

Université de Montréal

Les erreurs de mesure sur la variable indépendante dans le cadre
de séries chronologiques

par

Christine Drouin

Département de sciences économiques

Faculté des arts et des sciences

CENTRE DE DOCUMENTATION
12 AOUT 1996
SCIENCES ÉCONOMIQUES

Rapport de recherche présenté à la faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès
sciences (M.Sc.) en sciences économiques
juin, 1996

©Christine Drouin

(

(

REMERCIEMENTS

Je voudrais souligner les encouragements et le soutien moral constant de ma famille et de mes amis durant cette dernière année qui fût particulièrement difficile à plusieurs niveaux pour moi. C'est grâce à eux que je termine ma maîtrise dans les temps que je m'étais fixés.

Je voudrais aussi remercier mon directeur de recherche monsieur Marcel Dagenais, pour sa disponibilité et ses précieux conseils qui furent toujours des plus bénéfiques par son excellente connaissance dans le domaine.

Table des matières

Introduction.....	1
I-Partie théorique.....	3
I.1-Graphiques explicatifs	5
I.2-Approche de Granger et Morris	7
I.3-Résumé de l'approche	8
II-Le modèle.....	10
II.1-Covariance	13
II.2-Variances	14
III-Méthode de Fuller.....	17
IV-Outil de comparaison des résultats.....	19
L'erreur quadratique moyenne	
V-Discussion des expériences de Monte Carlo.....	21
V.1-Explication des termes employés	24
V.2-Tableau comparatif 1 (avec $R^2=0.5$)	25
V.3-Tableau comparatif 2 (1000 observations)	26
V.4-Tableau comparatif 3 (150 observations)	27
VII-Conclusion.....	28
VIII-Annexe.....	33
VIII.1-Appendice A	29
VIII.1.1-Régression de base	29
VIII.1.2-Description des variables	29
VIII.1.3-Calculs de variances	32
VIII.1.4-Calculs de covariances	33
VIII.2-Appendice B	37
VIII.2.1-Rappel de la méthode de Yule Walker	37
VIII.2.2-Forme d'un processus ARMA(2,1)	38
VIII.3-Appendice C	40
VIII.3.1-Calculs des valeurs initiales	40
VIII.4-Appendice D	43
VIII.4.1-Démonstration du R carré de 0.5	43
IX-Références.....	46

Introduction

Il est de connaissance commune que dans les applications économiques, il y a toujours possibilité de présence d'erreurs de mesure sur les variables, que ce soit par le moyen utilisé pour mesurer les variables ou par l'échantillon considéré. Il demeure que dans la plupart des cas, comme par exemple dans un modèle avec autocorrélation de premier ordre des termes d'erreur, la majorité des économètres vont préférer corriger ce problème par des techniques bien connues comme celles de Cochrane-Orcutt, Hildreth-Lu ou Prais-Winsten, plutôt que de s'attarder au problème qui peut être plus sérieux, à savoir celui des erreurs de mesure sur la variable indépendante de la régression.

Plusieurs études montrent que bien souvent, l'application des moindres carrés ordinaires sans correction au préalable pour la corrélation dans le temps des termes d'erreur, donne de meilleurs résultats, c'est-à-dire une estimation plus fiable des paramètres en fonction du biais et de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (voir Marcel C. Dagenais, *Journal of Econometrics* 64, 1994, 145-163).

De nombreuses méthodes ont été utilisées afin de contrecarrer les effets de distorsion qu'entraînent les erreurs de mesure sur les résultats, comme les méthodes de variables retardées ou à celles des moments d'ordre supérieur.

(La présente recherche a pour objectif de développer un estimateur plus performant au sens de l'erreur quadratique moyenne que l'application de simples moindres carrés ordinaires, lorsqu'il y a erreurs de mesure sur la variable indépendante, dans les modèles de régression basés sur des séries chronologiques. Tout d'abord, il est nécessaire d'estimer la variance des erreurs de mesure sur la variable, ce qui sera possible par une hypothèse sur les processus stochastiques à l'origine de la variable originale et de son erreur de mesure. En premier lieu, il sera question du cas asymptotique et par la suite, on considèrera le cas d'échantillons de taille finie. Tous les échantillons proviennent d'expériences de Monte Carlo.

I-Partie théorique

On sait que le biais introduit par la présence d'erreur de mesure sur les variables dépend de l'importance de la variance de cette erreur de mesure par rapport à la variance du vrai régresseur.

Lorsqu'on travaille avec des données économiques, on peut présumer que l'erreur de mesure sur la variable est probablement moins corrélée dans le temps que ne l'est la variable originale. Or, la correction pour l'autocorrélation dans le temps du terme d'erreur de la régression, revient à transformer chaque variable indépendante de la manière suivante:

$$X_t^* = X_t - \hat{\rho}X_{t-1} \quad (|\hat{\rho}| < 1)$$

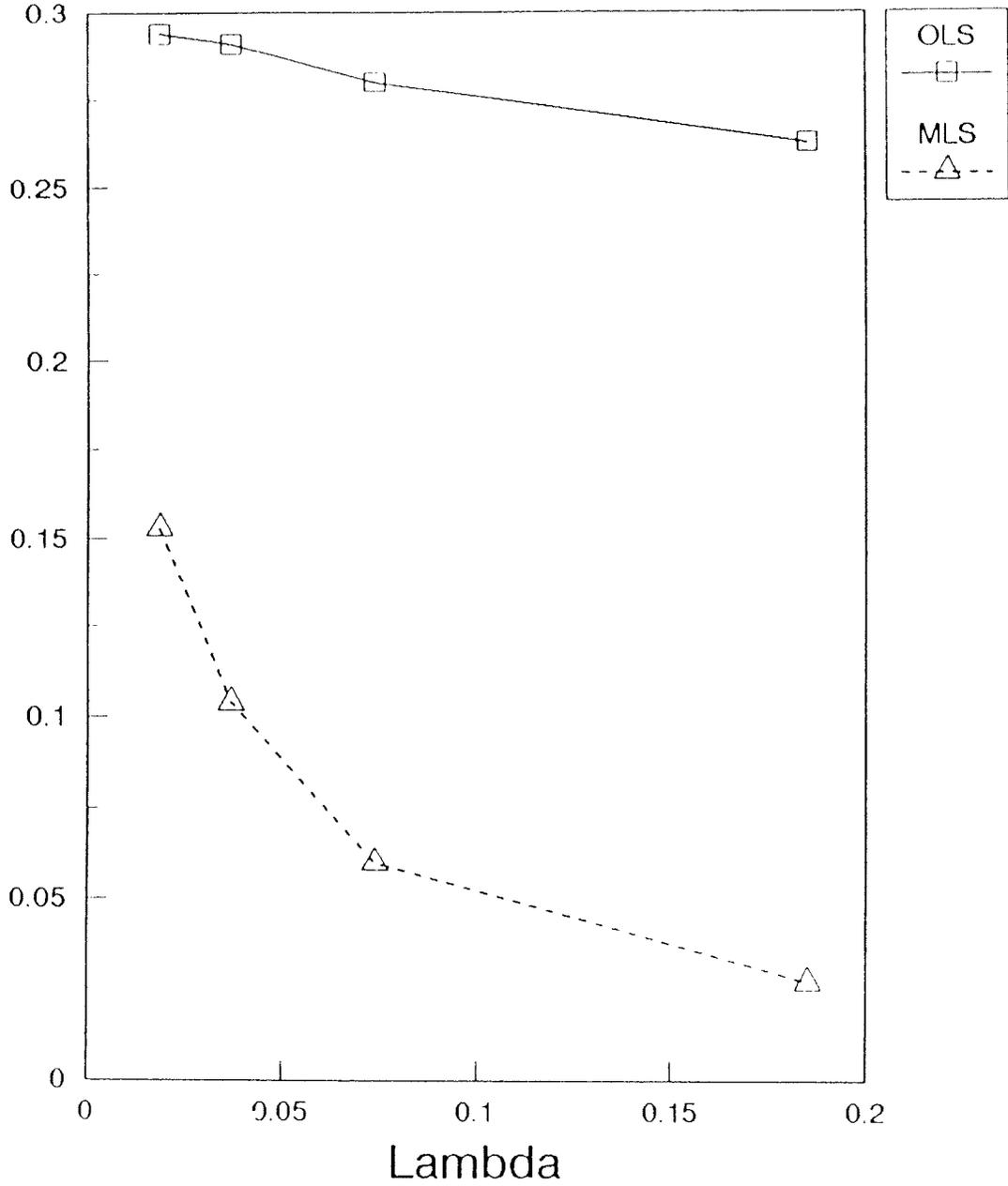
Donc, si X_t représente la valeur observée et qu'elle contient une erreur de mesure, alors l'erreur de mesure de X_t^* est encore plus importante. L'erreur de mesure étant plus grande dans la variable transformée, entraîne ainsi un plus grand biais dans l'estimateur.

