l'origine et d'un point d'arrivée, en passant par  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} x$  au temps  $\frac{n}{2}$ . Une marche aléatoire inhomogène est illustrée à la figure 2.2 avec les fonctions  $s_{k,n}(x) \pm f_{k,n}$  où  $x$  est le point d'arrivée de la marche aléatoire. On remarque que les fonctions  $s_{k,n}(x) \pm f_{k,n}$  forment une enveloppe dans laquelle la trajectoire de la marche est entièrement contenue.

Soit  $S_n(k)$  la marche aléatoire inhomogène partielle de 0 à  $k$  :

$$S_n(k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k X_i & k \leq \frac{n}{2}, \\ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} X_i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^k Y_i & \frac{n}{2} < k \leq n. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Le lemme suivant décrit une trajectoire typique d'une marche aléatoire inhomogène partant de 0 au temps 0 et se rendant à  $x$  au temps  $n$ . Elle suit la trajectoire  $s_{k,n}(x)$  avec fluctuations au plus  $f_{k,n}$ .

**Lemme 2.3.1.** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $n$  telle que*

$$\mathbb{P}(S_n(k) \in [s_{k,n}(x) - f_{k,n}, s_{k,n}(x) + f_{k,n}] \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n \mid S(n) = x) \geq C,$$

pour  $c_f$  fixe suffisamment grand dans la fonction  $f_{k,n}$ . Le choix de  $c_f$  sera détaillé dans la démonstration.

**Remarque 2.3.2.** *L'exposant 2/3 pour les fonctions  $f_{k,n}$  a été choisi arbitrairement. La preuve pourrait fonctionner avec un exposant  $1/2 + \epsilon$ , pour  $\epsilon > 0$ .*



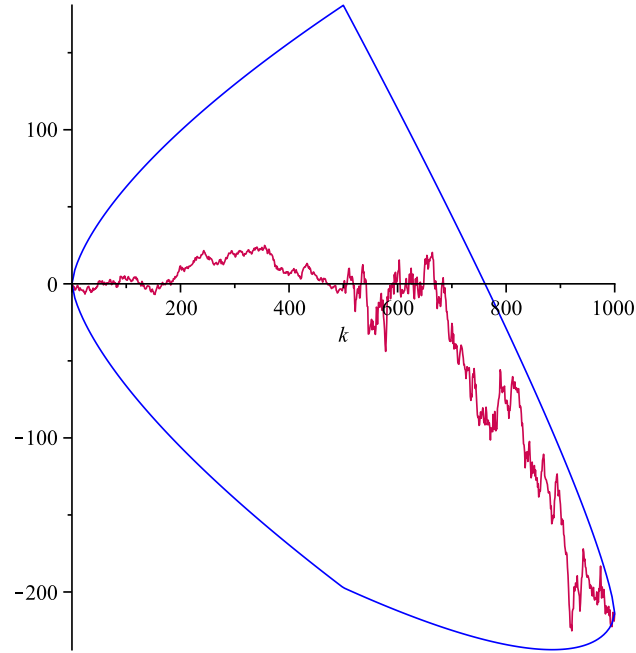


FIGURE 2.2. Une marche aléatoire inhomogène et son enveloppe.

Avant de démontrer ce lemme, on introduit le processus

$$\tilde{S}_n(k) = S_n(k) - s_{k,n}(S(n)). \quad (2.3.4)$$

On a la proposition suivante :

**Proposition 2.3.3.** *La marche aléatoire inhomogène  $S(n)$ ,  $n \geq 0$  et le processus  $\tilde{S}_n(k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , sont indépendants.*

DÉMONSTRATION. On commence par calculer la covariance entre les deux processus :

$$\text{Cov}(\tilde{S}_n(k), S(n)) = \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)S(n)) - \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)) \mathbb{E}(S(n)) = \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)S(n))$$

puisque  $\mathbb{E}(S(n)) = \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)) = 0$ . Regardons maintenant la situation pour le cas  $k \leq \frac{n}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(k) &:= S_n(k) - s_{k,n}(S(n)) \\ &= \sum_{i=1}^k X_i - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} X_i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n Y_i \right) \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}\right) \sum_{i=1}^k X_i - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \sum_{i=k+1}^{\frac{n}{2}} X_i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n Y_i \right). \quad (2.3.5)$$

Par indépendance des  $X_i, Y_i$ , on trouve qu'en prenant l'espérance du produit entre  $\tilde{S}_n(k)$  et  $S(n)$  il ne restera que les termes en  $X_i^2$  et ceux en  $Y_i^2$ . Avec le fait que  $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma_1^2$  et  $\mathbb{E}(Y_i^2) = \sigma_2^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{S}_n(k), S(n)) &= \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)S(n)) \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}\right) \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i^2) \\ &\quad - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \sum_{i=k+1}^{\frac{n}{2}} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \mathbb{E}(Y_i^2) \right) \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}\right) k \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \left(\frac{n}{2} - k\right) \sigma_1^2 + \left(\frac{n}{2}\right) \sigma_2^2 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour  $\frac{n}{2} < k \leq n$ , une décomposition semblable de  $\tilde{S}_n(k)$  nous donne

$$\tilde{S}_n(k) = \frac{\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} X_i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^k Y_i \right) - \left(1 - \frac{\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}\right) \sum_{i=k+1}^n Y_i.$$

En développant  $\tilde{S}_n(k)S(n)$  et en prenant l'espérance, puis en utilisant le fait que les  $X_i, Y_i$  sont indépendants, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{S}_n(k), S(n)) &= \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)S(n)) \\ &= \frac{\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^k \mathbb{E}(Y_i^2) \right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}\right) \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}(Y_i^2) \\ &= \frac{\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}} \left( \frac{n}{2} \sigma_1^2 + \left(k - \frac{n}{2}\right) \sigma_2^2 \right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}\right) (n-k) \sigma_2^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les deux processus étant gaussiens, ils sont indépendants.  $\square$

Voici maintenant la preuve du lemme sur les fluctuations :

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.3.1. En utilisant l'indépendance entre  $\tilde{S}_n(k)$  et  $S(n)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_n(k) \in [s_{k,n}(x) - f_{k,n}, s_{k,n}(x) + f_{k,n}] \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n \mid S(n) = x) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{S}_n(k) \in [-f_{k,n}, f_{k,n}] \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n \mid S(n) = x) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{S}_n(k) \in [-f_{k,n}, f_{k,n}] \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n). \end{aligned}$$

Le processus  $\tilde{S}_n(k)$  est gaussien avec moyenne 0. En utilisant la décomposition (2.3.5) pour  $k \leq \frac{n}{2}$ , on calcule sa variance. Pour simplifier l'expression, on note  $A = \frac{\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{n}{2}}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)^2) &= (1 - A)^2 k \sigma_1^2 + A^2 \left(\frac{n}{2} - k\right) \sigma_1^2 + A^2 \frac{n}{2} \sigma_2^2 \\ &= k \sigma_1^2 - 2k \sigma_1^2 A + \frac{n}{2} A^2 \sigma_1^2 + \frac{n}{2} A^2 \sigma_2^2 \\ &= k \sigma_1^2 \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Un calcul similaire mène à

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_n(k)^2) = (n - k) \sigma_1^2 \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2\sigma_1^2(n - k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}, \tag{2.3.7}$$

pour  $\frac{n}{2} < k \leq n$ . On cherche un minorant à

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_n(k) \in [-f_{k,n}, f_{k,n}] \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n).$$

On réécrit cette expression pour obtenir

$$1 - \mathbb{P}(|\tilde{S}_n(k)| > f_{k,n} \text{ pour un certain } 0 \leq k \leq n) \geq 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|\tilde{S}_n(k)| > f_{k,n}).$$

En utilisant l'estimé gaussien 1.4.2 avec les variances (2.3.6) et (2.3.7), ainsi que la symétrie de  $f_{k,n}$ , la quantité ci-dessus est au moins

$$1 - 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{c_0}{\sqrt{k}} e^{-\frac{f_{k,n}^2}{k} c_1} \geq 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_0}{\sqrt{k}} e^{-c_f^2 c_1 k^{1/3}} =: C, \tag{2.3.8}$$

où  $c_0, c_1$  sont des constantes qui dépendent des variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ . On peut s'assurer que  $C > 0$  en choisissant les  $c_f$  assez grands dans la construction de la fonction  $f_{k,n}$ . De plus, la somme est majorée par

$$\int_1^\infty \exp(-c_f^2 k^{1/3}) dk \rightarrow \frac{P(c_f)}{Q(c_f) \exp(c_f^2)},$$

où  $P(c_f), Q(c_f)$  sont des polynômes en  $c_f$ . Il découle de ceci que la somme converge vers 0 lorsque  $c_f \rightarrow \infty$  et ainsi,  $C$  converge vers 1.  $\square$

### 2.3.2. Démonstration du théorème 2.2.1

On a maintenant tous les outils nécessaires pour faire la preuve du théorème 2.2.1. Posons

$$a_n = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)n} - \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{4\sqrt{\log(2)}} \log(n).$$

Si on montre qu'il existe des constantes  $c_4, c_5 > 0$  telles que

$$\mathbb{P}\left(M_n^\dagger \in [a_n, a_n + y_0]\right) \geq \frac{c_4}{2c_5} \quad (2.3.9)$$

pour un certain  $y_0$ , alors le lemme 2.2.5 permettra d'obtenir  $M_n^\dagger = a_n + O_P(1)$ . En effet, un résultat intermédiaire permettra d'obtenir la tension de  $M_n^\dagger - a_n$ .

**Lemme 2.3.4.** *Sous l'hypothèse d'existence de constantes  $c_4, c_5$  telles que l'équation 2.3.9 est vraie pour un certain  $y_0$ , la suite  $Med(M_n^\dagger) - a_n$  converge vers  $M \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.*

**DÉMONSTRATION DU LEMME 2.3.4.** On suppose le contraire, et sans perte de généralité, on suppose  $\Delta_n = Med(M_n^\dagger) - a_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors pour le  $y_0$  spécifié ci-dessus, on a

$$\mathbb{P}\left(M_n^\dagger - a_n \in [0, y_0]\right) = \mathbb{P}\left(M_n^\dagger - Med(M_n^\dagger) + \Delta_n \in [0, y_0]\right) \quad (2.3.10)$$

$$= \mathbb{P}\left(M_n^\dagger - Med(M_n^\dagger) \in [-\Delta_n, y_0 - \Delta_n]\right). \quad (2.3.11)$$

Si  $\Delta_n \rightarrow +\infty$ , la probabilité (2.3.11) tend vers 0 puisque  $M_n^\dagger - Med(M_n^\dagger)$  est tendue (lemme 2.2.5) et que le compact  $[-\Delta_n, y_0 - \Delta_n]$  se déplace vers  $-\infty$ . Or on a l'existence de  $c_4, c_5 > 0$  par 2.3.9 tel que la probabilité du côté gauche de

l'équation (2.3.10) est strictement positive et ce, uniformément en  $n$ . On obtient donc une contradiction.  $\square$

Puisque  $M_n^\uparrow - a_n = M_n^\uparrow - \text{Med}(M_n^\uparrow) + \Delta_n$ , la tension de  $M_n^\uparrow - \text{Med}(M_n^\uparrow)$  combinée au lemme ci-dessus nous donne  $M_n^\uparrow - a_n = O_P(1)$ .

Pour montrer l'existence de  $c_4, c_5$ , on appliquera la méthode des premier et second moments à des ensembles bien choisis. On rappelle que pour une particule  $v \in \mathbb{D}_n$ , sa position au temps  $k$  est notée  $S_v(k)$  pour  $k \leq n$ . Rappelons aussi que  $S(n)$  est la marche aléatoire inhomogène à  $n$  pas définie en (2.2.5) et  $S_n(k)$ , les  $k$  premiers pas de cette marche. En fait, le processus,

$$(S_v(k), v \in \mathbb{D}_n, k \leq n)$$

a la loi d'une marche aléatoire inhomogène avec  $k$  pas définie en 2.3.3.

La preuve de l'existence de  $c_4$  et  $c_5$  est séparée en deux étapes, donnant un majorant et un minorant à la position du maximum attendue.

#### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2.1. Majorant :

Fixons  $N_{1,n} = \sum_{v \in \mathbb{D}_n} \mathbb{1}_{\{S_v(n) > a_n + y\}}$  le nombre de particules au temps  $n$  qui surpassent le niveau  $a_n + y$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . En moyenne, le nombre  $N_{1,n}$  est borné par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{1,n}) &= \sum_{v \in \mathbb{D}_n} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{S_v(n) > a_n + y\}}\right) \\ &= 2^n \mathbb{P}(S(n) \geq a_n + y) \\ &\leq 2^n \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}n}}{a_n + y} \exp\left(-\frac{(a_n + y)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}\right) \text{ par le corollaire 1.4.2} \\ &\leq 2^n \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}n}}{a_n + y} \exp(-n \log(2)) \exp\left(\frac{1}{2} \log(n)\right) \exp(-Cy) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\log(n)^2}{16n \log(2)}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}\right) \exp\left(\frac{\log(n)y}{2n\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)}}\right) \\ &\leq C \frac{n}{a_n + y} \exp(-c_3 y), \end{aligned}$$

avec  $C$  et  $c_3$  des constantes indépendantes de  $n$ . On rappelle ici le fait que  $S(n)$  est de loi  $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}n)$ , ce qui nous permet d'utiliser l'estimé gaussien. Avec les

inégalités

$$\exp\left(-\frac{\log(n)^2}{16n \log(2)}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}\right) \leq 1$$

et

$$\frac{1}{2n\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)}} - \frac{2\sqrt{\log(2)}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} < 0,$$

combiné à l'inégalité  $\log(n) \leq n$ , on obtient le terme  $e^{-c_3 y}$ . Puisque le terme  $a_n + y = O(n)$ , on obtient

$$\mathbb{E}(N_{1,n}) \leq c_2 e^{-c_3 y}.$$

Finalement, l'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbb{P}(M_n^\uparrow > a_n + y) = \mathbb{P}(N_{1,n} \geq 1) \leq \mathbb{E}(N_{1,n}) \leq c_2 e^{-c_3 y}. \quad (2.3.12)$$

En choisissant  $y$  assez grand, la probabilité ci-dessus peut être aussi petite que nécessaire, c'est-à-dire que la probabilité que le maximum d'une marche aléatoire branchante inhomogène soit plus grand que  $a_n + y$  pour une constante  $y$  quelconque est petite par rapport à cette constante.

### Minorant :

Pour obtenir le minorant, on utilisera le lemme du deuxième moment 1.4.6. On considère les marches qui sont à  $x \in I_n = [a_n, a_n + 1]$  au temps  $n$  tout en suivant les trajectoires  $s_{k,n}(x)$  définies en (2.3.1) avec les fluctuations bornées par  $f_{k,n}$  définies en (2.3.2). Au temps  $k$ , on pose  $I_{k,n}(x) = [s_{k,n}(x) - f_{k,n}, s_{k,n}(x) + f_{k,n}]$ , qui est l'enveloppe "admissible" pour  $S_n(k)$  étant donné  $S(n) = x$ . On note par

$$N_{2,n} = \sum_{v \in D_n} \mathbb{I}_{\{S_v(n) \in I_n, S_v(k) \in I_{k,n}(S_v(n)) \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n\}}$$

le nombre de particules respectant ces conditions. Selon le lemme 2.3.1, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{2,n}) &= 2^n \mathbb{P}(S(n) \in I_n, S_n(k) \in I_{k,n}(S(n)) \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n) \\ &= 2^n \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{S(n) \in I_n\}} \mathbb{P}(S_n(k) \in I_{k,n}(x) \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n \mid S(n) = x)\right) \\ &\geq 2^n C \mathbb{P}(S(n) \in I_n). \end{aligned}$$

L'espérance à la seconde ligne est prise par rapport à la densité de  $S(n)$ . Pour borner la quantité  $2^n \mathbb{P}(S(n) \in I_n)$ , on utilise les deux bornes du corollaire 1.4.2

pour obtenir

$$\begin{aligned}
2^n \mathbb{P}(S(n) \in I_n) &= 2^n (\mathbb{P}(S(n) \geq a_n) - \mathbb{P}(S(n) > a_n + 1)) \\
&\geq 2^n C \left( \frac{\sigma_n}{a_n} - \frac{\sigma_n^3}{a_n^3} \right) e^{-\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2}} - \frac{\sigma_n}{a_n + 1} e^{-\frac{(a_n+1)^2}{2\sigma_n}} \quad (2.3.13) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2n(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \sqrt{ne}^{-\frac{1}{16} \frac{\log(n)^2}{\log(2)n}}}{\sqrt{\log(2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \log(n)}{\sqrt{\log(2)}}} \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{n^2 \sqrt{(2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))^3} e^{-\frac{1}{16} \frac{\log(n)^2}{\log(2)n}}}{\left( \sqrt{\log(2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \log(n)}{\sqrt{\log(2)}} \right)^3} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2n(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \sqrt{ne}^{-\frac{1}{16} \frac{\log(n)^2}{\log(2)n}} n^{\frac{1}{2n} \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)}}}{\left( \sqrt{\log(2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \log(n)}{\sqrt{\log(2)}} + 1 \right) \left( e^{\frac{2\sqrt{\log(2)}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} + \frac{1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}} \right)}, \quad (2.3.14)
\end{aligned}$$

où  $\sigma_n^2 = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}{2}$ . Le premier terme converge vers  $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\log(2)}}$ . Le deuxième terme est d'ordre  $\frac{1}{n}$  et converge ainsi vers 0, alors que le troisième converge vers

