Université de Montréal

Représentation et identification des hypersurfaces

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

par

Hassan CHOUEIB

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

12 DÉCEMBRE 2012

Université de Montréal
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé :

Représentation et identification des hypersurfaces

présenté par :

Hassan CHOUEIB

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

André GIROUX, président-rapporteur
Michel DELFOUR, directeur de recherche
Marlène FRIGON, membre du jury

Mémoire accepté le : 30 JANVIER 2013

Résumé

L'objectif à moyen terme de ce travail est d'explorer quelques formulations des problèmes d'identification de forme et de reconnaissance de surface à partir de mesures ponctuelles. Ces problèmes ont plusieurs applications importantes dans les domaines de l'imagerie médicale, de la biométrie, de la sécurité des accès automatiques et dans l'identification de structures cohérentes lagrangiennes en mécanique des fluides. Par exemple, le problème d'identification des différentes caractéristiques de la main droite ou du visage d'une population à l'autre ou le suivi d'une chirurgie à partir des données générées par un numériseur.

L'objectif de ce mémoire est de préparer le terrain en passant en revue les différents outils mathématiques disponibles pour appréhender la géométrie comme variable d'optimisation ou d'identification. Pour l'identification des surfaces, on explore l'utilisation de fonctions distance ou distance orientée, et d'ensembles de niveau comme chez S. Osher et R. Fedkiw [36] ; pour la comparaison de surfaces, on présente les constructions des métriques de Courant par A. M. Micheletti [32] en 1972 et le point de vue de R. Azencott [3] et A. Trouvé [39, 40, 42] en 1995 qui consistent à générer des déformations d'une surface de référence via une famille de difféomorphismes. L'accent est mis sur les fondations mathématiques sous-jacentes que l'on a essayé de clarifier lorsque nécessaire, et, le cas échéant, sur l'exploration d'autres avenues.

Mots clés: Identification, image, hypersurface, numérisation, métrique de Courant, fonction distance, fonction distance orientée, ensembles de niveau, difféomorphisme.

Abstract

The mid-term objective of this work is to explore some formulations of shape identification and surface recognition problems from point measurements. Those problems have important applications in medical imaging, biometrics, security of the automatic access, and in the identification of Lagrangian Coherent Structures in Fluid Mechanics. For instance, the problem of identifying the different characteristics of the right hand or the face from a population to another or the follow-up after surgery from data generated by a scanner.

The objective of this mémoire is to prepare the ground by reviewing the different mathematical tools available to apprehend the geometry as an identification or optimization variable. For surface identification it explores the use of distance functions, oriented distance functions, and level sets as in S. Osher and R. Fedkiw [36] ; for surface recognition it emphasizes the construction of Courant metrics by A. M. Micheletti [32] in 1972 and the point of view of R. Azencott [3] and A. Trouvé [39, 40, 42] in 1995 which consists in generating deformations of a reference surface via a family of diffeomorphisms. The accent will be put on the underlying mathematical foundations that it will attempt to clarify as necessary, and, if need be, on exploring new avenues.

Keywords : Identification, image, hypersurface, scanning, Courant metric, distance function, oriented distance function, level sets, diffeomorphism.

Remerciements

Arrivé au terme de la rédaction de ce mémoire, il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma gratitude et mes remerciements à tous ceux qui, par leur enseignement, leur soutien et leurs conseils m'ont aidé à sa réalisation.

Je tiens en premier temps à remercier M. Michel Delfour, mon directeur de recherche, qui m'a honoré de sa confiance en m'acceptant au sein de ses travaux, ainsi pour son aide et ses précieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Puissent ces lignes être l'expression de ma plus profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de tout le corps professoral qui m'a encadré tout au long de cette année qu'a duré cette formation, et qui ont suffisamment enrichi mes connaissances et mes savoir-faire. Je voudrais citer M. Louis-Pierre Arguin, M. Iosif Polterovich, M. Jacques Bélair, et Madame Anne Bourlioux.

Un grand merci chaleureux et de tout mon cœur à mes parents "Hussein" et "Zeinab", sans qui je ne serais absolument pas où j'en suis aujourd'hui. Je les remercie sincèrement pour leur contribution, leur patience, et leur soutien inconditionnel et constant, pour m'avoir donné du courage et de l'espoir, pour être toujours présents même à distance. Je leur dois ce que je suis. Aussi un Merci à mon cher frère "Ali" et ma chère sœur "Doha" pour m'avoir donné l'occasion d'avoir deux véritables amis dans ma vie, pour leur gentillesse et leur encouragement pour continuer mes études.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé tout au long de ma vie ! !

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Résumé i

Abstract iii

Remerciements v

1 Introduction 1

2 Ensembles géométriques et fonctions distance 7

2.1 Introduction 7
2.2 Ensembles de classe C^k et $C^{k,l}$ via les difféomorphismes locaux 8
2.3 Ensembles de niveau d'une fonction 9
2.4 Ensembles localement épigraphe d'une fonction 13
2.4.1 C^0, localement C^0, et équi-C^0 épigraphes 13
2.4.2 Épigraphes localement $C^{k,l}$. 16
2.5 Fonction distance 17
2.5.1 Définitions et propriétés 17
2.5.2 Métrique de Hausdorff-Pompéiu 18
2.5.3 Projection, squelette, fissure, et différentiabilité 20
2.5.4 Ensembles à courbure bornée 23
2.6 Fonction distance orientée 24
2.6.1 Définitions et propriétés 24
2.6.2 Projection, squelette, fissure et différentiabilité 26
2.6.3 Frontière à courbure bornée 28
2.6.4 Régularité de la frontière 30

3 Sous-variétés 31

3.1 Introduction 31
3.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^N$ 32

3.2.1 Introduction 32
3.2.2 Sous-variétés régulières 33
3.2.3 Intégrale sur une sous-variété de classe C^1 33
3.2.4 Mesures de Hausdorff 35
3.2.5 Formes fondamentales et courbures principales 36
3.3 Sous-variétés et fonction distance au carré 37

4 Différentielles par rapport à la géométrie 39
4.1 Introduction 39
4.2 Différentielles dans les espaces vectoriels topologiques 39
4.2.1 Semi-différentielles et différentielles 39
4.2.2 Espaces vectoriels normés 41
4.2.3 Fonctions localement lipschitziennes 42
4.3 Différentielles des intégrales par rapport à la géométrie 43
4.3.1 Méthode des vitesses 44
4.3.2 Intégrale de domaine 46
4.3.3 Intégrale frontière ou de bord 48
4.4 Calcul tangentiel et dérivées co et contravariantes 51
4.4.1 Différentielles tangentielles 51
4.4.2 Dérivées covariantes 53
4.5 Équation d'évolution d'un ensemble géométrique 59
4.5.1 Ensembles de niveau 59
4.5.2 Fonction distance orientée 61

5 Identification des hypersurfaces 65
5.1 L'approche d'Azencott et de Trouvé 65
5.1.1 Groupes et métriques 65
5.1.2 Approche hilbertienne d'Azencott et de Trouvé 68
5.1.3 Problème générique d'imagerie 70
5.2 Approche de Osher, Fedkiw et Zhao 71
5.2.1 Équation pour les ensembles de niveau 72
5.2.2 Équation pour la fonction distance orientée 75
5.2.3 Discussion 76
5.3 Autres critères et fonctions objectif 77

Bibligraphie 79

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire prend la suite des travaux de maîtrise de J. C. Barolet [6] en 2011 qui portaient sur la *représentation et la détection des images et des surfaces déformables* en utilisant les idées et les outils mathématiques introduits par R. Azencott [3] et A. Trouvé [39, 40, 42].

Une des application ultimement visée est l'identification biométrique. Par exemple, le problème d'identification des différentes caractéristiques de la main droite ou du visage d'une population à l'autre ou le suivi du processus de cicatrisation d'une plaie à partir des données générées par le numériseur (*scanner*) 3D de la compagnie Créaform [1]. Comme cet appareil est relativement bon marché et facile à utiliser, il y a un marché énorme pour les mathématiques et l'ingénierie de ce type d'imagerie.

Ceci pose le problème générique de l'identification et de la reconstruction des surfaces à partir d'un nuage de points, c'est à dire des observations ou des mesures. Ce problème a plusieurs applications importantes dans les domaines d'imagerie médicale, de la biométrie, et de la sécurité des accès automatiques. Il y a aussi d'autres domaines concernant la détection des contours d'images pour l'identification de *structures cohérentes lagrangiennes* en mécanique des fluides [33]. Sans aborder le traitement des mesures brutes du numérisateur, on se concentre sur un ensemble de méthodes mathématiques sous-jacentes à la représentation, l'identification et la reconstruction des hypersurfaces.

Pour représenter une surface, il y a plusieurs options. Par exemple, utiliser certaines familles de fonctions paramétrisées par les sous-ensembles de l'espace, comme la fonction caractéristique, la fonction distance, et la fonction distance orientée. Cette approche a pour avantage que la topologie des domaines variables n'est pas a priori fixée. C'est le

1. Voir le reportage de l'émission Découverte de Radio-Canada sur le numériseur 3D de la compagnie Créaform de Lévis, à l'adresse : http ://www.radio-canada.ca/emissions/decouverte/2009-2010/Reportage.asp ?idDoc=93618.

point de vue adopté par E. De Giorgi [9, 10, 11, 12] pour résoudre le célèbre problème de J. A. F. Plateau [37] des surfaces minimales (fonction caractéristique) et celui adopté par S. Osher et R. Fedkiw [36] pour construire une surface à partir d'un nuage de points (fonction distance). Une autre façon de voir est de se restreindre aux images d'un ensemble fixe par des familles de difféomorphismes. C'est l'approche de R. Azencott [3] et A. Trouvé [39, 40, 42] qui a fait l'objet du mémoire de J. C. Barolet [6]. Mais ici, la topologie reste fixe. Donc si l'ensemble de départ a un trou, tous ses images auront un trou.

Les Chapitres 2, 3 et 4 de ce mémoire donnent un tour d'horizon des méthodes de représentation, d'identification, de comparaison et de reconstruction des hypersurfaces. On mettra l'accent sur les liens entre l'approche géométrie différentielle et l'approche analytique via les fonctions distance et distance orientée et les ensembles de niveau d'une fonction. Ce travail est rendu absolument nécessaire en raison d'un manque de rigueur important et fort répandu dans une grande partie de la littérature en imagerie,

Quand les variables ne sont plus des scalaires, ni des fonctions, ni des vecteurs, mais des ensembles géométriques, il devient nécessaire de leur donner un cadre analytique et computationnel. Ceci est motivé par plusieurs domaines importants en mathématiques, en physiques et en ingénierie, comme, par exemple, la théorie de mesure géométrique, les problèmes de frontière libre, la paramétrisation des géométries par des fonctions, la métrique de Hausdorff, et plein d'autres objets et constructions qui vont illustrer la richesse du domaine étudié dans ce mémoire.

Dans le dernier chapitre 5, on reprendra à titre d'exemple le problème de la construction d'une hypersurface à partir d'un nuage de points et on reviendra sur les constructions de S. Osher et R. Fedkiw [36] qui consistent à reconstruire la surface en associant à chaque surface possible une énergie, puis en supposant que la surface d'énergie minimale est celle qu'on cherche. Ces travaux à caractère principalement numérique reposent sur des fondations mathématiques extrèmement fragiles. L'objectif est ultimement de reprendre ces travaux en y apportant les justifications nécessaires si possible ou sinon en explorant d'autres avenues.

Quelques définitions et notations

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Le produit scalaire et la norme sur $\mathbb{R}^N$ seront notés

$$x \cdot y \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i, \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}.$$

La transposée d'un vecteur v ou d'une matrice A sera noté, respectivement, par ${}^*v$ ou ${}^*A$. L'inverse de A sera notée par A^{-1}.

Notons $\mathbb{N}^N$ l'ensemble de tous les N-tuples $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$. Un élément de $\mathbb{N}^N$ sera appelé un *multi-index*. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^N$, définissons l'*ordre* $|\alpha|$ de α et la *dérivée partielle* ∂^α comme suit :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}. \tag{1.1}$$

Les fonctions continues et C^k

Soit Ω un sous-espace ouvert de $\mathbb{R}^N$. Notons par $C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à $\mathbb{R}$. Pour un entier $k \geq 1$,

$$C^k(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega) \,:\, \partial^\alpha f \in C(\Omega),\, \forall \alpha,\, |\alpha| = k \right\}.$$

Par convention et pour donner un sens au cas $\alpha = 0$, $\partial^0 f$ sera la fonction f . Quand $|\alpha| = 1$, nous utilisons la notation standard $\partial_i f$ ou $\partial f / \partial x_i$. $\mathcal{D}^k(\Omega)$ ou $C_c^k(\Omega)$ (resp., $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$) dénoteront les espaces de fonctions k-fois (resp., infiniment) continument différentiables avec un support compact contenu dans l'ensemble ouvert Ω.

On note par $\mathcal{B}^0(\Omega)$ l'espace des fonctions ($\Omega \to \mathbb{R}$) continues bornées. Pour un entier $k \geq 1$,

$$\mathcal{B}^k(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f \in \mathcal{B}^{k-1}(\Omega) \,:\, \partial^\alpha f \in \mathcal{B}^0(\Omega),\, \forall \alpha,\, |\alpha| = k \right\} \tag{1.2}$$

est l'espace des fonctions dans $\mathcal{B}^0(\Omega)$ qui ont des dérivées d'ordre plus petite ou égale à k continues et bornées dans Ω. Avec la norme

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|, \tag{1.3}$$

$\mathcal{B}^k(\Omega)$ est un espace Banach.

Si la fonction f est bornée et uniformément continue [2] sur Ω, elle possède une unique extension continue ($\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$). Notons $C^k(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions f dans $C^k(\Omega)$ pour lesquelles $\partial^\alpha f$ est bornée et uniformément continue sur Ω pour tout α, $0 \leq |\alpha| \leq k$. Une fonction f dans $C^k(\Omega)$ est dite *nulle aux bords* de Ω si pour tout α, $0 \leq |\alpha| \leq k$, et $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace compact K de Ω tel que, pour tout $x \in \Omega \cap \complement K$, $|\partial^\alpha f(x)| \leq \varepsilon$. Notons $C_0^k(\Omega)$ l'espace de ces fonctions. Clairement, $C_0^k(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \subset$

2. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x et y dans Ω tel que $|x - y| < \delta$ nous avons $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\mathcal{B}^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$. De plus, avec la norme (1.3), $C_0^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, et $\mathcal{B}^k(\Omega)$ sont des espaces de Banach. Finalement, on a

$$C^\infty(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega), \quad C_0^\infty(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{k\geq 0} C_0^k(\Omega), \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{B}^k(\Omega).$$

Quand f est une fonction vectorielle de Ω à $\mathbb{R}^m$, les espaces correspondants seront notés par $C_0^k(\Omega)^m$ ou $C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $C^k(\overline{\Omega})^m$ ou $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{B}^k(\Omega)^m$ ou $\mathcal{B}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $C^k(\Omega)^m$ ou $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, etc.

Les fonctions continues de Hölder ($C^{0,\ell}$) et lipschitz ($C^{0,1}$)

Soit λ, $0 < \lambda \leq 1$, une fonction f est $(0, \lambda)$-*Hölder continue* dans Ω si

$$\exists c > 0, \, \forall x, \, y \in \Omega, \quad |f(y) - f(x)| \leq c\,|x - y|^\lambda.$$

Quand $\lambda = 1$, on dit également que f est *Lipschitz* ou *Lipschitz continue*. De façon similaire, si $k \geq 1$, f est (k, λ)-*Hölder continue* dans Ω si

$$\forall \alpha, \, 0 \leq |\alpha| \leq k, \, \exists c > 0, \, \forall x, \, y \in \Omega, \quad |\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \leq c\,|x - y|^\lambda.$$

On note par $C^{k,\lambda}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions $(k.\lambda)$-*Hölder continues* sur Ω. Définissons pour $k \geq 0$ les sous-espaces [3]

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f \in C^k(\overline{\Omega}) \, : \, \begin{array}{l} \forall \alpha, \, 0 \leq |\alpha| \leq k, \, \exists c > 0, \, \forall x, \, y \in \Omega \\ |\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \leq c\,|x - y|^\lambda \end{array} \right\} \tag{1.4}$$

de $C^k(\overline{\Omega})$. Par définition, pour chaque α, $0 \leq |\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha f$ a une extension bornée ($\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$), continue unique. De plus, avec la norme

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} \overset{\text{déf}}{=} \max \left\{ \|f\|_{C^k(\Omega)}, \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)|}{|x - y|^\lambda} \right\} \tag{1.5}$$

$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach. Finalement, on note par $C_0^{k,\lambda}(\Omega)$ l'espace $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \cap C_0^k(\Omega)$.

3. La notation $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ ne doit pas être confondue avec la notation $C^{k,\lambda}(\Omega)$ pour les fonctions (k, λ)-*Hölder continues* dans Ω *sans* la bornitude uniforme sur Ω. En particulier, $C^{k,\lambda}(\overline{\mathbb{R}^N})$ n'est pas égale à $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)$, il est en fait contenu dedans.

Les espaces de Sobolev

Pour une analyse détaillée des espaces de Sobolev, le lecteur est référé à [1], [35] et [43]. Soit Ω un sous-espace ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions infiniment continues et différentiables avec un support compact sur Ω munit de la topologie de Schwartz. Son dual topologique $\mathcal{D}(\Omega)^*$ est appelé *l'espace des distributions*.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, est l'espace des distributions $T \in L^p(\Omega)$ avec les dérivées distributions partielles $D^\alpha T \in L^p(\Omega)$ pour tout α, $|\alpha| \leq m$. Pour $p = 2$ on utilise la notation $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$, on identifie souvent une distribution $T \in L^p(\Omega)^*$ avec une fonction $f \in L^q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f\, \varphi\, dx.$$

Avec la norme

$$\|v\|_{m,p,\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\, dx \right]^{1/p}, \quad \|v\|_{m,\infty,\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}\, dx, \tag{1.6}$$

l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Nous pouvons également utiliser la semi-norme

$$|v|_{m,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^p_{L^p(\Omega)}\, dx \right]^{1/p}, \quad |v|_{m,\infty,\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \|\partial^m v\|_{L^\infty(\Omega)}\, dx. \tag{1.7}$$

Quand $p = 2$, on ne note pas l'index p et on écrit $\|v\|_{m,\Omega}$ et $|v|_{m,\Omega}$. Par le théorème de Meyers et Serrin, $W^{m,p}(\Omega)$ coïncide avec la complétion de $\{\varphi \in C^m(\Omega) : \|\varphi\|_{m,p} < \infty\}$ avec la norme $\|\varphi\|_{m,p}$ de $1 \leq p < \infty$.

Nous référons le lecteur à [1] pour les détails et les extensions des définitions pour les cas où m n'est pas un entier. Quand f est une fonction vectorielle de Ω à $\mathbb{R}^m$, les espaces correspondants sont notés par $W^{s,p}(\Omega)^m$ ou $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Chapitre 2

Ensembles géométriques et fonctions distance

2.1 Introduction

Ce chapitre fait un tour d'horizon des multiples façons de percevoir les sous-ensembles de l'espace euclidien tant d'un point de vue géométrique qu'analytique : les difféomorphismes locaux, les ensembles de niveau d'une fonction, les épigraphes d'une part et les fonctions distances ou autres fonctions paramétrisées par un ensemble d'autre part. La géométrie différentielle permet une étude fine des propriétés d'un ensemble alors que le point de vue analytique permet de travailler avec des grandes familles d'ensembles en relaxant certaines propriétés géométriques dans un contexte de modélisation ou d'optimisation et de faire appel à toute la puissance de l'analyse fonctionnelle et de la théorie de la mesure.

Dans ce chapitre, on rappelle un certain nombre de définitions et de résultats que le lecteur pourra retrouver dans [7] et [21]. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un entier. La *frontière* $\partial\Omega$ et l'*intérieur* $\operatorname{int}\Omega$ d'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^N$:

$$\partial\Omega \overset{\text{déf}}{=} \overline{\Omega} \cap \overline{\complement\Omega} \quad \text{et} \quad \operatorname{int}\Omega \overset{\text{déf}}{=} \complement\,\overline{\complement\Omega} = \overline{\Omega}\backslash\partial\Omega.$$

On entend par *ensemble avec bord* un sous-ensemble Ω de frontière $\partial\Omega$ non-vide. Les seuls ensembles dans $\mathbb{R}^N$ dont le bord est vide sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^N$. À ce niveau de généralité, la notion de bord est très abstraite. En effet, la boule ouverte de rayon un et de centre 0 $B_1(0)$ a bien pour bord la sphère de rayon unité $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$. Cependant l'ensemble des points à coordonnées rationnelles $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{Q}^N$ dans $B_1(0)$ a pour bord toute la boule fermée $\partial\Omega = \overline{B_1(0)}$. On dira qu'un tel ensemble possède une *frontière* *épaisse* ou un *bord épais*. On voit dès lors qu'il faudra introduire des conditions sur la frontière pour retrouver la notion géométrique intuitive de bord. Les ensembles à bord épais ne sont cependant pas sans intérêt car ils interviennent dans la modélisation des "microstructures" obtenues par homogénisation.

On utilisera aussi la notation Γ pour la frontière $\partial\Omega$. Lorsque Ω est un ouvert, il coïncide avec son intérieur $\operatorname{int}\Omega$ et il est d'usage de parler d'un *domaine ouvert*, mais dans ce qui suit il n'est pas nécessaire que Ω soit un ouvert. Deux ensembles peuvent avoir la même frontière et le même intérieur sans être égaux. C'est le cas de la boule ouverte et de la boule fermée.

2.2 Ensembles de classe C^k et $C^{k,l}$ via les difféomorphismes locaux

Soit $\{e_1, ..., e_N\}$ la base orthonormale standard de $\mathbb{R}^N$. On associera à un point $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_N) \in \mathbb{R}^N$ la notation $\zeta = (\zeta', \zeta_N)$ avec $\zeta' = (\zeta_1, ..., \zeta_{N-1})$. On dénote par B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$ et on la décompose comme suit :

$$B_0 \overset{\text{déf}}{=} \{\zeta \in B, \zeta_N = 0\}, \quad B_+ \overset{\text{déf}}{=} \{\zeta \in B, \zeta_N > 0\}, \quad B_- \overset{\text{déf}}{=} \{\zeta \in B, \zeta_N < 0\}.$$

Définition 1. *Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega \neq \varnothing$.*
Soit $k \geq 0$ un entier et $0 \leq l \leq 1$ un nombre réel.

1. – Ω *est dit* localement de classe C^k *en $x \in \partial\Omega$ s'il existe*
   (a) *un voisinage $U(x)$ de x, et*
   (b) *une bijection $g_x : U(x) \to B$ qui a les propriétés suivantes :*
   $$g_x \in C^k(U(x), B), \quad h_x \overset{\text{déf}}{=} g_x^{-1} \in C^k(B, U(x)),$$
   $$\operatorname{int}\Omega \cap U(x) = h_x(B_+)$$
   $$\Gamma_x \overset{\text{déf}}{=} \partial\Omega \cap U(x) = h_x(B_0).$$
   – *Soit $0 < l < 1$, Ω est* localement *(k,l)-höldérien en $x \in \partial\Omega$ si les conditions (a) et (b) sont satisfaites avec $g_x \in C^{k,l}(U(x), B)$ et son inverse $h_x = g^{-1} \in C^{k,l}(B, U(x))$.*
   – Ω *est dit* localement *k-lipschitizian en $x \in \partial\Omega$ si les conditions (a) et (b) sont satisfaites avec $g_x \in C^{k,1}(U(x), B)$ et son inverse $h_x = g^{-1} \in C^{k,1}(B, U(x))$.*
2. Ω *est dit* localement de classe C^k (resp. *(k,l)-höldérien ou* k-lipschitizien*) si $\forall x \in \partial\Omega$, Ω est localement C^k, (resp.* (k,l)-höldérien *ou* k-lipschitzien*) en x.*

2.3 Ensembles de niveau d'une fonction

De la définition d'un ensemble de classe $C^{k,l}$, $k \geq 1$, et $0 \leq l \leq 1$, l'ensemble Ω peut aussi être décrit localement par les ensembles de niveau (level sets) de la fonction

$$f_x(y) \stackrel{\text{déf}}{=} g_x(y) \cdot e_N.$$

En effet, par définition,

$$\begin{aligned} \operatorname{int}\Omega \cap U(x) &= \{y \in U(x); f_x(y) > 0\} \\ \partial\Omega \cap U(x) &= \{y \in U(x); f_x(y) = 0\}. \end{aligned}$$

La frontière $\partial\Omega$ est l'ensemble de niveau zéro de f_x, et le gradient

$$\nabla f_x(y) = \ ^*Dg_x(y).e_N$$

est non nul et normal à l'ensemble de niveau zéro, ce qui implique l'existence d'un hyperplan tangent en x. De là, on obtient la normale unitaire extérieure à Ω :

$$n(y) = -\frac{\nabla f_x(y)}{|\nabla f_x(y)|} = -\frac{^*Dg_x(y)e_N}{|^*Dg_x(y)e_N|} = -\frac{^*(Dh_x(g_x(y)))^{-1}e_N}{|^*(Dh_x(g_x(y)))^{-1}e_N|}$$

puisque f_x est décroissante de l'extérieur vers l'intérieur de Ω.

À partir de cette construction locale de la fonction $\{f_x; x \in \partial\Omega\}$ une fonction globale sur $\mathbb{R}^N$ peut être construite pour caractériser Ω.