Afin de justifier l'approche présentée dans ce rapport, un exemple tiré de Dagenais (1994) éveillera l'attention sur les écueils probables dans la façon de traiter le problème des erreurs de mesure sur les variables. Si par exemple, la variable

indépendante est mesurée avec erreur, et que cette erreur de mesure est égale à 5% de la variance de la variable originale, et que de plus, les erreurs dans les variables ne sont pas corrélées entre observations, les résultats montrent qu'on estime en moyenne, en utilisant les moindres carrés ordinaires, le paramètre à 0.28, alors que la vraie valeur est de 0.3. Si par contre, on utilise une technique pour tenir compte de l'autocorrélation dans le temps, on obtient en moyenne 0.15, ce qui est nettement plus loin de la vraie valeur. Dans cet exemple, $\rho_u = 0.95$, $\rho_v = 0$, $\rho_x = 0.95$ et $R^2 = 0.7$, où ρ_u est la corrélation entre les termes d'erreur de la régression et ρ_v est la corrélation entre les erreurs de mesure. Se référer aux graphiques qui suivent. Il est à noter que λ représente l'importance relative de l'erreur de mesure sur la variable.

source: M.G. Dagenais/*Journal of Econometrics* 64 (1994) 145–163

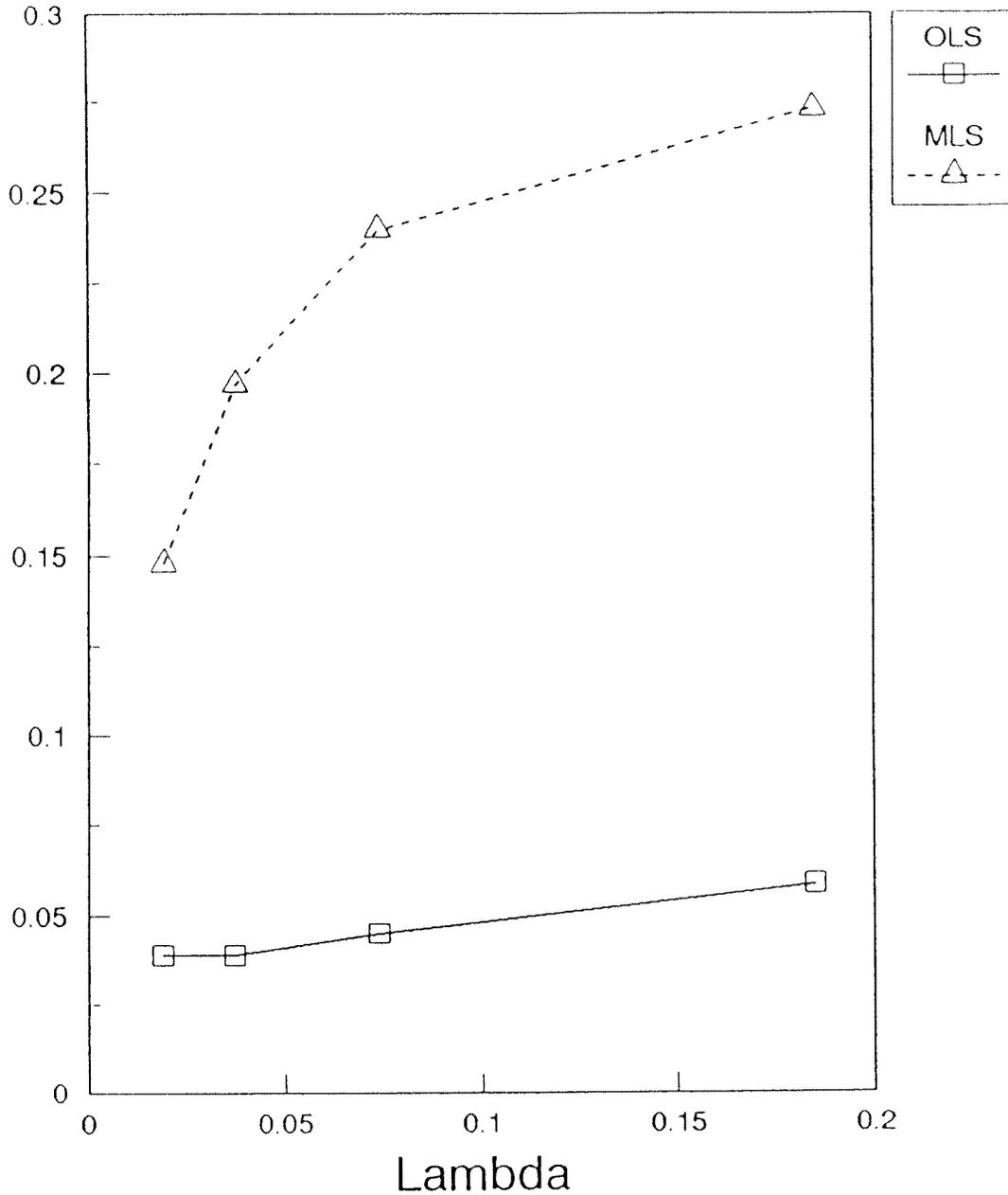
Mean Value



* $X_t = X_{t-1} + \xi_t$; σ_x^2 , σ_u^2 , σ_v^2 and σ_ξ^2 are similar to σ_x^2 , σ_u^2 , σ_v^2 and σ_ξ^2 used for Figures 1 and 2 with $\rho_x = .95$

Source: M.G. Dagenais/Journal of Econometrics 64 (1994) 145-163

RMSE



* $X_t = X_{t-1} + \xi_t$; $\sigma_{x_1}^2$, σ_u^2 , σ_v^2 and σ_ξ^2 are similar to σ_x^2 , σ_u^2 , σ_v^2 and σ_ξ^2 used for Figures 1 and 2 with $\rho_x = .95$

RMSE: racine carrée de l'erreur quadratique moyenne

I.2-Approche de C. W. J. Granger et M.J. Morris:

L'approche de Granger et Morris(1976) est employée pour combiner les processus autorégressifs d'ordre 1, utilisés pour générer la variable explicative et son erreur de mesure, dans le modèle étudié.

Lorsqu'on a une somme de deux séries chronologiques, il a été démontré que cette somme correspond en général à un modèle ARMA. Comme les séries en économie sont agrégées et mesurées avec erreur, il s'ensuit que ce genre de modèles mixtes est fréquent en pratique. Les publications de "Box et Jenkins" ont grandement contribué à l'intérêt des analystes et des économètres pour les séries chronologiques parsimonieuses.