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\log(2)} e^{\frac{2\log(2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}} < \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\log(2)}}.$$

Le tout converge donc vers

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\log(2)}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\log(2)} e^{\frac{2\log(2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}} > 0$$

et est donc éventuellement borné par une certaine constante  $c_4 > 0$ . On a ainsi

$$2^n \mathbb{P}(S(n) \in I_n) \geq c_4 > 0. \quad (2.3.15)$$

Il nous reste maintenant à borner le deuxième moment de  $N_{2,n}$ . Pour deux particules  $v_1, v_2 \in \mathbb{D}_k, 0 \leq k \leq n$ , on note par  $v_1 \wedge v_2$  leur parent. Pour calculer l'espérance de  $N_{2,n}^2$ , on prend la somme sur  $k$  de 0 à  $n$  et on considère toutes les paires de particules au temps  $n$  qui ont leur parent au temps  $k$ . De plus, pour

$0 \leq j \leq n$ , chacun des ancêtres  $v_1(j)$  (respectivement  $v_2(j)$ ) doit appartenir à  $I_{j,n}(S_{v_1})(n)$  (respectivement  $I_{j,n}(S_{v_2})(n)$ ). On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{2,n}^2) &= \mathbb{E} \left( \sum_{v_1, v_2 \in \mathbb{D}_n} \mathbb{1}_{\{S_{v_i}(n) \in I_n, S_{v_i}(j) \in I_{j,n}(S_{v_i}(n)) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n, i=1,2\}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{v_1, v_2 \in \mathbb{D}_n \\ v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{D}_k}} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{S_{v_i}(n) \in I_n, S_{v_i}(j) \in I_{j,n}(S_{v_i}(n)) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n, i=1,2\}} \right) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{v_1, v_2 \in \mathbb{D}_n \\ v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{D}_k}} \mathbb{P} \left( S_{v_1}(n) \in I_n, S_{v_1}(j) \in I_{j,n}(S_{v_1}(n)) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n, \right. \\ &\quad \left. S_{v_1 \wedge v_2}(k) \in I_{k,n}(S_{v_2}(n)), S_{v_2}(n) \in I_n \right) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{v_1, v_2 \in \mathbb{D}_n \\ v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{D}_k}} \mathbb{P} \left( S_{v_1}(n) \in I_n, S_{v_1}(j) \in I_{j,n}(S_{v_1}(n)) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n, \right. \\ &\quad \left. S_{v_2} - S_{v_1 \wedge v_2} \in [S_{v_2} - s_{k,n}(S_{v_2}) - f_{k,n}, S_{v_2} - s_{k,n}(S_{v_2}) + f_{k,n}], S_{v_2} \in I_n \right) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{v_1, v_2 \in \mathbb{D}_n \\ v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{D}_k}} \mathbb{P} (S_{v_1}(n) \in I_n, S_{v_1}(j) \in I_{j,n}(S_{v_1}(n)) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n) \\ &\quad \times \mathbb{P} (S_{v_2}(n) - S_{v_1 \wedge v_2}(k) \in [S_{v_2}(n) - s_{k,n}(S_{v_2}(n)) - f_{k,n}, \\ &\quad \quad S_{v_2}(n) - s_{k,n}(S_{v_2}(n)) + f_{k,n}], S_{v_2}(n) \in I_n). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

La dernière égalité découle de l'indépendance entre  $S_{v_2}(n) - S_{v_1 \wedge v_2}(k)$  et  $S_{v_1}(n)$ . L'inégalité en (2.3.17) découle du fait que, pour les ancêtres de la seconde particule  $v_2$ , on ne demande qu'à  $S_{v_1 \wedge v_2}(k)$  d'être sur la trajectoire  $s_{k,n}(S_{v_2}(n))$  alors qu'en (2.3.16), tous les ancêtres de  $v_2$  devaient être sur la trajectoire  $s_{k,n}(S_{v_2}(n))$ . Posons  $S_{v_2}(n) = x$ . Pour voir l'inégalité entre (2.3.17) et (2.3.18) il suffit de voir que

$$S_{v_2}(n) - S_{v_1 \wedge v_2}(k) \in [x - s_{k,n}(x) - f_{k,n}, x - s_{k,n}(x) + f_{k,n}]$$

si et seulement si  $-S_{v_1 \wedge v_2}(k) \in [-s_{k,n}(x) - f_{k,n}, -s_{k,n}(x) + f_{k,n}]$

si et seulement si  $S_{v_1 \wedge v_2}(k) \in I_{k,n}(x)$ .

Comme il y a  $2^n$  particules issues du temps 0 dont  $2^{n-k}$  issues du parent  $v_1 \wedge v_2$  au temps  $k$ , l'équation (2.3.19) peut être réécrite en passant au modèle des marches



aléatoires inhomogènes (avec  $x = S(n)$ ), transformant la somme intérieure en

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \mathbb{P}(S(n) \in I_n, S_n(j) \in I_{j,n}(x) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n) \\
& \quad \times \mathbb{P}(S(n) - S_n(k) \in [x - s_{k,n}(x) - f_{k,n}, x - s_{k,n}(x) + f_{k,n}], \\
& \quad \quad x \in I_n) \\
& = 2^n \mathbb{P}(S(n) \in I_n, S_n(j) \in I_{j,n}(x) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n) \\
& \quad \times \sum_{k=0}^n 2^{n-k} \mathbb{P}(S(n) - S_n(k) \in [x - s_{k,n}(x) - f_{k,n}, \\
& \quad \quad x - s_{k,n}(x) + f_{k,n}], x \in I_n) \\
& = \mathbb{E}(N_{2,n}) \sum_{k=0}^n 2^{n-k} \mathbb{P}(S(n) - S_n(k) \in [x - s_{k,n}(x) - f_{k,n}, \\
& \quad \quad x - s_{k,n}(x) + f_{k,n}], x \in I_n),
\end{aligned}$$

avec  $S(n)$  et  $S_n(k)$  définies respectivement en (2.2.5) et (2.3.3). On estime la probabilité restante selon que  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$  ou  $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ . Dans le premier cas, on a que  $S(n) - S_n(k)$  est de loi  $\mathcal{N}(0, \frac{n}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - k\sigma_1^2)$ , d'où

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S(n) - S_n(k) \in [x - s_{k,n}(x) - f_{k,n}, x - s_{k,n}(x) + f_{k,n}], x \in I_n) \\
& \leq 2f_{k,n} \frac{1}{\sqrt{2\pi((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\frac{n}{2} - k\sigma_1^2)}} \exp\left(-\frac{\left((1 - \frac{2\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n})a_n - f_{k,n}\right)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2}\right) \quad (2.3.20)
\end{aligned}$$

$$\leq 2^{-n + \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}k + o(k)}. \quad (2.3.21)$$

En effet, montrons en détail les deux dernières égalités. Après la première ligne, en utilisant la densité de la loi normale, on obtient

$$\int_{S(n) - s_{k,n}(S(n)) - f_{k,n}}^{S(n) - s_{k,n}(S(n)) + f_{k,n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_k^2}\right) dy,$$

où  $\sigma_k^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\frac{n}{2} - k\sigma_1^2$ . Puisque

$$y \in [S(n) - s_{k,n}(S(n)) - f_{k,n}, S(n) - s_{k,n}(S(n)) + f_{k,n}],$$

que

$$S(n) \in I_n = \left[ \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)n} - \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{4 \log(2)} \log(n), \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \log(2)n} - \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{4 \log(2)} \log(n) + 1 \right]$$

et que  $\exp(-y^2)$  est décroissante pour  $y$  positif, on obtient en substituant  $y$  et  $S(n)$  l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{\left(\left(1 - \frac{2\sigma_1^2 k}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}\right)a_n - f_{k,n}\right)^2}{2\sigma_k^2}\right) \int_{S(n) - s_{k,n}(S(n)) - f_{k,n}}^{S(n) - s_{k,n}(S(n)) + f_{k,n}} dy.$$

L'intégrale nous donne le terme  $2f_{k,n}$  et on retrouve l'équation (2.3.20). Pour obtenir (2.3.21), on développe l'intérieur de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} & - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \log(2) + \frac{2f_{k,n}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \sqrt{\log(2)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{2f_{k,n}^2 n(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2s_1^2 \sigma_2^2 \log(n)n^2 - n^2 \sigma_2^4 \log(n) + kn \log(n)(4\sigma_1^4 + 4\sigma_1^2 \sigma_2^2)}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n} \\ & - \frac{1}{2} \frac{4\sigma_1^4 \log(n)k^2}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n} + \frac{\sigma_1^2 k f_{k,n} \log(n)}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2) \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} n \sqrt{\log(2)}} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \log(n) f_{k,n}}{\sqrt{\log(2)}((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)} - \frac{1}{16} \frac{\log(n)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\log(2)((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)} \\ & + \frac{1}{4} \frac{\log(n)^2 \sigma_1^2 k}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2) \log(2)n} - \frac{1}{4} \frac{\log(n)^2 \sigma_1^4 k^2}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n^2 \log(2)}. \end{aligned}$$

On obtient la borne de l'équation (2.3.21) en utilisant les faits suivants :

- D'abord, on a

$$-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \log(2) = 2^{-n + \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} k},$$

ce qui donne le terme principal de l'équation (2.3.21).

- Les exponentielles

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{4\sigma_1^4 \log(n)k^2}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n}\right)$$

et

$$\exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\log(n)^2 \sigma_1^4 k^2}{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n - 2k\sigma_1^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n^2 \log(2)}\right)$$

sont majorées par 1.

- Le reste des termes à l'intérieur de l'exponentielle est  $o(k)$ .

Finalement, puisque

$$2f_{k,n} \frac{1}{\sqrt{2\pi((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\frac{n}{2} - k\sigma_1^2)}} = O(k^{1/6}) \leq 2^{o(k)},$$

on obtient l'équation (2.3.21).

Pour  $\frac{n}{2} < k \leq n$ , on a que  $S(n) - S_n(k)$  est de loi  $\mathcal{N}(0, (n-k)\sigma_2^2)$ , et d'une manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S(n) - S_n(k) \in [x - s_{k,n}(x) - f_{k,n}, x - s_{k,n}(x) + f_{k,n}], S(n) \in I_n) \\ & \leq 2f_{k,n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-k)\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{2\sigma_2^2(n-k)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)n} a_n - f_{k,n}\right)^2}{2(n-k)\sigma_2^2}\right) \\ & \leq 2^{-\frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(n-k) + o(n-k)}. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

En sommant (2.3.21) et (2.3.22), on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{2,n}^2) & \leq \mathbb{E}(N_{2,n}) \left( \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 2^{n-k} 2^{-n + \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} k + o(k)} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n 2^{n-k} 2^{-\frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(n-k) + o(n-k)} \right) \\ & = \mathbb{E}(N_{2,n}) \left( \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} k + o(k)} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n 2^{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(n-k) + o(n-k)} \right) \\ & \leq \mathbb{E}(N_{2,n}) 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} k + o(k)} \\ & \leq c_5 \mathbb{E}(N_{2,n}) \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

où

$$c_5 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} k + o(k)}$$

puisque les séries convergent. Remarquons que c'est ici que le profil croissant fait la différence. En effet,  $c_5 < +\infty$  car  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ . En utilisant le fait que

$$\mathbb{E}(N_{2,n}) = \mathbb{E}(N_{2,n} \mathbb{I}_{\{N_{2,n}=0\}}) + \mathbb{E}(N_{2,n} \mathbb{I}_{\{N_{2,n}>0\}}) = \mathbb{E}(N_{2,n} \mathbb{I}_{\{N_{2,n}>0\}}),$$

on obtient par le lemme du deuxième moment 1.4.6 que

$$\mathbb{P}(M_n^\dagger \geq a_n) \geq \mathbb{P}(N_{2,n} > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(N_{2,n})^2}{\mathbb{E}(N_{2,n}^2)} \geq c_4/c_5 > 0. \quad (2.3.24)$$

## 2.4. PROFIL DÉCROISSANT DE VARIANCES

Dans cette section, on démontre le théorème 2.2.2. Une fois de plus, on divise la preuve en deux parties, l'une pour un minorant et l'autre pour un majorant. Avant de passer à la preuve, on définit le pont brownien discret et on cite un résultat qui sera utilisé.

### 2.4.1. Pont brownien discret : un estimé

Ce résultat est l'analogie discret de la proposition 1' dans [Br1]. On introduit le processus  $B_k - \frac{k}{n}B_n$ , le pont brownien discret, où  $B_n$  est une marche aléatoire avec accroissements distribués selon une loi normale standard.

**Lemme 2.4.1.** *Soit*

$$L(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, n, \\ 100 \log(k) & \text{si } k = 1, \dots, \frac{n}{2}, \\ 100 \log(n - k) & \text{si } k = \frac{n}{2}, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $y > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( B_k - \frac{k}{n}B_n \leq L(k) + y \text{ pour } 0 \leq k \leq n \right) \leq \frac{C(1+y)^2}{n}.$$

La preuve est assez technique et sera omise du mémoire. Elle s'adapte de celle du cas continu dans [Br1]. L'aspect important du résultat est que la probabilité que le pont brownien (discret dans ce cas) reste en dessous de la courbe  $L(k)$  est inversement proportionnelle au temps.

Notons que le choix du facteur 100 devant le log de la fonction  $L(k)$  est arbitraire et choisi pour être approprié dans la preuve qui suit.

### 2.4.2. Preuve du théorème 2.2.2

On peut maintenant passer à la preuve du théorème pour le profil décroissant de variances. Pour obtenir un minorant, nous allons pouvoir utiliser le résultat homogène (2.2.4) ce qui nous évitera de répéter l'argument du second moment.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2.2. **Minorant :**

En regardant sur chaque moitié de l'intervalle de temps, la formule (2.2.4) montre qu'il existe  $y_i \in \mathbb{R}$  tel que, pour une marche aléatoire branchante au temps  $\frac{n}{2}$  avec variance  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$\mathbb{P} \left( M_{\frac{n}{2}} > \sqrt{2 \log(2)} \sigma_i \frac{n}{2} - \frac{3\sigma_i}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log \frac{n}{2} + y_i \right) \geq \frac{1}{2}.$$

On considère une marche aléatoire branchante qui commence au temps  $\frac{n}{2}$  avec une particule dont la position est supérieure à  $\sqrt{2 \log(2)} \sigma_1 \frac{n}{2} - \frac{3\sigma_1}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log \frac{n}{2} + y_1$ . En appliquant l'inégalité ci-dessus sur chacune des moitiés de temps, il découle que

$$\mathbb{P} \left( M_n^\downarrow > \sqrt{2 \log(2)} (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{n}{2} - \frac{3(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log \frac{n}{2} + y_1 + y_2 \right) \geq \frac{1}{4}.$$

**Majorant :**

On se définit une courbe linéaire par morceaux qui va de 0 à

$$\frac{\sqrt{2 \log(2)} (\sigma_1 + \sigma_2)}{2} n - \frac{3(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log(n)$$

de la façon suivante : pour  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ , on a

$$G(k) = \frac{k}{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{2 \log(2)} \sigma_1 \frac{n}{2} - \frac{3\sigma_1}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log \left( \frac{n}{2} \right) \right);$$

et pour  $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n$ ,

$$G(k) = G\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{k - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{2 \log(2)} \sigma_2 \frac{n}{2} - \frac{3\sigma_2}{2\sqrt{2 \log(2)}} \log \left( \frac{n}{2} \right) \right).$$

Remarquons que pour  $t$  suffisamment grand, on a

$$\frac{s}{t} \log(t) \leq \log(s) \text{ pour } \exp(1) \leq s. \quad (2.4.1)$$

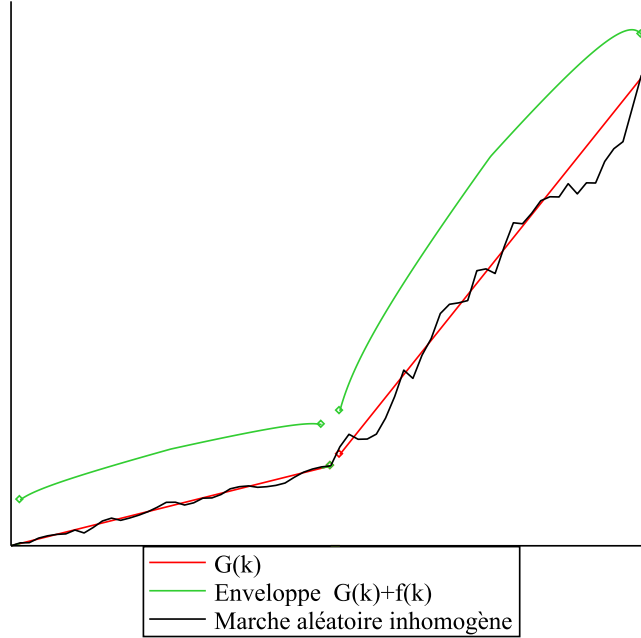


FIGURE 2.3. Une marche aléatoire inhomogène suivant  $G(k)$  et l'enveloppe  $f(k) + G(k)$ .