Théorème 2.3.1. *Soit $k \geq 1$ un entier, $0 \leq l \leq 1$ un nombre réel, et un ensemble Ω dans $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{k,l}$ avec une frontière bornée, il existe une fonction lipschitz continue $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\operatorname{int}\Omega = \{y \in \mathbb{R}^N : f(y) > 0\} \quad \textit{et} \quad \partial\Omega = \{y \in \mathbb{R}^N : f(y) = 0\} \tag{2.1}$$

et un voisinage W de $\partial\Omega$ tel que

$$f \in C^{k,l}(W) \textit{ et } \nabla f \neq 0 \textit{ dans } W \textit{ et } n = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \tag{2.2}$$

où n est la normale unitaire extérieure à Ω le long de $\partial\Omega$.

Démonstration. Construction de la fonction f. On fixe $x \in \partial\Omega$ et on considère la fonction f_x définie précédemment. Par continuité de ∇f_x, il existe un voisinage $V(x) \subset U(x)$ de x tel que

$$\forall y \in V(x), \quad |\nabla f_x(y) - \nabla f_x(x)| \leq 1/2 |\nabla f_x(x)|.$$

Soit $W(x)$ un voisinage ouvert et borné de x tel que $\overline{W(x)} \subset V(x)$. Pour $\partial\Omega$ bornée et donc compacte il existe un recouvrement ouvert $\{W_j = W(x_j) : 1 \leq j \leq m\}$ de $\partial\Omega$ pour une suite finie $\{x_j, 1 \leq j \leq m\} \subset \partial\Omega$. Soit $W = \cup_{j=1}^m W_j$, et soit $\{r_j, 1 \leq j \leq m\}$ une partition de l'unité de la famille $\{V_j = V_{x_j}\}$ telle que

$$\begin{cases} r_j \in \mathcal{D}(V_j), \quad 0 \leq r_j(x) \leq 1, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m r_j(x) = 1 \text{ dans } \overline{W}, \end{cases}$$

où par définition, W est un voisinage ouvert de $\partial\Omega$ tel que $\overline{W} \subset V = \cup_{j=1}^m V_j$ et $\mathcal{D}(\mathcal{V}_|)$ est l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact dans V_j. on définit la fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$:

$$f(y) \overset{\text{déf}}{=} d_{W\cup\Omega^c} - d_{W\cup\Omega} + \sum_{j=1}^m r_j(y) \frac{f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|}, \tag{2.3}$$

où $d_A(x) = \inf\{|y - x| : y \in A\}$ est la fonction distance d'un point x à un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}^N$. La fonction d_A est lipschitz continue avec une constante égale à 1 (voir le chapitre 3). Puisque pour tout $j, f_j \in C^{k,l}(V_j), r_j \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_|)$, et $\overline{W_j} \subset V_j, r_j f_j \in C^{k,l}(V_j)$ à support compact dans V_j. De plus, si $k \geq 1$, $r_j f_j$ est lipschitz continue dans $\mathbb{R}^N$, alors, par définition, f est lipschitz continue sur $\mathbb{R}^N$ comme étant la somme finie des fonctions lipschitz continues sur $\mathbb{R}^N$.

Soit

$$J(y) \overset{\text{déf}}{=} \{j : 1 \leq j \leq m, r_j(y) > 0\}$$

pour $y \in V$. Pour tout $y \in \overline{W}, J(y) \neq \varnothing, d_{W\cup\Omega^c} = 0 = d_{W\cup\Omega}$, et

$$f(y) = \sum_{j \in J(y)} r_j(y) \frac{f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|}. \tag{2.4}$$

Pour $y \in \partial\Omega = \overline{W} \cap \partial\Omega, f_j(y) = 0$ pour tout $j \in J(y)$ et donc $f(y) = 0$; pour $y \in \operatorname{int}\Omega \cap \overline{W}, f_j(y) > 0$ et $r_j(y) > 0$ pour tout $j \in J(y)$ et donc $f(y) > 0$; pour $y \in \operatorname{int}\Omega^c \cap \overline{W}, f_j(y) < 0$ et $r_j(y) > 0$ pour tout $j \in J(y)$ et donc $f(y) < 0$; pour $y \in \Omega - \overline{W}, f_j \geq 0, r_j \geq 0, \sum_{j=1}^m r_j f_j \geq 0, d_{W\cup\Omega^c} > 0, d_{W\cup\Omega} = 0, \text{et} f > 0,$ pour $y \in \Omega^c - \overline{W}, f_j \leq 0, r_j \geq 0, \sum_{j=1}^m r_j f_j \leq 0, d_{W\cup\Omega^c} = 0, d_{W\cup\Omega} > 0, \text{et} f < 0,$ pour $y \in \Omega^c - \overline{W}$. Donc, on a prouvé que $\partial\Omega \subset f^{-1}(0), \operatorname{int}\Omega \subset \{f > 0\}$, et $\operatorname{int}\Omega^c \subset \{f < 0\}$, pour toute f qui a la propriété (2.4).

Propriétés. On rappelle que sur W la fonction f est donnée par l'expression (2.4). Elle appartient à $C^{k,l}(W)$, et, plutôt à $C^1(W)$, comme étant une somme finie des $C^{k,l}$-fonctions sur W pour $k \geq 1$. Le gradient de f dans W est donné par

$$\nabla f(y) = \sum_{j \in J(y)} \nabla r_j(y) \frac{f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|} + r_j(y) \frac{\nabla f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|}.$$

Cela revient à démontrer qu'il est non nul sur $\partial\Omega$. Sur $\partial\Omega \cap V_j$, $f_j = 0$, et

$$\forall j \in J(y), \frac{\nabla f_j(y)}{|\nabla f_j(y)|} = -n(y).$$

De là, dans W, ∇f peut être écrit sous la forme

$$\nabla f(y) = -n(y) \sum_{j \in J(y)} r_j(y) \frac{\nabla f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|}$$

et

$$\nabla f(y) + n(y) = n(y) \sum_{j \in J(y)} r_j(y) [1 - \frac{\nabla f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|}].$$

Finallement, par construction de W,

$$|\nabla f(y)| \geq |n(y)| - |n(y)| \sum_{j \in J(y)} r_j(y) |1 - \frac{\nabla f_j(y)}{|\nabla f_j(x_j)|}| \geq 1 - \sum_{j \in J(y)} r_j(y) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

et $\nabla f \neq 0$ dans W. Ce qui prouve la propriété. $\square$

Ce théorème a une réciproque,

Théorème 2.3.2. *On associe avec une fonction continue $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$\Omega \overset{\text{déf}}{=} \{y \in \mathbb{R}^N : f(y) > 0\}.$$

On suppose que

$$f^{-1}(0) \overset{\text{déf}}{=} \{y \in \mathbb{R}^N : f(y) = 0\} \neq \varnothing$$

et qu'il existe un voisinage V de $f^{-1}(0)$ tel que $f \in C^{k,l}(V)$, pour un $k \geq 1$ et un $0 \leq l \leq 1$, et que $\nabla f \neq 0$ dans $f^{-1}(0)$. Alors Ω est un ensemble de classe $C^{k,l}$,

$$\operatorname{int} \Omega = \Omega \quad \textit{et} \quad \partial\Omega = f^{-1}(0). \tag{2.5}$$

Démonstration. Par continuité de f, Ω est ouvert, $\operatorname{int}\Omega = \Omega$, $\complement\Omega$ est fermé,

$$\overline{\Omega} \subset \{y \in \mathbb{R}^N : f(y) \geq 0\}, \quad \overline{\complement\Omega} = \complement\Omega = \{y \in \mathbb{R}^N : f(y) \leq 0\},$$

et $\partial\Omega \subset f^{-1}(0)$. Réciproquement, pour tout $x \in \partial\Omega$, on définit la fonction

$$g(t) \overset{\text{déf}}{=} f(x + t\nabla f(x)).$$

Il existe un $\delta > 0$, tel que pour tout t, $|t| < \delta$, $x + t\nabla f(x) \in V$ et la fonction g est C^1 dans $]-\delta, \delta[$. Comme $g(0) = 0$ et $g'(t) = \nabla f(x + t\nabla f(x)) \cdot \nabla f(x)$

$$f(x + t\nabla f(x)) = \int_0^t f(x + s\nabla f(x)) \cdot \nabla f(x)\, ds.$$

Par continuité de ∇f dans V et que $\nabla f(x) \neq 0$, il existe δ' , $0 < \delta' < \delta$, tel que

$$\forall s, 0 \leq s \leq \delta', \nabla f(x + s\nabla f(x)) \cdot \nabla f(x) \geq \frac{1}{2}\, |\nabla f(x)|^2 > 0.$$

Puisque, pour tout $t, 0 < t \leq \delta$, $f(x + t\nabla f(x)) > 0$. Donc tout point dans $f^{-1}(0)$ peut être approché par une suite $\{x_n = x + t_n\nabla f(x) : n \geq 1,\ 0 < t_n \leq \delta'\}$ dans Ω, $t_n \to 0$, et $f^{-1}(0) \subset \overline{\Omega}$. De la même façon, en utilisant une suite négative de t_n's, $f^{-1}(0) \subset \overline{\complement\Omega}$, d'où $f^{-1}(0) \subset \partial\Omega$. Ce qui prouve (2.5).

On fixe $x \in \partial\Omega = f^{-1}(0)$. Comme $\nabla f(x) \neq 0$, on définit le vecteur unitaire $e_N(x) = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$. On associe avec $e_N(x)$ les vecteurs unitaires $e_1(x), \ldots, e_{N-1}(x)$, de la base orthonormale dans $\mathbb{R}^N$ avec e_N. Définissons la fonction $g_x : V \to \mathbb{R}^N$:

$$g_x(y) \overset{\text{déf}}{=} (\{(y - x) \cdot e_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^{N-1}, \frac{f(y)}{|\nabla f(x)|}) \quad \Rightarrow g_x \in C^{k,l}(V; \mathbb{R}^N).$$

La transposée de la matrice Jacobienne de g_x est donné par

$${}^*Dg_x(y) = \left(e_1(x), \ldots, e_{N-1}(x), \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(x)|}\right)$$

et $Dg_x(x) = I$, la matrice identité dans le système de référence $\{e_i(x)\}$. Par la théorie des fonctions inverses g_x a un inverse de classe $C^{k,l}$, h_x dans un voisinage $U(x)$ de x dans V.

Parsuite,

$$\Omega \cap U(x) = \{y \in U(x) : f(x) > 0\} = \operatorname{int}\Omega \cap U(x),$$
$$\{y \in U(x) : f(x) = 0\} = \partial\Omega \cap U(x),$$

et l'ensemble Ω est de classe $C^{k,l}$. $\square$

2.4 Ensembles localement épigraphe d'une fonction

Après les difféomorphismes et les ensembles de niveau, la représentation via l'épigraphe d'une fonction est un troisième point de vue pour décrire les caractéristiques d'un ensemble ou d'un domaine. Par exemple, les domaines lipschitiziens, qui sont caractérisés par la propriété que leur frontière est localement l'épigraphe d'une fonction lipschitizienne, jouent un rôle important dans la théorie des espaces de Sobolev et des équations aux dérivées partielles. Ils peuvent être caractérisés par la propriété de cône uniforme. [1] Et enfin on va voir que les ensembles qui sont localement l'épigraphe des $C^{k,l}$-fonctions sont équivalents aux ensembles qui sont localement de classe $C^{k,l}$ pour $k \geq 1$.

2.4.1 C^0, localement C^0, et équi-C^0 épigraphes

Soit e_N dans $\mathbb{R}^N$ un vecteur de réfèrence unitaire, et soit la notation :

$$H \overset{\text{déf}}{=} \{e_N\}^{\perp}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad \zeta' \overset{\text{déf}}{=} P_H(\zeta), \quad \zeta_N \overset{\text{déf}}{=} e_N(\zeta),$$

H est l'hyperplan de référence orthogonal à e_N, P_H est la projection orthogonale sur H, ζ' est la composante tangentielle de ζ, et ζ_N est la composante normale de ζ. Le vecteur ζ égal à $\zeta' + \zeta_N e_N$.

Une *direction* dans $\mathbb{R}^N$ est spécifiée par un vecteur unitaire $d \in \mathbb{R}^N$, $|d| = 1$, ou par Ae_N pour une matrice A dans le sous-groupe des matrices orthogonales $N \times N$

$$\text{O(N)} \overset{\text{déf}}{=} \{A : {}^*AA = A^*A = I\}, \tag{2.6}$$

où ${}^*A$ est la matrice transposée de A. Réciproquement, pour tout vecteur unitaire $d \in \mathbb{R}^N, |d| = 1$, il existe un $A \in$ O(N) tel que $d = Ae_N$. Pout tout $x \in \mathbb{R}^N, A \in$ O(N), on a $|Ax| = |x| = |A^{-1}x|$.

Définition 2. *Soit e_N un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^N, H$ l'hyperplan $\{e_N\}^{\perp}$, et Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière non vide $\partial\Omega$.*

1. Ω est dit localement un C^0 épigraphe*, si pout tout $x \in \partial\Omega$ il existe*

1. Ω satisfait la *propriété de cône uniforme* si

$$\exists \lambda > 0, \exists \omega > 0, \exists r > 0, \forall x \in \partial\Omega, \exists A_x \in \text{O(N)},$$
$$\text{tel que}$$
$$\forall y \in B(x,r) \cap \bar{\Omega}, \quad y + A_x C(\lambda, \omega) \subset \operatorname{int} \Omega,$$

où O(N) est défini en (2.6), et $C(\lambda, \omega) \overset{\text{déf}}{=} \{y \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{\tan \omega}|P_H(y)| < y \cdot e_N < \lambda \}$.

(a) un voisinage ouvert $U(x)$ de x ;

(b) une matrice $A_x \in$ O(N) ;

(c) un voisinage ouvert borné V_x de 0 dans H tel que

$$U(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^N : P_H(A_x^{-1}(y-x) \in V_x\}; \tag{2.7}$$

(d) et une fonction $a_x \in C^0(V_x)$ telle que $a_x(0) = 0$ et

$$U(x) \cap \partial\Omega = U(x) \cap \{x + A_x(\zeta' + \zeta_N e_N) : \zeta' \in V_x, \zeta_N = a_x(\zeta')\}, \tag{2.8}$$

et

$$U(x) \cap \operatorname{int}\Omega = U(x) \cap \{x + A_x(\zeta' + \zeta_N e_N) : \zeta' \in V_x, \zeta_N > a_x(\zeta')\}, \tag{2.9}$$

2. *Ω est dit être C^0* épigraphe *s'il est localement un C^0 épigraphe et les voisinages $U(x)$ et V_x peuvent être choisis de façon que V_x et $A_x^{-1}(U(x) - x)$ soient indépendants de x : il existe des voisinages ouverts et bornés V de 0 dans H et U de 0 dans $\mathbb{R}^N$ tel que $P_H(U) \subset V$ et*

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad V_x = V, \quad \textit{et} \quad \exists A_x \in \text{O(N)} \ \textit{tel que}\ U(x) = x + A_x U.$$

3. *Ω est dit être un* équi-C^0 épigraphe *s'il est localement un C^0 épigraphe et la famille des fonctions $\{a_x : x \in \partial\Omega\}$ est uniformement bornée et équicontinue :*

$$\exists c > 0 \ \textit{tel que}\ \forall x \in \partial\Omega, \forall \epsilon' \in V, \quad |a_x(\epsilon')| \leq c,$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \textit{tel que}\ \forall x \in \partial\Omega, \forall y, \forall z \in V \ \textit{tels que}\ |z-y| < \delta, |a_x(z) - a_x(y)| < \epsilon.$$

Remarque 1. *Les ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ qui sont localement des C^0 épigraphes ont une frontière $\partial\Omega$ avec une mesure de Lebesque N-dimentionelle égale à zéro.*

Notation 1. *Suivant la condition (2.7), un point $y \in U(x) \subset \mathbb{R}^N$ est représenté par $(\zeta', \zeta_N) \in V_x \times \mathbb{R}$, où*

$$\zeta' \overset{\text{déf}}{=} P_H(A_x^{-1}(y-x)) \in V_x \subset H, \quad \zeta_N \overset{\text{déf}}{=} A_x^{-1}(y-x).e_N(x).$$

On peut aussi identifier H avec $\mathbb{R}^{N-1} \overset{\text{déf}}{=} \{(z', 0) \in \mathbb{R}^N : z' \in \mathbb{R}^{N-1}\}$.

Le cas d'équi-C^0 épigraphe est important, puisqu'on va voir plus loin que les trois cas de la définition précédente sont équivalents lorsque la frontière est compacte.

On montre maintenant que, pour une telle frontière, l'équicontinuité des fonctions $\{a_x : x \in \partial\Omega\}$ peut s'exprimer en fonction des propriétés de continuité en zéro de la *fonction dominante* h. On définit l'espace des *fonctions dominantes* :

$$\mathcal{H} \overset{\text{déf}}{=} \{h : [0,\infty[\to [0,\infty[: h(0) = 0 \text{ et } h \text{ est continue en } 0\}. \tag{2.10}$$

Par continuité en 0, h est localement bornée en 0 :

$$\forall c > 0, \exists \rho > 0 \text{ tel que } \forall \theta \in [0,\rho], |h(\theta)| \leq c.$$

La seule partie importante de la fonction h est celle dans un voisinage borné de zéro. Son extension à $[0,\infty[$ peut être arbitraire.

Théorème 2.4.1. *Soit Ω un C^0-épigraphe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Ω est un équi-C^0-épigraphe.*
2. *il existe $\rho > 0$ et $h \in \mathcal{H}$ tel que $B_H(0,\rho) \subset V$, et pour tout $x \in \partial\Omega$,*
   $\forall \zeta', \xi' \in B_H(0,\rho)$ tel que $|\xi' - \zeta'| < \rho, \quad |a_x(\xi') - a_x(\zeta')| < h(|\xi' - \zeta'|)$.
3. *il existe $\rho > 0$ et $h \in \mathcal{H}$ tel que $B_H(0,\rho) \subset V$, et pour tout $x \in \partial\Omega$,*
   $\forall \xi' \in B_H(0,\rho), a_x(\xi') \leq h(|\xi'|)$.

Théorème 2.4.2. *Quand la frontière $\partial\Omega$ est compacte, on a les équivalences suivantes :*

$$C^0 \textit{ épigraphe local} \iff C^0 \textit{ épigraphe} \iff \textit{équi-}C^0 \textit{ épigraphe}$$

Sous ces conditions, il esiste des voisinages V de 0 dans H, et U de 0 dans $\mathbb{R}^N$ tel que $P_H(U) \subset V$, et les voisinages V_x de 0 dans H et $\mathcal{U}(x)$ de x dans $\mathbb{R}^N$ peuvent être choisis de la forme

$$V_x = V \textit{ et } \exists A_x \in \mathrm{O(N)} \quad \textit{tel que} \quad \mathcal{U}(x) = x + A_x U.$$

De plus, la famille des fonctions $\{a_x : V \to \mathbb{R} : x \in \partial\Omega\}$ peut être choisie uniformement bornée et équicontinue par rapport à $x \in \partial\Omega$. Alors, il existe $\rho > 0$ tel que $B_H(0,\rho) \subset V$ et une fonction $h \in \mathcal{H}$ telle que

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall \xi', \zeta' \in B_H(0,\rho), |\xi' - \zeta'| < \rho, \quad |a_x(\xi') - a_x(\zeta')| \leq |h(\xi' - \zeta')|.$$

2.4.2 Épigraphes localement $C^{k,l}$.

Définition 3. *Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega \neq \varnothing$, soit $k \geq 0$, $0 \leq l \leq 1$.*

1. *Ω est dit* localement un $C^{k,l}$ épigraphe*, si pout tout $x \in \partial\Omega$ il existe*
   (a) *un voisinage ouvert $U(x)$ de x ;*
   (b) *une matrice $A_x \in$ O(N) ;*
   (c) *un voisinage ouvert borné V_x de 0 dans H tel que*
   $$U(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^N : P_H(A_x^{-1}(y-x) \in V_x\}; \tag{2.11}$$
   (d) *et une fonction $a_x \in C^{k,l}(V_x)$ telle que $a_x(0) = 0$ et*
   $$U(x) \cap \partial\Omega = U(x) \cap \{x + A_x(\zeta' + \zeta_N e_N) : \zeta' \in V_x, \zeta_N = a_x(\zeta')\}, \tag{2.12}$$
   et
   $$U(x) \cap \operatorname{int}\Omega = U(x) \cap \{x + A_x(\zeta' + \zeta_N e_N) : \zeta' \in V_x, \zeta_N > a_x(\zeta')\}, \tag{2.13}$$

   On dit que Ω est localement lipschitizien *dans le cas $C^{0,1}$, et* localement höldérien *dans le cas $C^{0,l}$, $0 < l < 1$.*

2. *Ω est dit être un $C^{k,l}$* épigraphe *s'il est localement un $C^{k,l}$ épigraphe et les voisinages $U(x)$ et V_x peuvent être choisis de façon que V_x et $A_x^{-1}(U(x) - x)$ soient indépendants de x : il existe un voisinage ouvert et borné V de 0 dans H et U de 0 dans $\mathbb{R}^N$ tel que $P_H(U) \subset V$ et*
   $$\forall x \in \partial\Omega, \quad V_x = V, \quad et \quad \exists A_x \in \mathrm{O(N)} \text{ tel que } U(x) = x + A_x U.$$
   On dit que Ω est lipschitizien *dans le cas $C^{0,1}$, et* höldérien *dans le cas $C^{0,l}$, $0 < l < 1$.*

3. *Soit $(k,l) \neq (0,0)$, Ω est dit* équi-$C^{k,l}$ épigraphe *s'il est un $C^{k,l}$ épigraphe et*
   $$\exists c > 0, \text{ tel que } \forall x \in \partial\Omega, \|a_x\|_{C^{k,l}(V)} \leq c,$$
   où $\|f\|_{C^{k,l}(V)}$ est la norme dans l'espace $C^{k,l}(V)$ définie par
   $$\|f\|_{C^{k,l}(V)} \overset{déf}{=} \|f\|_{C^k(V)} + \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \sup_{x\neq y\in V} \frac{|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)|}{|y-x|^l}, \quad si\ 0 < l \leq 1,$$
   $$C^{k,0}(V) \overset{déf}{=} C^k(V) \quad et \quad \|f\|_{C^{k,0}(V)} \overset{déf}{=} \|f\|_{C^k(V)}$$

Théorème 2.4.3. *Soit $k \geq 0$, et $0 \leq l \leq 1$, et soit Ω un $C^{k,l}$-épigraphe local.*

1. *$\complement\Omega$ est aussi un $C^{k,l}$-épigraphe local, et*

$$\begin{aligned} &\operatorname{int}\Omega \neq \varnothing, \quad \overline{\operatorname{int}\Omega} = \overline{\Omega}, \quad \textit{et} \quad \partial(\operatorname{int}\Omega) = \partial\Omega, \\ &\operatorname{int}\complement\Omega \neq \varnothing, \quad \overline{\operatorname{int}\complement\Omega} = \overline{\complement\Omega}, \quad \textit{et} \quad \partial(\operatorname{int}\complement\Omega) = \partial\Omega. \end{aligned}$$

   De plus, pour tout $x \in \partial\Omega$

$$\mathrm{m}(\mathcal{U}(x) \cap \partial\Omega) = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{m}(\partial\Omega) = 0,$$

   où m est la mesure de Lebesgue de dimension N.

2. *Si $\Omega \neq \varnothing$ est ouvert, alors $\Omega = \operatorname{int}\overline{\Omega}$.*

2.5 Fonction distance

2.5.1 Définitions et propriétés

Définition 4. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$, la fonction distance d'un point x à A est définie par*

$$d_A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \inf\limits_{y \in A} |y - x|, & A \neq \varnothing, \\ +\infty, & A = \varnothing. \end{cases}$$

Par définition d_A est finie dans $\mathbb{R}^N$ si et seulement si $A \neq \varnothing$. Soit $D \subset \mathbb{R}^N$ et la famille $\{A \subset \overline{D} : A \neq \varnothing\}$ de toutes les sous ensembles non vides A de D. On lui associe la famille des fonctions distance correspondantes :

$$C_d(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \{d_A : \varnothing \neq A \subset \overline{D}\}.$$

Théorème 2.5.1. *Soit A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^N$.*

1. *La fonction $x \mapsto d_A(x)$ est uniformement lipschitz continue dans $\mathbb{R}^N$:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|.$$

2. *il existe $p \in \overline{A}$ tel que $d_A(x) = |p - x|$ et $d_A = d_{\overline{A}}$ dans $\mathbb{R}^N$;*
3. *$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : d_A(x) = 0\}$;*
4. *$d_A = 0$ dans $\mathbb{R}^N \Leftrightarrow \overline{A} = \mathbb{R}^N$;*
5. *$\overline{A} \subset \overline{B} \Leftrightarrow d_A \geq d_B$;*

6. $d_{A\cup B} = \min\{d_A, d_B\}$.

Démonstration. 1. Pour tout $z \in A$ et $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$|z-y| \leq |z-x| + |x-y|,$$
$$d_A(y) = \inf_{z\in A} |z-y| \leq \inf_{z\in A} |z-x| + |y-x| = d_A(x) + |y-x|$$

d'où d_A est lipschitz continue.

