Université de Montréal

Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería

par

Sara PASCUAL

Département de didactique

Faculté de sciences de l´éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Ph. D.
en didactique

Décembre, 2012

Université de Montréal
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée :

Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería

Présentée par :
Sara PASCUAL

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Marcel THOUIN, président-rapporteur
France CARON, directeur de recherche
Philippe RICHARD, membre du jury
Fernando HITT, examinateur externe
François BOWEN, représentant du doyen de la FES

RESUMEN

La introducción de conceptos unificadores en la enseñanza de las matemáticas privilegia comúnmente el enfoque axiomático. No es sorprendente que la utilización de este concepto así definido, opera a menudo sobre la algoritmización de tareas para aumentar la eficacia de las resoluciones y promover la transparencia del nuevo objeto enseñado (Chevallard, 1991). Esta respuesta clásica hace sin embargo olvidar el rol unificador y no favorece la utilización de su poder. A fin de mejorar el aprendizaje de un concepto unificador, este trabajo de tesis estudia la pertinencia de una secuencia didáctica en la formación de ingenieros sobre un concepto unificador del álgebra lineal: la transformación lineal (TL).

La noción de unificación y la pregunta del sentido lineal son tratadas bajo el ángulo de la adquisición de competencias en situación de resolución de problemas. La secuencia de los problemas a resolver está centrada en el proceso de construir un concepto abstracto (la TL) sobre un dominio ya matematizado, con el fin de retener el aspecto unificador de la noción formal (Astolfi y Drouin, 1992).

A partir de resultados de trabajos de didácticas de las ciencias y de las matemáticas (Dupin 1995; Sfard 1991), elaboramos situaciones didácticas en base a elementos de modelización articulando las dos formas de concebir el objeto: “procedural” y “estructural” que permitan encontrar un medio de resolución más seguro, más económico y reutilizable. En particular, tratamos de hacer interactuar las aplicaciones de la noción situándonos en diversos dominios matemáticos; aritmético, geométrico, algebraico y analítico. La secuencia pone atención al desarrollo de conexiones entre diferentes marcos, y entre las representaciones de la TL en los distintos registros, inspirándose en particular del desarrollo histórico de la noción. Por sí misma, la secuencia didáctica, se encarga de mantener un equilibrio entre el lado aplicable de las tareas a su dominio práctico profesional y el lado teórico para ayudar a la estructuración de los conceptos.

El estudio concierne a estudiantes chilenos en un primer curso de álgebra lineal. Valoramos un análisis *a priori* bien detallado para reforzar la secuencia y al mismo tiempo preparar el análisis de los datos. Con el análisis de las respuestas al cuestionario de entrada, de las producciones de los equipos y de los comentarios recibidos en entrevista, pudimos identificar las competencias matemáticas y los niveles de explicitación (Caron, 2004) en la utilización de la TL. Los resultados obtenidos muestran la emergencia del papel unificador de la TL, incluso en aquellos cuyas costumbres en resolución de problemas matemáticos están marcadas por los enfoques procedurales de aprendizaje y de enseñanza.

La secuencia didáctica ha mostrado ser eficaz para el desarrollo progresivo de la herramienta lineal (TL) con sentido y propiedades propias: la TL aparece como un medio económico para resolver problemas fuera del álgebra lineal, lo que parece otorgar a los estudiantes una abstracción de las propiedades subyacentes. Por otra parte, observamos que los procesos atados por la enseñanza a ciertos conceptos pueden actuar como obstáculos a la unificación. Eso puede hacer volver a los estudiantes al punto de entrada, y el papel de la TL resulta más bien "revelar" un conocimiento parcial que conducir el proceso de la solución.

Palabras claves: secuencia didáctica, concepto unificador, transformación lineal, procedural, estructural, modelización[1], aplicación, cambio de marco.

[1] La palabra modelización ha sido aceptada por la Real Academia de la Lengua Española y será incluida en los diccionarios posteriormente.

RÉSUMÉ

L'introduction aux concepts unificateurs dans l'enseignement des mathématiques privilégie typiquement l'approche axiomatique. Il n'est pas surprenant de constater qu'une telle approche tend à une algorithmisation des tâches pour augmenter l'efficacité de leur résolution et favoriser la transparence du nouveau concept enseigné (Chevallard, 1991). Cette réponse classique fait néanmoins oublier le rôle unificateur du concept et n'encourage pas à l'utilisation de sa puissance. Afin d'améliorer l'apprentissage d'un concept unificateur, ce travail de thèse étudie la pertinence d'une séquence didactique dans la formation d'ingénieurs centrée sur un concept unificateur de l'algèbre linéaire: la transformation linéaire (TL).

La notion d'unification et la question du sens de la linéarité sont abordées à travers l'acquisition de compétences en résolution de problèmes. La séquence des problèmes à résoudre a pour objet le processus de construction d'un concept abstrait (la TL) sur un domaine déjà mathématisé, avec l'intention de dégager l'aspect unificateur de la notion formelle (Astolfi y Drouin, 1992).

À partir de résultats de travaux en didactique des sciences et des mathématiques (Dupin 1995; Sfard 1991), nous élaborons des situations didactiques sur la base d'éléments de modélisation, en cherchant à articuler deux façons de concevoir l'objet (« procédurale » et « structurale ») de façon à trouver une stratégie de résolution plus sûre, plus économique et réutilisable. En particulier, nous avons cherché à situer la notion dans différents domaines mathématiques où elle est applicable : arithmétique, géométrique, algébrique et analytique. La séquence vise à développer des liens entre différents cadres mathématiques, et entre différentes représentations de la TL dans les différents registres mathématiques, en s'inspirant notamment dans cette démarche du développement historique de la notion. De plus, la séquence didactique vise à maintenir un équilibre entre le côté applicable des tâches à la pratique professionnelle visée, et le côté théorique propice à la structuration des concepts.

L’étude a été conduite avec des étudiants chiliens en formation au génie, dans le premier cours d’algèbre linéaire. Nous avons mené une analyse *a priori* détaillée afin de renforcer la robustesse de la séquence et de préparer à l’analyse des données. Par l’analyse des réponses au questionnaire d’entrée, des productions des équipes et des commentaires reçus en entrevus, nous avons pu identifier les compétences mathématiques et les niveaux d’explicitation (Caron, 2004) mis à contribution dans l’utilisation de la TL. Les résultats obtenus montrent l’émergence du rôle unificateur de la TL, même chez ceux dont les habitudes en résolution de problèmes mathématiques sont marquées par une orientation procédurale, tant dans l’apprentissage que dans l’enseignement.

La séquence didactique a montré son efficacité pour la construction progressive chez les étudiants de la notion de transformation linéaire (TL), avec le sens et les propriétés qui lui sont propres : la TL apparaît ainsi comme un moyen économique de résoudre des problèmes extérieurs à l’algèbre linéaire, ce qui permet aux étudiants d’en abstraire les propriétés sous-jacentes. Par ailleurs, nous avons pu observer que certains concepts enseignés auparavant peuvent agir comme obstacles à l’unification visée. Cela peut ramener les étudiants à leur point de départ, et le rôle de la TL se résume dans ces conditions à révéler des connaissances partielles, plutôt qu’à guider la résolution.

Mots-clés: séquence didactique, concept unificateur, transformation linéaire, procédural, structural, modélisation, application, changement de cadre.

ABSTRACT

Introduction to unifying concepts in the teaching of mathematics typically adopts the axiomatic approach. It is not surprising that under these conditions, tasks tend to become more algorithmic in order to help students' performance and favor apparent transparency of the new concept (Chevallard, 1991). This classical response makes forget the unifying role of the concept and does not encourage its powerful use. In order to improve the learning of a unifying concept, this thesis aimed at studying the relevance of a didactical sequence in the formal training of future engineers, centered on a unifying concept of linear algebra: the linear transformation (LT).

The idea of unification and the question of meaning are addressed through the development of problem solving competencies. The sequence of problems to solve is aimed at constructing an abstract concept (the LT) on a domain which is already mathematized, with the intent of abstracting the unifying aspect of the formal notion (Astolfi y Drouin, 1992).

Building on the work of Dupin (1995) and Sfard (1991), in mathematics and science education, we have designed didactical situations with elements of modelling, by articulating two ways of conceiving the notion (« procedural » and « structural ») in order to find a safest, more economical and reusable solving strategy. In particular, we have situated the notion in various mathematical domains where it is applicable: arithmetics, geometry, algebra and analysis. The sequence aims at developing connections between different mathematical frameworks, and between various representations of the LT in the different mathematical registers, with the historical development of the notion as a source of inspiration. Moreover, the didactical sequence aims at achieving a balance between the practical aspect of the tasks in the foreseen professional practice and the theoretical aspect required to structure the concepts.

The study was conducted in Chile, with engineering students in the first linear algebra course of the program. We had completed a detailed *a priori* analysis of the sequence in order to reinforce its robustness and prepare for data analysis. With the analysis of answers to the entry questionnaire, team productions to the tasks, and comments received in students interview, we were able to identify the mathematical competencies and the levels of communication (Caron, 2004) put at work in their use of the LT. Results show emergence of the unifying role of the LT, even with students whose problem solving habits in mathematics have been marked by a procedural influence in the teaching and the learning.

The didactical sequence showed its effectiveness in the progressive construction by students of the linear transformation concept (LT), with its specific meaning and properties: the TL has appeared as an economical means of solving problems outside of linear algebra, which helped students in abstracting its underlying properties. In contrast, we have also observed that some previously taught concepts could act as obstacles to the desired unification. In these cases, students could revert to their old habits, and their use of the LT would rather reveal their partial understanding than help guide the resolution.

Keywords: didactical sequence, unifying concept, linear transformation, procedural, structural, modelling, application, change of a system of representations.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

En memoria de mi madre…. *por haberme apoyado en todo momento, por sus valores, sus sufrimientos, por la preocupación constante que me influenció siempre, pero más que nada, por su infinita bondad y amor…*

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis no habría sido posible sin la confianza y generosidad de Madame France Caron, quien acepto orientar este proyecto y me ayudó tanto en el trabajo didáctico como en los momentos cuando más la necesitaba. Su apoyo constante y sus estímulos muchas veces renovados junto a una disponibilidad sin falla, permitieron a este informe elaborarse en el curso del tiempo.

Mis más sinceros agradecimientos también van para el Señor Fernando Hitt profesor de la universidad UQAM (Université du Québec à Montréal) por haber aceptado ser examinador externo de mi tesis. La mirada crítica, justa e informada sobre mi trabajo pudo solo animarme todavía más, a estar comprometida en mi búsqueda en didáctica de las matemáticas. Agradezco igualmente al Profesor Philippe R. Richard de haber aceptado ser examinador y miembro del jurado de este trabajo, así como para la atención totalmente particular que él me concedió.

Soy muy sensible al honor que me hizo el Profesor Marcel Thouin por haber aceptado ser examinador y presidente del jurado, le agradezco mucho por eso.

Por otra parte, quiero agradecer muy particularmente a Monsieur Michel Laurier, Doyen de la Faculté des sciences de l´éducation y responsable del grupo de la Cohorte hispanophone en ese momento, para su disponibilidad, sus estímulos y apoyo material quien siempre estuvo disponible a resolver situaciones particulares. El mismo agradecimiento para Nicole Galboury quien supo resolver prontamente gestiones administrativas necesarias.

También doy las gracias a la Universidad del Bío Bío y al Ministerio de Educación de Chile el apoyo dado a través del Programa MECE Educación Superior2.

Mi mayor agradecimiento de todo corazón a los estudiantes participantes en la investigación por su buena acogida y su implicación, particularmente, al profesor del curso por su comprensión y apertura al proyecto.

Cariñosamente agradezco muy profundamente a mis hermanas y también amigos que me acompañaron y supieron manifestarme su interés para mi trabajo de tesis, preguntándome regularmente sobre el estado de avance. Todos ellos estaban ahí, a su modo, para animarme a seguir. Les exprimo todo mi reconocimiento a mis compañeras de la cohorte en especial a mi amiga Lupe que supo ayudarme cuando eso era necesario.

Para terminar agradezco a mi familia con todo mi amor, por la paciencia sostenida en estos largos momentos de ausencia.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación fue motivada por nuestra propia experiencia académica que se refiere a la manera formal y general de abordar la enseñanza del álgebra lineal (primera estructura algebraica axiomatizada que encuentran los estudiantes de ingeniería) y a la rápida reducción del nivel de exigencia respecto a la resolución de ejercicios puramente algorítmicos. En esta enseñanza, nuestra atención había sido atraída por las dificultades encontradas por los estudiantes en la resolución de problemas que requerían un nivel de abstracción en la puesta en relación de las diferentes representaciones de los conceptos en un lenguaje formal, en específico de la transformación lineal (TL).

Diferentes constataciones tienen en común mostrar que la enseñanza de esta teoría no se introduce claramente a los ojos de los estudiantes en términos del carácter funcional de los conceptos respecto de sus conocimientos matemáticos. Los estudiantes no alcanzan a comprender la naturaleza unificadora y generalizadora de algunos conceptos lineales y la mayoría se interrogan por la utilidad que estos conceptos tienen en sus cursos de formación. ¿Para qué sirve esto? ¿Por qué tantos términos y nociones nuevas? El curso del álgebra lineal es visto como una especie de discontinuidad respecto al desarrollo de su formación matemática por lo que la contribución a la cohesión general no la ven con claridad. Además, muchos de los problemas lineales (que no son aplicaciones directas del curso) y que se pueden abordar con los estudiantes en este nivel de enseñanza, pueden ser resueltos en términos de ecuaciones lineales o técnicas algorítmicas que no requieren dar sentido a la naturaleza abstracta y unificadora de estos conceptos. ¿Hay un medio que permita llevar a esta teoría la utilización de estos conocimientos matemáticos avanzados? ¿De qué manera podemos motivar el aprendizaje sobre todo como una forma de unificar y generalizar diversos métodos y herramientas utilizados en diversos contextos? ¿Podemos dar mejor cuenta de la naturaleza epistemológica de estos conceptos? Estas cuestiones deberían ser explícitas en la enseñanza, si no queremos que la incomprensión persista.

Es por eso que hemos decidido estudiar una nueva manera de enseñar el concepto formal de la TL, desarrollando precisamente una secuencia didáctica de tareas que hagan emerger el rol unificador de esta noción en interacción con competencias específicas previas, el cual pueda asegurar la coherencia matemática y servir como herramienta útil en la integración e interpretación de resultados. En consecuencia hemos buscado a que este concepto se vuelva de gran importancia para los estudiantes de ingeniería, por su carácter simplificador en la resolución de diversas aplicaciones (matemáticas, física,…etc.). Este trabajo nos pareció más interesante todavía dado que la búsqueda de contextos de utilización de conceptos matemáticos avanzados representa una vía poco explotada en didáctica de las matemáticas. Incluso, si un diseño de enseñanza como el concernido aquí puede parecer esencial, la noción de concepto unificador permanece por sí mismo didácticamente poco explícito en la enseñanza.

De esta manera, hemos sido llevados a estudiar una forma de enseñar la TL inspirándonos de la Ingeniería didáctica (Artigue, 2002) para intentar proporcionar una respuesta a las preguntas de nuestra investigación (sección 2.6) en el marco de la Teoría de situaciones didácticas y su utilización para el diseño de una Secuencia didáctica. Nuestra ingeniería tiene un claro propósito de diagnóstico y su implementación trata de evaluar los efectos de las tareas de la secuencia didáctica.

Con una complejidad creciente de los problemas a resolver, la construcción de la secuencia didáctica nos parece tanto más pertinente como la necesidad de contar con herramientas intelectuales que permitan reconocer elementos de eficacia que den paso a la formulación de jerarquías, y que simplifican la solución de muchos de estos problemas. Una estrategia de enseñanza mucho más rica que la aplicación mecánica de un algoritmo, adecuada a lo que requieren los ingenieros, sería desarrollando competencias en situación de resolución de problemas que permita a los estudiantes asumir la responsabilidad de la modelización, de la exploración, de la resolución propiamente dicha y de la comprobación (Legrand, 2003). Al mismo tiempo, que permita integrar al tratamiento procedural el desarrollo de su estructura conceptual (Sfard, 1991). La secuencia didáctica trataría de facilitar las matemáticas no sólo como herramienta de cálculo, sino como herramienta unificadora, privilegiando el sentido a través de la aplicación de la TL, capaz de lograr el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonar y de enfrentarse a situaciones nuevas.

En este trabajo de investigación intentamos determinar cómo la enseñanza de los conceptos unificadores era tomada en cuenta en los trabajos didácticos y cómo se manifestaba la tensión entre el saber teórico y saber de acción en este dominio. Para eso hemos realizado una revisión crítica y detallada de algunos trabajos didácticos o epistemológicos, que conciernen en prioridad a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, donde el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la TL ocupa un lugar importante.

Esto nos ha permitido igualmente situar nuestra investigación respecto a otros trabajos relativos al álgebra lineal y de repensar el aprendizaje de la TL en función de su utilización. Esta parte de la investigación está descrita en el capítulo 1.

En vista de la formalidad de la TL en el álgebra lineal, nos ha parecido necesario estudiar la posibilidad de acceso a la concepción unificadora que nos enseña la historia, de manera de tener una fuente de inspiración para la creación de situaciones de enseñanza. Para adaptar el trabajo sobre el sentido unificador en diferentes contextos y poner de manifiesto la ejecución del procedimiento lineal. Esto nos ha conducido a un estudio de su desarrollo histórico, para el cual nos hemos apoyado sobre el trabajo de investigación de Dorier (1990). El estudio histórico de la TL nos permitió poner en evidencia que su valor como concepto unificador y generalizador fue mucho más fuerte que su potencial para resolver nuevos problemas, hecho que no fue aceptado muy fácilmente por los matemáticos. Los análisis epistemológicos también muestran que la travesía, en la génesis histórica de la forma axiomática de la noción, ha sido muy lenta, complicada y sinuosa entre las nociones primitivas y su generalización (Dorier, 1997). Esta parte de nuestra investigación está descrita en el capítulo 2 e introducimos ahí, el proceso de comprensión como un juego dialéctico entre dos formas de apropiarse del objeto de la TL: la oposición entre las comprensiones "operatoria" y "estructural" desarrollada por Sfard (1991). Integramos además la herramienta didáctica de la modelización de problemas (Dupin, 1995) para proporcionar un sentido al concepto enseñado.

En el capítulo 3 dedicado a la metodología, proponemos una secuencia didáctica diseñada y su análisis *a priori* en profundidad. A partir de este análisis hemos elaborado una matriz de competencias (Caron, 2001) cuyo objetivo nos permitió estudiar cómo la explicitación del aprendizaje de la TL era susceptible de ser puesta en juego en las diferentes tareas de la secuencia, en función particularmente de las competencias desarrolladas en la formación del concepto. Para las necesidades del diagnóstico, tuvimos que caracterizar el uso de la TL por los niveles de explicitación introducidos por Caron (2004). La secuencia didáctica es puesta en funcionamiento sobre un cierto número de tareas originales.

El análisis de los resultados de la experimentación con estudiantes de ingeniería en Chile, será objeto del capítulo 4, con un análisis *a posteriori* también bien detallado. Se complementan además el análisis e interpretación de los resultados con la información adicional proporcionada por los estudiantes a través de cuestionarios y entrevistas. Concluiremos con el capítulo 5, con una síntesis y una discusión de los resultados de esta investigación, respecto de los objetivos de la investigación y de la pertinencia en la clase del uso de una secuencia de enseñanza para conceptos unificadores, como la que proponemos en nuestro estudio.

1 PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

La enseñanza que requiere de las matemáticas avanzadas demanda un nivel superior de pensamiento matemático y de reflexión matemática con los conceptos abstractos. En particular, en un curso de álgebra lineal, en que se requiere la manipulación de ciertos conceptos formales (en un marco a menudo abstracto), nos interrogamos sobre la manera de entender y utilizar estos conceptos en la adquisición de estas competencias. Este cuestionamiento nos lleva a preguntarnos sobre la naturaleza matemática de los conceptos matemáticos más avanzados y a entender en profundidad los procesos sobre los cuales estos conceptos emergen de los vínculos con otros conceptos, teorías o aplicaciones. La comprensión de estos procesos, necesaria para proporcionar sentido a los conceptos, permite abstraer su estructura y procura advertir una manera de hacer accesible y pertinente el aspecto formal de estos conceptos. Sobre todo en estudiantes que no se encuentran en una formación para ser matemáticos.

Un estudio epistemológico sobre la construcción del concepto transformación lineal (TL) puede proporcionarnos alguna pista sobre una posibilidad de comprensión del objeto: sobre su sentido y utilización de manera más eficaz para los estudiantes. Además de posibles fuentes de dificultades de aprendizaje, el análisis epistemológico nos podría revelar el rol de la TL en la evolución de los problemas a propósito de la linealidad. La búsqueda de una vía de acceso, para comprender lo interesante y relevante que puede ser su abstracción, nos conducirá hacia el diseño de tareas, para desarrollar la modelización de situaciones sutilmente complejas con la TL tanto del proceso como del producto de la misma noción. Inscribimos este estudio en un contexto de aprendizaje en un nivel de enseñanza universitaria para estudiantes de ingeniería en Chile (Valparaíso).

1.1 La formación matemática de la ingeniería en Chile

En general, en la formación de ingenieros en Chile[2]se han distinguido dos "escuelas", una, conforme al modelo francés que enfatiza la formación previa en ciencias básicas y la ingeniería orientada a desarrollar competencias de pensamiento racional abstracto, y la otra, conforme al modelo alemán, que une la enseñanza tecnológica a la entrega de conocimientos científicos. La Universidad de Chile siguió el primer modelo mientras que la ex Universidad Técnica del Estado[3] y la Universidad Federico Santa María se orientaron por el segundo. Con el tiempo, el modelo francés acabó imponiéndose en Chile y actualmente casi todas las universidades tradicionales lo siguen, aunque se ha perdido mucho de su fundamento conceptual original.

De manera recurrente, cualquiera sea la universidad, en la formación académica de los ingenieros, los profesores atribuyen a la formación previa la falta de creatividad, de racionalidad y de apertura a la interacción observada entre sus estudiantes. En particular, en las asignaturas matemáticas que valorizan un sistema teórico para el razonamiento matemático, nos preguntamos sobre el nivel de abstracción de los estudiantes. El sentido de lo que significa trabajar con una teoría y escoger lo necesario para llegar a una solución de un problema suele hacerse en una perspectiva técnica: una serie de formulismos, que los estudiantes pueden manejar aún sin entender su significado. A menudo, la resolución de problemas matemáticos en base a fórmulas agrada mucho en la enseñanza de las matemáticas, permite encontrar rápidamente la comodidad de un universo completamente matematizado, más riguroso, menos cuestionable y más fácil de enseñar (Legrand, 2003). Lo más valorizado en esta enseñanza, es que el estudiante comprenda bien las fórmulas sobre las cuales tendrá que resolver problemas a menudo muy matematizados sin tener que preocuparse de la realidad inicial. Sin embargo, como postura matemática, el ingeniero debería distinguir al menos dos cualidades: una, la validez de un modelo (representar lo

---

[2] www.aulados.net/Ciencia y Sociedad 2009.
[3] Actualmente Universidad de Santiago de Chile (USACH).

mejor posible la realidad del fenómeno observado) y otra, la simplicidad matemática (de entre todas los métodos disponibles, escoger el más eficaz) para hacer más eficiente una interpretación plausible del mundo real (Dupin, 1995).

Esta situación invita a la realización de estudios destinados al tratamiento de conceptos de matemáticas que se refiera tanto al pensamiento teórico como al pensamiento práctico de modo que se pueda a la vez calcular y comprender por qué funciona el concepto. En particular, parece todavía más necesario en programas de formación que recurren a las matemáticas más avanzadas y que preparan a su utilización para resolver problemas prácticos. No puede ser una cuestión de simplificar el conocimiento para mantener la elegancia de la fórmula (Legrand, 2003). Los conocimientos así enseñados pasarían a ser de escasa utilidad para la adquisición de destrezas del pensamiento lógico y para prever el comportamiento futuro por una complejidad creciente de problemas a resolver. Corriendo incluso, el riesgo de crear incomprensiones y paradojas insuperables sobre todo, para un estudiante de ingeniería que pretende efectivamente hacer el vínculo entre modelo y realidad.

Si se trata de producir conocimientos matemáticos, la enseñanza puede tener como objetivos dos tipos de pensamientos: uno, es *el pensamiento teórico que se refiere a significados de conceptos,* y el otro, es *el pensamiento práctico que se refiere a la significancia de acciones* (Sierpinska, 1994). A priori, la ingeniería tal como otras disciplinas profesionales, tiene un doble origen en estos dos tipos de saberes. El primero, la construcción de saberes de acción cuyo aporte es fundamental en la formación de los ingenieros, son innegablemente útiles para la sociedad desde una perspectiva esencialmente tecnológica. Tales saberes, están plasmados en los principales inventos de nuestra civilización, y representan la fuente de la creatividad que une imaginación, intuición y sentido práctico. En el segundo, se encuentra la ciencia, para explicar el “funcionamiento” del mundo físico y la posibilidad de aplicar prácticamente el conocimiento teórico. Por consiguiente, la construcción de nuevos saberes teóricos respondería a una búsqueda de nuevos conocimientos que conducirían a su vez al desarrollo de nuevos saberes de acción (Gagnepain y André, 1996).

Esta visión podrá servir de referencia a opiniones antagonistas en los debates sobre las finalidades que hay que proporcionar a la enseñanza de las matemáticas en la formación de ingenieros. La posición de la enseñanza merece que se detenga sobre la necesidad mutua entre estos dos saberes, con ello, se podría vigilar el nivel del conocimiento matemático en servicio del potencial individual, la creatividad y las habilidades técnicas de los futuros ingenieros.

1.2 La enseñanza del álgebra lineal

Una gran mayoría de los programas de formación que recurren a matemáticas puras y aplicadas, contemplan la enseñanza del álgebra lineal en un primer año de universidad. El álgebra lineal es una de las asignaturas principales en la formación de ingenieros. Primera teoría formal y abstracta que exige a los estudiantes un análisis reflexivo de los conceptos y del funcionamiento de las propiedades. Los elementos y los objetos matemáticos adquiridos por los estudiantes a lo largo de un trayecto de aprendizaje deberían unificarse en esta teoría, con el fin de proceder a nuevas interpretaciones y generalizaciones dentro de un proceso de abstracción. También es reconocido que la enseñanza del álgebra lineal es difícil cualquiera sea la orientación que se le quiera proporcionar, a causa de la gran cantidad de conceptos y objetos formales propios de las teorías axiomáticas (espacios vectoriales, transformaciones lineales,… etc.). Está vista como una teoría matemática que no da lugar a imprecisiones ni errores, desprendida de la toma en cuenta de elementos externos y que en sí misma, requiere de conceptos en el lenguaje formal. Para cualquier matemático, que resultan muy simples, son conceptos claramente interrelacionados. Pero para un estudiante, esta presentación deductiva que refleja su red de relaciones intrínsecas, resultan ser cambios permanentes de lenguajes sin vínculos evidentes de unificación:

> *"[...] there is a constant shuffing back and forth between the language of the general theory (vector spaces, subspaces, dimension, operators, kernel, etc.), the language of the more specific theory of* $\mathbf{R}^n$ *(n-tuples, matrices, rank, solutions of system of equations, etc.), and finally the geometric language of* $\mathbf{R}^2$ *and* $\mathbf{R}^3$ *(orthogonality, etc.). These three languages or levels of description co-exist, are often interchangeable but certainly not equivalent"*
>
> (Hillel y Sierpinska, 1994)

La epistemología nos muestra que los mismos conceptos fueron obtenidos y utilizados sin teorías axiomáticas previas muy sofisticadas. Confirma además, que el formalismo es esencial en esta teoría. Pero, más allá del carácter formal, es necesario comprender el carácter unificador y generalizador que los conceptos de esta teoría conllevan de modo complementario (Dorier, 2000; Robert A., 1986; Robinet J., 1984), para conferirles una utilidad. En general, las relaciones de los estudiantes con el álgebra lineal, en una perspectiva de vincular lo que se está aprendiendo y de comprender el interés que esto representa, parecen ser difusas y desconectadas de sus competencias anteriores. Al mismo tiempo y de un modo recurrente, los profesores reconocen las dificultades de tal enseñanza. La mayor dificultad sería que cualquier problema lineal al alcance de un estudiante universitario de primer año, se puede resolver sin utilizar la teoría axiomática, *y la ganancia en términos de unificación y de generalización que se hace presente por el uso de la teoría formal, es sólo visible para el experto* (Dorier, 2002).

La enseñanza del álgebra lineal resulta ser una dicotomía muy neta entre conceptos formales y tareas de tipo algorítmicas, esencialmente en el marco de matrices (Dorier, 2000). Se advierte el privilegio de los profesores por ciertas tareas repetitivas con técnicas algebraicas específicas y sin gran interés cognitivo para los estudiantes. En otros términos, en vista que el enfoque de enseñanza basado en una perspectiva de construcción de conceptos requiere tiempo y experiencia disponible, para aplicar el saber que se enseña, muchas veces entonces se simplifica. Pero, una reducción rápida del proceso abstracto no puede hacer la economía al conocimiento para que los estudiantes triunfen mejor: reduciendo la utilidad de la matemática a una utilidad escolar que tiene poco que ver con la utilidad profesional. En particular, esto puede estar relacionado con lo que expresa Chevallard (1991) cuando nos dice que, *un enfoque asociado a técnicas algorítmicas es la respuesta clásica para evitar la dificultad conceptual y disminuir así el aspecto de novedad del objeto de enseñanza.*

Históricamente, el uso de los conceptos del álgebra lineal no fue tanto porque permitía resolver nuevos problemas, sino porque era sobre todo, una forma de unificar y generalizar los diferentes métodos y herramientas utilizadas en diferentes contextos (debido al rápido aumento de nuevos resultados matemáticos). En un artículo sobre el análisis histórico Dorier (2000) muestra la complejidad epistemológica vinculada a la adopción de la teoría axiomática de los espacios vectoriales y afirma que:

> *"Pour englober des situations aussi variées sous une même théorie, il est nécessaire d'atteindre un degré d'abstraction qui ne peut s'exprimer qu'en des termes formels où les objets ne sont définis qu'en fonction d'un petit nombre de propriétés communes, les dépouillant de leurs caractères spécifiques pour ne garder que ce qui les réunit, leurs propriétés linéaires précisément"*
>
> (Dorier, 2000)

Luego Dorier pone el acento y la preocupación sobre la dificultad didáctica de *¿cómo darse cuenta de esta dimensión epistemológica del álgebra lineal en su enseñanza?* que él llama los caracteres unificador, generalizador, simplificador y formalizador de esta teoría. En seguida él agrega que la simplificación es un efecto diferido que supone un buen conocimiento de la teoría. El formalismo es, por su parte, intrínseco a la teoría misma y aparece como una condición necesaria de los aspectos unificadores y generalizadores.

También es importante hacer notar que en la historia del álgebra lineal algunos conceptos aparecen externos al álgebra lineal, pero cuyas reglas de funcionamiento obedecen a puestas en juego ante todo matemáticas. Por ejemplo, el vector aparece esencialmente en electromagnetismo con las fórmulas de Maxwell; a través de las proyecciones y las coordenadas de los ejes permite los cálculos sobre magnitudes. Asimismo, la transformación lineal aparece en el contexto geométrico (como un cambio de coordenadas en el espacio euclideano $\mathbf{R}^3$) con la construcción sistemática de invariantes lineales de situaciones lineales y no lineales. Por otro lado, según las recomendaciones del LACSG[4], el primer curso de álgebra lineal debería estar orientado hacia el álgebra matricial donde los estudiantes tendrían que administrar o manipular vectores y matrices desde el comienzo del curso, antes de haberlas expresado en forma concreta como entidades conceptuales (Carlson *et al.*, 1994). Además, según las recomendaciones, las tareas donde el álgebra lineal puede ser utilizada para modelizar situaciones matemáticas en un marco externo (geometría, funciones, físico,…) son globalmente menos numerosas en la enseñanza (Dorier, 2000). De esta manera, la forma aislada de los conocimientos de toda aplicación (de la división disciplinaria), pero también los efectos inevitables de la transposición didáctica con la segmentación de los saberes ha llevado progresivamente a un paisaje accidentado, donde la enseñanza del álgebra lineal no parece contribuir a los ojos de los estudiantes el carácter funcional de los conocimientos matemáticos.

La transposición didáctica en la enseñanza del álgebra lineal para ingenieros en Chile (Valparaíso) no escapa a este fenómeno. Ella favorece los métodos del álgebra de matrices y las formas clásicas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales en que se plantean preguntas que no requieren mucho pensamiento teórico ni tampoco reflexión, sino más bien, son preguntas clásicas para las cuales los estudiantes ya saben cómo proceder. A menudo, la enseñanza de estos conceptos formales es más bien convencional sin vínculos evidentes entre los procesos de utilización de los métodos matemáticos desarrollados por otras nociones. Muchos de los problemas a resolver, se reducen a sistemas de ecuaciones lineales y sus puestas en ejecución se vinculan directamente con las técnicas matriciales y determinantes.

---

[4] LACSG: The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra (Carlson et al, 1994).

En esta perspectiva de un desarrollo de enseñanza del álgebra lineal, dos enfoques, entre otros, más o menos dominantes se suelen distinguir en la enseñanza del álgebra lineal. Uno, el que adopta la escuela clásica centrado en la enseñanza de contendidos formales de espacios vectoriales (Dorier et al., 2000), y el otro, el que propone un enfoque más analítico basado en el estudio de espacios isomorfos a $\mathbf{R}^n$ (Carlson et al., 1994; Uhlig, F, 2002a y 2002b). Esta dualidad sufre de algunos matices y la mayoría de los problemas toman un poco de los dos tipos. Sin embargo, habría que velar que todo se armonice y que ambas gestiones se complementen tanto del lado aplicado como el teórico como lo sugiere Sfard (1991).

1.2.1 Un enfoque basado en un estudio formal

Esta visión está muy presente debido a que una gran parte de los conceptos son presentados de manera axiomática con definiciones formales y generales y con objetos propios del álgebra lineal, que en muchos casos no están en conexión directa con los conocimientos anteriores de los estudiantes. La enseñanza del álgebra lineal que se espera es aquella de la "técnica-objetos" y las dificultades que se producen son ligadas a la utilización del formalismo del cual se sabe que los estudiantes tienen muchos problemas en adaptarlo sobre todo, frente a la ausencia de un cuadro de referencia más concreto (Robert y Robinet, 1989; Dorier *et al.*, 1997). Como algunos estudiantes principiantes aún no se interrogan sobre la economía de pensamiento que representan los axiomas de espacio vectorial, simplemente no ven el rol de este enfoque axiomático. De esto, encontramos que la dificultad que hay aquí es la de *proporcionar un aspecto funcional al formalismo más cerca de lo intuitivo en relación directa con los "sentidos"* (Dorier, 1990). Siempre con el fin de comprender el rol fundamental de unificación y generalización de la teoría, se sugiere presentar el formalismo con acercamientos intuitivos de manera a favorecer en el estudiante el reconocimiento de vínculos entre el formalismo (en interacción con diferentes contextos) y sus propias intuiciones matemáticas desarrolladas de manera autónoma. Se pueden utilizar, por ejemplo, situaciones de referencia que podrán servir de modelos para la modelización de problemas de otros dominios matemáticos en el álgebra lineal (numérico, geométrico, analítico…etc.) para enseñar los métodos generales de la teoría.

En realidad, los tipos de problemas propuestos se sitúan en un cuadro completamente formal, los espacios vectoriales utilizados son generales, las preguntas son preguntas internas del álgebra lineal y el interés fuera de este contexto, en general, no es visible dentro del problema. Se proponen problemas que hacen emerger verdaderas preguntas, pero para los cuales el álgebra lineal no es más que una manera general pero no indispensable de solución. Por ejemplo, cuando el núcleo de una transformación lineal es definido, una propiedad típica consiste en relacionar la nulidad del núcleo con la inyectividad de la TL. La presentación a los estudiantes de este resultado no les ayuda a hacer un vínculo entre el núcleo y la inyectividad de la TL, más aún, cuando la inyectividad parece obedecer a un contexto funcional (que relacionan con la representación gráfica de la función) y el núcleo a un contexto más abstracto y lejano (por su definición formal y la estructura de subespacio vectorial que tiene). Muchos estudiantes tampoco ven la utilidad del concepto en aplicaciones o en la disciplina matemática, ya que, la mayoría de los problemas son resueltos utilizando técnicas conocidas de sistemas de ecuaciones lineales. Hillel y Sierpinska han identificado esta dificultad como:

> *"Applicability of the general theory: many problems given to students in a traditional lineal algebra course can often be solved by direct manipulation techniques that do not require the tools of the general theory."*

(Hillel and Sierpinska, 1994)

Habría que conferir más importancia a actividades que permitan a los estudiantes a asumir la responsabilidad de la resolución, para hacerles comprender mejor el sentido de los conceptos. Abriendo la puerta a problemas de modelización para vincular matemática y aplicación. Por lo demás, la búsqueda de vínculos entre los contenidos tradicionales y el contexto de utilización, estimularía el interés en los estudiantes y favorecería el desarrollo del pensamiento y de las herramientas lineales. Buscar condiciones de la difusión de los conocimientos unificadores en el dominio del álgebra lineal, en particular, imaginar situaciones problemas en las cuales los conceptos encuentren su función y su significado en las aplicaciones, podría equipar mejor al futuro ingeniero de la creatividad y de las habilidades técnicas superiores en beneficio de su potencial individual y en el largo plazo de la sociedad.

1.2.2 Un enfoque analítico basado en el estudio de $\mathbf{R}^n$

La introducción de los primeros conceptos (nociones de espacio vectorial y de aplicación lineal...) se hace lo más a menudo utilizando sólo los subespacios de $\mathbf{R}^n$ e incluso privilegiando las dimensiones 2 y 3 que permiten interactuar entre marcos geométrico y algebraico, en el sentido de Douady (1983). Tal presentación, otorga un punto de vista destinado a generalizar los conocimientos sobre el vector geométrico en el nuevo marco formal del vector algebraico. Una vez que se ha hecho ver que $\mathbf{R}^n$ satisface los axiomas de espacio vectorial, en una perspectiva más abstracta (por la vía del cambio de las notaciones y del lenguaje) $\mathbf{R}^n$ es denotado por V y una n-upla $(x_1,\ldots,x_n)$ es denotada por v: una n-upla puede ser el vector, o bien, una representación del vector respecto de una base. De esta manera, el vector abstracto puede ser representado por diferentes matrices. Esto lleva a que el estatus de n-upla (como prototipo de vector) se vuelva dudoso a los ojos del estudiante ya que no es solamente un vector, sino que también, la representación potencial de cualquier otro vector. Lo que podría interpretarse como una confusión entre el objeto y su representación referente al pasaje de la representación abstracta a la representación geométrica. Hillel y Sierpinska identifican esta dificultad específica como:

> *"Problems of representation: vectors and linear operators have representations which are basis dependent. To add the potential confusion about representations, two representations of a vector can both be n-uplets with no notational devices relativizing them to a basis."*
>
> (Hillel y Sierpinska, 1994)

La descripción teórica del vector: una n-upla, es interpretada por otras n-uplas dependiendo de una base dada, esta distinción geométrica (por las propiedades lineales de $\mathbf{R}^n$) parece insuficiente para las necesidades de una modelización con un concepto unificador (Dupin, 1995). La modelización no permite tomar en cuenta la existencia de situaciones conceptuales y técnicas próximas pero que, en los inicios del álgebra lineal, desempeñando un rol esencial, esta descripción geométrica está lejos aún de ser integrada en un sistema unificado.

Por otro lado, si todo espacio vectorial real de dimensión finita es isomorfo a $\mathbf{R}^n$, los vectores son identificados con las matrices columnas. De modo que numerosos problemas y ejercicios proporcionados a los estudiantes no requieren los objetos de la teoría general, estos pueden ser resueltos directamente con técnicas de la teoría de $\mathbf{R}^n$ (la mayoría de las veces reduciendo el problema a una pregunta relativa a un sistema de ecuaciones lineales). En consecuencia, esta forma de conocimiento de descripción algebraica muy asociado a $\mathbf{R}^n$, se convierte en un obstáculo al aprendizaje de la teoría general y a la aceptación de una jerarquía superior de objetos vectoriales (Hillel y Sierpinska; 1994; Harel, 1997; Dorier *et al*., 1997). Para algunos estudiantes, comprender las propiedades de $\mathbf{R}^n$ consiste en estar en medida de traducirlas en operaciones conocidas sobre las coordenadas del vector. Estas operaciones no los lleva necesariamente a comprender la estructura del concepto vectorial: las propiedades les parecen evidentes y creen que no merecen la atención que se les da.

Siguiendo esta estrategia de enseñanza, su posicionamiento, su articulación toma además formas muy diversas, su desarrollo autónomo es más o menos marcado. Es por eso, que la opinión de algunos investigadores de Francia y Canadá, no es muy favorable a una orientación de la enseñanza del álgebra lineal que prepare una "progresión suave" del tipo: $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^3 - \mathbf{R}^n -$ (álgebra lineal general), salvo que su elección sea como una ilustración muy explícita de su función.

> *"[...] Nos analyses nous conduisent à rejeter le choix de mise en texte du savoir adopté dans plusieurs manuels, qui consiste à introduire (voir déduire) les axiomes d'espace vectoriel par leur vérification sur les vecteurs géométriques. Notre hypothèse est que [...] la modélisation en termes d'espace vectoriels des vecteurs géométriques relève d'un point de vue volontairement réducteur qui permet l'unification."*
>
> (Dorier, 2000)

1.3 El caso de la transformación lineal

Algo similar ocurre con la Transformación Lineal (TL) sobre espacios $\mathbf{R}^n$. Del mismo modo como el vector geométrico es una representación del vector algebraico, el tratamiento algebraico con la TL se transpone al de la matriz asociada, siendo ésta, en este caso, una representación de la TL. A una transformación lineal T se asocia una matriz A y las notaciones $[v]_B$ y $[T]_B$ son utilizadas para designar las coordenadas de v y la matriz de T asociadas respecto de la base B. Se muestra además que, a una matriz A se le asocia la transformación matricial $T_A : X \mapsto AX$ que resulta ser una transformación lineal (por las propiedades algebraicas de matrices) llamada transformación lineal asociada a la matriz A.

En este contexto, la matriz asociada a la TL se vuelve un elemento central, en medio del tecnicismo matricial, el enfoque procesal parece dispensar la necesidad de comprender el sentido lineal del objeto que representa. Según los autores Hillel y Sierpinska (1994) la representación de los vectores y de la TL, implicaría una interpretación de un nivel de descripción a otro, o de una interpretación al interior del mismo nivel con el cambio de base. Ellos identifican, más particularmente, un cierto número de dificultades conceptuales que les parecen tienen los estudiantes para comprender la noción de representación de una transformación lineal sobre una base dada y el pasaje de una tal representación a otra, por cambio de base. Para ellos, estas dificultades atestiguan la existencia de un obstáculo de naturaleza conceptual y no pueden ser reducidos a dificultades de ejecución de un procedimiento, incluso si un tal procedimiento existe. Hay en esto, problemas de lenguaje, que se pueden analizar refiriéndose a los tres niveles introducidos por Piaget y García (1983):

> *"[...] the understanding of the operation of representing a concrete linear operator in different bases does not require such high, "trans"-level of thinking. The inter-level is sufficient. Yet, as it appears, even though students are able to think about objects as the inter-level, some have problems with thinking of language at such a level"*
>
> (Hillel and Sierpinska, 1994)

En el momento en que se pide a los estudiantes buscar el sentido de las operaciones que desarrollan con estas representaciones, ellos apenas podrían aclarar la definición de la TL para un vector específico. Por ejemplo, en la siguiente situación, si $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una transformación lineal definida en la base $B=\{v_1=(1,2), v_2=(1,-1)\}$ como $T(v_1)=v_1+v_2$ y $T(v_2)=-v_1+2v_2$, en la cual se pide determinar $T(1,0)$. En la resolución de este problema, un estudiante puede pensar que la imagen de $(1,0)$ se obtiene directamente de la representación matricial respecto a la base canónica como una de las columnas ya que la representación de T respecto de la base B requiere una comprensión formal: las columnas deben ser las coordenadas, respecto de la base B, de las imágenes de los elementos de B. Se sabe que en la representación matricial de una TL respecto de la base canónica las columnas son las imágenes de los vectores canónicos, así que tomar una columna de esta matriz como $T(1,0)$ es una respuesta muy probable. Los estudiantes suelen pensar que las columnas de la matriz que representa la TL, al pie de la letra, son las imágenes de los vectores de la base y no las representaciones de estas imágenes respecto de una base B. El proceso de interpretar la matriz asociada a una TL requiere que los estudiantes sean capaces no sólo de encontrar una representación de la matriz asociada a una TL o de un vector dado respecto a una base dada, sino también, que piensen en las propias representaciones en términos de los objetos que estos símbolos representan (Hillel y Sierpinska, 1997). Es decir, que piensen en las condiciones de aplicación bajo las cuales un vector o una matriz asociada a una TL pueden tener una representación particular preestablecida.

A veces, este concepto matricial puramente matemático se puede introducir en un contexto situado fuera de las matemáticas. Por ejemplo, en cursos de física (mecánica, resistencia de materiales…) en el que la interpretación de la aplicación de un enfoque más rico, sea adecuado no sólo para motivar a los estudiantes, sino también para proporcionar un significado coherente con el sentido de la TL.