En pratique l'ARMA est plus difficile à faire correspondre aux données qu'un AR, mais il est le plus efficace statistiquement parlant. Selon "Box et Jenkins", si un AR(p) et un ARMA(p',q') satisfont les données, le second a besoin de l'estimation d'un moins grand nombre de coefficients. Ce qui signifie que,

$$p > p' + q'.$$

Même si l'ARMA implique l'estimation de moins de coefficients que les modèles alternatifs, il demeure plus difficile de le comprendre, de l'interpréter et de l'expliquer dans un monde réel.

(I.3-Résumé de l'approche:

La somme de deux séries indépendantes comme X_t et V_t , de moyenne zéro, et stationnaires est ici considérée. Limitons-nous pour le moment à une situation théorique afin de comprendre le mécanisme qui a été appliqué au modèle développé dans la présente recherche. Soient,

$$\tilde{X}_t \sim \text{ARMA}(p, m) \quad \text{et} \quad V_t \sim \text{ARMA}(q, n)$$

où,

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t$$

alors $X_t \sim \text{ARMA}(x, y)$.

Que l'on peut aussi écrire:

$$\text{ARMA}(x, y) = \text{ARMA}(p, m) + \text{ARMA}(q, n)$$

Lemme: $\text{MA}(m) + \text{MA}(n) = \text{MA}(y)$

où $y \leq \max(m, n)$

Une interaction entre les deux processus MA est à l'origine de la réduction de l'ordre de la somme du processus.

Théorème de base: $\text{ARMA}(p, m) + \text{ARMA}(q, n) = \text{ARMA}(x, y)$

où $x \leq p + q$ et $y \leq \max(p + n, q + m)$.

(Box et Jenkins)

(Preuve: Soient,

$$a(B)\tilde{X}_t = c(B)w_t$$

$$b(B)V_t = d(B)s_t$$

où a, b, c, d sont des polynômes en B d'ordre p, q, m, n respectivement. w et s sont deux bruits blancs indépendants. Comme

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t$$

on a donc,

$a(B)b(B)X_t = b(B)a(B)\tilde{X}_t + a(B)b(B)V_t = b(B)c(B)w_t + a(B)d(B)s_t$
où le premier terme de la partie de droite est un MA($q + m$) et le second terme est un MA($p + n$), ce qui fait que par le lemme on peut dire que la partie de droite est un MA(y), où $y \leq \max(p + n, q + m)$. De plus, cela permet d'établir le théorème.

Considérons maintenant des cas particuliers du théorème de base. C'est-à-dire, des cas où la réduction du nombre de paramètres à estimer n'a pas lieu. Nous présumerons donc, que les deux variables \tilde{X}_t et V_t sont des composantes indépendantes et que l'erreur observée est un bruit blanc. Il existe cinq catégories concevables de ces cas que nous dirons spéciaux. La catégorie sur laquelle l'intérêt s'est porté, est la suivante (pour les autres voir l'article cité plus haut):

$$AR(p) + AR(q) = ARMA(p + q, \max(p, q))$$

et en particulier,

$AR(1) + AR(1) = ARMA(2, 1)$, qui correspond à l'agrégat de deux séries $AR(1)$ indépendantes.

II-Le modèle:

Le modèle discuté en est un où il y a erreur de mesure sur la variable indépendante et où le terme d'erreur de la régression est autocorrélé dans le temps.

Le modèle que l'on a examiné est le suivant:

$$\tilde{Y}_t = \beta \tilde{X}_t + g_t \quad t = 1, \dots, N \quad (1)$$

où \tilde{X}_t est une variable exogène stochastique avec une variance de 1, et β est inconnu mais fixé à 1 pour fin d'analyse. Pour ce qui est de g_t , il est généré par:

$$g_t = \rho g_{t-1} + f_t \quad |\rho| < 1 \quad (2)$$

Le f_t est un bruit blanc distribué normalement, et indépendant des g_{t-1} aussi bien que des X_t et des V_t . Il reste à souligner que les vraies valeurs de la variable, à savoir les X_t , ne sont pas observables, seules les valeurs de X_t avec erreur de mesure sont disponibles. La notation employée se lit comme suit:

où,

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t \quad (3)$$

\tilde{X}_t : la vraie valeur qui n'est pas observable

X_t : ce qu'on observe, ce qui est disponible

V_t : l'erreur de mesure sur X_t

Pour ce qui est de V_t , c'est une erreur de mesure stochastique indépendante des \tilde{X}_t aussi bien que des g_t . On suppose qu'aucune erreur de mesure n'est rattachée à Y_t .

Les X_t sont corrélées dans le temps par le processus autorégressif de premier ordre suivant:

$$AR(1): \quad \tilde{X}_t = \phi \tilde{X}_{t-1} + \omega_t + \mu \quad |\phi| < 1 \quad (4)$$

où les ω_t sont des bruits blancs distribués normalement et indépendants des \tilde{X}_{t-1} ainsi que de toutes les autres variables stochastiques du modèle. De manière similaire, les erreurs de mesure sur la variable indépendante sont corrélées dans le temps par:

$$AR(1): \quad V_t = \psi V_{t-1} + s_t \quad |\psi| < 1 \quad (5)$$

où s_t est encore une fois un bruit blanc indépendant de V_{t-1} et des autres variables stochastiques du modèle.

Développement du modèle:

On a,

$$\tilde{X}_t \sim AR(1), \quad V_t \sim AR(1), \quad E(X_t) = 0$$

On peut réécrire l'équation (4),

$$(1 - \phi B) \tilde{X}_t = \omega_t + \mu \quad (6)$$

où $\mu = 0$,

et l'équation (5),

$$(1 - \psi B) V_t = s_t \quad (7)$$

Comme,

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t$$

on obtient alors,

$$(1 - \phi B) (1 - \psi B) X_t = (1 - \phi B) s_t + (1 - \psi B) \omega_t + (1 - \psi B) \mu$$

que l'on peut noter de la façon suivante:

$$X_t = C_1 X_{t-1} + C_2 X_{t-2} + F + \eta_t$$

où,

$$(1 - \psi) \mu = F$$

$$\psi + \phi = C_1$$

$$-\phi\psi = C_2$$

$$\eta_t = s_t - \phi s_{t-1} + \omega_t - \psi \omega_{t-1} = \varepsilon_t - \delta \varepsilon_{t-1}$$

On aura $X_t \sim ARMA(2, 1)$

L'objectif est alors d'estimer,

$$C_1, C_2, \delta, \sigma_{\eta_t}^2, COV(\eta_{t-1}, \eta_t).$$

II.1-Covariance:

$$COV(\eta_{t-1}, \eta_t) = E(\eta_{t-1}, \eta_t)$$

En faisant les calculs, on arrive à,

$$COV(\eta_{t-1}, \eta_t) = -\phi\sigma_{s_t}^2 - \psi\sigma_{\omega_t}^2 \neq 0$$

donc les termes d'erreur sont corrélés.

Calcul de la covariance de eta:

$$\begin{aligned} COV(\eta_t, \eta_{t-1}) &= E(\varepsilon_t - \delta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \delta\varepsilon_{t-2}) \\ &= E(-\delta\varepsilon_{t-1}^2) = -\delta VAR(\varepsilon_{t-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

II.2-Variances:

Calcul de la variance du terme d'erreur de l'équation (6):

$$\sigma_{\omega}^2 = (1 - \phi^2) \sigma_{\tilde{X}}^2 \quad (9)$$

Calcul de la variance de l'équation (7):

$$(1 - \psi^2) \sigma_V^2 = \sigma_S^2 \quad (10)$$

En estimant le processus ARMA(2,1) par l'agrégat des deux séries AR(1), c'est-à-dire des équations(6) et (7) prises ensemble, on peut alors calculer la valeur de phi et de psi à l'aide des coefficients estimés par le processus ARMA, C_1 et C_2 . Comme on a une équation de forme quadratique, on obtient deux valeurs de phi et deux valeurs pour psi. Pour psi par exemple,

$$\psi = (C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4C_2}) / 2$$

On a adopté comme règle de sélection des valeurs:

$|\psi| < |\phi| \Leftrightarrow$ coefficient de ϕ est plus élevé en valeur absolue

La raison est que l'on suppose que les vraies valeurs(\tilde{X}) sont plus corrélées entre elles que ne le sont les erreurs de mesure entre elles(V). Le coefficient de phi sera donc le plus élevé en valeur absolue.