2. Comme la fonction $y \mapsto |y-x|$ est continue,

$$d_A(x) = \inf_{y\in A} |y-x| = \inf_{y\in \overline{A}} |y-x| = d_{\overline{A}}(x).$$

La fonction $|y-x| \geq 0$ est bornée inférieurement, son infimum est fini. Soit $\{y_n\} \subset \overline{A}$ une suite minimisante

$$d_{\overline{A}}(x) = \inf_{y\in \overline{A}} |y-x| = \lim_{n\to\infty} |y_n - x|.$$

Alors $\{y_n - x\}$ et donc $\{y_n\}$ sont des suites bornées. D'où il existe une sous-suite qui converge vers un $y \in \overline{A}$ et par continuité $d_{\overline{A}}(x) = |y-x|$.

3. Par la continuité de d_A, $d_A^{-1}(0)$ est fermée et

$$A \subset d_A^{-1}(0) \quad \Rightarrow \bar{A} \subset d_A^{-1}(0).$$

Réciproquement, si $d_A(x) = 0$, il existe $y \in \bar{A}$ tel que $0 = d_A(x) = |y-x|$ et alors $y = x \in \bar{A}$.

4. D'après la partie (3).

5. D'après la partie (2), pour $x \in \bar{A}$, $d_A(x) = 0$, et $d_B(x) \leq d_A(x) = 0$, ce qui implique $d_B(x) = 0$ et $x \in \bar{B}$. Inversement, si $\bar{A} \subset \bar{B}$, alors

$$d_B(x) = d_{\bar{B}}(x) = \inf_{y\in \bar{B}} |y-x| \leq \inf_{y\in \bar{A}} |y-x| = d_{\bar{A}}(x) = d_A(x).$$

6. Évident. □

2.5.2 Métrique de Hausdorff-Pompéiu

Soit D un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$. On associe à tout sous-ensemble non-vide A de $\bar{D}$ la classe d'équivalence

$$[A]_d \overset{\text{déf}}{=} \{B : B \subset \bar{D} \text{ et } \bar{B} = \bar{A}\}.$$

Comme $d_A = d_B$ si et seulement si $\bar{A} = \bar{B}$, alors $\bar{A}$ est le représentant invariant fermé de la classe $[A]_d$. L'ensemble

$$\mathcal{F}_d(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \{[A]_d : \varnothing \neq A \subset \bar{D}\}$$

peut être identifié à l'ensemble

$$C_d(D) = \{d_A : \varnothing \neq A \subset \bar{D}\}.$$

En général, il n'y a pas de représentant ouvert dans la classe $[A]_d$ puisque

$$d_{\bar{A}} = d_A \leq d_{\text{int}\, A}.$$

Par définition de $[A]_d$, l'application

$$[A]_d \mapsto d_A : \mathcal{F}_d(D) \to C_d(D)$$

est bijective. Donc $\mathcal{F}_d$ peut être identifié avec l'ensemble des fonctions distance $C_d(D)$. $\{d_A|_{\bar{D}} : D \to \mathbb{R} : A \subset \bar{D}\} \subset C(\bar{D})$ car d_A est uniformement continue sur $\mathbb{R}^N$.

Quand D est borné, $C(\bar{D})$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{C(D)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

On peut montrer que $\mathcal{F}_d(D)$ muni de la métrique

$$\rho([A]_d, [B]_d) \stackrel{\text{déf}}{=} \|d_A - d_B\|_{C(D)} = \sup_{x \in D} |d_A(x) - d_B(x)|$$

est un espace complet et que cette métrique est égale à la métrique de Pompéiu-Hausdorff, c'est-à-dire

$$\rho_H([A]_d, [B]_d) = \max\{\sup_{x \in B} d_A(x), \sup_{y \in A} d_B(y)\}.$$

En effet, pour $x \in D$, $x_A \in A$, et $x_B \in B$

$$\begin{gathered} |x - x_A| \leq |x - x_B| + |x_B - x_A| \\ \Rightarrow d_A(x) \leq |x - x_B| + d_A(x_B) \leq |x - x_B| + \sup_{y \in B} d_A(y) \\ \Rightarrow d_A(x) \leq d_B(x) + \sup_{y \in B} d_A(y) \quad \Rightarrow \quad d_A(x) - d_B(x) \leq \sup_{y \in B} d_A(y). \end{gathered}$$

En interchangeant les rôles de A et de B

$$\forall x \in D, \quad |d_A(x) - d_B(x)| \leq \max\{\sup_{z \in B} d_A(z), \sup_{y \in A} d_B(y)\}.$$

Quand D est ouvert mais pas nécessairement borné, on utilise l'espace de Fréchet $C^0_{loc}(D)$.

2.5.3 Projection, squelette, fissure, et différentiabilité

Définition 5. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$, $A \neq \varnothing$. On dénote par*

$$\mathrm{Sing}\,(\nabla d_A) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla d_A(x) \not\exists\}$$

l'ensemble des points singuliers du gradient de d_A.

1. *Soit $x \in \mathbb{R}^N$, un point $p \in \bar{A}$ tel que $|p - x| = d_A(x)$ est appelé une* projection *de x sur $\bar{A}$. L'ensemble de toute les projections sur $\bar{A}$ est noté par*

   $$\Pi_A(x) \overset{\text{déf}}{=} \{p \in \bar{A} : |p - x| = d_A(x)\}.$$

   Quand $\Pi_A(x)$ est un singleton, son élément sera noté par $p_A(x)$.

2. *Le* squelette *de A est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^N$ tel que leurs projections sur $\bar{A}$ ne sont pas unique. Il sera noté par*

   $$\mathrm{Sk}\,(A) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \Pi_A(x) \textit{ n'est pas un singleton}\}.$$

3. L'ensemble des fissures *est défini par*

   $$\mathrm{Ck}\,(A) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sing}\,(\nabla d_A) \backslash \mathrm{Sk}\,(A).$$

On constate que $\mathrm{Sk}\,(A) = \mathrm{Sk}\,(\bar{A}), \mathrm{Ck}\,(A) = \mathrm{Ck}\,(\bar{A}), \mathrm{Sing}\,(A) = \mathrm{Sing}\,(\bar{A})$ *puisque* $d_A = d_{\bar{A}}$.

Définition 6. *Soit $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$ et $h > 0$.*

1. *Le* voisinage h-tubulaire ouvert, *le* voisinage h-tubulaire fermé, *et la* h-frontière *de A sont définis respectivement comme :*

   $$U_h(A) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : d_A(x) < h\},\ A_h \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : d_A(x) \leq h\} \textit{ et } d_A^{-1}\{h\}.$$

2. *Pour* $0 < s < h < \infty$

   $$U_{s,h}(A) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : s < d_A(x) < h\} \textit{ et } A_{s,h} \overset{\text{déf}}{=} x \in \mathbb{R}^N : s \leq d_A(x) \leq h\}.$$

Remarque 2. *Soit $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$, la fonction*

$$x \mapsto f_A(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\left(|x|^2 - d_A^2(x)\right) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

est convexe[2] *et continue,* $d_A^2(x)$ *est donc la différence entre deux fonctions convexes*

$$d_A^2(x) = |x|^2 - (|x|^2 - d_A^2(x)),$$

∇f_A *et* ∇d_A^2 *appartiennent à* $\mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$[3]*, et* $\nabla d_A \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \partial \bar{A})^N$.

Théorème 2.5.2. *Soient* $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$ *et* $x \in \mathbb{R}^N$.

1. *L'ensemble* $\Pi_A(x)$ *est non vide, compact, et*

$$\forall x \notin \bar{A} \quad \Pi_A(x) \subset \partial \bar{A} \quad et \quad \forall x \in \bar{A} \quad \Pi_A(x) = \{x\}.$$

2. *Pour tout* x *et* v *dans* $\mathbb{R}^N$*, la semi-différentielle de Hadamard*[4] *de* d_A^2 *existe toujours,*

$$d_H d_A^2(x;v) = \min_{p \in \Pi_A(x)} 2(x-p) \cdot v = 2(x \cdot v - \sigma_{\Pi_A(x)}(v)),$$
$$d_H f_A(x;v) = \sigma_{\Pi_A(x)}(v) = \sigma_{\mathrm{co}\,\Pi_A(x)}(v),$$

où σ_B *est la* fonction de support *de l'ensemble* B*,*

$$\sigma_B(v) \overset{déf}{=} \sup_{z \in B} z \cdot v,$$

et $\mathrm{co}\, B$ *est l'enveloppe convexe de* B*. En particulier,*

$$\mathrm{Sk}\,(A) = \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla d_A^2(x) \nexists\} \subset \mathbb{R}^N \backslash \bar{A}.$$

2. une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie dans un domaine convexe U de $\mathbb{R}^N$ est convexe si pour tout x et y dans U et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

3. L'espace des fonctions à variations bornées $\mathrm{BV}(D)$ d'un ensemble $D \in \mathbb{R}^N$ est l'espace de toutes les fonctions $f \in L^1(D)$ telles que $\nabla f \in M^1(D)^N$ où $M^1(D) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{D}^0(D)'$ le dual de l'espace des fonctions continues à support compact dans D

$$\mathrm{BV}(D) \overset{\text{déf}}{=} \{f \in L^1(D) : \nabla f \in M^1(D)^N\}$$

4. une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a une semi-différentielle de Hadamard en x dans la direction v si

$$d_H f(x;v) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ w \to v}} \frac{f(x+tw) - f(x)}{t} \text{ existe.}$$

Étant donné $v \in \mathbb{R}^N$, pout tout $x \in \mathbb{R}^N \backslash \partial \bar{A}$ la semi-différentielle de Hadamard de d_A existe,

$$d_H d_A(x; v) = \min_{p \in \Pi_A(x)} 2 \frac{x-p}{|x-p|} \cdot v,$$

et pour tout $x \in \partial \bar{A}$, $d_H d_A(x; v)$ existe si et seulement si

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{d_A(x+tv)}{t} \text{ existe.}$$

3. *$\nabla f_A(x)$ existe si et seulement si $\Pi_A(x) = \{p_A(x)\}$ est un singleton. Dans ce cas*

$$p_A(x) = \nabla f_A(x) = x - \frac{1}{2} \nabla d_A^2(x).$$

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}^N$,

$$\forall p(x) \in \Pi_A(x), \quad \frac{1}{2}(|y|^2 - d_A^2(y)) \geq \frac{1}{2}(|x|^2 - d_A^2(x)) + p(x) \cdot (y-x),$$

4. *Les fonctions*

$$p_A : \mathbb{R}^N \backslash \mathrm{Sk}\,(A) \to \mathbb{R}^N \quad et \quad \nabla d_A^2 : \mathbb{R}^N \backslash \mathrm{Sk}\,(A) \to \mathbb{R}^N$$

sont continues. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N \backslash \mathrm{Sk}\,(A)$

$$p_A(x) = x - \frac{1}{2} \nabla d_A^2(x) = \nabla f_A(x).$$

En particulier, pour tout $x \in \bar{A}$, $\Pi_A(x) = \{x\}$ et $\nabla d_A^2(x) = 0$,

$$\mathrm{Sk}\,(A) = \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla d_A^2(x) \not\exists \text{ et } \nabla d_A(x) \not\exists\} \subset \mathbb{R}^N \backslash \bar{A},$$
$$\mathrm{Ck}\,(A) = \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla d_A^2(x) \exists \text{ et } \nabla d_A(x) \not\exists\} \subset \partial \bar{A},$$

et $\mathrm{Sing}\,(\nabla d_A) = \mathrm{Sk}\,(A) \cup \mathrm{Ck}\,(A)$.

5. *La fonction*

$$\nabla d_A : \mathbb{R}^N \backslash (\mathrm{Sk}\,(A) \cup \partial \bar{A}) \to \mathbb{R}^N$$

est continue. Pour tout $x \in \mathrm{int}\, \bar{A}$, $\nabla d_A(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N \backslash (\mathrm{Sk}\,(A) \cup \bar{A})$

$$\nabla d_A(x) = \frac{\nabla d_A^2(x)}{2 d_A(x)} = \frac{x - p_A(x)}{|x - p_A(x)|} \quad et \quad |\nabla d_A(x)| = 1.$$

Si $\nabla d_A(x)$ existe pour $x \in \bar{A}$, alors $\nabla d_A(x) = 0$. En particulier, $\nabla d_A(x) = 0$ presque partout dans $\bar{A}$.

6. *Les fonctions d_A^2 et d_A sont différentiables presque partout et*

$$m(\mathrm{Sk}\,(A)) = m(\mathrm{Ck}\,(A)) = m(\mathrm{Sing}\,(\nabla d_A)) = 0.$$

2.5.4 Ensembles à courbure bornée

On doit noter d'abord que les propriétés globales de la fonction d_A dependent seulement de ses propriétés locales autour de $\partial\bar{A}$. Cette propriété locale est assez générale. Elle est vérifiée par exemple pour des ensembles avec coins, où il y a une discontinuité dans l'orientation de la normle.

Définition 7. *1. Soit $D \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert borné, et A, $\varnothing \neq A \subset \overline{D}$. L'ensemble A est dit à* courbure bornée *par rapport à D si*

$$\nabla d_A \in \mathrm{BV}(D)^N.$$

La famille des ensembles à courbure bornée sera notée par

$$\mathrm{BC}_d(D) \stackrel{déf}{=} \{d_A \in C_d(D) : \nabla d_A \in \mathrm{BV}(D)^N\}.$$

2. Un ensemble $A \neq \varnothing$ est dit à courbure localement bornée *si*

$$\nabla d_A \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N.$$

La famille des ensembles à courbure localement bornée sera notée par

$$\mathrm{BC}_d \stackrel{déf}{=} \{d_A \in C_d(\mathbb{R}^N) : \nabla d_A \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N\}.$$

Théorème 2.5.3. *Un ensemble $A \neq \varnothing$ est à courbure localement bornée si et seulement si*

$$\forall x \in \partial\bar{A}, \exists\rho > 0 \textit{ tel que } \nabla d_A \in \mathrm{BV}(B(x,\rho))^N,$$

où $B(x,\rho)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon ρ.

Exemple 1. *(La boule de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^2$) Soit le domaine*

$$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R\}, \quad \partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\}.$$

On a

$$d_A(x) = \max\{0, |x| - R\}, \quad \nabla d_A(x) = \begin{cases} x/|x|, & |x| > R, \\ (0,0), & |x| < R, \end{cases}$$

Soit ϕ une fonction test, alors on a :

$$\langle \partial_{11} d_A, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} R\cos^2(\theta)\phi\, d\theta + \int_{\complement A} \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \phi\, dx,$$

$$\langle \partial_{22} d_A, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} R \sin^2(\theta) \phi \, d\theta + \int_{\complement A} \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \phi \, dx,$$

$$\langle \partial_{12} d_A, \phi \rangle = \langle \partial_{21} d_A, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} R \cos(\theta) \sin(\theta) \phi \, d\theta + \int_{\complement A} \frac{x_2 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \phi \, dx,$$

$$\langle \Delta d_A, \phi \rangle = \int_{\partial A} \phi \, dH_1 + \int_{\complement A} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \phi \, dx,$$

où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (cf page 5), $\partial_{ij} d_A$ sont les dérivées de d_A au sens de distribution (voir la définition au paragraphe 3.2.4), et H_1 est la mesure de Hausdorff de dimension un. Δd_A contient la mesure de Hausdorff de dimension 1 de la frontière ∂A plus un terme qui correspont à l'intégrale de volume de la courbure moyenne sur l'ensemble de niveau de d_A dans $\complement A$.

2.6 Fonction distance orientée

Plusieurs hypersurfaces dans $\mathbb{R}^N$ peuvent être considérées comme une partie de la frontière Γ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Dans ce cas, le gradient et la matrice hessienne de la fonction distance orientée b_Ω coïncident avec la normale et les N formes fondamentales de l'hypersurface. Elles conservent les propriétés de la fonction distance, et de plus, elles génèrent les propriétés géométriques des ensembles réguliers et de leurs frontières. La régularité de la fonction distance orientée dans un voisinage de la frontière d'un ensemble est équivalente à la régularité locale de la frontière.

2.6.1 Définitions et propriétés

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$, *la fonction distance orientée* de $x \in \mathbb{R}^N$ à A est définie par

$$b_A(x) \overset{\text{déf}}{=} d_A(x) - d_{\complement A}(x).$$

Cette fonction donne une description de type ensembles de niveau de A et sa frontière coïncide avec la courbe de niveau zéro. La fonction b_A est finie dans $\mathbb{R}^N$ si et seulement si $\varnothing \neq \partial A \neq \mathbb{R}^N$ car $b_A = d_A = +\infty$ si $A = \varnothing$ et $b_A = d_{\complement A} = -\infty$ si $A = \mathbb{R}^N$. Cette condition est équivalente à $\partial A \neq \varnothing$. La fonction b_A coïncide avec la notion de fonction distance algébrique à la frontiére de A

$$b_A(x) = \begin{cases} d_{\partial A}(x), & x \in \operatorname{int} \complement A \\ 0, & x \in \partial A \\ -\, d_{\partial A}(x), & x \in \operatorname{int} A \end{cases}$$

lorsque A possède un intérieur et un extérieur non vide. Sinon, on ne peut pas orienter la fonction.

On associe à un sous-ensemble non vide D de $\mathbb{R}^N$ la famille

$$C_b(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \{b_A : A \subset \bar{D} \text{ et } \partial A \neq \varnothing\}.$$

Propriétés 1. *On peut montrer les propriétés suivantes :*

1. *Ω est de classe $C^{1,1}$ $\iff$ b_Ω est $C^{1,1}$ dans un voisinage de Γ*
2. *$A \neq \varnothing$ et $\complement A \neq \varnothing \iff \partial A \neq \varnothing$.*
3. *soit b_A et b_B dans $C_b(D)$,*

$$B \subset A \Rightarrow b_A \leq b_B \text{ et } A = B \Rightarrow b_A = b_B,$$
$$b_A \leq b_B \text{ dans } D \iff \bar{B} \subset \bar{A} \text{ et } \overline{\complement A} \subset \overline{\complement B},$$
$$b_A = b_B \text{ dans } D \iff \bar{A} = \bar{B} \text{ et } \overline{\complement A} = \overline{\complement B} \iff \bar{A} = \bar{B} \text{ et } \partial A = \partial B.$$
$$b_A = 0 \iff \partial A = \mathbb{R}^N.$$

4. *Si $\partial A \neq \varnothing$, la fonction b_A est uniformement lipschitz continue dans $\mathbb{R}^N$ et*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |b_A(x) - b_A(y)| \leq |x - y|.$$

5. *La fonction distance orientée capture toutes les caractéristiques de la frontière :*

$$\begin{aligned}
\nabla b_A|_{\partial A} &= \text{ la normale extérieure } n \text{ unitaire}\\
D^2 b_A|_{\partial A} &= \text{ seconde forme fondamentale}\\
(D^2 b_A)^2|_{\partial A} &= \text{ troisième forme fondamentale}\\
&\vdots\\
(D^2 b_A)^{N-1}|_{\partial A} &= \text{ N-ème forme fondamentale}.
\end{aligned}$$

La première forme fondamentale coïncide avec le produit tensoriel $P = I - \nabla b_A(x)^* \nabla b_A(x)$ sur le plan tangent en x.

La fonction b_A est lipschitz continue de constante 1, et ∇b_A existe et $|\nabla b_A| \leq 1$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$. De plus, $b_A \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pour tout p tel que $1 \leq p \leq \infty$ avec $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N); \nabla f \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$.

Théorème 2.6.1. *Soit D un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$. Alors les fonctions*

$$b_A \to (b_A^+, b_A^-, |b_A|) = (d_A, d_{\complement A}, d_\partial A) : C_b(D) \subset W^{1,p}(D) \to W^{1,p}(D)^3$$

et, pour tout p, $1 \le p \le \infty$, *la fonction*

$$b_A \to (\chi_{\partial A}, \chi_{\text{int}\, A}, \chi_{\text{int}\, \complement A}) : C_b(D) \to L^p(D)^3$$

sont continues[5] .

Pour des frontières régulières, la *projection* $p_{\partial A}(x)$ d'un point $x \in \mathbb{R}^N$ sur ∂A et la *projection orthogonale* $P(x)$ d'un vecteur sur le *plan tangent* $T_x(\partial A)$ à ∂A en x sont données en termes de b_A par les formules suivantes

$$p_{\partial A}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x - b_A(x)\, \nabla b_A(x), \quad P(x) \stackrel{\text{déf}}{=} I - \nabla b_A(x)\, {}^*\nabla b_A(x),$$

où ${}^*V$ est la transposée du vecteur colonne V dans $\mathbb{R}^N$. Le terme $\nabla b_A(x)\, {}^*\nabla b_A(x)$ est donc une matrice $N \times N$.

Il sera pratique d'utiliser la notation suivante pour la décomposition de vecteurs, ou de fonctions matricielles, en leur *partie normale* et *tangentielle* par rapport à ∂A. Soit une fonction vectorielle $V : \partial A \to \mathbb{R}^N$, les composantes normale et tangentielle sont definies par

$$V_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} V(x) \cdot n(x), \quad V_{\partial A}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} P(x)V(x) = V(x) - V_n\, n(x).$$

Par définition, $V_{\partial A}(x)$ est dans le plan tangent $T_x(\partial A)$ à ∂A en x.

Soit Ω un ensemble de frontière régulière Γ. Soit ω un ensemble (relativement) ouvert dans Γ. Quand $\omega = \Gamma$, ω n'a pas de frontière dans Γ ; sinon, on note γ la *frontière* (relative) de ω dans Γ. Soit $h > 0$. On définit le *sandwich* d'épaisseur $2h$ autour de ω et sa *frontière latérale* :

$$\begin{aligned} S_h(\gamma) &\stackrel{\text{déf}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \left|b_\Omega(x)\right| < h,\, p_{\partial\Omega}(x) \in \omega\right\} \\ \Sigma_h(\gamma) &\stackrel{\text{déf}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \left|b_\Omega(x)\right| < h,\, p_{\partial\Omega}(x) \in \gamma\right\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La notation $S_h(\gamma)$ peut aussi être utilisée, mais $\Sigma_h(\gamma)$ souligne le fait que c'est une partie de la frontière de $S_h(\omega)$.

2.6.2 Projection, squelette, fissure et différentiabilité

Cette section est tout à fait analogue que celle de la fonction distance d_A : une connection entre le gradient de b_A et la projection sur ∂A, les singularités des gradients, et les notations des squelettes et des fissures.

5. Où $C_b(D)$ est muni de la topologie $W^{1,p}(D)$ sur les restructions de b_A à D.

Soit $A \subset \mathbb{R}^N, \varnothing \neq \partial A$, et rappelons la notation

$$\mathrm{Sing}\,(\nabla b_A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla b_A(x) \ \nexists\}$$

pour l'ensemble des points singuliers du gradient de b_A,

$$\Pi_{\partial A}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{z \in \partial A : |z - x| = d_{\partial A}(x)\}$$

pour l'ensemble des projections de x sur ∂A (lorsque $\Pi_{\partial A}(x)$ est un singleton, l'élément unique sera noté par $p_{\partial A}(x)$). On introduit

$$\mathrm{Sk}\,(\partial A) \stackrel{\text{déf}}{=} \big\{x \in \mathbb{R}^N : \Pi_{\partial A}(x) \text{ n'est pas un singleton}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R}^N : \nabla d^2_{\partial A}(x) \ \nexists\big\}$$

pour le squelette de ∂A. Et comme pour tout $x \in \partial A$, $\Pi_{\partial A}(x)$ est un singleton, on a $\mathrm{Sk}\,(\partial A) \subset \mathbb{R}^N \backslash \partial A$. En général, les fonctions b_A et $d_{\partial A}$ sont différentes, et $\mathrm{Sing}\,(\nabla b_A)$ est plus petit que $\mathrm{Sing}\,(\nabla d_{\partial A}) = \mathrm{Sk}\,(\partial A) \cup \mathrm{Ck}\,(\partial A)$. L'utilisation de la fonction distance orientée b_A plutôt que $d_{\partial A}$ exige alors une nouvelle définition de l'ensemble des fissures par rapport à b_A qui sera justifiée plus tard.

Définition 8. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N, \varnothing \neq \partial A$, l'ensemble des* b-fissures *de A est défini par*

$$\mathrm{Ck}_{\,b}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Sing}\,\nabla b_A \backslash \mathrm{Sk}\,(\partial A).$$

$\mathrm{Sk}\,(\partial A), \mathrm{Ck}_{\,b}(A)$, *et* $\mathrm{Sing}\,(\nabla b_A)$ *ont une mesure de Lebesgue égale à zéro, parce que b_A est lipschitz continue, et donc différentiable presque partout.*

Théorème 2.6.2. *Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $\varnothing \neq \partial A$, et soit $x \in \mathbb{R}^N$, et $h > 0$.*
– *Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $d^2_{\partial A}(x) = b^2_A(x)$,*

$$f_{\partial A}(x) = \frac{1}{2}(|x|^2 - b^2_A(x)).$$

est convexe et continue, la fonction

$$x \to \frac{k_{\partial A,h}(x)}{2h} = \frac{|x|^2}{2h} - |b_A|(x) : \mathbb{R}^N \backslash U_h(\partial A) \to \mathbb{R}$$
$$\text{ăoù } k_{A,h}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} |x|^2 - 2hd_A(x), & \text{si } d_A(x) \geq h, \\ |x|^2 - d^2_A(x) - h^2, & \text{si } d_A(x) < h, \end{cases}$$

est localement convexe (et continue) dans $\mathbb{R}^N \backslash U_h(\partial A)$, $\nabla f_{\partial A}$, et ∇b^2_A appartiennent à $\mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$, et $\nabla d_{\partial A} \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \partial(\partial A))^N$.