1.3.1 El propósito matemático de la TL

Los fenómenos o problemas lineales se podrían caracterizar como sistemas que satisfacen el *principio de superposición*, es decir, que la acción que se ejerce sobre los objetos (expresados como una suma ponderada) reciben una respuesta (o tienen en respuesta un producto) del mismo tipo: una suma ponderada de las acciones individuales. Por ejemplo, la tensión en circuitos eléctricos es un fenómeno lineal donde se modeliza un sistema extra-matemático de las tensiones con el modelo matemático de la TL. Si la corriente $x_1 + x_2$ atraviesa una resistencia entonces la tensión resultante del modelo extra-matemático que se fabrica, es la suma (algebraica) de las tensiones obtenidas individualmente de cada intensidad. Así mismo, en sistemas de amortiguación, la elongación total de un resorte producida por dos cargas es la suma de las elongaciones individuales de cada carga. Además, en ambos casos el incremento en k veces la entrada (aumento en k veces la corriente o una carga con un incremento de k veces el peso) la respuesta del sistema se incrementa también k veces. En cambio, un fenómeno no lineal, pero afín, sería la suscripción a una revista o publicación científica que requiere un abono inicial (por una única vez) y luego un cargo fijo por cada publicación. Se comprueba que la suscripción sobre una suma ponderada de publicaciones por un lado, y la suma ponderada de las suscripciones individuales por otra parte, no entregan la misma respuesta.

Un modelo que sintetice estos sistemas consiste en encontrar una transformación T que sea lineal. Se trata de buscar una acción que transforme un objeto x_i en una repuesta y_i de forma que la respuesta del objeto "compuesto" expresado como una combinación lineal $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, de los objetos simples x_1, x_2, le corresponda una combinación lineal $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ de las respuestas y_1, y_2, es decir, debe conservar la naturaleza lineal del sistema, lo que se expresa por la relación: $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$.

Una tal transformación es lo que se llama *transformación lineal* (TL). Entre la diferente gama de funciones estudiadas en matemáticas, las transformaciones lineales se encuentran entre las más importantes. Son ellas las que intervienen en numerosas situaciones, entre otras, aproximación local de funciones diferenciables, ecuaciones diferenciales, representación de sistemas de ecuaciones lineales, algunos movimientos geométricos (rotaciones, simetrías, homotecias, etc.). Este tipo de transformaciones se definen formalmente entre espacios que poseen una estructura de espacio vectorial, a veces con el propósito de transferir las propiedades lineales y resolver problemas en ambientes matemáticos más prácticos. Con este enfoque, la TL puede ser considerada como una herramienta para resolver problemas, pero también por sí misma para ser estudiada como elemento de una estructura teórica, para simplificar y generalizar los problemas concretos, aparentemente muy distantes unos de otros, donde matemáticos y físicos constatan a menudo cálculos lineales formalmente idénticos.

En un sentido abstracto, una TL se puede interpretar como una acción que generaliza el proceso de *multiplicar* en un cuerpo algebraico **K**, donde la preservación de la estructura lineal de **K** se interpreta como una generalización de las propiedades *distributiva* y *conmutativa* (Burali-Forti C. et Marcolongo R., 1912). Más explícitamente, si denotamos por π_a la acción de "*multiplicar por a*" ($a \in \mathbf{K}$), es decir, $\pi_a : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ tal que $x \mapsto a \cdot x$ entonces la propiedad distributiva y conmutativa se rescriben en términos funcionales de la siguiente manera:

$$\pi_a(x + x') = \pi_a(x) + \pi_a(x'), \qquad \pi_a(b \cdot x) = b \cdot \pi_a(x)$$

La primera relación expresa la distributividad de π_a respecto de la acción aditiva de **K** y la segunda, que se puede reescribir en la forma $\pi_a \circ \pi_b = \pi_b \circ \pi_a$, la conmutatividad respecto de la acción multiplicativa de **K**, es decir π_a preserva la estructura lineal de espacio vectorial de **K**. La acción multiplicativa sobre **K**, se generaliza a un espacio vectorial E en la acción de ponderación (acción multiplicativa de escalares en **K** y vectores de E) $\pi_\lambda(x) = \lambda.x \quad (\lambda \in \mathbf{K}, x \in E)$.

En términos más formales, si E y F son espacios vectoriales entonces una función $T : E \to F$ se dice *transformación lineal* si

$T(x + x') = T(x) + T(x')$ (la acción de T es distributiva respecto de la acción aditiva de E)

$T \circ \pi_\lambda = \rho_\lambda \circ T$ (la acción de T conmuta con las acciones de ponderación π y ρ de E y F respectivamente).

1.3.2 La utilidad matemática de la TL

Una gran diversidad de problemas en lo real o en lo abstracto son de carácter lineal. Más aún, la linealidad se encuentra en el centro del análisis de numerosos sistemas físicos, ya sea, porque el sistema es de naturaleza lineal (por ejemplo, regido por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, sistemas de amortiguación, …etc.) o bien, porque solo es necesario un análisis local donde es aceptable establecer la hipótesis de linealidad (linealidad en intensidades muy próximas a una intensidad fija I_0 en sistemas eléctricos, o en aproximaciones de funciones,…etc.). Es por eso que, preguntarse sobre la eventual linealidad de un problema puede significar buenas posibilidades de llegar a resolverlo si éste es lineal. En realidad, lo que motiva al científico a establecer la hipótesis de la linealidad, responde a consideraciones de índole matemáticas, donde la linealidad le permite situarse en un dominio más general de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. Este dominio le ofrece una extensa gama de herramientas para la manipulación y unificación de problemas, y en diversos contextos. Intentando, como primera estrategia, resolver problemas cercanos de naturaleza lineal, o bien, intentando modelizar la situación del problema a un nivel local o global. En este sentido, muchos fenómenos de carácter lineal son modelizados por la ecuación $T(x) = y$ donde $T : E \to F$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales donde $y \in F$ es dado y $x \in E$ es desconocido, para obtener información o conclusiones (aproximadas) a partir de propiedades lineales que satisfaga " y ", o recíprocamente, inferir propiedades lineales sobre " y " a partir de las de " x ". Por ejemplo, la respuesta (tensión, corriente) de un circuito eléctrico lineal con varias fuentes actuando simultáneamente se puede representar por este tipo de modelo, donde la respuesta se obtiene aditivamente de las respuestas parciales más simples (tensión, corriente) producidas por cada una de las fuentes de forma independiente.

Así que la actividad matemática con la TL consiste en modelizar un sistema más o menos complejo, pero a la vez bien delimitado, para descomponerlo en sub-problemas más simples. La construcción de un modelo con la TL permite inferir en hechos parciales a partir de un hecho lineal dado, por ejemplo: la deformación lineal de un cuadrado (los lados opuestos permanecen paralelos). El uso de la TL puede ser un medio muy conveniente para aclarar o justificar los aspectos técnicos de los métodos matemáticos utilizados en la comprensión del problema. Desde un punto de vista técnico, la TL es un concepto de un nivel jerárquico superior que puede servir de vínculo en ciertas etapas de la resolución; en que el trabajo a nivel abstracto ofrece una visión más general, y que permite simplificar las operaciones en una estructura más conveniente.

1.3.3 La enseñanza del álgebra lineal en las escuelas de ingeniería de Chile[5]

En primer lugar, se introduce la noción de *matriz* desde un punto de vista formal: entregando algunos tipos de matrices (diagonales, triangulares, invertibles, simétricas, ortogonales, etc) y estudiando la estructura algebraica de las matrices (suma y producto de matrices, propiedades) a las cuales se les proporciona un tratamiento operacional. Luego, en el marco de resolución de sistemas, se introduce la noción de *sistemas de ecuaciones lineales* asociando rápidamente la ecuación matricial lineal (de primer orden $AX = B$) con la matriz (asociada) de los coeficientes del sistema vía la asociación n-upla/ecuación. Para la resolución de estos sistemas se presentan esencialmente dos métodos: el método de Gauss-Jordan y el método de Cramer, los que conducen a operaciones elementales sobre matrices (matriz escalonada, inversión de matrices). La noción de determinante tiene un rol práctico y se utiliza esencialmente para el cálculo de la inversa de una matriz y para el método de Cramer.

Posteriormente entran los *espacios vectoriales*, como primer enfoque, para la introducción del concepto de vector y de espacio vectorial (sobre $\mathbf{R}$) se hace vínculo directo con los espacios geométricos $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, y más generalmente $\mathbf{R}^n$ (espacios euclidianos). En este contexto, los vectores son presentados como n-uplas y manipulados con las operaciones binarias (suma y ponderación coordenada a coordenada) del espacio euclidiano respectivo. La idea pretende que este estudio[6] entregue un ambiente más concreto a la estructura algebraica de espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ (pero con demasiado énfasis, quizás, a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$). Luego, la definición de espacio vectorial es formal y se establece, por definición, que sus elementos se llaman vectores; a esta altura, el estudiante aún tiene en mente a $\mathbf{R}^n$ y el vector geométrico.

---

[5] Instituto de Matemática; Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). El análisis ha sido hecho con referencia a los programas de las asignaturas de Álgebra Lineal -MAT 213- MAT 127.

[6] Parece que acá los estudiantes se quedan convencidos con la idea que, cuando se habla de vector se trata de un par ordenado, un trío o una n-upla (dependiendo de la dimensión) y que cuando se habla de espacio vectorial se trata de algún $\mathbf{R}^n$ específicamente.

En este ámbito formal se entregan las nociones de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, subespacio generado, bases, dimensión, etc. Una conexión con el concepto de matriz se establece por medio de la escritura única de un vector en términos de una base finita (matriz columna o fila de las coordenadas). Dependiendo de los conocimientos previos de los estudiantes, las actividades y ejemplos que se tratan como espacios vectoriales y vectores son esencialmente n-uplas, polinomios, matrices, funciones. En el mismo enfoque se continúa con las transformaciones lineales, diagonalización para terminar con espacios con productos internos.

En el caso que nos ocupa, las transformaciones lineales, su enseñanza se hace principalmente utilizando espacios isomorfos a $\mathbf{R}^n$ pero sin tomar en cuenta su rol unificador y simplificador de métodos y objetos subyacentes ya conocidos.

Transformaciones lineales

Una vez estudiada la noción de espacio vectorial, se introduce el concepto de transformación lineal[7] (TL) por medio de su definición formal. Se muestran algunos ejemplos y tipos de TL en espacios vectoriales $\mathbf{R}^n$ de polinomios y de matrices o sub-espacios de éstos. Análogamente a las matrices, se establece su estructura algebraica con las operaciones de suma, ponderación y composición de funciones. Un tipo particular de TL es el de operador matricial $X \mapsto AX$ con el cual se estable una primera conexión entre matrices y TL, a partir de una matriz se define una TL entre espacios euclidianos (operador matricial). Recíprocamente (en el caso de dimensión finita), una TL tiene asociada una matriz (matriz asociada) respecto de bases fijas, lo que entrega una segunda conexión entre estos dos conceptos.

[7] Aquí se supone que el estudiante está familiarizado con el concepto de función.

De esta manera, se establece una relación entre el marco de las TL y el marco de las matrices que funciona a nivel estructural, es decir, el espacio de las TL (sobre espacios vectoriales de dimensión finita) es isomorfo al espacio de las matrices. Es posible demostrar propiedades para las matrices y después transferirlas vía el isomorfismo a las transformaciones lineales, pero esta idea raramente es aceptada por los estudiantes. Una vez establecida la matriz asociada, el isomorfismo se menciona como un puente bidireccional entre estas dos estructuras y la idea que sugiere esto, es interpretar todo aquello que sucede en el contexto de la TL (propiedades y teoremas) para transportar al contexto de las matrices y luego volver. La naturaleza bidireccional de este puente se precisa con técnicas eficaces propias de las matrices y lo que deriva de eso, parece incluso necesario para facilitar el uso de ciertas propiedades. Sin embargo, transferir en uno de estos espacios las definiciones y propiedades ya demostradas en el otro, escapa al control de los estudiantes. Por ejemplo, la determinación del núcleo de la transformación lineal $T: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$[8] definida sobre un espacio de polinomios con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada respecto de la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$ se reduce a la resolución del sistema homogéneo asociado que implica la reducción (escalonada) por filas de la matriz asociada. La interpretación correcta de las soluciones de este sistema, que son las coordenadas de los vectores en la base B del espacio $\mathbf{R}_2[x]$, produce dificultades en los estudiantes al confundir las dos representaciones de los vectores (polinomios y n-uplas), ya que, no interpretan necesariamente las soluciones del sistema dentro del espacio vectorial $\mathbf{R}_2[x]$ y no explicitan las asociaciones que realizan. Es decir, colocar en evidencia la correspondencia entre los vectores (polinomios) expresados como combinaciones lineales y las coordenadas de esas combinaciones lineales trabajadas como n-uplas en el espacio de las matrices. Ellos establecen como vectores del núcleo las n-uplas de estas coordenadas en lugar de los vectores (polinomios) que se están determinando.

---

[8] $\mathbf{R}_2[x]$: espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de polinomios en la indeterminada x de grado menor o igual a 2.

La dispersión de los esfuerzos en tareas repetitivas de automatizaciones matriciales simplemente no queda referida a la comprensión de la TL. El tratamiento matemático por medio del isomorfismo entre TL y matrices (para el caso de dimensión finita) parece ser la clave, pues permite estudiar las TL utilizando las herramientas de las matrices. Pero en realidad no se logra mucho eso, a los estudiantes les queda la idea de estar frente a dos conceptos formales y sin lazos entre sí. Aunque conviene reconocer que las matrices son herramientas eficaces y cómodas y que puede parecer a los estudiantes estar trabajando con objetos algebraicos menos abstractos[9]. Pero también ellas constituyen una trampa que puede conducirlos a interpretaciones carentes de sentido para la TL, por la libertad que permite en sus transformaciones.

Es necesario señalar aún cuando el marco matricial puede ser favorable al desarrollo de relaciones “provisorias” (en los espacios de dimensión finita), el espacio de las TL es más general que el espacio de las matrices. La TL por sí misma es un concepto de un nivel superior que tiene una utilización global que las matrices, pero la integración que ella permite no se hace explícita y se deja el trabajo a los estudiantes la necesaria reorganización de su concepto unificador. Cuando se introduce sólo en referencia al álgebra lineal, las matrices pueden ser vistas como objetos formales dotados de reglas también formales, mientras que la pertinencia en diferentes aplicaciones lineales (rotación, cizalladura,…) de manera coherente, puede aparecer como una buena guía para organizar los datos relativos al modelo unificador.

1.4 Desafíos en los cursos del álgebra lineal

En general, las relaciones de los estudiantes con el álgebra lineal, en una perspectiva de vincular lo que están aprendiendo con el interés de entender lo que ello representa, parecen

[9] Más aún cuando el estudiante proporciona a las matrices un tratamiento similar al que le concede a los números.

distantes de sus concepciones matemáticas previas. Particularmente, como conceptos más avanzados que permiten por sobre todo unificar y simplificar métodos y procedimientos para la resolución de problemas más generales, estos conceptos formales, parecen más bien desconectados de sus competencias anteriores. Como lo han mostrado Robert y Robinet (1989) las principales críticas formuladas por los estudiantes hacia el álgebra lineal se refieren a la utilización del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y la falta de relación con lo que ellos ya saben en matemáticas. Los estudiantes perciben la linealidad de los problemas de proporcionalidad (directa) desde la formación básica, más tarde, con el cálculo, la linealidad se hará también de manera local con la derivada, integral, transformadas (Laplace, Fourier,). La manera de tratar los contenidos, para esperar alcanzar los objetivos de la enseñanza, ha llevado progresivamente a la separación del paisaje que resulta de ello. La TL está vista como un objeto específico del álgebra lineal, y los obstáculos que este aprendizaje genera pueden ser interpretados como el resultado de una falta de conexión entre el nuevo concepto formal y las concepciones construidas con anterioridad.

En algunos casos investigados (Robert y Robinet, 1989; Rogalski, 1990; Dorier 1997), los análisis muestran que los estudiantes aplican la teoría de espacios vectoriales sólo por el efecto de contrato: aplican lo que se está aprendido sin comprender la verdadera ventaja que esto representa. Este hecho de reproducir un lenguaje extraño de los conceptos propios de la teoría sin entender el sentido que estos conceptos han de tener, constituye un contrato claro de los procedimientos que serán evaluados (y por consiguiente conviene aprender). Con una retroacción continua a través de pautas de corrección y exámenes formativos y sumativos, el camino para la acción se encuentra completamente especificado con anterioridad. Muchos de los problemas a resolver, involucran ejercicios repetidos que requieren de muy poco esfuerzo mental y muchas veces el uso de la capacidad de memorizar:

> *"[…] many problems given to students in a traditional linear algebra course can often be solved by direct manipulation techniques that do not require the tools of the general theory"*
>
> (Hillel and Sierpienka, 1994)

La actividad matemática del curso constituye un campo de problemas a resolver en función de "modelos a seguir" o "reglas de acción", *el modelo no se explica, quizás, no es su objetivo, pero si se aplica, "funciona"* (Legrand, 2003). Incluso, si este tipo de modelización permite encontrar muy rápidamente la comodidad de un sistema completamente matematizado que parece más riguroso, menos cuestionable, más fácil a enseñar y a interpretar, la utilización de estos métodos por sí solos no garantiza la comprensión de los conceptos abstractos que exigen competencias de mayor nivel. Se estaría bastante lejos aún de una estructuración profunda de la TL que se refiera a una ganancia tanto en simplificación como en eficacia para el desarrollo de este saber en un marco más general.

Sierpinska nos enseña que el problema didáctico que se presenta acá, es cómo transmitir y sensibilizar la necesidad de trabajar el sentido de los conceptos y de las técnicas simultáneamente en el arte[10] de hacer matemáticas:

> *"Teaching the theory of mathematics is not a problem. Any university professor can do that. The problem is how to teach the art of mathematics."*
>
> (Sierpinska, 2004)

En la formación de ingenieros, la concepción de modelos unificadores constituye, desde este punto de vista, un modo de encontrar sentido y coherencia a los conocimientos matemáticos aprendidos. Para desarrollar la modelización matemática de fenómenos y

---

[10] El arte de matemáticas, Sierpinska se refiere al pensamiento involucrado en la solución más o menos convencional o imaginativa, cerrados o abiertos, formales o informales de ejercicios y problemas.

procesos de la realidad y para interpretar resultados más complejos e identificar las situaciones límites. Haciendo que el estudiante acepte la incertidumbre; que no se conoce todo lo que se requiere, se puede procurar que recurra a ellos con el propósito de representar situaciones complejas en función de partes fundamentales.

Si se piensa que los beneficios potenciales de la TL no residen únicamente en las técnicas y los cálculos matriciales, habrá que interrogarse sobre el potencial y la economía que supone el uso de este saber. Tal cuestionamiento debería inscribirse dentro de la génesis histórica de esta noción, donde es bien sabido que *el paso entre nociones primitivas y su generalización ha sido muy lento, complicado y sinuoso* (Dorier, 2000). Un análisis histórico epistemológico de la TL también puede revelar algunas causas posibles de dificultades con el uso de la TL que resumimos a continuación.

1.4.1 Algunas dificultades asociadas al aprendizaje de la TL

Como lo hemos planteado en las secciones anteriores, la enseñanza formal de la TL asociada al enfoque matricial relacionada al sistema geométrico $\mathbf{R}^n$, inevitablemente, crea algunas dificultades sobre la abstracción del concepto que no es fácilmente aceptado por los estudiantes. A la luz de algunos resultados de investigaciones, combinando con nuestra propia experiencia identificamos un cierto número de dificultades conceptuales que nos parecen específicas de la transformación lineal. Estas son las siguientes:

D.1. *Sobrepasar la concepción transformación lineal del uso puramente proceso y articular la representación abstracta de la TL con la representación matricial cuando el espacio vectorial de referencia es* $\mathbf{R}^n$.

Las investigaciones muestran el salto cualitativo que existen entre dos niveles de conceptualización de la noción de función: el nivel de proceso y el nivel de objeto (Sfard, 1991, Dubinsky, 1991). Se puede relacionar este salto con las dificultades encontradas por los estudiantes cuando tienen que referirse al isomorfismo entre el espacio de matrices y el espacio de transformaciones lineales de manera de poder transferir los resultados definidos por los procesos matriciales a las propiedades generales de la TL. Por ejemplo, la representación canónica de vectores basales hace situarse en un espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$ concreto en el cual los resultados obtenidos por operaciones matriciales requieren ser interpretados (por el isomorfismo) en los términos abstractos de la TL. Es el caso de la transformación lineal $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x-y,-x+y+z)$ para la cual el análisis del rango de la matriz asociada lleva a concluir la no inyectividad de T, pero que, el teorema del rango, que ha sido demostrado sobre el espacio de las TL no necesariamente es utilizado. La mayoría de los estudiantes proporcionan una simple descripción del sistema homogéneo para ver si la solución corresponde a la nula, o bien, estudian la inyectividad de la transformación por la definición de "función inyectiva" tratando de deducir que $u = u'$ a partir de $T(u) = T(u')$ sin tomar consciencia, en ambos sentidos del isomorfismo, cuales son estos vectores y el espacio donde ellos se sitúan. En este sentido, el análisis de la inyectividad debería poner en juego la dimensión del núcleo de T y el teorema del rango $\dim(V) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{rg}(T)$ que permiten referir la discusión a nivel de la dimensión de subespacios vectoriales, que en este caso, se puede concluir que el menor valor de la dimensión del núcleo es 1, es decir, en ningún caso se tendrá inyectividad. Los estudiantes se quedan a nivel de proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin poder servirse de las propiedades que unifican los resultados.

D.2. *Comprender y dar sentido a la formalidad de la ecuación $T(u) = v$ con T una transformación lineal, u y v vectores de espacios vectoriales.*

La resolución de tareas asociadas al modelo $T(u) = v$ con T lineal en el marco del álgebra lineal (por ejemplo: determinación del núcleo y de la imagen de una aplicación lineal…) es puesta a prueba por los sistemas lineales. Pero también, el principio de superposición permite descomponer $T(u) = v$ en sub-problemas más simples de manera que el resultado del problema original se obtenga por superposición de los resultados de estos sub-problemas. Por ejemplo, el cálculo del área de una región acotada por curvas se puede representar por este modelo, del cual es necesario saber reconocer el potencial y la economía que supone el uso de la TL en situaciones gráficas. La TL puede simplificar el cálculo del área por descomposición geométrica de la región en subregiones más simples sin importar el valor de los resultados parciales que puede producir la TL en esta descomposición. Algunos estudiantes tienden a confundir la naturaleza de los resultados parciales con el resultado total, es decir, piensan que los resultados parciales también son áreas de regiones al considerar la integral siempre como un área (por lo que debe tener signo positivo) (Turégano, 1998). La utilización habitual de la propiedad lineal de la integral y una mera presentación de las integrales de Riemann, contribuyen a inducir esta dificultad (Artigue, 2003).

También una ecuación lineal representada por este modelo simplifica la resolución de un problema complejo al descomponerlo en dos subproblemas más simples: el primero, el modelo homogéneo $T(u)=\vec{0}$ (es decir determinar el núcleo de *T*) y el segundo, la determinación de una solución particular u_0 de $T(u)=v$ (variación de parámetros). De esta manera las soluciones de $T(u)=v$ son de la forma u_0+u_h con u_h un vector del núcleo T ya que $T(u_0+u_h)=T(u_0)+T(u_h)=v+\vec{0}=v$. Aunque los estudiantes son capaces de realizar cálculos correctos para la solución de los sistemas, ellos no perciben la utilidad de la TL en el razonamiento deductivo de la resolución: ven este proceso como desconectado del problema original, es decir, no ven el sentido unificador de la TL de los resultados parciales garantizado la respuesta al problema inicial.

D.3. *Transformaciones lineales y vectores tienen representaciones las cuales dependen de una base. Comprender la dependencia vinculada a una base de estas representaciones y reconocer implícitamente lo que permanece invariante.*

Algunos estudiantes pueden encontrar la matriz de coordenadas de un vector y la matriz asociada a una TL respecto de una base, pero no garantizan la emergencia del concepto TL a partir de la puesta en relación de diferentes representaciones. Reflejan una potencial confusión de estas representaciones: un vector y una matriz pueden tener en la escritura del producto una referencia a dos bases distintas. Por ejemplo, sea $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la transformación lineal representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ respecto de una base $B = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (1, -1)\}$ se pide calcular $T(v_1)$. Una primera dificultad (que ya hemos visto en la sección 1.3) consiste en creer que $T(v_1)$ es la primera columna de la matriz *A*. Esto es una consecuencia del hecho de pensar que las columnas de una matriz representan las imágenes de los vectores de la base y no las coordenadas de estas imágenes respecto de una base. Esta dificultad se relaciona a que *dos representaciones de un vector pueden ser ambas n-uplas sin que tengan en la escritura una referencia a una base* (Hillel y Sierpinska, 1994), o sea, el mismo vector v_1 tiene dos representaciones distintas una $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respecto a la base *B* y la otra, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ respecto a la base canónica. Esto conduce a creer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ está en referencia a la base *B* produciendo una segunda dificultad, que $T(v_1)$ es el resultado del producto $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de dos representaciones de una matriz y un vector referentes a dos bases distintas. La elección de estas representaciones matriciales depende de la elección de una base del espacio (para el caso de dimensión finita) en coherencia con la acción de la transformación lineal.

> *"Comprendre cette dépendance liée à la base (et, implicitement, comprendre ce qui reste invariante) et être capable d´aller d´une représentation à l´autre est une source des difficultés pour les étudiants."*
>
> (Hillel, 1997)

La utilidad de las matrices son poco claras para los estudiantes en función de su generalidad y de las relaciones que las vinculan con la TL. Es necesario saber interpretar la representación matricial de la TL, que viene a complementar el pensamiento lineal por la información que ella sintetiza: la acción de la transformación y su linealidad, de manera de unificar y generalizar los resultados. Estos dos tipos de conocimiento deberían ser considerados como inseparables y complementarios en el sentido de Sfard (1991).

D.4. *Discernir el modelo abstracto de la TL del modelo geométrico abstraído de las relaciones que lo vinculan en el sistema lineal de* $\mathbf{R}^2$ *y* $\mathbf{R}^3$.

Si el trabajo en el marco geométrico (Douady, 1983) puede ayudar a poner en acción la definición de la TL en un contexto simple, se puede sin embargo preguntarse si la generalización a dimensiones superiores o espacios vectoriales más generales no arriesga para los estudiantes de hacerse vía teoremas en acto erróneos. La TL sometida a las consecuencias de las relaciones geométricas que la vinculan, muchas veces resulta difícil de descubrir o de probar o invalidar en este contexto su existencia como objeto abstracto. Por ejemplo, nuestra experiencia en la enseñanza del álgebra lineal nos muestra que, para determinar o definir una transformación lineal T de $\mathbf{R}^3$ por medio de la acción sobre una base $\{e_1, e_2, e_3\}$, algunos estudiantes no llegan a aceptar que esta acción se pueda asignar arbitrariamente. Muy por el contrario, más bien creen que estos valores necesariamente tienen que ser determinados por alguna fórmula. Y cuando llegan a aceptar esto, se enfrentan a un segundo hecho increíble, la imagen de un vector cualquiera, está explícita y completamente determinada por el hecho que la transformación es lineal. También el carácter de la determinación única de la TL, en razón de la linealidad, los lleva a pensar que si $T(e_1) = v$ entonces no es posible que T en e_2 por ejemplo, tome la misma imagen T.

Muchos estudiantes no alcanzan a comprender el rol determinante de la base en la definición de la TL que hace a la acción de la transformación invariante a cualquier base.

En particular la puesta en acción de la TL en el contexto geométrico puede apoyarse del sistema canónico más familiar para los estudiantes, contexto donde ellos disponen de técnicas específicas (teorema de Pitágoras, identidades trigonométricas,…), de medios de visualización, de medios de control más eficaces (trigonometría) para abordar su definición de manera razonada y deductiva y facilitar así el pasaje al saber teórico. Se puede mostrar mediante la geometría analítica que, por ejemplo, la rotación de ángulo θ (en torno al origen del sistema) es una TL la cual se describe por medio de expresiones lineales con coeficientes $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Con el apoyo de la trigonometría se pueden concluir las propiedades lineales de la rotación, estableciendo así que se trata de una transformación lineal: expresada por la transformación matricial $X \mapsto AX$ donde $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Sin embargo, algunos estudiantes no pueden distinguir el modelo abstracto de la TL del modelo geométrico y simplemente no pueden imaginar una transformación lineal que no sea una transformación geométrica (Gueudet-Chartier, 2004), como la derivada, integración... Un enfoque similar puede ser hecho respecto a cualquier otro sistema de ejes ortogonales diferente al usual. Se observará que en una TL específica, pero siempre articulando sobre el plano geométrico para observar la unificación que ella establece, la familiaridad que ellos tienen con el sistema canónico hace, posiblemente, poco probable que reconozcan la misma TL respecto de otro sistema ortogonal. Esto puede hacer surgir en los estudiantes la dificultad implícita de creer que la acción de la TL cambia de acuerdo a la base del espacio vectorial, es decir, a representaciones distintas corresponden acciones distintas.

Por otro lado, algunas investigaciones interesadas en ayudar a los estudiantes a entender las transformaciones lineales (Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999; Sierpinska, 2000) integran, a través del computador (por el uso de software), las representaciones gráficas y numéricas en la representación algebraica de la TL. Pero como testimonian los participantes con quienes trabajaron, la interpretación de las representaciones geométricas dinámicas de la TL no favorece necesariamente la comprensión del concepto en el estudiante. *Ellos* *tuvieron problemas usando la definición del concepto en el razonamiento y prefirieron pensar en ella como familias de ejemplos (p.ej. una transformación lineal es una rotación, una dilatación, o una combinación de estos)* (Sierpinska, 2004).

D.5. *Usar inadecuadamente la propiedad aditiva de la TL para una función cualquiera. Por ejemplo,* $\log(x+y)=\log(x)+\log(y)$.

En los datos recogidos por Markovistz et al. (1985) y evocados en Sfard (1991) se demuestra que los estudiantes tienden a imaginar funciones lineales cada vez que la noción de función es mencionada. Los estudiantes manipulan la función TL con las mismas habilidades y técnicas matemáticas memorizadas a nivel de **R**. La propiedad aditiva $f(x+y)=f(x)+f(y)$ de una función lineal está vista como la "propiedad distributiva" en los números reales. Si los estudiantes asocian la noción de función a la función lineal y si asocian la TL a una función entonces, para los estudiantes, la TL podría reducirse a una nueva manera de llamar a la función las cuales tendrían esta propiedad de *"*distributividad*"* de que "*todas las funciones son lineales*".

Señalemos, que algunas de estas dificultades pueden ser inducidas por la enseñanza y manuales de la progresión de contenidos, de manera más o menos dependiente o coordinada y en lugares diferentes, donde los conceptos parecen jugar distintos roles y la organización necesaria de estos queda, por lo general, a cargo del estudiante.

1.4.2 Otra dificultad en la enseñanza de la TL

Esencialmente la ausencia del papel unificador de los conceptos (en la enseñanza y textos) tendería a desembocar en la fragmentación de las concepciones en los estudiantes. El aprendizaje consiste en problemas asociados a modelos específicos y los textos presentan problemas con el fin que el estudiante identifique la herramienta correcta sin ningún tipo de ayuda, confrontando a los estudiantes a una diversidad de situaciones. De manera que la dimensión unificadora de la TL sería inaccesible al estudiante. Se podría decir que se encuentra en una situación donde hace tareas de las cuales no reconoce lo que está en juego; actividades matemáticas en las cuales se prevén, se rechazan o se sustituyen algunas posibilidades de modelos. Se trataría de un aprendizaje consistente en asociar problemas a modelos específicos no de construir o mostrar cómo se podría elaborar un modelo explicativo, sino de enseñar que, en tal o cual caso preciso, sistemáticamente es a tal o cual modelo estándar (Legrand, 2003).

En particular, algunas de las tareas propuestas a los estudiantes con la TL al principio del curso, confieren más importancia al nuevo formalismo en un marco relativamente abstracto para describir las propiedades. Por ejemplo, se les pide demostrar que $T(\vec{0}) = \vec{0},$ o bien que $T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$ para n vectores con T lineal. En la primera tarea, el nivel de formalismo que caracteriza la demostración constituye en sí un obstáculo; para ellos comprender la descomposición del vector cero a nivel estructural ($\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$) consiste en identificar el resultado de la operatoria cero más cero más bien que percibir la descomposición aditiva para aplicar la propiedad lineal de *T.* Otros tienden asociar esta igualdad a la propiedad "el producto por cero es cero". El rigor de la interpretación abstracta del "vector cero" les parece obvio e innecesario. La segunda relación es una sintetización de ambas propiedades lineales de la TL que los estudiantes deben articular de forma global y general. Ellos pueden escribir el resultado de golpe (guiados por la propiedad distributiva) sin desarrollar las argumentaciones de las propiedades intermedias, no ven el sentido de tales representaciones; el producto formal $\lambda_i v_i$ escapa a la definición de producto que ellos manejan normalmente que no reconocen como un vector: se fijan sólo en v_i para escribir la expresión simbólica $T(v_i)$ en la representación final. Por otro lado, al final de la enseñanza del curso, los ejercicios y los problemas propuestos están centrados en el marco de matrices en la reducción de endomorfismos (diagonalización, formas de Jordan). Resulta entonces una fuerte tensión e incluso una contradicción puesto que muchos estudiantes revelan poder encontrar la forma reducida del operador lineal, pero sin comprender a fondo los conceptos básicos de las técnicas que integran el método de reducción de la matriz asociada a la TL. Así por ejemplo, la interpretación de la representación diagonal de la matriz asociada puede resultar muy complejo para los estudiantes en el contexto abstracto de la TL, ya que ella requiere una comprensión de nivel superior de nociones (cambio de base, vector y valor propio, cambio en la representación de la acción de la TL… etc.). En cambio, en el contexto matricial, esta representación de diagonalización aparece y se ve de manera transparente con una matriz diagonal. Pero con la TL, el efecto de la diagonalización no se alcanza a percibir a simple vista, lo que les dificulta mucho comprender su significado; la descomposición (suma directa) del espacio vectorial en sumandos invariantes por la TL en los cuales ésta actúa como una homotecia.

El estudio de la génesis e historia de la TL nos puede conducir a señalar que la enseñanza de esta noción permanece prisionera a la formalidad de su definición. El enfoque técnico matricial que se le otorga a su uso podría obedecer nada más que a la dificultad de la enseñanza de los conceptos unificadores (Robert y Robinet, 1989; Roglasky; 1990, Dorier, 1997; Dorier, 2000; Artigue, 1998). La matriz asociada se convierte en el modelo de la noción y nos esforzamos más aún por encontrar una mejor formulación para encontrar su forma reducida. Por una parte, la formalidad de la noción se introduce con la teoría matricial de manera de privilegiar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales; innegablemente este hecho tiene como consecuencia enmascarar ciertos aspectos intuitivos de la naturaleza unificadora de la TL (enfoque destinado a calcular las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales asociados a la TL). Y por otra parte, la naturaleza unificadora de la TL permanece completamente dependiente de la teoría formal, inmersa en el formalismo de su definición y propiedades, donde las técnicas perfectas, alejadas de una realidad más intuitiva, han constituido un obstáculo a una buena percepción del concepto de la TL.

Casi podríamos decir que la utilidad de la TL se ve enredada por un fuerte formalismo matemático que no da lugar a imprecisiones ni errores, lo que puede producir una pérdida esencial sobre la necesidad e importancia del valor unificador de este concepto. En la enseñanza, este cuestionamiento ha de ser explícito para la comprensión del concepto.

1.5 Algunas características emergentes de la TL

La formalización de la TL, atestada por su desarrollo histórico, es esencial en la teoría general del concepto. Su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador fue mucho más fuerte que su potencial para resolver problemas y no fue fácilmente aceptado por los matemáticos. Este papel unificador y su poder simplificador es un valor esencial que debe ser comprendido y utilizado por los estudiantes, es decir, en identificar las características comunes que van a definir su representación formal.

Como lo veremos con más detalle en el capítulo 2, el concepto transformación lineal se convierte en una herramienta eficaz en geometría cuando se abordó en la historia el estudio de las transformaciones geométricas. El uso de la TL para modelizar las transformaciones geométricas (proyección, rotación, simetría…) ocurrió con Euler (1758) extendiendo sus resultados de manera progresiva en dimensiones superior a tres. Este hecho de trabajar más allá de la dimensión tres, induce un pensamiento algebraico en la geometría en el estudio de problemas donde la TL juega un papel importante. La TL apareció claramente percibida como el proceso más simple para el cambio de coordenadas para las necesidades esencialmente geométricas (de mantener la forma de lo que se está transformando). En el dominio geométrico, este tipo de método analítico (resolución de las ecuaciones) se encontró importado por la búsqueda de invariantes en la clasificación de relaciones entre curvas y ecuaciones. Lo que determinó las analogías se basó más bien en los problemas a resolver que sobre un enfoque teórico estructural entre objetos o conjuntos. De hecho, el estudio de las preguntas lineales permaneció ante todo en el marco algebraico. La TL tendió a convertirse en una técnica reservada al estudio de *sustituciones lineales* donde la técnica de hacer intervenir la linealidad sobre las variables de la ecuación apareció como un medio económico de determinar *a priori* los diferentes casos a estudiar.

Los cambios de coordenadas o variables por sustituciones lineales fue ganando popularidad y gradualmente fue entrando también en el marco aritmético (cambio de variables en las formas cuadráticas) y en aplicaciones físicas (en particular en torno a las fórmulas de Maxwell). En el contexto numérico, Gauss (1798) introdujo una notación cercana a la matricial para designar las sustituciones lineales. Al mismo tiempo Euler representó una sustitución lineal con una notación matricial próxima a la actual, anticipando una teoría de matrices que ya se veía venir. Por una parte, entregó una representación explícita de la compuesta de dos sustituciones lineales y por otra, verificó que esa compuesta era lineal. Observamos en esta parte de la historia que el aspecto estructural de las sustituciones lineales ya comenzaba a ser valorizado de las aplicaciones de cambio de variables, lo que puso el interés de una notación sintética de las sustituciones lineales en la clarificación de su estructura. No es de extrañar entonces que el concepto de la TL inicialmente fuera conectada a los procesos de construcción sistemática de invariantes lineales en diversos contextos (geométrico, físico, numérico,…) y que los vínculos matriciales fueran cada vez más explícitos. Podemos decir que esta noción y las propiedades que ella permite demostrar, sirvieron más bien, para unificar técnicas y métodos de resolver problemas particulares pero en casos cada vez más complejos. En este contexto, el enfoque axiomático de la TL va a poder finalmente imponerse, porque permite unificar distintos problemas de orígenes variados cuyas semejanzas comienzan a aparecer y porque también permite subsanar las faltas en el proceso de generalización (Dorier, 2000).

Hoy en día, la TL está pensada en el marco teórico formal, que simplifica la solución de muchos problemas, pero la simplificación es sólo visible para el especialista que puede anticipar la ventaja de la generalización; él ya sabe muchos contextos en la cual el concepto se puede utilizar. Para un estudiante principiante la simplificación no es tan clara como el costo de aprendizaje del nuevo concepto y los teoremas parecen estar demasiado lejos en relación al uso que él puede otorgar. Pero la historia nos muestra que su puesta en acción, necesitando claramente la posibilidad de interactuar en distintos contextos, puede efectuarse sin duda con un nivel de teorización más cercano que aquel correspondiente a la teoría formal de la noción del álgebra lineal. Habría que buscar estos contextos de utilización y ponerlos a prueba en la resolución de problemas en que el modelo lineal evolucione en función del mismo concepto de la TL.

1.6 Una pista: la TL como modelo unificador

Primeramente podemos notar en la historia de la TL, que el desarrollo de esta noción no ocurre tanto porque permite resolver nuevos problemas, sino más bien, como una forma de unificar métodos y resultados, pero con un planteamiento muy general. Situaciones que emergieron de un enfoque por sustituciones lineales como una manera de abordar y clasificar los problemas que se proponían solucionar. Ya sea simplificando o identificando los mismos procedimientos utilizados en su desarrollo. El conocimiento formal de la TL sería entonces el único medio de comprender todos los diferentes tipos de métodos de invariantes lineales de manera uniforme. Pero también sujeto a los diferentes enfoques salidos de distintos contextos (algebraicos, numéricos, geométricos, analíticos). Las analogías con la geometría más allá de la dimensión tres dan a la TL, el apoyo intuitivo necesario como herramienta unificadora de los métodos utilizados en aquella época y más tarde como un proceso de generalización. De modo que, el formalismo de la TL es constituyente de su naturaleza unificadora. Por otro lado, en la resolución de problemas en el álgebra lineal en la ingeniería, un análisis matemático y epistemológico nos muestra que la formalización de la TL no parece haber jugado un papel fundamental en la evolución de los problemas a propósito de la unificación. La necesidad de esta unificación puede ser motivada por los procedimientos utilizados en trabajos anteriores, para ser utilizados en nuevas adaptaciones, en otros contextos que hagan encontrar ahí un sentido, un valor, una motivación intrínseca de la unificación de las soluciones. Habría que procurar extender los problemas en función del sentido del concepto para hacer a los estudiantes participar de modo autónomo en la identificación de las soluciones a unificar. En este sentido, para los estudiantes podría ser todo un descubrimiento darse cuenta que la definición formal de la TL puede ser mucho más práctica y eficaz que una sola noción de competencia.

En el contexto de la enseñanza del álgebra lineal, la unificación que la TL permite nos hará volver a la historia del concepto para organizar la noción en torno a problemas que permitan insertar de manera coherente la aplicación lineal. Tratándose de un concepto matemático unificador y generalizador, por la vía de eficacia, un enfoque por resolución de problemas puede ser una forma de comprender los diferentes tipos de conocimientos y competencias preliminares desarrollados en el mismo sentido. Una búsqueda de contextos de utilización en que esta idea unificadora pueda ser entendida y reflexionada por los estudiantes, puede ser una pista adecuada para la abstracción de la TL. La introducción de este concepto en interacción con diversos contextos justifica el interés del enfoque adoptado por la ganancia que su aspecto unificador puede aportar. Se deberá tratar de establecer las propiedades lineales en un marco más general, previamente especificadas para cada contexto verificando los resultados obtenidos.

Por otro lado, lo que hace necesario el uso de un modelo unificador como proceso de integración, es el hecho que las situaciones de referencia o las competencias específicas referidas se vuelven obsoletas o inadecuadas para solucionar problemas cada vez más complejos, mientras el modelo lineal si lo hace. Esto podría significar para un estudiante de ingeniería, un acceso a comprender lo interesante y relevante que puede resultar la abstracción del concepto como una forma más simple de integrar antiguos y futuros conocimientos. Ya que la información concebida operacionalmente, aunque absolutamente indispensable y aparentemente suficiente para la solución de problemas, no podría ser fácilmente procesada ni tampoco memorizada (Sfard, 1991) para nuevas soluciones que hay que considerar.

1.6.1 Reutilización de los conocimientos anteriores

Para extraer el sentido de los resultados, es necesario que los estudiantes se pregunten sobre la funcionalidad de la noción, que tiene nuevas características epistemológicas con relación a lo que ellos ya conocen en matemáticas. En este sentido, los conceptos matemáticos subyacentes son importantes para el aprendizaje de la nueva noción. Estos conceptos son a menudo llamados a ser modificados para adaptarse a los cambios contextuales para las nuevas soluciones que hay que considerar para el aprendizaje de nuevas nociones. La TL es un concepto formal que unifica los diferentes tipos de modelos lineales que interactúan con diversas concepciones anteriores ya aprendidas. Se trataría entonces de reutilizar los conocimientos ya aprendidos con el fin de que los estudiantes sean capaces de juzgar o probar realmente las dificultades contenidas en el descubrimiento y la construcción de concepto unificador de la TL. Más precisamente, son llamados a ser confrontados a elecciones reales, con el propósito de motivar un juicio de la utilidad del nuevo concepto.

Además de proporcionar un contexto de aplicación lineal en un nivel más familiar, que tiene por interés esencial mostrar y permitir la unificación de los conocimientos menos formales de manera más cercana, este enfoque permitiría comprender la simplificación que el formalismo de la noción aporta. Pero una tal visión, que es por sí misma una actividad matemática de modelización, se sitúa en un nivel de abstracción de forma tal, que no permite expresar las tensiones cognitivas de los estudiantes que sin duda existen en el proceso de la toma del significado del modelo en medio de tantas dudas de los objetos que tienen que manipular. Puesto que este proceso exige no solamente un buen recuerdo y entendimiento de los conocimientos a reutilizar, sino que también de ser capaz de identificar las características comunes que permiten abstraer el concepto y entender su alcance por la exploración de vínculos con otros objetos. En otros términos, que una representación de la TL pueda ser construida y utilizada de manera eficaz: reconociendo los elementos esenciales para la resolución del problema. Aunque sea de manera inconsciente, este proceso requiere un paso al lado, para mirar retrospectivamente los conocimientos y las competencias previas bajo otro ángulo (Dorier, 1997).

Un modelo pertinente a nuestro objetivo, permitirá construir el carácter económico de la TL, destacando las insuficiencias o incluso los límites del rol de las competencias previas que se necesitan en la situación de referencia (Brousseau, 2003a). En este sentido, la eficacia lineal permitirá que los estudiantes la utilicen preferentemente y de manera eficiente en la relación desarrollada con la aplicación. Así, para explicar la noción de la TL, el estudiante deberá pasar de una posición "de aplicar la fórmula" a la reflexiva de analizador del modelo para validar su pertinencia: confrontando el modelo teórico con el repertorio dado en la situación (Brousseau, 2003a).

1.6.2 Coherencia con el desarrollo de competencias del futuro ingeniero

En una perspectiva de desarrollo de competencias de lo que significa un proceso a través de la resolución de problemas, el interés didáctico de la modelización es difícilmente cuestionable. Con ella se podría pretender emerger el sentido unificador tomando en consideración el saber operacional de la misma noción (Sfard, 1991). En este sentido, pareciera ser una buena alternativa el hecho de reutilizar conocimientos anteriores en interacción con la nueva noción. De hecho, podríamos suponer que la modelización con la TL podría permitir asumir la responsabilidad de la exploración, de la unificación y de la explicitación del aprendizaje de la propia noción, por la acción de los problemas y las buenas características de los modelos a reutilizar (Dupin, 1996).