(Calcul de la variance de eta:

$$\text{VAR}(\eta) = (1 + \delta^2) \text{VAR}(\epsilon_t) \quad (11)$$

comme on a deux équations (8,11), deux inconnues (delta, variance de epsilon), on peut résoudre le tout. Pour ce qui est de delta, on a encore une fois une forme quadratique, donc deux valeurs possibles. On choisit arbitrairement la plus petite valeur en valeur absolue. Il faut noter que l'estimation de delta ne jouera aucun rôle dans le calcul de l'estimateur de beta proposé plus loin.

La connaissance de,

$$\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{\phi}, \psi, \hat{\sigma}_\eta^2, \text{CÔV}(\eta_{t-1}, \eta_t), \delta \text{ et } \hat{\sigma}_\epsilon^2$$

permet d'estimer la variance du terme d'erreur s et celle de oméga.

$$\text{CÔV}(\eta_{t-1}, \eta_t) = -\hat{\phi}\sigma_s^2 - \psi\sigma_\omega^2 \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = (1 + \psi^2) \sigma_\omega^2 + (1 + \hat{\phi}^2) \sigma_s^2 \quad (13)$$

De (12), on isole la variance de s:

$$\hat{\sigma}_s^2 = \text{CÔV}(\eta_{t-1}, \eta_t) + \psi\hat{\sigma}_\omega^2 / -\hat{\phi} \quad (14)$$

(De (13), on isole la variance de oméga:

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \hat{\sigma}_\eta^2 - (1 + \hat{\phi}^2) \hat{\sigma}_s^2 / (1 + \hat{\psi}^2) \quad (15)$$

si on met (15) dans (14),

$$\hat{\sigma}_s^2 = (1 + \hat{\psi}^2) \text{CÔV}(\eta_{t-1}, \eta_t) + \hat{\psi}^2 \hat{\sigma}_\eta^2 / -\hat{\phi}(1 + \hat{\psi}^2) + \hat{\psi}(1 + \hat{\phi}^2) \quad (16)$$

et que l'on met la variance de s ainsi trouvée dans (15), alors on obtient la variance de oméga estimée. C'est ainsi que l'on obtient l'expression de la variance estimée de V, l'erreur de mesure sur la variable explicative:

$$\hat{\sigma}_V^2 = \hat{\sigma}_s^2 / (1 - \hat{\psi}^2) \quad (17)$$

Les deux façons d'estimer les paramètres de notre régression, qui ont été comparées sont:

$$1) \text{ beta} = \frac{(\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}'\underline{Y}}{\text{T}} \quad \text{estimation MCO}$$

$$2) \text{ beta} = \frac{(\underline{X}'\underline{X} - \hat{\sigma}_V^2)}{\text{T}}^{-1} \underline{X}'\underline{Y} \quad \text{estimateur développé}$$

Par contre, lors des simulations il s'est avéré nécessaire de modifier quelque peu l'estimateur afin de s'assurer que l'estimateur a des moments finis dans de petits échantillons.

III-MÉTHODE DE FULLER:

Comme les estimateurs n'ont pas nécessairement des moyennes et des variances finies dans de petits échantillons, la modification suivante permet d'obtenir la certitude que l'estimateur a des moments finis et que ses propriétés sont supérieures à celles de l'estimateur obtenu par maximum de vraisemblance.

Le modèle considéré est:

$$\tilde{Y}_t = \beta_0 + \tilde{X}_t \beta_1 + g_t$$

où,

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t$$

et,

$$\sigma_V^2 \text{ est connu, } \sigma_X > 0 \text{ et } \beta_0 = 0$$

l'estimateur était,

$$\hat{\beta}_1 = (m_{XX} - \sigma_V^2)^{-1} m_{XY}$$

l'estimateur alternatif proposé par Fuller, qui est moins biaisé pour β_1 , est,

$$\hat{\beta}_1 = (\hat{H}_{XX} + \alpha (n - 1)^{-1} \sigma_v^2)^{-1} m_{XY}$$

$$m_{XX} : \frac{X'X}{T}$$

$$m_{XY} : \frac{X'Y}{T}$$

où

$$\alpha > 0.$$

En le posant égal à,

$$\alpha = 2 + 2 m_{XX}^{-1} \sigma_v$$

l'estimateur a une plus petite moyenne des erreurs au carrée qu'avec par exemple $\alpha = 2$.

$$\hat{H}_{XX} = m_{XX} - \sigma_v \quad \text{si} \quad \hat{\lambda} \geq 1 + (n - 1)^{-1}$$

et,

$$= m_{XX} - (\hat{\lambda} - (n - 1)^{-1}) \sigma_v \quad \text{si} \quad \hat{\lambda} < 1 + (n - 1)^{-1}$$

où λ obéit à,

$$|m_{ZZ} - \lambda \text{diag}(0, \sigma_v)| = 0$$

(L'estimateur β_1 est une modification de l'estimateur du maximum de vraisemblance. L'estimateur de la variance de X, dénoté par H_{xx} , n'est jamais plus petit que $(n - 1)^{-1}$ de la variance de l'erreur. Tout simplement, parce que le dénominateur de l'estimateur de β_1 est borné par le bas par un nombre négatif, l'estimateur possède des moments (pour de plus amples détails voir la preuve dans Fuller (voir références)). Cette preuve montre clairement que des modifications de la valeur de alpha lorsque m_{xx} est petit, produit de grands changements dans l'estimateur alors que lorsqu'il est grand, les changements sont négligeables.

IV-Outil de comparaison des résultats:

IV-Erreur quadratique moyenne:

définition:

$$E(\theta - \hat{\theta})^2$$

ce qui implique : variance + biais²

Même si les estimateurs des moindres carrés ordinaires ont des variances faibles, le fait qu'ils sont biaisés lorsqu'il y a erreur de mesure sur les variables, c'est-à-dire que leur distribution n'est pas centrée autour de la vraie valeur du paramètre, fait en sorte qu'il en résulte une erreur quadratique moyenne plus élevée. C'est encore plus vrai lorsque 1) la variance de l'erreur de mesure

variance de tous les estimateurs est relativement faible mais le biais au carré demeure important.

Ce fait peut mener à conclure des choses qui ne représentent pas du tout la réalité. En effet, ignorer les erreurs de mesure sur les variables fait en sorte que la détermination des intervalles de confiance est faussée pour les paramètres de la régression. Par le biais que les MCO engendrent lorsqu'il y a erreur de mesure sur les variables, l'intervalle de confiance à 95% que l'on détermine peut représenter en pratique un intervalle de confiance de presque zéro% et ce, même lorsque les erreurs de mesure sont faibles. Ce qui veut dire que l'intervalle de confiance de 95% n'inclut pas la vraie valeur du paramètre. Ce qui implique du même fait, que les tests de Student sur des coefficients spécifiques de la régression qui correspondent à des erreurs de type I de 5% si on utilise la valeur critique, sont en réalité un test à 100% de l'erreur de type I. On peut en arriver paradoxalement, dans les modèles de régression où il y a plus d'une variable explicative, à rejeter l'hypothèse nulle lorsque celle-ci est vraie avec une probabilité de près de 100%, parce que l'estimateur MCO est biaisé et qu'il a une variance faible.