– *L'ensemble $\Pi_{\partial A}(x)$ est non vide et compact, et*

$$\forall x \notin \partial A, \quad \Pi_{\partial A}(x) \subset \partial \bar{A} \quad et \quad \forall x \in \partial A \quad \Pi_{\partial A}(x) = \{x\}.$$

Pour $x \notin \bar{A}, \Pi_{\partial A}(x) = \Pi_A(x) \subset \partial \bar{A}$ et pour $x \notin \overline{\complement A}, \Pi_{\partial A}(x) = \Pi_{\complement A}(x) \subset \partial \overline{\complement A}$. De plus, $\partial(\partial A) = \partial \bar{A} \cup \partial \overline{\complement A}$.

– *Pour tout x et v dans $\mathbb{R}^N$, la semi-différentielle de Hadamard de b_A^2 existe toujours,*

$$d_H b_A^2(x; v) = \min_{z \in \Pi_{\partial A}(x)} 2(x - z).v,$$
$$d_H f_{\partial A}(x; v) = \sigma_{\Pi_{\partial A}(x)}(v).$$

– *$\nabla f_{\partial A}(x)$ existe si et seulement si $\Pi_{\partial A}(x) = \{p_{\partial A}(x)\}$ est un singleton. Dans ce cas*

$$p_{\partial A}(x) = \nabla f_{\partial A}(x) = x - \frac{1}{2}\nabla b_A^2(x).$$

– *Les fonctions b_A^2 et b_A sont différentiables presque partout et*

$$m(\mathrm{Sk}\,(\partial A)) = m(\mathrm{Ck}\,_b(A)) = m(\mathrm{Sing}\,(\nabla b_A)) = 0.$$

2.6.3 Frontière à courbure bornée

On introduit les familles des ensembles dont la frontière est à courbure bornée ou locallement bornée pour la fonction distance orientée, ce qui est analogue de celles des ensembles associées à d_A et $d_{\complement A}$ de la section précédente. On verra que cela incluera en particulier les domaines de classe $C^{1,1}$ et les ensembles convexes.

Définition 9.

– *Étant donné un ensemble ouvert non vide D de $\mathbb{R}^N$ et un sous-ensemble A de $\bar{D}$, $\partial A \neq \varnothing$, la frontière ∂A est dite à* courbure bornée *par rapport à D si*

$$\nabla b_A \in \mathrm{BV}(D)^N.$$

Cette famille sera notée par

$$\mathrm{BC}_b(D) \overset{déf}{=} \left\{ b_A \in C_b(D) : \nabla b_A \in \mathrm{BV}(D)^N \right\}.$$

– *∂A est dite* localement à courbure bornée *si $\nabla b_A \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$*

$$\mathrm{BC}_b \overset{déf}{=} \{ b_A \in C_b(\mathbb{R}^N) : \nabla b_A \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N \}.$$

Théorème 2.6.3. *Soit A, $\partial A \neq \varnothing$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. Alors ∂A est à courbure localement bornée si et seulement si*

$$\forall x \in \partial(\partial A), \exists \rho > 0 \text{ tel que } \nabla b_A \in \mathrm{BV}(B(x,\rho))^N,$$

où $B(x,\rho)$ est la boule ouverte de rayon ρ en x.

Exemple 2. *(La boule de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^2$) Soit le domaine*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R\}, \quad \partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\}.$$

Il est clair que

$$b_A(x) = |x| - R, \quad \nabla b_A(x) = \frac{x}{|x|}.$$

On définit $\langle f, \phi \rangle = \int f(x)\phi\, dx$, avec ϕ une fonction test, alors on a :

$$\langle \Delta b_A, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x} \phi\, dx.$$

Ensuite,

$$b_{\partial A}(x) = ||x| - R|, \quad \nabla b_{\partial A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & |x| > R, \\ -\dfrac{x}{|x|}, & 0 < |x| < R, \end{cases}$$

$$\langle \Delta b_{\partial A}, \phi \rangle = 2 \int_{\partial A} \phi\, ds - \int_A \frac{1}{|x|} \phi\, dx + \int_{\complement A} \frac{1}{|x|} \phi\, dx.$$

Exemple 3. *(Demi-plan dans $\mathbb{R}^2$) Soit le domaine*

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0\}, \quad \partial A = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\}.$$

On a

$$b_A(x_1, x_2) = x_1, \quad \nabla b_A(x_1, x_2) = (1, 0), \quad \Delta b_A(x) = 0.$$
$$b_{\partial A}(x_1, x_2) = |x_1|, \quad \nabla b_{\partial A}(x_1, x_2) = (x_1/|x_1|, 0).$$
$$\textit{Et } \langle \Delta b_{\partial A}, \phi \rangle = 2 \int_{\partial A} \phi\, dx.$$

2.6.4 Régularité de la frontière

Dans cette section, on va voir que la régularité de ∂A est directement reliée à la régularité de la fonction distance orientée b_A dans un voisinage de ∂A.

Théorème 2.6.4 (Version locale). *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$, $\partial A \neq \varnothing$, et soit $k \geq 1$ un entier, et $0 \leq l \leq 1$ un nombre réel, et $x \in \partial A$.*

1. *($k = 1$, $0 \leq l \leq 1$). A est de classe $C^{1,l}$ dans un voisinage borné ouvert $V(x)$ de x et $\mathrm{Sk}\,(\partial A) \cap V(x) = \varnothing$ si et seulement si*
$$\exists \rho > 0 \textit{ tel que } b_A \in C^{1,l}(\overline{B_\rho(x)}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{m}(\partial A \cap B_\rho(x)) = 0.$$
2. *($k = 1$, $l = 1$). A est localement de classe $C^{1,1}$ en x si et seulement si*
$$\exists \rho > 0 \textit{ tel que } b_A \in C^{1,1}(\overline{B_\rho(x)}) \quad \textit{et} \quad m(\partial A \cap B_\rho(x)) = 0.$$
3. *($k \geq 2$, $0 \leq l \leq 1$). A est localement de classe $C^{k,l}$ en x si et seulement si*
$$\exists \rho > 0 \textit{ tel que } b_A \in C^{k,l}(\overline{B_\rho(x)}) \quad \textit{et} \quad m(\partial A \cap B_\rho(x)) = 0.$$

Théorème 2.6.5 (Version globale). *Soit $A \subset \mathbb{R}^N, \partial A \neq \varnothing$, et soit $k \geq 1$ un entier, et $0 \leq l \leq 1$ un nombre réel, et $x \in \partial A$.*

1. *($k = 1$, $0 \leq l \leq 1$). A est de classe $C^{1,l}$ et $\overline{\mathrm{Sk}\,(\partial A)} \cap \partial A = \varnothing$ si et seulement si*
$$\mathrm{m}(\partial A) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall x \in \partial A, \exists \rho > 0 \textit{ tel que } b_A \in C^{1,l}(\overline{B_\rho(x)}).$$
2. *($k = 1, l = 1$). A de classe $C^{1,1}$ en x si et seulement si*
$$\mathrm{m}(\partial A) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall x \in \partial A, \exists \rho > 0 \textit{ tel que } b_A \in C^{1,1}(\overline{B_\rho(x)}).$$
3. *($k \geq 2, 0 \leq l \leq 1$). A est localement de classe $C^{k,l}$ en x si et seulement si*
$$\mathrm{m}(\partial A) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall x \in \partial A, \exists \rho > 0 \textit{ tel que } b_A \in C^{k,l}(\overline{B_\rho(x)}).$$

Théorème 2.6.6. *Soit $k \geq 1$ un entier et l, $1 \leq l \leq 1$, un réel et $A \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\partial A \neq \varnothing$. On suppose qu'au point $x \in \partial A$, il existe un voisinage borné ouvert $V(x)$ de x tel que $b_A \in C^{k,l}(\overline{V(x)})$ et $m(\partial A \cap V(x)) = 0$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *A est localement de classe $C^{k,l}$ dans $V(x)$ et $b_A = b_{\mathrm{int}\,A} = b_{\bar{A}}$ dans $V(x)$.*

(ii) *$\Pi_{\partial A}(y) = \{p_{\partial A}(y)\}$ est un singleton pour tout $y \in V(x)$ et*
$$b_A^2 \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(V(x)) \cap C^{k,l}_{\mathrm{loc}}(V(x)) \quad \textit{et} \quad p_{\partial A} \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(V(x))^N \cap C^{k-1,l}_{\mathrm{loc}}(V(x))^N.$$

Chapitre 3

Sous-variétés

3.1 Introduction

On a vu au chapitre 2 le point de vue de la géométrie différentielle pour cataloguer la régularité des ensembles avec intérieur non-vide à partir de difféomorphismes locaux en chaque point de leur frontière. On a aussi vu comment l'introduction de la fonction distance orientée pouvait générer les mêmes renseignements dans un cadre purement analytique.

Les fonctions distance sont des cas particuliers de classes de fonctions paramétrisées par des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$. L'exemple le plus célèbre est celui des ensembles de Caccioppoli [8] utilisés par De Giorgi [9, 10, 11, 12] pour résoudre le célèbre problème de frontière libre de Plateau [37]. L'idée de base consiste à considérer la surface libre comme la frontière d'un ensemble Ω dans $\mathbb{R}^3$ et d'introduire la fonction caractéristique,

$$\chi_\Omega(x) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Il faut ensuite imposer des conditions analytique sur la fonction χ_Ω pour donner un sens à la mesure de surface sur la frontière Γ. Si l'on se restreint à des Ω bornés et mesurables au sens de Lebesgue, la fonction χ_Ω possède un gradient au sens des distributions. Un *ensemble de Caccioppoli* est un Ω tel que ce gradient soit un vecteur de mesures ou, de façon équivalente que χ_Ω soit de variations bornées. La norme de ce gradient dans l'espace des mesures coïncide avec la mesure de surface ou le *périmètre* de la frontière Γ.

La même approche a été utilisée par Delfour et Zolésio [24, 25, 26, 27, 28, 29] dans le cadre de la théorie des coques minces et asymptotiques en remplaçant la fonction caractéristique χ_Ω par la fonction distance orientée b_Ω qui donne accès à la normale et aux formes fondamentales de Γ sans introduire de bases et de coordonnées locales.

Comme dans le chapitre précédent, nous allons maintenant passer en revue ces différents points de vue.

3.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^N$

3.2.1 Introduction

Nous empruntons ces quelques lignes à J. Lafontaine [31].

> Les variétés différentielles sont la généralisation naturelle des courbes et des surfaces. La notion de variété apparaît pour la première fois dans la leçon inaugurale de Riemann en 1851, et lui permet de donner une solution satisfaisante au problème du prolongement analytique des fonctions holomorphes.
>
> Il fallait attendre un bon demi-siècle pour qu'une définition précise se dégage. Il s'agit de concevoir non pas des parties d'un espace $\mathbb{R}^N$ avec N grand, définies par un certain nombre d'équations, mais d'une façon plus abstraite des objets, pour lesquels la notion de fonction différentiable ait un sens.
>
> Les raisons pour s'intéresser à des dimensions plus grandes que trois sont nombreuses. L'une des plus évidentes vient de la mécanique classique. L'espace des configurations d'un système articulé dépend vite de plus de trois paramètres : il en faut déjà six pour un solide.

Une *variété* de dimension N est un espace topologique, tel que pour chaque point on peut trouver un voisinage qui est homéomorphe à l'espace euclidien de dimension N. Une *sous-variété* de dimension d, $1 \leq d < N$, est un sous-ensemble qui a la même structure q'une variété, mais qui sera localement homéomorphe à l'espace euclidien de dimension d. Dans la pratique, une sous-variété peut être définie localement par des équations, ou par des représentations paramétriques. Le nombre de paramètres réels est égal à la dimension, et le nombre d'équations, égal à $N - p$ si p est la dimension, et $N - p$ est la codimension de la sous-variété.

Nous rappelons brièvement la définition d'une sous-variété de codimension plus grande ou égale à 1 et définissons l'intégrale frontière associée à une sous-variété régulière de dimension arbitraire dans $\mathbb{R}^N$. La définition de l'intégrale se généralise en introduisant les mesures de Hausdorff qui prolongent l'intégration sur une sous-variété lisse à des sous-ensembles mesurables arbitraires de $\mathbb{R}^N$. Ensuite, on complète la section en définissant les formes fondamentales et les courbures d'une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^N$ de codimension 1.

3.2.2 Sous-variétés régulières

Définition 10 ([7, page 56]). *Soient $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}^N$, $k \geq 1$ et $1 \leq d \leq N$ deux entiers, et $0 \leq l \leq 1$ un nombre réel.*

(i) *Étant donné $x \in S$, S est dite* localement une sous-variété de classe C^k *(resp., $C^{k,l}$) de dimension d en x, s'il existe un ouvert $U(x)$ de $\mathbb{R}^N$ qui contient x et un C^k-difféomorphisme g_x de $U(x)$ dans son image ouverte $g_x(U(x))$, tel que*

$$g_x(U(x) \cap S) = g_x(U(x)) \cap R^d,$$

où $R^d \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{(x_1, \cdots, x_d, 0, \cdots, 0) : (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d\right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^N$.

(ii) *S est dite une* sous-variété de classe C^k *(resp., $C^{k,l}$) de dimension d dans $\mathbb{R}^N$ si, pour tout $x \in S$, elle est localement une sous-variété de classe C^k (resp., $C^{k,l}$) de dimension d en x.*

3.2.3 Intégrale sur une sous-variété de classe C^1

En géométrie différentielle (voir, par exemple, [7, page 226]), il existe une façon générale pour définir l'intégrale sur une sous-variété orientée. Elle fait appel à la notion de densité canonique associée au difféomorphisme local de classe C^k. Nous rappelons ici les constructions et spécialisons les résultats aux variétés orientées de dimension $N-1$.

Pour une sous-variété S de classe C^1 et de dimension d, $1 \leq d \leq N$, la *densité canonique* ω_x en un point $x \in S$ est donnée par

$$\omega_x(y) = \sqrt{|\det B(y)|}, \quad y \in U(x) \cap S,$$

où $B(y)$ est la matrice $d \times d$ donnée par

$$(B)_{ij}(y) = (Dh_x(y)e_i) \cdot (Dh_x(y)e_j), \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad h_x = g_x^{-1} \text{ sur } g_x(U(x)).$$

Dans le cas d'un ouvert Ω de classe C^1, on a, directement de la définition 1 du chapitre 2 et de la définition 10, que sa frontière Γ est une sous-variété C^1 de dimension $N-1$. On peut vérifier que

$${}^*Dh_x(y)Dh_x(y) = \begin{pmatrix} {}^*CC & {}^*Cc \\ {}^*cC & {}^*cc \end{pmatrix}, \quad B ={}^* CC,$$

où C est la matrice $N \times (N-1)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ sont définis par

$$C_{ij} = \{Dh_x(y)\}_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad c = Dh_x(y)e_N.$$

Soit $M(A)$ la matrice de cofacteurs associée à la matrice A : $M(A)_{ij}$ égale au détérminant de la matrice après avoir soustrait la i-ème ligne et le j-ème colonne en multipliant $(-1)^{i+j}$. Donc $M(A) = (\det A)^* A^{-1}, M(^*A) =^* M(A)$, et pour deux matrices inversibles A_1 et A_2, $M(A_1 A_2) = M(A_1)M(A_2)$. Et donc

$$\det B = M(^*Dh_x(y)\, Dh_x(y))_{NN} = e_N \cdot M(^*Dh_x(y) Dh_x(y)) e_N,$$

où $M(^*Dh_x(y)Dh_x(y))_{NN}$ est le NN-cofacteur de la matrice $^*Dh_x(y)Dh_x(y)$. D'où

$$\begin{aligned} M(^*Dh_x(y)\, Dh_x(y))_{NN} &= e_N \cdot M(^*Dh_x(y)\, Dh_x(y)) e_N \\ &= e_N \cdot M(^*Dh_x(y))\, M(Dh_x(y)) e_N \\ &= |M(Dh_x(y)) e_N|^2 . \end{aligned}$$

On obtient finalement la forme suivante de la densité canonique

$$\omega_x(y) = \sqrt{|\det B(y)|} = |M(Dh_x(y)) e_N| = |\det Dh_x(y)| \left| ^*(Dh_x(y))^{-1} e_N \right| .$$

Si Γ est compact, la famille de voisinages ouverts $U(x)$ associée aux points $x \in \Gamma$ forme un recouvrement ouvert de Γ. Alors il existe un recouvrement ouvert *fini*, c-à-d., il existe un nombre fini de points $x_j, 1 \leq j \leq m$ de Γ tels que $\Gamma \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$ avec $U_j = U(x_j)$. L'intégrale de frontière sur Γ est obtenue en utilisant une partition de l'unité, $\{r_j : 1 \leq j \leq m\}$ pour la famille $\{U_j, 1 \leq j \leq m\}$ de Γ :

$$r_j \in \mathcal{D}(U_j), \quad 0 \leq r_j(x) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^m r_j(x) = 1 \quad \text{dans } U, \tag{3.2}$$

où U est un voisinage de Γ tel que $\overline{U} \subset \cup_{j=1}^m U_j$ et $\mathcal{D}(U_j)$ est l'ensemble des fonctions infinement différentiables à support compact dans U_j.

Si $f \in C^0(\Gamma)$ alors $(fr_j) \circ h_j \in C^0(B_0)$, $1 \leq j \leq m$. On définit d'abord l'intégrale de fr_j sur $\Gamma_j = U(x_j) \cap \Gamma$:

$$\int_{\Gamma_j} fr_j\, d\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \int_{B_0} (fr_j) \circ h_j(\zeta', 0)\, \omega_j(\zeta')\, d\zeta', \tag{3.3}$$

où $\omega_j = \omega_{x_j}$ et

$$\begin{gathered} \omega_x(\zeta') = |m_x(h_x(\zeta', 0))|\ |\det Dh_x(\zeta', 0)| \\ m_x(y) = -^*(Dh_x)^{-1}(h_x^{-1}(y)) e_N = -^*Dg_x(y) e_N. \end{gathered}$$

Finalement, l'intégrale frontière ou de bord de f le long de Γ est définie comme

$$\int_\Gamma f\, d\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} fr_j\, d\Gamma. \tag{3.4}$$

3.2.4 Mesures de Hausdorff

La densité canonique associée à une sous-variété régulière S de dimension d est la construction classique qui donne la mesure de surface sur S. En 1918, F. Hausdorff introduisit une mesure sur $\mathbb{R}^N$ qui coïncide avec l'intégrale sur une sous-variété régulière de dimension d, mais qui est définie sur tous les sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^N$. Quand $d = N$, cette mesure est égale à la mesure de Lebesgue.

Définition 11. *Pout tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^N$ on définit le* diamètre *de S comme étant*

$$diam(S) \overset{déf}{=} \sup\{|x-y| \;:\; x, y \in S\}\,. \tag{3.5}$$

Soit d, $1 \leq d \leq N$ un entier et $\alpha(d)$ la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$. La mesure de Hausdorff de dimension d, $H_d(A)$, d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ est définie selon le processus suivant : pour δ petit, on recouvre A par un nombre dénombrable d'ensembles S_j de $\operatorname{diam}(S_j) \leq \delta$, et on prend la limite quand $\delta \to 0$

$$H_d(A) \overset{déf}{=} \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{\substack{A \subset \cup S_j, \\ diam(S_j) \leq \delta}} \sum_j \alpha(d) \left(\frac{diam(S_j)}{2}\right)^d, \tag{3.6}$$

où l'infimum est pris sur toutes les familles dénombrables d'ensembles S_j de diamètre plus petit ou égale à δ qui recouvrent A.

Pour $0 \leq d < \infty, H_d$ est une mesure régulière de Borel mais pas une mesure de Radon [1] pour $d < N$, car elle n'est pas nécessairement finie sur tout compact de $\mathbb{R}^N$.

La dimension de Hausdorff d'un ensemble A est définie par :

$$H_{\dim} \overset{\text{déf}}{=} \inf\{0 \leq s < \infty, H_s(A) = 0\}. \tag{3.7}$$

Par définition $H_{\dim}(A) \leq N$ et $\forall k > H_{\dim}(A), H_k(A) = 0$.

La définition de la mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff se généralisent des entiers d à des nombres réels $s, 0 \leq s \leq \infty$.

1.
- Une mesure μ sur $\mathbb{R}^N$ est dite mesure de *Borel*, si tout ensemble borélien est μ-mesurable.
- μ est dite *Borel régulière* si μ est *Borel* et pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$ il existe un ensemble borélien B tel que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B)$.
- μ est dite mesure de *Radon* si μ est *Borel régulière* et $\mu(K) < \infty$ pout tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ [30].

Définition 12. *Pour tout réel s, $0 \leq s \leq \infty$, la mesure* s-dimentionnelle *de Hausdorff $H_s(A)$ d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ est définie par le processus suivant : pour δ petit, on recouvre A par un nombre dénombrable d'ensembles S_j de diamètre* $\operatorname{diam}(S_j) \leq \delta$ *et on somme les termes*

$$\alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam}(S_j)}{2}\right)^s,$$

où

$$\alpha(s) \stackrel{déf}{=} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)}, \quad \Gamma(t) \stackrel{déf}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$$

et on prend la limite quant $\delta \to 0$

$$H_s(A) \stackrel{déf}{=} \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{\substack{A \subset \cup S_j, \\ diam(S_j) \leq \delta}} \sum_j \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam}(S_j)}{2}\right)^s. \tag{3.8}$$

De même pour la dimension de Hausdorff.

3.2.5 Formes fondamentales et courbures principales

Soit Ω un ensemble localement de classe C^2 dans $\mathbb{R}^N$, sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $(N-1)$, de classe C^2 (cf. Définitions 1 et 10). En tout point $x \in \Gamma$, il y a un C^2-*difféomorphisme* g_x d'un voisinage $U(x)$ de x dans B. On dénote son inverse par $h_x = g_x^{-1}$

La *base covariante* en un point $y \in U(x) \cap \Gamma$ est définie par

$$a_\alpha(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial h_x}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta', 0), \quad \alpha = 1, \ldots, N-1, \quad h_x(\zeta', 0) = y \tag{3.9}$$

et a_N est la *normale unitaire intérieure* :

$$a_N(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{{}^*(Dh_x(h_x^{-1}(y)))^{-1} e_N}{|{}^*(Dh_x(h_x^{-1}(y)))^{-1} e_N|}. \tag{3.10}$$

La *base contravariante* $\{a^i(y) : 1 \leq i \leq N\}$ en un point $y \in U(x) \cap \Gamma$ qui lui est associée est définie par

$$a^i \cdot a_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N. \tag{3.11}$$

La première, deuxième et troisième *formes fondamentales* notées a, b et c sont définies par

$$a_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} a_\alpha . a_\beta, \quad b_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} -a_\alpha . a_{N,\beta}, \quad c_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} b_\alpha^\lambda . b_{\lambda\beta}$$

avec

$$a_{N,\beta} = \frac{\partial a_N}{\partial \zeta_\beta}, \quad b^\lambda_\alpha = a^\lambda \cdot a^\mu \, b_{\mu,\alpha}. \tag{3.12}$$

Les indices grecs correspondent aux composantes tangentielles.

Ces définitions peuvent être généralisées pour des ensembles de classe $C^{1,1}$ pour lesquels $h_x \in C^{1,1}(B)$ et donc $h_x \in C^{1,1}(B_0)$.

Les valeurs propres de $b_{\alpha,\beta}$ sont les $(N-1)$ *courbures principales* $k_i, 1 \leq i \leq N-1$, de la sous-variété Γ. La *courbure moyenne* H et la *courbure de Gauss* K sont définies par :

$$H \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha=1}^{N-1} k_\alpha \quad et \quad K \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\alpha=1}^{N-1} k_\alpha. \tag{3.13}$$

Il est à noter que, avec ces définitions, le choix de la normale intérieure dans (3.10) est nécessaire pour rendre la courbure de la sphère positive. C'est un point de vue qui contraste avec l'usage en équations aux dérivées partielles de prendre plutôt la normale extérieure.

Comme on l'a vu au chapitre 2, on peut faire le lien entre ces définitions et les Propriétés 1 au chapitre 2 via la fonction distance orientée. On obtient alors la normale extérieure et les formes fondamentales sans passer par le difféomorphisme et les bases locales :

$$\begin{aligned}
\nabla b_\Omega|_\Gamma &= \text{ la normale extérieure } n \text{ unitaire} \\
D^2 b_\Omega|_\Gamma &= \text{ seconde forme fondamentale} \\
(D^2 b_\Omega)^2|_\Gamma &= \text{ troisième forme fondamentale} \\
&\vdots \\
(D^2 b_\Omega)^{N-1}|_\Gamma &= \text{ N-ème forme fondamentale.}
\end{aligned}$$

La première forme fondamentale coïncide avec la *projection orthogonale* sur le plan tangent

$$P(x)|_\Gamma = [I - \nabla b_\Omega(x)\, {}^*\nabla b_\Omega(x)]|_\Gamma = I - n(x)\, {}^*n(x).$$

3.3 Sous-variétés et fonction distance au carré

Lorsque la sous-variété S de dimension $d < N$ n'est pas la frontière Γ d'un ensemble Ω de classe C^k, $k \geq 2$, on ne peut plus faire appel à la la fonction distance orientée b_Ω. On a typiquement $\overline{\complement S} = \mathbb{R}^N$ et $b_S = d_S - d_{\complement S} = d_S$ puisque $d_{\complement S} = 0$ et la mesure de Lebesgue $m_N(S) = 0$.