On définit également

$$f(k) = \begin{cases} y, & \text{si } k = 0, \frac{n}{2}, n, \\ y + \frac{5\sigma_1}{2\sqrt{2\log(2)}} \log(k), & \text{si } 1 \leq k \leq n/4, \\ y + \frac{5\sigma_1}{2\sqrt{2\log(2)}} \log(\frac{n}{2} - k), & \text{si } n/4 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1, \\ y + \frac{5\sigma_2}{2\sqrt{2\log(2)}} \log(k - \frac{n}{2}), & \text{si } \frac{n}{2} + 1 \leq k \leq 3n/4, \\ y + \frac{5\sigma_2}{2\sqrt{2\log(2)}} \log(n - k), & \text{si } 3n/4 \leq k \leq n - 1. \end{cases}$$

La fonction  $f(k)$  joue le rôle d'une enveloppe au-delà de laquelle une trajectoire suivant  $G(k)$  n'ira qu'avec une faible probabilité.

On cherche un majorant à la quantité

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( M_n^\downarrow > \sqrt{2\log(2)}(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{n}{2} - \frac{3(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\sqrt{2\log(2)}} \log \frac{n}{2} + y \right) \\ = \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n : S_v(n) > G(n) + y). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Pour chaque  $v \in \mathbb{D}_n$ , on définit le temps d'arrêt

$$\tau_v = \inf\{k : S_v(k) > G(k) + f(k)\};$$

de cette façon, l'équation (2.4.2) revient à borner

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k). \quad (2.4.3)$$

On sépare la somme en quatre parties, sur les sous-intervalles  $[1, n/4]$ ,  $(n/4, \frac{n}{2}]$ ,  $(\frac{n}{2}, 3n/4]$  et  $(3n/4, n]$ . Ce sont les mêmes sous-intervalles qui définissent les différentes parties de  $f(k)$ . Le but est de rendre chaque sous-somme petite en contrôlant les fluctuations du maximum sur la trajectoire. Comme ces fluctuations sont plus faciles à contrôler à certains endroits, la décomposition aide le calcul. En fait, puisque le pont brownien est "attaché" aux extrémités, c'est à son centre que les fluctuations sont plus grandes. Pour la deuxième moitié, il faut également retenir l'information sur le parcours du pont aux temps précédents.

(1) Quand  $1 \leq k \leq n/4$ , l'inégalité de Markov nous donne

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \\ & \leq \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k)) \\ & = \mathbb{P}(\#\{v \in D_k : S_v(k) > G(k) + f(k)\} \geq 1) \\ & \leq \mathbb{E} \left( \sum_{v \in \mathbb{D}_k} \mathbb{I}_{\{S_v(k) > G(k) + f(k)\}} \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimé gaussien (corollaire 1.4.2) avec la variance  $k\sigma_1^2$  et l'inégalité logarithmique (2.4.1), on borne l'espérance ci-dessus par

$$\begin{aligned} \frac{C2^k}{\sqrt{k}} \exp - \frac{(G(k) + f(k))^2}{2k\sigma_1^2} & \leq \frac{C2^k}{\sqrt{k}} e^{\left( - \frac{\left( \frac{\sqrt{2 \log(2)} \sigma_1 k + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(k) + y \right)^2}{2k\sigma_1^2} \right)} \\ & \leq Ck^{-3/2} \exp - \frac{\sqrt{2 \log(2)} y}{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Pour obtenir la dernière inégalité, remarquons qu'en développant le carré dans l'exponentielle, tous les termes sont négatifs. On garde le terme  $-k \log(2)$  pour éliminer le  $2^k$  et le terme  $-\log(k)$  pour obtenir le  $k^{-3/2}$ . On garde le terme en  $y$  qui est indépendant de  $k$  et on borne le reste par  $\exp(0) = 1$ . Pour obtenir la borne finale, on somme sur  $k \in [1, n/4]$ , ce

qui donne

$$\sum_{k=1}^{n/4} \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n \text{ t.q. } S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \leq C e^{-\frac{\sqrt{2 \log(2)} y}{\sigma_1}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}. \quad (2.4.5)$$

On rend le côté droit ci-dessus aussi petit que voulu en choisissant  $y$  assez grand.

(2) Pour  $n/4 < k \leq \frac{n}{2}$ , on retrouve par l'inégalité de Markov 1.4.4

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \\ & \leq \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k) \\ & \quad \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k) \\ & \leq \mathbb{P}(\#\{v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k) \\ & \quad \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k\} \geq 1) \\ & \leq \mathbb{E} \left( \sum_{v \in \mathbb{D}_k} \mathbb{1}_{\{S_v(n) > G(k) + f(k) \text{ et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k\}} \right). \end{aligned}$$

L'espérance ci-dessus vaut

$$\begin{aligned} & 2^k \mathbb{P}(S(k) > G(k) + f(k) \text{ et } S(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k) \\ & = 2^k \mathbb{P} \left( S(k) > G(k) + f(k) \text{ et } S(i) \leq \frac{i}{k} G(k) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k \right) \\ & \leq 2^k \mathbb{P} \left( S(k) > G(k) + f(k) \text{ et } S(i) \leq \frac{i}{k} (S(k) - f(k)) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k \right) \\ & \leq 2^k \mathbb{P} \left( S(k) > G(k) + f(k) \right. \\ & \quad \left. \text{et } \frac{1}{\sigma_1} (S(i) - \frac{i}{k} S(k)) \leq \frac{1}{\sigma_1} (f(i) - \frac{i}{k} f(k)) \text{ pour } 1 \leq i < k \right). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Le processus  $\frac{1}{\sigma_1} (S(i) - \frac{i}{k} S(k))$  est un pont brownien discret et est indépendant de  $S(k)$ . On peut ainsi réécrire (2.4.6) comme étant

$$2^k \mathbb{P}(S(k) > G(k) + f(k)) \mathbb{P} \left( \frac{1}{\sigma_1} \left( S(i) - \frac{i}{k} S(k) \right) \leq \frac{1}{\sigma_1} \left( f(i) - \frac{i}{k} f(k) \right) \right).$$

On estime la première probabilité de la même manière que l'équation (2.4.4), ce qui nous donne

$$\mathbb{P}(S(k) > G(k) + f(k)) \leq C 2^{-k} k(n-k)^{-5/2} e^{-\frac{\sqrt{2 \log(2)} y}{\sigma_1}}. \quad (2.4.7)$$



Pour estimer la deuxième probabilité, on se donne un majorant sur la quantité  $\frac{1}{\sigma_1}(f(i) - \frac{i}{k}f(k))$ . Puisque la probabilité met en jeu des valeurs de  $i$  entre 1 et  $k \in [n/4, \frac{n}{2}]$ , on doit borner selon  $i \leq n/4$  ou  $i \geq n/4$ . Pour  $i \leq k/2 \leq n/4$ , on élimine simplement le terme négatif  $-\frac{1}{\sigma_1}\frac{i}{k}$ , alors que pour  $k/2 \leq i < k$ , on a Quelques manipulations algébriques permettent d'arriver à

$$\frac{\frac{n}{2} - i}{\frac{n}{2} - k} \leq k - i$$

lorsque  $i \leq \frac{-nk+2k^2+n}{-n+2k+2}$ , ce qui est le cas puisque  $\frac{-nk+2k^2+n}{-n+2k+2} \geq k > i$  lorsque  $k \leq \frac{n}{2}$ . Ces inégalités permettent d'obtenir

$$\log\left(\frac{n}{2} - i\right) - \log\left(\frac{n}{2} - k\right) \leq \log(k - i).$$

Finalement, le fait que  $\frac{n}{4} \leq k$  permet d'obtenir  $\log\left(\frac{n}{2} - k\right) \leq \log(k)$  et l'inégalité logarithmique (2.4.1) donne

$$\frac{1}{\sigma_1}(f(i) - \frac{i}{k}f(k)) \leq 100 \log(k - i) + \frac{y}{\sigma_1}. \quad (2.4.8)$$

En appliquant le lemme 2.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_1}(S_i - \frac{i}{k}S(k)) \leq \frac{1}{\sigma_1}(f(i) - \frac{i}{k}f(k))\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_1}(S_i - \frac{i}{k}S(k)) \leq 100 \log(i) + \frac{y}{\sigma_1} \text{ pour } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}, \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\sigma_1}(S_i - \frac{i}{k}S(k)) \leq 100 \log(k - i) + \frac{y}{\sigma_1} \text{ pour } k/2 \leq i \leq k\right) \\ & \leq C(1 + y)^2/k. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

La combinaison de (2.4.6),(2.4.7) et (2.4.9) nous permet de conclure que

$$\sum_{k=n/4}^{\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\exists v \in D_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \leq C \left(1 + \frac{y}{\sigma_1}\right)^2 e^{-\frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_1}y} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2}. \quad (2.4.10)$$

On rend cette dernière équation aussi petite que nécessaire en prenant  $y$  assez grand.

(3) Pour  $\frac{n}{2} \leq k \leq 3n/4$ , on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\exists v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k) \right. \\
& \quad \left. \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i \leq k\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\exists v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k) \right. \\
& \quad \left. \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < \frac{n}{2}\right) \\
& = \mathbb{P}\left(\#\{v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k) \right. \\
& \quad \left. \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < \frac{n}{2}\} \geq 1\right) \\
& \leq \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{D}_k} \mathbb{1}_{\{S_v(n) > G(k) + f(k) \text{ et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < \frac{n}{2}\}}\right).
\end{aligned}$$

Pour évaluer cette espérance, on conditionne sur la position au temps  $\frac{n}{2}$  d'une particule  $v \in \mathbb{D}_k : \{S_v(\frac{n}{2}) = C(\frac{n}{2}) + x\}$ . On recentre, on utilise l'indépendance entre le pont et la marche et on utilise la propriété de Markov. Comme il y a  $2^k$  particules au temps  $k$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& 2^k \int_{-\infty}^y \mathbb{P}\left(S'_{k-\frac{n}{2}} > G(k) + f(k) - C\left(\frac{n}{2}\right) - x\right) \\
& \times \mathbb{P}\left(S_i - \frac{i}{\left(\frac{n}{2}\right)} S_{\frac{n}{2}} \leq f(i) - \frac{i}{\left(\frac{n}{2}\right)} x \text{ pour } 1 \leq i < \frac{n}{2}\right) \quad (2.4.11) \\
& \quad \times \mu_{\sigma_1^2 \frac{n}{2}}\left(C\left(\frac{n}{2}\right) + x\right) dx,
\end{aligned}$$

où  $S$  et  $S'$  sont des marches aléatoires avant et après  $\frac{n}{2}$  respectivement, (avec variance appropriée) et  $\mu_s$  est la densité gaussienne de moyenne 0 et de variance  $s$ . On estime maintenant chacun des trois facteurs qui apparaissent dans l'intégrale. On a déjà borné un terme similaire au premier pour obtenir (2.4.4) et on retrouve ici

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(S'_{k-\frac{n}{2}} > G(k) - G\left(\frac{n}{2}\right) + f(k) - x\right) \leq \\
& C 2^{-(k-\frac{n}{2})} \left(k - \frac{n}{2}\right)^{-3/2} e^{-\frac{\sqrt{2 \log(2)}}{\sigma_2}(y-x)}.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est quant à lui similaire à (2.4.9) et on obtient

$$\mathbb{P}\left(S_i - \frac{i}{\binom{n}{2}} S_{\frac{n}{2}} \leq f(i) - \frac{i}{\binom{n}{2}} x \text{ pour } 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\right) \leq C(1 + 2y - x)^2/n.$$

Finalement, la troisième quantité est une densité gaussienne, et donc

$$\begin{aligned} \mu_{\sigma_1^2 \frac{n}{2}}\left(C \binom{n}{2} + x\right) &= \frac{C}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\left(G\left(\frac{n}{2}\right) + x\right)^2}{n\sigma_1^2}\right) \\ &= \frac{C}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{n}{2} \log(2) + \frac{3}{2} \log(n) - \frac{x\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_1}\right) \\ &\quad + x \left(\frac{3\sqrt{2}\log(n)}{2\sigma_1\sqrt{\log(2)}} - \frac{3\sqrt{2\log(2)}}{2n\sigma_1} - \frac{x}{n\sigma_1^2}\right) \\ &\quad + \frac{9\log(n)}{4n} - \frac{3\log(2)}{2} - \frac{9\log(2)}{8n} - \frac{9\log(n)^2}{8n\log(2)} \\ &\leq C2^{-\frac{n}{2}} n e^{-\frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_1} x}. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Pour obtenir l'inégalité, le premier terme de l'exponentielle donne le  $2^{-\frac{n}{2}}$ , le second combiné au  $1/\sqrt{n}$  devant l'exponentielle donne le terme en  $n$  et le troisième terme est l'exponentielle de la dernière ligne. L'autre terme en  $x$  devient éventuellement négatif avec la croissance de  $x$ . Comme on choisira  $y > x$  aussi grand que voulu, on borne l'exponentielle de ce terme, ainsi que des autres termes négatifs par 1. Finalement, le terme  $e^{9\log(n)/(4n)}$  est borné par  $e^{9/(4e)}$ , donnant ainsi (2.4.12).

Ainsi l'intégrale en (2.4.11) est bornée par

$$\begin{aligned} C \left(k - \frac{n}{2}\right)^{-3/2} e^{-\frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_2} y} \int_{-\infty}^y (1 + 2y - x)^2 \exp\left(\frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_2} - \frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_1}\right) x dx \\ = C(5 + 4y + y^2)^2 e^{-\frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_1} y} \left(k - \frac{n}{2}\right)^{-3/2}, \end{aligned}$$

obtenu en intégrant. En sommant, on obtient

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{3n/4} \mathbb{P}(\exists v \in D_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \leq C(5 + 4y + y^2)^2 e^{-\frac{\sqrt{2\log(2)}}{\sigma_1} y} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}. \tag{2.4.13}$$

(4) Enfin, lorsque  $3n/4 < k \leq n$ , on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\exists v \in \mathbb{D}_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\exists v \in \mathbb{D}_k : S_v(k) > G(k) + f(k) \right. \\
& \quad \left. \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i \leq k\right) \\
& = \mathbb{P}\left(\#\{v \in \mathbb{D}_k : S_v(n) > G(k) + f(k) \right. \\
& \quad \left. \text{et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k\} \geq 1\right) \\
& \leq \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{D}_k} \mathbb{I}_{\{S_v(k) > G(k) + f(k), \text{ et } S_v(i) \leq M(i) + f(i) \text{ pour } 1 \leq i < k\}}\right).
\end{aligned}$$

Comme pour l'espérance précédente, on conditionne sur la position au temps  $\frac{n}{2}$  à l'aide de l'événement  $\{S_{v(\frac{n}{2})} = G\left(\frac{n}{2}\right) + x\}$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
& 2^k \int_{-\infty}^y \mathbb{P}\left(S'_{k-\frac{n}{2}} > G(k) - G\left(\frac{n}{2}\right) + f(k) - x \right. \\
& \quad \left. \text{et } S'_i < M(i) - G\left(\frac{n}{2}\right) + f(i) - x \text{ pour } \frac{n}{2} < i \leq k\right) \\
& \quad \times \mathbb{P}\left(S_i - \frac{i}{n} S_{\frac{n}{2}} \leq f(i) - \frac{i}{k} x \text{ pour } 1 \leq i < \frac{n}{2}\right) \times \mu_{\sigma_1^2 \frac{n}{2}}(G\left(\frac{n}{2}\right) + x) dx.
\end{aligned}$$

Les deuxième et troisième probabilités sont déjà estimées dans les parties précédentes, et de façon semblable à (2.4.4), on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(S'_{k-\frac{n}{2}} > G(k) - G\left(\frac{n}{2}\right) + f(k) - x \right. \\
& \quad \left. \text{et } S'_i < M(i) - G\left(\frac{n}{2}\right) + f(i) - x \text{ pour } \frac{n}{2} < i \leq k\right) \\
& \leq C(1 + 2y - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2 \log(2)}}{\sigma_2}(2y-x)} (n - k)^{-5/2}.
\end{aligned}$$

De la même manière que pour l'intégrale précédente, on obtient

$$\sum_{3n/4}^n \mathbb{P}(\exists v \in D_n : S_v(n) > G(n) + y, \tau_v = k) \leq C(5 + 4y + y^2)^2 e^{-\frac{\sqrt{2 \log(2)}}{\sigma_1} 2y} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2}. \quad (2.4.14)$$

On rend cette dernière aussi petite que nécessaire en prenant  $y$  assez grand.