V-Discussion des expériences de Monte Carlo:

Le fait d'avoir posé, dans les premières expériences, une variance de 1 pour le terme d'erreur de la régression (g) faisait en sorte qu'il en résultait systématiquement un R^2 d'environ 0.5, compte tenu des valeurs fixées pour les paramètres (voir la démonstration en appendice). C'est ce que représentent les résultats du premier tableau. Ces résultats semblent indiquer que l'estimateur développé est plus près en moyenne de sa vraie valeur, 1, mais dans l'ensemble, les résultats ont une erreur quadratique moyenne supérieure à celle des MCO. Donc il est moins bon. Et c'est d'autant plus vrai, lorsque la variance des erreurs de mesure est faible.

. De plus, le fait d'ajouter des valeurs initiales⁽¹⁾, en programmation n'affecte pas les résultats. Son effet se fait sentir lors des simulations qui demandent de forcer la convergence en son absence. Cette commande tire donc son utilité dans les expériences de Monte Carlo par le fait qu'elle permet de faire converger plus rapidement ou converger tout simplement les résultats vers les vraies valeurs en programmation. Lorsque cette commande est absente, c'est la méthode de Yule Walker qui est alors utilisée.

⁽¹⁾ Dans le programme Gauss X, cela se fait en utilisant la commande param.

On constate que les résultats suivent la théorie, en ce sens que le biais est beaucoup plus imposant dans le cas des MCO qu'il ne l'est pour l'estimateur. Par contre, l'estimateur MCO se reprend en ce qui a trait à l'écart-type.

Cependant, pour des séries chronologiques c'est plus réaliste d'avoir des R^2 élevés. Donc, en fixant des R^2 plus élevés on s'aperçoit (tableau 2), que l'estimateur développé performe mieux en général que les MCO en moyenne mais aussi au sens de l'erreur quadratique moyenne, ce qui est un résultat très positif. Le seul cas épineux étudié, c'est lorsqu'on a un R^2 de 0.7 et que la variance de l'erreur de mesure est faible, soit 0.2. Cet état des choses s'explique par un écart-type plus grand que le biais pour l'estimateur que pour les MCO, dû à une présence fragile des erreurs de mesure. On remarque par exemple que le biais présenté par l'estimateur proposé est dans tous les cas beaucoup plus petit que celui des MCO. Donc, l'estimateur développé est plus fiable pour bâtir des intervalles de confiance qu'avec les MCO. Les MCO sont fidèles à eux-mêmes avec des écart-type nettement plus petits que l'estimateur développé. Il n'en reste pas moins que les MCO sont défavorisés presque à tous les coups par rapport à l'estimateur proposé et de façon de plus en plus importante à mesure que la variance de l'erreur de mesure croît, selon l'erreur quadratique moyenne.

(On peut remarquer, qu'une diminution de l'autocorrélation(0.6) entre la variable originale, toute chose étant égale par ailleurs, a pour effet d'augmenter l'erreur quadratique moyenne de notre estimateur(~ 0.02). C'est donc dire, que les résultats obtenus avec l'estimateur développé sont meilleurs lorsque la corrélation de la variable originale est plus importante que ne l'est l'autocorrélation des erreurs de mesure entre elles. Cette idée de départ légitime a donc une incidence sur les résultats observés. Selon la même remarque, une diminution de l'autocorrélation entre les erreurs de mesure(~ 0.3), par rapport à l'autocorrélation entre la vraie variable, améliore nettement la performance de l'estimateur. Le fait d'accroître le nombre d'observations à 500 n'a pas un effet très significatif.

Encore ici, le fait d'avoir la commande "param" ou pas ne semble pas changer les résultats d'une manière ou d'une autre. En effet, il n'est pas possible de constater une évolution dans un sens ou dans un autre, avec les résultats.

La réduction considérable du nombre d'observations dans les expériences de Monte Carlo, plus précisément à 150 observations, permet de rapprocher ces expériences de la réalité. Car il est souvent difficile dans le cadre de séries chronologiques, de disposer de plus d'observations.

Pour la plupart des cas, l'estimateur se comporte mieux avec ces petits échantillons (tableau 3), que les moindres carrés ordinaires, au sens de l'erreur quadratique moyenne. Ces résultats sont semblables à ceux obtenus avec 1000 observations. À l'exception faite, des expériences réalisées avec des R^2 faible(0.7) et une variance de l'erreur de mesure petite(0.2 à 0,4) où l'estimateur performe mieux que les MCO avec 1000 observations, alors que ces résultats ne tiennent plus avec 150 observations.

Afin de bien comprendre les tableaux, une explication des différents termes employés s'avère utile.

V.1-Explication des termes utilisés dans les tableaux:

seed: valeur qui détermine le point de départ de la génération des variables aléatoires

v(v): variance de l'erreur de mesure sur la variable

param: commande pour introduire des valeurs initiales au processus stochastique

sqrt: racine carrée de l'erreur quadratique moyenne

nb d'obs: nombre d'observations dans l'échantillon

nb d'échantillon: nombre d'échantillons considérés

vv: vraies valeurs qui sont à la base de la génération des données

COMPARAISON DES RÉSULTATS DES DEUX MÉTHODES D'ESTIMATION EMPLOYÉES (tableau 1)

seed	v(v)	phi	psi	rho	param	moyenne	biais	écart-type	sqrt	méthode
6845	0.8	0.8	0.5	0.8	absence	0.821261	-0.17874	0.417501	0.454153	estimateur
6845	0.8	0.8	0.5	0.8	absence	0.549915	-0.45009	0.04999	0.452853	MCO
6845	0.8	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.549915	-0.45009	0.04999	0.452853	MCO
6845	0.4	0.8	0.5	0.8	absence	0.94016	-0.05984	0.375793	0.380528	estimateur
6845	0.4	0.8	0.5	0.8	absence	0.708551	-0.29145	0.056841	0.29694	MCO
6845	1.2	0.4	0.5	0.8	absence	1.186044	0.186044	0.727291	0.750709	estimateur
6845	1.2	0.4	0.5	0.8	absence	0.44998	-0.55002	0.03783	0.55132	MCO
565678	1.2	0.8	0.5	0.8	absence	0.847643	-0.15236	0.551701	0.572351	estimateur
565678	1.2	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.902148	-0.09785	0.585873	0.593989	estimateur
565678	1.2	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.446796	-0.5532	0.047044	0.555201	MCO
565678	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	1.015125	0.015125	0.445196	0.445453	estimateur
565678	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.704875	-0.29512	0.053646	0.299961	MCO
565678	0.2	0.8	0.5	0.8	vv	1.070642	0.070642	0.401657	0.407822	estimateur
565678	0.2	0.8	0.5	0.8	vv	0.824135	-0.17586	0.054955	0.184251	MCO

COMPARAISON DES RÉSULTATS DES DEUX MÉTHODES D'ESTIMATION EMPLOYÉES (tableau 2)