On aimerait cependant pouvoir caractériser la régularité de S à partir de celle de d_S ainsi que l'espace tangent T_xS et l'espace normal à S en chaque point $x \in S$. Tout n'est cependant pas perdu. En effet en revenant au cas d'un ensemble Ω de classe C^2, on a vu que la projection p_Γ sur la frontière Γ était donnée par

$$p_\Gamma(x) = x - b_\Omega(x)\,\nabla b_\Omega(x)$$

que l'on peut réécrire

$$p_\Gamma(x) = x - \frac{1}{2}\,\nabla b_\Omega^2(x) = x - \frac{1}{2}\,\nabla d_\Gamma^2(x).$$

On voit donc que la projection sur Γ ne demande que la connaissance de d_Γ dont le gradient n'existe malheureusement pas sur Γ. On sait cependant que $d_\Gamma^2 = b_\Omega^2$ est localement C^2 et donc que $\nabla d_\Gamma^2 = 0$ sur Γ.

Comme le rapporte J.-B. Poly et G. Raby [38] en 1984 le lien entre la régularité C^k de la fonction distance d_A^2 et la régularité C^k de la sous-variété $\overline{A}$ est-il connu ? Faute de références, ils en proposent une étude détaillée.

Théorème 3.3.1. *Soit A un ensemble fermé non-vide de $\mathbb{R}^N$ et $k \geq 2$ un entier. Alors*

$$\operatorname{Sing}_k A = A \cap \operatorname{Sing}_k d_A^2,$$

Où $\operatorname{Sing} A$ *est l'ensemble de tous les points singuliers de A.*

Il est toutefois plus intéressant de voir le théorème en termes de régularité qu'en termes de singularités, ce qui nous amène au théorème énoncé dans [21].

Théorème 3.3.2. *Soit $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$ et $k \geq 2$ un entier, et $x \in \bar{A}$.*

(i) *d_A^2 est de classe C^k dans un voisinage d'un point $x \in \bar{A}$ si et seulement si $\bar{A}$ est une sous-variété de classe C^k dans un voisinage de x.*

(ii) *Sous la condition de la partie (i), la dimension de $\bar{A}$ en x est égale au* rang *de la matrice $Dp_A(x)$ (dimension du sous-espace* $\operatorname{Im} Dp_A(x)$*) et $Dp_A(x)$ est la projection orthogonale dans l'espace tangent à $\bar{A}$ en x.*

Remarque 3.

1. *L'équivalence en (i) est fausse dans la direction ($\Rightarrow$) pour $d_A^2 \in C^{1,1}$.*
2. *L'équivalence en (i) est aussi fausse dans la direction ($\Leftarrow$) pour une sous-variété de classe $C^{1,l}$, $0 \leq l \leq 1$.*
3. *Le carré d_A^2 n'est en fait pertinent que pour des sous-variétés de classe C^k et de codimension plus grande ou égale à 1, et non pas pour des ensembles de classe C^k pour lesquels il est préférable d'utiliser la fonction distance orientée.*

Chapitre 4

Différentielles par rapport à la géométrie

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'interesse à quelque éléments des semi-différentielles et différentielles dans les espaces vectoriels topologiques qui seront utiles dans les calculs liés à l'identification de surfaces. Dans ce contexte, on va commencer avec la notion faible de semi-différentielle de *Gateaux*. Après, on introduit une notion plus forte de semi-différentielle au sens de *Hadamard*, qui s'applique aussi à la semi-différentielle tangentielle sur une sous-variété lisse. Dans un espace euclidien de dimension finie, la différentielle de Hadamard coïncide avec la différentielle totale et la différentielle au sens de Fréchet, mais elle est plus faible dans un espace de dimension infinie, où l'existence d'une métrique n'est pas assurée.

4.2 Différentielles dans les espaces vectoriels topologiques

4.2.1 Semi-différentielles et différentielles

Définition 13. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un voisinage d'un point x de l'espace vectoriel topologique E.*

1. *On dit que f a une* semi-différentielle au sens de Gateaux *en $x \in E$ dans la direction*

$v \in E$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon};$$

quand elle existe, elle sera notée par $df(x; v)$.

2. *On dit que f a une* semi-différentielle au sens de Hadamard *en $x \in E$ dans la direction $v \in E$ si la limite suivante existe :*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ w \to v}} \frac{f(x+\varepsilon w) - f(x)}{\varepsilon}$$

quand elle existe, elle sera notée par $d_H f(x; v)$.

Ces définitions peuvent être prolongées d'une fonction à valeurs réelles à une fonction dans un autre espace vectoriel topologique F.

Définition 14. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un voisinage d'un point x d'un espace vectoriel topologique E.*

1. *La fonction f a une* différentielle au sens de Gateaux *en x si*

$$\forall v \in E, df(x; v) \text{ existe et}$$
$$v \to df(x; v) : E \to \mathbb{R} \text{ est linéaire et continue.}$$

Quand elle existe, elle sera notée par $\nabla f(x) : E \to E'$.

2. *La fonction f a une* différentielle au sens de Hadamard *en x si*

$$\forall v \in E, \quad d_H f(x; v) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ w \to v}} \frac{f(x+tw) - f(x)}{t} \text{ existe et}$$
$$v \mapsto d_H f(x; v) : E \to \mathbb{R} \text{ est linéaire et continue.}$$

Cette définition se prolonge aussi d'une fonction à valeurs réelles à une fonction dans un espace vectoriel normé F.

Exemple 4. *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(y-x^2)^2 + x^8}, & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est Gateaux différentiable en $(0,0)$ et $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Mais elle n'est pas Hadamard semidifférentiable en $(0,0)$en direction $(0,0)$, on peut prendre $\omega = (\varepsilon, (\varepsilon)^3)$:

$$\|\frac{((0,0)+\varepsilon\omega) - f(0,0)}{\varepsilon}\| = \|\frac{f((\varepsilon)^2, (\varepsilon)^4)}{\varepsilon}\| = \|\frac{(\varepsilon)^1 2}{(\varepsilon)^1 7} = \frac{1}{|\varepsilon|^5} \to \infty \textit{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Et n'est pas continue en $(0,0)$; si on suit le chemin $(\varepsilon, \varepsilon^2)$ quand ε tend vers 0 :

$$|f(\varepsilon, \varepsilon^2) - f(0,0)| = |\frac{\varepsilon^6}{\varepsilon^8}| = \frac{1}{\varepsilon^2} \to +\infty \textit{ quand } \varepsilon \to 0.$$

4.2.2 Espaces vectoriels normés

Dans un espace vectoriel normé E de dimension infinie, on désignera par *topologie forte* celle induite par la norme et par *topologie faible* celle induite par les forme linéaires continues sur E. Lorsque E est de dimension finie, ces deux topologies coïncident. On se retrouve donc avec deux notions de semi-différentielles au sens de Hadamard,

$$d_H^s f(x;v) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ w \to v \text{ dans } E\text{-fort}}} \frac{f(x+tw) - f(x)}{t},$$

$$d_H^w f(x;v) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ w \rightharpoonup v \text{ dans E-faible}}} \frac{f(x+tw) - f(x)}{t},$$

où $w \to v$ indique la convergence forte, et $w \rightharpoonup v$ la convergence faible.

Par définition, la semi-différentielle faible (weak) de Hadamard est une notion plus forte que la semi-différentielle forte (strong) de Hadamard :

$$d_H^w f(x;v) \text{ existe } \Rightarrow d_H^s f(x;v) \text{ existe }.$$

Les deux notions sont les mêmes quand E est de dimension finie.

On complète maintenant les définitions.

Définition 15. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un voisinage d'un point x d'un espace vectoriel topologique E.*

1. *La fonction f est* Hadamard fortement différentiable *en x si*

$$\forall v \in E, \quad d_H^s f(x;v) \overset{\textit{déf}}{=} \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ w \to v \textit{ dans } E\textit{-fort}}} \frac{f(x+tw) - f(x)}{t} \textit{ existe et}$$
$$v \to d_H^s f(x;v) : E \to \mathbb{R} \textit{ est linéaire et continue.}$$

2. *La fonction f est* Hadamard faiblement différentiable *en x si*

$$\forall v \in E, \quad d_H^w f(x;v) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t\searrow 0 \\ w\rightharpoonup v \text{ dans } E\text{-faible}}} \frac{f(x+tw)-f(x)}{t} \text{ existe et}$$

$$v \to d_H^w f(x;v) : E \to \mathbb{R} \text{ est linéaire et continue}.$$

3. *Pour un espace normé E, la fonction f est* Fréchet différentiable *en x s'il existe une application linéaire continue $L(x) : E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\lim_{|h|_E\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-L(x)h}{|h|_E} \to 0.$$

Si f a une différentielle de Fréchet en x, alors elle a une différentielle de Gateaux en x et l'application $L(x)$ coïncide avec le gradient de f. En effet, pour tout $v \neq 0$ et $t \searrow 0$, $h = tv \to 0$ en norme, et

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} - L(x)v = |v| \frac{f(x+tv)-f(x)-L(x)tv}{|tv|_E} \to 0$$

$$\Rightarrow df(x;v) = L(x)v \quad et \quad v \mapsto df(x;v) : E \to \mathbb{R} \text{ est linéaire et continue .}$$

Par définition $\langle \nabla f(x), v\rangle_E = L(x)v$, où $\langle .,.\rangle_E$ dénote la dualité entre E' et E.

On donne maintenant les liens entre ces notions.

Théorème 4.2.1. *Soit E un espace vectoriel normé et $f : V(x) \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage d'un point $x \in E$.*

– *Si f a une différentielle de Fréchet en x, alors f a une différentielle faible de Hadamard en x et*

$$d_H^w f(x;v) = \langle \nabla f(x), v\rangle_E = L(x)v.$$

Si f a une différentielle faible de Hadamard en x, alors f a une différentielle forte de Hadamard. en x

– *Si f a une différentielle forte de Hadamard, alors f a une différentielle de Gateaux en x.*

– *Quand E est de dimension finie, les différentielles forte et faible de Hadamard, et la différentielle de Fréchet sont équivalentes et égales.*

4.2.3 Fonctions localement lipschitziennes

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'équivalence entre la semi-différentielle de Gateaux et la semi-différentielle de Hadamard (resp., les différentielles de Gateaux et de Hadamard).

Théorème 4.2.2. *Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitizienne en $x \in E$, c'est-à-dire,*

$$\begin{gathered}\exists c(x) > 0 \textit{ et } \exists \textit{ voisinage } V(x) \textit{ de } x \textit{ tel que} \\ \forall y, z \in V(x), \quad |f(y) - f(z)| \le c(x)\,|y - z|_E.\end{gathered}$$

1. *Si $df(x;v)$ existe, alors $d_H^s f(x;v)$ existe et $d_H^s f(x;v) = df(x;v)$. De plus, si $df(x;v)$ existe pour tout $v \in E$, alors*

$$\forall v_2, v_1 \in E, \quad |d_H^s f(x;v_2) - d_H^s f(x;v_1)| \le c(x)\,|v_2 - v_1|_E.$$

2. *Si f a une différentielle de Gateaux en x, alors*

$$\begin{gathered}\forall v, d_H^s f(x;v) \textit{ existe et} \\ v \to d_H^s f(x;v) : E \to \mathbb{R} \textit{ est linéaire et continue}\end{gathered}$$

   et f a une différentielle forte de Hadamard en x.

Démonstration. 1. Il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ et un voisinage W de v dans E tel que

$$\forall w \in W, \forall \varepsilon,\ 0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}, \quad x + \varepsilon w \in V(x) \text{ et } x + \varepsilon v \in V(x).$$

Alors

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(x+\varepsilon w) - f(x)] = \frac{1}{\varepsilon}[f(x+\varepsilon w) - f(x+\varepsilon v)] + \frac{1}{\varepsilon}[f(x+\varepsilon v) - f(x)]$$

et

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\,[f(x+\varepsilon w) - f(x)] - df(x;v)\right| \le \left|\frac{1}{\varepsilon}\,[f(x+\varepsilon v) - f(x)] - df(x;v)\right| + c(x)|w - v|_E.$$

Donc, quand $\varepsilon \to 0$ et $w \to v$, $d_H^s f(x;v) = df(x;v)$.

2. Par définition, et par la partie 1. □

4.3 Différentielles des intégrales par rapport à la géométrie

Dans cette section on aborde la notion de différentielle d'une intégrale de domaine (ou intégrale de volume) et de celle d'intégrale de bord par rapport à la géométrie. Ces notions sont proches de la notion de différentielle sur une sous-variété car la famille

$$\mathcal{P}(D) \overset{\text{déf}}{=} \{A : A \subset D\}$$

de tous les sous-ensembles d'un *fourre-tout* D dans $\mathbb{R}^N$ n'est pas un espace linéaire, c'est-à-dire, que l'on ne peut pas trouver d'opérations algébriques (addition et multiplicarion par un scalaire) qui donnent à $\mathcal{P}(D)$ une structure d'espace vectoriel. Cependant, $\mathcal{P}(D)$ est un groupe abélien pour la *différence symmétrique* $\triangle$ de deux ensembles de $\mathcal{P}(D)$:

$$A \triangle B \stackrel{\text{déf}}{=} \left[A \cap \complement B\right] \cup \left[B \cap \complement A\right] = [A \cup B] \cap \left[\complement A \cup \complement B\right] = [A \cup B] \cap \complement\, [A \cap B] \,.$$

Cette opération est commutative et associative :

$$A \triangle B = B \triangle A, \quad (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

$\varnothing$ est l'*élément neutre* :

$$A \triangle \varnothing = A.$$

Comme $A \triangle A = \varnothing$, tout élément A de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ est son propre inverse, $A^{-1} = A$, et $(\mathcal{P}(\mathcal{D}), \triangle)$ est un groupe abélien.

Dans cette section, on donne des formules générales pour les intégrales de domaine et de bord.

4.3.1 Méthode des vitesses

Pour définir une différentielle par rapport à un ensemble géométrique Ω, il faut perturber Ω par rapport à un paramètre de façon à former l'équivalent d'un quotient différentiel. On choisit de perturber Ω à l'aide de transformations $\{T_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ de $\mathbb{R}^N$ générées par une famille de *champs de vitesse* réguliers $\{V(t) \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) : 0 \leq t \leq \tau\}$, $k \geq 1$, qui dépend en général d'un petit paramètre $t \geq 0$ qui peut être interprété comme un *temps virtuel*. Quant à $\tau > 0$ il peut être aussi petit que l'on veut puisque t va tendre vers 0. Les points $X \in \mathbb{R}^N$ se déplacent donc sous l'effet du champs de vitesse générant ainsi une famille de transformations $\{\Omega_t = T_t(V)(\Omega) : 0 \leq t \leq \tau\}$ de $\mathbb{R}^N$. Si F est une fonction définie sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, on considérera le quotient différentiel pour $t > 0$

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{F(\Omega_t) - F(\Omega)}{t} \ \exists\, ?$$

On fait les hypothèses suivantes : il existe $\tau > 0$ et une application $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{gathered} \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad V(\cdot, x) \in C([0,\tau]; \mathbb{R}^N), \\ \exists c > 0,\, \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad \|V(\cdot, y) - V(\cdot, x)\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^N)} \leq c\,|y - x|. \end{gathered} \tag{4.1}$$

On utilisera aussi la notation

$$x \mapsto V(t)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} V(t,x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N. \tag{4.2}$$

Soit $x(t) = x(t; X, V)$ la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}x(t) = V(t, x(t)),\ 0 < t < \tau, \quad x(0) = X, \tag{4.3}$$

et l'application

$$\begin{gathered} X \mapsto T_t(V)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} x(t; X, V) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad 0 \le t \le \tau \\ T(t,X) \stackrel{\text{déf}}{=} T_t(V)(X). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Théorème 4.3.1.

(i) *Sous les hypothèses* (4.1) *l'application T specifiée par* (4.4) *possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \textit{(T1)} & \begin{array}{c} \forall X \in \mathbb{R}^N, \quad T(\cdot, X) \in C^1\big([0,\tau]; \mathbb{R}^N\big) \textit{ et } \exists c > 0, \\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^N, \quad \|T(\cdot,Y) - T(\cdot,X)\|_{C^1([0,\tau];\mathbb{R}^N)} \le c|Y - X|, \end{array} \\ \textit{(T2)} & \forall t \in [0,\tau],\ X \mapsto T_t(X) = T(t,X) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \textit{ est bijective}, \\ \textit{(T3)} & \begin{array}{c} \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad T^{-1}(\cdot, x) \in C\big([0,\tau]; \mathbb{R}^N\big) \textit{ et } \exists c > 0, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad \|T^{-1}(\cdot,y) - T^{-1}(\cdot,x)\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^N)} \le c\,|y - x|. \end{array} \end{array} \tag{4.5}$$

(ii) *Étant donné un réel $\tau > 0$ et une application $T : [0,\tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfaisant les hypothèses* (*T1*) *à* (*T3*), *l'application*

$$(t,x) \mapsto V(t,x) \stackrel{\textit{déf}}{=} \frac{\partial T}{\partial t}\big(t, T_t^{-1}(x)\big) : [0,\tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \tag{4.6}$$

satisfait les conditions (4.1)*, où T_t^{-1} est l'inverse de $X \mapsto T_t(X) = T(t,X)$. Si, en plus, $T(0,\cdot) = I$, alors $T(\cdot, X)$ est la solution de* (4.4) *pour ce V.*

(iii) *Étant donné un réel $\tau > 0$ et une application $T : [0,\tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfaisant les hypothèses* (*T1*) *et* (*T2*) *et $T(0,\cdot) = I$, alors il existe $\tau' > 0$ tel que les conclusions de la partie* (*ii*) *soient vérifiées dans* $[0,\tau']$.

On peut établir d'autres équivalences lorsque l'on impose plus de régularité. Par exemple, on peut choisir des vitesses dans $C([0,\tau]; C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N))$. On introduit les notations suivantes.

$$f(t) \stackrel{\text{déf}}{=} T_t - I, \quad f'(t) = \frac{dT_t}{dt}, \quad g(t) \stackrel{\text{déf}}{=} T_t^{-1} - I,$$

lorsque T_t^{-1} existe et les identités

$$g(t) = -f(t) \circ T_t^{-1} = -f(t) \circ [I + g(t)],$$
$$V(t) = \frac{dT_t}{dt} \circ T_t^{-1} = f'(t) \circ T_t^{-1} = f'(t) \circ [I + g(t)].$$

Théorème 4.3.2. *Soit $k \geq 1$ un entier.*

(i) *Étant donné $\tau > 0$ et un champs de vitesses V tel que*

$$V \in C([0,\tau]; C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)), \tag{4.7}$$

l'application T donnée par (4.4) *satisfait les conditions* (*T1*)*,* (*T2*)*, et*

$$f \in C^1([0,\tau]; C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)). \tag{4.8}$$

De plus, les conditions (*T3*) *sont satisfaites et il existe $\tau' > 0$ tel que*

$$g \in C([0,\tau']; C^k(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)). \tag{4.9}$$

(ii) *Étant donné $\tau > 0$ et $T : [0,\tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfaisant les conditions* (4.8) *and $T(0,\cdot) = I$, il existe $\tau' > 0$ tel que le champs de vitesse $V(t) = f'(t) \circ T_t^{-1}$ satisfasse les conditions du champ de vitesse V et* (4.7) *dans* $[0,\tau']$.

4.3.2 Intégrale de domaine

Les exemples les plus simples de fonctions de domaine sont les intégrales de volume par rapport à des domaines ouverts bornés Ω dans $\mathbb{R}^N$. Elles font appel à une formule basée sur la famille de transformations $\{T_t \,:\, 0 \leq t \leq \tau\}$.

On suppose que les conditions (4.1) sont vérifiées par le champs de vitesse $\{V(t) : 0 \leq t \leq \tau\}$. En plus, on suppose que $V \in C^0([0,\tau]; C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ et que $\tau > 0$ est tel que le *jacobien* J_t soit strictement positif :

$$\forall t \in [0,\tau], \quad J_t(X) \overset{\text{déf}}{=} \text{dét}\, DT_t(X) > 0, \quad (DT_t)_{ij} = \partial_j T_i,$$

où $DT_t(X)$ est la *matrice jacobienne* de la transformation $T_t = T_t(V)$ associée au champs de vecteur V.

Soit une fonction φ in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et t, $0 \leq t \leq \tau$. On considère l'intégrale de volume

$$J_1(\Omega_t(V))(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\Omega_t(V)} \varphi \, dx, \tag{4.10}$$

où $\Omega_t(V) \overset{\text{déf}}{=} T_t(V)(\Omega)$. Par la formule de changement de variables

$$J_1(\Omega_t(V))(\varphi) = \int_{\Omega_t(V)} \varphi\, dx = \int_{\Omega} \varphi \circ T_t \; J_t \; dx. \tag{4.11}$$

Maintenant, il est facile de vérifier les formules et résultats suivants.

Théorème 4.3.3. *Soit φ une fonction dans $W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Supposons que le champ de vitesse $\{V(t) : 0 \leq t \leq \tau\}$ satisfait la condition (4.1).*

1. *Pour tout $t \in [0, \tau]$ l'application*

$$\varphi \to \varphi \circ T_t : W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \to W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$$

et son inverse sont localement lipschitiziennes et

$$\nabla(\varphi \circ T_t) =^* DT_t\, \nabla\varphi \circ T_t.$$

2. *Si $V \in C^0([0, \tau]; C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$, alors l'application*

$$t \mapsto \varphi \circ T_t : [0, \tau] \to W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$$

est bien définie et pour tout t

$$\frac{d}{dt}\varphi \circ T_t = (\nabla\varphi . V(t)) \circ T_t \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

De là, la fonction $t \to \varphi \circ T_t$ appartient à $C^1([0, \tau]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)) \cap C^0([0, \tau]; W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$.

3. *Si $V \in C^0([0, \tau]; C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$, alors l'application*

$$t \mapsto J_t : [0, \tau] \to C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$$

est différentiable et

$$\frac{dJ_t}{dt} = [\operatorname{div} V(t)] \circ T_t\, J_t \in C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N). \tag{4.12}$$

De là, l'application $t \mapsto J_t$ appartient à $C^1([0, \tau]; C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$. En effet,

$$\frac{d}{dt}DT_t(X) = DV(t, T_t(X))\, DT_t(X), \quad DT_0(X) = I,$$
$$\frac{d}{dt}\,\text{dét}\, DT_t(X) = \operatorname{tr} DV(t, T - t(X))\ \text{dét}\, DT_t(X)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\,\text{dét}\, DT_t(X) = \operatorname{div} V(t, T_t(X))\ \text{dét}\, DT_t(X), \quad \text{dét}\, DT_0(X) = 1,$$

et (4.12) *s'obtient directement de la définition de* $J_t(X)$. *D'après ce qui précédent*

$$dJ_1(\Omega;V) = \frac{d}{dt}J_1(\Omega_t(V))|_{t=0} = \int_\Omega \nabla\varphi\cdot V(0) + \varphi\,\mathrm{div}\,V(0)\,dx$$
$$\Rightarrow dJ_1(\Omega;V) = \int_\Omega \mathrm{div}\,(\varphi V(0))\,dx.$$

Si Ω *a une frontière lipschitizienne, alors d'après le théorème de Stokes*

$$dJ_1(\Omega;V) = \int_\Gamma \varphi V(0)\cdot n\,d\Gamma.$$

Théorème 4.3.4. *Supposons qu'il existe* $\tau > 0$ *tel que le champ de vitesse* $V(t)$ *satisfait la condition (4.1) et* $V \in C^0([0,\tau];C^1_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N))$. *Soit la fonction*

$$\varphi \in C([0,\tau];W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,\tau];L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$$

et un domaine borné mesurable Ω *de frontière* Γ*, la semi-différentielle de la fonction*

$$J_1(\Omega_t(V))(\varphi) = \int_{\Omega_t(V)} \varphi(t)\,dx$$

en $t = 0$ *est donnée par*

$$dJ_1(\Omega_t(V))(\varphi)|_{t=0} = \int_\Omega \varphi'(0) + \mathrm{div}\,(\varphi(0)V(0))\,dx, \tag{4.13}$$

où $\varphi(0)(x) \overset{déf}{=} \varphi(0,x)$ *et* $\varphi'(0)(x) \overset{déf}{=} \partial\varphi/dt(0,x)$. *Si, de plus,* Ω *est domaine ouvert à frontière lipschitizienne* Γ*, alors*

$$dJ_1(\Omega_t(V))(\varphi)|_{t=0} = \int_\Omega \varphi'(0)\,dx + \int_\Gamma \varphi(0)V(0)\cdot n\,dx.$$

4.3.3 Intégrale frontière ou de bord

Étanr donné $\psi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on prend ocomme fonction l'intégrale de bord associée à un domaine ouvert borné Ω dans $\mathbb{R}^N$

$$J_2(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \int_\Gamma \psi\,d\Gamma.$$

Cette intégrale est invariante par rapport aux homéomorphismes de Ω dans Ω (et même pour Γ). Soit le champ de vitesse V et $t \geq 0$, et considérons l'expression

$$J_2(\Omega_t(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Gamma_t(V)} \psi \, d\Gamma_t.$$

En utilisant le changement de variable $T_t(V)$, cette intégrale peut être changée de Γ_t à Γ :

$$J_2(\Omega_t(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Gamma_t} \psi \, d\Gamma_t = \int_{\Gamma} \psi \circ T_t \, \omega_t \, d\Gamma,$$

où la densité ω_t est donnée par

$$\omega_t = |M(DT_t) \, n|,$$

n est la normale extérieure à Γ et $M(DT_t)$ est la matrice des cofacteurs de DT_t telle que

$$M(DT_t) = J_t[^*(DT_t)^{-1}] \quad \Rightarrow \omega_t = J_t|^*(DT_t)^{-1} \, n|.$$

Il est facile de vérifier que $t \mapsto \omega_t$ est différentiable dans $C^0(\Gamma)$ et que la limite

$$\omega' = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t}(\omega_t - \omega) = \operatorname{div} V(0) - DV(0)n \cdot n$$

dans la norme ă $C^0(\Gamma)$ est linéaire et continue par rapport à $V(0)$ dans la topologie $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ de Fréchet. D'où

$$dJ_2(\Omega; V) = \int_{\Gamma} \nabla\psi \cdot V(0) + \psi \, (\operatorname{div} V(0) - DV(0)n \cdot n) \, d\Gamma.$$

Mais $dJ_2(\Omega; V)$ ne dépend que de la composante normale v_n du champ de vitesse $V(0)$ sur Γ

$$v_n \stackrel{\text{déf}}{=} v \cdot n, \quad v \stackrel{\text{déf}}{=} V(0)|_{\Gamma}$$

Théorème 4.3.5. *Soit Γ la frontière d'un sous-ensemble ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 et ξ un élément de $C^1([0,\tau]; H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$. Supposons que $V \in C^0([0,\tau]; C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$. On considère la fonction*

$$J_V(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Gamma_t(V)} \xi(t) \, d\Gamma_t.$$

Alors la différentielle de $J_V(t)$ par rapport à t en $t=0$ est donnée par l'expression

$$dJ_V(0) = \int_\Gamma \xi'(0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} + H\xi\right) V(0)\cdot n\, d\Gamma \tag{4.14}$$

$$= \int_\Gamma \xi'(0) + \nabla\xi \cdot V(0) + \xi(\operatorname{div} V(0) - DV(0)\, n\cdot n)\, d\Gamma, \tag{4.15}$$

où $\xi'(0)(x) \overset{\text{déf}}{=} \partial\xi/\partial t(0,x)$ et $H = \Delta b_\Omega$ est la courbure moyenne de Γ.