En sommant les estimés (2.4.5), (2.4.10), (2.4.13) et (2.4.14), on obtient (2.4.3) et donc par le fait même, (2.4.2). Ceci termine la preuve du théorème 2.2.2.  $\square$

## 2.5. GÉNÉRALISATION

À partir des deux théorèmes démontrés dans ce chapitre, on peut donner des généralisations immédiates pour le cas d'un nombre fini quelconque de variances monotones. Pour  $k \geq 2$  fixé, on considère un ensemble de variances  $\{\sigma_i^2 > 0, i = 1, \dots, k\}$  ainsi qu'un ensemble  $\{t_i > 0 : \sum_{i=1}^k t_i = 1\}$  dénotant les proportions du temps où les variances  $\sigma_i^2$  sont actives. On considère toujours la marche aléatoire branchante binaire jusqu'au temps  $n$ , avec les accroissements sur les intervalles  $[\sum_{i=1}^{j-1} t_i n, \sum_{i=1}^j t_i n)$  étant distribués comme une loi normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma_j^2$ . Lorsque  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \dots < \sigma_k^2$ , un argument similaire à la preuve du théorème 2.2.1 nous dit que le maximum au temps  $n$  se comporte asymptotiquement comme le maximum de marches aléatoires indépendantes avec variance effective  $\sum_{i=1}^k t_i \sigma_i^2$ , qui est

$$\sqrt{2 \log(2) \sum_{i=1}^k t_i \sigma_i^2} n - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^k t_i \sigma_i^2}{\sqrt{2 \log(2)}} \log(n) + O_P(1).$$

Si par contre  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \dots > \sigma_k^2$ , un argument similaire à la preuve du théorème 2.2.2 nous dit que le maximum au temps  $n$  se comporte asymptotiquement comme le sous-maximum, qui est

$$\sqrt{2 \log(2)} \left( \sum_{i=1}^k t_i \sigma_i^2 \right) n - \frac{3}{2\sqrt{2 \log(2)}} \left( \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \right) \log(n) + O_P(1).$$

Dans le cas de profil de variances autre que monotone, les résultats ne sont pas connus et sont sujets à plus de recherche.

# Chapitre 3

---

## TEMPS DE BRANCHEMENT POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN BRANCHANT HOMOGENÈNE

Les résultats de ce chapitre sont basés sur l'article [ABK]. Ils serviront de piliers pour la construction des nouveaux résultats du chapitre 4. Le but de ce chapitre est de caractériser avec une certaine précision les trajectoires des particules qui sont près du maximum dans un mouvement brownien branchant en définissant des "enveloppes" dans lesquelles les trajectoires se retrouvent avec grande probabilité. Avec la connaissance de ces enveloppes, on montre que le parent de deux particules extrêmes au temps  $n$  se situe soit près de la génération 0 (la racine), soit près de la génération  $n$ .

### 3.1. MOTIVATION

On réfère à la section correspondante du chapitre 1 pour une définition du mouvement brownien branchant. Le problème de la position du maximum au temps  $t$  a été résolu par Bramson à l'aide d'une combinaison d'équations aux dérivées partielles et d'arguments probabilistes dans [Br1], théorème 1.

**Théorème 3.1.1** (Théorème 1 dans [Br1]). *Soit*

$$M(t) = \max_{v \in \mathbb{D}_t} x_v(t)$$

la position du maximum au temps  $t$  et  $m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t)$ . Alors

$$M(t) = m(t) + O_P(1). \tag{3.1.1}$$

Contrairement à un modèle de mouvements browniens indépendants, il y a corrélation entre les particules. Cette corrélation est exprimée en termes de la distance généalogique : Soient  $u, v \in \mathbb{D}_t$ , alors sous le mécanisme de branchement décrit plus haut, on a

$$\mathbb{E}(x_u(t)x_v(t)) = Q_t(u, v), \quad (3.1.2)$$

où  $Q_t(u, v) = \sup\{s \leq t : x_u(s') = x_v(s'), \forall 0 \leq s' \leq s\}$  est le temps de branchement des particules  $u$  et  $v$ . Pour obtenir (3.1.2), il suffit de réécrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_u(t)x_v(t)) &= \mathbb{E}\left(x_u(t)x_v(t)\mathbb{I}_{\{s \leq Q_t(u,v)\}}\right) + \mathbb{E}\left(x_u(t)x_v(t)\mathbb{I}_{\{s > Q_t(u,v)\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(x_u^2(Q_t(u, v))\right) + \mathbb{E}\left(x_u(t - Q_t(u, v))\right)\mathbb{E}\left(x_v(t - Q_t(u, v))\right) \\ &= Q_t(u, v) + 0. \end{aligned}$$

Rappelons qu'avant d'avoir branché,  $x_u$  et  $x_v$  sont le même processus, et qu'à partir du temps de branchement  $Q_t(u, v)$ , ils poursuivent de façon indépendante un mouvement brownien branchant sur l'intervalle  $[Q_t(u, v), t]$ . On réfère à la section 1.3 pour la définition détaillée du mouvement brownien branchant.

## 3.2. RÉSULTATS

On énonce les résultats principaux du chapitre dans cette section. On réfère à l'article [ABK] pour les preuves des théorèmes 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5, alors que la preuve du théorème 3.2.1 sera faite dans la section 3.4. Ces résultats sont divisés en deux parties, le résultat principal sur les temps de branchement et les résultats sur la localisation des trajectoires des particules extrêmes, définies ci-dessous.

### 3.2.1. Temps de branchement

Soit  $D \subset \mathbb{R}$  un compact et soit  $\mathbb{D}_t(D) = \{u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in m(t) + D\}$  l'ensemble des particules extrêmes. Le résultat sur le temps de branchement est **Théorème 3.2.1** (Théorème 2.1 dans [ABK]). *Pour un compact  $D$  quelconque, on a*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 3r} \mathbb{P}(\exists u, v \in \mathbb{D}_t(D) : Q_t(u, v) \in (r, t - r)) = 0.$$

Les particules extrêmes proviennent donc d'un parent qui vit soit "très tôt", dans l'intervalle  $(0, r)$ , soit "très tard", dans l'intervalle  $(t - r, r)$ .

**Remarque 3.2.2.** *Le fait que le parent de deux particules extrêmes vit soit dans l'intervalle  $(0, r)$  soit dans l'intervalle  $(t - r, r)$  est une conséquence immédiate de la nature des branchements distribués selon une loi exponentielle. En effet, la particule initiale se divisera en plusieurs particules relativement tôt. Ces nouvelles particules deviennent à leur tour des mouvements browniens branchants. Leur maximum respectif sera ainsi près de  $m(t)$ , nous donnant l'existence de paires de particules ayant branchées au tout début. D'un autre côté, une particule extrême  $u$  au temps  $t$  provient d'une autre particule  $w$  ayant branchée en un temps distribué au plus comme une exponentielle de paramètre 1 du temps  $t$ . Les autres descendants de  $w$  et  $u$  étant indépendants et identiquement distribués, il y en aura qui se rendront près de  $m(t)$ , nous donnant les branchements vers la fin. Le fait surprenant du théorème 3.2.1 est que ce sont les seules possibilités.*

### 3.2.2. Localisation des trajectoires extrêmes

Pour énoncer les prochains résultats, on doit introduire certains éléments de notation. Pour  $\gamma > 0$ , on introduit

$$f_{t,\gamma}(s) = \begin{cases} s^\gamma, & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ (t-s)^\gamma, & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq t. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

L'enveloppe supérieure au temps  $t$ , notée par  $U_{t,\gamma}(s)$  est définie par

$$U_{t,\gamma}(s) = \frac{s}{t}m(t) + f_{t,\gamma}(s). \quad (3.2.2)$$

Remarquons le fait que  $U_{t,\gamma}(t) = m(t)$ . On définit également l'enveloppe entropique  $E_{t,\alpha}$  qui pour  $\alpha > 0$  vaut

$$E_{t,\alpha}(s) = \frac{s}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s). \quad (3.2.3)$$

En fait, on l'appellera l'enveloppe entropique si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  et l'enveloppe inférieure si  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

On va maintenant caractériser les trajectoires des particules dans  $\mathbb{D}_t(D)$  avec une certaine précision. Le premier de ces résultats stipule que les trajectoires ne peuvent pas fluctuer de façon trop agressive vers le haut.



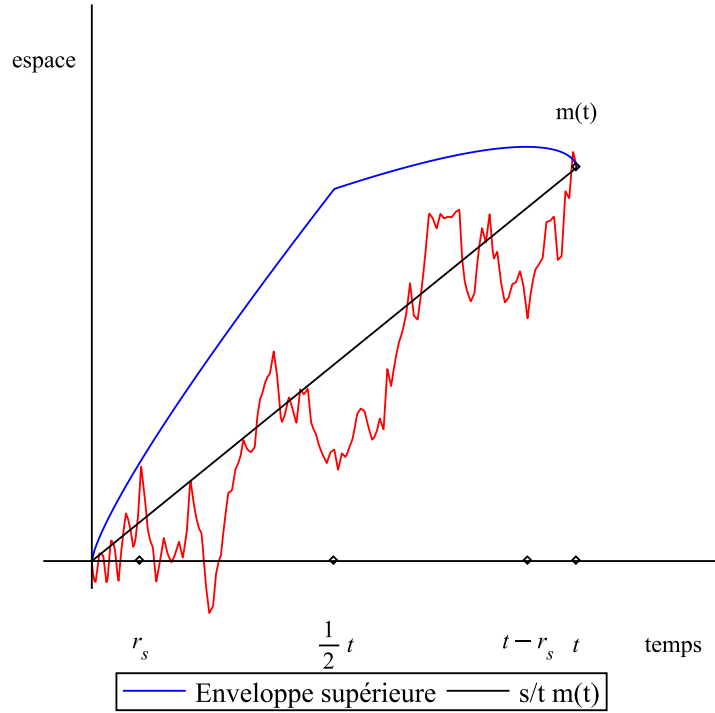


FIGURE 3.1. L'enveloppe supérieure du mouvement brownien branchant.

**Théorème 3.2.3** (Enveloppe supérieure). *Soient  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  et  $\epsilon > 0$  donnés. Il existe  $r_s = r_s(\gamma, y, \epsilon)$  tel que pour  $r \geq r_s$  et pour tout  $t > 3r$ ,*

$$\mathbb{P}(\exists u \in \mathbb{D}_t : x_u(s) > y + U_{t,\gamma}(s) \text{ pour un certain } s \in [r, t - r]) < \epsilon. \quad (3.2.4)$$

On peut voir les particules du mouvement brownien branchant dans  $\mathbb{D}_t(D)$  comme des mouvements browniens conditionnés à atteindre des valeurs élevées au temps  $t$ , sans toutefois dépasser l'enveloppe supérieure. Un mouvement brownien avec cette condition sur la position finale peut à son tour être vu en tant que pont brownien de longueur  $t$  débutant en 0 et terminant en  $m(t)$ , qui ne dépasse pas l'enveloppe supérieure. En soustrayant l'interpolation linéaire  $\frac{s}{t}m(t)$  entre 0 et le point d'arrivée, on se ramène à un pont brownien standard (débutant et terminant en 0) qui ne doit pas dépasser la fonction  $f_{t,\gamma}$  durant la majeure partie de son existence. La figure 3.1 montre l'enveloppe supérieure et la figure 3.2 explique le dernier raisonnement. Le théorème 3.2.3 a pour conséquence de mettre au jour l'existence d'une deuxième enveloppe, appelée l'enveloppe entropique de par sa similarité au phénomène physique du même nom, qui stipule que les trajectoires

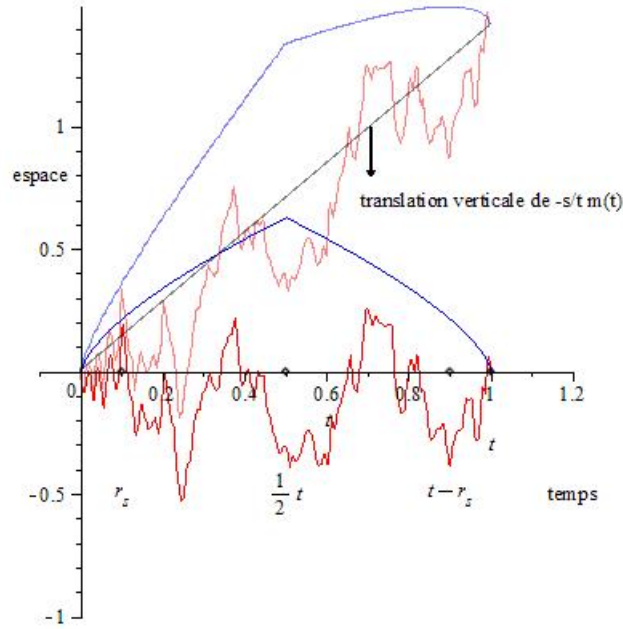


FIGURE 3.2. La translation verticale de  $-\frac{s}{t}m(t)$ .

qui sont maximales en  $t$  doivent passer la majeure partie de leur vie assez bas. Le résultat de cette deuxième enveloppe est illustré à la figure 3.3.

**Théorème 3.2.4** (Enveloppe entropique). *Soient  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  un compact et  $\epsilon > 0$  donnés. Posons  $\bar{D} = \sup\{x \in D\}$ . Alors il existe  $r_e = r_e(\alpha, D, \epsilon)$  tel que pour  $r > r_e$  et pour tout  $t > 3r$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\exists u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in m(t) + D, \text{ mais } \exists s \in [r, t - r] : x_u(s) \geq \bar{D} + E_{t,\alpha}(s)\right) < \epsilon. \quad (3.2.5)$$

Évidemment, les particules extrêmes doivent finir par remonter si elles ont espoir d'atteindre la zone  $m(t) + D$ . Pour être en mesure de faire cette remontée, elles ne doivent pas se retrouver trop bas dans l'intervalle  $[r, t - r]$ . La troisième et dernière enveloppe vient nous assurer de cette localisation.

**Théorème 3.2.5** (Enveloppe inférieure). *Soient  $D \subset \mathbb{R}$  un compact,  $\frac{1}{2} < \beta < 1$  et  $\epsilon > 0$  donnés. Alors il existe  $r_l = r_l(\beta, D, \epsilon)$  tel que pour  $r \geq r_l$  et pour tout  $t > 3r$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\exists u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in m(t) + D, \text{ mais } \exists s \in [r, t - r] : x_u(s) \leq \bar{D} + E_{t,\beta}(s)\right) < \epsilon. \quad (3.2.6)$$

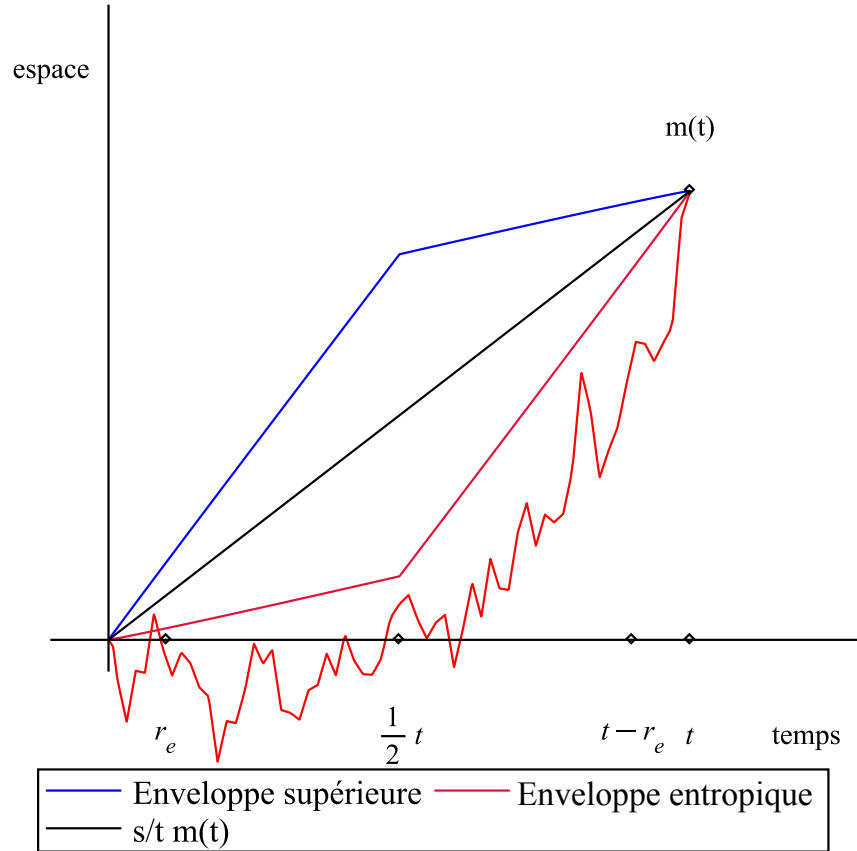


FIGURE 3.3. L'enveloppe entropique du mouvement brownien branchant.