Además, una pista de modelización parece ser muy adecuada para futuros ingenieros. Si los propios matemáticos incorporan a su práctica saberes de acción para explorar un enfoque inductivo, estos desempeñan un rol todavía más grande cuando la utilización de los saberes matemáticos se hace en un contexto aplicado como el de la ingeniería. En el contexto de la resolución de problemas, las transformaciones lineales son herramientas que permiten hacer comprender un problema difícil del modo más adecuado, de reconocer los conocimientos obsoletos en la aplicación, de entender mejor la vinculación de los conceptos involucrados, de utilizarlas en distintos contextos capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional. En esta perspectiva, no se puede dejar de contemplar el desarrollo del razonamiento de conceptos y métodos matemáticos con la TL para ilustrar esta misma noción, para testimoniar su utilización y para proporcionar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro de un contexto.

Ya que el formalismo es primordial de la teoría, los beneficios del carácter unificador de los conceptos deberían ser entendidos por el futuro ingeniero; son estos conceptos unificadores los que enseñan la coherencia del razonamiento en la generalización de los resultados. Con ello, se podría esperar en contribuir al desarrollo del estudiante y del individuo más tarde, un poder de organización de sistemas y conceptos que le permitan comprender y anticipar posibles resultados de una acción. Poniendo a prueba las habilidades analíticas y la creatividad de vincular e integrar conocimientos. Al mismo tiempo, un enfoque coherente a la historia de su desarrollo, ayudaría a sugerir recomendaciones susceptibles de mejorar las actuales condiciones de la enseñanza de conceptos unificadores y generalizadores. Como una propuesta para proporcionar un poco más de espacio a ciertas aplicaciones que relacionen vínculos entre nociones de aspectos diferentes pero de igual funcionamiento.

1.7 Objetivo de investigación

Nuestro objetivo de investigación es estudiar una nueva manera de enseñar la transformación lineal para que la noción adquirida por los estudiantes sea utilizada con sentido y propiedades propias en conexión con otros conceptos matemáticos más cercanos.
Para conseguir esto, proponemos desarrollar y evaluar otra manera factible de enseñar la TL, pensando en una secuencia de tareas que hagan emerger el rol unificador de la transformación lineal.

1.8 Pregunta de investigación

¿Podemos hacer entender mejor por los estudiantes el significado de un concepto unificador y ayudar la movilización espontánea de sus propiedades por la exposición a una serie de problemas que recurren a diferentes marcos matemáticos?

2 MARCO TEÓRICO

La posibilidad de ver una noción matemática conocida de una manera completamente nueva, en un nivel de jerarquía superior, no es fácil de conseguir. Un nuevo concepto enseñado debe integrarse en un dominio de validez de concepciones anteriores que el mismo concepto debe poder extender: *es un objeto que se trenza entre el pasado y el futuro* (Chevallard, 1991). Es como un cambio profundo en la manera de pensar. Sin embargo, la pura idea de realizar operaciones matemáticas con objetos de nivel inferior puede dar lugar a una gran tensión cognitiva y a una inquietante comprensión local, por lo tanto insuficiente (Sfard, 1991). Estos conceptos de nivel superior son vínculos necesarios en el desarrollo de métodos y técnicas similares que en un lenguaje formal corresponden al modelo abstracto. Un avance histórico en el dominio del conocimiento de la TL, en la búsqueda de una coherencia interna de problemas y conceptos que dan un sentido unificador, podrá otorgar más importancia a la simplicidad de su definición.

2.1 La construcción histórica de la TL

Como lo han señalado los estudios históricos (Robinet 1986; Dorier 1990; Dorier, 1997; Dorier 2000)[11] la teoría de espacios vectoriales es muy reciente. Alrededor de la ecuación de Fredholm convergieron, al principio del siglo XX, enfoques y métodos que nacieron de tres orígenes esenciales del álgebra lineal; geométrico, analítico (resolución de ecuaciones) y funcional. La teoría generalizada de determinantes (1750) enriquecida de herramientas cada vez más sofisticadas, permitió resolver la ecuación de Fredholm en casos cada vez más complejos. Época, en que aparecieron vínculos entre los métodos que pusieron en acción técnicas y prácticas de resolución de ecuaciones, sin poder realmente destacar las características comunes, por ejemplo, entre los operadores funcionales y las formas cuadráticas infinitas. Si los determinantes revelaron ser una herramienta perfecta para el

[11] El estudio de los principales componentes epistemológicos de la TL redactados en esta sección se baso en los trabajos de la evolución histórica del álgebra lineal que estos autores documentan en detalle.

estudio de sistemas de ecuaciones lineales, es necesario reconocer también que ellos generaron una cierta complejidad ligada al tecnicismo de su utilización. En este contexto, el enfoque axiomático logró reintegrar y simplificar en un proceso de abstracción, las características comunes asociadas a los métodos usados en problemas concretos. Enfoque, que permitió unificar diversos problemas de orígenes variados, cuyas semejanzas consiguieron satisfacer las faltas en el proceso de generalización (Dorier, 2000).

Lo que corresponde a la transformación lineal, un esquema de técnicas matemáticas que impregnaron particularmente el siglo XX, fue la construcción sistemática de invariantes lineales. La etapa pre-conceptual en la cual matemáticos desarrollaron operaciones con sustituciones lineales[12] y cálculos de invariantes lineales, sirve para testimoniar la utilización y el desarrollo de saberes prácticos con el concepto TL, envueltos en las resoluciones de problemas. El sentido operacional que estas técnicas concibieron, aparece como una componente indispensable, mucho antes, que la definición estructural y que la representación formal otorgada al objeto lineal. La búsqueda de cambios de coordenadas cartesianas (o *sustituciones lineales,* según el lenguaje de la época) por un enfoque descriptivo y cualitativo de ecuaciones lineales, fueron las técnicas y métodos que condujeron a problemas muy próximos a los relacionados con transformaciones lineales.

El nacimiento y la evolución del concepto de transformación lineal fueron en sus inicios con Euler (1758) dentro de un contexto geométrico, con transformaciones geométricas tales como la proyección y las transformaciones ortogonales (simetrías). *A posteriori*, con los cambios de ejes coordenados (sustituciones lineales) las transformaciones lineales se acercaron a la idea de lo que actualmente se conocen como matrices y se integraron a la teoría de determinantes. Sin embargo, ambos conceptos matriz y determinante fueron, durante un tiempo, confusamente inseparables en el mismo campo de problemas donde verdaderamente no se los distinguió uno del otro (Dorier, 1997).

---

[12] Hace referencia a cambio de coordenadas o variables de primer orden.

2.1.1 En el contexto geométrico $\mathbf{R}^3$

Cronológicamente, la linealidad permaneció por mucho tiempo como un concepto numérico que tomó forma en el marco de las ecuaciones lineales numéricas. Lo que interesaba a los matemáticos de la época (segunda mitad del siglo XVIII) era resolver ecuaciones, a pesar de una tendencia progresiva por un enfoque descriptivo de las ecuaciones. El pasaje de una problemática de resolución de ecuaciones a un enfoque más descriptivo y más cualitativo permitió reconstruir el concepto de dependencia lineal sobre los dos objetos (ecuaciones / *n*-uplas) donde se elaboraron los primeros conceptos lineales, como por ejemplo, el rango de una TL. Las primeras transformaciones lineales aparecieron como uno de los primeros trabajos significativos de este estado de hechos. En su memoria, "*Problema algebricum ob affections prorsus singulares memorabile"* de 1770 Leonhard Euler muestra un estudio descriptivo sobre los cambios de ejes ortogonales y establece una serie de descubrimientos considerados como los primeros resultados reveladores de las transformaciones ortogonales.

Euler (1770) introdujo un tipo de transformaciones lineales como son las simetrías (transformaciones ortogonales). Para este tipo de transformación, él realizó un estudio en el cambio de las coordenadas x, y, z a las coordenadas X, Y, Z que *preservará la ortogonalidad* por medio de sustituciones lineales (en lenguaje moderno corresponden a transformaciones lineales) del tipo:

$$\begin{aligned} X &= Ax + By + Cz \\ Y &= Dx + Ey + Fz \\ Z &= Gx + Hy + Iz \end{aligned}$$

con la condición de preservación de la ortogonalidad; $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. De esta última relación, Euler establece seis relaciones sobre los coeficientes $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ que son exactamente las mismas relaciones que él había descubierto y estudiado previamente. En el lenguaje moderno esto se interpreta como la ortonormalidad de tres vectores, o equivalentemente, que la transpuesta de una matriz ortogonal también es ortogonal. Posteriormente, Euler deduce que cada coeficiente es el inverso aditivo de su cofactor para el caso de las simetrías. Aquí Euler comete un error al no considerar el caso en que cada coeficiente es igual a su cofactor y que corresponde a las rotaciones. Estas dos situaciones equivalen a decir que la matriz inversa de una matriz ortogonal es igual a su transpuesta, puesto que el determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1.

En términos modernos el planteamiento de Euler sobre los cambios de coordenadas ortogonales, corresponde a una transformación ortogonal del espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$, es decir una transformación lineal que preserva la longitud de los vectores, lo que Euler plantea con la relación $x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$. Una tal transformación, con un enfoque matricial actual, es posible representarla por una matriz 3×3 con coeficientes reales $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$ donde el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se transforma en el vector $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ por medio de la transformación $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

La condición $x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$ expresa la ortogonalidad de la matriz asociada o equivalentemente que las columnas (o las filas) forman una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$, lo que se traduce en seis relaciones y que son exactamente las mismas relaciones que Euler ya había descubierto.

El proceso anterior, Euler lo comienza para el caso de dos coordenadas y lo transfiere al caso de tres coordenadas donde determina los valores de los nueve coeficientes en términos de tres parámetros, ya que éstos estarían definidos por seis relaciones independientes. Esta idea le servirá para generalizar su estudio extendiendo sus resultados a cuatro y cinco coordenadas e incluso para un número cualquiera *n* de coordenadas. El estudio que realiza para dimensión superior a tres coordenadas es de hecho sorprendente para la época, pues al parecer, en ninguna parte de la obra de Euler hay una huella de alguna idea de geometría en *n* dimensiones. Idea que por lo demás no estaba aún en los pensamientos de la época, donde la posibilidad de una interpretación geométrica quedaba limitada hasta la dimensión tres.

Se podría casi creer que la introducción del método de coordenadas o método analítico como el realizado por Euler en el estudio de cambio de coordenadas ortogonales, permitió una generalización de la geometría a dimensiones superiores a tres. Así, el método analítico introduce el cuadro algebraico en la geometría en el estudio de problemas que hacían intervenir cuádruples e incluso más coordenadas, lo que permitió una identificación del espacio geométrico con $\mathbf{R}^3$, éste último considerado con un sistema de coordenadas ortogonales. Este desarrollo de la generalización de la geometría, condujo a las preguntas de linealidad respecto de la posibilidad de una doble interpretación: algebraica y geométrica. Lo que proponen Descartes y Fermat, no es una identificación del espacio geométrico con $\mathbf{R}^3$ como una correspondencia de objetos o conjuntos, menos aún, de estructuras (lo que sería la base de la idea de isomorfismo) sino, más bien, una importación de métodos. En consecuencia, lo que determina las analogías se basa más bien en los problemas que hay que resolver, que por sobre un enfoque teórico estructural entre objetos o conjuntos. Analogía, que llevó al interés de establecer una relación sobre el par "curva/ecuación", que para la época tenía más sentido en el contexto de una clasificación, lo que se traducía en la búsqueda de invariantes.

Así, encontramos que en el cuadro algebraico, el nivel más simple de búsqueda de invariantes es hacer intervenir la linealidad sobre las variables de la ecuación por ende sobre la curva, por medio de sustituciones lineales. De esta manera, es el aporte de la gestión algebraica que pone por delante a la linealidad en el marco geométrico, de hecho, el estudio de las preguntas lineales permaneció ante todo algebraico.

> *"Il serait donc faux de croire que la linéarité de* $\mathbf{R}^n$ *est primitive puisqu´elle n´a surgi, au moins sur un plan théorique, que de l´étude des systèmes d´équations linéaires, où la linéarité des équations était première."*
>
> (Dorier, 1997)

2.1.2 Operaciones con sustituciones lineales

Las sustituciones lineales intervinieron fuertemente en un marco aritmético en los trabajos sobre formas cuadráticas al final del siglo XVIII y primera mitad siglo XIX. En esa época, la clasificación de las formas cuadráticas y bilineales, ya sea en problemas puramente algebraicos, a veces incluso aritméticos, o en el contexto geométrico, jugó un rol importante en la elaboración de la TL. Encontramos en el dominio aritmético, por ejemplo, que esta búsqueda finalizó por conducir a un método general como origen teórico de la TL. El estudio de este problema llevó a Euler y Lagrange a interesarse en los números enteros que podían representarse por una forma cuadrática de dos variables con coeficientes enteros, en particular, en la representación de números naturales como suma de cuadrados, que sería el caso en que los coeficientes son todos iguales a 1.

En 1773, Lagrange publicó en su memoria *Recherches d'arithmétiques* (T. III, pp. 695-795. 1773)[13] un trabajo en torno a estos hechos de la descomposición en forma cuadrática, donde advirtió la necesidad de transformar las variables de la forma cuadrática en otras variables, es decir, obtener una representación más simple por transformación de variables. Más aún, Lagrange buscaba transformaciones que dejaran invariantes ciertas propiedades de la forma cuadrática original. De hecho, Lagrange estableció que tal sustitución que denominó transformada, debía ser necesariamente lineal para que la forma resultante sea una forma cuadrática. Lo que expresa y muestra, para la época, un pensamiento del uso de la linealidad y más exactamente de la necesidad que una tal transformación debía ser lineal.

[13] Citado por Dorier (1990).

"*Comme la transformée doit être analogue à la proposée, il est visible qu´on ne saurait employer d´autres substitutions que celles-ci:* $y = Ms + Nx$, $z = ms + nx$, s *et* x *étant deux nouvelles indéterminées et* M, N, m, n *des nombres arbitraires.*"

(Lagrange, 1773)

Siguiendo el impulso proporcionado por Lagrange, en 1798 Gauss enriquece y generaliza los trabajos de Lagrange en *Disquisitiones Arithmeticae* al caso de tres variables (ver sección 2.1.3). En este desarrollo, con las formas ternarias en el campo numérico, Gauss introduce una notación cercana a la matricial para designar estas formas cuadráticas y sustituciones lineales, donde observa que la compuesta de sustituciones lineales es una sustitución lineal y entrega una expresión explícita de esta compuesta.

En el mismo año, Euler se interesó por examinar el problema de representar números enteros como suma de cuadrados, lo que lo llevó a estudiar las sustituciones lineales. En este trabajo, Euler representó una sustitución lineal con la ayuda de una notación muy próxima a la notación matricial actual[14] y al igual que Gauss, estableció que la compuesta de dos sustituciones lineales es también una sustitución lineal, y entregó además, una representación explícita de la compuesta (Euler, 1798, pp. 306-309)[15]. Lo novedoso en este nuevo enfoque, es que Euler le proporciona a las sustituciones lineales un estatus de objeto matemático perteneciente a otra teoría, como lo es la teoría de grupos desarrollada posteriormente por otros matemáticos, tales como Cayley y Sylvester (1858) entre los más importantes.

En conclusión, retendremos que el análisis propuesto por Euler y Gauss sobre el sentido operacional de las sustituciones lineales, que la compuesta de dos sustituciones lineales es también una sustitución lineal, junto con la notación introducida y el tratamiento algebraico dado por Eisenstein (ver sección 2.1.3) a las sustituciones lineales, pone en relieve a la

---

[14] Es una notación bajo la forma de un n^2 -upla en lugar de un arreglo rectangular $n \times n$.

[15] Citado por Dorier (1997).

sustitución lineal (TL) con un rol de objeto, dentro de una teoría que probablemente se veía venir (la teoría de matrices o de la propia TL).

Encontramos en esta parte de la historia, que el concepto de la TL se revela mucho antes que su notación matricial. Sin embargo, el discurso en la enseñanza suele ser al revés. Su formulación es prematura y el tratamiento con matrices no da espacio para entender su sentido unificador, lo que no favorece mucho a la construcción del concepto.

2.1.3 Sustituciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

A partir de la primera mitad del siglo XIX se desarrolla de manera significativa el estudio cualitativo de los sistemas lineales, en el marco de la teoría de los determinantes. En este estudio, se perfila un acercamiento de diversos matemáticos en torno de métodos cada vez más próximos a una forma teórica cuyos vínculos se vuelven cada vez más explícitos (Dorier, 2000). En este contexto, Eisenstein retoma las notaciones y resultados de Gauss y los hace más operacionales aún.

En (1844-1845) G. Eisenstein[16] en sus trabajos de formas cubicas ternarias con coeficientes enteros, introduce para las sustituciones lineales, una representación que llamó *sistemas* cuya notación es muy próxima a la notación de matriz.

$$\begin{Bmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{Bmatrix} = (S)$$

También él utiliza, al igual que Gauss y Euler, la expresión de la compuesta de dos sustituciones lineales, que corresponde a la expresión de la compuesta de TL (o en términos matriciales, al producto matricial) y observa que este producto o compuesta no es conmutativo. Uno de los puntos más innovadores de su trabajo es el uso de escrituras algebraicas para el cálculo y resolución de ecuaciones del tipo $SX = S'$ con S y S' dos

[16] (Dorier, 1990)

sistemas. En esta obra, Eisenstein utiliza también un *sistema inverso* de un sistema de determinante igual a 1, lo que actualmente sería la inversa de una matriz de determinante 1 o en términos de sustituciones lineales (TL) la sustitución lineal inversa de una sustitución lineal, cuya representación como sistema tiene determinante 1. Además, él observa que este sistema inverso tiene coeficientes enteros (eso es por el hecho que le determinante es 1) y utiliza la notación $1/S$ para designar esta nueva sustitución inversa del sistema S de determinante 1.

Un punto innovador todavía, que otorga Eisenstein, es el tratamiento sistemático de una escritura algebraica en relación a las sustituciones lineales y su producto (o compuesta) en donde aparecen desarrollos como el siguiente:

$$S\times\left(\frac{1}{S}\times S'\right)=S\times\frac{1}{S}\times S'=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Bmatrix}\times S'=S'$$

O en un tratamiento de resolución de ecuaciones $S\times X=S'$ donde utiliza el hecho que $\frac{1}{S}\times S\times X=X$ para deducir que $X=\frac{1}{S}\times S'$. Una tal libertad en el uso del simbolismo algebraico, es un hecho destacable e innovador para la época, dado que este tipo de prácticas sólo estaba reservado para dominios numéricos.

En un plano paralelo a los sistemas de ecuaciones lineales numéricas se encuentran las ecuaciones diferenciales lineales, ambos serían un motor principal en el avance de la teoría de determinantes y de la teoría lineal. La solución general de la ecuación diferencial lineal se obtiene como la suma de una solución particular y la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada, guardando la misma expresión que la solución general de un sistema de ecuaciones lineales numéricas. Esta representación, de la solución general de sistemas lineales, numéricos o diferenciales, se inscribe en un modelo lineal, que en términos actuales, se expresa como $T(u)=v$ con T una transformación lineal.

Además, podemos considerar que el concepto transformación lineal es una concepción que integra distintos contextos lineales, sacados de dominios algébricos o geométricos pero también de problemas físicos que conducen al estudio de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales (cuerdas vibrantes, problemas de amortiguación, etc.), lo que muestra el aspecto unificador y generalizador de la noción.

2.1.4 Sustituciones lineales y matrices

Los hechos establecidos por Euler, que la compuesta de dos sustituciones lineales es una sustitución lineal y que proporciona una representación del producto de estas notaciones, se revelan inspiradores para el interés de ciertos cálculos de determinantes. Augustin Louis Cauchy reconoció explícitamente que el trabajo de Euler (1798) le inspiró el resultado sobre el determinante de la compuesta $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Cauchy, 1815)[17]. De hecho, el estudio de las sustituciones lineales se incorpora a la teoría de determinantes y es la fuente de los primeros resultados sobre las matrices (Dorier, 1997).

Observando más de cerca lo que propone Euler, lo que parece importante, y que salta a la vista, no es la identidad de las ecuaciones con el producto de los determinantes dada por Cauchy, sino la acción dada a las sustituciones lineales (TL) que lleva al nacimiento del concepto matriz, que es otro hecho que muestra a la transformación lineal surgir mucho antes que el concepto de matriz.

Por otro lado, el trabajo de Gauss en 1798 fue uno de los primeros que introdujo una escritura matricial para las formas cuadráticas, que corresponde a la matriz simétrica asociada a una forma cuadrática y que actualmente se utiliza. Más precisamente, Gauss introduce las notaciones (a, b, c) y $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$ para representar las formas cuadráticas

[17] (Dorier, 1990)

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ y $ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$ respectivamente. En términos modernos la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se representa por la matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Al igual que Lagrange, Gauss utilizó transformaciones lineales en gran parte de sus trabajos y fue uno de los primeros que introduce una escritura matricial para este tipo de transformaciones.

En 1846, con el apoyo de la teoría de determinantes A. Cayley y C. Hermite redemuestran los resultados de Euler. Sin embargo, fueron los trabajos de Ferdindad Eisenstein (1844-1845) y de Arthur Cayley (1858), entre otros, los que permitieron poner las bases de la teoría de las matrices. En un artículo A. Cayley retoma todos los resultados conocidos de la época e introduce la matriz cuadrada con una notación más próxima a la actual y de carácter más formal. Muy cercano a la idea de estructura algebraica enuncia las principales propiedades algebraicas de matrices cuadradas, que en el lenguaje moderno equivale a decir que el conjunto de todas las matrices cuadradas del mismo orden constituyen un álgebra.

> *"... les matrices (de même ordre) se comportent comme de simples quantités; elles peuvent êtres additionnées, multipliées ou composées ensemble, etc... "*[18]
>
> (Cayley, 1858)

En consecuencia, el nacimiento y evolución de la TL que ha conocido la actividad matemática fue en sus inicios dentro de un contexto geométrico, con las transformaciones geométricas (la proyección y transformaciones ortogonales), y *a posteriori* con los cambios de ejes coordenados o sustituciones lineales que se acercaron más a la idea de lo que actualmente se conocen como matrices. Observamos además, que a la TL se le puede distinguir, por un lado, como un potencial generador de soluciones y por otro, como un elemento simplificador al tratamiento dado.

---

[18] Traducción citada en Dorier (1990) del artículo de A. Cayley (1858). *A memoir of the theory of matrices.* publicada en Cayley (1963) T.2. pp. 475-496.

2.1.5 La TL como un objeto matemático

A fines del siglo XIX, como consecuencia de la utilización cada vez más general de la noción de sustitución lineal, al pasar de la dimensión finita a un número infinito de variables, surgieron las primeras apariciones del enfoque axiomático para la transformación lineal. En 1888 Peano utilizó el lenguaje y algunos de los resultados obtenidos sobre sistemas lineales en un artículo titulado *"Intégration par séries des équations différentielles linéaires"*[19] donde presentó un estudio de un sistema de *n* ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con *n* indeterminadas. El enfoque que utilizó (la norma euclidiana, los valores propios de una sustitución lineal) fue muy moderno, lo que le permitió salirse del cuadro geométrico mostrando el aspecto generalizador y unificador de la transformación lineal y espacios vectoriales.

En el mismo año, retomando las ideas de Grassmann pero con una nueva visión, Peano entregó las primeras definiciones muy generales de espacios vectoriales sobre **R** bajo el nombre de *sistemas lineales* y de aplicaciones lineales bajo el nombre de *transformaciones lineales*, que son muy próximas a las definiciones axiomáticas actuales. También Peano denominó con el nombre de *sustituciones* a lo que actualmente se llaman endomorfismos, es decir, una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo, y observó que sobre las transformaciones lineales se pueden definir operaciones de suma, de multiplicación por un escalar y de compuesta. A posteriori, Burali-Forti C. y Marcolongo R. (1912) en su trabajo sobre los métodos vectoriales y sus aplicaciones, presentan su propia definición de espacio vectorial bajo el mismo nombre de sustituciones lineales. Lo novedoso de este trabajo, es que, en la introducción, ellos hacen un estudio sobre las homografías vectoriales[20] del espacio geométrico. Trabajo que permitió unificar las

---

[19] Citado en Dorier (1990).

[20] En lenguaje moderno corresponden a transformaciones lineales del espacio sobre sí mismo, es decir, endomorfismos del espacio vectorial geométrico.

notaciones vectoriales (que físicos y matemáticos procuraban sintetizar) y difundir un enfoque axiomático de la TL en términos del espacio afín euclidiano.

En el contexto de la enseñanza, las diferencias en términos sociales, psicológicos o institucionales son tales que el trabajo en la clase no podría sino seguir de muy lejos la génesis histórica de la TL. Habiendo constatado que la organización del concepto enseñado no sigue en su conjunto la progresión histórica del saber o por el contrario lo que pudo hacer obstáculo (las técnicas perfectas, alejadas de una realidad más intuitiva), se trata de encontrar un equilibrio entre su coherencia histórica y su estructura única y general, procurando unificar concepciones previas, naturalmente diferentes. En este sentido, la aplicación de la TL pone en juego procedimientos y técnicas conocidas en diferentes contextos de la misma manera. El siguiente esquema resume cómo emergió la TL como un concepto unificador.

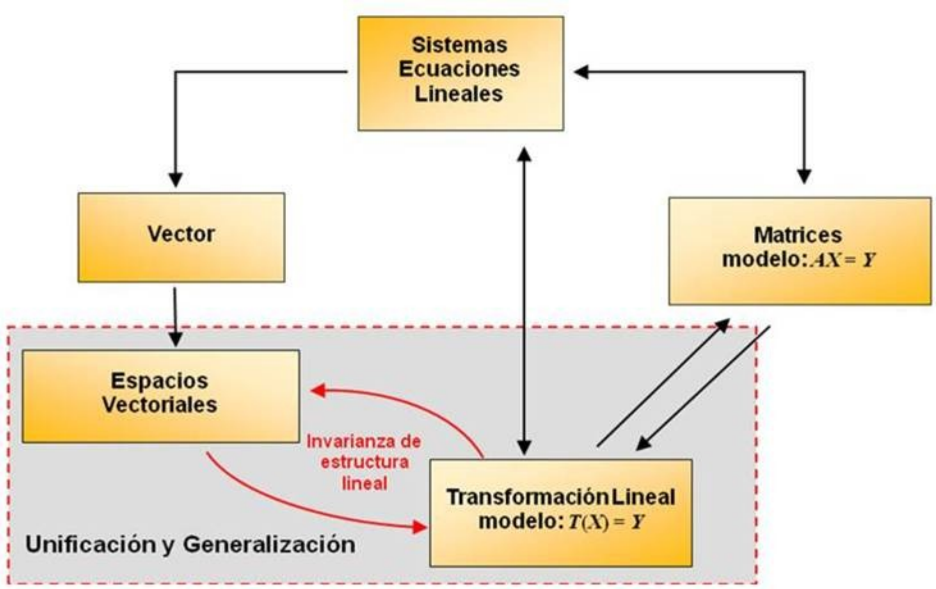


Figura 1. La TL como concepto unificador y generalizador según la historia

La TL no representa una excepción en la historia de las matemáticas. Hechos históricos ponen de manifiesto que otros conceptos matemáticos centrales (números, funciones, operaciones…) se habían concebido operacionalmente mucho antes que sus definiciones estructurales y representaciones fueran inventadas. Este hecho toma importancia para la organización del sentido unificador, poniendo el acento en que las concepciones operacionales y estructurales de una misma noción matemática no son mutuamente excluyentes (Sfard, 1991) que es el propósito de la próxima sección.

2.2 La naturaleza dual de conceptos matemáticos

Al referirse a un concepto matemático Sfard (1991) se refiere a dos tipos diferentes de concepciones que se revelan en su definición. Una, el nivel abstracto del concepto que se refiere a la descripción estructural como un objeto matemático, y la otra, la concepción operacional que habla del tipo de descripción sobre los procesos algoritmos y acciones acerca de la construcción del objeto. Partiendo de un análisis de diferentes definiciones y representaciones matemáticas, Sfard llega a la conclusión que la apariencia de estos dos tipos de saberes puede ser enfocada de dos maneras fundamentales:

- *estructural*: lo que invita a la contemplación, lo que genera conocimiento, lo que se puede reconocer "de una ojeada" y manipularlo en conjunto, lo instantáneo e integrador.
- *operacional*: lo que invita a la acción, lo que genera el resultado, lo dinámico, lo secuencial, lo detallado.

Según ella, algunas discusiones tratan estas dos formas de conocimiento como si fueran distintas y mencionan que la matemática puede ser dividida en "*lo abstracto y lo algorítmico*" (Halmos, 1985) o en "*lo declarativo y lo procesal*" (Anderson, 1976) e incluso en algunas categorizaciones ampliamente aceptadas de comprensión matemática en "*lo conceptual y lo procesal*" (Lesh y Landau, 1983; Hiebert, 1985). Otras también fijan algunas distinciones sobre la *matemática dialéctica* y la *matemática algorítmica*. Mientras la matemática algorítmica se ocupa de los procesos de cálculos, la matemática dialéctica es una ciencia rigurosa y lógica donde los objetos y propiedades existen o no existen. Parafraseando a Henrici (1974), Sfard inserta la siguiente cita para ilustrar que una actividad matemática puede ser vista como una intrincada interacción entre versiones operacionales y estructurales de las mismas ideas matemáticas:

> *"The structural approach invites contemplation; the operational approach invites action; the structural approach generates insight; the operational approach generates result"*
>
> (Henrici, 1974)[21]

En su trabajo Sfard ilustra como en el proceso de formación de un concepto, estos dos saberes se sustentan mutuamente en una asociación ineludible. En el mismo sentido que en la física, dónde las entidades en el nivel subatómico deben ser consideradas tanto como partículas y como ondas para permitir la plena descripción y explicación de los fenómenos observados (Otte, 1984; Steiner, 1985), estos dos saberes se alimentan recíprocamente. Aunque en apariencia estas versiones parecen incompatibles, las concepciones operacionales y estructurales de la misma noción matemática parecen ser facetas de la misma cosa. Esto hace, según Sfard, que "*cualquier actividad matemática puede ser vista como una intrincada interacción entre versiones operacionales y estructurales de las mismas ideas matemáticas*". En una compleja dependencia mutua (necesaria casi para cualquier actividad matemática) la noción como un proceso confiere un cierto potencial a las acciones requeridas en la demanda para abstraer un producto: el objeto matemático. Así mismo, la concepción estructural es la representación que exprime la información operacional en un todo compacto unificado del proceso que la produjo. Por consiguiente, los elementos operacionales y estructurales no pueden separarse, ambas componentes pueden ser vistas como una intrincada interacción de las mismas ideas matemáticas, para utilizar un conocimiento tanto como sea posible.

---

[21] Citado en Sfard (1991).

Esta visión dual puede parecer legítima para tener un sentido de lo que significa trabajar en un sistema teórico sin tratar de reproducir simplemente un método aprendido de memoria, y que funciona, aparentemente, solamente en el caso o la situación original. En efecto, el desarrollo de un concepto parece conducir a la tesis del "circulo vicioso" que implicaría que una habilidad no se puede desarrollar plenamente sin la otra. Por un lado, una persona debe ser hábil en el desempeño de algoritmos con el fin de lograr una buena idea de los "objetos" que se ven envueltos en estos algoritmos, y por otro lado, para tener pleno dominio técnico, se debe disponer de estos objetos, ya que sin ellos el proceso carece de sentido y por ende, difíciles de ejecutar y recordar (Sfard, 1991).

Por lo demás, debido a la compleja naturaleza de su dependencia mutua, parece inevitable que *"en el proceso de aprendizaje, la comprensión del estudiante – ese sentimiento de competencia y dominio que acompaña la capacidad de "ver" las estructuras abstractas- a veces se derrumbe detrás de la habilidad técnica"* (Sfard, 1991). Esto implica utilizar una cierta cantidad de "artillería" matemática acompañada de dudas sobre el significado de los conceptos y por un sentimiento de insuficiencia de comprensión, algo así como aplicando "*reglas sin razones*" (Skemp, 1976). La habilidad de ver un concepto matemático tanto *como un proceso y como un objeto* sería entonces indispensable para una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Según Sfard (1991), la concepción estructural sería, probablemente, lo que subyace en la comprensión relacional definida por Skemp (1976) de "*saber qué tanto y por qué hacer*" o teniendo ambas *"reglas y razones*".

2.2.1 La dualidad proceso/objeto en la formación del concepto

En una perspectiva de desarrollo de competencias (a través de resolución de problemas), entre estos dos tipos de saberes matemáticos, las descripciones estructurales parecen ser más abstractas. De hecho, con el fin de hablar de objetos matemáticos, debemos poder tratar con los productos de algunos procesos sin preocuparse de los propios procesos (Sfard, 1991). En el caso de la TL, la historia muestra que su estructuración no apareció en primer lugar. Los resultados y las técnicas sobre las sustituciones lineales fueron fuertemente desarrollados sin la utilización explícita del concepto. Incluso, prefirieron solucionar sistemas infinitos de ecuaciones lineales porque los procedimientos de las sustituciones lineales eran bien conocidos y naturales. La búsqueda sistemática de invariantes lineales condujo a introducir nuevos sistemas lineales (sistemas de n-ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con n indeterminadas) y lograr así, poco a poco, la unificación que la estructuración de la TL permite. Por consiguiente, parece que el acercamiento estructural debe considerarse como la fase más avanzada de desarrollo del concepto y por lo tanto, difícil de alcanzar.

Se puede comprender la elección hecha en la enseñanza de la TL de pasar por espacios abstractos (funciones, polinomios, subespacios generados…etc.) a espacios euclidianos $\mathbf{R}^n$ luego por las matrices. El trabajo permanece reducido sólo a su función técnica y se limita a la simple determinación de resultados sin hacer interpretaciones explícitas sobre consideraciones estructurales, tan costosas para los estudiantes. Una manera práctica de abordar la abstracción del concepto de la TL, puede ser, desarrollando el proceso de comprensión por un juego dialéctico entre estas dos formas de aprehender el objeto. Utilizando el razonamiento del concepto como herramienta y el mismo concepto considerarlo como objeto de estudio, de análisis, de desarrollo teórico. Parece bien que se pueda relacionar con la formación estructural del concepto.

Con cierta evidencia empírica en la historia de los conceptos número y función, el trabajo de Sfard (1991) ilustra como la utilización del proceso de formación del concepto precede al desarrollo estructural. Según ella, primeramente, estaría la fase pre-conceptual en que matemáticos se habrían acostumbrado a tipos de cálculos y habilidades técnicas, ciertas manipulaciones rutinarias, todos tratados como procesos. Luego, habría un enfoque predominante operacional, que puede activar ciertos cambios en ciertos funcionamientos, que de prohibido pasan a ser aceptados por su utilidad. Y finalmente, la fase estructural, en que ciertas operaciones alcanzan el estatus de objeto matemático hecho y derecho.

A partir de sus observaciones del análisis histórico, Sfard (1991) nos enseña que tres pasos se pueden distinguir en el proceso de formación del concepto en el aprendizaje. Primero, debe ser un proceso realizado en los objetos ya familiares, luego debe emerger la idea de convertir a este proceso en una entidad autónoma, y finalmente, la habilidad de ver esta nueva entidad como un enfoque integrado. Estas tres etapas en la elaboración de conceptos son llamadas *interiorización, condensación y reificación* respectivamente y se describen así:

- **la fase de interiorización**, el estudiante se sitúa al nivel de los procesos e interioriza las acciones relacionadas a la manipulación de estos procesos. Él manipula, por ejemplo, expresiones algebraicas de naturaleza funcional, sustituyendo valores numéricos a la variable e interiorizando, a través de estos cálculos, la idea de dependencia subyacente en los procesos funcionales.

- **la fase de condensación** es el periodo donde las secuencias de las operaciones van a ser condensadas en unidades más cómodas, es decir donde un proceso dado va a poder ser considerado como un todo, sin tener que entrar en los detalles de su ejecución. Por ejemplo, si se trata de funciones, la persona podrá manipular una función como un todo sin ser obligada a considerar valores específicos, asociar globalmente funciones y representaciones gráficas, combinar pares de funciones, determinar la inversa de una función.

- **la fase de reificación** puede ser definida como la capacidad súbita de ver algo familiar como algo totalmente nuevo, la capacidad de ver de una sola vez un proceso como un objeto autónomo. Varias representaciones del concepto serán semánticamente unificadas por esta nueva abstracción. Sfard señala aquí, que mientras la interiorización y la condensación son cambios graduales y cuantitativos la reificación es un salto cualitativo instantáneo. Las variadas representaciones del concepto se unifican por una construcción imaginaria.

Acerca del modo operacional de las nociones matemáticas, Sfard (1991) otorga toda la atención para una visón profunda en los procesos subyacentes de los conceptos matemáticos, quizás incluso, ella agrega, *un cierto grado de dominio en la realización de estos procesos, a veces debería ser visto como una base para entender tales conceptos más bien que como resultado* (Sfard, 1991). Con este enfoque, la actividad de construcción de conocimientos unificadores, por ejemplo, puede verse favorecida con la combinación de los procesos subyacentes y otras operaciones de cálculos a través del desarrollo operacional del propio concepto interpretado en diversos contextos. Ello permitiría de atribuirle un sentido al concepto (en función de los conceptos puestos en contribución), de reconocer las relaciones establecidas con otras nociones y las interpretaciones dadas. En otras palabras, comprender la noción como un objeto teórico descrito de una manera general (Sierpinska, 1995). De esta manera, el uso de las habilidades técnicas y métodos matemáticos pueden ayudar a explicitar el proceso de formación de una noción, pero debe haber también determinadas operaciones que activen el pasaje a la reflexión a nivel de objeto. Es decir, actividades poco frecuentes, que pidan trabajar el sentido del concepto, que puedan parecer más difíciles que lo común, que comprometan una reflexión inhabitual[22] y en consecuencia, que permitan acercarse a la descripción estructural de la noción.

De hecho, el hacer cosas en la utilización sensata y eficaz de los conceptos sería, de algún modo, la manera de ponerse en contacto con la construcción abstracta del concepto. Una idea de Sfard inspirada de Piaget (1970) señala que "*la abstracción [matemática] no se abstrae del objeto sobre el que se actúa, sino de la propia acción"*. También, esta suposición ha permitido dirigir durante el último tiempo la investigación teórica y empírica sobre el pensamiento matemático de otros investigadores (Trompson, 1985; Sinclair y Sinclair, 1986; Dubinsky y Lewin, 1986; Dörfler, 1987, 1989)[23].

---

[22] En el sentido "*levier meta*" (Dorier, 1997).
[23] Citado por Sfard (1991).

2.2.2 La simplicidad con la concepción abstracta

En su artículo Sfard (1991) muestra como estos dos tipos de conocimientos, operacional y estructural, se sustentan recíprocamente en una necesidad de perspectiva dual. En efecto, en determinadas fases de la formación del conocimiento la ausencia de una concepción estructural podría obstaculizar aún más el desarrollo de los métodos factibles en la resolución de un problema. La enseñanza de la TL, por ejemplo, bajo la óptica del tecnicismo matricial y la resolución de sistemas lineales, es un ejemplo de este tipo de entendimiento que daría cuenta de la carencia del sentido de esta noción: memorizando las técnicas y tipos de problemas. Desarrollar la comprensión de cómo y por qué este procedimiento funciona y lo que significa, simplificaría las resoluciones de problemas, aumentaría las habilidades de aprendizaje por ende, la profundización de nuestra confianza en lo que estamos haciendo sin necesidad de memorizar. Favoreciendo la estructuración del concepto, la intervención de la TL tendría un carácter simplificador al momento de establecer estrategias de resolución frente a problemas cada vez más complejos (transformaciones de Laplace, de Fourier, etc.).

Los objetos abstractos simplifican nuestra actividad mental para una navegación eficaz en la red de los conceptos y métodos posibles, para controlar la resolución de un problema. Así por ejemplo, la TL como concepto unificador, permite la reconciliación de las propiedades lineales en el contexto geométrico y analítico en el caso de la integral. La información concebida sólo operacionalmente, aunque absolutamente indispensable y aparentemente suficiente para la solución de problemas, no podría ser fácilmente procesada ni tampoco favorecería el establecimiento de vínculos entre los conocimientos. La distancia entre los procesos del cálculo avanzado y las entidades concretas o los procesos más elementales de cálculo, es demasiado grande para ser comprendidos en su totalidad. Lo que sería una carga totalmente contraproducente para alguien tratando de resolver un problema complejo. Por consiguiente, se hace necesario una forma de pensar un tanto simplificada y estructurada, que exprima la información operacional en un todo compacto y que sirva como enlace para la información más detallada (Sfard, 1991).

Sfard (1991) inserta la siguiente cita de Poincaré de la cual se podría recoger cómo estos objetos abstractos cuidadosamente organizados extenderían nuestra memoria de trabajo:

> *" . . . I can perceive the whole of the [lengthy mathematical] argument at a glance. [Thus] I need no longer be afraid of forgetting one of the elements; each of them will place itself naturally in the position prepared for it, without my having to make any effort of memory."*
>
> (Poincaré, 1952)

En conclusión, retendremos que la construcción de saberes a un nivel jerárquico superior, vienen a otorgar una nueva significación a los procesos iníciales. Que la transición de procesos algorítmicos a objetos abstractos aumenta nuestro sentido de entendimiento de la matemática, a través del pensamiento deductivo, y que simplifica los métodos y las técnicas de los problemas, evitando el tener que memorizar cada vez.

2.2.3 La complejidad con la abstracción de un concepto

Hacer un espacio para desarrollar el sentido de un concepto a nivel abstracto en un curso de matemática, es proporcionar tiempo para aplicaciones en diferentes contextos matemáticos y extra matemáticos. Buscamos la unificación de resoluciones que recurran a conceptos y métodos matemáticos conocidos, en esto, una dificultad estaría presente: "*el desarrollo de una habilidad está estrechamente vinculada a la comprensión del concepto subyacente a la habilidad"* (Carpenter y otros, 1980)[24]. En particular, la abstracción de la TL pide desde ya trabajar el sentido de las propiedades lineales en la comprensión de ciertos contextos que el mismo concepto debería poder explicar. Para muchos estudiantes, este trabajo, que hace una abstracción de los procesos utilizados, es difícil y costoso de concebir. Demanda de tiempo de la investigación y no permite reproducir un modelo de memoria; ellos aceptan el carácter abstracto y general de la enseñanza pero no ven la utilidad de su aplicación y

---

[24] Citado por Sfard (1991).

simplemente se niegan a este aprendizaje. Esta preocupación nos parecerá un poco menos sorprendente si pensamos que la abstracción de un concepto requiere de un cambio ontológico, un salto cualitativo de pensamiento (Sfard, 1991, Dubisnsky, 1991). Tal trastorno conceptual sería siempre un fenómeno complejo, especialmente cuando las competencias menos formalizadas deben ser susceptibles de ser reintegradas por un proceso de abstracción del uso de un concepto unificador.

Desarrollar una actividad matemática que pretende explicar la función de las concepciones estructurales con manipulaciones de conceptos específicos, en los que se basan los cálculos, parece conducir inevitablemente al "círculo vicioso": con el fin de convertir un proceso como un objeto abstracto, los procesos manipulados en el proceso más simple requieren trabajar algunos procesos del nivel superior y beneficiaría entonces la comprensión del sentido del objeto que el proceso debería construir. En otras palabras, ambas habilidades matemáticas - *destreza y comprensión* - se alimentarían mutuamente en una asociación ineludible (Sfard, 1991). Por lo demás, una tal abstracción, que aporta la comprensión relacional, es difícil de lograr, requiere de mucho esfuerzo y puede venir cuando menos se espera, a veces, de repente, incluso para algunos matemáticos[25] profesionales.

El concepto de modelización puede verse como una manera de ayudar a resolver este conflicto. De hecho podría estimular el interés de los estudiantes en la búsqueda de vínculos entre la teoría y el contexto de utilización y favorecer el desarrollo del pensamiento, de las competencias y de las herramientas necesarias para unificar procesos iniciales y aproximarse a un nivel superior. Para definir un cuadro de operacionalización de nuestro objetivo, primero nos serviremos de algunas caracterizaciones necesarias para la modelización de un concepto que hemos proyectado sobre la actividad matemática en la resolución de problemas.

---

[25] Halmos (1985) recuerda los tiempos en que él era un estudiante de la universidad: a pesar de "trabajar enérgicamente" en el concepto de lambda-matrices, él *"realmente comenzó a entender cuál era su tema recién alrededor de cuatro o cinco años más tarde*" (Sfard, 1991).

2.3 La modelización

Yves Chevallard (1989) ha propuesto, particularmente sobre la enseñanza del álgebra, una teorización de la actividad matemática, con la ayuda de la noción de modelización, palabra de la que extiende el sentido que usualmente tiene en la expresión “modelización matemática de un sistema extra matemático”, considerando que la actividad matemática consiste en modelizar sistemas que pueden ser tanto matemáticos como extra-matemáticos (física, química, biología, economía,...). Él habla de “matematizado” para designar el sistema matemático que se va a modelizar y de “matemático” para hablar del modelo que se fabrica. El matematizado hace entonces la función del objeto de estudio, la matemática siendo la herramienta de estudio. Desde ese momento, él convoca la atención sobre varias características del proceso de modelización[26]. Hay recurrencia en el proceso: un objeto matemático puede muy bien, en su momento, ser tomado como sistema, como matematizado. La relación de modelización es reversible, es decir, el sistema puede aparecer al revés, como un modelo de su modelo. Consideremos la siguiente figura

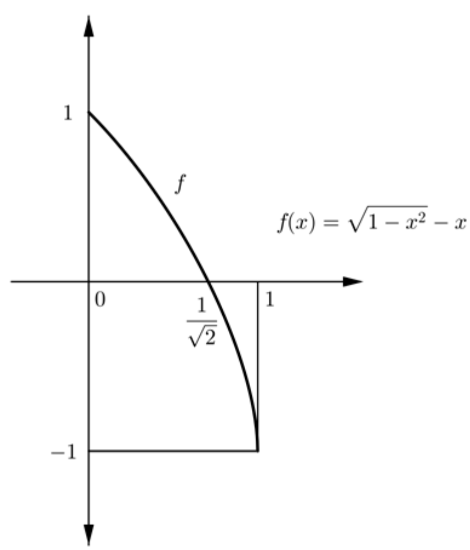


Figura 2. La TL descrita por un modelo geométrico

[26] Ver (Chevallard, 1989).