Comme dans le cas de l'intégrale de volume, on a deux formules. De là, on a l'identité suivante :

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} + H\,\xi\right) V(0)\cdot n\, d\Gamma = \int_\Gamma \nabla\xi\cdot V(0) + \xi\,(\operatorname{div} V(0) - DV(0)n\cdot n)\, d\Gamma.$$

Exemple 5 (Volume de Ω et surface de Γ)**.** *Soit la fonctionnelle de volume*

$$J_1(\Omega) = \int_\Omega dx.$$

On obtient

$$dJ_1(\Omega; V) = \int_\Omega \operatorname{div} V(0)\, dx$$

et si Γ est lipschitizienne, alors

$$dJ_1(\Omega; V) = \int_\Gamma V(0)\cdot n\, d\Gamma.$$

Une condition suffisante sur le champ de vitesse pour préserver le volume est $\operatorname{div} V(0) = 0$ *dans Ω et, si Γ est lipschitizienne, $V(0)\cdot n = 0$ sur Γ.*

Soit la fonctionnelle de surface

$$J_2(\Omega) = \int_\Gamma d\Gamma.$$

Supposons que Γ est de classe C^2. Alors on a

$$dJ_2(\Omega; V) = \int_\Gamma H\, V(0)\cdot n\, d\Gamma,$$

où $H = \Delta b_\Omega$ est la courbure moyenne. La condition pour garder la mesure de Γ invariante est que $V(0)\cdot n$ soit orthogonale (dans $L^2(\Gamma)$) à H.

4.4 Calcul tangentiel et dérivées co et contravariantes

Dans cette section, on introduit une approche intrinsèque au calcul différentiel sur les sous-variétés de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$ de codimension 1 en utilisant la fonction distance orientée. Ceci permet un traitement plus simple des différentielle d'intégrales frontière. Ce calcul différentiel intrinsèque, simple et ne faisant pas appel aux bases locales et aux symboles de Christoffel a été développé dans le contexte de la théorie des coques.

4.4.1 Différentielles tangentielles

On a vu que lorsque Ω est de classe $C^{1,1}$ et que Γ est compact, il existe $h > 0$ tel que $b_\Omega \in C^{1,1}(S_h(\Gamma))$, où

$$S_h(\Gamma) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h,\, p_\Gamma(x) \in \Gamma\}$$

est le voisinage tubulaire de Γ d'épaisseur $2h > 0$. Dans ce cas, l'application

$$(z, X) \mapsto T(z, X) \overset{\text{déf}}{=} T_z(X) = X + z\nabla b_\Omega(X) :]-h, h[\, \times \Gamma \to S_h(\Omega)$$

qui est une cas particulière d'une perturbation du théorème 4.3.1 où T est perturbation de l'unité $I + z\nabla b_\Omega$, et b_Ω est lipschitizienne dans $S_h(\Gamma)$. $T_z(X)$ est donc bien définie et bi-lipschitizienne. Son inverse est $T^{-1}(x) = (p_\Gamma(x), b_\Omega(x))$.

Ceci définit un repère curviligne dans le voisinage tubulaire $S_h(\Gamma)$ où les notions de normale et de formes fondamentales sur la sous-variété Γ possèdent, par construction, des prolongement à tout $S_h(\Gamma)$. L'application T permet alors de passer du calcul différentiel dans le voisinage euclidien $S_h(\Gamma)$ au calcul différentiel tangentiel dans le repère curviligne. Le gradient euclidien d'une fonction dans $\mathbb{R}^N$ se transporte en gradient tangentiel et dérivée dans la direction normale et réciproquement. Ceci permet, entre autres, de faire du calcul différentiel (tangentiel) sur Γ à partir du calcul différentiel dans le voisinage euclidien $S_h(\Gamma)$.

Par exemple, le *gradient tangentiel* $\nabla_\Gamma f(x)$ d'une fonction régulière $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ en un point $x \in \Gamma$ est donné par la formule

$$\nabla_\Gamma f = \nabla(f \circ p_\Gamma)|_\Gamma,$$

où la composition $f \circ p_\Gamma$ est un prolongement de f à $S_h(\Gamma)$. De même façon, pour une fonction à valeurs vectorielles $F : \Gamma \to \mathbb{R}^k$, on obtient la *matrice jacobienne tangentielle*

$$D_\Gamma f = D(f \circ p_\Gamma)|_\Gamma.$$

A titre d'exemple, pour la fonction b_Ω, on a $b_\Omega \circ p_\Gamma = 0$ et donc

$$\nabla_\Gamma b_\Omega = 0,$$

ce qui confirme que ∇b_Ω est bien orthogonal au plan tangent en x. On peut aussi montrer que, pour des Ω de classe $C^{1,1}$, $\nabla b_\Omega \circ p_\Gamma$ dans $S_h(\Gamma)$. Donc

$$D_\Gamma \nabla b_\Omega = D(\nabla b_\Omega \circ p_\Gamma)|_\Gamma = D(\nabla b_\Omega)|_\Gamma = D^2 b_\Omega|_\Gamma,$$

la restriction à Γ de la matrice hessienne de b_Ω à Γ. C'est l'explication de la relation de $D^2 b_\Omega$ avec les formes fondamentales. Comme

$$|\nabla b_\Omega(x)|^2 = 1, \quad 0 = D(|\nabla b_\Omega(x)|^2) = 2\, D^2 b_\Omega(x)\, \nabla b_\Omega(x).$$

En se restreignant à la frontière Γ, on voit que 0 est une valeur propre de $D^2 b_\Omega$ pour la normale $n(x) = \nabla b_\Omega(x)$. Les autres valeurs propres sont les $N-1$ courbures principales de Γ.

Le fait de pouvoir revenir au calcul différentiel dans $\mathbb{R}^N$ simplifie considérablement le calcul différentiel sur des sous-variétés. Comme dernière illustration, on donne quelques formules utiles pour une fonction f et des fonctions vectiorielles v et w sur Γ. En utilisant les prolongements et en prenant les restrictions à Γ

$$D_\Gamma(fv) = v^* \nabla_\Gamma f + f D_\Gamma v, \tag{4.16}$$

$$\operatorname{div}_\Gamma(fv) = \nabla_\Gamma f \cdot v + f \operatorname{div}_\Gamma v, \tag{4.17}$$

$$\nabla_\Gamma(v \cdot w) = {}^*D_\Gamma(v) w + {}^*D_\Gamma(w) v. \tag{4.18}$$

En particulier, on utilisera souvent la formule (4.18) avec $w = n$

$$\nabla_\Gamma(v \cdot n) = {}^*D_\Gamma(v) n + {}^*D^2 b_\Omega\, v, \tag{4.19}$$

ou en introduisant la notation

$$\boxed{v_n \overset{\text{déf}}{=} v \cdot n, \quad v_\Gamma \overset{\text{déf}}{=} v - v_n\, n = Pv}$$

$$\boxed{\nabla_\Gamma(v_n) = {}^*D_\Gamma(v)\, n + {}^*D^2 b_\Omega\, v_\Gamma} \tag{4.20}$$

puisque $D^2 b_\Omega \nabla b_\Omega = 0$.

Les sections qui suivent proviennent de [27].

4.4.2 Dérivées covariantes

Les objets de la géométrie différentielle sont en règle générale intrinsèques bien qu'ils soient introduits à travers un système de base locale. Il n'est donc pas trop surprenant que les opérateurs différentiels tangentiels définis plus haut coïncident avec ceux introduits via les bases covariantes ou contravariantes locales. On rappelle que $\{e_1, \ldots, e_N\}$ dénote la base orthonormale canonique dans $\mathbb{R}^N$.

Bases locales

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{1,1}$. Sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est donc une sous-variété $C^{1,1}$ de dimension $N-1$. En chaque point $x \in \Gamma$, il existe un difféomorphisme f_x de classe C^2 d'un voisinage $U(x)$ de x sur B. Avec la notation $h_x = f_x^{-1}$ par définition de B_0, $\{e_1, \ldots, e_{N-1}\} \subset B_0$ et l'espace tangent $T_y\Gamma$, $\Gamma = \partial\Omega$, en y to Γ_x est un espace vectoriel généré par les $N-1$ vecteurs

$$\left\{Dh_x(\zeta)e_i \colon 1 \le i \le N-1\right\}, \quad \zeta = f_x(y) \in B_0, \tag{4.21}$$

où $Dh_x(\zeta)$ est la matrice jacobienne de h_x au point ζ

$$(Dh_x)_{\ell m} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_m (h_x)_\ell.$$

La **normale unitaire intérieure** est donné par

$$a_N(\zeta') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{{}^*Dh_x(\zeta',0)^{-1}e_N}{|{}^*Dh_x(\zeta',0)^{-1}e_N|}. \tag{4.22}$$

On introduit l'application

$$\zeta' \mapsto \Phi(\zeta') \stackrel{\text{déf}}{=} h_x(\zeta',0) \colon B_0 \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \Gamma \cap U(x) \subset \mathbb{R}^N.$$

La **base covariante** au point $y = \Phi(\zeta') \in U(x) \cap \Gamma$ est définie comme

$$a_\alpha(\zeta') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial h_x}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta',0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta'), \quad \alpha = 1, \ldots, N-1, \quad h_x(\zeta',0) = y,$$

et a_N est choisie comme la **normale unitaire intérieure** (4.22). On adopte la convention que les indices grecs vont de 1 à $N-1$ et les indices romains de 1 à N. On adopte aussi la *règle d'Einstein* de sommation par rapport aux indices répétés.

Comme en général les éléments de la base covariante ne sont pas orthogonaux entre eux il est naturel d'introduire la **base contravariante** $\{a^i\} = \left\{a^i(\zeta')\right\}$ définie à partir de la base covariante $\{a_i\} = \big\{a_i(\zeta')\big\}$ par $a^i \cdot a_j = \delta_{ij}$. Dans ces bases, un vecteur $v \colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$ possède une représentation covariante et une contravariante

$$v = v^i a_i = v_i a^i, \quad v^i \stackrel{\text{déf}}{=} v \cdot a^i, \quad v_i \stackrel{\text{déf}}{=} v \cdot a_i. \tag{4.23}$$

Si le vecteur v est tangent, alors $v = v^\alpha a^\alpha = v_\alpha a^\alpha$. Le produit scalaire de deux vecteurs v et w devient

$$v \cdot w = v^i w_i = v_i w^i. \tag{4.24}$$

Dérivées partielles

On considère une fonction $w \colon B_0 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. La **dérivée partielle** de w sera notée

$$w_{,\alpha} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial w}{\partial \xi^\alpha}, \quad w_{,N} \stackrel{\text{déf}}{=} 0. \tag{4.25}$$

La dérivée partielle d'une fonction à valeurs vectorielles $v \colon B_0 \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 est notée de la même façon

$$v_{,\alpha} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial v}{\partial \xi^\alpha}, \quad v_{,N} \stackrel{\text{déf}}{=} 0. \tag{4.26}$$

Soit $F = f \circ p$ le prolongementd'une fonction, $f \colon \Gamma \to \mathbb{R}$, C^1 dans un voisinage de Γ. Par définition, la *dérivée partielle* de f est donnée par

$$\boxed{f_{,\alpha} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(f \circ \Phi), \quad f_{,N} \stackrel{\text{déf}}{=} 0,} \tag{4.27}$$

puisque $f \circ \Phi$ est indépendante du déplacement normal à la sous-variété Γ. On observe que

$$f \circ \Phi = (f \circ p) \circ \Phi = F \circ \Phi,$$

et donc que

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(f \circ \Phi) = (\nabla F \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\alpha} = \big[(\nabla F \circ p) \circ \Phi\big] \cdot a_\alpha.$$

Mais

$$\nabla F \circ p = \nabla(f \circ p) \circ p = \nabla_\Gamma f \circ p,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(f \circ \Phi) = [\nabla_\Gamma f \circ p \circ \Phi] \cdot a_\alpha = (\nabla_\Gamma f \circ \Phi) \cdot a_\alpha.$$

Par la suite, il sera pratique d'utiliser la notation a_i pour à la fois a_i et $a_i \circ \Phi^{-1}$ lorsque le contexte le permet. D'où

$$\boxed{f_{,\alpha} \circ \Phi^{-1} = \nabla_\Gamma f \cdot a_\alpha} \tag{4.28}$$

De plus

$$\boxed{f_{,N} \circ \Phi^{-1} = 0 = \nabla_\Gamma f \cdot a_N} \tag{4.29}$$

puisque $\nabla_\Gamma f \cdot n = 0$. Donc

$$\nabla_\Gamma f = (f_{,\alpha} a^\alpha) \circ \Phi^{-1}, \tag{4.30}$$

peut s'interpréter comme un prolongement de la dérivée partielle du plan tangent à l'espace ambient $\mathbb{R}^N$.

Tout ceci s'applique intégralement aux fonctions à valeurs vectorielles $v\colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 en faisant appel au prolongement $V = v \circ p$ au voisinage $U_h(\Gamma)$ of Γ

$$\boxed{v_{,\alpha} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(v \circ \Phi), \quad v_{,N} \overset{\text{déf}}{=} 0.} \tag{4.31}$$

Par la même technique

$$\boxed{v_{,i} \circ \Phi^{-1} = D_\Gamma(v) a_i \quad \text{and} \quad D_\Gamma(v) = (v_{,\alpha} a^\alpha) \circ \Phi^{-1}.} \tag{4.32}$$

Formes fondamentales

Pour illustrer les identités précédentes, on considère la *seconde forme fondamentale*

$$b_{\alpha\beta} \overset{\text{déf}}{=} -a_\beta \cdot a_{N,\alpha}. \tag{4.33}$$

Il ne faut pas confondre b avec la fonction distance orientée $b = b_\Omega$. Par définition

$$a_{N,\alpha} = D_\Gamma(a_N \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi a_\alpha = -\big(D_\Gamma(\nabla b_\Omega)\big) \circ \Phi a_\alpha.$$

Mais $\nabla b_\Omega = \nabla b_\Omega \circ p = n \circ p$

$$D_\Gamma(n) = D_\Gamma(\nabla b_\Omega) = D(\nabla b_\Omega \circ p)\big|_\Gamma = D(\nabla b_\Omega)\big|_\Gamma = D^2 b_\Omega\,\big|_\Gamma,$$

et $a_{N,\alpha} \circ \Phi^{-1} = -D^2 b_\Omega\, a_\alpha$. Finallement

$$b_{\alpha\beta} \circ \Phi^{-1} = a_\beta \cdot D^2 b_\Omega\, a_\alpha. \tag{4.34}$$

Pour simplifier, on écrira $D^2 b_\Omega$ pour $D^2 b_\Omega \circ \Phi$ lorsque le contexte le permet. On notera que la définition de $b_{\alpha\beta}$ se prolonge de $T_x\Gamma$ à $\mathbb{R}^N$ comme suit

$$\boxed{b_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} D^2 b_\Omega\, a_i \cdot a_j} \tag{4.35}$$

et, puisque $D^2 b_\Omega \nabla b_\Omega = 0$, $b_{Ni} = b_{iN} = 0$. La seconde forme fondamentale coïncide donc avec la forme bilinéaire associée à la matrice $D^2 b_\Omega$.

De la même façon, on considère la *troisième forme fundamentale*

$$c_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}, \tag{4.36}$$

où

$$b_i^j \stackrel{\text{déf}}{=} a^j \cdot D^2 b_\Omega\, a_i. \tag{4.37}$$

De (4.34)

$$\begin{aligned} a^\lambda \cdot a^\beta b_{\beta\alpha} &= a^\lambda \cdot a^\beta a_\beta \cdot D^2 b_\Omega\, a_\alpha \\ &= a^\lambda \cdot [D^2 b_\Omega\, a_\alpha - D^2 b_\Omega\, a_\alpha \cdot a_N a^N]. \end{aligned}$$

Mais $D^2 b_\Omega\, a_N \circ \Phi^{-1} = -D^2 b_\Omega \nabla b_\Omega = 0$ et nécessairment

$$b_\alpha^\lambda = a^\lambda \cdot D^2 b_\Omega\, a_\alpha, \tag{4.38}$$

qui peut aussi se prolonger aux indices égaux à N. Donc

$$c_{\alpha\beta} = a^\lambda \cdot D^2 b_\Omega\, a_\alpha a_\lambda \cdot D^2 b_\Omega\, a_\beta = D^2 b_\Omega\, a_\alpha \cdot D^2 b_\Omega\, a_\beta,$$

et

$$c_{\alpha\beta} = a_\beta \cdot (D^2 b_\Omega)^2 a_\alpha. \tag{4.39}$$

En prolongeant $c_{\alpha\beta}$ à $\mathbb{R}^N$

$$\boxed{c_{ij} = a_i \cdot (D^2 b_\Omega)^2 a_j \quad \text{et} \quad c_{Ni} = c_{iN} = 0} \tag{4.40}$$

Ainsi $D^2 b_\Omega$ et $(D^2 b_\Omega)^2$ qui vont de $T_x\Gamma$ à $T_x\Gamma$ sont des prolongements de la seconde et troisième forme fondamentales à $\mathbb{R}^N$. On observe aussi que l'opérateur P de *projection orthogonale* est le prolongement à o $\mathbb{R}^N$ de la *première forme fondamentale*

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta.$$

En effet, pour $v, w \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
Pv \cdot w &= [I - \nabla b_\Omega \ {}^*\nabla b_\Omega]\, v \cdot w \\
&= \left(\sum_\alpha v_\alpha\, a_\alpha \right) \cdot w \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^{N-1} v_\alpha\, a_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} w_j\, a_j \right) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N} v_\alpha\, w_j\, a_\alpha \cdot a_j \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\beta=1}^{N-1} v_\alpha\, w_\beta\, a_\alpha \cdot a_\beta = a_{\alpha\beta}\, v_\alpha\, w_\beta.
\end{aligned}$$

Symboles de Christoffel

Par définition

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \overset{\text{déf}}{=} a^\alpha \cdot a_{\beta,\gamma}} \tag{4.41}$$

et, en se rappelant que pour toute fonction à valeurs vectorielles v définie sur Γ, on a $v_{,N} = 0$, ceci se prolonge à $\mathbb{R}^N$

$$\Gamma^i_{jk} \overset{\text{déf}}{=} a^i \cdot a_{j,k}. \tag{4.42}$$

D'où de (4.32)

$$\Gamma^i_{jk} = a^i \cdot D_\Gamma(a_j \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi a_k \quad \text{et} \quad \Gamma^i_{jN} = 0. \tag{4.43}$$

Pour simplifier, on notera $D_\Gamma(a_j \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi$ par $D_\Gamma a_j$. De plus

$$a^i \cdot a_j = \delta_{ij} \implies \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}(a^i \cdot a_j) = 0,$$

et, pour tout γ, $D_\Gamma(a^i)a_\gamma \cdot a_j + D_\Gamma(a_j)a_\gamma \cdot a^i = 0$, ce qui donne

$$\boxed{\begin{aligned}
\Gamma^i_{j\gamma} &= a^i \cdot D_\Gamma(a_j)a_\gamma \\
&= -D_\Gamma(a^i)a_\gamma \cdot a_j = -{}^*D_\Gamma(a^i)a_j \cdot a_\gamma
\end{aligned}} \tag{4.44}$$

Pour une application C^2

$$a_{\gamma,\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \Phi = \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \Phi = a_{\beta,\gamma}, \tag{4.45}$$

et $\Gamma^i_{\beta\gamma} = \Gamma^i_{\gamma\beta}$. Finallement, de (4.42), (4.43) et (4.44)

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{Nj} &= -D_\Gamma(a^i)a_j \cdot a_N = a_j \cdot {}^*D_\Gamma(a^i)n \circ \Phi \\ &= a_j \cdot \big[-D^2ba^i + \nabla_\Gamma(a^i \circ \Phi^{-1} \cdot n) \circ \Phi\big].\end{aligned}$$

Mais $a^i \circ \Phi^{-1} \cdot n = -\delta_{i,N}$ est constante et

$$\Gamma^i_{Nj} = -a^i \cdot D^2 b_\Omega \, a_j = -b^i_j. \tag{4.46}$$

Dérivées covariantes

On traite le cas vectoriel, mais tout ceci se généralise aux tenseurs d'ordres supérieurs. On rappelle que pour $v \colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$

$$\boxed{v_\alpha\big|_\gamma \overset{\text{déf}}{=} v_{\alpha,\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} v_\lambda, \quad v^\alpha\big|_\gamma \overset{\text{déf}}{=} v^\alpha_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} v^\lambda} \tag{4.47}$$

Pour toute paire de fonctions à valeurs vectorielles $u, v \colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}(u \circ \Phi \cdot v \circ \Phi) &= (u \circ \Phi)_{,\gamma} \cdot v \circ \Phi + u \circ \Phi \cdot (v \circ \Phi)_{,\gamma}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}(u \circ \Phi \cdot v \circ \Phi) &= \big({}^*D_\Gamma(u)v + {}^*D_\Gamma(v)u\big) \circ \Phi \cdot a_\gamma.\end{aligned} \tag{4.48}$$

De nouveau, pour simplifier, on écrira $D_\Gamma(u)$ à la place de $D_\Gamma(u) \circ \Phi$. D'où

$$v_{\alpha,\gamma} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}(v \circ \Phi \cdot a_\alpha) = D_\Gamma(v)a_\gamma \cdot a_\alpha + v \cdot D_\Gamma(a_\alpha)a_\gamma,$$

et de (4.46)

$$\begin{aligned}v_\alpha\big|_\gamma &= D_\Gamma(v)a_\gamma \cdot a_\alpha + v \cdot D_\Gamma(a_\alpha)a_\gamma - a^\lambda \cdot D_\Gamma(a_\alpha)a_\gamma v_\lambda \\ &= D_\Gamma(v)a_\gamma \cdot a_\alpha + (v - a^\lambda v_\lambda) \cdot D_\Gamma(a_\alpha)a_\gamma \\ &= D_\Gamma(v)a_\gamma \cdot a_\alpha + a^N v_N \cdot D_\Gamma(a_\alpha)a_\gamma \\ &= D_\Gamma(v)a_\gamma \cdot a_\alpha - {}^*D_\Gamma(a_\alpha)\nabla b_\Omega \circ \Phi \cdot a_\gamma v_N.\end{aligned}$$

On se souvient que de l'identité (4.18) il vient

$${}^*D_\Gamma(a_\alpha)\nabla b = \nabla_\Gamma(a_\alpha \circ \Phi^{-1} \cdot \nabla b) - D^2 b_\Omega \, a_\alpha = -D^2 b_\Omega \, a_\alpha.$$

Finallement

$$\boxed{\begin{aligned} v_\alpha\big|_\gamma &= D_\Gamma^P(v) a_\gamma \cdot a_\alpha + D^2 b_\Omega\, a_\alpha \cdot a_\gamma v_N \\ &= \left[D_\Gamma^P(v) + D^2 b_\Omega\, v_N\right] a_\gamma \cdot a_\alpha \end{aligned}} \tag{4.49}$$

où $D_\Gamma^P(v) \stackrel{\text{déf}}{=} P\, D_\Gamma(v)$. But

$$D_\Gamma^P(v) = D_\Gamma^P(v_\Gamma) + D_\Gamma^P(v_n n) = D_\Gamma^P(v_\Gamma) + v_n D^2 b_\Omega$$

et puisque $v_N = -v_n$

$$\boxed{v_\alpha\big|_\gamma = D_\Gamma^P(v_\Gamma) a_\gamma \cdot a_\alpha \quad \text{et} \quad v_\alpha\big|_\gamma - v_N b_{\alpha\gamma} = D_\Gamma^P(v) a_\gamma \cdot a_\alpha}. \tag{4.50}$$

De même, on peut montrer que

$$\boxed{v^\alpha\big|_\gamma = D_\Gamma^P(v_\Gamma) a_\gamma \cdot a^\alpha} \tag{4.51}$$

$$\boxed{v^\alpha\big|_\gamma - b_\gamma^\alpha v_N = D_\Gamma^P(v) a_\gamma \cdot a^\alpha}. \tag{4.52}$$

4.5 Équation d'évolution d'un ensemble géométrique

Pour compléter ce chapitre, on illustre comment on peut construire des équations d'évolution pour un ensemble géométrique qui évolue dans le temps. On prend comme exemples les ensembles de niveau et la fonction distance orientée qui sont associées à des ensembles qui dépendent du temps.