Mis ensemble, les théorèmes 3.2.4 et 3.2.5 décrivent un tube dans lequel les particules extrêmes écoulent la majeure partie de leur existence et ce, avec grande probabilité. Les trois enveloppes sont illustrées dans la figure 3.4 et le résultat du tube est résumé dans le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2.6.** *Soient  $D \subset \mathbb{R}$  un compact,  $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$  et  $\epsilon > 0$  donnés. Alors il existe  $r_1 = r_1(\alpha, \beta, D, \epsilon)$  tel que pour  $r \geq r_1$  et pour tout  $t > 3r$ ,*

$$\mathbb{P}(\forall u \in \mathbb{D}_t(D) : \bar{D} + E_{t,\beta}(s) \leq x_u(s) \leq \bar{D} + E_{t,\alpha}(s), \forall s \in [r, t-r]) \geq 1 - \epsilon. \quad (3.2.7)$$

Le corollaire découle directement des théorèmes 3.2.4 et 3.2.5 en prenant

$$r_1(\alpha, \beta, D, 2\epsilon) = \max\{r_e(\alpha, D, \epsilon); r_1(\beta, D, \epsilon)\}.$$

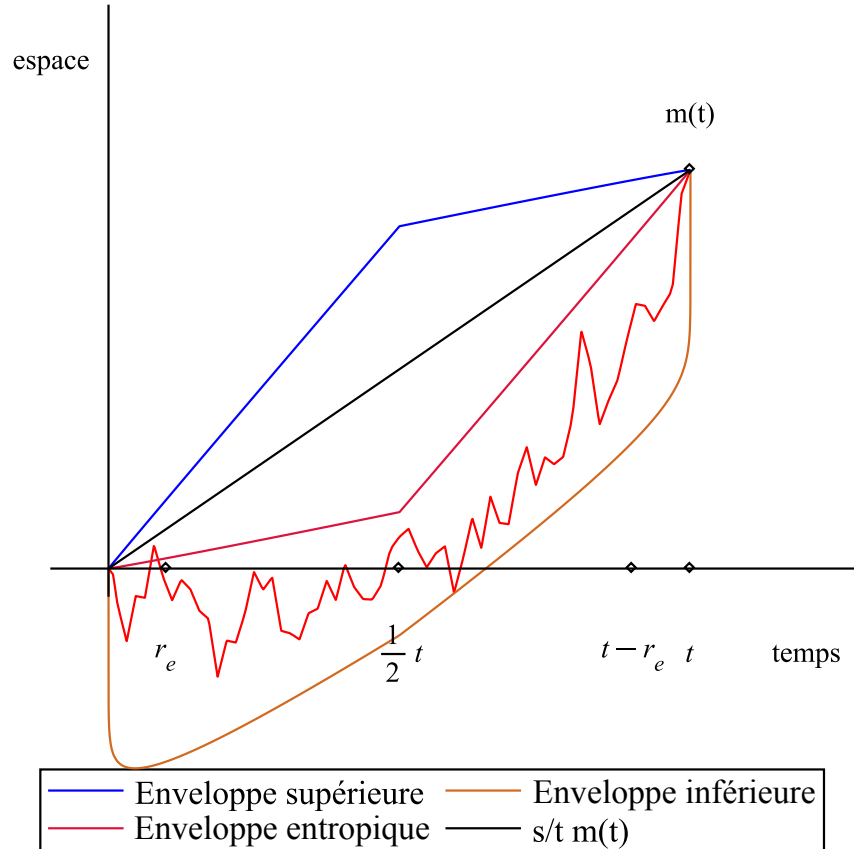


FIGURE 3.4. Les trois enveloppes du mouvement brownien branchant.

**Remarque 3.2.7.** *Les théorèmes 3.2.1, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 se généralise facilement au processus avec diffusion  $\sigma^2$  puisque si  $x(t)$  est un mouvement brownien avec diffusion  $\sigma^2$ , alors  $\frac{1}{\sigma}x(t)$  est un mouvement brownien standard.*

### 3.3. LE PONT BROWNIEN : QUELQUES PROPRIÉTÉS.

Avant de démontrer le théorème 3.2.1, on cite quelques résultats, qui sont, à moins de mention contraire, tirés de [Br2]. On note par  $\{x(s), s \geq 0\}$  le mouvement brownien standard. Il est évident que le processus défini par

$$z_t(s) = x(s) - \frac{s}{t}x(t) \quad (3.3.1)$$

est gaussien pour une valeur de  $t$  fixée. Ce processus s'appelle le pont brownien. Les lois du pont brownien et du mouvement brownien peuvent être considérées

comme des mesures de probabilités sur l'ensemble  $\mathcal{C}([0, t], \mathcal{B})$  des fonctions continues sur  $[0, t]$  muni de la sigma-algèbre borélienne. On note par  $P^0$  la mesure de  $z_t$  sur  $\mathcal{C}([0, t], \mathcal{B})$ . On utilisera les propriétés suivantes de  $z_t$ .

**Lemme 3.3.1.** *Le pont brownien  $z_t(s) = x(s) - \frac{s}{t}x(t)$  est un processus*

- (1) *continu,*
- (2) *possédant la propriété forte de Markov,*
- (3) *indépendant de  $x(t)$  pour tout  $0 \leq s \leq t$ .*
- (4) *La moyenne de  $z_t(s)$  est  $\mathbb{E}(z_t(s)) = 0$ ,*
- (5) *et sa variance est  $\text{Var}(z_t(s)) = s \left(1 - \frac{s}{t}\right)$ .*

On aura besoin de calculer les probabilités pour qu'un pont brownien demeure sous des fonctions linéaires.

**Lemme 3.3.2** (Lemme 3.4 dans [ABK]). *Soient  $Z_1, Z_2 \geq 0$  et  $r_1, r_2 \geq 0$ . Alors pour  $t > r_1 + r_2$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(z_t(s) \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right) Z_1 + \frac{s}{t} Z_2, r_1 \leq s \leq t - r_2\right) \\ \leq \frac{2}{t - r_1 - r_2} \prod_{i=1}^2 (Z(r_i) + \sqrt{r_i}), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

avec  $Z(r_1) = \left(1 - \frac{r_1}{t}\right) Z_1 + \frac{r_1}{t} Z_2$  et  $Z(r_2) = \frac{r_2}{t} Z_1 + \left(1 - \frac{r_2}{t}\right) Z_2$ .

DÉMONSTRATION. Supposons que  $r_1, r_2 > 0$ . On conditionne sur la valeur de  $z_t(r_1)$  et la valeur de  $z_t(t - r_2)$ . La probabilité

$$\mathbb{P}\left(z_t(s) \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right) Z_1 + \frac{s}{t} Z_2, r_1 \leq s \leq t - r_2 \mid z_t(r_1) = x_1, z_t(t - r_2) = x_2\right) \quad (3.3.3)$$

est la même que celle qu'un pont brownien de longueur  $t - r_1 - r_2$  qui débute en  $x_1$  et se termine en  $x_2$  soit en dessous de la ligne joignant les points  $Z(r_1)$  et  $Z(r_2)$ . Cette probabilité, que l'on peut retrouver par exemple dans [Sc] est donnée par

$$1 - \exp\left(\frac{-2}{t - r_1 - r_2} (Z(r_1) - x_1)(Z(r_2) - x_2)\right). \quad (3.3.4)$$

En particulier, sur l'événement  $\left\{z_t(s) \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right) Z_1 + \frac{s}{t} Z_2\right\}$ , les termes  $Z(r_1) - x_1$  et  $Z(r_2) - x_2$  sont positifs et donc, puisque  $1 - e^{-x} \leq x$ , l'équation (3.3.4) est

inférieure à

$$\begin{aligned} & \frac{2}{t - r_1 - r_2} (Z(r_1) - x_1)(Z(r_2) - x_2) \\ &= \frac{2}{t - r_1 - r_2} (Z(r_1)Z(r_2) - x_1Z(r_2) - x_2Z(r_1) + x_1x_2). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Ainsi, le côté gauche de (3.3.2) est borné supérieurement par

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{Z(r_1)} \int_{-\infty}^{Z(r_2)} \frac{2}{t - r_1 - r_2} (Z(r_1)Z(r_2) - x_1Z(r_2) - x_2Z(r_1) + x_1x_2) \\ & \quad \times \mathbb{P}(z_t(r_1) \in dx_1, z_t(t - r_2) \in dx_2). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Les bornes de l'intégrale sont déterminées en fonction du côté gauche de (3.3.5) et  $\mathbb{P}(z_t(r_1) \in dx_1, z_t(t - r_2) \in dx_2)$  représente la densité conjointe des processus  $z_t(r_1), z_t(t - r_2)$ . On obtient une somme de quatre intégrales que l'on borne individuellement. La première, constante en  $x_1, x_2$  est bornée par  $\frac{2}{t - r_1 - r_2} Z(r_1)Z(r_2)$  en intégrant sur  $\mathbb{R}^2$ . On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour borner la seconde, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \frac{2Z(r_2)}{t - r_1 - r_2} \int_{-\infty}^{Z(r_1)} \int_{-\infty}^{Z(r_2)} x_1 \mathbb{P}(z_t(r_1) \in dx_1, z_t(t - r_2) \in dx_2) \\ & \leq \frac{2Z(r_2)}{t - r_1 - r_2} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \mathbb{P}(z_t(r_1) \in dx_1), \\ & \leq \frac{2Z(r_2)}{t - r_1 - r_2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \mathbb{P}(z_t(r_1) \in dx_1) \right)^{1/2}, \\ & = \frac{2Z(r_2)}{t - r_1 - r_2} \sqrt{\text{Var}(z_t(r_1))}, \\ & = \frac{2Z(r_2)}{t - r_1 - r_2} \sqrt{r_1 \left(1 - \frac{r_1}{t}\right)}, \\ & \leq \frac{2Z(r_2) \sqrt{r_1}}{t - r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, la troisième intégrale de (3.3.6) est bornée par

$$\frac{2Z(r_1) \sqrt{r_2}}{t - r_1 - r_2}. \quad (3.3.7)$$

Finalement, en utilisant deux fois l'inégalité Cauchy-Schwarz et la méthode pour borner la deuxième et la troisième intégrale, on obtient que la quatrième intégrale

est bornée par

$$\begin{aligned} \frac{2}{t - r_1 - r_2} \left( \int_{\infty}^{\infty} x_1^2 \mathbb{P}(z_t(r_1) \in dx_1) \right)^{1/2} \left( \int_{\infty}^{\infty} x_2^2 \mathbb{P}(z_t(t - r_2) \in dx_2) \right)^{1/2} \\ \leq \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{t - r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

On retrouve (3.3.2) pour  $r_1, r_2 > 0$  en regroupant les quatre termes ci-dessus. Le cas  $r_1 = 0$  ou  $r_2 = 0$  découle de la continuité du pont brownien.  $\square$

### 3.4. TEMPS DE BRANCHEMENT HOMOGENÈNE

Dans cette dernière section, on démontre le théorème 3.2.1 à l'aide de la localisation des trajectoires. On donne en premier temps un raisonnement heuristique qui permet de comprendre pourquoi le théorème des temps de branchement des particules extrêmes découle des théorèmes de localisation de la section 3.2.2.

Prenons deux particules  $u, v \in \mathbb{D}_t$  et telles que  $x_u(t), x_v(t)$  sont environ à  $m(t)$ . Supposons que leur temps de branchement  $Q_t(u, v)$  soit à l'intérieur de l'intervalle  $[r, t - r]$ , disons à  $t/3$ . Par le théorème de l'enveloppe supérieure 3.2.4, le parent de  $u$  et  $v$  est à une hauteur d'au plus  $\sqrt{2}\frac{t}{3} - \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha$ , où nous avons laissé tomber le terme logarithmique pour le raisonnement heuristique. Pour qu'il existe un descendant de cette particule qui se rende à  $m(t)$  au temps  $t$ , il faut que dans le  $2t/3$  de temps restant pour se rendre à  $t$ , au moins une des particules effectue un saut de hauteur  $\sqrt{2}\frac{2t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha$ . Au temps  $t/3$ , la proportion des particules qui sont à une hauteur d'au moins  $\sqrt{2}\frac{t}{3} - \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha$  est d'environ

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( u \in \mathbb{D}_{t/3} : x_u(t/3) > \sqrt{2}\frac{t}{3} - \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha \right) &= e^{t/3} \mathbb{P} \left( x(t/3) > \sqrt{2}\frac{t}{3} - \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha \right) \\ &\leq \kappa \frac{e^{\frac{t}{3}} t e^{-\frac{(\sqrt{2}\frac{t}{3} - (\frac{t}{3})^\alpha)^2}{2t/3}}}{\sqrt{2}\frac{t}{3} - \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha} \\ &\leq \kappa \frac{t e^{\sqrt{2}\frac{t}{3}} e^{-\frac{3}{2}\frac{(\frac{t}{3})^{2\alpha}}{t}}}{\sqrt{2}\frac{t}{3} - \left(\frac{t}{3}\right)^\alpha} \\ &= O \left( e^{\sqrt{2}\frac{t}{3}} \right), \end{aligned}$$

pour une certaine constante  $\kappa > 0$ . L'estimé gaussien (corollaire 1.4.2) et le fait que le nombre moyen de particules au temps  $t/3$  est  $e^{t/3}$  ont été utilisés. Un estimé similaire nous permet d'obtenir que la probabilité qu'une de ces particules effectue le saut d'une hauteur de  $\sqrt{2}\frac{2t}{3} + (\frac{t}{3})^\alpha$  est d'ordre  $e^{-\sqrt{2}(\frac{t}{3})^\alpha}$ . Le produit étant d'ordre 1, il est donc bien possible que ceci se produise. Mais avoir une seconde particule qui s'y rende, tout en provenant de la même particule au temps  $t/3$ , est un événement dont la probabilité  $e^{\sqrt{2}(\frac{t}{3})^\alpha} e^{-2\sqrt{2}(\frac{t}{3})^\alpha}$  est extrêmement petite pour des valeurs de  $t$  grandes. L'heuristique n'est évidemment pas des plus rigoureux, puisque l'on a laissé tomber le terme de correction logarithmique. Il donne toutefois une idée sur la raison des branchements aux extrémités. On passe maintenant à la preuve du théorème 3.2.1.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2.1.** Soient  $D \subset \mathbb{R}$  un compact et  $\epsilon > 0$  donnés. On rappelle que  $Q_t(u, v) = \sup\{s \leq t : x_u(s) = x_v(s), \forall 0 \leq s' \leq s\}$  est le temps de branchement des particules  $u, v$ . De plus, il existe  $\underline{D} \leq \overline{D}$  tels que  $D \subseteq [\underline{D}, \overline{D}]$ . Pour démontrer le théorème, on doit trouver  $r_0 = r_0(D, \epsilon)$  et  $t_0 = t_0(D, \epsilon)$  tels que pour  $r \geq r_0$  et  $t > \max\{t_0, 3r\}$ ,

$$\mathbb{P}(\exists u, v \in \mathbb{D}_t : x_u(t), x_v(t) \in m(t) + D \text{ et } Q_t(u, v) \in [r, t - r]) < \epsilon. \quad (3.4.1)$$

Le corollaire 3.2.6 donne l'existence d'un  $r_1 = r_1(D, \epsilon)$  tel qu'avec probabilité d'au moins  $1 - \epsilon$ , les particules extrêmes qui se rendent à  $D$  au temps  $t$  satisfont pour  $t > 3r$

$$\begin{aligned} \overline{D} + \frac{s'}{t}m(t) - f_{t,\beta}(s') &\leq x_u(s') \\ &\leq \overline{D} + \frac{s'}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s'), \forall r_1 \leq s' \leq t - r_1, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

pour  $0 < \alpha < 1/2 < \beta < 1$ . Dénotons par  $\Theta_{D,t}$  l'ensemble des trajectoires  $x(s')$  qui satisfont (3.4.2) et pour lesquelles  $x(t) \in m(t) + D$ . De plus, on dénote par  $\Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]}$  l'ensemble pour lequel les trajectoires satisfont l'inégalité (3.4.2) mais pour tout  $s' \in [s, t - r_1]$  pour un certain  $s \geq r_1$  et toujours avec  $x(t) \in m(t) + D$ . Notons au passage que  $\Theta_{D,t} \subseteq \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]}$ .



Rappelons que  $K = \sum_k k(k-1)p_k$ , où  $\{p_k\}$  sont les probabilités de la distribution de reproduction des particules. On généralise l'idée du lemme 10 dans [Br1] qui exprime l'espérance du nombre de paires de particules d'un mouvement brownien branchant dont les trajectoires satisfont certaines conditions, comme  $\Theta_{D,t}$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\#\{(u, v) : x_u, x_v \in \Theta_{D,t}, u \neq v\}\right) \\ &= K e^t \int_0^t e^{t-s} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_s(y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t} \mid x(s) = y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y), \end{aligned}$$

où  $\mu_s$  est la densité gaussienne de variance  $s$ . On donne une interprétation de la formule ci-dessus. Une preuve complète est technique, une référence est disponible dans [Br1] suite au lemme 10.