El cálculo de la integral definida puede ser modelizado por la propiedad lineal de la integral $\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x\,dx$ como la diferencia de las áreas: la de un cuarto de la circunferencia (de radio 1) y el área del triángulo (de base y altura l), o sea, $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}28539\ldots$ Inversamente, la figura anterior (Figura 2) puede ser mirada como un modelo geométrico de la propiedad lineal, ya que el valor del lado izquierdo de la integral o la validación de la propiedad lineal se puede ejecutar aproximándose por áreas de figuras geométricas simples (dos triángulos rectángulos de altura 1 y bases $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ respectivamente). La diferencia de estas áreas $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}2071$ corresponde, aproximadamente, al valor de la integral inicial. En el límite, esta aproximación coincide con el valor exacto de la integral.

Esta relación parece invertirse más en la enseñanza en la cual se utiliza el sistema representado para explicar el modelo enseñado, particularmente en algunos conceptos del álgebra lineal. El movimiento del estudio puede, al menos parcialmente, cambiar de sentido; un conocimiento sobre uno de los dos términos de la relación de modelización puede ser transferido al otro término. En el lenguaje usual matemático se hablaría de interpretaciones, en particular, cuando matematizado y matemática pertenecen a sectores que son vistos como diferentes Chevallard (1989). Por ejemplo, el estudio algebraico del cambio de coordenadas o del sistema de ejes ortogonales (que modeliza la rotación del punto) permite mostrar que la rotación de un ángulo θ se expresa con la ayuda de la transformación lineal, que está completamente determinado por la rotación de los vectores basales; inversamente, el estudio algebraico de la transformación lineal rotación, puede apoyarse sobre la correspondiente transformación geométrica, como modelo geométrico. Al final, se puede asimilar una TL a la transformación de los vectores basales y más generalmente, identificar una TL por la acción en una base finita.

En el cuadro de esta teoría de la modelización, “el objetivo de la actividad matemática es de producir conocimientos sobre sistemas (matemáticos o extra-matemáticos)” construyendo modelos matemáticos de estos sistemas. “Los problemas adquieren sentido sólo en el contexto del sistema estudiado: las preguntas surgen del sistema estudiado, las soluciones corresponden a los sistemas estudiados”, deben ser producidas allí. “Los modelos matemáticos no son aquí el punto de partida, ni el objeto del estudio; ellos son herramientas de producción de conocimientos sobre los sistemas modelizados”. Con el fin de pensar en un concepto abstracto, el trabajo del sentido unificador de la TL justifica la modelización. Coherente con el pensamiento del ingeniero, este trabajo hace modelización a dos niveles; dos tipos de empleos y estudios (usualmente separados, como lo testimonian las oposiciones tradicionales entre matemática y aplicaciones de la matemática, entre problemas “abstractos” y problemas “concretos”). Primeramente, a nivel de resolución de problemas, considerando que un aspecto de la actividad se refiere a la articulación proceso-objeto en que la TL puede ser utilizada como herramienta (la matemática) de resolución sobre el mismo concepto (el matematizado) en la producción de las propiedades lineales. En seguida, a nivel teórico, considerando que el pasaje de la extra-matemática a la intra-matemática no es más que la cara visible de un proceso general, obrando en el propio seno del trabajo matemático (Chevallard, 1989), el concepto unificador de la TL puede emerger como un concepto formal.

La modelización intra-matemática puede contemplar la puesta en matemáticas por construcciones teóricas, donde a partir de un dominio ya matematizado, se definen objetos, se construyen reglas o axiomas que traducen las relaciones entre los objetos con el fin de construir un modelo. Según Dupin (1995), la idea de modelización intramatemática se puede encontrar en la similitud con la física que puede resumirse por la correspondencia siguiente:

Matemática	Física
construcciones teóricas	modelos
dominio ya matematizado	real físico

Con este enfoque, las matemáticas pueden ser consideradas como una ciencia experimental: cada objeto matemático es una herramienta construida para resolver clases de problemas. Pero, entonces esta herramienta puede por sí misma ser estudiada, como elemento de una estructura teórica, de un nivel superior, que viene a proporcionar una nueva significación a las propiedades del objeto inicial, luego validado como realización particular de una teoría general (Johsua M. A., Johsua S., 1987). Mostrar por ejemplo, que hay un isomorfismo entre una representación geométrica y algebraica del concepto de la TL, y en consecuencia que dos procedimientos distintos de cálculo proporcionan necesariamente el mismo resultado, es modelizar el objeto inicial de manera más general. Es decir, exponer un pasaje entre los invariantes geométricos (paralelismo, origen,…) a las propiedades algebraicas de la TL.

Según Chevallard (1991) la modelización matemática puede ser considerada como un proceso de “contextualización” de los objetos matemáticos tomándolos como instrumentos de modelización de un sistema matematizado (Gascon Pérez, 1996). En este sentido, la modelización permite el pasaje de un sistema matemático contextualizado a una forma manipulable por herramientas matemáticas, llamado modelo matemático. En la trilogía de Astolfi y Drouin (1992), el modelo que resulta de la modelización matemática (o matematización) retiene en primer lugar la dimensión formal. Esto lo distingue de las otras formas de modelos científicos que privilegian a veces el aspecto figurativo (con la imagen: maqueta, esquema, analogía, etc) con la creación de esquemas o el lado construido con la construcción de la teoría (Dupin, 1995). Esto implica (pero no exclusivamente) una definición de las variables, de los parámetros, y una puesta en ecuaciones/relaciones del modelo.

2.3.1 Potencialidades de la modelización

Una de las primeras potencialidades asociadas a la modelización en la enseñanza de las matemáticas, es la ganancia del significado de los conceptos manipulados (Dupin, 1995). La integración de la modelización en cursos de la enseñanza de las matemáticas avanzadas introduce en la clase un planteamiento científico, donde se invita a los estudiantes a elegir y a discutir de manera concomitante los parámetros y las reglas pertinentes de un modelo previo, con el fin de construir un nuevo modelo. A pesar de la pertinencia, la coherencia, la consistencia de los argumentos que van en el modelo, el estudiante debe saber elegir y permitir inferir nuevos hechos a partir de los hecho dados. En el acto de la investigación, no se puede escapar al debate crítico del modelo antiguo para destacar las insuficiencias, los límites o permitir comprender el nuevo modelo (Brousseau, 2003; Ferrier, 2003; Legrand, 2003). Así, la construcción del modelo hace incluir a la vez las preconcepciones del modelo generalmente admitido, su insuficiencia y la ventaja del nuevo modelo para ganar en simplicidad y en fiabilidad y lo que cuesta en términos de significado y pertinencia (Dhombres, 2003).

La actividad de la modelización introduce también la puesta en ejecución de las dos concepciones de un concepto: la "operatoria" y lo "estructural" desarrollada por Sfard (1991) para favorecer una mejor comprensión en la formación del concepto. En su tesis Caron (2001) cita, del estudio de Orange (1997) sobre la utilización de la modelización en clases de biología, una declaración que enfoca más de cerca el papel complementario de estos dos enfoques en la búsqueda de un saber:

> *"la recherche d'un 'savoir-modéliser' est certainement identique à la recherche d'un savoir théorique pris dans tout son sens opérationnel."*
>
> (Orange, 1997)

La modelización es un proceso de construcción en que se puede sustituir la complejidad estructural por una complejidad funcional teniendo en cuenta la armonía (costos, fiabilidad,…) de la operación (Brousseau, 2003a). El modelo crea la matematización que a su vez permite la polivalencia gracias a fórmulas de igual estructura que dan cuenta de realidades muy diversas (Halbwachs, 1983)[27]. Así, por ejemplo, la unificación que la TL permite es tomada como un objeto que surge del estudio de las analogías experimentadas en diferentes contextos matemáticos. Estas analogías aportarían la prueba de polivalencia respecto del real matemático. Por consiguiente, el modelo lineal conjugaría varias propiedades o funciones que lo hacen muy interesante y apropiado para nuestro propósito, tanto de un punto de vista utilitario como de un punto de vista cognitivo para conferir a la TL una pertinencia a los ojos de los estudiantes, podría también favorecer la unificación deseada de los conceptos subyacentes. De hecho, podemos suponer que la modelización permite comprender por la acción las características enriquecedoras del modelo (Dupin, 1996).

2.3.2 Dificultades de la modelización

Para retomar la terminología de Dupin (1996) podríamos decir que el estudiante frente a la necesidad de interrogarse sobre las "razones" y las "causas" de los fenómenos, puede contentarse con un modelo cuyo aspecto explicativo lo satisface. De ponerlos en situaciones que requieren practicar una forma de planteamiento científico, serían poco sensibles a los aspectos predictivo, calculable y por ende económico del modelo. Esto trae posiblemente la necesidad de búsqueda de aplicaciones sutilmente complejas que permitan adaptarse progresivamente a la variabilidad de contextos de utilización, al carácter local o integral, e identificar los invariantes para reconocer la formalidad del modelo. Un trabajo de modelización completamente interesante y convincente sobre el rol de la noción en él. Un concepto matemático como la TL, que permite reemplazar de forma unificada nociones dispersas con el mismo sentido, a menudo por un modelo formal, se acompaña de una

27 Halbwachs, (Dupin, 1995) se refiere al modelo ondulatorio que proporciona las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell. "*En el final del siglo XIX, las notaciones vectoriales se imponen en la física. Después de un período de conflicto entre los partidarios de los cuaterniones de Hamilton y los partidarios de los conceptos de la teoría de Grassmann (en particular alrededor de las fórmulas de Maxwell para los cuales una notación sintética se imponía), un consenso se establece en torno a notaciones vectoriales estables que físicos y matemáticos procuran lograr (Reich, 1996)*".Citado por (Dorier, 2000).

simplificación pero también de una pérdida de visibilidad en relación al trabajo en los dominios iníciales (Robert A., 1998).

La modelización en la clase sufre también de una falta de tradición didáctica (Dupin, 1996). La simple declaración de una situación que implica un modo ajeno en el sector de conocimientos enseñados, complica inmediatamente la tarea de los estudiantes (Brousseau, 2003b). Como es en el caso de una verdadera modelización, ella introduce un nuevo contrato didáctico donde se incita a los alumnos el deber de formular hipótesis (Dupin, 1995). De ahí la importancia de propiciar en el estudiante un papel activo en la construcción del conocimiento de cambiar la actitud habitual en el aprendizaje, por ejemplo de la TL. Es un contrato muy costoso en tiempo y en inversión de la clase. Además, la forma de replantear la actividad matemática exige conocimientos por parte del profesor, que puede poner su gestión en peligro si no tiene el retroceso epistemológico necesario y las herramientas didácticas del contrato didáctico, del conflicto cognitivo y obstáculos epistemológicos (Legrand, 2003). Pero también, para otorgar más importancia a lo estrictamente formal para la simplicidad de las definiciones.

Además, la dificultad impuesta por el tiempo crea una tensión entre la voluntad de modelizar y la eficacia de la gestión (Dupin, 1995). Hacer practicar la modelización a los alumnos con la TL conduce inevitablemente, en la consideración de un "conocimiento que se enseña", a sustituir un conjunto de posibilidades de conocimientos y conocimientos alternativos ya conocidos, lo que implica un aumento muy importante de la complejidad didáctica (Brousseau, 2003b). La complicación es mayor si el método de la modelización incluye una noción abstracta como la TL para el estudio de sus mismas propiedades lineales, pero que, en su uso, hace prever la modelización como a la asociación de un concepto formado preferiblemente de modelos ya hechos (geométrico, integración,…), de un medio habitualmente más "teórico".

2.3.3 Características de los modelos

Un modelo es un medio, para un actante dado, de tratar un problema dado por el uso de un repertorio de conocimientos "restringidos" (Brousseau, 2003a). En específico, un medio unificador, porque permite representar algunas características generales no visibles ahí, porque algunas manipulaciones no son posibles ahí o porque la complejidad aparente del problema es demasiado grande. Según Dupin (1995) el modelo es indisociable de la clase de situaciones experimentales que se tiene la intención de tratar. Consiste en identificar algunos conceptos o relaciones de las situaciones problemas y en hacerles corresponder un objeto teórico para efectuar cálculos, para describir, predecir, explicar. Con la TL, una descripción teórica cuya relación con la situación objetivo permita la unificación de las propiedades subyacentes en el ámbito de la experimentación seguido de las acciones de la aplicación de la noción. En consecuencia, hay procedimientos distintos de cálculos que dan necesariamente el mismo resultado por la comparación de los valores; los calculados en el modelo y los correspondientes en el dominio objetivo, de las representaciones de la TL en los diferentes registros referente al marco teórico de Duval (1993).

Así entonces, es indispensable disponer de mecanismos controlados, de protocolos de la puesta en relación de la TL con la experiencia. Un candidato a modelo unificador se prueba según la reutilización de los resultados, según las características específicas presentes de su aplicación, según su funcionamiento en distintos puntos de vistas y cambios de marcos (Douady, 1983). El modelo posee ciertas características o funciones bien precisas que lo pueden definir (Dupin, 1995):

- *el modelo es consistente*: de modo *interno* (con sus diferentes componentes) y a la vez de modo *externo* (con la realidad que procura representar). Debe poder ser verificado en algunos casos y debe poder ser refutado en algunos otros. La unificación que la TL permite respeta los procedimientos razonados y organiza de manera coherente los recursos lineales.

- *el modelo es calculable*, en el sentido en que las interferencias controladas pueden ser producidas a partir de las relaciones de base del modelo. La TL puede conducir este cálculo sobre problemas semejantes que utilizan enfoques de resolución muy diferentes; al proponer un marco para la ejecución de la estrategia y de la vuelta sobre la solución.

- *el modelo es explicativo*, responde a una pregunta de coherencia, permite las puestas matemáticas de una representación en relación de una realidad compleja, el modelo crea espacios de comprensión y sentido. La TL como representación abstracta guarda los invariantes lineales de los procesos que la originan de una síntesis de diferentes representaciones de las propiedades lineales.

- *el modelo es predictivo*, por su aspecto "*calculable*" permite proporcionar objetos o valores significativos, los valores incompatibles son observables. En situaciones problemas, con la TL, se puede observar las variaciones supuestas inoperantes, condiciones fijas que no influyen en el modelo, variables lineales específicamente significativas que entran en el cálculo.

- *el modelo es pertinente a su objeto* efectivo con la realidad que procura representar, define los límites de validez del modelo. La TL permite un enfoque más teórico del problema; permite producir una parte heurística importante que se funda sobre la transformación lineal misma y sus relaciones con la base.

    - *es adecuado*; permite resolver el problema que justificó su uso. La TL permite descomponer un problema complejo en partes más simples.

    - *es eficaz*; admite resolución en condiciones económicas (costos, fiabilidad) óptimas. El uso de la TL evita cálculos repetitivos y resulta ser un medio económico en la resolución de problemas fuera del álgebra lineal.

La idea de modelización reposa sobre la necesidad de conceptualizar la TL como modelo unificador, interesándonos en los efectos de los modelos adaptados y en la explicitación del aprendizaje de la noción. El desarrollo de un cierto control sobre las diferentes representaciones, registros en diferentes lenguajes (algebraico, numérico, gráfico, natural) y del paso de uno al otro, es esencial para la emergencia del concepto en el desarrollo de las explicitaciones. Esto nos lleva a considerar un modelo por *niveles de explicitación* (Caron, 2004) en la articulación de los diferentes contextos de utilización.

2.4 Los niveles de explicitación en la formación de un concepto

La formación de un concepto con la modelización coloca el acento sobre el hecho que el mismo concepto es llamado a funcionar en diferentes situaciones conceptuales y técnicas. Esta formación es pensada para poner en funcionamiento características específicas del objeto en el desarrollo de la comprensión de cómo y porque ese procedimiento funciona y lo que significa, integrando una buena ejecución de los procedimientos (Sfard, 1991). Con este enfoque, la herramienta matemática en estudio, como estructura, pasaría a formar parte de una teoría a nivel superior para resolver clases de problemas de mayor diversidad. Para que la utilización sea eficaz será necesario dar prueba de las habilidades de análisis, de síntesis, de comunicación, así como de las capacidades de aprendizaje y el juicio crítico del trabajo realizado, el concepto *competencia* puede servir para caracterizar mejor la utilización del concepto en su formación.

2.4.1 Las competencias en la modelización de un problema

Caron (2004) introduce esta noción de competencia dentro de la perspectiva de la sociología del trabajo de De Terssac (1996). Presenta el concepto “competencia en la clase” introducido por Orange (1997) para conferirle un carácter didáctico, lo que permite traducir en clases las puestas en juego a la vez por la sociedad y por el individuo, de una “cultura científica”:

> *"comparte una tecnicidad, por supuesto, pero también con un "desarrollo de las estructuras mentales, de las herramientas intelectuales, de las capacidades de pensar que abren nuevas posibilidades de comprensión."*
>
> (Caron, 2004).

Las competencias inspiradas de De Terssac (Ibid) que ponen en relación el trabajo efectuado en la resolución de problemas y los conocimientos movilizados por un estudiante, son:

- las competencias de *explicitación* (los "saber-decir") para traducir lo que es, lo que hay que hacer y lo que se hizo;
- las competencias de *intervención* (los "saber-intervenir") para actuar poniendo en situación los conocimientos disponibles y transformando las situaciones encontradas con conocimientos reutilizables en otros contextos;
- las competencias de *evaluación* (los "saber-situarse") para identificar, legitimar y validar todo lo que se compromete en la acción.

Para la simplificación y la estructuración de la situación hay que tener una comprensión profunda de la situación real. Vemos, mientras que las competencias de explicitación son las adecuadas para traducir la realidad e interactuar con los conocimientos disponibles, las competencias de evaluación son las requeridas para extraer lo esencial en función de los objetivos propuestos en la tarea. En la modelización de la situación, las competencias de evaluación son solicitadas para identificar los conceptos y propiedades matemáticas para describir el problema, en tanto, la expresión en lenguaje matemático de una tal descripción requiere las competencias de explicitación.

Tan pronto, la simplificación de la situación y la estructura del proyecto modelización presuponen un modelo teórico de la situación, aparece el tratamiento matemático que recurre a las técnicas útiles que incorporan las competencias de intervención.

Para validar acerca de la comprensión que se tiene de la respuesta y poder juzgar sobre el resultado de las técnicas, las competencias de evaluación desempeñan un papel principal y vienen con el apoyo de las competencias de intervención para prever de nuevas técnicas, si los resultados no son enteramente satisfactorios.

2.4.2 Los niveles de explicitación puestos en contribución en el aprendizaje

Este análisis por competencias a nivel universitario condujo a Caron (Ibid) a resaltar la importancia del trabajo de explicitación puesto en contribución en el aprendizaje de las matemáticas. Describe este trabajo con niveles, pero no contemplado como etapas que hay que respetar en el aprendizaje, sino, por el contrario, considera que la formación de un concepto matemático siempre debería estar dirigida a la comprensión y estructuración del propio concepto.

2.4.2.1 Nivel de asociación

> **Nivel de asociación:** *se puede leer, reconocer, memorizar y reproducir una expresión, una figura, una definición o un enunciado.*

Una de las particularidades de este nivel es considerar como una estrategia rentable la memorización de la correspondencia entre los enunciados de las preguntas y las fórmulas a aplicar, y a conceder por consiguiente, una gran importancia a la escritura simbólica de las fórmulas que hay que memorizar. Los estudiantes que quedan en este nivel prefieren operar sobre las formas prescritas que tener conciencia sobre las nociones que se aplican. Les permite ocultar lo que no comprenden, es decir, el sentido que dejan escondido detrás del lenguaje.

En consecuencia, el concepto está reducido a su símbolo que vuelve a ser la realidad "concreta" que hay que manipular. Consideran de eso, ser capaz simplemente de memorizar la fórmula aplicable sin entrar a demostrarla y ni siquiera comprender de donde viene. Podemos decir que este enfoque dota a las fórmulas con un "tipo de economía" que permite una realización eficaz y segura en la ejecución de ejercicios, y alentadora a los exámenes. Pueden de esta manera, limitarse a reproducir una regularidad que han extraído de los ejercicios resueltos sin tener que entender más allá (¡conviene entonces aprender así!).

2.4.2.2 Nivel de comprensión

> **Nivel de comprensión:** *búsqueda de sentido, establecimiento de vínculos con otros objetos, teorías o aplicaciones.*

El recurso a la lengua natural en la utilización de las definiciones, en la expresión de los problemas y de las soluciones esperadas es una primera manera de ir más allá de los números y de los símbolos.

La utilización del lenguaje gráfico constituye otro modo de encontrar el sentido detrás de la forma, quedando dentro del dominio matemático, pues permite la articulación entre las diferentes representaciones: simbólica, numérica, gráfica. La estrategia de aprendizaje se apoya en el análisis de la gráfica para procurar comprender mejor el concepto. En la medida en que este análisis, que permite las validaciones, implica la articulación entre las diferentes representaciones, se requiere que se interrogue la articulación con lo que se aprecia a través de la gráfica: primero, sobre los resultados que se expresan, teniendo en cuenta las condiciones que impone el contexto, y luego, sobre las razones que hacen que relaciones parecen emerger entre las diferentes nociones del mismo concepto. Esto puede conducir a proporcionar un "significado" a los procesos realizados en términos de la funcionalidad del objeto matemático, por la identificación de los vínculos y la conjunción de las diferentes representaciones.

La idea de utilidad está particularmente presente cuando se vinculan los conceptos matemáticos a sus aplicaciones, que pueden permanecer al interior del dominio matemático con el uso de las definiciones y la puesta en relación de las diferentes representaciones y pueden también llevar al exterior de este dominio. En la medida en que la utilidad es percibida, mejor y más autónomo puede ser el cuestionamiento. Esta exigencia es especialmente fuerte para resolver problemas de otra disciplina que lleva a involucrar escrituras y lenguajes propios de la disciplina. En específico, para conceder gran importancia a las articulaciones de los diferentes cuadros de traducción que resultan de la actividad de modelización.

De hecho, el uso de la aplicación parece contribuir a la comprensión de los conceptos matemáticos solo para los estudiantes que manifiestan un interés o, por lo menos, una curiosidad sobre el alcance del dominio de aplicación de la noción. Sobre todo, para los que manifiestan un interés particular por el razonamiento matemático para vincular los conceptos matemáticos a la aplicación.

2.4.2.3 Nivel de estructuración

> **Nivel de estructuración:** *tratamos de organizar y, eventualmente, a sintetizar los conceptos en función de su generalidad y la naturaleza de las relaciones que las vinculan (equivalencia, orden, jerarquía, causalidad, etc.).*

Frente a la complejidad o a la novedad de los problemas, uno tiene que poder apoyarse sobre una red de conceptos y métodos bien organizados para una navegación eficaz. La organización estructurada de tal red está favorecida por el uso del razonamiento deductivo que a modo de argumentación matemática representa el medio de reencontrar las propiedades que ya no es necesario memorizar. Obviamente, una estructuración más rica en cantidad de vínculos y con una extracción de los conceptos claves por importancia de jerarquía, hacen una conducción más eficaz, más significativa en el aprendizaje y la utilización de los conceptos.

La voluntad de querer comprender y de estructurar puede llevar a una autonomía mayor, para guiar y controlar la estrategia elegida. Sobre todo, si se trata sobre la invariancia de un concepto, es necesario estar en condiciones de criticar: primeramente para saber representarlo, luego para relacionar las diferentes nociones del concepto mismo, después interpretarlo en distintos marcos (Douady, 1983) (numérico, geométrico, funcional, algebraico) para poder servirse de las proposiciones de cada uno de estos marcos, de manera de poder unificar y generalizar los resultados.

Para algunos estudiantes universitarios, el nivel de formalismo y de rigor que caracteriza tal organización de los conceptos constituye en sí un obstáculo; las operaciones que realizan sobre los símbolos formales en términos de los objetos que representan, a menudo les conduce a resultados absurdos. Este ejercicio no les lleva necesariamente a comprender la estructura del campo de conocimientos: ciertos vínculos que garantizan la coherencia, les parece sin importancia y no le conceden la jerarquía de saber-clave para la eficacia de la solución. Ellos pueden entregar resultados, incluso utilizando distintos puntos de vista, pero no vinculan las relaciones por la aplicación del concepto mismo.

2.4.2.4 Nivel de reformulación

> **Nivel de reformulación** *si se busca redefinir espontáneamente, de acuerdo con las estructuras establecidas de los conceptos aprendidos, los aprendizajes conexos y los nuevos problemas que hay que resolver, diremos entonces que hay paso al último nivel, el de la reformulación, lo que llevará, según el caso, a una transferencia eficaz de los conocimientos o a un conflicto y a una revisión consecuente de las estructuras que parecen plantear el problema*.

La necesidad de resolver un problema complejo o nuevo sugiere, en primer lugar, girar hacia las versiones estructurales de los conceptos que sirven de enlaces para la información más detallada. Esto conduce a señalar que la articulación entre marcos interviniendo esos mismos contenidos, va a permitir interpretaciones y reformulaciones de una misma situación usando varios conceptos, propiedades o resultados, perteneciendo a cada marco, o pasando de un marco al otro, con el uso de conceptos unificadores. Así como nuevas justificaciones para reutilizar el conocimiento tan competentemente como sea posible. Por ejemplo, es posible justificar propiedades para las matrices después transferirlas vía isomorfismos adecuados a las transformaciones lineales y a los sub-espacios vectoriales de $\mathbf{R}^n$, trabajando con objetos algebraicos que pueden parecer menos abstractos.

2.5 Las Situaciones didácticas

El marco de trabajo para desarrollar el diseño didáctico de la secuencia didáctica proviene de la teoría de las situaciones didácticas y su utilización. Si se quiere que los estudiantes valoren la teoría unificadora de la TL, piensen en un modelo lineal y puedan arreglárselas con problemas inusuales, entonces hay que ponerlos a prueba sin cesar en una nueva actividad de resolución de distintos problemas relacionados. Pero como no se trata de una simple técnica procedural, conviene disponer de un dispositivo de estudio adecuado, para permitir a los alumnos asumir la responsabilidad de la exploración, de cuestionamiento, de clarificación del modelo y de verificación y unificación de soluciones. De esta forma, los estudiantes comenzarán a valorizar el trabajo a través del sentido del concepto que una sola técnica de aplicación. Una experiencia así se enmarca dentro de la *Teoría de Situaciones didácticas*.

2.5.1 La Teoría de las Situaciones didácticas

En el enfoque sistémico de la *Teoría de Situaciones didácticas* propuesta por Brousseau (1998), cada conocimiento matemático debería poder ser caracterizado por una situación[28].

---

[28] Según Brousseau (1998), "*una situación es una relación entre una interacción y un conocimiento comprometido en el juego J*".

Dado que el alumno no puede resolver a solas cualquier situación "*el profesor está implicado en un juego con el sistema de las interacciones del alumno con los problemas que él le propuso. Este juego o esta situación más vasta es la situación didáctica*" (Brousseau, 1986). Su objeto central no es el sujeto cognoscente, sino la situación didáctica: un constructo que denota el conjunto complejo de interacciones entre docente y un sistema alumno-medio en juego en situaciones de aula. Estas relaciones condicionan y dan forma a los procesos de adaptación que los alumnos pueden desarrollar en un contexto determinado y a los conocimientos matemáticos que son susceptibles de construir ahí (Artigue, 2002).

Las interacciones didácticas son organizadas en un nivel a-didáctico y un nivel didáctico. En el nivel a-didáctico Brousseau (1998) propone que cada conocimiento matemático debería poder ser caracterizado por una situación donde la intención de enseñar desaparece. Los mecanismos de adaptación activan procesos ligados únicamente a las relaciones de los estudiantes con el conjunto de problemas. En el proceso de la devolución[29] el profesor intenta transferir a los estudiantes una responsabilidad, sin la intención, que la tarea dada tiene un propósito de aprendizaje específico. En este nivel, la situación se enfoca a la interacción de los estudiantes con la matemática.

Tomando en cuenta que el problema a resolver es percibido por un estudiante pensador y enfocándose simultáneamente en la naturaleza de las entidades matemáticas, el nivel didáctico tiene por ambición considerar, que los procesos de adaptación están condicionados por la tarea matemática, las interacciones posibles con el *medio*, y las normas institucionales sobre las relaciones con el profesor y el saber. Uno de los objetos centrales es la noción de *medio*, presentado por Brousseau (1998) como un sistema que

[29] Brousseau (1998) proporciona la siguiente definición: *"la devolución es el acto por el cual el profesor hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia"*.

reacciona ante las acciones de los estudiantes, tanto de forma colaborativa como antagonista. Este medio se define en términos de objetos materiales, pero también en términos de conocimientos: el conocimiento en el medio se trata de un conocimiento ya establecido, que asegura la familiaridad requerida con los objetos matemáticos en juego y que proporciona cierta realidad al mundo matemático. En la abstracción del concepto de la TL, esto trae posiblemente la necesidad de utilizar como *medio* de aprendizaje un conjunto de situaciones de características inhabituales que se inscriban en un dominio suficientemente conocido, para hacer ver al estudiante la eficacia y simplificación del nuevo modelo. Hay ahí un verdadero desafío, ya que, construir situaciones didácticas a través de la formalización de un concepto, las matemáticas avanzadas no solucionarían necesariamente problemas concretos; ofrecerían algo así, como un nuevo "real" para pasar de un modelo a otro (Legrand, 2003).

Como los estudiantes no trabajarán de forma individual, puede integrarse en el medio también las posibles acciones y reacciones de los demás compañeros del grupo de trabajo. Generalmente, el medio debe disponer también de mecanismos controlados de puesta en relación para un proceso de validación del trabajo realizado en él. En el caso de la TL de las dos estructuras del modelo teórico y el modelo real, es decir, de definir protocolos de puesta en relación con la experiencia. En una situación de validación de un saber, el medio es además el lugar de funcionamiento y la referencia implícita o explícita de los conocimientos correspondientes. Por tanto, el medio juega un rol importante en la determinación de los conocimientos que el sujeto debe desarrollar para controlar una situación de acción. En consecuencia, una parte importante de la enseñanza aparece como la reorganización de un medio favorable a las adaptaciones a-didácticas.

El comportamiento del profesor se vuelve un elemento esencial en el análisis de las interacciones ya que debe cubrir con su autoridad, las hipótesis y las formulaciones que al fin de cuenta, quizás serán rechazadas. Hay todavía una ruptura con el contrato clásico, difícil de asumir por el alumno y por ende por el profesor (Brousseau, 1998). El profesor se caracteriza por las obligaciones que acepta y por aquellas que él impone. Estas obligaciones se determinan, por una parte, por la repartición de las responsabilidades entre el profesor y un medio antagonista que comprende lo enseñado, y por otra parte, por los medios de regulación recíproca que acondicionarán la evolución del sistema (Brousseau, 1998). Estas consideraciones, según Brousseau, permiten caracterizar las regulaciones didácticas de "*la repartición de las responsabilidades entre el sistema que difunde un conocimiento y el que lo recibe y lo aprende*". Tal repartición de responsabilidades es llamada "contrato".

Apoyándose en esta teoría se intenta construir situaciones didácticas que optimicen las interacciones de las concepciones previas en diversos contextos, se busca hallar un equilibrio satisfactorio entre estos dos tipos de adaptaciones a-didácticas y didácticas, y en particular, asegurarse que el alumno no responda sólo por efecto del contrato didáctico implícito en las tareas (Artigue, 2000). En una perspectiva conceptual de secuencia didáctica a través de la formación de la TL, un punto esencial sería una respuesta a las necesidades de unificación y generalización (Dorier, 2000; Robert, 1998). No sería sencillo sensibilizar a los estudiantes con estas necesidades que no forman realmente parte de su cultura matemática. Debido a los fuertes efectos del contrato didáctico, no sería fácil entonces construir situaciones de aprendizaje donde se pueda asegurar que el éxito del estudiante implique un verdadero compromiso matemático (Artigue, 1998).

2.5.2 Dificultades para la enseñanza de conceptos unificadores

Una dificultad que se encuentra en la enseñanza de conceptos unificadores y generalizadores es el rol de los conocimientos y de las competencias preliminares menos formalizadas (Dorier, 1997). Las exigencias sociales para hacer aprender "matemáticas útiles" tendrían algunas consecuencias sobre la organización de los saberes a enseñar y su terminología (Artigue, 2003) y por ende sobre los conceptos unificadores. Notamos por ejemplo, que la concepción global de la linealidad está supeditada a los problemas concretos de proporcionalidad que se vienen estudiando desde mucho antes, pero con nociones identificadas como diferentes a la función lineal en diferentes contextos. Un enfoque teórico, no solamente exigiría una buena aprensión de los objetos de nivel inferior a abstraer, sino que también, ser capaz de integrar nociones dispersas tomando en cuenta elementos externos e internos de la matemática en su representación formal.

En el plano didáctico, lo que constituye uno de los principales objeto de debate respecto a los saberes, es la existencia de una *situación fundamental*[30] para todo concepto, para poner en juego la funcionalidad del saber en el sentido de la teoría de situaciones didácticas en el sentido Brousseau (1998). Investigadores del álgebra lineal (A. Robert, J. L. Dorier y M. Rogalski; Dorier, 1996) y de otros dominios (Artigue, 2002) ponen en duda esta hipótesis de universalidad, tratándose de conceptos unificadores. Para estos investigadores está la convicción que tales características epistemológicas no se pueden transportar mediante procesos a-didácticos en el sentido de Brousseau (1986). Dorier (2000) pone en evidencia el carácter unificador del desarrollo axiomático vectorial y la dificultad que han tenido los matemáticos mismos para convencerse del interés de tal desarrollo, al menos mientras el análisis funcional no los había confrontado con espacios de dimensión infinita no numerable. Cuando aparece históricamente la noción de espacio vectorial, no es una noción cuya necesidad se imponga porque permita resolver nuevos problemas. Es una noción que permitirá poner en evidencia, mediante un lenguaje nuevo, las semejanzas existentes entre problemáticas y prácticas que dependen de dominios diversos, y establecer conexiones fructíferas.

> *" [...] les caractères unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels ne s'adaptent pas facilement à ce type d'approche. Comment en effet montrer sur un seul problème, voire même plusieurs, l'intérêt d'une telle théorie qui est justement de permettre d'en unifier plusieurs en favorisant des généralisations?"*
>
> (Dorier, 2000)

---

[30] Una situación fundamental de un saber que se pretende lograr es una situación con variables didácticas que, por manipulación de estas variables, engendra un conjunto mínimo de situaciones a-didácticas suficientemente extenso para cubrir todas las formas de saber que se busca alcanzar (Artigue, 2002).

Por otro lado, Robert y Robinet, (1993 y 1996) han buscado nuevas posibilidades basándose en un análisis epistemológico más minucioso y en nuevos enfoques basado en la noción de *levier méta*[31] para poner en marcha una reflexión sobre el aporte de la teoría de los espacios vectoriales en términos de unificación, de generalización y de simplificación. Dorier (1990) insiste que el rol unificador y su poder es un valor epistemológico esencial en el álgebra lineal, *y que tiene que ser entendido y usado por los estudiantes*. Situándonos en el marco de la *Teoría de Situaciones didácticas* no podremos, para nuestros propósitos con la ingeniería didáctica, vincularnos con una sola situación, sino más bien, con una sucesión de situaciones mediadas por el profesor (Artigue, 2002)[32].

> *"Ainsi, dès qu'on a affaire à un concept généralisateur, unificateur et formalisateur, c'est une ingénierie longue[33] qui sera à concevoir, non initialisée par un «bon» problème, mais par plusieurs, partiels, qui devront être unifiés grâce à l'enseignant[34]"*
>
> (Robert A., 1998)

Proporcionar una propuesta para realizar una conexión más eficaz, de lo que el formalismo de la TL pretende simplificar, en un contexto suficientemente conocido puede ayudar a ganar su significado, a predecir otras nociones unificadoras salidas del ámbito de la ingeniería. Esto en beneficio de una comprensión personal de la naturaleza unificadora, así de otros métodos y resultados de diversos orígenes de la ingeniería. Parece ser todo un

---

[31] Este enfoque no se opone *a priori* a la teoría de situaciones, de la cual, los autores utilizaron los instrumentos en algunos sus análisis. *"El trabajo de análisis de las actividades méta en las secuencia, en el paradigma de la teoría de situaciones permanece en gran parte por hacer"* (Dorier, 2000).

[32] "*Las interacciones con el medio no son suficientes para hacer todo el trabajo matemático requerido, de manera autónoma, en un lapso razonable. Una gestión eficaz de la situación requiere de importantes mediaciones del docente [...]" (*Artigue 2002).

[33] Según Robert (1998) "Les ingénieries longues ne sont pas réservées à ces notions: ainsi les décimaux ont donné aussi lieu à des ingénieries longue" Las ingenierías largas no están reservadas para estos conceptos: del mismo modo como los decimales dieron también lugar a ingenierías largas (Brousseau, Douady)"

[34] Ver Rogalski (1991) o Robert (1992).

desafío para proporcionar respuesta a quienes legítimamente se preguntan ¿para qué es útil la transformación lineal?

2.5.3 El carácter unificador de la TL asociado a un obstáculo epistemológico

En el análisis histórico de la génesis de la TL observamos que la etapa final del desarrollo del concepto TL, en que surgieron las primeras apariciones del enfoque axiomático, sucede en el siglo XIX, pero que en realidad comenzó a utilizarse después de 1920. Como consecuencia de la utilización cada vez más general de las sustituciones lineales, corresponde a la axiomatización, mediante un nuevo lenguaje, la reconstrucción de los resultados y las técnicas de las sustituciones lineales que eran fuertemente desarrolladas sin la utilización explícita del concepto TL (Dorier, 1990). Se ve además, que en sí misma, la axiomatización del concepto no se impone porque permita resolver nuevos problemas, sino que es una noción, que pone en evidencia invariantes existentes entre problemas y prácticas y que proporciona un enfoque más general, para que las resoluciones sean más fáciles y más similares. De hecho, la teoría de los determinantes fue suficiente para resolver los problemas lineales de dimensión finita. De modo que, el enfoque formal de la TL para espacios vectoriales de dimensión finita, no era una necesidad absoluta en ese momento, ya que los propios matemáticos tenían serias dificultades para convencerse del interés de tal desarrollo. Sin embargo, se convirtió en una forma universal de pensamiento por su poder unificador y generalizador, y en consecuencia, por la simplificación en los métodos de resolución de problemas de carácter lineal (Dorier, 2000). Además estos conceptos formales representan un cambio de perspectiva que induce un cambio de nivel en las operaciones mentales (Sfard, 1991).

En un cierto sentido, un poco como en el momento del desarrollo histórico de las sustituciones lineales, los estudiantes son puestos en la misma situación que los matemáticos del siglo XIX, al desarrollar fuertemente las técnicas sobre las nociones específicamente vinculadas a $\mathbf{R}^n$. Formas de conocimiento coherentes y efectivas con la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que no necesitan la teoría abstracta de la TL para resolver la mayoría de los problemas. De hecho, los sistemas lineales funcionan como herramienta respecto de la teoría del álgebra lineal. En razón, particularmente, del trabajo con sistemas lineales que tienen solución, donde la mayoría de los problemas involucran ciertas aplicaciones de métodos que son conocidos en la explicitación de sus soluciones. Los problemas más teóricos parecen a veces sólo ser mostrados para llevar a los estudiantes a explorar las consecuencias de las nuevas definiciones o teoremas, pero apenas se aclara la utilidad de los conceptos. Por ejemplo, la dimensión de la imagen de una TL que pone en juego el teorema del rango ($\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{T}) + \mathrm{rg}(\mathrm{T})$ con $T : E \rightarrow F$ lineal y E espacio vectorial de dimensión finita) permite relacionar el análisis de las soluciones de un sistema con las propiedades de la aplicación lineal asociada, sin calcular necesariamente sus soluciones. De hecho, sólo un cambio de punto de vista puede dar lugar a hacer interpretaciones sobre las condiciones de solubilidad, y permita una anticipación del tamaño del conjunto de soluciones. En otras palabras, el aprendizaje de una teoría formal requiere gran esfuerzo que involucra olvidar especificidades y complejidad, hasta que tenga que interpretarse la respuesta en términos específicos de cada objeto (Dorier, 2000). Este cambio de concepción, es difícil para el estudiante (Sfard, 1991), sobre todo porque rara vez se enseña explícitamente en la clase.

Hay, por supuesto, un aspecto progresivo en la abstracción que caracteriza el proceso de aprendizaje en matemáticas, lo que significa que uno suele pasar por una concepción operacional antes de formar una concepción estructural (Sfard, 1991). Sin embargo, resulta importante tener en cuenta que el conocimiento científico (Dupin 1995; Brousseau, 2003a) no es el resultado de un proceso continuo, sino que resulta a partir del rechazo de formas previas de conocimiento; *los obstáculos epistemológicos.* Algunas dificultades en el aprendizaje, generalmente las más resistentes, provienen de formas de conocimientos que son coherentes entre ellas y que han sido efectivas por un tiempo, dentro de un dominio limitado. También tienen algún tipo de universalidad y, por lo tanto, se puede seguir su pista en el desarrollo histórico de los conceptos correspondientes (Artigue, 1998). De esta forma, por ejemplo, la historia de la TL revela la dificultad de ver el concepto de manera diferente, en cuanto a la unificación. Por lo tanto, el carácter unificador de la TL también puede ser asociado a un obstáculo epistemológico.

2.6 Preguntas específicas de investigación

En el marco teórico que hemos elegido para desarrollar nuestra investigación intentaremos proporcionar respuestas a las preguntas específicas de investigación. Habiendo considerado un espacio del sistema didáctico cuyo funcionamiento se muestra poco satisfactorio, por diversas razones, nos situamos en una perspectiva de ingeniería didáctica para implementar una secuencia didáctica con la intención de hacer emerger el concepto unificador de la TL. Poniendo nuestra atención de una parte a la elaboración de la secuencia didáctica y de otra, a la abstracción del concepto en el desarrollo de las explicitaciones del aprendizaje tratamos de buscar respuestas a propósito de la unificación del concepto.

2.6.1 En relación con la elaboración de la secuencia didáctica

¿Cómo lograr la progresión del estudiante en la adquisición del concepto TL? ¿Cómo hacer emerger el rol unificador del concepto? ¿Con qué articulaciones de qué contextos, marcos matemáticos y representaciones conviene surtir las actividades? ¿Qué tipos de tareas o modelos utilizar?

2.6.2 En relación con la adquisición de la TL

¿Qué relaciones personales desarrollan los estudiantes en la utilización de la TL? ¿Qué forma de comprensión (procedural o estructural) les caracteriza? ¿Qué niveles de explicitación usan en su aprendizaje, a través de la secuencia propuesta? ¿Se ve una progresión de una tarea a la otra?

2.7 Hipótesis de investigación

Para acercarnos a nuestro objetivo de investigación, formulamos la hipótesis que es posible mejorar el aprendizaje y comprensión de la TL, mediante actividades de modelización matemática que permitan a los estudiantes organizar conocimientos anteriores para utilizar como proceso operatorio del mismo objeto en estudio, y a la vez, permitan la búsqueda de una estructura matemática común a varios objetos matemáticos.

3 METODOLOGÍA

Ya que buscamos comprender la manera de hacer concebir la TL como un objeto abstracto, teniendo en cuenta la eficacia de la herramienta lineal, nos inspiramos de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2002) que nos permite asegurar la gestión de la secuencia didáctica en situación de clase. Para lograr nuestro objetivo, consideramos un conjunto de situaciones problemas que se inscriben naturalmente en diferentes dominios de la ingeniería (cálculo, físico, geométrico,…etc.) en los cuales la noción es introducida como un proceso de cálculos en vías de formar el nuevo objeto. Nos parece interesante ver en qué medida los estudiantes logran acceder a esta organización que caracteriza a la TL como concepto unificador. Para este propósito, utilizamos como estrategia experimental la modelización con el nuevo objeto en estudio de manera de poder contemplar la puesta en evidencia del sentido lineal y el alcance estructural del concepto. Nos interesamos por evaluar las competencias matemáticas desarrolladas y el nivel de explicitación en la utilización de la TL.

3.1 Sujetos del estudio y contexto institucional

Para este estudio, centrado en el aprendizaje de un concepto unificador para su uso espontáneo en aplicaciones, elegimos a estudiantes universitarios iniciándose en la formación de ingeniería donde se aplican conocimientos matemáticos de nivel superior. Además, nos situamos al principio de esta formación profesional (segundo año, primer semestre) para evitar el conocimiento de la noción y asegurar la objetividad de las percepciones y explicaciones de los informadores sobre el conocimiento de la nueva noción. El hecho de formar estudiantes en inicio de formación nos entrega también una cierta variedad de sujetos, son estudiantes elegidos de un entorno rico y variado y el curso es constituido por la misma institución, lo que evita toda ambigüedad, hecho que nos condiciona un cierto grado de representatividad de la muestra. La selección fue una de las asignaturas de Álgebra Lineal dictadas por el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), en Chile, a las carreras de ingeniería. El curso que retuvimos debió utilizar y sustentar los vínculos entre los procedimientos y la definición formal de la noción de la TL. La elección final fue con la Dirección del Instituto concernido.