4.5.1 Ensembles de niveau

Soit $(t,x) \mapsto \varphi(t,x) : [0,\tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de frontière Γ tel que

$$\operatorname{int}\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(0,x) < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(0,x) = 0\}.$$

Soit $V : [0,\tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vitesses suffisamment régulier pour que les transformations $\{T_t\}$ soient des difféomorphismes. On suppose, en plus, que sous l'action du champ de vitesses $V(t)$, les images $\Omega_t = T_t(\Omega)$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\operatorname{int}\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t,x) < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t,x) = 0\}, \quad \forall t \in [0,\tau].$$

En supposant que la fonction $\varphi_t(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(t,x)$ est au moins de classe C^1 et que $\nabla\varphi_t \neq 0$ sur $\varphi_t^{-1}\{0\}$ et en prenant la différentielle totale par rapport à t de $\varphi(t, T_t(x))$ pour $x \in \Gamma$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, T_t(x)) + \nabla\varphi(t, T_t(x)) \cdot \frac{d}{dt}T_t(x) = 0.$$

En substituant le champ de vitesses, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, T_t(x)) + \nabla\varphi(t, T_t(x)) \cdot V(t, T_t(x)) = 0, \quad \forall\, T_t(x) \in \Gamma_t \\ \Rightarrow \; \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t + \nabla\varphi_t \cdot V(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_t, \quad t \in [0,\tau]. \end{aligned}$$

Cette dernière équation, l'équation d'évolution des ensembles de niveau, n'est valide qu'uniquement sur les fronts Γ_t, $0 \leq t \leq \tau$. Il serait donc intéressant de trouver un représentant φ de la classe d'équivalence des fonctions φ qui vérifient les conditions précédentes,

$$[\varphi]_{\Omega,V} = \{\varphi : \varphi_t^{-1}\{0\} = \Gamma_t \quad et \quad \varphi_t^{-1}\{<0\} = \operatorname{int}\Omega_t, \forall t \in [0,\tau]\},$$

pour étendre l'équation d'évolution de Γ_t à tout $\mathbb{R}^N$ ou tout au moins presque partout dans $\mathbb{R}^N$. On pourrait aussi considérer la classe d'équivalence plus grande

$$[\varphi]_{\Gamma,V} = \{\varphi : \varphi_t^{-1}\{0\} = \Gamma_t,\, \forall t \in [0,\tau]\}.$$

Quand le front se déplace sous l'effet d'un champ de vitesses porté par sa normale avec une vitesse scalaire dépendant en particulier de la courbure de l'ensemble de niveau ou du front, on n'a qu'à considérer des champs de vitesses V de la forme

$$V(t)|_{\Gamma_t} = v(t)\, n_t, \quad x \in \Gamma_t,$$

pour une vitesse scalaire $(t,x) \mapsto v(t)(x) : [0,\tau] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En utilisant l'expression $\nabla\varphi_t/|\nabla\varphi_t|$ de la normale n_t en fonction de $\nabla\varphi_t$, l'équation d'évolution devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t + v(t)|\nabla\varphi_t| = 0 \text{ sur } \Gamma_t.$$

Par exemple, considérons le cas de l'énergie d'une surface

$$\begin{aligned} E(\Omega; V) = \int_\Gamma f(X)\, d\Gamma \\ dE(\Omega; V) = \int_\Gamma (Hf(X) + \frac{\partial}{\partial n}f(X))n \cdot V\, d\Gamma, \end{aligned}$$

le choix d'une direction de descente du gradient amène à choisir

$$v(t) = -[H_t\, f(X) + \frac{\partial}{\partial n_t} f(X)] \text{ sur } \Gamma_t.$$

Par ailleurs, on a que la normale n_t et la courbure moyenne H_t peuvent s'exprimer en fonction de $\nabla\varphi_t$ comme suit

$$n_t = \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} \quad \text{et} \quad H_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} n_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} \left(\frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|}\right) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|}\right)\bigg|_{\Gamma_t}.$$

Alors, on obtient l'équation d'évolution suivante

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} - \left(H_t f(X) + \frac{\partial}{\partial n_t} f(X)\right) \nabla\varphi_t \cdot \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} = 0 \text{ sur } \Gamma_t.$$

En simplifiant

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} - \left(H_t f(X) + \frac{\partial}{\partial n_t} f(X)\right) |\nabla\varphi_t| = 0 \text{ sur } \Gamma_t.$$

En remplaçant n_t et H_t par leurs expressions en terme de $\nabla\varphi_t$, il vient finalement

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} - \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|}\right) f(X) + \nabla f(X) \cdot \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|}\right] |\nabla\varphi_t| = 0 \text{ sur } \Gamma_t.$$

Le signe négatif provient ici du fait que l'on a choisi la normale sortante plutôt que rentrante.

4.5.2 Fonction distance orientée

Étant donné un domaine $D \subset \mathbb{R}^N$, un champ de vitesse V et un sous-ensemble $\Omega \subset D$, et la fonction distance orientée b_Ω, le choix de $\varphi(t,x) = b_{\Omega_t}(x)$ en fait un cas particulier de la méthode par ensembles de niveau.

On est intéressé à construire une nouvelle équation pour

$$t \mapsto b_{\Omega_t} (\text{resp. } b^2_{\Omega_t}) : [0,\tau] \to C(\bar{D})$$

avec $\tau > 0$, où t peut être considéé comme un temps artificiel. On suppose que Ω possède une frontière mince, c'est-à-dire de mesure N-dimensionelle de Lebesgue nulle. On introduit d'abord les notions de dérivées partielles de b_{Ω_t} en $t = 0$:

$$b'_\Omega(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t}(x)\bigg|_{t=0^+} \quad \text{et} \quad (b^2_\Omega)'(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial t} b^2_{\Omega_t}(x)\bigg|_{t=0^+}.$$

Théorème 4.5.1. *Soit $\tau > 0$ et $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfaisant les conditions* (4.1).

1. *Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $\Gamma \neq \varnothing$, alors*
$$(b_\Omega^2)' = -\nabla b_\Omega^2 \cdot (V(0) \circ p_\Gamma) \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \backslash \mathrm{Sk}\,(\Omega)$$
$$b_\Omega' = -\nabla b_\Omega \cdot (V(0) \circ p_\Gamma) \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \backslash (\Gamma \cup \mathrm{Sk}\,(\Omega))$$
et ces identités sont vraies presque partout dans $\mathbb{R}^N$.
2. *Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $\Gamma \neq \varnothing$ et $\mathrm{m}_N(\Gamma) = 0$, alors*
$$b_\Omega' = -\nabla b_\Omega \cdot (V(0) \circ p_\Gamma) \textit{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Si $V \in C([0, \tau]; C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^N))$, pour tout ouvert borné D de $\mathbb{R}^N$, $b_\Omega' \in L^\infty(D)$ et en plus
$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} b_{\Omega_t}\, \psi \, dx|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{R}^N} b_\Omega' \, \psi \, dx.$$

Nous pouvons maintenant construire l'équation d'évolution non-linéaire pour la distance orientée b_{Ω_t} comme fonction du temps t pour des ensembles Ω ayant une frontière mince. Un avantage de travailler avec cette fonction est qu'elle permet l'évolution de domaines arbitraires de mesure de Lebesgue de dimension N nulle tels qu'un nuage de points, des courbes ou des objets de codimension supérieure ou égale à un. Elle n'est pas uniquement restreinte à l'évolution de domaine ouvert à frontière mince.

Théorème 4.5.2. *Soit $\tau > 0$ et $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champs de vitesse satisfaisant les conditions* (4.1) *et tel que $V \in C([0, \tau]; C^0(\bar{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N))$. Supposons que Ω soit un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière mince $\Gamma \neq \varnothing$.*

Alors pour tout ouvert borné D de $\mathbb{R}^N$ et pour tout $r, 1 \leq r < \infty$, la fonction $t \mapsto b_{\Omega_t}$ appartient à l'espace $C^1([0, \tau]; L^r(D)) \cap C^0([0, \tau]; W^{1,r}(D))$ et satisfait l'équation d'évolution suivante
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} + \nabla b_{\Omega_t} \cdot (V(t) \circ p_{\Gamma_t}) = 0 \quad \textit{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ b_{\Omega_0} = b_\Omega, \end{cases} \tag{4.53}$$
pour tout t, $0 \leq t \leq \tau$, où p_{Ω_t} est la projection sur Γ_t
$$p_{\Omega_t}(x) = x - \frac{1}{2} \nabla b_{\Omega_t}^2(x) \quad \textit{p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Remarque 4. *Notons que l'équation d'évolution de la fonction distance orientée au carré $b^2_{\Omega_t} = d^2_{\Gamma_t}$ est donnée par*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} b^2_{\Omega_t} + \nabla b^2_{\Omega_t} \cdot \left(V(t) \circ \left[I - \frac{1}{2} \nabla b^2_{\Omega_t} \right] \right) = 0 \quad \textit{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ b^2_{\Omega_0} = b^2_{\Omega}, \end{cases}$$

pour tout $t, 0 \leq t \leq \tau$. Remarquons qu'elle ne fait intervenir que des différentielles premières.

En posant

$$(t, x) \mapsto \varphi(t, x) = b_{\Omega_t}(x(t)) : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

la famille des ensembles de niveau zéro de φ devient exactement

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : b_{\Omega_t}(x) = 0\}$$

et la fonction distance orientée vérifierait donc l'équation d'évolution des ensembles de niveau

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t + \nabla \varphi_t \cdot V(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_t \tag{4.54}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} + \nabla b_{\Omega_t} \cdot V(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_t \tag{4.55}$$

L'équation d'évolution (4.54) n'est valide que sur les ensembles Γ_t de niveau zéro *en autant que sa restriction à Γ_t ait un sens*. C'est la projection p_{Γ_t} sur la frontière Γ_t qui permet d'étendre l'équation d'évolution sur les fronts Γ_t à presque tout $\mathbb{R}^N$ en remplaçant le champ de vitesses $V(t)$ par $V(t) \circ p_{\Gamma_t}$ à l'exérieur de Γ_t.

L'équation d'évolution de la fonction distance orientée est plus fondamentale que (4.54) qui n'a pas toujours de sens. En effet, pour des sous-ensembles Ω de codimension strictement supérieure à un, le gradient de la fonction distance orientée ∇b_{Ω_t} n'existe pas sur Γ_t, et donc l'équation (4.55) «n'a pas de sens sur Γ_t.»

Chapitre 5

Identification des hypersurfaces

5.1 L'approche d'Azencott et de Trouvé

On donne d'abord une idée rapide de l'approche de Azencott et Trouvé que J. C. Barolet a adaptée à ce problème dans son mémoire [6]. Elle consiste à générer des déformations d'une surface de référence via une famille de difféomorphismes pour approcher la surface observée qui se présente sous l'aspect d'un ensemble ou *nuage* de points ou de mesures.

5.1.1 Groupes et métriques

Groupe $\mathcal{F}(\Theta)$ de transformations de $\mathbb{R}^N$

Ce groupe a été introduit par A.M.Micheletti [32] pour l'espace d'applications $\Theta = C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. On donne ici la construction générique de Delfour et Zolésio [21] [20] pour un espace de Banach Θ d'applications de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$:

$$\mathcal{F}(\Theta) \overset{\text{déf}}{=} \{I + f : f \in \Theta, (I + f) \text{ bijectif et } (I + f)^{-1} - I \in \Theta\},$$

où $x \mapsto I(x) \overset{\text{déf}}{=} x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est l'identité. $\mathcal{F}(\Theta)$ est un groupe de transformations de $\mathbb{R}^N$ pour la composition $(F \circ G)(x) \overset{\text{déf}}{=} F(G(x))$.

Comme la fonction candidate à une métrique invariante à droite

$$d_0(I, F) \overset{\text{déf}}{=} \|F - I\|_\Theta + \|F^{-1} - I\|_\Theta, \quad d_0(F, G) \overset{\text{déf}}{=} d_0(I, G \circ F^{-1})$$

ne vérifie pas l'inégalité du triangle, Micheletti associe à $F \in \mathcal{F}(\Theta)$ la nouvelle fonction

$$\boxed{d(I,F) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{F=F_1\circ\cdots\circ F_n\\ F_i\in\mathcal{F}(\Theta)}} \sum_{i=1}^{n} \|F_i - I\|_\Theta + \|F_i^{-1} - I\|_\Theta,} \tag{5.1}$$

où l'infimum est pris par rapport à toutes les *factorisations finies* de F dans $\mathcal{F}(\Theta)$ de la forme

$$F = F_1 \circ \cdots \circ F_n, \quad F_i \in \mathcal{F}(\Theta).$$

Par définition, $d(I,F) = d(I,F^{-1})$. On étend ensuite cette fonction à tous les F et G dans $\mathcal{F}(\Theta)$

$$\boxed{d(F,G) \stackrel{\text{déf}}{=} d(I, G\circ F^{-1}).} \tag{5.2}$$

Par définition, d est une métrique invariante à droite puisque pour tout F, G et H in $\mathcal{F}(\Theta)$

$$d(F,G) = d(F\circ H, G\circ H).$$

On introduit enfin un ensemble fixe Ω_0 (*template* en anglais) et le sous-groupe

$$\mathcal{G}(\Omega_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \{F \in \mathcal{F}(\Theta) : F(\Omega_0) = \Omega_0\}.$$

Le groupe quotient $\mathcal{F}(\Theta)/\mathcal{G}(\Omega_0)$ est isomorphe à l'ensemble des images

$$\mathcal{X}(\Omega_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \{F(\Omega_0) : \forall F \in \mathcal{F}(\Theta)\} \tag{5.3}$$

de Ω_0 par les éléments de $\mathcal{F}(\Theta)$.

Pour $\Theta \subset C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et Ω_0 un fermé ou Ω_0 un ouvert sans fissures, c'est-à-dire,

$$\overline{\operatorname{int}\Omega_0} = \overline{\Omega_0},$$

$\mathcal{G}(\Omega_0)$ est un sous-groupe fermé. Cela couvre les cas des sous-variétés fermées de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ et les ouverts de classe C^k, $k \geq 0$. On peut donc, par exemple, prendre les images d'une courbe, d'une surface avec ou sans bord de régularité arbitraire dans $\mathbb{R}^3$

La métrique associée au groupe quotient est définie par

$$\forall F, G \in \mathcal{F}(\Theta), \quad d_{\mathcal{G}}([F],[H]) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{G,\tilde{G}\in\mathcal{G}} d(F\circ G, H\circ\tilde{G}), \quad [F] \stackrel{\text{déf}}{=} F\circ\mathcal{G}(\Omega_0),$$

Les métriques d et $d_{\mathcal{G}}$ font de $\mathcal{F}(\Theta)$ et $\mathcal{F}(\Theta)/\mathcal{G}(\Omega_0)$ des espaces métriques complets pour les espaces

$$C_0^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \subset C^k(\overline{\mathbb{R}^N},\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \text{ et } C^{k,1}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$$

(cf. M. C. Delfour et J. P. Zolésio [21]). Ces résultats s'étendent aussi aux espaces de Fréchet $C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}^N},\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$.

Sous-groupe G_Θ de transformations générées par un champ de vitesses

Cette section se concentre sur le sous-groupe de $\mathcal{F}(\Theta)$ dont les éléments sont générés par un champ de vecteurs $V : [0,1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sous la forme

$$\frac{dx}{dt}(t) = V(t, x(t)), \quad x(0) = X. \tag{5.4}$$

On utilisera les notations suivantes

$$X \mapsto V(t)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} V(t, X) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad X \mapsto T_t(V)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} x(t; X) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N. \tag{5.5}$$

On utilisera souvent l'expression *champ de vitesses* en parlant de V.

Pour donner un sens à l'équation (5.4), on introduit quelques hypothèses sur V. Soit l'espace de Banach $\Theta = C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ de norme

$$\|\theta\|_\Theta \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\theta(x)|, c(\theta)\}, \quad c(\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \neq y} \frac{|\theta(y) - \theta(x)|}{|y - x|}.$$

On considère les champs de vecteurs V avec les propriétés suivantes :

– pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $t \mapsto V(t, x) : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ est dans $L^1(0,1;\mathbb{R}^N)$ et

$$\int_0^1 \|V(t)\|_C \, dt = \int_0^1 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |V(t,x)| \, dt < \infty;$$

– pour presque tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto V(t,x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est lipschitzienne et

$$\int_0^1 c(V(t)) \, dt = \int_0^1 \sup_{x \neq y} \frac{|V(t,y) - V(t,x)|}{|y - x|} \, dt < \infty.$$

Comme de ces hypothèses $V \in L^1(0,1;\Theta)$, il est naturel d'introduire pour ces vitesses V la norme

$$\|V\|_{L^1(0,1;\Theta)} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 \|V(t)\|_\Theta \, dt.$$

On associe à $V \in L^1(0,1;\Theta)$ la famille de transformations $T_t(V)$ définies par la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t; X) = V(t, x(t; X)), \quad x(0, X) = X.$$

Elle a une solution unique dans $W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^N) \subset C([0,1];\mathbb{R}^N)$, la transformation $X \mapsto x(\cdot, X) : \mathbb{R}^N \to C([0,1],\mathbb{R}^N)$ est continue et, pour chaque $t \in [0,1]$, la transformation $T_t(V)(X) \stackrel{\text{déf}}{=} x(t;X) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est bijective. Ceci donne un sens à l'équation d'évolution pour $T_t(V)$ suivante :

$$\frac{dT_t(V)}{dt} = V(t) \circ T_t(V), \quad T_0(V) = I.$$

Définissons

$$G_\Theta \stackrel{\text{déf}}{=} \{T_1(V) : V \in L^1(0,1;\Theta)\}.$$

On associe à G_Θ la métrique suivante

$$d_G(I, T_1(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{v \in L^1(0,1;\Theta)} \int_0^1 \|v(t)\|_\Theta \, dt = \inf_{v \in L^1(0,1;\Theta)} \int_0^1 \left\| \frac{d_{\mathcal{F}} T_t(v)}{dt} \right\| dt,$$

où la dérivée est dans le groupe $\mathcal{F}(\Theta)$. Par définition

$$d_G(T_1(V)^{-1}, I) = d_G(T_1(V), I), \quad d_G(T_1(V), T_1(W)) = d_G(T_1(W), T_1(V)).$$

On montre dans [21] que d_G est une métrique invariante à droite, mais la question de la complétude de (G_Θ, d_G) reste ouverte.

5.1.2 Approche hilbertienne d'Azencott et de Trouvé

En 1994, R.Azencott [3] suggère de choisir des automorphismes $T_1(V)$ générés par un champ de vitesses V de la même nature que ceux du sous-groupe G_Θ où $\Theta = C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$ et $T_t(V)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = V(t) \circ T_t, \quad T_0 = I.$$

Le détail se trouve dans un rapport interne de A. Trouvé [40] et un article soumis [41] basé sur sa thèse en 1995.

Pour contourner problème technique en suspend de la complétude de (G_Θ, d_G), il introduit un sous-espace hilbertien de vitesses plus petit

$$\mathcal{H} \subset C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N)$$

et une norme L^2 plutôt que L^1. Il définit la nouvelle métrique

$$d_{\mathcal{H}}(I, T_1(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{v \in L^2(0,1;\mathcal{H}) \\ T_1(v)=T_1(V)}} \int_0^1 \|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \, dt$$

$$d_{\mathcal{H}}(T_1(V), T_1(W)) \stackrel{\text{déf}}{=} d_{\mathcal{H}}(T_1(V) \circ T_1(W)^{-1}, I).$$

Le fait que l'on travaille avec le Hilbert $L^2(0,1;\mathcal{H})$ plutôt que le Banach $L^1(0,1;\Theta)$ donne la complétude. Effectivement, nous savons que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs. De plus, par le théorème de Banach-Alaoglu, un fermé borné convexe pour la topologie forte est compact pour la topologie faible. Ainsi, dans un espace de Hilbert, toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente. Trouvé ajoute que la trajectoire correspondante est une *trajectoire géodésique*.

En pratique, on a souvent besoin que les images de Ω_0 demeurent à l'intérieur d'un fourre-tout fixe D. On cherche donc des conditions nécessaires et suffisantes sur V pour que $T_t(V)$ soit un automorphisme de $\overline{D}$:

$$\forall t \in [0,1], \quad T_t(V)(\overline{D}) = \overline{D}.$$

En 1942, M. Nagumo [34] donna une condition nécessaire et suffisante sur un champ autonome (c'est-à-dire, qui ne dépend pas de t) continu V pour que toutes les trajectoires partant d'un point $x \in \overline{D}$ demeurent dans $\overline{D}$. Intuitivement, la trajectoire restera dans $\overline{D}$ si, lorsqu'elle atteint la frontière de $\overline{D}$, la vitesse V en ce point pointe vers l'intérieure de $\overline{D}$ ou reste tangente à $\overline{D}$. Lorsque $\overline{D}$ est régulier, disons de classe C^1, il suffit donc qu'en tout point frontière $x \in \partial\overline{D}$, on ait

$$V(t,x) \cdot n(x) \leq 0,$$

où $n(x)$ est la normale unitaire extérieure à D au point x. La vitesse doit donc se trouver dans le demi-espace

$$V(t,x) \in \{h \in \mathbb{R}^N : h \cdot n(x) \leq 0\}.$$

Comme T^{-1} doit aussi vérifier la condition, on tombe sur la double inégalité

$$\pm V(t,x) \cdot n(x) \leq 0 \quad \Rightarrow V(t,x) \cdot n(x) = 0.$$

Lorsque D est un sous-ensemble arbitraire de $\mathbb{R}^N$ pour lequel il n'y a pas de normale, il faut remplacer le demi-espace par un cône en 0 tangent à D au point x (voir J. C. Barolet [6] pour la généralisation).

5.1.3 Problème générique d'imagerie

On donne maintenant un aperçu d'un problème générique d'identification d'image (pattern recognition). On se donne la fonction de *référence* $f_r : \overline{D} \to \mathbb{R}$, et la fonction d'*observation* $f_0 : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Le problème consiste à chercher le minimum de la fonctionnelle

$$J_1(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\int_{\overline{D}} |f_r \circ T_1(V) - f_0|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (V(t), V(t))_{\mathcal{H}}\, dt \tag{5.6}$$

par rapport à $L^2(0, 1; \mathcal{H})$. On cherche donc à rapprocher l'image de référence f_r de l'image observée f_o via les difféomorphismes générés par les vitesses V. En imagerie, la fonction fixe de référence f_r serait un *pattern* et la fonction f_o serait l'image (des niveaux de gris) observée que l'on veut comparer à f_r par déformations. C'est le cas scalaire. Ce problème à une généralisation immédiate au cas de fonctions à valeurs vectorielles (images couleur) et au cas de géométries en utilsant la *fonction caractéristique*, la *fonction distance* ou la *fonction distance orientée*, mais la structure est la même. Seules la taille et la complexité des équations à résoudre augmentent (voir J. C. Barolet [6]).

La seconde intégrale est semi-continue inférieurement et bornée inférieurement. Comme la fonctionnelle

$$V \mapsto f_r \circ T_1(V) \mapsto J_0(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\overline{D}} |f_r \circ T_1(V) - f_0|^2\, dX$$
$$: L^2(0, 1; \mathcal{H}) \to C^0(\overline{D}; \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

est construite à partir de la fonctionnelle

$$f \mapsto \int_{\overline{D}} |f - f_0|^2\, dx : L^2(\overline{D}) \to \mathbb{R}$$

qui est semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, il y a des solutions minimisantes de la fonctionnelle $J_1(V)$ en (5.6) par rapport à $L^2(0, 1; \mathcal{H})$.

J. C. Barolet [6] donne une caractérisation des éléments minimisants locaux.

Théorème 5.1.1. *S'il existe un élément minimisant local $\widehat{V} \in L^2(0, 1; \mathcal{H})$, il est solution de l'inéquation variationnelle*

$$dJ_1(\widehat{V}; W - \widehat{V}) \geq 0, \quad \forall W \in L^1(0, 1; \mathcal{H}),$$

où la semi-différentielle au sens de Hadamard est donnée par

$$dJ_1(V; W) = \int_0^1 \left\langle i^*(|j(DT_t^{-1})|P(t) \circ T_t^{-1}(V)) + AV(t), W(t)\right\rangle_{\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}}\, dt,$$

où

$i : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est l'injection continue de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$,

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ est l'opérateur linéaire et continu associé au produit scalaire dans le Hilbert $\mathcal{H}$,

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}', \quad \forall u, v \in \mathcal{H}, (u, v)_{\mathcal{H}} = \langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}$$

$P(t)$ est la solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P(t) + (DV(t) \circ T_t(V))^* \, P(t) = 0 \textit{ dans } [0,1] \\ P(1) = [f_r(T_1(V)) - f_0] \, \nabla f_r(T_1(V)), \end{cases}$$

et

$$\frac{d}{dt}T_t = V(t) \circ T_t \textit{ dans } [0,1] \textit{ et } T_0 = I.$$

Si l'élément minimisant $\widehat{V}$ est caractérisé par

$$dJ_1(\widehat{V}; W) = 0, \quad \forall W \in L^2(0,1;\mathcal{H}),$$

on a

$$\begin{aligned} i^*(|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)) + AV(t) = 0 \\ \widehat{V}(t) = -A^{-1} i^*(|j(DT_t^{-1})| P(t) \circ T_t^{-1}(V)). \end{aligned}$$

5.2 Approche de Osher, Fedkiw et Zhao

On considère le problème général suivant. Soit S un ensemble de points dans l'espace $\mathbb{R}^N$ qui pourrait être l'ensemble des points obtenus lors du scan d'une surface dans $\mathbb{R}^3$. On cherche une hypersurface Γ qui soit le plus près des points de S selon un critère à préciser.