Prenons deux particules  $u_1, v_1$  qui viennent d'être séparées au temps  $s$ , avec  $x_{u_1}(s) = x_{v_1}(s) = y$ . Le nombre moyen de descendants au temps  $t$  d'une particule au temps  $s$  qui sont dans l'intervalle admissible  $\Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]}$  est donné par

$$e^{t-s} \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y).$$

Puisqu'après avoir branché, les particules effectuent chacune un nouveau mouvement brownien branchant indépendant l'un de l'autre, le nombre moyen de paires  $(u, v) \in \mathbb{D}_t^2$  qui sont dans  $\Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]}$  avec  $u$  un descendant de  $u_1$  et  $v$  un descendant de  $v_1$  (voir figure 3.5) est donné par

$$e^{2(t-s)} \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y)^2.$$

Comme il y a en moyenne  $K = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k$  paires de particules  $(u_1, v_1)$  venant de se séparer, avec  $u_1 \neq v_1$ , le nombre moyen de paires de particules au temps  $t$  qui sont dans  $\Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]}$  provenant d'un même parent au temps  $s$  est donné par  $K e^{2(t-s)} \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y)^2$ . Également, le nombre de particules au temps  $s$  qui sont dans l'intervalle admissible  $\Theta_{D,s}$  jusqu'au temps  $s$  est  $e^s \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,s})$ . De plus, puisque le temps de branchement peut survenir n'importe quand dans l'intervalle  $[0, t]$  et que les particules au temps  $s$  sont distribuées normalement avec moyenne 0 et variance  $s$ , on obtient que le nombre de paires de

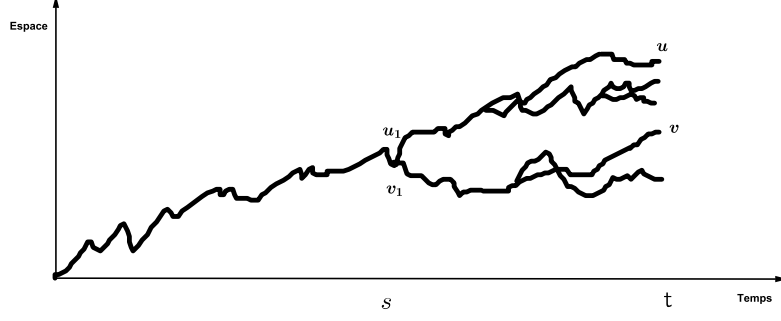


FIGURE 3.5. Deux mouvements browniens branchants créés après la séparation des particules  $u_1, v_1$ .

particules qui sont dans  $\Theta_{D,t}$  est

$$K \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K e^{2(t-s)} e^s \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y) \\ \times \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,s}) ds d\mu_s(y).$$

Finalement, en combinant

$$\mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,s}) = \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t} \mid x(s) = y),$$

on obtient

$$\mathbb{E}\left(\#\{(u, v) : x_u, x_v \in \Theta_{D,t}, u \neq v\}\right) \\ = K e^t \int_0^t e^{t-s} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_s(y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t} \mid x(s) = y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y).$$

Dans le cas qui nous intéresse, on ajoute une condition sur le temps de branchement des particules  $u, v$ , qui doit être dans  $[r, t - r]$ . Ceci a pour conséquence de changer l'intégrale en  $ds$  et le résultat devient

$$\mathbb{E}\left(\#\{(i, j) : x_i, x_j \in \Theta_{D,t}, i \neq j, Q_t(i, j) \in [r, t - r]\}\right) \quad (3.4.3) \\ = K e^t \int_r^{t-r} e^{t-s} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_s(y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t} \mid x(s) = y) \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y).$$

Dans ce qui suit, on montre l'existence d'un  $r_0 = r_0(D, \epsilon)$  et d'un  $t_0 = t_0(D, \epsilon)$  tels que pour  $r > r_0$  et  $t > \max\{t_0, 3r\}$ , le côté droit de (3.4.3) est inférieur à  $\epsilon$ . Par l'inégalité de Markov et à l'aide du corollaire 3.2.6, ceci entrainera (3.4.2) si

on s'assure que  $r_0 > r_1$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\exists u, v \in \mathbb{D}_t : x_u(t), x_v(t) \in m(t) + D \text{ et } Q_t(u, v) \in [r, t - r]) \\
&= \mathbb{P}(\#\{(u, v) \in \mathbb{D}_t^2 : x_u(t), x_v(t) \in m(t) + D \text{ et } Q_t(u, v) \in [r, t - r]\} \geq 1) \\
&\leq \mathbb{P}(\#\{(u, v) \in \mathbb{D}_t^2 : x_u, x_v \in \Theta_{D,t}, u \neq v, Q_t(u, v) \in [r, t - r]\} \geq 1) \\
&\leq \mathbb{E}(\#\{(u, v) \in \mathbb{D}_t^2 : x_u, x_v \in \Theta_{D,t}, u \neq v, Q_t(u, v) \in [r, t - r]\}),
\end{aligned}$$

où la première inégalité est due au corollaire 3.2.6 et la deuxième à l'inégalité de Markov. La dernière espérance est donnée par l'équation (3.4.3). On veut borner le terme  $\mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y)$  uniformément en  $y$ , ce qui permettra de se débarrasser de l'intégrale en  $d\mu_s(y)$  puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t} \mid x(s) = y) d\mu_s(y) = \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}).$$

Puisque la fonction  $s' \mapsto \bar{D} + \frac{s'}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s')$  est convexe et vaut  $m(t) + \bar{D}$  au temps  $t$ , l'événement

$$\left\{ x(s') \leq \bar{D} + \frac{s'}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s'), \forall s \leq s' \leq t - r_1 \right\} \quad (3.4.4)$$

est contenu dans l'événement où les trajectoires  $x(s')$  vivent sous la droite interpolant  $\bar{D} + \frac{s}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s)$  au temps  $s$  à  $m(t) + \bar{D}$  au temps  $t$ , soit

$$\left\{ x(s') \leq \frac{(1 - \frac{s}{t})m(t) + f_{t,\alpha}(s)}{t - s}(s' - s) + \bar{D} + \frac{s}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s), \forall s \leq s' \leq t - r_1 \right\}. \quad (3.4.5)$$

On pose

$$a = \bar{D} + \frac{s}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s) - y \quad \text{et} \quad b = \frac{f_{t,\alpha}(s) - \frac{s}{t}m(t)}{t - s}.$$

On souhaite transformer la probabilité de l'événement (3.4.5) afin de faire apparaître le pont brownien. On veut également travailler à partir du temps 0 et en utilisant la propriété de Markov du mouvement brownien, on effectue une translation du temps de longueur  $s$  pour s'y ramener. De l'inclusion de l'événement (3.4.4) dans l'événement (3.4.5), on obtient en soustrayant  $x(s)$  et  $\frac{s'-s}{t-s}x(t)$  de

$x(s')$  que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(x(s') - \frac{s'}{t-s}x(t-s) \leq a + bs' + \frac{s'}{t-s}(m(t) - x(t-s)), \right. \\ & \quad \left. \forall 0 \leq s' \leq t-s-r_1, x(t-s) \in m(t) - y + D\right). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Puisque  $D \subseteq [\underline{D}, \overline{D}]$ , la probabilité (3.4.6) est bornée par

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(x(s') - \frac{s'}{t-s}x(t-s) \leq a + bs' + \frac{s'}{t-s}(y - \underline{D}), \right. \\ & \quad \left. \forall 0 \leq s' \leq t-s-r_1, x(t-s) \geq m(t) - y + \underline{D}\right) \\ & = \mathbb{P}\left(x(s') - \frac{s'}{t-s}x(t-s) \leq \left(1 - \frac{s'}{t-s}\right)Z_1 + \frac{s'}{t-s}Z_2, \right. \\ & \quad \left. \forall 0 \leq s' \leq t-s-r_1, x(t-s) \geq m(t) - y + \underline{D}\right), \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

pour  $Z_1 = \overline{D} + \frac{s}{t}m(t) - f_{t,\alpha}(s) - y$  et  $Z_2 = \overline{D} - \underline{D}$ . Par l'indépendance entre le pont brownien et le mouvement brownien (Lemme 3.3.1), l'équation (3.4.7) vaut

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(z_{t-s}(s') \leq \left(1 - \frac{s'}{t-s}\right)Z_1 + \frac{s'}{t-s}Z_2, \forall 0 \leq s' \leq t-s-r_1\right) \\ & \quad \times \mathbb{P}(x(t-s) \geq m(t) - y + \underline{D}). \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

En vertu du lemme 3.3.2, la probabilité sur le pont brownien est inférieure ou égale à

$$\frac{2Z_1}{t-s-r_1} \left( \frac{r_1}{t-s}Z_1 + \left(1 - \frac{r_1}{t-s}\right)Z_2 + \sqrt{r_1} \right). \quad (3.4.9)$$

Rappelons que puisque  $x(s) = y$  vit à l'intérieur du tube créé par l'enveloppe entropique et l'enveloppe inférieure, (l'équation (3.4.2), découlant du corollaire 3.2.6), on doit avoir

$$0 \leq Z_1 \leq f_{t,\beta}(s) - f_{t,\alpha}(s) \leq \kappa f_{t,\beta}(s), \quad (3.4.10)$$

pour un certain  $\kappa > 0$  indépendant de  $t$  et  $r$ . En effet, en réécrivant la seconde inégalité de (3.4.2), on obtient  $0 \leq Z_1$ , et comme la première inégalité de (3.4.2) nous dit que  $\overline{D} + \frac{s}{t}m(t) - y \leq f_{t,\beta}(s)$ , on obtient l'inégalité  $Z_1 \leq f_{t,\beta}(s) - f_{t,\alpha}(s)$ , qui est à son tour inférieure ou égale à  $\kappa f_{t,\beta}(s)$ .

Dans ce qui suit,  $\kappa$  sera une constante positive dont la valeur pourra changer mais qui est indépendante de  $t$  et  $r$ , avec une dépendance en  $D$  possible.

On doit maintenant spécifier  $r_0(D, \epsilon)$  qui rendra (3.4.9) petite. Puisque  $r \leq t - s$  dans l'intégrale (3.4.3), en prenant  $r > 2r_1$  on retrouve  $\frac{1}{t-s-r_1} \leq \frac{2}{t-s}$ . On prend donc  $r_0 > 2r_1$ . De plus,

$$\frac{r_1 Z_1}{t-s} \leq \frac{r_1 \kappa f_{t,\beta}(s)}{t-s} \leq \kappa r_1 (t-s)^{\beta-1}$$

par l'estimé sur  $Z_1$  (3.4.10). Notons au passage que  $\beta - 1 < 0$ . On peut choisir  $r_0^{1-\beta} > r_1$  tel que  $\frac{r_1 Z_1}{t-s} < 1$  puisqu'on a  $r \leq t-s$ . En ajoutant également l'inégalité  $\sqrt{r_0} \geq \max\{Z_2, 1\}$ , et avec l'estimé sur  $Z_1$ , on trouve que l'équation (3.4.9) est inférieure ou égale à

$$\frac{\kappa \sqrt{r} Z_1}{t-s} \leq \frac{\kappa \sqrt{r} f_{t,\beta}(s)}{t-s}. \quad (3.4.11)$$

Puisque  $y - \bar{D} \leq \frac{s}{t} m(t) - f_{t,\alpha}(s)$ , le deuxième terme dans (3.4.8) est inférieur ou égal à

$$\kappa \frac{e^{-(t-s)} e^{\frac{3}{2} \frac{t-s}{t} \log(t)} e^{-\sqrt{2} f_{t,\alpha}(s)}}{(t-s)^{1/2}}, \quad (3.4.12)$$

qui s'obtient d'une manière similaire au calcul de (2.3.20). En regroupant (3.4.11) et (3.4.12), on obtient la borne uniforme en  $y$  que l'on cherchait pour

$$\mathbb{P}\left(x \in \Theta_{D,t}^{[s,t-r_1]} \mid x(s) = y\right) \leq \kappa \sqrt{r} \frac{e^{-(t-s)} e^{\frac{3}{2} \frac{t-s}{t} \log(t)} f_{t,\beta}(s) e^{-\sqrt{2} f_{t,\alpha}(s)}}{(t-s)^{3/2}}. \quad (3.4.13)$$

Le côté droit de (3.4.3) est borné supérieurement par

$$\kappa e^t \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}) \sqrt{r} \int_r^{t-r} \frac{e^{\frac{3}{2} \frac{t-s}{t} \log(t)}}{(t-s)^{3/2}} f_{t,\beta}(s) e^{-\sqrt{2} f_{t,\alpha}(s)} ds. \quad (3.4.14)$$

On montre maintenant que le terme  $e^t \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t})$  est d'ordre  $r_1$ , uniformément en  $t \geq 3r_1$  si  $t > 3r$ . En effet, en ne considérant que l'inégalité supérieure de

$$\begin{aligned} \Theta_{D,t} &= \left\{x : \bar{D} + \frac{s'}{t} m(t) - f_{t,\beta}(s') \leq x_i(s')\right. \\ &\leq \bar{D} + \frac{s'}{t} m(t) - f_{t,\alpha}(s'), \forall r_1 \leq s' \leq t - r_1 \Big\} \\ &\cap \{x : x(t) \in m(t) + D\}, \end{aligned}$$

et en omettant  $f_{t,\alpha}$ , on obtient

$$e^t \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t}) \leq e^t \mathbb{P}\left(x(s) \leq \frac{s}{t} m(t) + \bar{D}, \forall r_1 \leq s \leq t - r_1, x(t) \in m(t) + D\right), \quad (3.4.15)$$

qui est à son tour inférieure à

$$\mathbb{P}\left(z_t(s) \leq \overline{D}, \forall r_1 \leq s \leq t - r_1\right) \mathbb{P}(x(t) \geq m(t) + \underline{D}). \quad (3.4.16)$$

En vertu du lemme 3.3.2, le premier terme est inférieur à  $\kappa \frac{r_1}{t-2r_1}$  qui (le choix de  $t > 3r$  implique  $1 - 2\frac{r}{t} > \frac{1}{3}$ ) est plus petit que  $\kappa \frac{r_1}{t}$ . Finalement, par le lemme 1.4.3, on a  $\mathbb{P}(x(t) \geq m(t) + \underline{D}) \leq \kappa t e^{-t}$ , ce qui montre que  $e^t \mathbb{P}(x \in \Theta_{D,t})$  est d'ordre  $r_1$ .

Il ne reste qu'à montrer que l'équation (3.4.14) peut être rendue aussi petite que nécessaire en prenant  $r_0$  grand. On sépare le domaine d'intégration en deux, pour avoir  $[r, t - r] = [r, \frac{t}{2}] \cup [\frac{t}{2}, t - r]$ . On rappelle l'inégalité logarithmique (2.4.1) qui dit ici que

$$\frac{t-s}{t} \log(t) \leq \log(t-s)$$

pour  $s \in [r, \frac{t}{2}]$ , qui implique à son tour que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{t-s}{t} \log(t) &\leq \frac{3}{2} \log(t-s) \\ e^{\frac{3}{2} \frac{t-s}{t} \log(t)} &\leq (t-s)^{3/2} \\ \frac{e^{\frac{3}{2} \frac{t-s}{t} \log(t)}}{(t-s)^{3/2}} &\leq 1. \end{aligned}$$

Sur  $[r, \frac{t}{2}]$ , l'équation (3.4.14) est donc inférieure ou égale à

$$\kappa r^{3/2} \int_r^{\frac{t}{2}} s^\beta e^{-\sqrt{2}s^\alpha} ds.$$

Pour  $r$  assez grand,  $s^\beta e^{-\sqrt{2}s^\alpha} \leq e^{-s^\alpha}$  puisque  $\beta \log(s) \leq (\sqrt{2} - 1)s^\alpha$  éventuellement. L'intégrale ci-dessus est donc inférieure ou égale à

$$\kappa r^{3/2} \int_r^\infty s^\beta e^{-\sqrt{2}s^\alpha} ds \leq \kappa \kappa' r^{3/2} e^{-r^\alpha}, \quad (3.4.17)$$

où la constante  $\kappa'$  provient de l'intégration de  $e^{-s^\alpha}$  et dépend de  $\alpha$ . Le côté droit de (3.4.17) tend vers 0 lorsque  $r \rightarrow \infty$ , uniformément en  $t$ .