Rcarré	nb d'échanti	v(v)	phi	psi	rho	param	moyenne	biais	écart-type	sqrt	méthode
0.9	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.866196	-0.1338	0.158127	0.207142	estimateur
0.9	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.708923	-0.29108	0.030094	0.292629	MCO
0.9	100	1.2	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.72249	-0.27751	0.262117	0.381729	estimateur
0.9	100	1.2	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.449673	-0.55033	0.03209	0.551262	MCO
0.975	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.846072	-0.15393	0.126023	0.198936	estimateur
0.975	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.709975	-0.29003	0.026544	0.291238	MCO
0.8	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.896338	-0.10366	0.208714	0.23304	estimateur
0.8	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.707911	-0.29209	0.034933	0.294171	MCO
0.7	100	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.986401	-0.0136	0.219622	0.219943	estimateur
0.7	100	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.826463	-0.17354	0.039072	0.177881	MCO
0.7	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.928226	-0.07177	0.266663	0.276153	estimateur
0.7	100	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.706972	-0.29303	0.040233	0.295777	MCO
0.8	100	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.956106	-0.04389	0.160777	0.166661	estimateur
0.8	100	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.827505	-0.17249	0.032503	0.17553	MCO
0.9	100	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.928682	-0.07132	0.111438	0.132306	estimateur
0.9	100	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.828628	-0.17137	0.026217	0.173365	MCO
0.9	100	0.4	0.8	0.5	0.6	w sauf d	0.856759	-0.14324	0.141897	0.201625	estimateur
0.9	100	0.4	0.8	0.5	0.6	w sauf d	0.709546	-0.29045	0.026994	0.291706	MCO
0.9	100	0.4	0.6	0.5	0.8	w	0.980265	-0.01974	0.228088	0.22894	estimateur
0.9	100	0.4	0.6	0.5	0.8	w	0.709759	-0.29024	0.027954	0.291584	MCO
0.9	100	0.4	0.8	0.3	0.8	w	0.933435	-0.06657	0.124461	0.141144	estimateur
0.9	100	0.4	0.8	0.3	0.8	w	0.708802	-0.2912	0.028459	0.292585	MCO
0.9	500	0.4	0.8	0.5	0.8	pas les w	0.892764	-0.10724	0.164198	0.196114	estimateur
0.9	500	0.4	0.8	0.5	0.8	pas les w	0.71155	-0.28845	0.029937	0.29	MCO
0.9	500	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.875114	-0.12489	0.156798	0.200455	estimateur
0.9	500	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.71155	-0.28845	0.029937	0.29	MCO

COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES D'ESTIMATION EMPLOYÉES (tableau 3)

Rcarré	v(v)	phi	psi	rho	param	moyenne	biais	écart-type	sgt	méthode
0.9	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.833197	-0.1668	0.169869	0.238073	estimateur
0.9	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.721331	-0.27867	0.083592	0.290936	MCO
0.9	1.2	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.687494	-0.31251	0.276273	0.417117	estimateur
0.9	1.2	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.465105	-0.5349	0.092394	0.542816	MCO
0.975	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.812295	-0.18771	0.137886	0.232907	estimateur
0.975	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.71856	-0.28144	0.073564	0.290896	MCO
0.8	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.861346	-0.13865	0.21715	0.257642	estimateur
0.8	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.723998	-0.276	0.09777	0.292807	MCO
0.7	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.98552	-0.01448	0.22306	0.223529	estimateur
0.7	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.844512	-0.15549	0.1101	0.190522	MCO
0.7	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.895028	-0.10497	0.279543	0.298602	estimateur
0.7	0.4	0.8	0.5	0.8	w sauf d	0.726472	-0.27353	0.113447	0.296121	MCO
0.8	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.949633	-0.05037	0.168414	0.175784	estimateur
0.8	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.841895	-0.15811	0.090571	0.18221	MCO
0.9	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.917009	-0.08299	0.122383	0.147868	estimateur
0.9	0.2	0.8	0.5	0.8	w	0.839074	-0.16093	0.072043	0.176316	MCO
0.9	0.4	0.8	0.5	0.6	w sauf d	0.823049	-0.17695	0.152398	0.233531	estimateur
0.9	0.4	0.8	0.5	0.6	w sauf d	0.719906	-0.28009	0.074401	0.289807	MCO
0.9	0.4	0.6	0.5	0.8	w	0.945368	-0.05463	0.213761	0.220632	estimateur
0.9	0.4	0.6	0.5	0.8	w	0.724943	-0.27506	0.074993	0.285097	MCO
0.9	0.4	0.8	0.3	0.8	w	0.888834	-0.11117	0.177907	0.209783	estimateur
0.9	0.4	0.8	0.3	0.8	w	0.718488	-0.28151	0.079828	0.292612	MCO

VII-Conclusion:

Le fait d'ignorer les erreurs de mesure dans les variables, en choisissant plutôt de corriger pour la corrélation dans le temps des termes d'erreur de la régression, peut mener à des conclusions erronées. Comme les séries chronologiques en économie sont souvent des données agrégées affectées par des erreurs de mesure et que de plus, le biais introduit par la présence de ces dernières dépend de l'importance de la variance des erreurs de mesure par rapport à celle du vrai régresseur, il devient primordial de les considérer. Ne serait-ce qu'en raison des larges biais qu'elles engendrent, qui se reflètent par des erreurs quadratiques moyennes supérieures à celles obtenues par les moindres carrés ordinaires, qui en fait se sont révélés supérieurs aux techniques habituelles, selon les recherches précédentes (Dagenais).

Les expériences réalisées dans le cadre de cette recherche montrent clairement, aussi bien dans la cas asymptotique que dans le cas d'échantillons finis, que l'estimateur proposé, inspiré des recherches de Fuller, est plus performant que les MCO au sens de l'erreur quadratique moyenne, lorsqu'il y a erreur de mesure sur les variables et lorsque le R^2 de la régression est relativement élevé. Ce qui était précisément l'objectif de ce travail.

VIII-ANNEXE

VIII.1-APPENDICE A

Les étapes permettant d'estimer la variance de l'erreur de mesure sur la variable.

VIII.1.1-Régression de base:

$$\tilde{Y}_t = \beta \tilde{X}_t + g_t$$

VIII.1.2-Description des variables:

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t$$

où

\tilde{X}_t : la vraie valeur qui n'est pas observable

X_t : ce qu'on observe, ce qui est disponible

V_t : erreur de mesure sur la variable

$$\tilde{X}_t \sim AR(1), V_t \sim AR(1), E(X_t) = 0 \text{ et } \mu = 0$$

on a,

De façon plus explicite:

$$AR(1): \quad \tilde{X}_t = \phi \tilde{X}_{t-1} + \omega_t + \mu$$

$$(1 - \phi B) \tilde{X}_t = \omega_t + \mu$$

(et,

$$AR(1) : \quad V_t = \psi V_{t-1} + s_t$$

$$(1-\psi B) V_t = s_t$$

Comme,

$$X_t = \tilde{X}_t + V_t$$

On aura $X_t \sim ARMA(2,1)$

Démonstration:

$$(1-\phi B)(1-\psi B) X_t = (1-\phi B) s_t + (1-\psi B) \omega_t + (1-\psi B) \mu$$

$$(1-\psi B - \phi B + \phi \psi B^2) X_t = s_t - \phi s_{t-1} + \omega_t - \psi \omega_{t-1} + (1-\psi) \mu$$

Donc,

$$X_t = (\psi + \phi) X_{t-1} - \phi \psi X_{t-2} + (1-\psi) \mu + s_t - \phi s_{t-1} + \omega_t - \psi \omega_{t-1}$$

Si on pose,

$$\psi + \phi = C_1$$

$$-\phi\psi = C_2$$

$$(1-\psi) \mu = F$$

$$\eta_t = s_t - \phi s_{t-1} + \omega_t - \psi \omega_{t-1} = \varepsilon_t - \delta \varepsilon_{t-1}$$

(où

η_t correspond au terme d'erreur du processus

$$X_t = C_1 X_{t-1} + C_2 X_{t-2} + F + \eta_t$$

Qui est bien un processus ARMA(2,1).

Pour estimer les paramètres,

$$C_1, C_2, \delta, \sigma_\eta^2, \text{COV}(\eta_{t-1}, \eta_t)$$

Bien que la génération du processus ARMA(2,1) par l'ordinateur donne directement l'estimation des coefficients de C_1 et C_2 , l'intérêt est sur phi et psi.

$$C_1 = \psi + \phi \quad \text{et que} \quad C_2 = -\phi\psi$$

$$\phi = C_1 - \psi$$

$$C_2 = -(C_1 - \psi) \psi = -C_1\psi + \psi^2$$

$$\psi^2 - C_1\psi - C_2 = 0$$

$$\psi = (C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4C_2}) / 2$$

Comme on suppose que dans les données économiques, les vraies variables sont plus corrélées entre elles que le sont les erreurs de mesure, la ligne de conduite est la suivante:

$|\psi| < |\phi| \leftrightarrow$ coefficient de ϕ est plus élevé en valeur absolue

Ces étapes intermédiaires permettent d'estimer la valeur de la variance de l'erreur de mesure sur la variable, afin de développer un estimateur pour les régressions soupçonnées de comporter des erreurs de mesure dans les variables indépendantes, plus performant que les simples moindres carrés.