Los participantes son estudiantes de Ingeniería Civil que cuentan con experiencia en operaciones de cálculos y que poseen ciertas habilidades matemáticas a nivel de transformaciones matemáticas (resolución de problemas con aplicaciones, manipulación y combinación de fórmulas…etc.). Puesto que pretendemos evaluar la abstracción de un concepto (la transformación lineal) proponemos situarnos en esta formación, cuyas aplicaciones en diferentes campos matemáticos exigen un uso eficaz, unificador y generalizador de conceptos anteriores y futuros del currículo matemático. A esta posición fundamental, se añaden también consideraciones prácticas y metodológicas, como por ejemplo, mayor facilidad de acceso a la complejidad de los problemas a resolver o mayor sensibilidad a la aplicación que en otras ingenierías. Se puede decir, que la ingeniería es un sector que tiene una fuerte componente en matemáticas, con una mayor exigencia curricular y cultural, puesto que se trata de una formación cuyos profesionales son muy solicitados por la industria y que atraen por consiguiente, una importante masa estudiantil para su selección.

Al comienzo del segundo semestre del año académico 2010, se llevó a cabo una reunión inicial con el Director del Instituto de Matemática de la PUCV (Unidad que tiene a cargo el servicio de la docencia en matemática de las otras Unidades dentro de la Universidad) y con el profesor del curso que participó en el proyecto de investigación. Esta reunión contribuyó al conocimiento, por una parte, de la presentación del proyecto a la Institución y por otra, para aclarar la participación del curso en el estudio implícito con el profesor y el tipo de enseñanza centrada en la noción de la TL. Sobre todo, respecto a la negociación de la duración de las actividades, a la introducción del concepto que no debía ser introducido por el profesor en la clase, sino más bien, debía ser un trabajo matemático personal del estudiante a través del desarrollo de las tareas en la clase y en la casa, y a las fechas de realización de la experimentación. El estudio sobre terreno se llevó a cabo durante un período de 6 clases (siendo 4 las previstas más 2 suplementarias), entre los meses de mayo y junio de 2011 en Chile.

La pertinencia de realizar tal estudio didáctico[35] apareció casi evidente para el propio profesor, que contribuyó rápidamente a negociar lo que podría ser posible dentro del curso sin comprometer los objetivos académicos e institucionales. Se trata de un profesor con experiencia y con conocimiento del campo matemático asociado al contenido del álgebra lineal, a los métodos enseñados, a las estrategias que privilegiar y a posibles confusiones y dificultades de los estudiantes. Para el desarrollo de la experimentación en la clase, la experiencia profesional de este profesor nos fue un elemento esencial para dar lugar a una buena realización de la ingeniería didáctica, para motivar y animar a los estudiantes y para desarrollar las tareas interviniendo en los contenidos del curso.

3.2 La Ingeniería didáctica como metodología de la investigación

La ingeniería didáctica constituye un método para organizar la confrontación de las propuestas teóricas con el problema del aprendizaje de la TL en la clase. Además de permitirnos de acceder al control y a la observación de determinados fenómenos específicos en el aprendizaje de este conocimiento matemático, ella permitirá dar cuenta de nuestras situaciones problemas. Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se diferencia de otras metodologías con validación externa basadas en la confrontación estadística entre grupos experimental y de control. Muy por el contrario, su esquema de experimentación de las realizaciones didácticas en la clase, está más próximo al estudio de casos. Su método de validación es interno basado en la confrontación entre el análisis *a*

[35] Según Chevallard, a las instituciones les cuesta mucho reconocer sus necesidades didácticas, es decir, sus necesidades de técnicas de estudio. Esto estaría relacionado con la banalización cultural de las actividades didácticas, en el sentido de que puedan proceder de un saber técnico.

priori en el cual se encuentran comprometidas las hipótesis, y un análisis *a posteriori* que se apoya en los datos surgidos de la realización práctica efectiva (Artigue, 2002).

Es importante observar que los fundamentos de esta metodología provienen de sus relaciones con la Teoría de las Situaciones Didácticas, donde sus vínculos se expresan especialmente en la concepción y en el análisis *a priori* de la ingeniería. Esta teoría actúa como un referente en las elecciones que determinan anticipar las interacciones de los estudiantes con el *medio*[36] y sus efectos posibles en términos de construcción de conocimientos. Sin embargo, estas ambiciones se vuelven más difíciles de satisfacer en el desarrollo de la investigación en niveles de enseñanza superior (Artigue, 2002). Sobre todo, cuando se trata de enseñar conceptos unificadores y de generalizarlos, para simplificar la solución de muchos problemas en los que la solución de sistemas de ecuaciones lineales por lo general es más que suficiente. Históricamente, la noción de TL no es una noción cuya necesidad se imponga porque permita resolver nuevos problemas, es una noción que permite poner en evidencia, mediante un lenguaje nuevo, semejanzas existentes entre problemáticas y prácticas que dependen de dominios diversos (Artigue, 2002). La dificultad suplementaria de interrogarse por la eficacia y la economía de pensamiento que representa la TL (en la confrontación de las construcciones teóricas con la contingencia de la clase) en el sentido de Brousseau (1989) impone mayores restricciones. Su uso eficaz sólo es posible por la aplicación de una amplia gama de situaciones problemas (Dorier, 2000). *Esta fuerza de la teoría de las situaciones no puede, sin embargo ejercerse sin un esfuerzo sustancial* (Artigue, 2002) en la construcción del diseño de enseñanza.

La ingeniería didáctica puede considerarse como un medio eficaz de aproximarse a la complejidad de los procesos didácticos y muy particularmente, cuando la investigación,

[36] Entendemos por *medio* las situaciones problemas a resolver y su entorno didáctico que inducen a los estudiantes a una reflexión sobre los conocimientos que faciliten el acceso a la nueva noción contemplada, la TL. (Brousseau, 1998)

para poder avanzar, debe apoyarse en las construcciones didácticas que la observación naturalista del sistema no permite observar, cuando por tanto se debe perturbar a sabiendas su funcionamiento usual (Artigue, 2002). Esto genera una complejidad mayor a nivel del análisis a-didáctico en el contexto de matemáticas avanzadas: la identificación de lo que hace ganar o puede hacer ganar el conocimiento, no tiene nada de evidente. Pensar en las adaptaciones necesarias para volver eficaz la ingeniería, condiciona también, la comprensión práctica que podamos tener del conocimiento a ser construido y de las variables a controlar en las situaciones problemas, para que los comportamientos esperados puedan aparecer en el sentido deseado. En la profundización de este análisis, sería también necesario identificar lo que debería quedar a cargo del profesor como un actor completo de la situación, cuyo rol no podría reducirse sólo a la administración de la devolución y a los procesos de la institucionalización. Ya que el proceso del aprendizaje no podría resultar sólo del funcionamiento a-didáctico, el profesor por sus mediaciones, dependiendo si, también, es el autor del diseño de los problemas, regulará el *medio*, la forma en que los estudiantes interactúen con él y los posibles efectos cognitivos de esta interacción (Artigue, 2002).

En esta perspectiva, son esencialmente estas determinaciones de la ingeniería didáctica sobre el control del saber de la TL en el desarrollo de las concepciones de los estudiantes, que orientan la mirada con la cual el fenómeno explorado es interpretado. Esto nos lleva apelar a la estructura del proceso experimental de la ingeniería didáctica para la construcción de la secuencia.

En el proceso experimental de una ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases (Artigue, 1990):

1. Análisis preliminares
2. Diseño y análisis *a priori* de las situaciones de la ingeniería didáctica

3. Experimentación
4. Análisis *a posteriori* y evaluación.

En este plan, en adelante, nos proponemos hacer una descripción de las condiciones experimentales que hemos tomado en cuenta en el desarrollo del proceso experimental de la secuencia didáctica de nuestra investigación.

3.3 Análisis preliminares

Se trata de un trabajo preliminar que sirve de apoyo para nuestra ingeniería y será refinado y fortalecido a través de las distintas instancias de nuestra investigación. Esta fase comprende:

- análisis epistemológicos del concepto de objeto de la ingeniería: la TL;
- el análisis de la enseñanza usual y sus efectos;
- el análisis de las concepciones previas de los estudiantes, los obstáculos, las dificultades y errores ligados a su evolución;
- el análisis de las limitaciones y condiciones del contexto en que se va a situar la realización didáctica;
- la consecución de los objetivos de la investigación.

Los tres primeros puntos de esta fase se encuentran en nuestra descripción de la problemática y del marco teórico, y se basan principalmente en análisis previos del tipo epistemológico sobre la génesis y el rol de la noción. Entre las observaciones más importantes acerca de la génesis de este concepto de la TL, destacamos una cierta incoherencia del programa de enseñanza en relación a la construcción de la noción en la historia: no se necesita una construcción abstracta de la noción para resolver la mayoría de los problemas que se plantean con la TL. La Figura 3 resume en un modelo esquemático la enseñanza clásica de la TL.

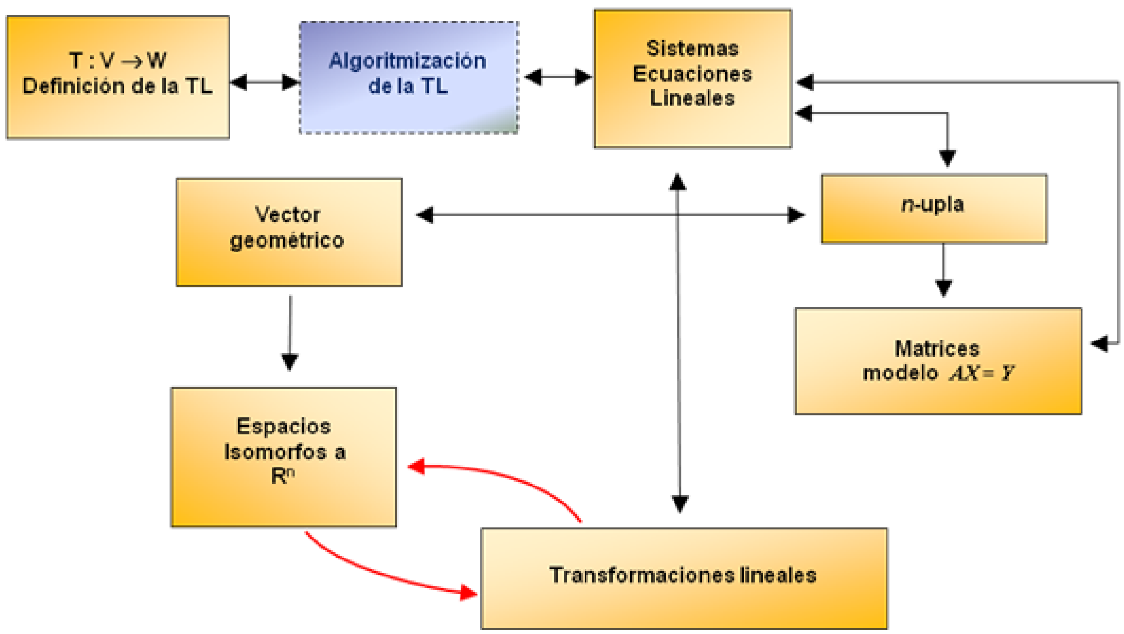


Figura 3. La TL vista como un concepto general y formal

Matizamos también, las maneras de traspasar su contenido (a nivel de espacios euclidianos vinculada fuertemente con sistemas de ecuaciones lineales y matrices) y sus efectos sobre las concepciones de los estudiantes, los obstáculos y las dificultades que podrían caracterizar este tratamiento. A continuación, veremos un análisis del ambiente didáctico restringido para el desarrollo de nuestra ingeniería en el nivel universitario.

Algunas limitaciones y condiciones del estudio

Este análisis se centra en el marco en que situamos la realización didáctica efectiva atendiendo a las dimensiones: epistemológica (características del saber en juego), cognitiva (características de aquellos a los que se dirige la ingeniería) y didáctica (características del funcionamiento del sistema de enseñanza). Habiendo privilegiado la dimensión cognitiva con el marco teórico elegido, además del análisis preliminar realizado sobre las características de la TL; obstáculos y dificultades de su uso, abordaremos entonces las restricciones didácticas del objeto de la investigación como por ejemplo, el nivel autónomo de funcionamiento que pide el medio didáctico, la elaboración de problemas no estándares, el rol de los objetos matemáticos subyacentes que se asocian al saber de la TL…etc.

El análisis epistemológico previo de la TL, la ausencia de problemas simples que permitan justificar por sí mismo la introducción de este concepto en el sentido de Brousseau (1989), nos permite suponer que conceptos de aspecto unificador y simplificador darían cuenta de un ambiente didáctico restringido para el desarrollo de la ingeniería a nivel universitario. En el marco de la Teoría de Situaciones didácticas las elecciones que presiden a la concepción y el análisis *a priori* de las situaciones didácticas, expresan un nivel casi autónomo en el desarrollo del conocimiento matemático, para producir, en la medida posible, el nuevo objeto de la TL en su aspecto formal. Sin embargo, tal nivel autónomo de funcionamiento estaría a menudo fuera de alcance del nivel de las matemáticas avanzadas (Artigue, 2002). Para muchos estudiantes, el trabajo al nivel abstracto es difícil, no ven la utilidad y simplemente se niegan al aprendizaje para actuar sobre esa percepción. Se trata de trabajar desde ya el sentido del concepto TL en distintos contextos, el mismo una abstracción posible del proceso integral de las soluciones. Así que, el uso del concepto será rentable sólo después que se haya aplicado a una sucesión de situaciones. Además, la modelización de tales situaciones demanda del tiempo y espacio en la clase, sin embargo, la economía del trabajo universitario no es necesariamente compatible con el tipo de encuentro *a*-didáctico que desearíamos asociarle a las situaciones.

Sobre el sentido de una noción unificadora, es difícil imaginar un problema en el que los estudiantes puedan resolver por sí solos haciendo funcionar desde ya la noción (Robert A, 1998; Dorier, 1997; Artigue, 2002). El status unificador de la TL estaría muy alejado del rol de los conocimientos y competencias en parte ya construidas por los estudiantes (Dorier, 1997). Si pensáramos en una generalización de la extensión de otra noción, propondríamos problemas del mismo tipo y sentido que los ya planteados, lo que sería poco factible para la funcionalidad de una noción unificadora. Uno de los factores que contribuyen al sentido del concepto unificador es el conjunto de vínculos con otros conceptos comprometidos en el mismo tema. Luego, el status unificador de la TL, su puesta en funcionamiento inicial, nos hace privilegiar la preparación de actividades de reconstrucción, de reformulación de objetos matemáticos o actividades que se refieran a casos particulares (Robert A., 1998; Dorier, 1997) cuyas resoluciones puedan traer ciertos acompañamientos metas[37].

Tener acceso a una noción unificadora puede significar entonces, requerir de una cierta organización de conocimientos que pueda ayudar a conseguir organizar ciertos pasajes entre un contexto conocido a uno menos conocido (Artigue, 2002). Esto trae la necesidad de diseñar un conjunto de problemas diferentes a los usuales, situaciones suficientemente complejas que permitan poner en evidencia procesos y analogías, encontrando medios de resolución más económicos y reutilizables y en consecuencia lograr acercarse al enfoque formal de la noción (Dupin, 1995). Por otro lado, parece conveniente relacionar el trabajo de la complementariedad procedural y estructural en la formación del concepto (Sfard, 1991) utilizando como herramienta el mismo concepto a modelizar. De manera de hacer las adaptaciones matemáticas visibles y reducibles al repertorio de los estudiantes para motivar y favorecer en el estudiante el reconocimiento de vínculos entre las relaciones matemáticas de la TL y sus propias intuiciones matemáticas.

Asumimos desde el principio que la experiencia de los estudiantes que participarán en la investigación sería una etapa motivadora y a la vez compleja. Es decir, la contextualización de las tareas orientadas hacia la unificación debía ser con aplicaciones reales y suficientemente complejas a la vez. El estudiante debía poder apropiarse del problema, *invertir en la investigación de su solución para que el proceso de modelización se*

---

[37] El recurso "meta" (Dorier, 1997) podría ser utilizado por los estudiantes en una reflexión sobre las relaciones conceptuales, cuestionamientos o cambios de estrategias para responder a la demanda de tareas específicas.

enganche (Dupin, 1996). Ya que se trata de responder a la demanda de una situación con una ejecución eficaz, importan entonces los conocimientos teóricos *a priori*. La formación de este concepto partiría entonces con una dificultad que se encuentra en la enseñanza de conceptos unificadores*, el rol de los conocimientos y de las competencias preliminares menos formalizadas (*Dorier, 1997). En una perspectiva de ingeniería didáctica como metodología de investigación, esta limitación procedería con mayor fuerza de no acceder a la *observación natural* de los sistemas didácticos, sino más bien, de trabajar con sistemas limitados donde el propósito de la investigación se volverá más difícil de satisfacer (Artigue, 2002).

3.4 Diseño de las Situaciones didácticas

Para alcanzar nuestros objetivos y superar las limitaciones anticipadas hemos tratado de construir una secuencia didáctica poniendo el acento en la modelización y la aplicación lineal en diferentes contextos para favorecer el desarrollo de competencias matemáticas, de interpretación y de validación del modelo lineal. Para abordar el proceso de la comprensión de la TL, combinamos elementos de modelización (Dupin, 1995) con las dos formas de aprender el objeto: las comprensiones "operatoria" y "estructural" desarrollada por Sfard (1991). Respetando la historia del concepto, hacemos funcionar el objeto como herramienta intentando desarrollar vínculos entre formas de razonamiento, puntos de vistas, lenguajes y representaciones de la TL. Estos vínculos permanecen al interior y exterior del dominio matemático con el uso de las propiedades lineales y la conjunción de las diferentes representaciones del concepto.

Sin seguir estrictamente la cronología del desarrollo del concepto TL, la secuencia de situaciones problemas busca alcanzar un cierto nivel de abstracción de los métodos y relaciones invariantes en distintos contextos de aplicación. Como se trata de distinguir los conocimientos básicos que dependen del uso de la misma noción y que deben ser abordados de un modo diferente, será preferible entonces no limitarse a una sola situación problema, sino a una sucesión de problemas y tareas parciales asociados por el *sentido* de la TL. Esta organización permite insertar de manera coherente diferentes aplicaciones alrededor del concepto de la TL para hacerles comprender mejor el sentido y la potencia del concepto. Nos interesamos además por colocar a los estudiantes en situaciones, en parte, análoga a la que encuentra en realidad el matemático en su trabajo: escogiendo enunciados que fuercen hacer los vínculos en contribución al sentido del concepto. En particular, la abstracción debe venir de las elecciones hechas del control de un pasaje al otro, de los cuestionamientos sobre la dirección que hay que tomar o de la manifestación de un juicio de lo que se está desarrollando.

Después de haber abordado las restricciones didácticas del objeto de enseñanza (en la sección 3.3, p. 97) realizamos las elecciones matemáticas y didácticas que condicionan las elecciones globales de las estrategias didácticas que regulan la relación didáctica: complejidad de contenidos, características de funcionamiento, métodos subyacentes,…etc. Estas elecciones conciernen a la organización de los conocimientos previos en las situaciones didácticas y preceden a la descripción detallada de la secuencia en donde se explicitaran las elecciones locales.

3.4.1 Las elecciones globales del diseño de enseñanza

Las elecciones principales que guían el diseño de nuestra construcción se organizan en torno a ciertas elecciones matemáticas y didácticas:

3.4.1.1 Elecciones matemáticas

1. Hacer intervenir conocimientos matemáticos cercanos que dependen de la misma noción (métodos o procedimientos) asociados a ciertos teoremas, propiedades y conceptos fuertemente vinculados.

2. Abordar problemas accesibles haciendo intervenir (por lo menos parcialmente) la nueva noción en distintos contextos en vías de asociar una abstracción que permita reemplazar de forma unificada[38] nociones dispersas.

3. Utilizar conceptos y procesos que permitan la modelización con la TL para formalizar y simplificar propiedades de ciertas nociones anteriores.

3.4.1.2 Elecciones didácticas

Los objetivos de las elecciones didácticas de los problemas a resolver están centrados en el proceso de construir un modelo abstracto (la TL) sobre un dominio ya matematizado, con el fin de retener el aspecto formal de la noción (Astolfi y Drouin, 1992). Estos objetivos son los siguientes:

1. Utilizar diferentes contextos matemáticos conocidos para favorecer la comprensión y la estructuración de la noción y ganar en conocimiento y en simplificación.

2. Privilegiar situaciones de reorganización con problemas parciales que permitan la disponibilidad de la TL como herramienta adaptada para resolverlos con los procesos y conceptos previstos.

3. Comprometer al profesor en hacer que el estudiante realice situaciones de exploración: formulando observaciones para que el proceso de modelización enganche. A su vez, que el estudiante se comprometa en encontrar las respuestas con sus propios recursos: las organice modificando sus conocimientos o sus convicciones.

---

[38] Los análisis epistemológicos a menudo muestran que el paso en la génesis histórica de la noción, entre las nociones primitivas y su generalización ha sido muy lento, complicado y tortuoso (Dorier, 1997).

4. Utilizar la forma de tarea para la casa y la discusión grupal (grupos de a dos) para la confrontación y la validación de las elecciones hechas en la resolución de las situaciones problemas.

5. Conceder tiempo necesario en la clase para la puesta en acción de métodos y procedimientos a unificar.

3.4.2 Las elecciones locales del diseño de enseñanza

La construcción de las situaciones problemas a partir de las cuales se hará la evaluación del nivel de abstracción de la unificación de las nociones utilizadas en las tareas, se centra en los siguientes objetivos:

- Elaborar situaciones que permitan a los estudiantes una reorganización de los conocimientos para hacer funcionar la nueva noción: la TL, para ganar en simplicidad y eficacia en la resolución de los problemas.

- Unificar nociones conocidas, tratadas de manera separadas y que poseen relaciones matemáticas importantes con la nueva noción de la TL, para ser abstraída por el proceso de la misma noción.

- Crear un nuevo objeto matemático: como elemento de una estructura teórica de un nivel superior, con sentido y propiedades propias para los estudiantes que viene a proporcionar una nueva significación a las propiedades del objeto inicial (Johsua M. A., Johsua S., 1987).

En las situaciones problemas, los estudiantes tendrán los medios para modelizar y proporcionar sentido al nuevo modelo conforme a su función, características y condiciones de empleo en cada una de las tareas.

En la Figura 4 (p. 104) ilustramos la interacción entre secuencia de las situaciones problemas y la formación del concepto. La resolución de la situación S_1 recurre a la construcción de un modelo gracias a un repertorio matemático disponible. El modelo es coherente con el concepto disponible y pertinente a la situación S_1. La progresión del nuevo conocimiento sobreviene añadiendo una nueva situación S_2 que replantea las condiciones de empleo de la noción y de la consistencia del modelo anterior a la situación S_2 o que permite ver algunas propiedades distintas. La confrontación consigue organizar la misma estructura, pero ahora vista de manera distinta… así, progresivamente, cada vez. La modelización con el uso de la TL de una situación a otra, fomenta la concepción del concepto unificador y generalizador de la noción.

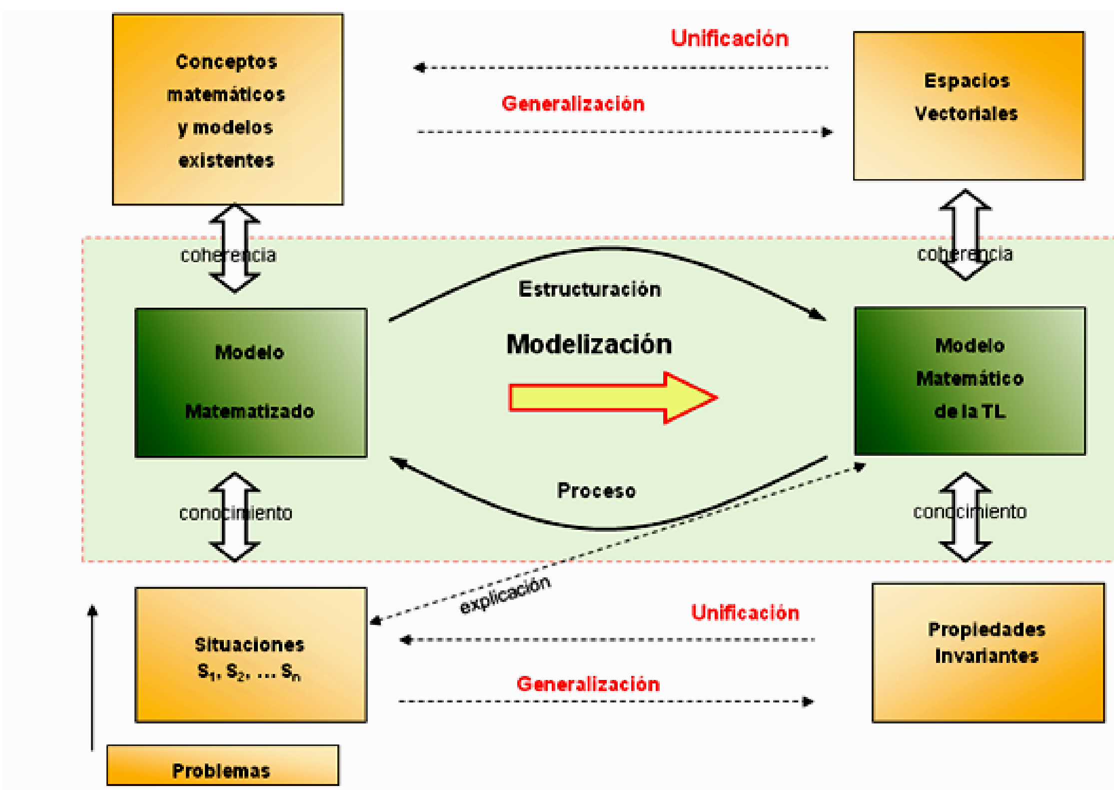


Figura 4. Interacción entre las situaciones didácticas y la formación del concepto

3.4.3 La secuencia didáctica de la TL

La secuencia didáctica así construida crea un contexto de aplicación donde los métodos a utilizar guardan una cierta coherencia lógica y epistemológica para la unificación del concepto. Pone al estudiante en situación de problemas en distintos contextos para favorecer la motivación, la comprensión y la estructuración necesarias en el reconocimiento de la eficacia de la TL. Además, este trabajo desarrolla competencias alineadas a lo que requieren los ingenieros: identificar elementos esenciales que den paso a la estructuración, rechazar elementos que distorsionan, escoger operaciones que los vinculan, estimar el "rango de la respuesta", entre otros elementos.

En la ingeniería de la secuencia didáctica, intentamos enriquecer nuestra comprensión sobre la toma del concepto de la TL, procurando añadir profundidad al análisis y estudiando más a fondo las acciones de los estudiantes: indagando más su formación matemática y sus intereses por la matemática y revelando los posibles obstáculos. Idealmente se tratará de entender el intento de unificación de los procesos de solución de las situaciones como una nueva entidad matemática de un nivel jerárquico superior. Procuramos identificar la caracterización de la TL al nivel de la propia acción que refleja las diferentes concepciones en interacción con las tareas.

Para profundizar en las distintas representaciones del concepto como construcción imaginaria de la noción, tratamos de ver si las relaciones fundadas sobre el concepto son legítimas con las acciones puestas en ejecución. Hemos añadido al estudio *entrevistas de explicitación* (Vermersch, 1994) pidiendo a los sujetos referirse a los procedimientos y los razonamientos matemáticos realizados, las conclusiones y cualquier otro saber matemático aplicado en las resoluciones de los problemas. Además de conocer las ideas matemáticas y opinión de las tareas, tratamos de caracterizar los intereses de los estudiantes participantes con un breve *cuestionario de entrada* (Caron, 2001) que pretende recopilar información sobre la percepción *teórica* y *práctica* de las matemáticas en la formación de la ingeniería y de los cursos de matemáticas preferidos hasta ese momento.

Para evaluar los efectos sobre el saber introducido por la secuencia, las explicitaciones en el tratamiento matemático nos permite precisamente examinar la capacidad de abordar la TL sobre las propiedades y los conocimientos que la vinculan, los cuestionamientos y las argumentaciones sobre su uso…etc. Para responder a esta pretensión elegimos hacer intervenir la TL como herramienta adaptada en los problemas a resolver. En particular, tratamos de hacer interactuar aplicaciones situándonos en diversos contextos; aritmético, geométrico algebraico y analítico, donde los estudiantes tendrán los medios de proporcionar sentido a los invariantes obtenidos (con los procesos realizados) y de avanzar en la comprensión y conocimiento de las propiedades que estas invariancias expresan. Tomando en cuenta el objetivo de nuestra investigación tratamos de ver si las competencias matemáticas mostradas y los niveles de explicitación en la utilización de la TL permiten mejorar la adquisición de la TL como objeto abstracto y simplificador.

3.5 Las situaciones problemas de la secuencia didáctica

En las situaciones problemas de la secuencia didáctica, se puede progresar en la formación del concepto de la TL tratando de organizar los conceptos subyacentes en función de la generalidad de la *estructura de combinación lineal:* estructura común a las cuatro actividades.

Como punto de partida proponemos privilegiar el medio aritmético-algebraico haciendo intervenir una situación de carácter no lineal donde las relaciones de proporcionalidad directa (conocidas por los estudiantes) pueden contribuir a la necesidad de encontrar una estrategia de resolución más económica y simple en la resolución del problema. Del medio aritmético-algebraico intentamos hacer una interacción entre los marcos algebraico y geométrico con el proceso de la TL para buscar una explicitación y progresión conceptual en el descubrimiento simplificador que aporta la noción. Esta actividad busca proporcionar un primer indicio a una formulación estructural de la TL. Seguimos con la reformulación de un concepto físico que trae la transferencia de las propiedades lineales y el control de una deformación geométrica aplicada. Para terminar con una aplicación analítica donde la TL debería conducir el método de un cálculo numérico en el marco geométrico. Las situaciones problemas son construidas, luego validadas por nuestra directora de tesis, y más tarde por el profesor del curso.

3.5.1 Actividad 1: *En busca de un modelo*

Traducir los datos de una tabla de valores puede hacer presentir una situación de carácter lineal. Tal problema, de la búsqueda de un precio único y coherente, podría ser visto como un simple ejercicio de proporcionalidad. Pero, algunas modificaciones o restricciones del contexto aquí, que permiten solicitar un poco más de razonamiento en la unificación del concepto, podrían romper ese esquema. Pidiéndole al estudiante producir un modelo de carácter funcional que integre las operaciones hechas y que entregue un precio único y coherente, se puede entonces hacer entrar de manera explícita en un proceso de deducción que se base sobre las mismas propiedades lineales y que den cuenta que el modelo lineal es el que más conviene (por su simplicidad y eficacia).

Un comerciante dispone para la venta una oferta de tomates envasados en paquetes de 2, 3, 4, 6, 14 y 24 kilogramos. Los precios de estos paquetes son los siguientes:

Paquetes (kg.)	*Precio ($)*
2	*470*
3	*700*
4	*850*
6	*1300*
14	*2800*
24	*5300*

Con estos valores, un comprador se interroga por el precio que debería pagar para 10 kilos.

1. *Sin deshacer los paquetes, utilizar diferentes combinaciones que le permitirían determinar el valor de 10 kg. ¿Qué se observa aquí? ¿Lo puede explicar usted?*

2. *Haga una representación gráfica del precio en función del peso del paquete. ¿Cuál es el paquete más económico?*

3. *El vendedor está dispuesto a cambiar sus tarifas pero quiere mantener los precios de los paquetes de 14 kg y 24 kg a lo que son actualmente.*

   a) *¿Cuál sería el precio de 10 kg en este contexto?*

   b) *Establecer un modelo que no sea definido por tramos y que entregue el precio para una cantidad x de kg.*

   c) *¿Funciona su modelo para una cantidad de 10 kg? ¿y de 0 kg?*

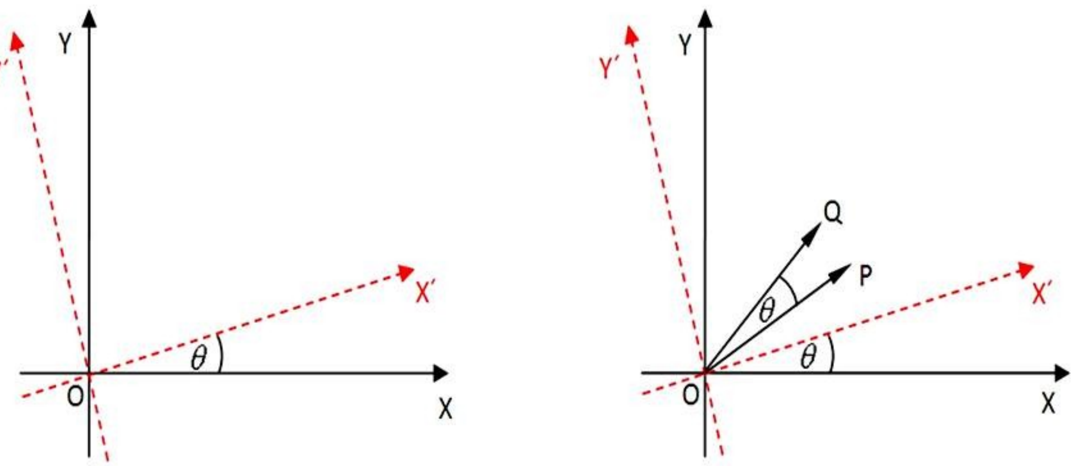
   d) *¿Qué propiedades tendría que tener el modelo para que proporcione un precio único y coherente para cualquier cantidad de tomates?*

   e) *¿Se puede utilizar este modelo y cumplir al mismo tiempo el deseo del vendedor?*

3.5.2 Actividad 2: *Rotación del plano*

El uso del modelo lineal de $\mathbf{R}^2$ en conjunción con el modelo geométrico de la rotación revela el carácter lineal de la transformación: el resultado pone en evidencia la economía del modelo lineal. La integración de la representación matricial hace desarrollar las propiedades lineales en el marco algebraico.

Según la figura, se aplica al plano cartesiano $\mathbf{R}^2$ *una transformación llamada rotación de un ángulo* θ *(sentido anti reloj) la que denotaremos por* R_θ. *La transformación* R_θ *sitúa al punto* P *de coordenadas* (x, y) *del sistema de ejes XY en un punto* Q *de coordenadas* (x_1, y_1) *del mismo sistema de ejes XY.*



Con el fin de calcular las coordenadas de $R_\theta(P)$ *en el sistema de ejes coordenados XY nos preguntamos si la rotación aplicada al plano* $\mathbf{R}^2$ *mantiene la posición relativa del punto* P *a lo largo de los ejes coordenados X e Y con el fin de calcular* $R_\theta(x,y)$ *para* (x,y) *cualquier punto de* $\mathbf{R}^2$.

Para responder a este cuestionamiento resolver entonces:

1. *Especificar con la ayuda de un método geométrico-trigonométrico la posición del punto* $R_\theta(P)$ *con* $P(x,y)$.

2. *Especificar con la ayuda de un método geométrico-trigonométrico la posición del punto* $R_\theta(A)$ *y* $R_\theta(B)$ *con* $A(1,0)$ *y* $B(0,1)$.

   a) *¿Qué tipo de relación parece existir entre* $R_\theta(A)$, $R_\theta(B)$ *y* $R_\theta(C)$ *con* $C(1,1)$*?*

   b) *¿Qué tipo de relación parece existir entre* $R_\theta(A)$, $R_\theta(B)$ *y* $R_\theta(P)$ *con* $P(x,y)$*?*

   c) *¿Lo puede usted justificar?*

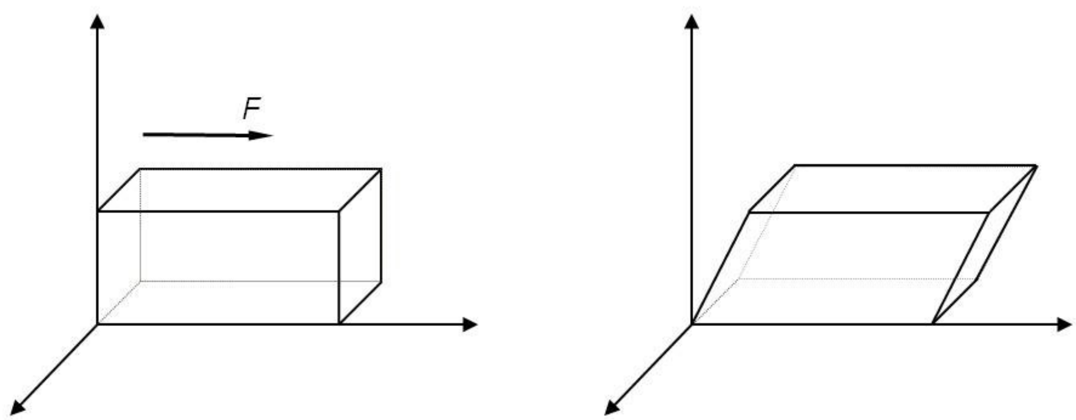
3. *Si un punto* G *se encuentra a una distancia* 98×10^{200} *del origen y su vector posición tiene una dirección de 60°. ¿Cuál sería la posición de* $R_\theta(G)$*?*

a) Represente R_θ por una matriz.

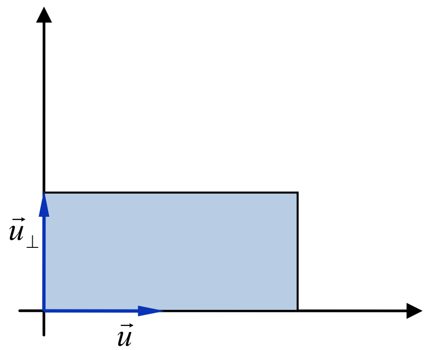
b) Verifique que esta representación matricial mantiene la linealidad de la transformación R_θ.

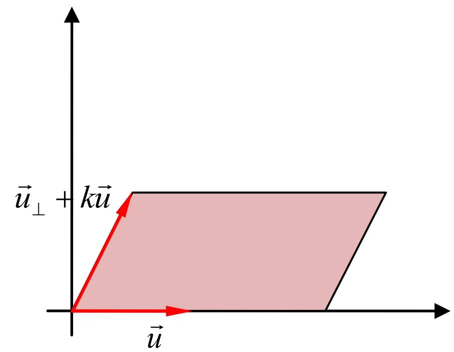
3.5.3 Actividad 3: *Cizalladura*

La búsqueda de la estructuración de la TL se apoya en la articulación de las diferentes representaciones entre el marco algebraico y geométrico. Por otro lado, la rotación de ejes, por su carácter lineal, permite una simplificación del efecto cizalladura.



Cuando la fuerza F que actúa sobre el cuerpo (paralelepípedo) en dirección paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta una deformación denominada "cizalladura". La sección transversal del paralelepípedo es un rectángulo el cual la cizalladura deforma en un paralelogramo.





Si la dirección de la fuerza F se representa por el vector no nulo $\vec{u}$ *y denotamos por* $\vec{u}_{\perp}$ *el ortogonal (en sentido positivo) a* $\vec{u}$*, la cizalladura es la TL que deja fijo a la dirección* $\vec{u}$ *y transforma* $\vec{u}_{\perp}$ *en* $\vec{u}_{\perp} + k\vec{u}$ *con* k *un escalar. Denominaremos esta cizalladura de factor* k *y dirección* $\vec{u}$*.*

1. *Considere la cizalladura de factor 2 en la dirección* $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$*. Si definimos* $\vec{u}_{\perp}$ *como el vector perpendicular a* $\vec{u}$ *de misma norma y en el segundo cuadrante.*

   a) *Determine donde se ubican las imágenes de los vectores siguientes:*

      i. $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$

      ii. $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}_{\perp}$

      iii. $\vec{j}$

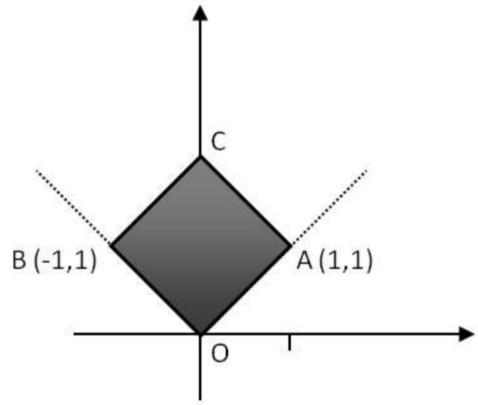
   b) *Deduzca la representación matricial de la cizalladura respecto*

      i. *de la base canónica*

      ii. *de la base* $B = \{\vec{u}, \vec{u}_{\perp}\}$

   c) *Verifique las respuestas dadas en b) aplicando las dos matrices al vector* $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$.

   d) *¿Cómo resultará la estructura cuadrada siguiente si se le aplica esta cizalladura? (Consejo: considere aplicar la transformación a cada uno de los vértices).*



e) *Verifique que la respuesta dada en d) para el vértice C se puede obtener con ambas matrices (respecto a sus bases asociadas).*

2. *La cizalladura descrita en el punto 1. podría ser descrita más directamente si se rotase el sistema de coordenadas para que la fuerza sea aplicada en la dirección de uno de los vectores de la base canónica. Una alternativa que nos permite mantener el mismo sistema de coordenadas es considerar una combinación de transformaciones geométricas que se aplican a la figura. En primer lugar, se imagina que se hace una rotación (en* $-45°$*) de la estructura para que la fuerza sea aplicada en la dirección de* $\vec{i}$*. Se aplica entonces la fuerza que deforma al cuadrado en un paralelogramo por la cizalladura (de factor* 2*) en la dirección de* $\vec{i}$*. Finalmente se vuelve a rotar (en* $45°$*) en sentido opuesto.*

a) *Esboce una secuencia de dibujos que ilustre esta secuencia de transformaciones geométricas.*

b) *Represente cada etapa de esta secuencia con la matriz adecuada, respecto de la base canónica.*

c) *Verifique que un producto de estas matrices nos hace volver a la matriz de la cizalladura (calculada en 1-b) -i)).*

3.5.4 Actividad 4: *Áreas entre curvas*

La utilización de la linealidad de la integral intenta conciliar el marco geométrico y el marco analítico (Douady, 1983). El cálculo del área deberá ser consecuente con la estructura lineal que plantea, y estimada conforme a una aproximación por figuras simples.

---

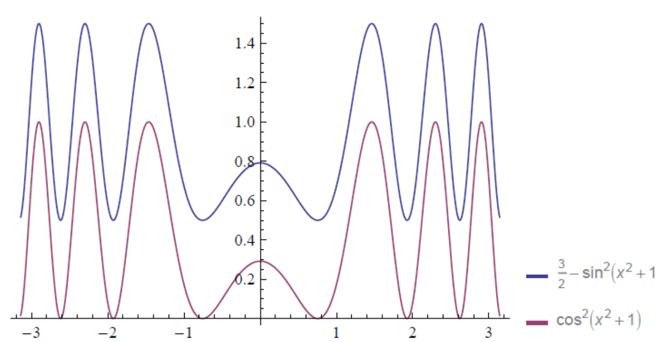
1. *Considerar la siguiente expresión para* I

$$I = \int_{0}^{\pi} \left(\tfrac{3}{2} - \operatorname{sen}^2 (1 + x^2) \right) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} \left(\cos^2 (1 + x^2) \right) dx$$

a) *Explicitar qué propiedad lineal de la integral se utiliza al realizar el cambio de* $\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} \left(\cos^2 (1 + x^2) \right) dx$ *por* $\int_{0}^{\pi} \cos^2 (1 + x^2)\, dx$.

b) *Establecer una expresión equivalente a* I *que permita determinar fácilmente su valor numérico y explicitar la relación en términos de las propiedades lineales de la integral.*

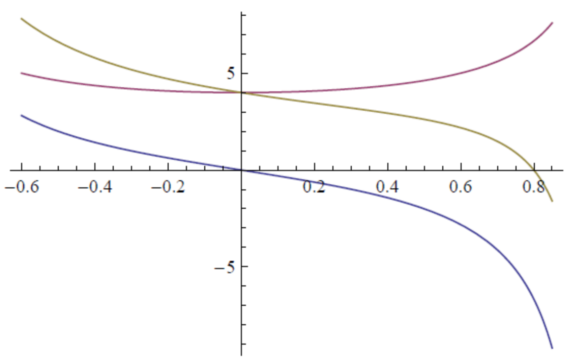
c) *Utilizando el gráfico de la figura ¿cómo se podría interpretar el resultado de la integral* I *visualizando las dos integrales? ¿A qué figura geométrica sencilla se podría asociar el área entre estas dos curvas?*



2. *Se define la función* f *por* $f(x)=\dfrac{-3x+4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$ *en el intervalo abierto* $]-1,1[$ *y* Ω *la región limitada por el gráfico de la función* f *y las rectas* $y=0,\quad x=-0.5,\quad x=0.8$

   a) *Ya se sabe que para calcular el valor de* $\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\,dx$ *se puede utilizar propiedades lineales de la integral. Explicitar las propiedades que permitan hacer este cálculo.*

   b) *De las gráficas de la figura identificar cada función y establecer una relación entre las regiones para medir el área de* Ω *como el área de la región acotada por el gráfico de estas funciones.*



   c) *Verificar la relación entre el área de* Ω *y las áreas de las regiones aproximando por áreas de polígonos.*

3.6 Análisis *a priori* de las situaciones problemas

La secuencia y los análisis *a priori* de las situaciones problemas constituyen una fase inicial del proceso de validación de la ingeniería. La construcción del diseño de experimentación considera como punto esencial el análisis preliminar de las concepciones de los estudiantes de las situaciones didácticas al mismo tiempo que se convocan sus obstáculos y posibles errores. El objetivo del análisis *a priori* pretende, entre otras cosas, controlar el sentido de la TL a través de la concepción de situaciones didácticas apropiadas, determinando en qué forma las distintas elecciones efectuadas permitirá controlar tanto la actividad matemática del estudiante como el significado que construye a partir de las tareas. Hay una parte del análisis *a priori* que es de tipo descriptivo, incluye las elecciones didácticas y su relación con las elecciones de tipo matemático. Pero la parte más importante es la del tipo predictivo, el desafío que estas situaciones representan para el estudiante, las posibilidades de acción, elección, decisión, control y validación de lo que ellos disponen una vez conseguida la devolución. Hay también una previsión de los comportamientos posibles del estudiante, así como un análisis en qué forma, estos comportamientos esperados, suponen la adquisición del conocimiento buscado por la situación. Los significados que construyen los estudiantes son validados más tarde en la confrontación con el análisis *a posteriori*.