Pour le second intervalle  $[\frac{t}{2}, t - r]$ , un changement de variable  $s \rightarrow t - s$  permet d'obtenir

$$\kappa r^{3/2} \int_r^{\frac{t}{2}} \frac{e^{\frac{3}{2} \frac{s}{t} \log(t)} s^\beta e^{-\sqrt{2}s^\alpha}}{s^{3/2}} ds. \quad (3.4.18)$$

On sépare à nouveau l'intervalle en  $[r, \frac{t}{2}] = [r, t^\delta] \cup [t^\delta, \frac{t}{2}]$  pour un certain  $0 < \delta < 1$ . Sur le premier intervalle,  $s \leq t^\delta$  et donc  $e^{\frac{3}{2} \frac{s}{t} \log(t)} \leq e^{\frac{3}{2} \frac{t^\delta}{t} \log(t)}$ , qui est bornée

supérieurement par une constante  $\kappa > 0$ . Il en découle que l'équation (3.4.18) est inférieure ou égale sur  $[r, t^\delta]$  à

$$\kappa r^{3/2} \int_r^\infty \frac{s^\beta e^{-\sqrt{2}s^\alpha}}{s^{3/2}} \leq \kappa \kappa' r^{3/2} e^{-r^\alpha}, \quad (3.4.19)$$

qui a été calculé d'une manière similaire à (3.4.17). L'intégrale ci-dessus tend vers 0 lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Dans le deuxième intervalle, en bornant  $e^{\frac{3}{2} \frac{s}{t} \log(t)}$  par  $e^{\frac{3}{2} \frac{t/2}{t} \log(t)} = t^{3/4}$ , on trouve que l'équation (3.4.18) est inférieure ou égale sur  $[t^\delta, \frac{t}{2}]$  à

$$\kappa r^{3/2} t^{3/4} \int_{t^\delta}^{t/2} \frac{s^\beta e^{-\sqrt{2}s^\alpha}}{s^{3/2}} \leq \kappa \kappa' r^{3/2} t^{7/4} e^{-t^{-t^\delta \alpha}} \leq \kappa t^{13/4} e^{-t^{\delta \alpha}}, \quad (3.4.20)$$

pour  $t > 3r$ . Cette probabilité peut être rendue aussi petite que nécessaire en prenant  $t_0$  assez grand. En combinant les estimés 3.4.17, 3.4.19 et 3.4.20, on obtient la preuve du théorème.  $\square$

# Chapitre 4

---

## TEMPS DE BRANCHEMENT POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN BRANCHANT INHOMOGÈNE

### 4.1. MOTIVATION

En combinant les chapitres 2 et 3, il est naturel de se demander ce qui se passe pour les temps de branchement d'un mouvement brownien branchant inhomogène, un analogue continu à la marche du chapitre 2. Puisqu'il est possible d'approximer le mouvement brownien par une marche aléatoire, il est raisonnable de croire que les temps de branchement des particules extrêmes de la marche aléatoire branchante et du mouvement brownien branchant se comportent d'une manière similaire. Les simulations de la section 4.1.2 viennent renforcer cette idée.

La question qui nous intéresse est de savoir si, dans le cas inhomogène, il est possible d'avoir des branchements à l'intérieur d'un intervalle  $[r, t - r]$  et si le profil croissant ou décroissant des variances est important. Le but de ce chapitre et résultat principal du mémoire est de répondre par l'affirmative à cette question, dans le cas du profil décroissant de variances par le biais du théorème 4.1.1. On y présentera également un raisonnement heuristique qui a motivé la recherche dans le cas du profil décroissant de variances.

#### 4.1.1. Définitions et résultat principal

Le mouvement brownien branchant inhomogène que l'on considère est l'analogue continu de la marche aléatoire branchante inhomogène du chapitre 2. On



considère un changement de la variance, au temps  $t/2$ . Concrètement, pour  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  données, on considère le processus stochastique  $(x_v(t), v \in \mathbb{D}_t)$ , un mouvement brownien branchant sur  $[0, t]$  tel que défini à la section 1.3, mais avec accroissements sur  $s_2 - s_1$  distribués selon  $\mathcal{N}_{s_1, s_2}$  avec

$$\mathcal{N}_{s_1, s_2} = \begin{cases} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2(s_2 - s_1)) & \text{si } s_1 < s_2 \leq \frac{t}{2}, \\ \mathcal{N}(0, \sigma_2^2(s_2 - s_1)) & \text{si } \frac{t}{2} \leq s_1 < s_2, \\ \mathcal{N}\left(0, \sigma_1^2\left(\frac{t}{2} - s_1\right)\right) + \mathcal{N}\left(0, \sigma_2^2\left(s_2 - \frac{t}{2}\right)\right) & \text{si } s_1 < \frac{t}{2} < s_2, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est la loi normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ .

Dans le théorème 3.1.1, on a introduit la quantité

$$m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t)$$

pour décrire la position approximative du maximum d'un mouvement brownien branchant (la position du maximum est tendue autour de cette valeur). Le théorème 2.2.2 dit quant à lui que la position du maximum d'une marche aléatoire branchante inhomogène dans le cas du profil décroissant de variance est donnée par l'addition de la position du maximum de deux marches aléatoires branchantes homogènes. Ceci motive la définition des quantités

$$m_1(t) = \sqrt{2}\sigma_1 t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sigma_1 \log(t),$$

$$m_2(t) = \sqrt{2}\sigma_2 t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sigma_2 \log(t)$$

et

$$\hat{m}(t) = m_1\left(\frac{t}{2}\right) + m_2\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_2) \log\left(\frac{t}{2}\right).$$

Remarquons que  $m_1(t)$  et  $m_2(t)$  représentent la position approximative au temps  $t$  du maximum d'un mouvement brownien branchant homogène avec diffusion respective  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ , alors que  $\hat{m}(t)$  représente la position approximative du mouvement brownien branchant inhomogène avec diffusion  $\sigma_1^2$  sur  $[0, \frac{t}{2}]$  et  $\sigma_2^2$  sur  $[\frac{t}{2}, t]$ . À l'image de la notation utilisée pour le théorème 3.2.1, on définit

$$\hat{\mathbb{D}}_t(D) = \{u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in \hat{m}(t) + D\},$$

$$\mathbb{D}_{t,1}(D) = \{u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in m_1(t) + D\},$$

et

$$\mathbb{D}_{t,2}(D) = \{u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in m_2(t) + D\}.$$

On rappelle également la définition du temps de branchement,

$$Q_t(u, v) = \sup\{s \leq t : x_u(s') = x_v(s'), \forall 0 \leq s' \leq s\}.$$

Dans la section 4.2, on démontre le théorème 4.1.1 ci-dessous :

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $0 < \sigma_2^2 < \sigma_1^2$ . On considère le mouvement brownien branchant inhomogène défini au début de la section 4.1.1 avec profil de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ . Soit  $D$  un compact. Alors*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} + r\right]\right) > 0. \quad (4.1.2)$$

**Remarque 4.1.2.** *La preuve du théorème 4.1.1 est obtenue en considérant les particules extrêmes au temps  $t$ , donc de l'ordre de  $\hat{m}(t)$ , qui l'étaient également au temps  $\frac{t}{2}$ , soient celles d'ordre  $m_1\left(\frac{t}{2}\right)$ . En fait, on s'attend à ce que toutes les particules extrêmes en  $t$  le soient aussi en  $\frac{t}{2}$  (pour le profil décroissant de variances), mais ceci reste à démontrer. Le simple fait qu'il en existe est suffisant pour le théorème 4.1.1.*

#### 4.1.2. Simulations numériques

Avant de présenter le résultat de simulations numériques, on donne l'intuition derrière le théorème 4.1.1. On considère un modèle simplifié du mouvement brownien branchant inhomogène où  $\lfloor e^{\frac{t}{2}} \rfloor$  mouvements browniens indépendants avec diffusion  $\sigma_1^2$  sont effectués sur l'intervalle  $\left[0, \frac{t}{2}\right]$ . Pour chaque particule  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq \lfloor e^{\frac{t}{2}} \rfloor$ , au temps  $\frac{t}{2}$ , il y a  $\lfloor e^{\frac{t}{2}} \rfloor$  mouvements browniens indépendants avec diffusion  $\sigma_2^2$  sur l'intervalle  $\left[\frac{t}{2}, t\right]$  qui prennent le départ avec  $x_i\left(\frac{t}{2}\right)$  comme position initiale. On a ainsi près de  $e^t$  particules au temps  $t$ , comme dans le cas du mouvement brownien branchant standard du chapitre 3. On n'a toutefois pas toutes les corrélations du cas standard, ce qui permet de simplifier les raisonnements.

On considère les cas extrêmes avec  $\sigma_1^2 = 0, \sigma_2^2 = 1$  et  $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0$ . Dans le cas  $\sigma_1^2 = 0, \sigma_2^2 = 1$ , on a environ  $e^{\frac{t}{2}}$  particules au temps  $\frac{t}{2}$  qui sont toutes en 0 et environ  $e^t$  au temps  $t$  qui sont distribuées aléatoirement. On regarde les

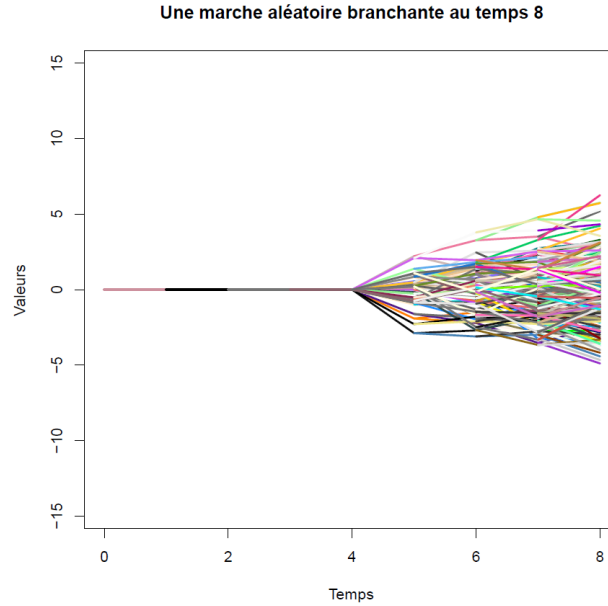


FIGURE 4.1. Le cas  $\sigma_1^2 = 0, \sigma_2^2 = 1$ .

deux particules maximales au temps  $t$ . La probabilité qu'elles proviennent du même parent au temps  $\frac{t}{2}$  est d'environ  $\frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t} = e^{-\frac{t}{2}}$ , qui tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Un exemple est illustré avec la marche aléatoire branchante inhomogène dans la figure 4.1. On s'attend donc à ce qu'il n'y ait pas de branchements au centre dans le profil croissant de variances général.

Dans le cas  $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0$ , les particules sont distribuées aléatoirement dans la première moitié de l'intervalle  $[0, t]$  et le déplacement est constant sur la deuxième moitié. Les particules maximales au temps  $t$  proviennent donc presque toujours du même parent au temps  $\frac{t}{2}$ . La figure 4.2 illustre ce cas. On s'attend donc à ce qu'il y ait des branchements au centre dans le profil décroissant de variances général.

L'histogramme de la figure 4.3 représente les temps de branchement des deux particules les plus hautes dans 5000 marches aléatoires branchantes inhomogènes avec  $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 15$  sur l'intervalle  $[0, 20]$ . On constate que les temps de branchement sont concentrés au début de l'intervalle et sont rapidement de moins en moins présents, avec une légère remontée vers la fin. Par contre, l'histogramme

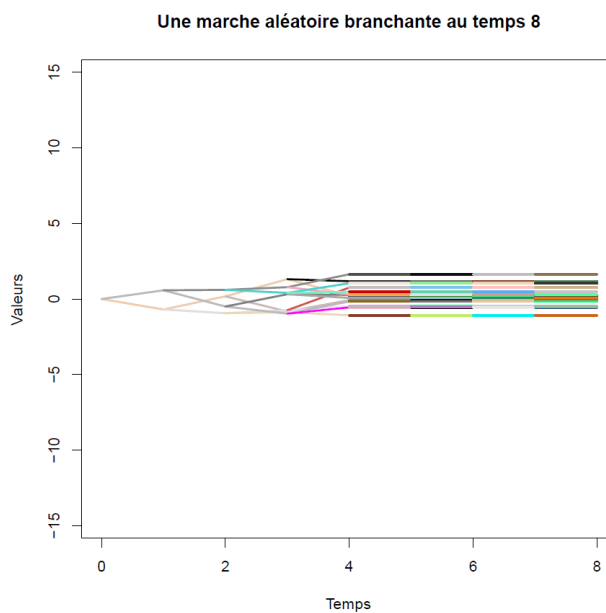


FIGURE 4.2. Le cas  $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0$ .

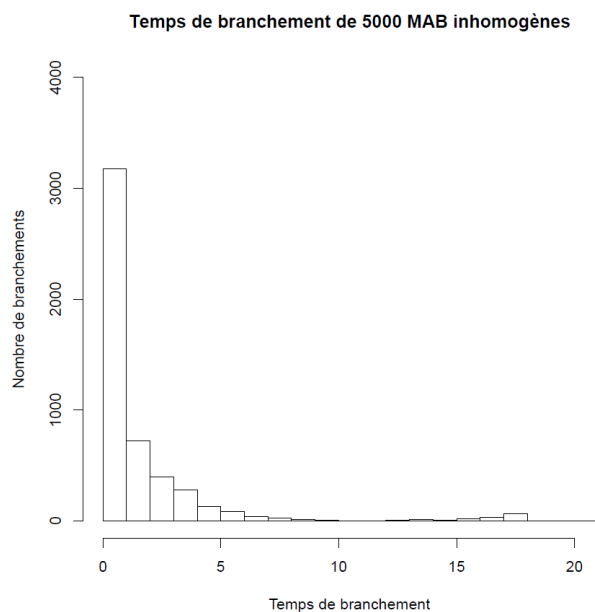


FIGURE 4.3. Le cas  $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 15$ .

de la figure 4.4 montre un portrait totalement différent et la présence de branchement au centre de l'intervalle est détectée. Les mêmes valeurs de variances ont été utilisées, mais avec le profil renversé.

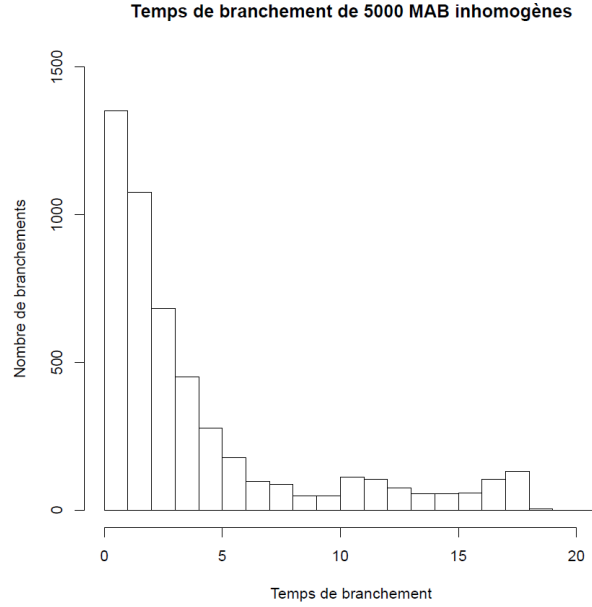


FIGURE 4.4. Le cas  $\sigma_1^2 = 15, \sigma_2^2 = 1$ .

## 4.2. TEMPS DE BRANCHEMENT INHOMOGÈNE

La preuve du théorème 4.1.1 est une application successive du théorème 3.2.1 sur les intervalles  $[0, \frac{t}{2}]$  et  $[\frac{t}{2}, t]$ . On considère les particules qui sont à la fois extrêmes au temps  $\frac{t}{2}$  et au temps  $t$ . On note par

$$H_t = H_t(D) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{D}_t^2 : x_u\left(\frac{t}{2}\right) \in m_1\left(\frac{t}{2}\right) + D, x_u(t) \in \hat{m}(t) + D, \right. \\ \left. x_v\left(\frac{t}{2}\right) \in m_1\left(\frac{t}{2}\right) + D, x_v(t) \in \hat{m}(t) + D \right\}. \quad (4.2.1)$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1.1. On souhaite montrer que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} + r\right]\right)$$

est strictement positive. On décompose la probabilité en deux, soit

$$\mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} + r\right]\right) = \\ \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right) + \\ \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r\right]\right). \quad (4.2.2)$$

Avant de regarder chacune des deux probabilités ci-dessus, on remarque que si deux particules dans  $\mathbb{D}_t$  ont leur temps de branchement dans l'intervalle  $\left[0, \frac{t}{2}\right)$ , alors leur ancêtre respectif au temps  $\frac{t}{2}$  est différent. De ce fait, on en déduit que

$$Q_t(u, v) = Q_{\frac{t}{2}}(u, v).$$

Exprimé autrement, le temps de branchement entre  $u, v$  est le même que le temps de branchement entre leur ancêtre respectif au temps  $\frac{t}{2}$ .

À l'inverse, deux particules au temps  $t$  ayant leur temps de branchement dans l'intervalle  $\left[\frac{t}{2}, t\right]$  ont nécessairement le même ancêtre au temps  $\frac{t}{2}$ . Ces deux propriétés seront utiles dans le reste de la démonstration.