VIII.1.3-Calculs de variances:

$$\text{VAR}(\tilde{X}_t) = \text{VAR}(\phi \tilde{X}_{t-1}) + \text{VAR}(\omega_t) + \text{VAR}(\mu)$$

$$(1 - \phi^2) \sigma_{\tilde{X}}^2 = \sigma_{\omega}^2 \quad (1)$$

$$\text{VAR}(V_t) = \text{VAR}(\psi V_{t-1}) + \text{VAR}(s_t)$$

$$(1 - \psi^2) \sigma_V^2 = \sigma_s^2 \quad (2)$$

Mais comme η_t correspond aussi à $\eta_t = \epsilon_t - \delta \epsilon_{t-1}$

Selon la méthode de Box et Jenkins,
on a,

$$\text{VAR}(\eta_t) = (1 + \delta^2) \sigma_{\epsilon}^2 \quad (3)$$

(VIII.1.4-Calculs de covariances:

$$\begin{aligned} \text{COV}(\eta_{t-1}, \eta_t) &= E(\eta_{t-1}, \eta_t) \\ &= E((s_t - \phi s_{t-1} + \omega_t - \psi \omega_{t-1})(s_{t-1} + \omega_{t-1} - \phi s_{t-2} - \psi \omega_{t-2})) \\ &= E(s_t s_{t-1} - \phi s_t s_{t-2} - \phi s_{t-1}^2 + \phi s_{t-1} s_{t-2} + \omega_{t-1} \omega_t \\ &\quad - \psi \omega_{t-2} \omega_t - \psi \omega_{t-1}^2 + \psi^2 \omega_{t-1} \omega_{t-2}) \\ &= E(-\phi s_t^2 - \psi \omega_t^2) \\ &= E(-\phi s_t^2) - E(\psi \omega_t^2) \\ &= -\phi E(s_t^2) - \psi E(\omega_t^2) \end{aligned}$$

$$\widehat{\text{COV}}(\eta_t, \eta_{t-1}) = -\hat{\phi} \sigma_s^2 - \hat{\psi} \sigma_\omega^2 \neq 0 \quad (4)$$

On peut aussi écrire cette covariance de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \text{COV}(\eta_t, \eta_{t-1}) &= E(\epsilon_t - \delta \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1} - \delta \epsilon_{t-2}) \\ &= -\delta \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \sigma_{\epsilon}^2 = \text{Var}(\epsilon_t) \quad (5)$$

les epsilons ne sont pas corrélés dans le temps.

Avec les équations de la variance et de la covariance des etas, on peut résoudre pour delta et la variance des epsilons.

De (3), on a

$$\text{VAR}(\epsilon_t) = \text{VAR}(\eta_t) / (1 + \delta^2) \quad (6)$$

si on met cette dernière équation dans (5), on obtient:

$$\text{COV}(\eta_{t-1}, \eta_t) = -\delta \text{VAR}(\eta_t) / (1 + \delta^2),$$

une équation de forme quadratique. Donc,

$$\delta = (-\sigma_{\eta}^2 \pm \sqrt{(\sigma_{\eta}^2)^2 - 4(\text{COV}(\eta_{t-1}, \eta_t))^2}) / 2\text{COV}(\eta_{t-1}, \eta_t). \quad (7)$$

La règle de sélection du delta qui a été utilisée, est arbitrairement de choisir le plus petit en valeur absolue. Ce qui permet d'obtenir ainsi la variance des epsilons:

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \text{COV}(\eta_{t-1}, \eta_t) / -\delta$$

Maintenant que l'on connaît,

$$\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{\phi}, \hat{\psi}, \hat{\sigma}_{\eta}^2, \hat{\text{COV}}(\eta_{t-1}, \eta_t), \hat{\delta} \text{ et } \hat{\sigma}_{\epsilon}^2$$

on peut à l'aide de la variance et de la covariance des etas, estimer la variance du terme d'erreur oméga (premier AR(1)) et celle

de s (deuxième AR(1)).

$$\sigma_s^2 = (1 - \varphi^2) \sigma_v^2$$

$$C\hat{O}V(\eta_{t-1}, \eta_t) = -\hat{\phi} \sigma_s^2 - \psi \sigma_\omega^2 \quad (8)$$

et,

$$v\hat{a}r(\eta_t) = (1 + \psi) \sigma_\omega^2 + (1 + \hat{\phi}^2) \sigma_s^2 \quad (9)$$

de (8) on isole la variance de s :

$$\hat{\sigma}_s^2 = (C\hat{O}V(\eta_{t-1}, \eta_t) + \psi \sigma_\omega^2) / (-\hat{\phi}) \quad (10)$$

de (9) on isole la variance de oméga :

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = (\hat{\sigma}_\eta^2 - (1 + \hat{\phi}^2) \sigma_s^2) / (1 + \psi^2) \quad (11)$$

par substitution de (11) dans (10) :

$$\hat{\sigma}_s^2 = (C\hat{O}V(\eta_{t-1}, \eta_t) + \psi ((\sigma_\eta^2 - (1 + \hat{\phi}^2) \sigma_s^2) / (1 + \psi^2))) / (-\hat{\phi})$$

$$(-\hat{\phi}(1 + \psi^2) + \psi(1 + \psi^2)) \hat{\sigma}_s^2 = (1 + \psi^2) C\hat{O}V(\eta_{t-1}, \eta_t) + \psi \sigma_\eta^2$$

en simplifiant, on obtient,

$$\hat{\sigma}_s^2 = ((1 + \psi^2) \text{CÔV}(\eta_{t-1}, \eta_t) + \psi \sigma_\eta^2) / (-\hat{\phi}(1 + \psi^2) + \psi(1 + \hat{\phi}^2))$$

par substitution de la variance de s ainsi trouvée dans l'équation (11) on obtient la variance des omégas.

Comme,

σ_s^2 et σ_ω^2 sont maintenant estimés on trouve que

$$\hat{\sigma}_v^2 = \hat{\sigma}_s^2 / (1 - \psi^2)$$

Tout ceci nous permet d'obtenir la variance de l'erreur de mesure sur la variable observée, c'est-à-dire la variance de v. C'est cette variance qui est à la base de notre estimateur pour la régression.

VIII.2-APPENDICE B

ESTIMATIONS DES VALEURS INITIALES DU PROCESSUS ARMA(2,1):

VIII.2.1-Rappel de la méthode de Yule Walker:

Partie MA(1):

γ_0 : covariance entre un élément et lui-même

$$\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 / (1 + \delta^2)$$

$$\delta = -\gamma_1 / \sigma_\varepsilon^2 = -\gamma_1(1+\delta^2) / \gamma_0$$

$$\delta / (1+\delta^2) = -\gamma_1 / \gamma_0$$

$$\gamma_0 \delta = -\gamma_1 - \gamma_1 \delta^2$$

$$\gamma_1 \delta^2 + \gamma_0 \delta + \gamma_1 = 0$$

$$\delta = (-\gamma_0 \pm \sqrt{\gamma_0^2 - 4\gamma_1^2}) / 2\gamma_1$$

la contrainte étant, bien entendu, que,

$\gamma_0 - 4\gamma_1^2 \geq 0$ sinon poser cette expression égale à zéro.

Si les deux deltas obtenus sont de signes contraires, prendre celui avec la plus grande valeur. Par contre, si les deux deltas obtenus sont de mêmes signes, prendre celui avec la plus petite valeur en valeur absolue.