En el momento de la construcción de las tareas, nos hicimos en cada paso la pregunta de lo que podrían hacer los estudiantes en sus acciones, de modo de provocar la comunicación de las concepciones adaptadas. Al mismo tiempo que analizamos *a priori,* la apropiación de la TL, con los diferentes razonamientos que los sujetos podían hacer corresponder con las explicitaciones proporcionadas por el sentido, las descripciones representadas del concepto. También, preparamos para cada pregunta de las tareas, una matriz de competencias (Caron, 2001) para las posibles caracterizaciones de la TL identificando su nivel de explicitación en la abstracción. La utilización de estas matrices de competencias hace posible más tarde un análisis *a posteriori* en profundidad.

Realizamos a continuación, un análisis *a priori* bien detallado para cada situación problema. Describimos posibles procedimientos implicados en la resolución de las tareas y algunas otras anticipaciones respecto a las posibilidades de acción, de elección, de control y validación en la concepción de la TL.

3.6.1 Actividad 1: En busca de un modelo

Métodos de resolución de los estudiantes y otras anticipaciones

En relación al problema 1, la familiaridad que tienen los estudiantes con problemas de tablas de valores supone una modelización en términos de una regularidad de tipo proporcional que admite el uso de la propiedad aditiva. Esta acción podría producir dificultades (por ejemplo, dificultad D.5, sección 1.4.1) en la validación de la nueva función estudiada en la medida que no renuncien a las especificidades internas de las proporciones. Podemos esperar que, por la explicación del fenómeno que viene de la búsqueda de un precio único y coherente y debido a la complejidad de los datos de la tabla, la modelización del problema contribuya en la comprensión del concepto lineal y unificación de los resultados. Contemplando más allá de una simple predicción, y proporcionando un medio de resolución más general que permita prever explicaciones al fenómeno observado.

Para determinar el precio de 10 kg, se estima que los estudiantes realicen distintas combinaciones lineales[39] de paquetes (algunas más evidentes que las otras) de manera de formar paquetes de 10 kg y que las transfieran a los respectivos precios. Mostrando así, de manera natural, el uso de un modelo de tipo lineal (proporcional) con la explotación de la propiedad aditiva. Así por ejemplo, para la combinación de 4 kg y 6 kg ($4+6=10$), los estudiantes establecerían el precio de 10 kg de acuerdo al modelo $850+1300=2150$. De igual modo, otra combinación prevista por los estudiantes sería el doble de la combinación de 2 kg y 3 kg (es decir $2\cdot(2+3)=10$) asociándole un precio de $2\cdot(470+700)=2\cdot 1170=2340$ al paquete de 10 kg. Este examen de los distintos precios debería conducirles a cuestionar las especificidades internas de las reglas proporcionales que estarían usando en el nuevo contexto. Una posible explicación que expresarían, sería

[39] En el contexto de la actividad 1 el término "*combinación lineal*" hace referencia al concepto general de combinación lineal pero restringida a escalares enteros.

que los precios no fueron asignados proporcionalmente (modelo lineal) en la tabla de valores, argumentando respuestas del tipo *"si 2 kg cuestan $ 470 entonces 4 kg deberían costar el doble, es decir $ 940, pero en la tabla dice que cuestan $ 850"*. Se espera este tipo de argumentos por parte de los estudiantes sólo si observan que las propiedades proporcionales aplicadas quedan inexactas en la nueva visión.

En consideración de los diferentes valores para el precio de 10 kg, los estudiantes podrían tratar de establecer un valor promedio de manera de obtener un precio único para 10 kg. Para ello, podrían actuar al menos de tres formas diferentes: primero, promediar los distintos precios obtenidos (para 10 kg), otra forma sería promediar el total de precios con el total de kilogramos y finalmente, promediar el precio unitario de cada paquete. Las dos últimas formas entregan un precio unitario y de ahí, multiplicativamente ellos podrían obtener el precio de 10 kg.

En relación al problema 2. La representación gráfica de este tipo de situaciones es conocida por los estudiantes. Habitualmente ellos asocian la información de la tabla a los pares ordenados (peso, precio) y los disponen discretamente en una gráfica como la siguiente:

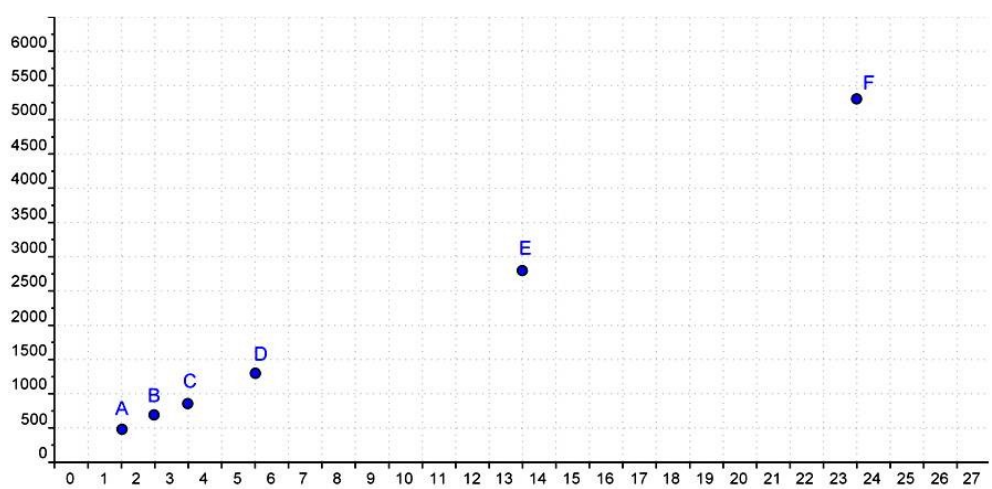


Figura 5. Gráfica de la situación

Es posible que algunos estudiantes unan estos puntos con una línea poligonal extrapolando los datos, tratando de imaginar la representación gráfica de una función que tienden a asociar a una función lineal (Markovistz *et al*, 1985)[40].

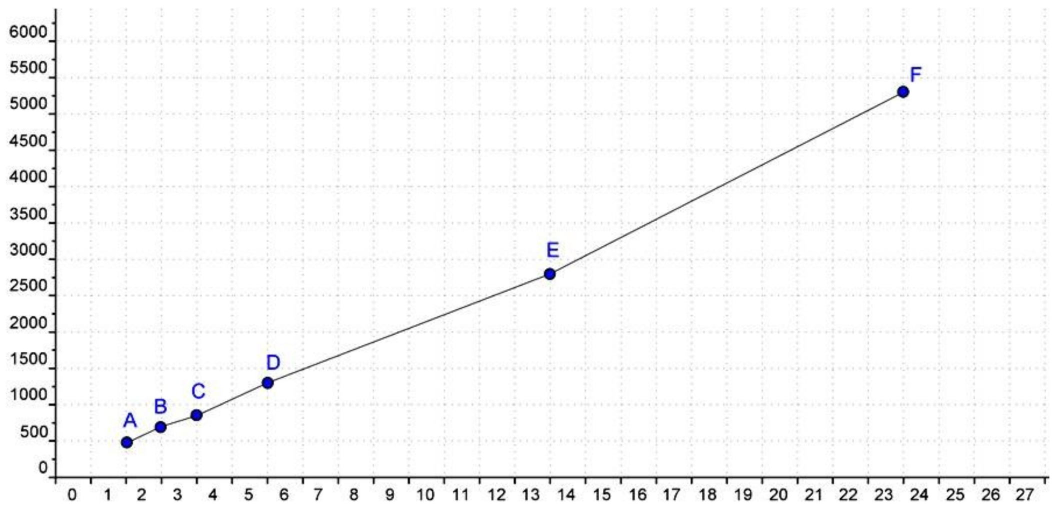


Figura 6. Aproximación poligonal de la situación

Apoyándose en este tipo de gráfica ellos podrían formular que el $(0, 0)$ también pertenece a la gráfica y justificar de manera natural este resultado "*por no llevar tomates, no se debe pagar*".

Esta representación gráfica les permitiría además, interpretar el cambio del precio y traer una relación más pertinente al contexto, proporcionando una influencia sobre la construcción del modelo que podría explicar el fenómeno observado. Así, como toda la actividad está estructurada de manera tal que orienta a la interpretación de la linealidad, el gráfico les permitiría ver si los puntos están o no alineados y de estarlos, si obedece o no a un modelo lineal (invariancia de la pendiente, condición del origen). La sola abstracción del

[40] Citado por Sfard (1991) y referido a la dificultad D.5 (p.34) redactada en nuestra tesis.

precio unitario podría anticipar la unificación de los precios que el mismo modelo permite poder compararlos.

Para dar respuesta al paquete más económico se prevé que los estudiantes insistan en el razonamiento lineal (proporcionalidad) recurriendo a las dos posibles formas siguientes:

La *primera forma*, consistiría en tratar de comparar directamente los precios de los distintos paquetes utilizando propiedades de proporcionalidad (linealidad). Así por ejemplo, cómo los paquetes de 4 kg y 2 kg están en la razón de proporcionalidad $1:2$, utilizarían esta razón para comparar los respectivos precios, deduciendo que el precio para 4 kg a partir del precio del paquete de 2 kg sería $2 \cdot 470 = 940$, concluyendo que el paquete de 4 kg de la tabla, que tiene un precio de $ 850, es más económico que el de 2 kg. De la misma manera, dado que los paquetes de 3 kg y 6 kg también están en la razón de proporcionalidad $1:2$, establecerían que el precio para 6 kg a partir del precio de 3 kg sería $2 \cdot 700 = 1400$, es decir menos económico que el paquete de 6 kg de la tabla. Esto determina hasta ahora que los paquetes de 4 kg y 6 kg son los más económicos. Para la comparación de los paquetes de 4 kg y 6 kg procederían de forma análoga, concluyendo que el paquete de 4 kg es el más económico entre los paquetes de 2 kg, 3 kg y 6 kg. Para la comparación de los paquetes de 4 kg, 14 kg y 24 kg utilizarían la misma estrategia, estableciendo finalmente que el paquete de 14 kg es el más económico de la tabla. Es posible también que el procedimiento anterior lo realicen visualmente en la gráfica poligonal (Figura 6) al buscar la menor pendiente de los segmentos de la lineal poligonal.

La *segunda forma*, consistiría en que los estudiantes pudieran determinar el precio unitario de cada paquete de la tabla y en base a este precio, establecer el paquete más económico por simple comparación, esto es, el paquete de 14 kg. Esta segunda forma de resolución plantea una estrategia más global y eficaz que permitiría a los estudiantes comparar los precios de los paquetes simultáneamente en base a un invariante común: el precio unitario (precio de 1 kg).

Para proseguir con la construcción del modelo, la última parte de la actividad (problema 3) presenta una vacilación a la puesta en acción de las técnicas (que impusieron en la primera parte) al cercar las condiciones del contexto, a conducir a cuestionarse la generalidad del modelo y a comprender las causas de eso. En este nuevo contexto, es posible que los estudiantes esperen “remediar” las insuficiencias encontradas, ya que las restricciones de los datos disminuyen, incluso las incoherencias producidas. El proceso de reasignar los nuevos precios les podría permitir un nuevo acceso a las dificultades encontradas para extraer el modelo que ellos logren establecer como el más coherente y pertinente, y que no explicaron en las primeras acciones. Implícitamente, las posibles estrategias de los estudiantes obedecerían un razonamiento lineal:

Respecto del sub-problema 3-a) los estudiantes deberían conjugar distintas combinaciones para 10 kg a partir de 14 kg y 24 kg. Una alternativa inmediata es que digan “*los 10 kg se obtienen de la diferencia entre los paquetes de 24 kg y 14 kg entonces el precio de estos 10 kg debería ser la diferencia de los precios de estos dos paquetes, es decir* $5300-2800=2500$*”*. Otra posible estrategia es que determinen un precio unitario, y luego por multiplicación, obtengan el precio para 10 kg. Para la determinación de este precio unitario, podrían proceder de dos formas: la primera como el promedio de la suma total de los precios y el peso total de los paquetes ($\approx 213{,}2$) y la segunda, como el promedio de los precios unitarios de cada paquete ($\approx 210{,}4$). La obtención de estos distintos precios para 10 kg debería hacerles reflexionar y concluir que el modelo lineal tampoco se ajusta a estas nuevas condiciones.

En relación al sub-problema 3-b), se requiere proponer un modelo que entregue el precio para una cantidad x de kg, principalmente, para disponer de más herramientas, los estudiantes considerarían modelos de variable continua que incluyan los valores discretos de la tabla. Sus estrategias se podrían centrar en tres modelos funcionales, uno lineal y dos afines:

Modelo lineal. Se prevé que los estudiantes insistan en este tipo de modelo en razón de su eficacia y coherencia, y del conocimiento práctico que tienen de él. Por la experiencia en las estrategias anteriores, de la validación de las conjeturas en la tarea de un precio único y coherente, los estudiantes deberían ser conscientes que el modelo lineal entrega un precio único para una misma cantidad de kilogramos. En este sentido, ellos constatarían que los modelos lineales $200 \cdot x$ y $220{,}8 \cdot x$ para 14 kg y 24 kg respectivamente respetan sólo una de las condiciones iniciales (mantener el precio de los paquetes 14 kg y 24 kg). Es posible también que propongan el modelo lineal cuya razón es el promedio de las razones de los modelos anteriores: $210{,}4 \cdot x$ Se trataría de un modelo aproximado ya que no respeta ninguno de los precios iniciales de 14 kg y 24 kg. Con esta estrategia, los estudiantes privilegiarían la eficacia y la generalidad del modelo pero sin reconciliar las condiciones impuestas por el vendedor, descuidando así el nivel de comprensión de las causas de eso y la unificación de los resultados. Sin embargo se trataría de una aproximación (una regresión) que satisface la condición lineal fundamental (del precio de 0 kg) y que se acerca a los deseos del vendedor.

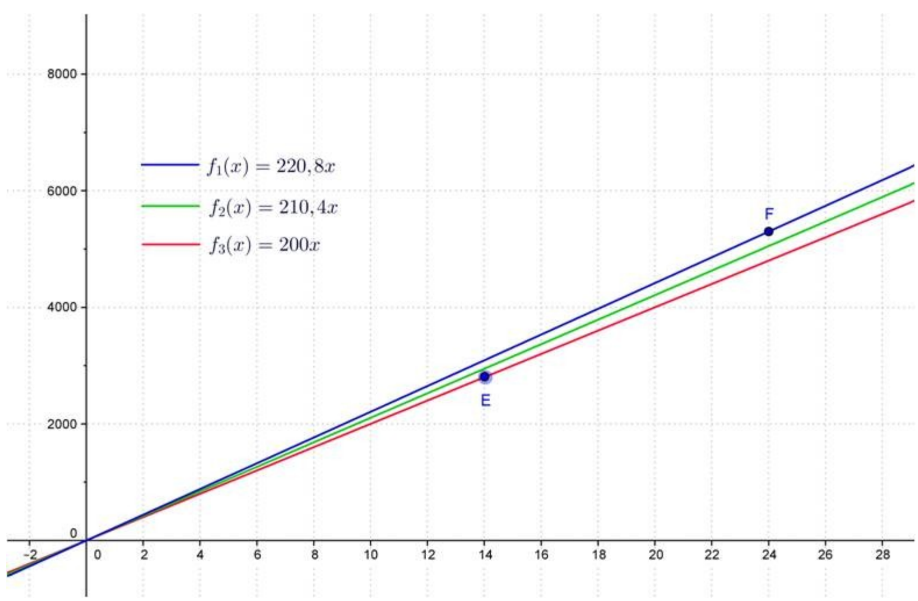


Figura 7. Modelos lineales adaptados para responder a la situación

Modelo afín. Este método consiste en un procedimiento que privilegia la facilidad de estructurar el modelo considerando las condiciones iniciales. Valoriza además el pensamiento geométrico que les permite trabajar sobre la geometría analítica y asegurar la construcción del modelo. Con una curva simple que pase por los puntos $E = (14, 2800)$ y $F = (24, 5300)$ los estudiantes definirán la relación $g(x) = 250x - 700$.

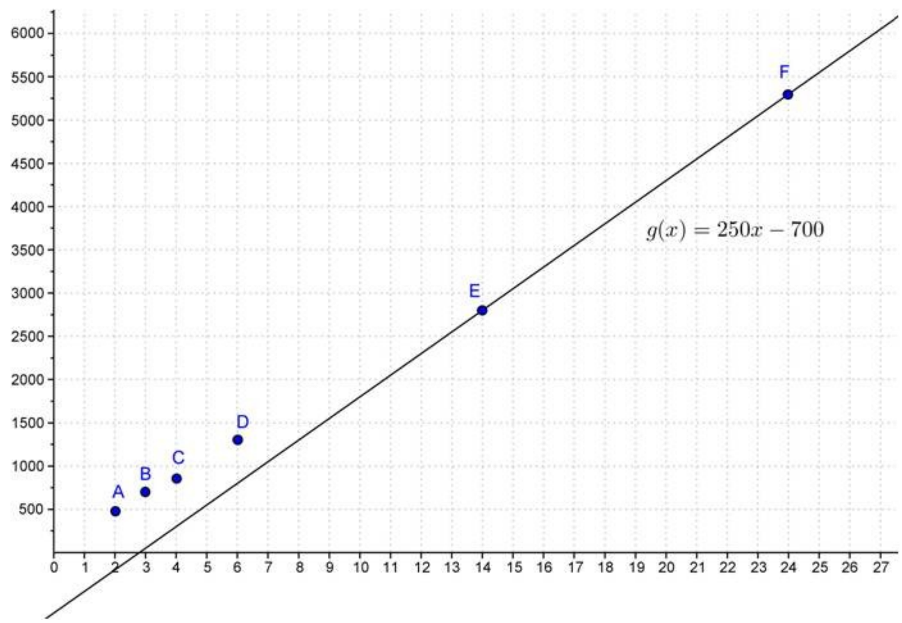


Figura 8. Un modelo afín adaptado para responder a la situación

Modelo afín por regresión. Con este método*,* es posible que los estudiantes consideren un modelo funcional por el ajuste lineal o regresión lineal (estimación por mínimos cuadrados) principalmente con el fin de predecir, es decir, como una forma práctica de aproximarse a todos los valores. Con ello, podrían constatar también que la distribución de los puntos no obedece a un modelo lineal ya que la recta que representa la regresión lineal $r(x) = 216{,}26x - 6{,}95$ no pasa por el origen. Este modelo no cumpliría tampoco las condiciones del vendedor, pero es posible que los estudiantes lo consideren, a pesar de eso.

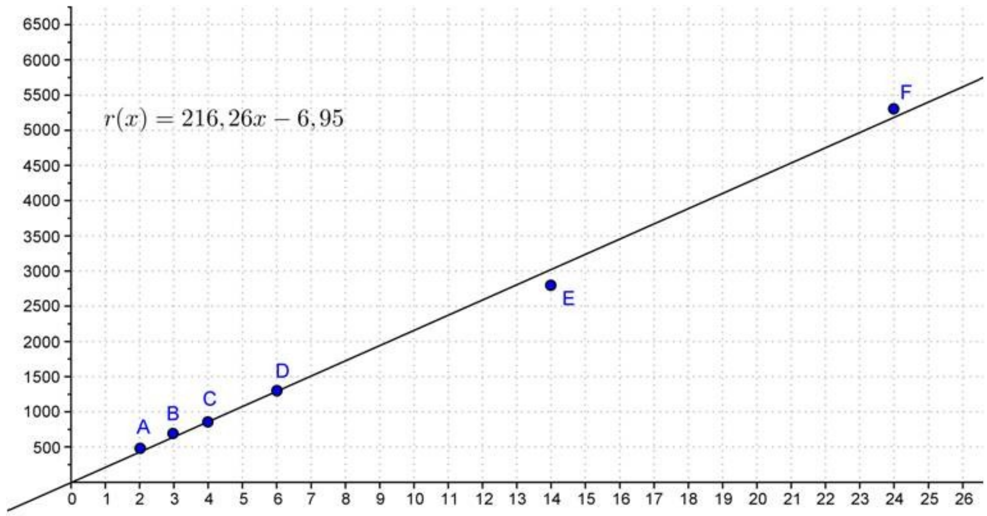


Figura 9. Ajuste lineal o regresión lineal

En relación al sub-problema 3-c) que pide la validez del modelo, los estudiantes procederían por comparación; confrontando los valores de la tabla (exigidos por el vendedor) con los resultados del modelo propuesto.

Por un lado, como los modelos propuestos no se corresponden muy bien con un precio unitario para 10 kg, ya que los valores obtenidos son diferentes de acuerdo al razonamiento proporcional y además a los de la primera formulación es posible que basándose en el modelo propuesto (sub-problema 3-b) los estudiantes se replanteen el precio de 10 kg. Y por otro lado, en la extrapolación de los datos para 0 kg el modelo afín discreto $g(x) = 250x - 700$ no respeta este principio ya que por no comprar tomates el vendedor debería "pagar" al cliente $ 700, lo cual es ilógico. Así, para simplificar esta complejidad, algunos estudiantes pudieran establecer nuevas restricciones para el dominio de validez de su modelo. Por ejemplo, en los modelos lineales cambiar uno de los precios dados (de 14 kg o de 24 kg), y en el modelo afín, establecer la restricción en los kilogramos a partir de 3 kg, pues para valores menores a este valor, el modelo entrega valores negativos. Sin embargo, este nuevo modelo produce nuevas incoherencias en el cálculo de un mismo precio, por ejemplo, el precio para el paquete de 3 kg es $g(3) = 50$. En particular el precio de dos de estos paquetes es $ 100, es decir para un total de 6 kg y el mismo modelo entrega un precio de $g(6)=800$ para el paquete de 6 kg. En conclusión este modelo hace que el precio para 6 kg difiera considerablemente según la forma de la combinación lineal: dos paquetes de 3 kg tiene un precio de $ 100, mientras que un paquete de 6 kg tiene un precio de $ 800, lo que carece de sentido común, por ende los estudiantes lo refutarían.

En relación al sub-problema 3-d) sobre la estructura y las propiedades para que el modelo sea adecuado a un precio único y coherente, se requiere traer una relación que unifique y simplifique los resultados, y en consecuencia tratar de reconciliarse con un enfoque más general. Después de las formulaciones hechas en las distintas estrategias desarrolladas, los estudiantes deberían haber observado algunas propiedades subyacentes basadas en las reglas de las proporciones, y que el nuevo modelo debería integrar y unificar. Por ejemplo, el precio de 4 kg debería ser el doble del precio de 2 kg, el precio de 6 kg debería ser el triple del precio de 2 kg o bien la suma de los precios de 2 kg y 4 kg, o bien el doble del precio de 3 kg, etc. En base a estas observaciones podrían conjeturar además, que la razón de cambio (o la tasa de variación) entre peso y precio debería ser constante para cumplir con la coherencia interna del modelo, y con la externa respecto a lo que ya saben de las proporciones. Apoyándose en que las especificidades internas de estas propiedades quedan desacertadas en el nuevo contexto, los estudiantes deberían extraer las características generales y proporcionar un nuevo sentido al concepto lineal: *"si el precio de x y x' es p y p' respectivamente entonces el precio de $x+x'$ debería ser $p+p'$ ",* que definirán su representación abstracta. Lo que en términos más formales quiere decir que si $f(x)$ designa el precio de x kg entonces $f(x+x')$ *y* $f(x)+f(x')$ representan el precio de $x+x'$ kg, de donde establecerían la relación $f(x+x')=f(x)+f(x')$ que corresponde a la propiedad aditiva de un modelo lineal.

Como síntesis de la resolución de la actividad, en base a su experiencia (procedimientos, dificultades, etc.) propia, los estudiantes deberían quedar convencidos que el modelo funcional lineal es el más adecuado y coherente para encontrar un método general que permita unificar las mismas técnicas y procedimientos lineales ya conocidos. En particular, establecer que con este tipo de modelo no es posible satisfacer el deseo del vendedor (mantener el precio de dos paquetes) para asegurar la coherencia de la construcción. Puede ser también que intuyan que este tipo de modelo funcionaría a condición que, el vendedor renuncie a uno de los precios (de 14 kg o 24 kg).

3.6.2 Actividad 2: Rotación del plano

Métodos de resolución de los estudiantes y otras anticipaciones

*En relación al problema 1, e*n la especificación de las coordenadas del punto $Q = R_{\theta}(P)$ por el método geométrico-trigonométrico, se prevé que los estudiantes desarrollen relaciones geométricas y procesos algebraicos para justificar la nueva posición de P. La representación gráfica de un sistema de coordenadas con ejes ortogonales proporcionará los vínculos entre el marco algebraico y geométrico, y las traducciones de un cuadro a otro deberían conducirlos a formular la relación lineal y a encontrar un nuevo método de resolución. Para esto, los estudiantes se apoyarían en la siguiente representación gráfica para deducir las relaciones entre el punto y su rotación.

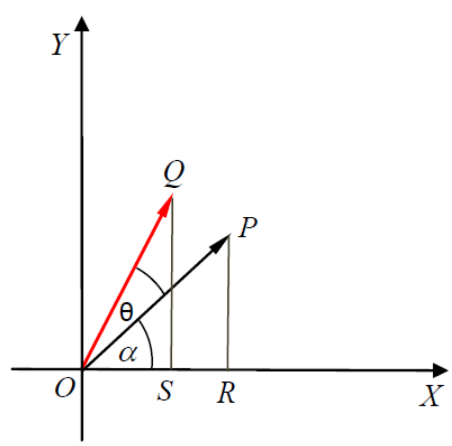


Figura 10. Modelo geométrico-trigonométrico

A partir de los triángulos rectángulos ORP y OSQ los estudiantes obtendrían el punto $Q = R_\theta(P)$ apoyándose en propiedades trigonométricas:

En el triángulo ORP:

$$x = |OP|\cos(\alpha), \qquad y = |OP|\operatorname{sen}(\alpha), \qquad \text{con } P = (x, y).$$

En el triángulo OSQ:

$$x_1 = |OQ|\cos(\alpha + \theta), \qquad y_1 = |OQ|\operatorname{sen}(\alpha + \theta), \qquad \text{con } Q = (x_1, y_1).$$

Por el tipo de transformación geométrica (rotación) se espera que establezcan intuitivamente la invariancia del módulo de los vectores posición, es decir $|OQ| = |OP|$, y que combinen estas relaciones con otras identidades trigonométricas para establecer el *modelo geométrico-trigonométrico* en función del ángulo de rotación θ y las coordenadas de $P = (x, y)$:

$$R_\theta(P) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

Este método trigonométrico, clásico, es conocido por los estudiantes pues se trata de contenidos anteriores de geometría analítica y trigonometría.

En relación al sub-problema 2-a). Como el sistema cartesiano juega un rol evidente y precursor de la base, relacionar los puntos $R_\theta(A)$, $R_\theta(B)$ y $R_\theta(C)$ referidos a la base canónica debería favorecer el desarrollo de la modelización, de la interpretación y de la validación del modelo lineal. En este sentido, se prevén dos posibles métodos de resolución:

Método geométrico-trigonométrico. Se espera que los estudiantes apliquen directamente el procedimiento *geométrico-trigonométrico* para determinar la rotación de los puntos A, B y C. En un proceso de comparación que reposa sobre las coordenadas, ellos podrían establecer la relación lineal entre las imágenes de estos puntos. Una propiedad aditiva que podría permitirles vislumbrar una estrategia más eficiente y menos exigente que memorizar las fórmulas trigonométricas aplicadas.

Método lineal. Los estudiantes podrían mostrar que "la ley del paralelogramo" de la suma de vectores se traduce en la suma de las coordenadas de los puntos, para justificar la relación $A+B=C$ y deducir, por analogía, la relación lineal que entrega la rotación $R_\theta(A)+R_\theta(B)=R_\theta(C)$. La verificación de esta relación la deberían realizar con la fórmula geométrica-trigonométrica desarrollada y las definiciones utilizadas. Este método les permitiría dar cuenta del hecho que la rotación se estructura de forma lineal y que deja invariante la posición del punto relativa a los nuevos ejes. Pero, sin un cuestionamiento profundo sobre la generalidad de este método no se garantiza la emergencia del modelo lineal, ya que la traducción de la representación geométrica a la relación lineal puede ser dejada completamente a cargo de la comparación del resultado en el sentido operatorio ("*eso da*…"). Se prevé que algunos estudiantes trabajen casi exclusivamente en un nivel de coordenadas tratando de identificar sólo el método que hay que aplicar (ó sea buscando métodos conocidos).

También es posible que algunos estudiantes, con un cierto dominio algebraico en la articulación de los puntos de vista "punto/vector posición", pudieran verificar esta relación en el marco geométrico apoyándose de propiedades vectoriales. Representar e interpretar gráficamente los vectores $R_\theta(C)$ y $R_\theta(A)+R_\theta(B)$ como la diagonal de un mismo cuadrado, resultaría significativo para la interpretación del modelo lineal y sus condiciones de aplicación, pues se trataría de la misma organización lineal $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ de la diagonal del cuadrado de vértices O, A, B y C. Esto podría conducir a comprender que, el cuadrado de vértices $R_\theta(O)$, $R_\theta(A)$, $R_\theta(B)$ y $R_\theta(C)$ resulta de la rotación del cuadrado inicial y que la diagonal $R_\theta(\vec{A})+R_\theta(\vec{B})$ es precisamente la rotación de la diagonal $\vec{C}$. En otros términos, la rotación conserva la estructura geométrica de las figuras.

En relación al sub-problema 2-b), se trata de una generalización de la parte a). Si la tarea de la parte a) conduce, por comparación de las coordenadas y la fórmula trigonométrica, a descubrir la relación lineal ($R_\theta(A)+R_\theta(B)=R_\theta(C)$) esta tarea permite justificar por qué, aclarando la igualdad de esta relación para el punto $P(x,y)$. La traducción del marco algebraico lineal debería conducir a mirar la relación lineal de manera general, y a privilegiar su uso. Se espera que los estudiantes, sobre todo los que demuestren competencias superiores, extiendan los resultados de la parte a) y logren abstraer el método general para $R_\theta(P)$. Por analogía con la parte a), unifiquen las relaciones lineales $xA+yB=P$ y $xR_\theta(A)+yR_\theta(B)=R_\theta(P)$ en un contexto algebraico, y verifiquen la equivalencia apoyándose en el modelo geométrico (fórmula geométrica-trigonométrica). Es posible también que conjeturen que *"$R_\theta(P)$ es combinación lineal de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$"* y que pretendan calcular los coeficientes de esta combinación lineal por medio de la resolución de un sistema de ecuaciones.

Esta relación lineal general de la rotación, responde a un nivel de conceptualización abstracto y general (en el marco algebraico lineal) pues utiliza la estructura algebraica del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ independiente del marco geométrico. Esta formalidad podría poner un obstáculo al modelo lineal para percibir la linealidad como una igualdad entre los dos miembros que la vinculan: la rotación de la descomposición lineal de $P=xA+yB$ y la combinación lineal de las rotaciones de los basales $xR_\theta(A)+yR_\theta(B)$, debido al uso puramente procedural de la fórmula geométrica-trigonométrica y al interés por el resultado que ésta entrega.

Por otro lado, como ciertos estudiantes, aquellos que privilegian el método procedural, tienen la dificultad en identificar los elementos en juego y realizar una posible abstracción de contextos concretos, las interpretaciones de las relaciones formuladas pueden ser diferentes al modelo que se quiere abstraer (dificultades D.1 y D.4, sección 1.4.1). En este sentido, es posible que estos estudiantes presenten dificultad en lograr desprenderse del modelo geométrico y que trabajen la relación $xR_\theta(A)+yR_\theta(B)=R_\theta(P)$ a nivel de coordenadas, sin establecer el método lineal general.

En relación al problema 3. Habiendo explicado la generalidad del modelo en la tarea 2-b) se busca saber si son capaces de utilizarlo eficientemente para un punto $P(x, y)$ cualquiera. Además se pretende que traduzcan las propiedades lineales en el marco matricial (sub-problemas 3-a y 3-b). La tarea de obtener la posición de $R_\theta(G)$ puede entonces conducir a privilegiar una concepción económica de la TL donde la rotación de los vectores basales (base canónica) y la multiplicación por un escalar podrían tomar sentido. De esta utilización, es posible que emane para los estudiantes el significado y las reglas de la TL. Para calcular la posición de $R_\theta(G)$ los estudiantes requerirían calcular primeramente las coordenadas (x_0, y_0) del punto G y podrían proceder con los siguientes métodos:

Método geométrico-trigonométrico. Basándose en un proceso geométrico-trigonométrico y pasando por un trabajo algebraico, calcularían x_0 e y_0 en términos de razones trigonométricas sobre el triángulo rectángulo de catetos x_0 e y_0, hipotenusa 98×10^{200} y ángulo de inclinación 60°. Esta estrategia, centrada en la técnica y la memorización, considera rentable trabajar con fórmulas trigonométricas conocidas, por los buenos resultados que se obtienen a cambio, ya que no exige el trabajo de validación que podría conferir duda o ambigüedad. Los estudiantes que trabajan de forma procedural, podrían considerarla. Distinto es el caso si la estrategia contempla la utilización de la herramienta lineal, no para un resultado en específico, sino para justificar una propiedad general.

Método lineal. Consiste en utilizar la linealidad de la rotación apoyándose del vector posición de G. En este contexto los estudiantes deberían interpretar 98×10^{200} como el módulo de este vector y la dirección 60° como el ángulo de la rotación del vector canónico

$\vec{A} = (1, 0)$, y plantear estos datos en la relación $\vec{G} = R_{60^\circ}((98 \times 10^{200})\vec{A})$, donde por la linealidad de R_{60° se reescribe $\vec{G} = (98 \times 10^{200}) R_{60^\circ}(\vec{A})$. Con todo esto, y habiendo establecido las coordenadas de $R_{60^\circ}(\vec{A})$ previamente, determinarían las coordenadas del punto G. Esta última relación subraya el carácter económico de la TL y ratifica el aspecto general del modelo que da cuenta de la independencia de la medida del ángulo de rotación (60°).

En relación al sub-problema 3-a), de representar matricialmente la rotación R_θ respecto de la base canónica, se espera que los estudiantes interpreten y apliquen correctamente la definición y el teorema de representación (Anexo E). Para ello, deberían expresar $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ como combinación lineal de $A = (1, 0)$ y $B = (0, 1)$. Es posible que se les presente la dificultad sobre la posición de los coeficientes de estas combinaciones lineales en la matriz asociada; a veces los disponen en filas en lugar de columnas (dificultad D.3, sección 1.4.1). También es posible que los estudiantes apliquen la técnica de disponer directamente las coordenadas de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ como las columnas de la matriz, que coincidiría con la concepción de la representación matricial en la base canónica pero pierde validez respecto de otras bases, produciendo un tipo de dificultad en la representación (dificultad D.3, sección 1.4.1).

En relación al sub-problema 3-b), sobre la verificación de la linealidad de la representación matricial, se prevé que los estudiantes pondrían en ejecución la concepción que se habrían hecho, hasta ahora, sobre la linealidad por la "conservación de las combinaciones lineales". Procederían a interpretar la linealidad de la representación matricial M mediante la igualdad $xM \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + yM \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en analogía al desarrollo de la relación lineal $xR_\theta(\vec{A}) + yR_\theta(\vec{B}) = R_\theta(\vec{P})$ para R_θ. Validando algebraicamente esta relación en el marco de las matrices (producto y suma). Sin embargo, es posible que la formalidad del álgebra matricial aleje la concepción lineal de esta relación en los estudiantes, conduciéndolos a interpretaciones vacías de sentido (dificultades D.1 y D.3, sección 1.4.1).

3.6.3 Actividad 3: Cizalladura

Métodos de resolución de los estudiantes y otras anticipaciones

Esta situación introduce una definición formal de la TL (definida implícitamente en términos de una base ortogonal) que solicita una reformulación en el marco geométrico, lo que puede revelarse desestabilizadora para el estudiante. Debido a que, los posibles métodos de resolución y de validación requieren de un razonamiento deductivo propio del álgebra lineal. A diferencia de las dos situaciones anteriores, que intentan una enseñanza a partir de lo "práctico a lo abstracto", en esta situación (y en la próxima) el modelo ya ha sido introducido (por la institucionalización), así que, pueden apoyarse en el carácter formal de las propiedades lineales y proporcionar un nuevo sentido a este saber (la TL) de lo "abstracto a lo práctico".

En relación al sub-problema 1-a). Se requiere reformular la cizalladura aplicando bien la TL, donde las representaciones de los vectores están dadas en el nuevo sistema ortogonal y en el lenguaje formal de la base de la cizalladura. Para ubicar las imágenes de estos vectores en el sistema canónico, será necesario profundizar el sentido lineal de la transformación. Se prevén dos posibles métodos de resolución por los estudiantes. Uno, utilizando la noción formal del vector y el otro, utilizando la noción geométrica del vector (por coordenadas). En ambos métodos, los estudiantes deberían realizar cambio de representaciones de una a la otra base, de la ortogonal (base de la cizalladura) $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$ a la canónica $C=\{\vec{i},\vec{j}\}$.

Método lineal formal. Puesto que los vectores dados $\vec{v}$ e $\vec{i}$ están expresados como combinación lineal de la base ortogonal $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$, los estudiantes deberían aplicar la linealidad de la cizalladura y reformular las relaciones que la definen en términos de la base ortogonal. De esta manera, para el cálculo de las imágenes de $\vec{v}$ e $\vec{i}$ desarrollarían los siguientes procedimientos:

$$T(\vec{v}) = T(3\vec{u} + 4\vec{u}_\perp) = 3T(\vec{u}) + 4T(\vec{u}_\perp) = 3\vec{u} + 4(\vec{u}_\perp + 2\vec{u}) = 11\vec{u} + 4\vec{u}_\perp$$

$$T(\vec{i}) = T(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}_\perp) = \frac{1}{2}T(\vec{u}) - \frac{1}{2}T(\vec{u}_\perp) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}(\vec{u}_\perp + 2\vec{u}) = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}_\perp$$

A continuación, deberían expresar los vectores resultantes $T(\vec{v})$ y $T(\vec{i})$ en términos de la base canónica realizando el cambio de base, esto es, expresar los vectores de la base ortogonal en términos de la base canónica: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{u}_\perp = -\vec{i} + \vec{j}$. Por sustitución obtendrían entonces: $T(\vec{v}) = 7\vec{i} + 15\vec{j}$ (primer cuadrante) y $T(\vec{i}) = -\vec{j}$ (semieje negativo *Y*).

Respecto de la imagen del vector $\vec{j}$, primeramente, lo deberían expresar como combinación lineal de la base ortogonal, así, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}_\perp$ y luego, proceder de manera análoga al proceso que se realizó para $\vec{v}$ e $\vec{i}$ de donde expresarían:

$$T(\vec{j}) = T(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}_\perp) = \frac{1}{2}T(\vec{u}) + \frac{1}{2}T(\vec{u}_\perp) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u}_\perp + 2\vec{u}) = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}_\perp.$$

Luego, por sustitución tanto de $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ como de $\vec{u}_\perp = -\vec{i} + \vec{j}$ representarían a $T(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ en el primer cuadrante.

También, dentro del mismo método, otro posible razonamiento en la ubicación de las imágenes de $\vec{v}$, $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en el sistema cartesiano canónico, sería que expresen la base ortogonal $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$ en términos de coordenadas canónicas. Es decir, $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{u}_{\perp}=(-1,1)$ y sustituyan a continuación en las expresiones resultantes:

$$T(\vec{v})=11\vec{u}+4\vec{u}_{\perp}=11(1,1)+4(-1,1)=(7,15)$$
$$T(\vec{i})=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}_{\perp}=-\frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(-1,1)=(0,-1)$$
$$T(\vec{j})=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{u}_{\perp}=\frac{3}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(-1,1)=(1,2)$$

Método lineal por coordenadas. Consiste en reformular la cizalladura aplicando la linealidad pero ahora en términos de las coordenadas canónicas. En consecuencia, los estudiantes deberían expresar $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ como $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{u}_{\perp}=(-1,1)$ y reescribir la definición de la cizalladura como $T(1,1)=(1,1)$ y $T(-1,1)=(1,3)$ estableciendo las siguientes relaciones:

$$T(\vec{v})=T(3(1,1)+4(-1,1))=3T(1,1)+4T(-1,1)=3(1,1)+4(1,3)=(7,15)$$

$$T(\vec{i})=T(\frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(-1,1))=\frac{1}{2}T(1,1)-\frac{1}{2}T(-1,1)=\frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(1,3)=(0,-1)$$

$$T(\vec{j})=T(\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(-1,1))=\frac{1}{2}T(1,1)+\frac{1}{2}T(-1,1)=\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,3)=(1,2)$$

Es posible que los estudiantes presenten dificultades con las representaciones de los vectores (dificultades D.3 y D.4, sección 1.4.1). Por un lado, un mismo vector puede ser representado (eventualmente diferente) respecto a bases distintas y por otro lado, estas representaciones pueden ser formales (vector algebraico) o bien por coordenadas (vector geométrico). En este sentido, la cercanía que tienen con la base canónica hace que, la representación por coordenadas canónicas puede poner un obstáculo a la imagen de $\vec{j}$ por la transformación, por ejemplo. Ya que para aplicar la cizalladura es necesario que expresen $\vec{j}$ en términos de la base ortogonal pero podría ser, que procedan primero a representarlo en esas coordenadas $\vec{j} = (0,1)$ y esto los aleje más aún de la definición de la cizalladura, que también es demasiado formal para ellos.

En relación al sub-problema 1-b). Para deducir la representación matricial de la cizalladura respecto de ambas bases; ortogonal y canónica, se prevén tres posibles métodos de resolución apoyándose sobre las definiciones dadas (Anexo F):

i) *Respecto de la base canónica*:

Método lineal formal. Los estudiantes deberían determinar las coordenadas canónicas de $T(\vec{i})$ y $T(\vec{j})$ recurriendo a los resultados obtenidos previamente (método lineal formal, sub-problema 1-a); $T(\vec{i}) = -\vec{j}$ y $T(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ cuyas coordenadas son respectivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Así entonces la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sería la representación matricial de T respecto de la base canónica.

***Método lineal por* coordenadas**. Este método se diferencia del anterior por la variante de las coordenadas, es decir, los estudiantes deberían calcular $T(1,0)$ y $T(0,1)$. Utilizando los resultados previos (método lineal por coordenadas, sub-problema 1-a); $T(1,0) = (0,-1)$ y $T(0,1) = (1,2)$, obtendrían que la matriz que representa a T respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Método matricial. En este método los estudiantes expresarían los elementos y las relaciones en términos matriciales. De esta manera, representarían los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}_\perp$

matricialmente como $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\vec{u}_{\perp}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Para el cálculo de la matriz que represente a la cizalladura, recurrirían a una matriz general $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ y escribirían las relaciones de la definición de la cizalladura en términos de matrices:

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Así tendrían un sistema de ecuaciones lineales en a,b,c y d en cuya resolución expresarían como resultado la matriz $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

ii) *Respecto de la base ortogonal* $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$:

Método lineal formal. A partir de las relaciones que definen la cizalladura se prevé que los estudiantes establezcan directamente la representación matricial respecto de la base ortogonal $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$. Por definición, las imágenes de $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ están expresadas como combinación lineal de la base ortogonal: $T(\vec{u})=1\cdot\vec{u}+0\cdot\vec{u}_{\perp}$ y $T(\vec{u}_{\perp})=2\cdot\vec{u}+1\cdot\vec{u}_{\perp}$. Luego, la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ sería la representación matricial de la cizalladura respecto de la base ortogonal. Sin embargo, de manera análoga a los vectores, la familiaridad de los estudiantes con el sistema ortonormal de ejes canónicos haría poco probable que vean los nuevos ejes ortogonales como determinados por esta base ortogonal, lo que podría poner un obstáculo para determinar la matriz respecto a esta base (dificultades D.3 y D.4, sección 1.4.1).

Método lineal por coordenadas. Consiste en expresar los elementos y las relaciones vinculadas a la cizalladura en términos de las coordenadas canónicas. Las relaciones de la definición de la cizalladura las expresarían en la forma: $T(1,1)=(1,1)$ y $T(-1,1)=(1,3)$, y estas imágenes como combinación lineal de $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{u}_{\perp}=(-1,1)$ serían:

$$(1,1)=a(1,1)+b(-1,1) \qquad \text{y} \qquad (1,3)=c(1,1)+d(-1,1)$$

Por medio de la resolución de los dos sistemas de ecuaciones (en a y b, y en c y d) determinarían las soluciones $a=1, b=0, c=2, d=1$, que dispondrían matricialmente como $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que sería la matriz de la cizalladura respecto de la base ortogonal.

Método matricial. Expresar los elementos y relaciones de forma matricial respecto de la base ortogonal. Representarían matricialmente la base ortogonal como $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el vector $\vec{u}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para el vector $\vec{u}_{\perp}$ y considerarían una matriz general $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como la representación matricial de la cizalladura respecto de la base ortogonal. Con estos elementos expresarían las relaciones que definen la cizalladura:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por resolución del sistema de ecuaciones lineales en a, b, c y d obtendrían así la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo mismo que el vector algebraico sucede para una transformación matricial, que primero se considera como una transformación lineal (cizalladura), luego tiene una representación matricial (eventualmente diferente) respecto de una base dada. Estas dos representaciones matriciales diferentes, podrían producir dificultades a los estudiantes, por lo menos temporalmente, al no percibir el rol fundamental que tienen las bases, y asumir erróneamente, por ejemplo, que se tratarían de dos cizalladuras distintas (dificultad D.4, sección 1.4.1). Deberían conceptualizar que la función principal de la base (cuando está fija) es, hacer el vínculo directo entre la representación y la TL, cizalladura en este caso, que sea una identificación mutua entre ambos objetos y de manera única.