S. Osher, R. Fedkiw et H. K. Zhao [36], [44], [45] et [46] proposent d'utiliser la fonction distance d_S et de minimiser le critère suivant qu'ils assimilent à une énergie : pour un entier $p \geq 1$

$$E(\Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\int_\Gamma d_S(x)^p \, d\Gamma \right]^{1/p}. \tag{5.7}$$

Si Γ est la frontière d'un ensemble Ω de classe C^k pour $k \geq 2$ et $V(t)$ est un champ de vitesses assez régulier, on aurait au moins formellement de la formule (4.14) du Théorème 4.3.5 la semidifférentielle suivante

$$J(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \int_\Gamma d_S(x)^p \, d\Gamma \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} dJ(\Omega; V) &= \int_\Gamma \left[H(x)\, d_S(x)^p + \frac{\partial}{\partial n} d_S(x)^p \right] V(0) \cdot n(x)\, d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \left[H(x)\, d_S(x)^p + p\, d_S(x)^{p-1} \, \nabla d_S(x) \cdot n(x) \right] V(0) \cdot n(x)\, d\Gamma, \end{aligned} \tag{5.9}$$

où $H(x) = \nabla b_\Omega(x)$ est la courbure moyenne de Γ en x.

S'il existe un domaine optimal vérifiant toutes les conditions de régularité implicites dans ces calculs formels, on obtiendrait la condition nécessaire suivante sur la frontière Γ :

$$d_S(x)^{p-1} \, [H(x)\, d_S(x) + p \, \nabla d_S(x) \cdot n(x)] = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{5.10}$$

À partir de ce calcul, on pourrait aussi choisir d'enclancher une méthode de descente en choissisant un champs de vitesse qui rende $dJ(\Omega; V)$ négative comme dans la méthode de descente. On choisirait donc un champ de vitesse porté par la normale

$$V(x) = -\left[H(x)\, d_S(x)^p + p\, d_S(x)^{p-1} \, \nabla d_S(x) \cdot n(x) \right] n(x), \quad x \in \Gamma \tag{5.11}$$

à condition de pouvoir étendre ce champs à $\mathbb{R}^N$ ou tout au moins dans un voisinage de Γ.

5.2.1 Équation pour les ensembles de niveau

En supposant que l'on puisse utiliser la méthode des ensembles de niveau pour une fonction $\varphi(x, t)$, l'évolution Γ_t de Γ en fonction de t serait donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) + V(t) \cdot n_t \, |\nabla \varphi(t)| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t. \tag{5.12}$$

En substituant la vitesse (5.11), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) - \left[H_t \, d_S^p + p\, d_S^{p-1} \, \nabla d_S \cdot n_t \right] |\nabla \varphi(t)| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t = \varphi(t)^{-1}\{0\}. \tag{5.13}$$

On voit par cette équation que le minimum cherché est caractérisé par un équilibre entre deux forces, représentées par les deux termes dans cette équation. Le premier terme $\nabla d_S \cdot n$ est une sorte de potentiel. Sous l'action de ce terme, la surface se déplace en remontant le gradient de la fonction distance. Le deuxième terme $H\,d_S$ représente une *tension superficielle* le long de la surface. Plus le courbure est élevée, plus ce terme est grand.

Par ailleurs, on se souvient que la normale n_t et la courbure moyenne H_t peuvent s'exprimer en fonction de $\nabla\varphi(t)$ comme suit

$$n_t = \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|} \quad \text{et} \quad H_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} n_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t}\left(\frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\right)\Big|_{\Gamma_t}.$$

On obtient finalement et formellement

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) - \left[\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\right) d_S^p + p\, d_S^{p-1}\,\nabla d_S \cdot \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\right] |\nabla\varphi(t)| = 0 \quad \text{sur } \varphi(t)^{-1}\{0\} \tag{5.14}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = d_S^{p-1}\left[d_S\ |\nabla\varphi(t)|\ \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\right) + p\,\nabla d_S \cdot \nabla\varphi(t)\right] \quad \text{sur } \varphi(t)^{-1}\{0\}. \tag{5.15}$$

Comme tous les termes de cette dernière équation sont définis dans un voisinage de $\varphi(t)^{-1}\{0\}$, on obtient ainsi une équation dans un voisinage de Γ_t.

Un aspect séduisant de travailler avec la méthode *level set*, c'est de pouvoir écrire toutes les fonctions géométriques en fonction de la fonction de niveau φ, comme la courbure moyenne, la courbure de Gauss, l'aire et le volume de la surface, etc... Par exemple, on peut formellement calculer le volume et l'aire de la surface de la forme construite avec les formules suivantes :

$$\text{Volume} = \int H(-\varphi)\,dx,$$
$$\text{Aire} = \int \delta(\varphi)|\nabla\varphi|\,dx,$$

où $H(x)$ est la fonction de *Heaviside* définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Quelques remarques s'imposent. La formule (5.9) est utilisée dans [36] sans aucune justification mathématique et sans parler de la régularité de Γ. Comme l'ensemble S n'est constitué que de points, le gradient $\nabla d_S(x)$ qui n'existe que presque partout est intégré sur Γ qui est un ensemble de mesure nulle. En général, la fonction $dJ(\Omega; V)$ n'a donc pas de sens et le développement mathématique de cette approche nécessite des hypothèses qui ne sont pas précisées.

De plus, en général, la vitesse (5.11) portée par la normale et impliquant des courbures ne vérifie pas les conditions sous lequelles la formule (5.9) a été obtenue. Ceci implique que, lors du passage à la fonction φ, cette dernière soit assez régulière pour que l'intégrant du membre de droite de

$$\begin{aligned} &dJ(\Omega_t; V) \\ &= \int_{\Gamma_t} d_S(x)^{p-1} \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|} \right) d_S(x) + p\, \nabla d_S(x) \cdot \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|} \right] V(0) \cdot \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\, d\Gamma_t \end{aligned}$$

soit bien définie et possède un prolongement dans un voisinage de Γ_t.

Pour corriger cet état de choses, on peut régulariser en introduisant une équation variationnelle de la forme suivante. On se donne un petit $\varepsilon > 0$ que l'on fera tendre vers zéro. On cherche $U_\varepsilon \in H^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $V \in H^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\varepsilon \, < AU_\varepsilon, V >_{(H^k(\Omega,\mathbb{R}^N))' \times H^k(\Omega,\mathbb{R}^N)} + (U_\varepsilon, V)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} = dJ(\Omega; V) \tag{5.16}$$

pour un $k \geq 1$ suffisamment grand pour lequel le calcul de la semi-différentielle $dJ(\Omega; V)$ est justifiée et un opérateur elliptique A régularisant qui force la solution à appartenir à $H^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Les notations $< \cdot, \cdot >_{(H^k(\Omega,\mathbb{R}^N))' \times H^k(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ et $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ dénotent le produit de dualité dans $H^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et le produit scalaire dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

On substitue alors cette vitesse dans l'équation (5.12)

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) + U_\varepsilon(t) \cdot \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\, |\nabla\varphi(t)| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t \tag{5.17}$$

(qui a aussi un sens dans un voisinage de Γ_t). En simplifiant, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) + U_\varepsilon(t) \cdot \nabla\varphi(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_t, \tag{5.18}$$

avec U_ε solution de l'équation variationnelle

$$\begin{aligned} &\varepsilon \, < AU_\varepsilon(t), V >_{(H^k(\Omega,\mathbb{R}^N))' \times H^k(\Omega,\mathbb{R}^N)} + (U_\varepsilon, V)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \\ &= \int_{\Gamma_t} d_S(x)^{p-1} \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|} \right) d_S(x) + p\, \nabla d_S(x) \cdot \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|} \right] V(0) \cdot \frac{\nabla\varphi(t)}{|\nabla\varphi(t)|}\, d\Gamma_t. \end{aligned} \tag{5.19}$$

La solution $(\varphi_\varepsilon, U_\varepsilon)$ du système couplé (5.18)–(5.19) dépend du paramètre de régularisation $\varepsilon > 0$. Il faudra ensuite le faire tendre vers zéro et donner un sens à la limite de $(\varphi_\varepsilon, U_\varepsilon)$ dans les bons espaces.

5.2.2 Équation pour la fonction distance orientée

On reprend les calculs pour l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} + \nabla b_{\Omega_t} \cdot (V(t) \circ p_{\Gamma_t}) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ b_{\Omega_0} = b_\Omega, \end{cases} \tag{5.20}$$

avec le champ de vitesse (5.11) pour lequel

$$n_t = \nabla b_{\Omega_t} \quad \text{et} \quad H_t = \Delta b_{\Omega_t} \tag{5.21}$$

ce qui donne formellement

$$V(t) = -d_S^{p-1} \left[\Delta b_{\Omega_t} \, d_S + p \, \nabla d_S \cdot \nabla b_{\Omega_t}\right] \nabla b_{\Omega_t} \quad \text{sur } \Gamma_t \tag{5.22}$$

$$\Rightarrow \; V(t) \circ p_{\Gamma_t} = -d_S^{p-1} \circ p_{\Gamma_t} \left[\Delta b_{\Omega_t} \, d_S + p \, \nabla d_S \cdot \nabla b_{\Omega_t}\right] \circ p_{\Gamma_t} \nabla b_{\Omega_t} \circ p_{\Gamma_t} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

Finalement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} = d_S^{p-1} \circ p_{\Gamma_t} \left[\Delta b_{\Omega_t} \, d_S + p \, \nabla d_S \cdot \nabla b_{\Omega_t}\right] \circ p_{\Gamma_t} \nabla b_{\Omega_t} \cdot \nabla b_{\Omega_t} \circ p_{\Gamma_t} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ b_{\Omega_0} = b_\Omega, \end{cases}$$

Sur Γ_t, on a $\nabla b_{\Omega_t} \circ p_{\Gamma_t} \cdot \nabla b_{\Omega_t} = 1$ mais ce n'est pas vrai p.p. dans $\mathbb{R}^N$.

Remarque 5. *Comme on l'a vu au chapitre 2, la fonction distance d_A associée à un sous-ensemble A, $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$, est lipschitzienne dans $\mathbb{R}^N$. Son gradient existe presque partout et vérifie*

$$|\nabla d_A(x)| = \begin{cases} 1, & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N \backslash \overline{A} \\ 0, & \text{p.p. dans } \overline{A} \end{cases}$$

(cf. [21, Chapitre 6, Théorème 3.3 (vi), p. 285]). Soit Ω un ouvert tel que $\varnothing \neq \Omega \neq \mathbb{R}^N$ et $d_{\complement\Omega}$ la fonction distance associée à son complément. On a de ce qui précède

$$|\nabla d_{\complement\Omega}(x)| = \begin{cases} 1, & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N \backslash \overline{\complement\Omega} = \mathbb{R}^N \backslash \complement\Omega = \Omega \\ 0, & \text{p.p. dans } \overline{\complement\Omega} = \complement\Omega. \end{cases}$$

*Les fonctions $\pm d_{\complement\Omega}$ sont donc des solutions lipschiziennes de l'*équation eikonale

$$\begin{cases} |\nabla d(x)| = 1 & \text{p.p. dans } \Omega \\ d(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Elle a donc toujours au moins une solution globale lipschitzienne positive.

De même, pour la fonction distance orientée b_Ω, $\partial\Omega \neq \varnothing$, *on a*

$$|\nabla b_\Omega(x)| = \begin{cases} 1, & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega \\ 0, & \text{p.p. dans } \partial\Omega \end{cases}$$

(cf. [21, Chapitre 7, Théorème 3.1 (vii), p. 347]). La fonction $\pm b_\Omega$ *est donc solution de l'équation*

$$\begin{cases} |\nabla b(x)| = 1 & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega \\ b(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

5.2.3 Discussion

Il est utile de regarder de plus près les fonctions impliquées dans les calculs précédents et de voir si certaines des étapes peuvent être justifiées ou si des modifications peuvent être apportées pour justifier les calculs formels.

On regarde d'abord le gradient de la fonction d_S. L'ensemble S est constitué d'un nombre fini de points

$$S \overset{\text{déf}}{=} \left\{ s_i \in \mathbb{R}^N : 1 \leq i \leq n_S \right\}. \tag{5.23}$$

On a donc

$$d_S(x) = \min_{1, \leq i \leq n_S} |x - s_i| = \min_{1, \leq i \leq n_S} d_{\{x_i\}}(x) \tag{5.24}$$

et la semi-différentielle au sens de Hadamard en x dans la direction v est donnée par

$$d_H d_S(x; v) = \min_{i \in I(x)} d_H d_{\{x_i\}}(x; v), \quad I(x) \overset{\text{déf}}{=} \{i : |x - s_i| = d_S(x)\}. \tag{5.25}$$

La semidifférentielle de $d_{\{x_i\}}$ est particulièrement simple à calculer

$$d_H d_{\{x_i\}}(x; v) = \begin{cases} \dfrac{x - s_i}{|x - s_i|} \cdot v, & \text{si } x \neq x_i \\ |v|, & \text{si } x = x_i. \end{cases} \tag{5.26}$$

Si $\Gamma \cap \operatorname{Sk}(S)$ a une mesure de Hausdorff de dimension $(N-1)$ nulle, le terme $dJ(\Omega : V)$ pourrait se justifier.

Pour le cas $p = 2$, on peut utiliser la fonction distance au carré. La semi-différentielle au sens de Hadamard en x dans la direction v est donnée par

$$d_H d_S^2(x; v) = \min_{i \in I(x)} d_H d_{\{x_i\}}^2(x; v), \quad I(x) \overset{\text{déf}}{=} \{i : |x - s_i| = d_S(x)\}. \tag{5.27}$$

La semidifférentielle de $d_{\{x_i\}}$ est particulièrement simple à calculer

$$d_H d_{\{x_i\}}^2(x; v) = 2\,(x - s_i) \cdot v \tag{5.28}$$

$$\Rightarrow\; d_H d_S^2(x; v) = \min_{i \in I(x)} 2\,(x - s_i) \cdot v. \tag{5.29}$$

Si l'on pouvait améliorer la formule (4.14)

$$dJ_V(0) = \int_\Gamma \psi'(0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + H\psi\right) V(0) \cdot n \, d\Gamma \tag{5.30}$$

en remplaçant la dérivée normale par la semidifférentielle $d\psi(x; n(x))$, on aurait

$$dJ(\Omega; V) = \int_\Gamma \left[H(x)\, d_S^2(x) + d_H d_S^2(x; n(x))\right] \, V(0) \cdot n(x) \, d\Gamma. \tag{5.31}$$

5.3 Autres critères et fonctions objectif

On trouvera dans le mémoire de J. C. Barolet [6] une autre formulation du problème d'identification d'une surface qui se prête à des calculs du type théorie des coques minces. On en introduit maintenant une autre qui possède d'autres avantages.

Soit $S = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ l'*ensemble des points générés par le premier scan* (avant chirurgie). On suppose que la surface que l'on essaie d'identifier est une partie de la frontière d'un ensemble de référence Ω_r de classe $C^{1,1}$ au moins dans le voisinage des points de S. Soit b_{Ω_r} la *fonction distance orientée* associée

$$b_{\Omega_r} \overset{\text{déf}}{=} d_{\Omega_r} - d_{\complement\Omega_r}, \quad d_{\Gamma_r} = |b_{\Omega_r}|\,.$$

On se souvient que la frontière Γ_r est une sous-variété $C^{1,1}$ si et seulement si b_{Ω_r} est $C^{1,1}$ dans un voisinage de Γ_r.

On introduit la *fonction objectif* suivante au sens des *moindres carrés*

$$J_0(\Omega_r) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n d_{\Gamma_r}(x_i)^2 \tag{5.32}$$

que l'on cheche à minimiser par rapport à une famille de domaines Ω_r de classe $C^{1,1}$ à préciser. Elle peut se réécrire en fonction de b_{Ω_r} qui possède de bonnes propriétés de différentiabilité dans un voisinage de Γ_r

$$J_0(\Omega_r) = \sum_{i=1}^{n} b_{\Omega_r}(x_i)^2.$$

Cette fonction remplacerait la fonction (5.7) de S. Osher et R. Fedkiw [36]. Son avantage est que sa différentielle $dJ_0(\Omega_r; V)$ ne contient pas la courbure moyenne à évaluer sur la frontière Γ_r. En effet, si les x_i sont dans le voisinage de Γ_r où b_{Ω_r} est $C^{1,1}$,

$$dJ_0(\Omega_r; V) = \sum_{i=1}^{n} 2\,(p_{\Gamma_r}(x_i) - x_i) \cdot V(p_{\Gamma_r}(x_i))$$

et, sinon, on aurait quand même l'expression suivante de la semi-différentielle

$$dJ_0(\Omega_r; V) = \sum_{i=1}^{n} 2 \inf_{p_i \in \Pi_{\Gamma_r}(x_i)} (p_i - x_i) \cdot V(p_i),$$

où $\Pi_{\Gamma_r}(x_i)$ est l'ensemble des projections de x_i sur Γ_r.

Supposons que le premier scan (avant la chirurgie) ait donné un *ensemble de référence* Ω_r de classe $C^{1,1}$. Soit $S' = \{x'_i : 1 \leq i \leq n'\}$ l'*ensemble des points générés par le second scan* (après chirurgie). Pour ce second scan, on cherche à identifier une *déformation* de la surface de référence plutôt qu'une nouvelle surface. On introduit la *fonction objectif* suivante

$$\inf_{F \in \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{D})} J_\alpha(F), \quad J_\alpha(F) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n'} b_{F(\Omega_r)}(x'_i)^2 + \alpha\, d(I, F),$$

pour un scalaire $\alpha > 0$ et une famille $(\mathcal{F}(D), d)$ de difféomorphismes assez réguliers $F : D \to D$, où D est un fourre-tout assez grand qui contient toutes les images $F(\Omega_r)$ et d est une métrique sur $\mathcal{F}(D)$. Ceci permet de comparer les deux scans et de faciliter les calculs de changement de volume, courbure, ou autres caractéristiques utiles au suivi clinique.

Ces nouvelles fonctions objectif feront l'objet de travaux ultérieurs et de l'intégration des surfaces à facette pour fins de calcul comme dans J. C. Barolet [6] et M. C. Delfour [15].

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, London, 1975.

[2] R. Azencott, *Random and deterministic deformations applied to shape recognition*, Cortona workshop, Italy 1994.

[3] R. Azencott, *Geodesics in diffeomorphisms groups : Deformation distance between shapes*, Int. Conf. Stoch. Structures and Monte-Carlo Optim., Cortona, Italy, 1994.

[4] R. Azencott, R. Glowinski et A. M. Ramos, *A Controllability approach to shape identification*, Appl. Math. Lett. (8) **21** (2008), 861–865.

[5] R. Azencott, R. Glowinski et A. M. Ramos, *Diffeomorphic matching and dynamic deformable surfaces in 3D medical imaging*, Comput. Methods Appl. Math. **10** (2010, No, 3, 235–274.

[6] J. C. Barolet, *Représentation et détection des images et des surfaces déformables*, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, 2011.

[7] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2eme éd., Presses Universitaire de France, Paris, 1992.

[8] R. Caccioppoli, *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **12** (1952), 3–11 ; 137–146.

[9] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **36** (1954), 191–213

[10] E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio ad* r *dimensioni*, Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.

[11] E. De Giorgi, *Frontiere orientate di misura minima*, Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa (1960–1961), Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1961.

[12] E. De Giorgi, *Complementi alla teoria della misura* $(n-1)$*-dimensionale in uno spazio* n*-dimensionale*, Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa (1960–61), Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1961.

[13] M. Dehaes, *Représentations analytiques des objets géométriques et contours actifs en imagerie*, Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, 2004.

[14] M. Dehaes et M. C. Delfour, *Shape and geometric methods in image processing*, in "Free and moving boundaries analysis, simulation, and control," R. Glowinski and J.-P. Zolésio, eds, 293–308, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Volume 252, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[15] M. C. Delfour, *Representation of hypersurfaces and minimal smoothness of the midsurface in the theory of shells*, Control Cybernet. (4) **37** (2008), 879–911.

[16] M. C. Delfour, *Modeling and control of asymptotic shells*, in ÒControl and Estimation of Distributed Parameter Systems," M. K. Kasper, F. Kappel, and K. Kunish, eds, pp. 105–120, International Series of Numerical Mathematics, Vol 143, Birkhäuser Verlag, Berlin 2003.

[17] M. C. Delfour, *Intrinsic differential geometric methods in the asymptotic analysis of linear thin shells*, in "Boundaries, interfaces, and transitions" (Banff, AB, 1995), 19–90, CRM Proc. Lecture Notes, Vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[18] M. C. Delfour, *Characterization of the space of the membrane shell equation for arbitrary $C^{1,1}$ midsurfaces*, Control Cybernet. (3) **28** (1999), 481–501..

[19] M. C. Delfour, *Representations, composition, and decomposition of $C^{1,1}$-hypersurfaces*, in "Optimal control of coupled systems of partial differential equations," 85–104, Internat. Ser. Numer. Math., 158, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[20] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Shapes and geometries : analysis, differential calculus and optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA (2001), première édition.

[21] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Shapes and geometries : metrics analysis, differential calculus, and optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA 2011, deuxième édition.

[22] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Oriented distance function and its evolution equation for initial sets with thin boundary*, SIAM J. on Control and Optim. **42**, No. 6 (2004), 2286–2304.

[23] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Shape identification via metrics constructed from the oriented distance function*, Control and cybernetics **34**, No. 1 (2005), 137–164.

[24] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *On a variational equation for thin shells*, in "Control and optimal design of distributed parameter systems," J. Lagnese, D. L. Russell, L. White, eds., 25–37 IMA Vol. Math. Appl., 70, Springer-Verlag, New York, 1995.

[25] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *A boundary differential equation for thin shells*, J. Differential Equations (2) **119** (1995), 426–449.

[26] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Tangential differential equations for dynamical thin/shallow shells*, J. Differential Equations **128** (1996), 125–167.

[27] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Differential equations for linear shells : comparison between intrinsic and classical models*, in "Advances in mathematical sciences : CRM's 25 years" (Montreal, PQ, 1994), 41–124, CRM Proc. Lecture Notes, 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[28] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Convergence to the asymptotic model for linear thin shells*, in "Optimization methods in partial differential equations" (South Hadley, MA, 1996), pp. 75–93, Contemp. Math., 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[29] M. C. Delfour et J.-P. Zolésio, *Convergence of the linear $P(1,1)$ and $P(2_n,1)$ thin shells to asymptotic shells* in "Plates and shells" (Québec, QC, 1996), pp. 125–158, CRM Proc. Lecture Notes, 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[30] L. C. Evans et R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[31] J. Lafontaine, *Introduction à la géométrie riemannienne*, Collection Grenoble Sciences, 2010.

[32] A. M. Micheletti, *Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **26** (1972), 683–694.

[33] P. Miron, J. Vétel, A. Garon, M. Delfour et M. El Hassan, *Anisotropic mesh adaptation on Lagrangian Coherent Structures*, J. of Computational Physics **231** (2012), 6419–6437.

[34] M. Nagumo, *Über die loge der integralkurven gewöhnlicher differentialgleichungen*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **24** (1942), 551-559.

[35] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris and Academia, Prague, 1967.

[36] S. Osher et R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Applied Mathematical Sciences, Volume 153, Springer-Verlag, New York, 2002.

[37] J. A. F. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.

[38] J.-B. Poly et G. Raby, *Fonction distance et singularités*, Bull. Sci. Math. (2) **108** (1984), 187–195.

[39] A. Trouvé, *Action de groupe de dimension infinie et reconnaissance de formes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (8) **321** (1995), 1031–1034.

[40] A. Trouvé, *An approach of pattern recognition through infinite dimensional group actions*, Rapport de recherche du LMENS, France, 1995.

[41] A. Trouvé, *An infinite dimensional group approach for physics based models in pattern recognition*, November 6, 1995 (texte soumis aux *Annals of Global Analysis and Geometry*)

[42] A. Trouvé, *Diffeomorphisms groups and pattern matching in image analysis*, Int. J. Comput. Vis. (3) **28** (1998), 213–221.

[43] Vo-Khac Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles, Tomes* I *et* II, Librairie Vuibert, Paris, 1972.

[44] H. K. Zhao, S. Osher, B. Merriman, M. J. Kang, *Implicit and non-parametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level-set method*, Computer Vision and Image Understanding **80** (2000), 295–314.

[45] H. K. Zhao, S. Osher, R. Fedkiw, *Fast surface reconstruction using the level-set method*, in "Proceedings of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision 2001," pp. 194–201, IEEE, 2002.

[46] H. K. Zhao, *A fast sweeping methos for eikonal equations*, Mathematics of Computation **74**, No. 250 (2004), 603–627.