VIII.2.2-Forme d'un processus ARMA(2,1):

$$X_t = C_1 X_{t-1} + C_2 X_{t-2} + m_t - \delta m_{t-1}$$

Posons:

$$r_t = X_t - C_1 X_{t-1} - C_2 X_{t-2} = m_t - \delta m_{t-1}$$

r_t est un MA(1)

$$\gamma_0 = \text{Var}(r_t)$$

$$\gamma_1 = \text{Cov}(r_t, r_{t-1})$$

Partie AR: plus précisément un AR(2)

$$\rho_2 = C_1 \rho_1 + C_2 \rho_0$$

mais $\rho_0 = 1$,

$$\rho_3 = C_1 \rho_2 + C_2 \rho_1$$

ρ_2 : autocorrélation entre les X qui contiennent une erreur de mesure, en détail, entre les X_t et les X_{t-2} .

ρ_3 : autocorrélation entre les X qui contiennent une erreur de mesure, plus précisément entre les X_t et les X_{t-3} .

sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_0 \\ \rho_2 & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_0 \\ \rho_2 & \rho_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

Il faut satisfaire:

conditions de stationnarité:

$$C_2 + C_1 < 1$$

$$C_2 - C_1 < 1$$

$$|C_2| < 1$$

conditions d'inversibilité:

$$|\delta| < 1$$

VIII.3-APPENDICE C

VIII.3.1-Calculs des valeurs initiales du processus dépendement des paramètres du modèle nécessaires à la commande "param".

Calculs des valeurs initiales du processus ARMA(2,1). Pour la partie autorégressive, C_1 et C_2 et pour la partie moyenne mobile delta. Cette solution initiale correspond aux valeurs des paramètres utilisés pour générer les données.

1) $\phi = 0.6$ et $\psi = 0.5$:

$$C_1 = \psi + \phi = 0.5 + 0.6 = 1.1$$

$$C_2 = -\phi\psi = -(0.6)(0.5) = -0.3$$

$$\sigma_\omega^2 = (1 - \phi^2) \sigma_x^2 = (1 - 0.36) \sigma_x^2 = 0.64$$

$$\sigma_s^2 = 0.3$$

$$\sigma_\eta^2 = 0.64 + 0.25(0.64) + 0.3 + 0.36(0.3) = 1.208$$

$$\sigma_\eta^2 = (1 + \delta^2) \text{Var}(\epsilon_t) \quad (1)$$

$$\text{Cov}(\eta_t, \eta_{t-1}) = -\delta \text{Var}(\epsilon_{t-1}) \quad (2)$$

De (1),

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \text{Var}(\eta_t) / (1 + \delta^2) = 1.208 / (1 + \delta^2)$$

mettre ceci dans (2),

$$-0.5 = -\delta (1.208 / (1 + \delta^2))$$

$$-0.5\delta^2 + 1.208\delta - 0.5 = 0$$

une équation de forme quadratique,

$$\delta = (-1.208 \pm \sqrt{(1.208^2) - 4(-0.5)(-0.5)}) / 2(-0.5)$$

$$= 0.5303099 \text{ et } 1.8856901$$

où l'on retient 0.5303099 pour la valeur de delta.

2) $\phi = 0.8$ et $\psi = 0.3$:

$$C_1 = \psi + \phi = 0.3 + 0.8 = 1.1$$

$$C_2 = -\phi\psi = -(0.8)(0.3) = -0.24$$

$$\sigma_\omega^2 = 0.36$$

$$\sigma_s^2 = (1 - \psi^2) \sigma_v^2 = (1 - 0.09) 0.4 = 0.364$$

$$\text{Cov}(\eta_{t-1}) = -0.8(0.364) - (0.3)(0.36) = -0.3992$$

$$\text{Var}(\eta_t) = 0.36 + 0.09(0.36) + 0.364 + 0.64(0.364) = 0.9893$$

$$\text{Var}(\eta_t) = (1 + \delta^2) \text{Var}(\epsilon_t) \quad (1)$$

$$\text{Cov}(\eta_t, \eta_{t-1}) = -\delta \text{Var}(\epsilon_{t-1}) \quad (2)$$

De (1),

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \text{var}(\epsilon_t) / (1 + \delta^2)$$

mettre le tout dans (2),

$$-0.3992 = -\delta(0.9893 / 1 + \delta^2)$$

$$-0.3992\delta^2 + 0.9893\delta - 0.3992 = 0$$

$$\delta = (-0.9893 \pm \sqrt{(0.9893^2) - 4(-0.3992)(-0.3992)}) / 2(-0.3992)$$

$$\delta = 1.9707076 \text{ et } 0.5074088$$

où l'on retient $\delta = 0.5074088$.

APPENDICE D

VI-Démonstration du R carré d'environ 0.5:

Comme on a à régresser,

$$\tilde{Y}_t = \beta \tilde{X}_t + g_t$$

où

$$g_t = \rho g_{t-1} + f_t$$

posons,

$$Y_t^* = \beta X_t^* + f_t$$

$$Y^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$

où,

$$X^* = X_t - \rho X_{t-1}$$

$$R^2 = \beta' \frac{X^* X^* \beta}{T} / (\beta' \frac{X^* X^* \beta}{T} + \sigma_f^2) \quad (16)$$

$$\sigma_f^2 = (1 - \rho^2) \sigma_g^2$$

en développant (16),

$$R^2 \sigma_f^2 + \beta' \sigma_{X^*}^2 \beta R^2 = \beta \sigma_{X^*}^2 \beta$$

comme beta est fixé à 1, alors,

d'où,

$$\sigma_f^2 R^2 = \sigma_{X^*}^2 (1 - R^2)$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_{X^*}^2 (1 - R^2) / R^2$$

et,

$$\begin{aligned} \sigma_{X^*}^2 &= (\tilde{X}' - \rho \tilde{X}_{t-1})' (\tilde{X} - \rho \tilde{X}_{t-1}) / T \\ &= (\tilde{X}' \tilde{X} + \rho^2 \tilde{X}_{t-1}' \tilde{X}_{t-1} - 2\rho \tilde{X}' \tilde{X}_{t-1}) / T \end{aligned}$$

$$\sigma_{X^*}^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\phi$$

$$\sigma_f^2 = (1 + \rho^2 - 2\rho\phi) (1 - R^2) / R^2$$

comme,

$$\sigma_g^2 = \sigma_f^2 / (1 - \rho^2)$$

on a finalement,

$$\sigma_g^2 = (1 + \rho^2 - 2\rho\phi) (1 - R^2) / (R^2 (1 - \rho^2))$$

Exemple tiré du tableau qui montre le phénomène observé, c'est-à-dire, un R^2 toujours de 0.5 parce que la variance du terme d'erreur de la régression g , avait été fixée à 1. Prenons le cas où $\phi=0.8$, $\psi=0.5$ et $\rho=0.8$:

$$\sigma_g^2 = ((1 + \rho^2 - 2\rho\phi) (1 - R^2) / (R^2 (1 - \rho^2)))$$

$$2R^2 - 2\rho\phi R^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\phi$$

$$R^2 = (1 + \rho^2 - 2\rho\phi) / (2 - 2\rho\phi)$$

avec les valeurs des paramètres,

$$R^2 = \frac{1 + 0.64 - 1.28}{2 - 1.28} = 0.5$$

RÉFÉRENCES

- Dagenais, M.G. (1994), "Parameter estimation in regression models with errors in the variables and autocorrelated disturbances", *Journal of Econometrics* 64, 145-163.
- Fuller, W.A. (1987), *Measurement Error Models*, Wiley, New York, 103-179.
- Granger, C.W.J. et Morris M.J. (1976), "Time Series Modelling and Interpretation", *J.R. Statist. Soc. A*, Part 2, p. 246-257.
- Dagenais, M.G. et Dagenais D.L. (1995), "Higher Moments Estimators for Linear Regression Models with Errors in the Variables", *Série Scientifique*, No 95s-13, Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations, Montréal, mars, 37 pages.