En relación al sub-problema 1-c). Se invita a los estudiantes a juzgar el valor de las respuestas obtenidas de las representaciones matriciales de la cizalladura. Los estudiantes deberían proporcionar una mirada crítica según el producto matricial entre esas representaciones matriciales y la del vector $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$ manteniendo siempre la coherencia de las bases.

i) *Respecto de la base canónica*:

Por el sub-problema 1.b), la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ representa a la cizalladura respecto de la base canónica. Luego representado matricialmente el vector $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$ respecto de la base canónica: $\vec{v} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ procederían al producto matricial $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$. Los coeficientes de la matriz resultante deberían identificarlos con las coordenadas canónicas de $T(\vec{v}) = 7\vec{i} + 15\vec{j}$.

ii) *Respecto de la base ortogonal* $B = \{\vec{u}, \vec{u}_{\perp}\}$:

Por el sub-problema 1.b), la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa a la cizalladura respecto de la base ortogonal. Atendiendo al procedimiento anterior, los estudiantes deberían razonar de forma análoga pero esta vez con representaciones matriciales respecto de la base ortogonal.

Directamente de la definición de $\vec{v}$ obtendrían $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ como la matriz que representa a $\vec{v}$ respecto de la base ortogonal $B = \{\vec{u}, \vec{u}_{\perp}\}$, y del producto matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ obtendrían los coeficientes 11 y 4 con los cuales expresarían $T(\vec{v})$ respecto de la base ortogonal, es decir, $T(\vec{v}) = 11\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$. Para la validación de esta última relación, expresarían $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ en términos de las coordenadas canónicas y compararían con el resultado del sub-problema 1-a).

Es posible que algunos estudiantes presenten dificultades con la interpretación de la matriz $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ ya que su representación requiere una comprensión más formal debido a que la notación matricial no hace referencia a la base ortogonal (dificultades D.3 y D.4, sección 1.4.1), lo que podría conducir a entregar como resultado el vector $T(\vec{v}) = (11, 4)$. Produciendo en los estudiantes sorpresa e inseguridad pues este vector no forma parte del resultado del sub-problema 1-a).

En relación al sub-problema 1-d). Se trata de valorizar las propiedades lineales en el contexto geométrico poniendo en contribución los resultados obtenidos. Para hacer la deformación de la estructura cuadrada, se prevén dos posibles aplicaciones. Una, con el uso de la definición formal y la otra, con la conjunción de las diferentes representaciones geométrica y algebraica:

Método lineal formal. Aplicar la cillazadura a los vértices de figura cuadrada. Para ello deberían identificar que los vértices $A(1,1)$ y $B(-1,1)$ corresponden a la representación canónica de los vectores de la base ortogonal, de donde obtendrían las imágenes $T(A) = (1,1)$ y $T(B) = (-1,1) + 2(1,1) = (1,3)$. Para las imágenes de los vértices $O(0,0)$ y $C(0,2)$ deberían proceder de forma análoga. En particular, para el vértice $O(0,0)$ los estudiantes lo identificarían como las coordenadas del vector cero, y por la experiencia de las actividades anteriores, afirmarían que el vector cero queda fijo por la TL, por la condición lineal: $T(O) = O.$ El vértice $C\,(0, 2)$ lo identificarían como las coordenadas canónicas del vector $2\vec{j}$ y en base al resultado previo $T(\vec{j}) = (1, 2)$ del sub-problema 1-a) y por la linealidad de la cizalladura procederían como: $T(2\vec{j}) = 2T(\vec{j}) = 2(1, 2) = (2, 4),$ es decir, $T(C) = (2, 4).$ Con estos resultados, graficarían el paralelogramo cuyos vértices serían las imágenes que han calculado. Es posible que asuman de manera intuitiva que la figura resultante debería ser un paralelogramo por la linealidad de la cizalladura. Pero también es posible que justifiquen y argumenten de manera explícita por un razonamiento deductivo de la definición y las propiedades lineales de la cizalladura que la figura resultante es un paralelogramo: vinculando la linealidad algebraica a la invariancia del paralelismo de los lados opuestos del cuadrado. Esto resultaría significativo para la comprensión de la unificación de la TL por la articulación que ella permite entre el marco algebraico (lineal) y el marco geométrico en el sentido de Douady (1983).

Método matricial. Con este método, los estudiantes utilizarían las representaciones en coordenadas canónicas que son más habituales para ellos. Considerarían la representación matricial $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de la cizalladura respecto de la base canónica, luego por multiplicación matricial calcularían las imágenes de los vértices del cuadrado:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas resultantes son los vértices de la figura que intuitivamente los estudiantes asumirían que sería un paralelogramo, como resultado de la deformación del cuadrado por la cizalladura.

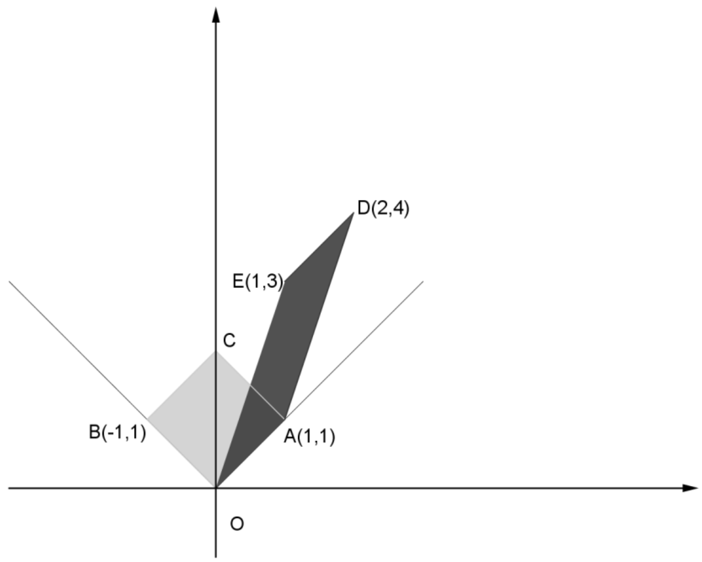


Figura 11. Deformación del cuadrado por la cizalladura

En relación al sub-problema 1-e). Se invita a los estudiantes a validar la estructuración geométrica de la TL utilizando la transformación matricial, para la verificación de la imagen del vértice $C(0,2)$. Utilizando ambas representaciones matriciales de la cizalladura, los estudiantes representarían este vértice matricialmente respecto de ambas bases.

i) *Respecto de la base canónica*:

Esta es la representación más inmediata para ellos. Establecerían la representación matricial del vértice C que es $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y el producto $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ que expresaría el resultado obtenido en el sub-problema 1-d).

ii) *Respecto de la base ortogonal* $B = \{\vec{u}, \vec{u}_\perp\}$:

Para determinar la representación matricial del vértice C respecto de la base ortogonal, es posible que utilicen primero su representación vectorial canónica (vector posición) $\vec{C} = 2\vec{j}$. Luego habría que cambiar de base, es decir, representarían el vector posición $\vec{C}$ como combinación lineal en la base ortogonal ya sea por medio de la resolución de un sistema de ecuaciones, o bien, utilizando el resultado previo $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}_\perp$ para obtener directamente $\vec{C} = \vec{u} + \vec{u}_\perp$. Así entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sería la representación matricial de C respecto de la base ortogonal. Luego, con el producto $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtendrían las coordenadas de la imagen de C respecto de la base ortogonal. Esta relación matricial, los estudiantes la interpretarían en términos de la cizalladura como $T(\vec{C}) = 3\vec{u} + \vec{u}_\perp$.

Si se quiere comparar los resultados del modelo geométrico y del modelo algebraico formal, habría que sustituir las coordenadas canónicas de $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{u}_\perp = (-1,1)$ en el resultado anterior. Pero como las representaciones matriciales no son respecto de la base canónica, los estudiantes podrían presentar dificultades en la interpretación de estos resultados (dificultad D.4, sección 1.4.1). No colocando necesariamente en evidencia las propiedades lineales puestas en juego y no explicitando las asociaciones que habrían sido hechas en el pasaje de la representación algebraico a la geométrica.

La segunda y última parte de la actividad se refiere a una descripción equivalente de la cizalladura por medio de la rotación del sistema cartesiano de forma que la dirección de la cizalladura sea ahora horizontal. Se trata de ver cómo funciona la cizalladura a través de la rotación. Los estudiantes deberían percibir la estructura del concepto lineal de manera más fácil y simple por el cambio del sistema de coordenadas.

En relación al sub-problema 2-a). Se prevé que los estudiantes realicen la siguiente secuencia de dibujos que ilustren la deformación de un cuadrado, por la acción de las transformaciones geométricas descritas en el enunciado de la actividad:

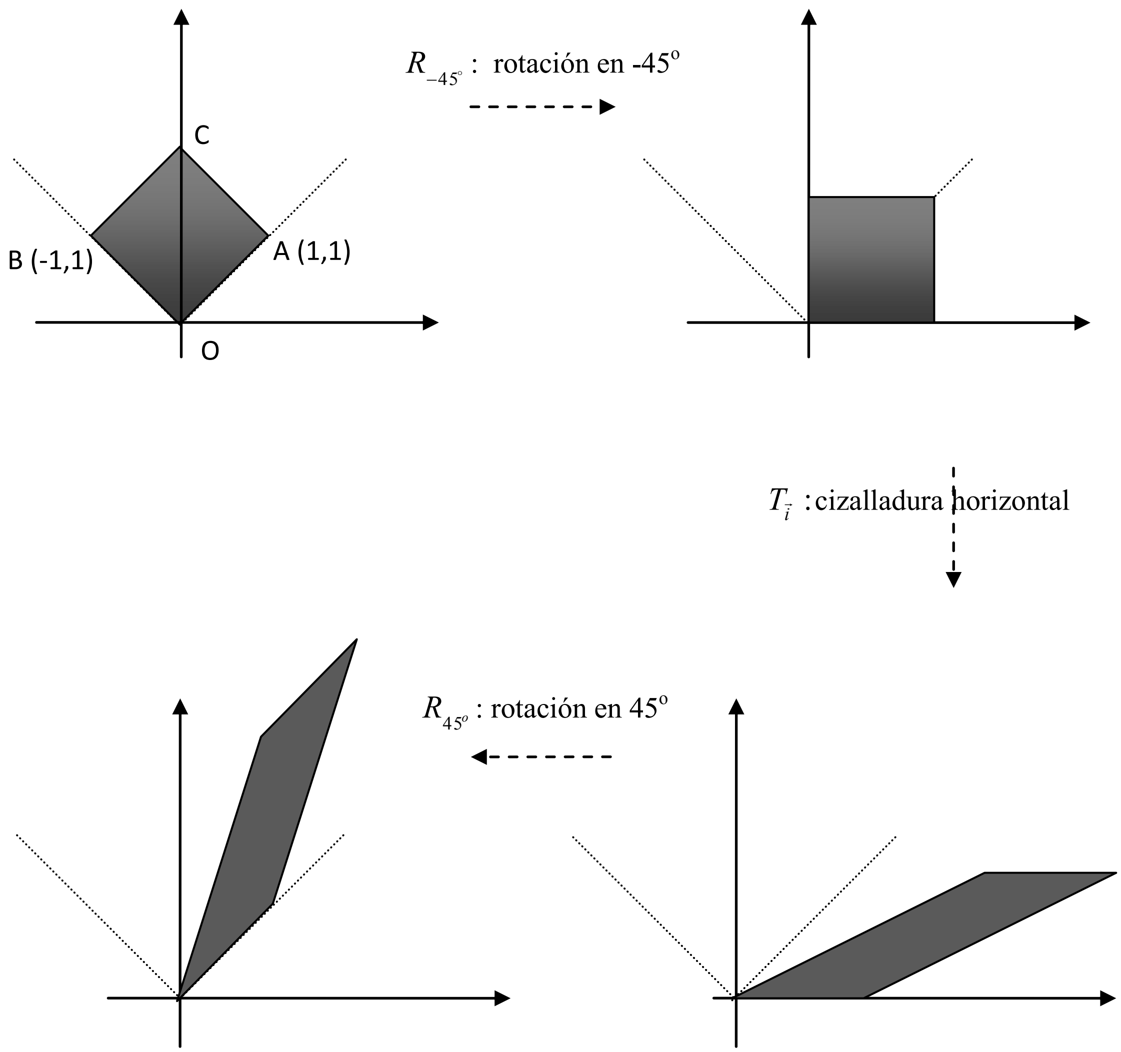


Figura 12. Cizalladura mediante la rotación del sistema coordenadas

En relación al sub-problema 2-b). En base a la representación matricial de la rotación (actividad anterior) los estudiantes deberían obtener las siguientes representaciones matriciales: $\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\operatorname{sen}(-45^\circ) \\ \operatorname{sen}(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ para la rotación R_{-45° (en $-45°$), y $\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\operatorname{sen}(45^\circ) \\ \operatorname{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ para la rotación R_{45° (en 45°). La otra transformación que interviene en la secuencia es la cizalladura horizontal $T_{\vec{i}}$ de factor 2 en la dirección $\vec{i}$, la cual la deberían describir, de acuerdo a la definición (Anexo F) como: $T_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i}$, $T_{\vec{i}}(\vec{j}) = \vec{j} + 2\vec{i}$. De esta definición los estudiantes concluirían que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de $T_{\vec{i}}$ respecto de la base canónica.

En relación al sub-problema 2-c). Los estudiantes conocen *a priori* que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz que debería resultar del producto de las matrices anteriores (sub-problema 1-b)-i)). De acuerdo a la secuencia gráfica (descrita en la actividad), los estudiantes deberían establecer que el producto matricial que corresponde a la transformación $R_{45^\circ} T_{\vec{i}} R_{-45^\circ}$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una posible dificultad que los estudiantes podrían presentar se refiere al orden del producto matricial, es decir, podrían disponer $R_{-45^\circ} T_{\vec{i}} R_{45^\circ}$ como el producto que hace volver a la matriz inicial de la cizalladura. Como una forma de corregir esta dificultad, es que ellos disponen de la matriz resultante previamente calculada. Sin embargo, esta dificultad debería ser corregida automáticamente por los estudiantes sin necesidad de realizar el producto, de acuerdo al orden de la acción de las transformaciones geométricas.

3.6.4 Actividad 4: Áreas entre curvas

Métodos de resolución de los estudiantes y otras anticipaciones

Los procesos de cálculos de integrales y áreas deben ser guiados por la estructura lineal de la TL. Se debe recurrir al modelo general lineal para reformular el área en el marco geométrico. Pero, como se trata de un problema en que intervienen elementos clásicos de análisis y que los estudiantes ya conocen para asegurar el resultado, la integral podría fácilmente ser asociada a la aplicación de métodos de integración y de áreas.

En relación al sub-problema 1-a). En el cambio de integral que se propone, los estudiantes podrían reconocer y articular las propiedades lineales de la integral y las de simetría. Primero reconocerían la propiedad lineal de multiplicación por un escalar; en el lenguaje de los estudiantes esta propiedad es más familiar, donde "mecánicamente" dicen *"sacar el* $\frac{1}{2}$ *fuera de la integral"* $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx.$ Luego aplicarían la propiedad de simetría de la paridad de $\cos^2(1+x^2)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx = \tfrac{1}{2}\left(2\int_{0}^{\pi}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx\right) = \int_{0}^{\pi}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx$$

En relación al sub-problema 1-b). Para expresar I en una forma más simple lo primero que realizarían los estudiantes es tratar de homogeneizar los límites de integración de las integrales que intervienen en I. En este aspecto, el medio didáctico (sub-problema 1-a) les propone estos límites de integración. Utilizando entonces el resultado previo, sustituirían la segunda integral resultando $I = \int_{0}^{\pi}\left(\tfrac{3}{2} - \operatorname{sen}^2(1+x^2)\right)dx - \int_{0}^{\pi}\cos^2(1+x^2)\,dx.$

Esta primera expresión equivalente de *I*, haría ver en los estudiantes la necesidad de aplicar la propiedad lineal (*la suma/diferencia de dos integrales es igual a la integral de la suma/diferencia de las funciones*). Porque el desarrollo directo de cada integral no es económico, en primer lugar les llevaría a cálculos complejos y por otra parte, se necesitan otros métodos de integración (aproximación por series de potencias, métodos de cálculo numérico, etc) que harían un desarrollo más largo y fácil de cometer errores. Así, en el cálculo directo de las integrales $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(1+x^2)\,dx$ o $\int_0^{\pi} \cos^2(1+x^2)\,dx$ ellos tendrían dificultades para identificar el método que hay que aplicar y no sabrían cómo validar su enfoque.

De esta manera, el uso de la TL terminaría convenciéndolos y sería muy adecuado también porque les permitiría resolver efectivamente el problema que justifica su uso. Permitiéndoles unificar en una sola integral la expresión de *I,* la cual calcularían fácilmente su valor numérico. En el lenguaje que ellos están acostumbrados, esta propiedad lineal aditiva la expresan diciendo *"juntar las integrales en una sola",* pero en la toma de consciencia de la utilidad percibida, posiblemente, pueda ayudar a comprometer un cuestionamiento más profundo sobre la herramienta lineal.

Es posible también, que en lugar de unificar en una sola integral, apliquen de manera sucesiva la linealidad para descomponer en sumandos, en aquellos estudiantes que son mucho menos proclives a adoptar un nuevo enfoque de aprendizaje. Estos últimos están más acostumbrados a aplicar la propiedad aditiva en el sentido como les ha sido enseñada: "*la integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales*". En este sentido, los dos posibles métodos de resolución de los estudiantes serían:

Unificación. Aplicarían la linealidad para unificar en una sola integral:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\left(\tfrac{3}{2}-\operatorname{sen}^2(1+x^2)\right)dx-\int_0^{\pi}\cos^2(1+x^2)\,dx\\
&= \int_0^{\pi}\left(\tfrac{3}{2}-\operatorname{sen}^2(1+x^2)-\cos^2(1+x^2)\right)dx\\
&= \int_0^{\pi}\left(\tfrac{3}{2}-1\right)dx=\int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}\,dx=\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Descomposición y unificación. Con la variante de utilizar la linealidad repetidamente, primero podrían descomponer la primera integral y luego unificar adecuadamente, es decir

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\left(\tfrac{3}{2}-\operatorname{sen}^2(1+x^2)\right)dx-\int_0^{\pi}\cos^2(1+x^2)\,dx\\
&= \int_0^{\pi}\tfrac{3}{2}\,dx-\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2(1+x^2)\,dx-\int_0^{\pi}\cos^2(1+x^2)\,dx\\
&= \int_0^{\pi}\tfrac{3}{2}\,dx-\int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}^2(1+x^2)+\cos^2(1+x^2)\right)dx\\
&= \int_0^{\pi}\tfrac{3}{2}\,dx-\int_0^{\pi}1\,dx=\tfrac{3\pi}{2}-\pi=\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

En relación al sub-problema 1-c). Esta tarea contribuye hacer ruptura al contrato didáctico, pone en funcionamiento la TL para validar y controlar la resolución del problema. El estudiante debe escoger figuras simples que se relacionen con el área de la región acotada por el gráfico de las curvas dadas y estimar la validez de su respuesta. Así que la expresión integral equivalente de $I=\int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}\,dx$ deberían interpretarla como el área de la región acotada por $\dfrac{1}{2}$ en el intervalo de integración $[0,\pi]$, es decir el área del rectángulo de altura $\dfrac{1}{2}$ y base π. Es posible que esta figura rectangular no logren visualizarla a causa de no utilizar las expresiones equivalentes para *I.*

Esto podría presentar dificultades a los estudiantes al quedarse puramente en el marco geométrico pensando el área de una región en el sentido de Riemann-Darboux, y es posible que asuman este vínculo implícitamente como una definición (*"la integral es un área…"*). Por lo demás, esta estimación geométrica de la integral, los estudiantes podrían no llegar a identificarla, en el caso de $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}$, donde se privilegiaría el resultado $\frac{\pi}{2}$ por sobre el concepto de la integral cuya interpretación geométrica da cuenta del área de una región rectangular (dificultad D.2, sección 1.4.1).

En relación al sub-problema 2-a). Este problema exige de los estudiantes un cierto nivel de abstracción en el cálculo de $\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\, dx$ de manera de simplificar su procedimiento; utilizando la TL como medio de control en el pasaje del marco algebraico al geométrico. Primeramente, los estudiantes deberían identificar con exactitud las propiedades lineales por sobre un resultado numérico.

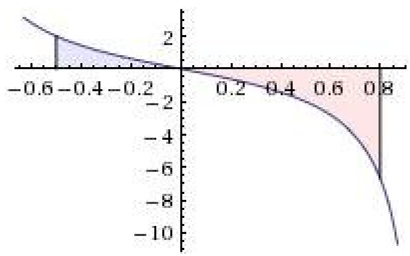
Una variante del sub-problema 1-b), es la descomposición lineal del *"vector abstracto"* f, es decir $f(x) = g(x) + h(x)$ con $g(x) = \frac{-3x}{1-x^2}$ y $h(x) = \frac{4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$. Luego, esta descomposición sería la base para aplicar las propiedades lineales de la integral

$$\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\, dx = \int_{-0.5}^{0.8} g(x)\, dx + \int_{-0.5}^{0.8} h(x)\, dx = -3\int_{-0.5}^{0.8} \frac{x}{1-x^2}\, dx + 4\int_{-0.5}^{0.8} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\, dx$$

Es posible además que esta descomposición los conduzca a calcular explícitamente el valor numérico de las integrales de *g* y *h* como una forma de medir el área de la región Ω.

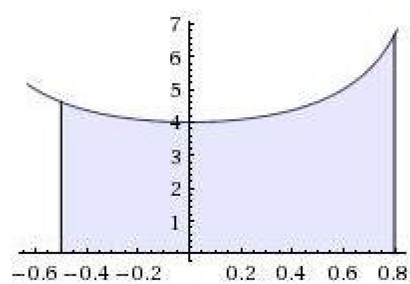
i) Para la integral de *g*:

$$\begin{aligned}\int_{-0.5}^{0.8} g(x)\,dx &= -3\int_{-0.5}^{0.8} \frac{x}{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\ln\left|1-x^2\right| \Big|_{x=-0,5}^{x=0,8} \\ &= -1{,}100953\end{aligned}$$



ii) Para la integral de *h*:

$$\begin{aligned}\int_{-0.5}^{0.8} h(x)\,dx &= 4\int_{-0.5}^{0.8} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx \\ &= 4\int_{-0.5}^{0.8} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= 4\,\text{arcsen}\, x \Big|_{x=-0,5}^{x=0,8} \\ &= 5{,}803575\end{aligned}$$



En relación al sub-problema 2-b). Para establecer una relación entre las regiones para medir el área de Ω (área de la región acotada por el grafico de las funciones) la TL debería ser un medio conductor para guiar los procedimientos en los vínculos de las áreas. Pero para asegurar la eficacia de una tal conducción, los estudiantes deberían contar con la estructuración de la TL y pudiera ser posible, que el enfoque procedural dado a estos contenidos no favorezca el establecimiento de estos vínculos.

Primeramente, identificarían las regiones acotadas por las gráficas de las funciones f, g y h.

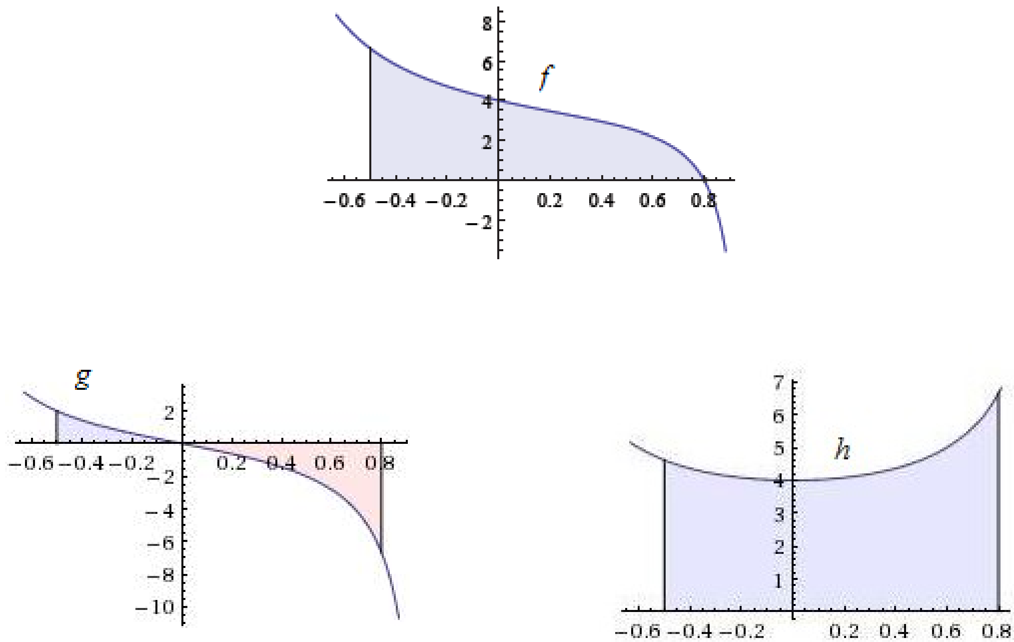


Figura 13. Regiones acotadas por las gráficas de f, g y h.

A continuación tratarían de comparar las regiones Ω y Λ, acotadas por los gráficos de f y h respectivamente, buscando poder establecer los vínculos entre las áreas. Para ello, es posible que indiquen las siguientes figuras, donde A es la región acotada por el grafico de f y h en el intervalo $[-0.5, 0]$ y B la región acotada por el gráfico de f y h en el intervalo $[0, 0.8]$:

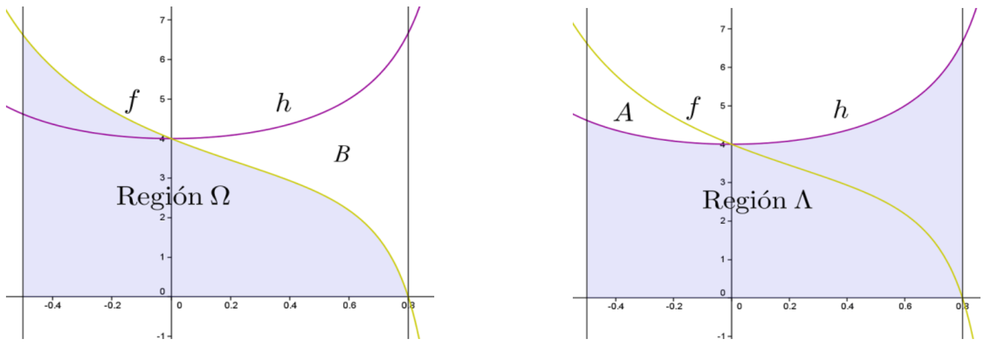


Figura 14. Comparación de las regiones Ω y Λ

Luego deberían deducir, en el marco geométrico la relación entre las regiones Ω y Λ: $\Omega \cup B = \Lambda \cup A,$ a partir de la cual establecerían la relación entre las áreas

$$\text{Area}\,(\Omega) = \text{Area}\,(\Lambda) + \text{Area}\,(A) - \text{Area}\,(B)$$

Los estudiantes deberían interpretar esta relación como la linealidad en el marco geométrico de la integral. Es posible que intenten validar esta correspondencia del modelo lineal utilizando la interpretación geométrica de la integral y sus propiedades lineales. Una posible verificación sería:

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(A) - \text{Area}\,(B) &= \int_{-0.5}^{0} (f(x) - h(x))\,dx - \int_{0}^{0.8} (h(x) - f(x))\,dx \\
&= \int_{-0.5}^{0} f(x)\,dx - \int_{-0.5}^{0} h(x)\,dx - \int_{0}^{0.8} h(x)\,dx + \int_{0}^{0.8} f(x)\,dx \\
&= \int_{-0.5}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{0.8} f(x)\,dx - \int_{-0.5}^{0} h(x)\,dx - \int_{0}^{0.8} h(x)\,dx \\
&= \int_{-0.5}^{0.8} f(x)\,dx - \int_{-0.5}^{0.8} h(x)\,dx \\
&= \text{Area}\,(\Omega) - \text{Area}\,(\Lambda)
\end{aligned}$$

Una probable dificultad que podrían experimentar sería hacer abstracción de la aplicación lineal de la integral y traerla al contexto geométrico apreciando su utilidad, ellos podrían actuar de manera mecánica sin cuestionarse si esos enlaces siguen manteniendo la relación de la linealidad; definen la integral recurriendo directamente a la fórmula lineal que permite asociarle un valor (dificultad D.5 sección 1.4.1). Sería el caso de la relación lineal $\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\,dx = \int_{-0.5}^{0.8} g(x)\,dx + \int_{-0.5}^{0.8} h(x)\,dx$ que debería administrar el paso al modelo geométrico, apto para guiar la relación entre áreas de regiones en el contexto algebraico (suma y diferencia de áreas).

En relación al sub-problema 2-c), para aproximar el área de Ω por áreas de polígonos, del medio didáctico disponen de trapecios y triángulos para verificar la relación con las áreas de las regiones acotadas por el gráfico de *f* y *g.* Pero como la tarea no constituye un contrato claro de los procedimientos de proximidad, pudiera ser también que los estudiantes recurran a los que ellos conocen específicamente (particiones por rectángulos).

Se podría casi pensar que esta tarea podría motivar a una validación autónoma permitiendo juzgar lo que se gana en potencia de simplificación del cálculo del área. Con la aproximación del área de Λ por los polígonos P_1 y P_2 (Figura 15) los estudiantes obtendrían un valor estimado $2{,}15 + 4{,}27 = 6{,}42$ y con una aproximación del área de las regiones A y B por triángulos (Figura 15) obtendrían el siguiente resultado: $\text{Area}\,(A) - \text{Area}\,(B) \approx 0{,}5 - 2{,}67 = -2{,}17$. Así entonces el área aproximada de Ω según se ilustra en la figura siguiente sería:

$$\text{Area}\,(\Omega) = \text{Area}\,(\Lambda) + \text{Area}\,(A) - \text{Area}\,(B) \approx (2{,}15 + 4{,}27) + (0{,}5 - 2{,}67) = 4{,}25$$

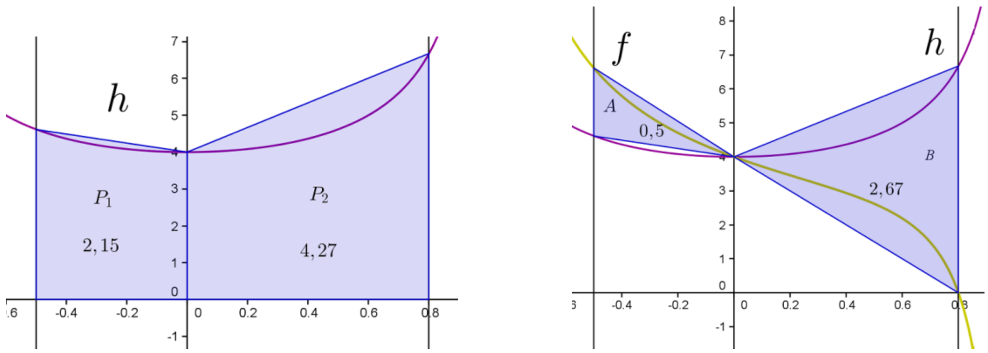


Figura 15. Validación del modelo lineal de la integral.

Por otra parte, ellos podrían convencerse que si los cálculos geométricos son complejos e imprecisos, los únicos valores más exactos de las áreas son aquellos que la TL entrega y de manera más eficaz; la relación lineal $\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\,dx = \int_{-0.5}^{0.8} g(x)\,dx + \int_{-0.5}^{0.8} h(x)\,dx$ refleja precisamente el valor del área $\text{Area}\,(\Omega) = -1{,}100953 + 5{,}803575 = 4{,}702622$. Este resultado, los estudiantes lo habrían obtenido previamente (sub-problema 2-a) y lo estarían confrontando con las aproximaciones del modelo lineal geométrico. Podría ser que este hecho de resolver el problema de manera rápida y con técnicas más habituales les haga valorar la maestría de la TL.

También es posible que comparen la diferencia de áreas de las regiones *A* y *B* con la región acotada por la gráfica de *g*, aproximando con los triángulos Q_1 y Q_2 (Figura 16) cuyas áreas son 0,5 y 2,67 respectivamente. La siguiente figura sería una ilustración del modelo geométrico que comprende esta posible aproximación:

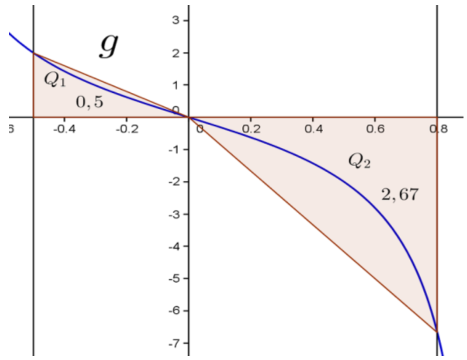


Figura 16. Aproximación del área por polígonos

El propósito de lo que sigue pretende presentar para cada una de las actividades una matriz por competencias permitiendo de visualizar los niveles de explicitación puestos en contribución en el aprendizaje de la TL.

3.7 Clasificación respecto a los niveles de explicitación

La puesta en relación de las estrategias de aprendizaje anticipadas (de los procedimientos de resolución) con las competencias matemáticas requeridas permite referirse a los niveles de explicitación que acuden a la organización de la TL. A partir del análisis *a priori* construimos una matriz de las competencias necesarias para resolver los tipos de tareas y que nos permite identificar los esfuerzos realizados por niveles de explicitación en el aprendizaje de la TL. Presentamos a continuación para cada una de las actividades esta matriz de las competencias requeridas en la modelización de los problemas.

3.7.1 Actividad 1: En busca de un modelo

Esta primera actividad está centrada sobre la comprensión de la linealidad y abre hacia la estructuración con una exploración de sus propiedades.

NIVELES *y preguntas asociadas*	**COMPETENCIAS**
COMPRENSION *¿Qué sucede?*	• Interpretar (problema 1). - Observar la relación entre el peso y precio de los paquetes. - Identificar alguna relación, por ejemplo: la fracción "precio/peso" no es constante.
	• Traducir (problema 2). - Representar gráficamente los datos de la tabla de valores.
	• Sintetizar observaciones o resultados (problema 2). - Conjeturar resultados a partir de la representación gráfica (punto mínimo de la gráfica).
ESTRUCTURACION *¿Por qué puedo hacer eso?*	• Utilizar una propiedad para orientar la resolución (sub-problema 3-b). - A partir de una propiedad (lineal, lineal afín, proporciones, estimación por promedios, etc.,) plantear un modelo para cualquier valor de kg.
COMPRENSION *¿Cómo se podría hacer eso?*	• Definir una estrategia de resolución combinando un conjunto de objetos y de métodos (sub-problema 3-a). - Definir un método/modelo para designar el precio de 10 kg (por diferencia, método lineal, lineal afín, etc.).
	• Validar un resultado por el sentido (sub-problema 3-a). - Validación del método en el contexto de los precios de 14 kg y 24 kg.
¿Qué sucede?	• Explicar el funcionamiento de un método o función (sub-problema 3-c). - Explicar las posibles contradicciones con la aplicación del modelo elaborado para 10 kg y 0 kg.
ESTRUCTURACION *¿Por qué es así?*	• Establecer y justificar una propiedad o un resultado (sub-problema 3-d). - Proporcionar propiedades del modelo que entregue un precio único y coherente con las diferentes combinaciones (es decir, invariante a las combinaciones de los paquetes).

¿Por qué puedo hacer eso?	• Establecer y justificar las condiciones de aplicación de un método/función (sub-problema 3-e). - Justificar si las condiciones del vendedor son coherentes con las propiedades del modelo.

Tabla I. Matriz de competencias de *En busca de un modelo.*

3.7.2 Actividad 2: Rotación del plano

Esta segunda actividad está situada en la estructuración de la TL y en la comprensión del funcionamiento de la herramienta lineal como un medio más eficaz y económico.

NIVELES *y preguntas asociadas*	**COMPETENCIAS**
ESTRUCTURACION *¿Por qué es así?*	• Establecer y justificar una propiedad o un resultado (sub-problemas 2-b y 2-c). - La propiedad se refiere a la "relación lineal" que permite expresar $R_\theta(P)$ en función de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$. Esta propiedad permite determinar directamente la rotación de cualquier punto y evita el tener que calcular, cada vez, las coordenadas de la rotación de *P* por el método geométrico-trigonométrico. - La propiedad lineal sugiere que la acción de rotación sobre un punto cualquiera se pueda ejercer por dos etapas: (a) 1ª: rotación (transformación) de los basales *A* y *B;* (b) 2ª: para "alcanzar" la rotación de $R_\theta(P)$ aplicar la linealidad de acuerdo al modelo $R_\theta(P) = xR_\theta(A) + yR_\theta(B)$.
COMPRENSION *¿De qué se trata en el fondo?*	• Identificar relaciones entre variables (problema 1, problema 2). - Relacionar las coordenadas de $R_\theta(P)$ con las coordenadas *x* e *y* de *P* y el ángulo θ. - Dónde y cómo se van a utilizar estas relaciones.

	• Deducir una propiedad (problema 2 y sub-problema 2-a). - Se trata de expresar $R_\theta(C)$ en términos de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ y evitar la rotación de C directamente (no aplicar geométrico-trigonométrico). - Alternativamente, en lugar de rotar C se puede rotar A y B, y vincular con la propiedad lineal.
¿Tiene sentido?	• Validar un resultado por el sentido (sub-problema 2-a). - Validar con un caso particular o apoyarse de manera local. - Declarar el sentido y representarlo dentro del contexto de $\mathbf{R}^2$. - Encontrar el sentido entre la linealidad de los puntos rotados y la linealidad de las pre-imágenes.
ESTRUCTURACION *¿Por qué puedo hacer eso?* *¿Para qué se realiza eso?*	• Elegir un método de resolución en función de criterios (eficacia, economía, etc.) (problema 3). - Utilizar la linealidad de la rotación como método de resolución económico.
	• Establecer y justificar las condiciones de aplicación de un método/función (sub-problema 3-b). - Establecer la acción de la rotación como el producto matricial MX. - Justificar las condiciones de aplicación de un método/función se refiere a que el cambio de la rotación (como el producto matricial MX) respeta la acción lineal de la función (rotación).
COMPRENSION *¿Cómo se podría describir?*	• Sintetizar observaciones o resultados (sub-problema 3-a). - Sintetizar: establecer la acción de la rotación sobre los dos basales en un objeto matemático (matriz). - Los coeficientes matriciales deben ser bien ubicados en la matriz, pues ellos (en el orden preciso) describen la acción de la rotación.

Tabla II. Matriz de competencias de la *Rotación del plano*.

3.7.3 Actividad 3: Cizalladura

Esta tercera actividad está centrada sobre la reformulación de un concepto físico mediante la TL y revisa la estructuración en el pasaje del marco algebraico al marco geométrico. Desarrolla la comprensión en los cambios de lenguaje (simbólico, geométrico, algebraico) del concepto.

NIVELES *y preguntas asociadas*	**COMPETENCIAS**
REFORMULACIÓN *¿Qué es lo que podría hacer?*	• Generalizar un enfoque o un resultado (sub-problema 1-a). - Proceder por analogía (de la rotación) a identificar los elementos del modelo de la TL. Representar bajo la misma forma "combinación lineal" un vector antes y después de transformar por la cizalladura.
	• Combinar modelos complementarios y unificadores (sub-problema 1-a). - Utilizar los conceptos en estudio como puntos de apoyo. Estructurar sobre las definiciones y unificación de los conceptos.
ESTRUCTURACION *¿Por qué puedo hacer eso?*	• Establecer y justificar condiciones de aplicación del método/función (sub-problema 1-a). - Justificar en el cálculo de $T(\vec{v})$, $T(\vec{i})$ y $T(\vec{j})$ la linealidad y la definición de la cizalladura (reconocer $T(\vec{u})$ y $T(\vec{u}_{\perp})$).
COMPRENSION *¿Cómo podría hacer eso?*	• Definir una estrategia de resolución combinando un conjunto de objetos y de métodos (sub-problema 1-a). - Definir la cizalladura a nivel de coordenadas. Aplicar la linealidad de la cizalladura a nivel de coordenadas.
ESTRUCTURACION *¿Por qué es así?*	• Establecer y justificar una propiedad o un resultado (sub-problema 1-b). - Sacar la matriz M de los coeficientes de las combinaciones lineales de las imágenes de los basales: las columnas son los vectores columnas de las imágenes de los elementos de B respecto de *B*.

	- Describir $T(v)$ a partir de MX.
¿Por qué puedo hacer eso?	• Establecer y justificar las condiciones de aplicación de un método/función (sub-problema 1-c). - A partir del postulado $T(v)=MX$ proceder a verificar que ambas matrices representan T, que el vector imagen por la aplicación de las matrices sobre $\vec{v}=3\vec{u}+4\vec{u}_{\perp}$ coincide con la acción de T sobre $\vec{v}$. - Condiciones de aplicación sobre el rol de la base o del sistema de coordenadas de las representaciones de la matriz y de los vectores en la invariancia de T (que esta TL es la misma para ambas matrices).
ESTRUCTURACION *¿Por qué es así?*	• Utilizar una propiedad para orientar la resolución (sub-problema 1-d). - Utilizar la definición y la linealidad de la cizalladura para guiar y controlar los vínculos entre lo operacional geométrico con lo algebraico.
¿Por qué lo puedo hacer?	• Establecer y justificar una propiedad o un resultado (sub-problema 1-e). - Verificar $T(\overrightarrow{OC})=MX$ con M matriz de T respecto a las bases canónica y B (que la imagen de C es la misma, es decir, que no depende de la matriz M). - Generalizar la propiedad $T(v)=MX$.
COMPRENSION *¿Cómo lo podría hacer?*	• Definir una estrategia de resolución combinando objetos y métodos (sub-problema 1-d). - "Aplicar" una propiedad. - Aplicar T a cada uno de los vértices de la estructura cuadrada. - Aplicar T por la acción de la matriz M utilizando la propiedad $T(v)=MX$. - Aplicar T sobre $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ para generar la imagen del cuadrado con los vectores $T(\vec{u})$ y $T(\vec{u}_{\perp})$ (vectorialmente si $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ general el cuadrado entonces $T(\vec{u})$ y $T(\vec{u}_{\perp})$ generan un paralelogramo).

	- Utilizar la figura para representar la deformación del cuadrado de manera de complementar las estrategias anteriores.
ESTRUCTURACION *¿Por qué es así?*	• Establecer y justificar una propiedad o un resultado (sub-problema 2-c). - Conjeturar que la cizalladura $T_{\vec{i}+\vec{j}}$ es equivalente a $R_{-45°} \to T_{\vec{i}} \to R_{45°}$
COMPRENSION *¿Cómo lo podría decir?* *¿De qué se trata?*	• Traducir (sub-problema 2-a). - Traducir gráficamente en la figura cuadrada la secuencia de transformaciones.
	• Identificar relaciones entre variables (sub-problema 2-b). - Identificar las transformaciones geométricas con sus representaciones matriciales.
	• Validar el resultado por el sentido (sub-problema 2-b). - Identificar las transformaciones geométricas con las representaciones matriciales.
¿Cómo lo podría hacer?	• Definir una estrategia de resolución combinando un conjunto de objetos y de métodos (sub-problema 2-c). - Percibir que lo que resulta de eso, es lo mismo. (gráficamente y/o algebraicamente). - Verificar que el producto matricial, en el orden adecuado, coincide con la matriz de la cizalladura en la dirección $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

Tabla III. Matriz de competencias de la *Cizalladura.*

3.7.4 Actividad 4: Áreas entre curvas

Esta última actividad está centrada en la reformulación de la propiedad lineal que trae una revisión de la estructuración de la TL en la reconciliación de los puntos de vista geométrico y analítico, y en la comprensión del alcance de vínculos con la integral.

NIVELES *y preguntas asociadas*	**COMPETENCIAS**
REFORMULACION *¿Qué es lo que podría hacer?*	• Poner en relación los objetos matemáticos subyacentes en un modelo original (sub-problema 1-c). - Poner en relación la propiedad lineal $T(f)+T(g)=T(f+g)$ (lado derecho) en el contexto geométrico interpretando la suma de las funciones como la altura del área de un rectángulo de base π.
ESTRUCTURACION *¿Por qué puedo hacer eso?*	• Elegir un método de resolución en función de criterios (eficacia, convergencia, etc,). (sub-problema 1-b). - Determinar una forma simple para calcular el valor numérico de I. Aplicar la linealidad del operador integración como herramienta alternativa para el cálculo de I.
COMPRENSION *¿Cómo podría hacer eso?*	• Explicar el funcionamiento de un método o función (sub-problema 1-a). - Expresar de forma explícita la propiedad lineal $T(\lambda \cdot f)=\lambda \cdot T(f)$ (producto por un escalar) que permite el resultado.
	• Explicar el funcionamiento de un método o función (sub-problema 1-b). - Explicitar las propiedades lineales que establece a I en una sola integral.
REFORMULACION *¿Cómo podría representar un problema tan complejo?*	• Poner en relación los objetos matemáticos subyacentes en un modelo original (sub-problema 2-b). - Poner en relación, por la gráfica, el área de Ω como la suma de las áreas bajo las curvas de las funciones.
ESTRUCTURACION *¿Por qué es así?*	• Establecer y justificar las condiciones de aplicación de un método/función (sub-problema 2-a). - Justificar la aplicación de la linealidad del operador de integración para facilitar el cálculo (descomponer la función integrando en suma de dos funciones). - Formalizar las propiedades lineales del operador integración.

COMPRENSION *¿Cómo podría hacer eso?*	• Identificar relaciones entre variables (sub-problema 2-b). - Identificar cada función con la curva, la región acotada por el gráfico y el área bajo la curva.
	• Validar un resultado por el sentido (sub-problema 2-c). - Graficar las regiones de los polígonos y estimar el área de omega por la suma de las áreas de los polígonos.