Regardons en premier la deuxième probabilité du côté droit de l'équation (4.2.2), soit celle où les temps de branchement sont restreints à  $\left[\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r\right]$ . Rappelons que  $H_t$  représente l'ensemble des paires de particules qui sont à la fois extrêmes en  $t$  et en  $\frac{t}{2}$ . On a donc

$$\mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r\right]\right) \geq \mathbb{P}\left(\exists (u, v) \in H_t : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r\right]\right). \quad (4.2.3)$$

Comme on est à l'intérieur de l'intervalle  $\left[\frac{t}{2}, t\right]$ , on se concentre sur les paires de particules au temps  $t$  qui ont le même ancêtre en  $\frac{t}{2}$ . Pour  $w \in \mathbb{D}_s$ , avec  $s < t$  quelconque, on rappelle que  $\mathbb{D}_t^{(w)} \subseteq \mathbb{D}_t$  représente l'ensemble des particules au temps  $t$  qui ont pour ancêtre  $w$ . Conditionné sur  $x_w(s)$ , le processus

$$(x_v(t), v \in \mathbb{D}_t^{(w)})$$

sur l'intervalle  $[s, t]$  est égal en loi à un mouvement brownien branchant de longueur  $t - s$  débutant en  $x_w(s)$ , soit

$$\left(x_w(s) + x_v^{(w)}(t - s), w \in \mathbb{D}_s, v \in \mathbb{D}_{t-s}^{(w)}\right),$$

par la propriété de Markov 1.3.3.

La probabilité du membre de droite de l'équation (4.2.3) vaut

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{w \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}^{(D)}} \bigcup_{u, v \in \mathbb{D}_t^{(w)}} \left\{x_u(t) \in \hat{m}(t) + D, x_v(t) \in \hat{m}(t) + D, Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r\right]\right\}\right). \quad (4.2.4)$$

Rappelons ici que

$$\mathbb{D}_{t,1}(D) = \{u \in \mathbb{D}_t : x_u(t) \in \sqrt{2}\sigma_1 t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sigma_1 \log(t) + D\}.$$

Pour obtenir un minorant à la probabilité (4.2.4), on regarde seulement les descendants de

$$w_0 = \arg \max_{w \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2},1}(D)} x_w \left( \frac{t}{2} \right)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \bigcup_{w \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2},1}(D)} \bigcup_{u,v \in \mathbb{D}_t^{(w)}} \left\{ x_u(t) \in \hat{m}(t) + D, x_v(t) \in \hat{m}(t) + D, Q_t(u,v) \in \left[ \frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r \right] \right\} \right) \\ & \geq \mathbb{P} \left( \left\{ x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) \in m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + D \right\} \cap \bigcup_{u,v \in \mathbb{D}_t^{(w_0)}} \left\{ x_u(t) \in \hat{m}(t) + D, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. x_v(t) \in \hat{m}(t) + D, Q_t(u,v) \in \left[ r, \frac{t}{2} + r \right] \right\} \right). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété classique  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B)$  et la propriété de Markov 1.3.3 du mouvement brownien branchant, on réécrit la dernière probabilité comme étant

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) \in m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + D \right) \mathbb{P} \left( \bigcup_{u,v \in \mathbb{D}_t^{(w_0)}} \left\{ x_u(t) \in \hat{m}(t) + D, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. x_v(t) \in \hat{m}(t) + D, Q_t(u,v) \in \left[ r, \frac{t}{2} + r \right] \right\} \mid x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) \in m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + D \right) \\ & = \mathbb{P} \left( x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) \in m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + D \right) \mathbb{P} \left( \bigcup_{u',v' \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}}^{(w_0)}} \left\{ x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) + x_{u'}^{(w_0)} \left( \frac{t}{2} \right) \in \hat{m}(t) + D, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) + x_{v'}^{(w_0)} \left( \frac{t}{2} \right) \in \hat{m}(t) + D, Q_{\frac{t}{2}}(u',v') \in [0, r] \right\} \right). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

En considérant la pire position de  $w_0$  possible pour qu'une paire de ses descendants atteignent  $\hat{m}(t) + D$ , soit  $x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) = m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + \underline{D}$ , on obtient que la probabilité (4.2.5) est supérieure ou égale à

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( x_{w_0} \left( \frac{t}{2} \right) \in m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + D \right) \mathbb{P} \left( \bigcup_{u',v' \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}}^{(w_0)}} \left\{ m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + \underline{D} + x_{u'}^{(w_0)} \left( \frac{t}{2} \right) \in \hat{m}(t) + D, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. m_1 \left( \frac{t}{2} \right) + \underline{D} + x_{v'}^{(w_0)} \left( \frac{t}{2} \right) \in \hat{m}(t) + D, Q_{\frac{t}{2}}(u',v') \in [0, r] \right\} \right). \end{aligned}$$

On réécrit en utilisant la définition de  $\hat{m}(t)$  pour obtenir que le membre de droite de l'équation (4.2.3) est supérieur ou égal à

$$\mathbb{P}\left(\exists u', v' \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 2}(D - \underline{D}) : Q_{\frac{t}{2}}(u', v') \in [0, r]\right) \mathbb{P}\left(x_{w_0}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_1\left(\frac{t}{2}\right) + D\right)$$

En vertu du théorème 3.1.1, la probabilité  $\mathbb{P}\left(x_{w_0}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_1\left(\frac{t}{2}\right) + D\right)$  est strictement positive. Une application du théorème 3.2.1 permet d'obtenir que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists u', v' \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 2}(D - \underline{D}) : Q_{\frac{t}{2}}(u', v') \in \left[r, \frac{t}{2} - r\right]\right) = 0,$$

signifiant que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\forall u', v' \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 2}(D - \underline{D}) : Q_{\frac{t}{2}}(u', v') \in [0, r] \cup \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right) = 1. \quad (4.2.6)$$

Rappelons que la présence de diffusion ne change pas la validité des théorèmes du chapitre 3, voir la remarque 3.2.7 à ce sujet. Avec la remarque 3.2.2 appliquée à l'intervalle  $[0, \frac{t}{2}]$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + r\right]\right) \\ & \mathbb{P}\left(\exists u', v' \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 2}(D - \underline{D}) : Q_{\frac{t}{2}}(u', v') \in [0, r]\right) \mathbb{P}\left(x_{w_0}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_1\left(\frac{t}{2}\right) + D\right) > 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

On pourrait arrêter la démonstration ici, puisque l'équation (4.2.7) est suffisante pour avoir (4.1.2). Un petit effort supplémentaire permettra d'obtenir la présence de branchements dans l'intervalle  $[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}]$ .

Donc pour la première probabilité de l'équation (4.2.2), on obtient dans un premier temps

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right) \\ & \geq \mathbb{P}\left(\exists (u, v) \in H_t : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

En rappelant que si le temps de branchement de  $u, v$  se retrouve dans la première moitié de l'intervalle  $[0, t]$ , alors il est le même que le temps de branchement entre leur ancêtre au temps  $\frac{t}{2}$ , on se concentre sur les paires de particules ayant un ancêtre différent au temps  $\frac{t}{2}$ .



La probabilité de l'équation (4.2.8) vaut

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D)} \bigcup_{\substack{u \in \mathbb{D}_t^{(w_1)} \\ v \in \mathbb{D}_t^{(w_2)}}} \left\{ x_u(t) \in \hat{m}(t) + D, x_v(t) \in \hat{m}(t) + D, \right. \right. \\ \left. \left. Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[ \frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} \right] \right\}\right) \quad (4.2.9)$$

Pour obtenir un minorant à la probabilité (4.2.9), on regarde seulement les descendants de  $w_1, w_2$  dont la position est la plus élevée, c'est-à-dire

$$u_0 = \arg \max_{u \in \mathbb{D}_t^{(w_1)}} x_u(t)$$

et

$$v_0 = \arg \max_{v \in \mathbb{D}_t^{(w_2)}} x_v(t).$$

On obtient que (4.2.9) est supérieure ou égale à

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D)} \left\{ x_{u_0}(t) \in \hat{m}(t) + D, x_{v_0}(t) \in \hat{m}(t) + D, Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[ \frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} \right] \right\}\right).$$

On réutilise la propriété classique  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B)$  ainsi que la propriété de Markov du mouvement brownien branchant 1.3.3 pour réécrire la dernière probabilité comme étant

$$\mathbb{P}\left(x_{u_0}(t) \in \hat{m}(t) + D, x_{v_0}(t) \in \hat{m}(t) + D \mid \exists w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D) : Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[ \frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} \right]\right) \\ = \mathbb{P}\left(x_{w_1}\left(\frac{t}{2}\right) + x_{u_0}^{(w_1)}\left(\frac{t}{2}\right) \in \hat{m}(t) + D, x_{w_2}\left(\frac{t}{2}\right) + x_{v_0}^{(w_2)}\left(\frac{t}{2}\right) \in \hat{m}(t) + D\right) \\ \times \mathbb{P}\left(\exists w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D) : Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[ \frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} \right]\right).$$

En considérant les pires positions de  $w_1, w_2$  possibles pour que le maximum de leurs descendants atteignent  $\hat{m}(t) + D$ , soit  $x_{w_1}\left(\frac{t}{2}\right) = x_{w_2}\left(\frac{t}{2}\right) = m_1\left(\frac{t}{2}\right) + \underline{D}$ , on obtient que la probabilité ci-dessus est supérieure ou égale à

$$\mathbb{P}\left(m_1\left(\frac{t}{2}\right) + \underline{D} + x_{u_0}^{(w_1)}\left(\frac{t}{2}\right) \in \hat{m}(t) + D, m_1\left(\frac{t}{2}\right) + \underline{D} + x_{v_0}^{(w_2)}\left(\frac{t}{2}\right) \in \hat{m}(t) + D\right) \\ \times \mathbb{P}\left(\exists w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D) : Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[ \frac{t}{2} - r, \frac{t}{2} \right]\right).$$

On réécrit pour finalement obtenir que le membre de droite de l'équation (4.2.8) est supérieur ou égal à

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(x_{u_0}^{(w_1)}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_2\left(\frac{t}{2}\right) + D - \underline{D}, x_{v_0}^{(w_2)}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_2\left(\frac{t}{2}\right) + D - \underline{D}\right) \\ & \times \mathbb{P}\left(\exists w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D) : Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

Puisqu'ils proviennent de particules différentes,  $x_{u_0}^{(w_1)}(t)$  et  $x_{v_0}^{(w_2)}(t)$  sont indépendants, et deux applications du théorème 3.1.1 permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(x_{u_0}^{(w_1)}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_2\left(\frac{t}{2}\right) + D - \underline{D}, x_{v_0}^{(w_2)}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_2\left(\frac{t}{2}\right) + D - \underline{D}\right) \\ & = \mathbb{P}\left(x_{u_0}^{(w_1)}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_2\left(\frac{t}{2}\right) + D - \underline{D}\right) \mathbb{P}\left(x_{v_0}^{(w_2)}\left(\frac{t}{2}\right) \in m_2\left(\frac{t}{2}\right) + D - \underline{D}\right) > 0. \end{aligned}$$

Finalement, une application du théorème 3.2.1 et de la remarque 3.2.2 donne d'une manière similaire à l'équation (4.2.6) que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists w_1, w_2 \in \mathbb{D}_{\frac{t}{2}, 1}(D) : Q_{\frac{t}{2}}(w_1, w_2) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right) > 0.$$

D'une manière analogue à l'équation (4.2.7), on obtient que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{t > 6r} \mathbb{P}\left(\exists u, v \in \hat{\mathbb{D}}_t(D) : Q_t(u, v) \in \left[\frac{t}{2} - r, \frac{t}{2}\right]\right) > 0.$$

Le théorème est donc démontré.  $\square$

Il reste quelques détails à préciser afin de caractériser complètement les trajectoires des particules extrêmes du mouvement brownien branchant inhomogène. En particulier, il serait intéressant de donner une caractérisation des trajectoires des particules extrêmes, c'est-à-dire déterminer des enveloppes à l'intérieur desquelles les trajectoires des particules extrêmes se situent pour la majeure partie de leur existence avec grande probabilité. Ceci donnerait des analogues aux théorèmes 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 pour le mouvement brownien branchant inhomogène. Des ouvertures dont celle-ci seront discutées dans la conclusion.

# Chapitre 5

---

## CONCLUSION

### 5.1. RETOUR

La principale contribution de ce mémoire est le théorème 4.1.1 du chapitre 4, étudiant la généalogie des particules extrêmes d'un mouvement brownien branchant dans un environnement inhomogène. Pour obtenir ce résultat, on a dans un premier temps considéré la position du maximum de marches aléatoires branchantes inhomogènes, au chapitre 2. Les résultats de ce chapitre sont principalement tirés de [FZ1]. On a ensuite étudié la généalogie du mouvement brownien branchant, dans le cas homogène. Les résultats du chapitre 3 se retrouvent dans [ABK]. Finalement, on est arrivé à démontrer le théorème 4.1.1 en combinant les résultats des premiers chapitres et en réutilisant les méthodes s'y trouvant.

Dans ce qui suit, on présente quelques possibilités pour un lecteur intéressé à poursuivre et approfondir les travaux de ce mémoire.

### 5.2. DÉVELOPPEMENT DU CAS CONTINU

Il y a plusieurs manières possibles de poursuivre les recherches entamées au chapitre 4. Une première voie serait de compléter le portrait des particules extrêmes du mouvement brownien branchant inhomogène avec profil décroissant de variances en donnant des théorèmes de localisation analogues aux théorèmes 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5. En particulier, il serait bon de confirmer ou d'infirmer le fait que toutes les particules extrêmes au temps  $t$  le sont également au temps  $\frac{t}{2}$ . On

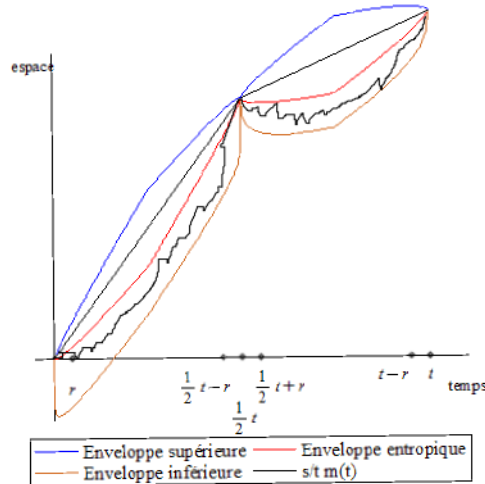


FIGURE 5.1. Enveloppes inhomogènes hypothétiques.

croit que le portrait de la trajectoire d'une particule extrême ressemble à celui illustré à la figure 5.1.

Une autre piste serait de faire la même étude pour le profil croissant de variance, et par le fait même confirmer l'heuristique appuyée par les simulations numériques de la section 4.1.2 montrant que les temps de branchement dans le profil croissant ont un comportement similaire au cas homogène. On a déjà noté la similitude entre le profil croissant et le cas homogène de la marche aléatoire branchante pour la position du maximum, voir la discussion précédant le lemme 2.2.5 pour plus de détails.

Les mêmes idées de généralisation discutées à la section 2.5 pourraient également être intéressantes du point de vue des temps de branchement. Également, le cas d'une diffusion variant de manière continue avec le temps est un problème intéressant. De premiers résultats sur ce modèle ont été obtenus dans [FZ2].

### 5.3. TEMPS DE BRANCHEMENT EN TEMPS DISCRET

Il serait intéressant d'adapter les résultats du chapitre 3 à la marche aléatoire branchante homogène et inhomogène. En particulier, expliciter le fait que les temps de branchement de la marche aléatoire branchante se comporte de manière analogue au mouvement brownien branchant, ce qui est appuyé par les simulations numériques de la section 4.1.2.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [AB] L. ADDARIO-BERRY, B. REED, *Minima in branching random walks*, Ann. Probab., 37(3) : pages 1044-1079, 2009.
- [Ap] S. APRIL, *Étude des maxima de champs gaussiens corrélés*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2013.
- [ABK] L.-P. ARGUIN, A. BOVIER, N. KISTLER, *Genealogy of extremal particles of branching Brownian motion*, Comm. Pure Appl. Math., 64 : pages 1647-1676, 2011.
- [AN] K. B. ATHREYA, P.E. NEY, *Branching Processes*, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [Ai] E. AÏDÉKON, *Convergence in law of the minimum of a branching random walk*, Ann. Probab., 41(3A) : pages 1362-1426, 2013.
- [Ba] M. BACHMANN, *Limit theorems for the minimal position in a branching random walk with independent logconcave displacements*, Adv. in Appl. Probab. Volume 32, Number 1, pages 159-176, 2000.
- [Br1] M. BRAMSON, *Maximal displacement of branching brownian motion*, Comm. Pure Appl. Math., 31(5) : pages 531-581, 1978.
- [Br2] M. BRAMSON, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves*, Mem. Amer. Math. Soc. 44, 1983.
- [Du] R. DURRETT, *Probability Theory and Examples*, Fourth Edition, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [FZ1] M. FANG ET O. ZEITOUNI, *Branching random walks in time inhomogeneous environments*, Electron. J. Probab. volume 17, numéro 67, 2012.
- [FZ2] M. FANG ET O. ZEITOUNI, *Slowdown for time inhomogeneous branching Brownian motion*, Journal of Statistical Physics, volume 149(1), 2012.

- [Gu] E.J. GUMBEL, *Statistics of Extremes*, Courier Dover Publications, New York, 2004.
- [Sc] T.H. SCHEIKE, *A boundary-crossing result for Brownian motion*. J. Appl. Probab. 29 no. 2, pages 448-453. 1992.