Tabla IV. Matriz de competencias de *Áreas entre curvas.*

3.7.5 La integración de la secuencia didáctica con la TL

Aunque no se refleje de manera cronológica lo que ocurrió en el desarrollo con el concepto, la integración de la secuencia didáctica en el aprendizaje de la TL cobra las dimensiones esenciales del concepto. La construcción del modelo unificador toma apoyo sobre una u otra forma del conocimiento de los sistemas a modelizar y del dominio matematizado de los conceptos subyacentes o aplicados al cual pertenecen, y supone entonces una abstracción unificada de las realidades estudiadas que describen el funcionamiento de la TL. El nuevo modelo que hay que construir debe permitir una estructuración de un nivel jerárquico superior de la TL de modo de generalizar y formalizar el concepto en la teoría de espacios vectoriales. El esquema siguiente proporciona una ilustración de la contribución anticipada de cada tarea en el trabajo de la concepción unificadora de la TL, como nos enseña la historia de su desarrollo.

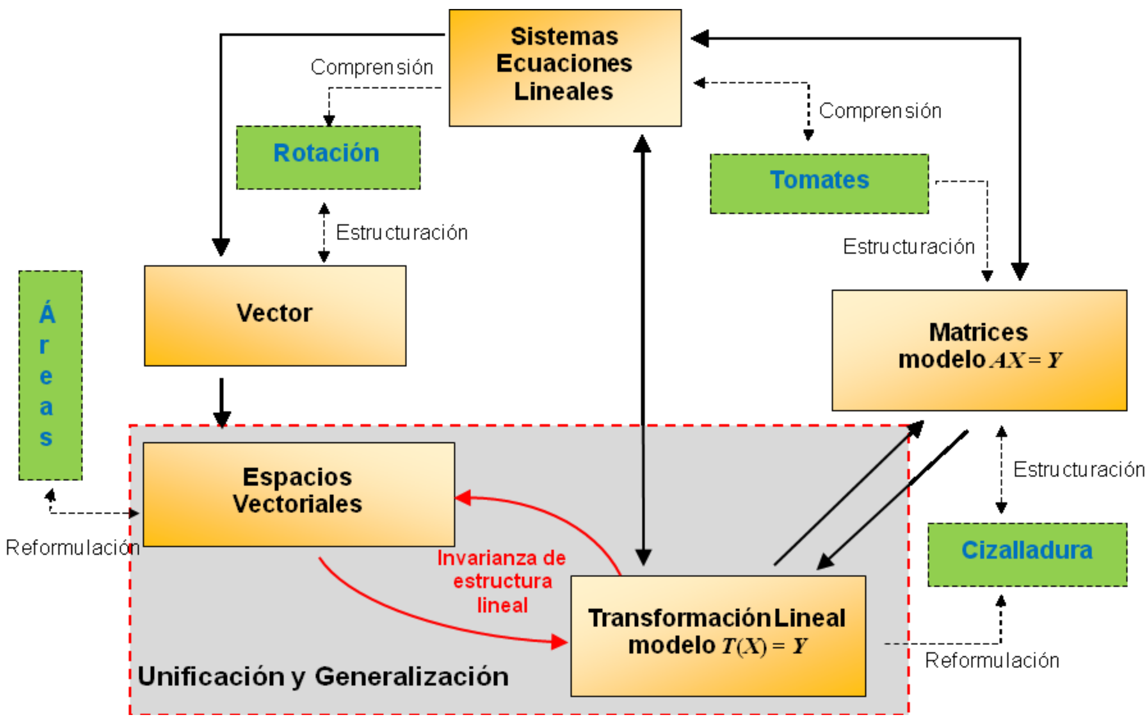


Figura 17. La construcción del modelo unificador con la TL

3.8 La experimentación

Para introducir la TL, el profesor había tratado los contenidos estándar del curso desde las matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, espacios y subespacios vectoriales, combinaciones lineales, familias libres y generadores, espacios suplementarios, etc., hasta llegar a las transformaciones lineales donde entra la secuencia. En seguida, en el momento de nuestra presentación, tuvimos una conversación con el grupo del curso explicando la nueva estrategia de enseñanza de las actividades de aprendizaje que tendría el tratamiento del nuevo concepto. Que se trataba de utilizar un poco más de tiempo en buscar de comprender, trabajando de manera responsable, pero que al final se ganaba mucho más en conocimiento. El apoyo del profesor en la inversión de clase, para poder debatir el trabajo de las tareas, fue claro desde un principio. Siempre con el fin de que los estudiantes aprendieran más, en el tiempo de cada situación de trabajo, el profesor prefirió mantenerse a distancia para que los estudiantes se movieran por sí mismos dentro de las actividades. Este hecho dio a entender a los estudiantes que debían involucrarse mucho más en la investigación de su solución.

En primer lugar, entregamos cada vez una actividad de la secuencia como tarea para la casa para discutir en la próxima clase (en equipos de a dos) los métodos aplicados y la solución de los problemas. Animando a los estudiantes a resolver los problemas, les dijimos que así tendrían más tiempo para reflexionar y para interpretar los enunciados de las tareas. Advertimos también a los estudiantes el hecho que no sólo tendrían que responder preguntas matemáticas sino que deberían expresar una opinión explícita juzgando la validez y el alcance de los métodos aplicados en los distintos contextos, para tratar de ver alguna posibilidad de generalización. Que deberían conceder mayor importancia a la interpretación de las relaciones, de las variables que vinculan y de los conceptos matemáticos a los cuales ellos recurrían. Todo eso, con el fin de poder construir un concepto abstracto, pertinente frente al cuestionamiento de las tareas y simultáneamente muy " matematizado" para que se pueda a la vez calcular, comprender por qué funciona o al menos aplicar una cierta coherencia matemática con el repertorio matemático al cual debían recurrir.

Debido a un paro estudiantil que se desencadenó en medio de nuestra experimentación, la intervención experimental de la secuencia en la clase, se extendió a 2 clases más de lo previsto. Esto, en razón del tiempo disponible que tenían los estudiantes, habían dejado todos sus cursos, pero la experimentación les parecía diferente y decidieron continuar. La incertidumbre introducida por las situaciones les impulsaba a tener en cuenta toda su riqueza y a invertir el tiempo necesario en sus desarrollos con el fin de aprender. La experimentación la llevamos a cabo de fin de mayo hasta mediados de junio de 2011. Los horarios semanales de álgebra lineal son dos veces, tres horas seguidas de curso. Esto representa un tiempo más extenso que la media que se puede observar de otras sesiones del álgebra lineal en la enseñanza de la TL. A menudo este concepto no ocupa más que tres sesiones en su enseñanza clásica.

3.8.1 Presentación y formulario de consentimiento

Es indispensable generar una actitud positiva de los estudiantes desde el principio, que permita tanto su implicación progresiva en la participación como el acentuar un sentido de responsabilidad con la investigación, es decir, que identifiquen de manera autónoma la unificación que hay que realizar. En este sentido, la presentación inicial del proyecto fue una etapa crucial, debía permitir animar la participación voluntaria de los estudiantes y debía llegar a estimular a ser sujetos de la experiencia.

Entregamos entonces una visión precisa de los objetivos y de la metodología a utilizar, asegurando a los estudiantes que su participación (o negativa de participar) no influiría en la evaluación del curso. Que su participación nos permitiría validar las tareas a través de sus respuestas, y que bien impregnados por el desarrollo de esas tareas podrían ser capaces de integrar mejor sus conocimientos matemáticos como estudiantes de ingeniería, si no aprender a pensar, a estudiar de modo independiente, creativo, e innovador. Precisamente, que la secuencia podría contribuir a organizar el aprendizaje de un modo tal para estimular el desarrollo de esas capacidades.

Esta presentación nos permitió discutir con los estudiantes la experiencia para aclarar los distintos momentos de su participación en la investigación y de la observación en la clase; una buena participación en clases contribuiría a una forma de "validación inmediata" de la secuencia en todas sus actividades. Que no habría ninguna trasmisión de información personal al profesor y que no tendrían que someterse a pruebas o exámenes clínicos. Además, estaba la posibilidad de expresar, a través del proyecto, su opinión de cómo ellos percibían tales situaciones de aprendizaje y el desafío que esto generaría en cuanto a su preparación matemática para la resolución de problemas. Les describimos el objetivo general del proyecto (comprender el efecto de las tareas sobre sus competencias en resolución de problemas) sin descubrir no obstante las intenciones precisas (desarrollar una nueva manera de enseñar la TL) por lo que nos interesábamos realmente. Que el interés en participar en este estudio les permitiría más tarde recibir una copia de los resultados de este tipo de estudio de naturaleza exploratoria.

Debíamos cuidar del respecto de la manera como los estudiantes consideran sus concepciones y sus formas de pensamiento, si pretendíamos identificar las competencias desarrolladas en la utilización de la TL. Explicamos claramente los mecanismos que permiten preservar la confidencialidad de la información que compartirían con nosotros y asegurar el anonimato: haciendo el estudio sobre una base de siglas para designar a cada uno de ellos en el momento de toda publicación de los resultados (tesis, artículos, conferencias). Si decidían participar, debían proporcionar por escrito su consentimiento libre y transparente, utilizando el formulario de consentimiento (Anexo B) que les entregamos en el primer encuentro en la clase. El formulario de consentimiento es un condicionante institucional que teníamos que respetar. Estábamos conscientes que llevaba el riesgo de afectar la calidad del muestreo y la elección de los sujetos, pero, todos, los 17 estudiantes del curso estuvieron de acuerdo en participar.

Posterior a la presentación, hicimos entrega de las copias de la primera tarea para la casa *"en busca de un modelo"* que los estudiantes manifestaron su interés de resolverla cuanto antes y de traerla para la discusión en equipo para la próxima clase.

3.8.2 Cuestionario de entrada y elección de los sujetos a entrevistar

De entrada, procuramos recoger información que nos permitiera clasificar tipos de estudiantes sobre las formas del trabajo realizado en situación de resolución de problemas. A partir de ciertas características externas asociadas a los sujetos, invocamos a un juicio más personal sobre las respuestas hechas a las preguntas de un **cuestionario** corto. Tratamos de formular preguntas que recurrieran a hechos que pudieran representar elementos relacionados con tendencias de intereses matemáticos: la abstracción de una noción, la reutilización de conocimientos o métodos matemáticos, una apertura al desarrollo del razonamiento, la capacidad de reflexionar estructuralmente, la disposición de procedimientos de resolución, el conocimiento de una fórmula o de un método general aplicable…etc. Para este cuestionario, reutilizamos algunas preguntas seleccionadas del modelo propuesto por Caron (2001) del cual logramos caracterizar a los estudiantes según sus formas de pensamiento de las relaciones entre saberes *prácticos* y saberes *teóricos* en el aprendizaje de las matemáticas. Abordamos los intereses matemáticos de los cursos preferidos y de la formación recibida que afecta a las competencias y motivaciones matemáticas de los estudiantes en situación de resolución de problemas. Las preguntas son cerradas y son particularmente útiles para una caracterización global y rápida de la percepción e interés del estudiante por la aplicación. El conocimiento de los intereses nos parece importante como una entrada para desarrollar la enseñanza de las matemáticas dentro de la formación de ingenieros, y de otro lado, estos mismos intereses pueden tener influencia para la toma del sentido unificador de la noción.

La utilidad de las caracterizaciones por el cuestionario fue doble. Por una parte, nos permitió una caracterización de modo general de la formación recibida, aportes percibidos e intereses de los estudiantes por las matemáticas. Por otra parte, nos encaminó en la *elección de los sujetos* que íbamos a recibir en entrevista que, juntos pueden constituir una muestra representativa, contrastada y reveladora para la entrevista.

Inicialmente, un enfoque (Caron, 2001) que contemplábamos para elegir esos individuos era considerar dos dimensiones que corresponderían a los lugares hechos en la formación: la comprensión de la teoría y el desarrollo de habilidades prácticas, y buscar para una muestra que se reparte en este espacio (Figura 18). No obstante, para no correr el riesgo de perder de golpe a varios estudiantes que veían que el paro estudiantil no terminaba o que tenían preocupaciones de perder clases, decidimos adelantar la elección de los equipos de trabajo. Algunos criterios de esta selección los señalamos más adelante (sección 4.1).

En la sección 4.1 (Figura 19, p. 173) también mostramos la ubicación en el plano que ilustramos en el siguiente gráfico de los estudiantes retenidos, que estuvieron de acuerdo en seguir participando.

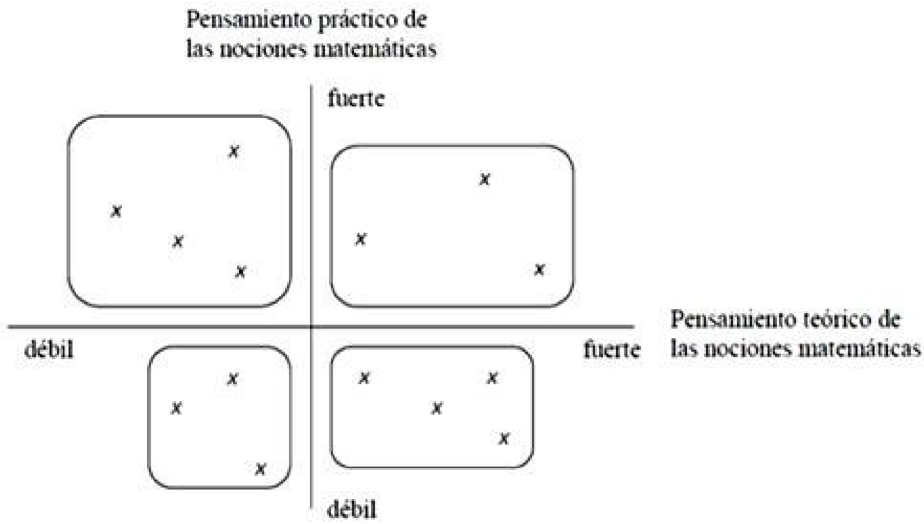


Figura 18. Un modo de reagrupar a los individuos por tipos

Empezamos así con nueve estudiantes con los cuales queríamos ir en más detalle. Pero, el paro estudiantil hizo que pudimos completar la secuencia con seis de esos individuos, que acabaron ser los sujetos del estudio.

3.8.3 Experimentación de las situaciones problemas

En el contexto de las actividades normales del curso, cuando el profesor acababa de tratar los contenidos de espacios vectoriales, y sin haber introducido la definición de la TL, se introduce nuestro diseño en la clase. Los estudiantes debían trabajar en la elaboración de las estrategias (aplicando sus conocimientos matemáticos preliminares), en el desarrollo de las resoluciones y en la validación de sus conjeturas. Para cada situación la actividad matemática comenzaba en forma de "tarea para la casa" así que en la clase se continuaba con su desarrollo. Casi siempre el desarrollo de la tarea en la casa comprendía entender el enunciado del problema, reflexionar el contenido de la situación y proponer algunas formulaciones, para así adelantar las estrategias de resolución en la clase. Todas las etapas del razonamiento de cada actividad eran construidas y confrontadas (con su compañero) en la clase, cada vez. Si los equipos eran formados por dos estudiantes, ellos solían trabajar igual de manera individual, como compitiendo por descubrir el saber en juego. De modo que el trabajo compartido consistía más bien en la confrontación y discusión de sus resultados que en un desarrollo común. Una sesión del curso de 90 minutos (1 hora y media) era puesta a disposición, cada vez, para que completaran todas las etapas de la resolución, con el fin que el profesor hiciera una síntesis general de los métodos utilizados. Las producciones de los estudiantes eran recogidas y fotocopiadas para hacer una lectura detallada de las producciones de los participantes, preparándonos para la selección de los sujetos a entrevistar.

En cada clase los estudiantes pudieron organizar sus puestas en ejecución y adaptar bien sus razonamientos matemáticos a la situación. Además de solicitar a los estudiantes la resolución de las actividades, el profesor por su parte, evaluaba las producciones y tendencias que se asociaban a la TL, para la institucionalización del concepto. Como el saber matemático en juego no había sido instruido en la clase, ni mucho menos desarrollado una relación ilustrada de él (la TL), el profesor intentaba describir lo que podía aportar de nuevo y útil en la resolución de problemas. Más que apoyarse en una definición fundamental y formal, la estrategia transpositiva que hacía uso el profesor consistía en señalar invariantes matemáticos simples (geométricos, algebraicos, etc) privilegiando ejemplos concretos para generar la definición. También trataba de integrar ciertos conceptos en formación ya sea físico, geométricos, aritméticos…etc. Por ejemplo, en el caso de la rotación habló de funciones de un espacio a otro que preservan propiedades de tipo geométrico (longitudes, ángulos, ortogonalidad,…etc.) a este tipo de funciones les llamó isometrías; en el caso de la cizalladura se refirió a deformaciones de hormigones por el efecto de los temblores, fenómenos de la naturaleza…etc., motivando aún más a los estudiantes en la interacción con la secuencia. La definición formal de la TL llega momentos antes de iniciar la actividad de la cizalladura que se caracteriza por su formalidad y que pide estrategias más exigentes.

3.8.4 Entrevista de explicitación.

En la entrevista, buscamos que el sujeto describa y nos explique sus propias acciones de lo que entendió del propósito de cada tarea y de lo que realmente hizo en la ejecución de los procedimientos y métodos aplicados. Para lograr esto, contemplamos la entrevista como una conversación a través del desarrollo de las tareas, donde los estudiantes eran invitados a describir sus acciones matemáticas y a criticar la coherencia de la secuencia. Procurando poner en contacto un cuestionamiento personal, supusimos entonces una aceptación libre por parte de la persona interrogada y una seguridad del respeto de sus límites y de sus negativas (o rechazos) a sus expresiones o reflexiones. También abordamos la presentación de la entrevista en un breve plazo después del desarrollo de la secuencia, e hicimos que la conversación se inscribiera en una relación, en el sentido de sincronizar con el estudiante el lenguaje, actitud, y compatibilidad en su reconstrucción.

Pedimos entonces a los estudiantes privilegiar toda información relativa a la construcción de su acción de las tareas, intentando expresar las ideas matemáticas y opinión de las tareas u otros procesos de descripción que permitan relacionarse con una concepción mental de la TL. Tratamos de velar a no provocar en los sujetos, por las directivas externas demasiado precisas, un *efecto Rosenthal* que los tentara a tratar de producir respuestas de acuerdo a las expectativas del entrevistador, a sesgar el trabajo de la interpretación, a buscar por sí mismos los efectos esperados de la secuencia; convenía entonces invitar a la búsqueda del pensamiento matemático que condujo los procedimientos implícitos en el desarrollo de su concepción. Además, intentamos evitar proporcionar preguntas que se centraran en lo mismo (Van der Maren, 1996) para no influir sobre los resultados de éstas en el sentido de nuestras expectativas.

Para hacer la entrevista, desarrollamos una *guía de entrevista* (Anexo D) que fue validada por la directora de tesis, y que adaptábamos para cada sujeto a partir de las producciones de las tareas. El procedimiento concerniente a la descripción de las realizaciones matemáticas significativas y las críticas a las tareas se dividía en dos tiempos, una vez dadas algunas consignas y responder a sus consultas. Primeramente, a los estudiantes se les pidió describir lo que hicieron en el desarrollo de las tareas respecto del sentido matemático empleado para situarnos en la visión matemática de las operaciones hechas, pero siempre tratando de evitar insertar la conversación al interior de las dificultades del contexto escolar. Nos interesamos por las relaciones matemáticas de los procedimientos y razonamientos matemáticos realizados, de las conclusiones y de cualquier otro saber matemático aplicado en las soluciones (con éxito o no). En este sentido, utilizamos preguntas conducentes a una verbalización de lo imaginario (Vermersch, 1994) (*por ejemplo*, *¿Cómo lograste llegar aquí? ¿Qué pensaste haciendo eso? ¿Qué utilidad ves ahora al concepto de TL?...etc.).* Posteriormente, sugerimos proporcionar la opinión sobre la utilidad y la claridad de las tareas para ver lo que podían percibir de su papel, de su articulación y para buscar mejorarlas. En particular, sobre todo aquello que les significaba trabajar progresivamente con las tareas, al inicio de la tarea, experimentar hacer lo que se les estaba pidiendo, sentir la coherencia o no…etc.

Habíamos previsto un máximo de una hora por entrevista y por el motivo de la huelga estudiantil pudimos extenderla a una hora y media o un poco más. Las entrevistas fueron grabadas digitalmente con el acuerdo de los participantes, todos estuvieron de acuerdo a la grabación, sólo un estudiante faltó a la entrevista.

4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

El análisis de los resultados de nuestra investigación pretende evaluar el efecto de las tareas por nivel de esfuerzos de explicitación en el aprendizaje de la TL en la abstracción y utilización del modelo lineal en situación de resolución de problemas.

En este capítulo, presentamos primero a los estudiantes retenidos para el análisis de las competencias que muestran en respuesta a los problemas de la secuencia didáctica. Luego, tratamos los textos de estudios que orientan la enseñanza de la TL para la carrera de ingeniería que siguen estos estudiantes. Continuamos con el análisis del cuestionario de entrada que examina la percepción de la formación matemática, de los cursos recibidos y de los intereses matemáticos, para seguir con una breve caracterización de los equipos obtenida de las elecciones del mismo cuestionario. Finalmente, examinamos la articulación de las actividades en la travesía de la secuencia y las relaciones de los estudiantes de la secuencia por niveles de explicitación observados en la formación del concepto TL.

4.1 Presentación de los estudiantes

Se trata de un curso compuesto por 17 estudiantes que se ofrecieron todos voluntariamente en participar (en la clase en que presentamos el proyecto), aunque el profesor del curso ya se había encargado de anticipar el desarrollo de una experiencia en el contexto de la clase. Si la elección de los equipos retenidos estaba prevista efectuarse una vez que dispusiéramos de todos los datos relativos a las producciones de las actividades, una huelga estudiantil (en Chile) en el transcurso de la experimentación nos llevó a determinar definitivamente la elección de los equipos en el transcurso de la tercera actividad de la secuencia. En esta etapa, procuramos tener tres equipos (seis estudiantes) que parecen cubrir las características de los estudiantes según sus intereses matemáticos. En el cuadro del cuestionario de entrada, la información en torno a los elementos relacionados con estos intereses y las estrategias para elaborar una solución y sus desarrollos en la secuencia de tareas, permitió revelar ciertas características y variantes del aprendizaje matemático de los estudiantes (sección 4.5), particularmente a propósito de la formación del concepto de la TL. Estas características fueron tomadas en cuenta para la selección de los estudiantes y la formación de los equipos de trabajo. A pesar de la huelga y las protestas estudiantiles, el desafío y el interés por las tareas motivaron tanto al profesor como a estos estudiantes a permanecer hasta el final de la experimentación (sólo un estudiante decidió no participar en la entrevista).

Habíamos procurado distribuir los sujetos en el plano Pensamiento *Práctico-Teórico* de las nociones matemáticas, reteniendo participantes representativos del curso e interesándonos en el estudio de casos particulares. Para hacerlo, tomamos en cuenta varios elementos de información obtenidos por el cuestionario (intereses matemáticos expresados, cursos preferidos, formación que reciben) y por el avance en la mitad de la secuencia (los conocimientos y habilidades matemáticas mostradas) que se había trabajado hasta ese momento de huelga. En la sección 4.5, resumimos las principales informaciones que nos suministró el cuestionario para los equipos retenidos.

La Figura 19 (p. 173) muestra una representación de nuestra percepción de la posición que ocuparían estos estudiantes en el plano Pensamiento *Práctico-Teórico.* Posición que se asociaría, el trabajo en la formación del concepto esperado a las competencias desarrolladas en las tareas (hasta ese momento), en el interés por la comprensión de la teoría y en el desarrollo de habilidades prácticas en la aplicación de conceptos.

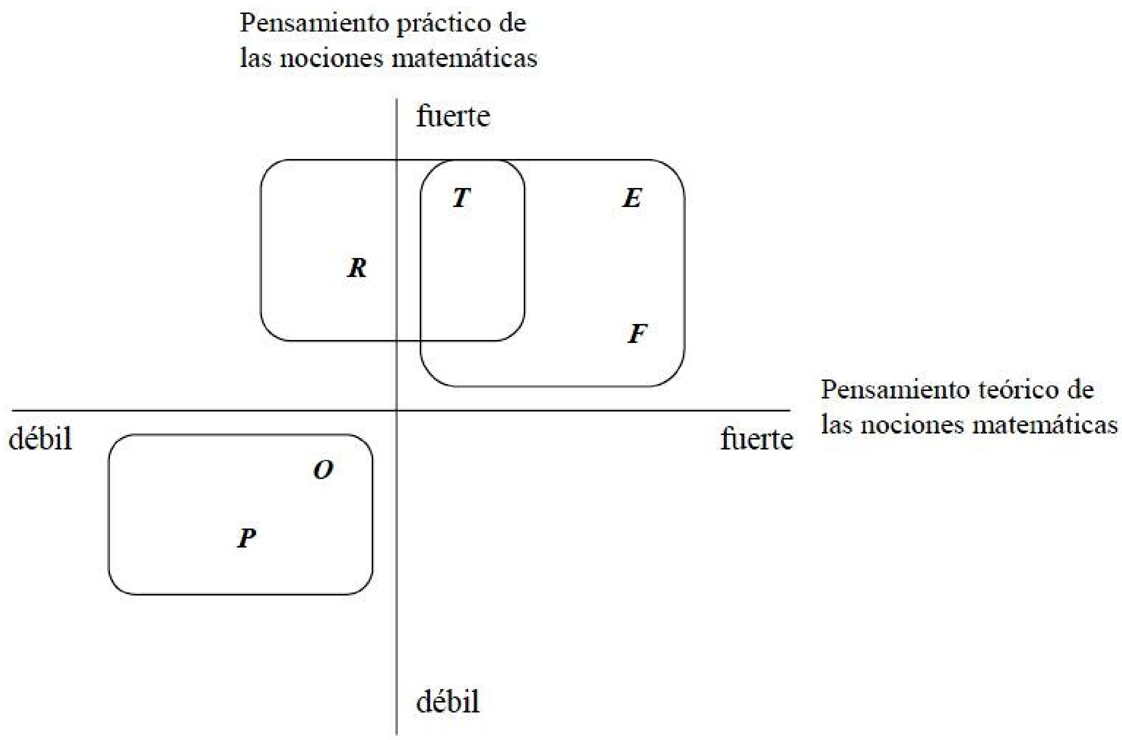


Figura 19. Representación aproximada del sentido del trabajo matemático

Si todos los estudiantes de los equipos están cursando Álgebra Lineal por primera vez en el tercer semestre de su formación, el curso de nuestra experimentación es un curso extra-programático en la programación del Instituto de Matemáticas. Esto quiere decir que no consiguieron tener éxito en algún curso de primer año, y que han tenido dificultades y las quieren superar. No es raro entonces suponer que la componente esfuerzo matemático de nuestro grupo de alguna manera está presente en los intentos de construir un conocimiento seguro y coherente para aprobar el curso. Como algunos de los estudiantes habían repetido *Álgebra* y/o *Geometría* en el primer semestre, que son cursos pre-requisitos para cursar el Álgebra Lineal en el segundo semestre, nuestro curso está en el tercer semestre en su formación. Podríamos casi decir que ellos están preparados para trabajar activamente por el significado del concepto quedándose hasta el final. También, tienen aprobado el curso *Introducción a la Ingeniería,* que es un curso de modelización matemática vinculado a las áreas de ciencias básicas y de la ingeniería (matemática, física, química…etc.) y cursan *Cálculo II* y *Física General Mecánica* de manera paralela al Álgebra Lineal.

4.2 Los textos de estudios que orientan la enseñanza de la TL

Para la presentación de la TL (en el curso de Álgebra Lineal de ingeniería) en tres de los principales textos señalados en los programas, introducen previamente una presentación axiomática de espacios vectoriales. El libro K. Hoffman y R. Kunze "*Álgebra Lineal*" (Ed. Prentice Hall, 1982) hace referencia al saber de la TL a partir de la definición formal y general, complementando con algunos ejemplos sin desarrollar (*La función T definida por* $T(X) = AX$ *es una transformación lineal, con* A *matriz. Una transformación lineal de* $\mathbf{R}^1$ *en* $\mathbf{R}^1$*, de acuerdo con la definición, será una función de* $\mathbf{R}$ *en* $\mathbf{R}$ *cuyo gráfico es una recta que pasa por el origen*). Otro texto incluido en la lista del programa es el Ch. Cullen "*Matrices and Linear Transformations*" (Ed. Addison-Wesley, 1990) de un tratamiento similar trae como ejemplos con desarrollo *"La simetría* $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ *es lineal"*. Esencialmente, la organización de los contenidos en los programas del curso es la misma como se presenta en estos textos, en particular, después de la definición se establecen las principales propiedades y características de la TL, su estructura algebraica donde la TL es considerada como objeto matemático (álgebra de transformaciones lineales, isomorfismos), representación matricial, diagonalización, funciones lineales y dualidad. Estos contenidos para el curso son establecidos y se enseñan a través de clases expositivas en el sentido expuesto en el texto guía de mismo curso; el programa MAT 213 cuenta entre sus objetivos específicos de "*manejar la relación existente entre sistemas de ecuaciones, Matrices y Transformaciones Lineales para la resolución general de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas"*.

Ahora bien, el texto guía para los cursos de álgebra lineal de la P. Universidad Católica de Valparaíso de L. Aburto, D. Jiménez y R. Johnson "*Álgebra Lineal*" (Ed. PUCV, 2003) es un libro de síntesis, elaborado con el fin de presentar los contenidos del programa de curso en el mismo orden. El enfoque del texto, que es análogo al de algunos textos clásicos, es formal e introduce la TL bajo el ángulo axiomático (en el tercer capítulo) después del estudio de las matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, y de espacios vectoriales. Sin profundizar más allá, se refiere a la derivada como "*uno de los mejores ejemplos que disponemos*" para motivar la entrada formal de la transformación lineal consiste en citar las propiedades lineales concernientes a la derivación e integración de funciones.

> Entre espacios vectoriales V y W, sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, se pueden definir una gran variedad de funciones, nos interesa resaltar de estas funciones las que respetan la estructura de espacio vectorial, es decir, respetan la suma de vectores y también la multiplicación por un escalar.
>
> Al considerar este tipo de funciones, uno de los mejores ejemplo que disponemos es la derivada como función de V en V, siendo V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las funciones reales derivables. La función derivada respeta la suma y la multiplicación por escalar, esto es, dados f, g en V y α en $\mathbb{R}$ se tiene:
>
> $$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= (f'+g')(x) \\ (af)'(x) &= (af')(x), \end{aligned}$$
>
> así también, la integral mirada como función desde el $\mathbb{R}$-espacio vectorial W, de todas las funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, en el el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$ también cumple estas propiedades, es decir, dados f, g en W y α en $\mathbb{R}$ se tiene:
>
> $$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b (\lambda f)(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

"*Álgebra Lineal*" (Ed. PUCV, 2003)

A continuación mostramos algunos ejemplos con desarrollo sobre espacios vectoriales canónicos ($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ y uno de espacio de polinomios) donde la verificación de la linealidad se realiza por medio de la misma definición *("verificar que una función es transformación lineal…")* siguiendo con algunas características, propiedades y estructura algebraica de las transformaciones lineales. En este contexto, la TL toma sentido esencialmente a través de la ejercitación sobre espacios euclidianos $\mathbf{R}^n$ que se realiza a través de sub-objetivos por ejercicio directo de la definición y los teoremas (*"Demostrar que la función $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x,y) \mapsto (2x+3y, x-3y)$ es una transformación lineal"*), dejando entrever una leve incursión con espacios de polinomios y de matrices. La importancia concedida a los sistemas de ecuaciones lineales hace de la TL el objetivo esencial de este tipo de presentación.

El texto guía del curso está provisto de muchos ejemplos con desarrollos y ejercicios propuestos, pero no incursiona en la variedad e innovación del tipo de transformaciones lineales concretas que vinculen otros contextos (geométrico, numérico, analítico, economía, física, etc.), lejos de allí, para deducir la linealidad en función de otros conocimientos, sino que se recurre a la propia definición. Tampoco se muestran ejemplos de transformaciones geométricas y transformaciones no lineales, y se deja al estudiante la tarea de decidir sobre la linealidad de ciertas transformaciones planteadas en los ejercicios propuestos.

Ejercicios.

Determinar si los siguientes funciones son transformaciones lineales. **JUSTIFIQUE.**

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, 3x + y)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x + \sqrt{y^2})$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y^2, x)$
4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + |y|, x, y)$
5. $T : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(x) = \begin{bmatrix} x & 2x \\ \sqrt{2}x & x^2 \end{bmatrix}$

"*Álgebra Lineal*" (Ed. PUCV, 2003)

Finalmente, la representación matricial de la TL es introducida por medio de la definición en un contexto formal y general, a través de un tratamiento concreto por medio de ejemplos sobre espacios euclidianos $\mathbf{R}^n$. Las propiedades de la TL son transcritas a las representaciones matriciales sin otorgar espacio a aplicaciones concretas que involucre la representación matricial de la TL. La ejercitación que se realiza consiste en situaciones tales como; *"dada la TL calcular la matriz asociada, dada la matriz asociada encontrar la TL sobre vectores en particular y en general",* etc.

Ejemplo 136 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (5x-2y+3z, x+4y-2z) \end{array}.$$

Determinar la matriz asociada a T en la base canónica de cada espacio.

Ejemplo 138 *Sean $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(1,1),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente y T una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Explicitar $T(x,y,z)$.

"*Álgebra Lineal*" (Ed. PUCV, 2003)

4.3 Percepciones de la formación matemática en Ingeniería

Para una caracterización rápida de los estudiantes participantes según sus intereses y los cursos "preferidos" al encontrarlos por primera vez, procuramos conocer primeramente las percepciones que tienen de su formación matemática recibida en Ingeniería. Nos pareció importante saber de algún modo como "ven" la formación recibida por la contribución al interés por la matemática que en parte se ha desarrollado a través de esta formación.

Primero solicitamos a cada uno de los 17 estudiantes escoger de uno a cuatro ítems entre un conjunto de enunciados para describir de manera lo más objetivo posible el conjunto de la formación que estarían recibiendo (Anexo C, pregunta 3). Luego los enunciados han sido clasificados según su frecuencia de aparición en las elecciones, reagrupando los enunciados diferenciados solamente por el acento puesto sobre un mismo aspecto (apertura o focalización). Las elecciones más frecuentes son dadas en la tabla siguiente:

	Enunciados	Número de estudiantes
I.	Un conjunto de técnicas de cálculo con sus condiciones de utilización	8
F.	Una sucesión de definiciones de objetos y de sus propiedades	6
C.	Una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría	5
D.	Un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo	5
J.	Una voluntad de hacer descubrir la teoría por el estudiante	5
O U P.	Una apertura/focalización sobre la exploración y la experimentación	5 (4+1)
G.	Una sucesión de teoremas y de demostraciones dadas por el profesor	4
H.	Una serie de ejercicios para aplicar las fórmulas enseñadas	4
M U N.	Una apertura/focalización sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados	4 (3+1)
K U L.	Una apertura/focalización sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración	3 (1+2)
B.	Una sucesión de problemas difíciles sin vínculo evidente con la teoría	2
E.	Un estudio formal de espacios abstractos y de estructuras matemáticas	1
Número de estudiantes que respondieron esta pregunta		*17*

Tabla V. Percepción general de la formación recibida

De una parte vemos una confirmación de los estudiantes de verse mejor equipados en términos de la técnica de cálculos con sus condiciones de utilización (ítem I) reconociendo en su formación elementos de una enseñanza teórica clásica (ítems F, G) pero conviene reconocer también, como lo hace por lo demás Chevallard (1991) que esta algoritmización es una respuesta clásica cuando el objeto de enseñanza aparece como demasiado nuevo. Aunque se note por ciertos estudiantes una voluntad en la formación de hacer descubrir la teoría por el estudiante, la formación recibida parece dejar a cargo del profesor la presentación de la teoría, la cual puede ocultar la organización de los conceptos.

Vemos así una confirmación de la importancia concedida en la formación recibida a los problemas y ejercicios (ítems C y H) en vinculación directa con la teoría. Los estudiantes reconocen el valor de la cohesión y la progresión de esta formación (ítem D).

Finalmente, conviene mencionar que la utilización de la tecnología (ítems Q y R) no aparece en este cuadro. Los estudiantes tendrán que utilizar un software o una calculadora gráfica al menos en un curso futuro (Análisis Numérico), pero eso no parece representativo del conjunto de cursos que han tenido hasta ahora.

Percepción de los cursos

Les solicitamos a los estudiantes caracterizar a partir de los mismos enunciados el curso que más les habría contribuido a su comprensión de las matemáticas y el que menos habría contribuido para ello. En el primer año de formación matemática ciertos programas de curso prescriben conectar o vincular aplicaciones directas de los conceptos tratados, además algunos contenidos pueden ser vistos como una continuidad respecto de la formación matemática que traen del liceo.

En este sentido, en el curso *Cálculo 1* MAT 174 algunas de las construcciones tratan con objetos y conceptos ya familiares a los estudiantes desde la Enseñanza Media, pero ahora vistos con un enfoque formal y más descriptivo; los números reales, sucesiones y problemas de convergencia, funciones, derivadas con problemas de aplicación dando más importancia a problemas de tipo cuantitativo de razón de cambio y optimización, que recurren sobre todo a la modelización. El curso *Cálculo II* MAT 177 concede espacio a las aplicaciones de la integral de Riemann en el cálculo de áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos de revolución y algunas aplicaciones a la física.

La Tabla VI da la caracterización de los cursos más considerados.

	Enunciados	Número de estudiantes
C.	Una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría	9
M U N.	Una apertura/focalización sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados	8 (6+2)
D.	Un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo	7
H.	Una serie de ejercicios para aplicar las fórmulas enseñadas	7
K U L.	Una apertura/focalización sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración	6 (5+1)
E.	Un estudio formal de espacios abstractos y de estructuras matemáticas	4
G.	Una sucesión de teoremas y de demostraciones dadas por el profesor	4
I.	Un conjunto de técnicas de cálculo con sus condiciones de utilización	4
F.	Una sucesión de definiciones de objetos y de sus propiedades	3
J.	Una voluntad de hacer descubrir la teoría por el estudiante	3
O U P.	Una apertura/focalización sobre la exploración y la experimentación	1 (1+0)
Número de estudiantes que respondieron esta pregunta		*17*

Tabla VI. Caracterizaciones de los cursos de matemática que más contribuyeron en la comprensión

Encontramos sensiblemente la misma distribución en la elección de los enunciados que la formación recibida, pero algunas diferencias emergen, particularmente con la utilización que hace referencia al enfoque procesal "*un conjunto de técnicas de cálculo con sus condiciones de utilización*" (ítem I) que parece estar menos asociado a la comprensión, pero existe de todas maneras una aceptación del entrenamiento por los ejercicios (ítem H). Por otro lado, reconocen el valor de los cursos que contribuyeron a una apertura sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración (ítems K y L) y que valorizaban el carácter abstracto y general de la teoría (ítem E).

Los estudiantes asocian el enunciado "*una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría*" (ítem C) con mayor frecuencia a los cursos que más le han contribuido en sus aprendizajes. También les parece contribuir a la comprensión de las matemáticas una apertura o focalización sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados (ítems M y N). Valoran también la cohesión de los conceptos y el aspecto progresivo de su enseñanza (ítem D).

Conviene notar que la mayoría de los estudiantes consideran que el curso de Cálculo es el que más les ha contribuido para la comprensión de la matemática, testimonian su contribución a la cohesión de los conceptos en el desarrollo del aprendizaje matemático de su formación. La utilidad de los problemas de aplicación es considerada para el aprendizaje de otras disciplinas (física entre otras) sobre todo para el razonamiento matemático por la justificación que hacen de las propiedades que usan.

La Tabla VII reagrupa en orden decreciente los enunciados escogidos más frecuentemente para caracterizar el curso de matemáticas que menos ha contribuido a la comprensión de la matemática.

El curso de *Álgebra* MAT 173 enseña en su mayoría conceptos formales que requieren un razonamiento riguroso en la interpretación y en la utilización de los conceptos: lógica y conjuntos, polinomios, vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, números complejos y también elementos de geometría analítica con aplicaciones de reglas y fórmulas explícitas (encontrar el lugar geométrico). En este curso se otorga un espacio a la lógica formal que trata elementos fundamentales del lenguaje lógico-axiomático y a la teoría de conjuntos para introducir la coherencia matemática en que los conceptos y propiedades residen. En este contexto, las aplicaciones para resolver problemas con elementos externos de la matemática rara vez es ilustrada dentro del curso. Se trata en su mayoría de aplicaciones de carácter abstracto en conexión directa con los teoremas y propiedades que vinculan a los conceptos mismos.

Enunciados		Número de estudiantes
A U B.	Una sucesión de puzles/problemas difíciles sin vínculo evidente con la teoría	12 (5 + 7)
F.	Una sucesión de definiciones de objetos y de sus propiedades	7
I.	Un conjunto de técnicas de cálculo con sus condiciones de utilización	5
C.	Una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría	4
D.	Un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo	4
E.	Un estudio formal de espacios abstractos y de estructuras matemáticas	3
G.	Una sucesión de teoremas y de demostraciones proporcionadas por el profesor	3
H.	Una serie de ejercicios para aplicar las fórmulas enseñadas	2
J.	Una voluntad de hacer descubrir la teoría por el estudiante	1
K U L.	Una apertura/focalización sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración	1 (0+1)
M U N.	Una apertura/focalización sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados	1 (1+0)
Q U R.	Una apertura/focalización sobre la tecnología (calculadora, software o programación)	5,9 (1+0)
Número de estudiantes que respondieron esta pregunta		*17*

Tabla VII. Caracterizaciones de los cursos de matemática que menos contribuyeron en la comprensión

La mayoría de los estudiantes rechazan los problemas difíciles formulados sin vínculo evidente con la teoría (ítems A y B), posiblemente referido a un contenido relativamente elevado en relación al nivel de aceptación del carácter general de la matemática que se enseña.

Si se siente un cierto rechazo de un clasicismo teórico del modo expositivo de la enseñanza (ítems G, F, E) se sigue considerando una apertura sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración (ítem K): un sólo estudiante lo enunció como característica del curso que menos contribuyó a su comprensión, se podría explicar por lo que se percibe necesario para hacer un juicio de lo que se puede aplicar. Comprobamos lo mismo para el enfoque procedural que no habría sido bien percibido (ítems H e I) para mejorar la comprensión.

Aunque el desarrollo de problemas vinculados a la teoría (ítem C) aparece entre los enunciados más frecuentes para caracterizar los cursos más valorados por los estudiantes se revela que, para algunos de ellos, el curso de matemática que menos habría contribuido a la comprensión parece gozar de la misma percepción: eso podría ser explicado quizás, pensando en aplicaciones arbitrarias e independientes de carácter general y no aplicado de la enseñanza de la matemática

En su mayoría, los estudiantes consideran que el curso de Álgebra es el que menos ha contribuido a su comprensión matemática. Aunque reconocen la coherencia de sus contenidos, considerando una apertura o focalización hacia la aplicación, es visto como un estudio de la matemática muy abstracta y general que aparece de manera discontinua por la formalidad de sus contenidos, percibiéndolo poco útil para el uso de su aplicación en otras disciplinas.

4.4 Intereses en matemáticas

Para conocer mejor los intereses de los estudiantes, les solicitamos escoger uno o dos enunciados entre nueve (Anexo C, pregunta 4) para identificar lo que más les aportaba satisfacción en matemáticas, los resultados están en la Tabla VIII.

	Enunciados	Número de estudiantes
B.	La reutilización en otras disciplinas de conceptos o de métodos vistos en matemáticas	10
C.	La búsqueda fructuosa (o exitosa) de un enfoque de resolución a un problema matemático complejo	9
D.	La comprensión de un nuevo concepto formal que hace pensar de otro modo	5
F.	La simplificación de una expresión compleja mediante manipulaciones algebraicas	5
A.	El conocimiento de una fórmula o de un método general aplicable a todos los casos	3
G.	La confirmación por el modelo de corrección de su control de un concepto o de un método matemático	2
I.	El descubrimiento de una demostración elegante	2
E.	La experimentación y la visualización con la ayuda del computador de fenómenos matemáticos	0
H.	El diseño acertado de un programa o de un procedimiento de software para resolver un problema	0
Número de estudiantes que respondieron esta pregunta		*17*

Tabla VIII. Elementos de satisfacción matemática

El enunciado escogido la mayoría de las veces (ítem B) confirma su interés para la aplicación, interés que nos había dado a entender la caracterización por los estudiantes de los cursos mejor evaluados (ítem C, Tabla VI) y que naturalmente se inscribe en la orientación matemática que los estudiantes han optado por sus estudios de acuerdo a sus intereses de formación en la ingeniería.

Sobre el plano de la complejidad, parece compartido entre el placer de resolver un problema complejo (ítem C) y el sentimiento de seguridad que confiere el conocimiento de un método seguro y universalmente aplicable (ítems A y B).

La elección de los dos enunciados siguientes (ítems F y G) ilustraría una forma de trabajar técnicamente preparándose con ejercicios y fiándose exclusivamente en las respuestas auténticas, no se estaría en condiciones de juzgar por sí mismo sobre la calidad de la respuesta obtenida.

Pareciera apreciar la herramienta conceptual e incluso formal que desarrolla el aprendizaje de un nuevo concepto matemático (ítems D e I) y que le hace pensar otro punto de vista. Se conforma con el conocimiento de un método general que resuelve una gama de problemas (ítem A) pero no se toma en cuenta la herramienta informática (ítems E y H) como si no hubiera necesidad de integrarlas a la práctica personal.

4.5 Caracterización de los estudiantes

Se realiza una caracterización rápida de los equipos de trabajo según sus intereses y cursos preferidos. Primeramente hemos privilegiado al equipo típico del grupo con mayor esfuerzo de explicitación en la utilización de la TL en el momento de ejecutar las tareas. Luego elegimos el equipo con más dificultades y finalmente concluimos con el equipo atípico en relación a los otros, los que utilizan competencias de orden superior en la aplicación lineal.

- Roberto y Tomás: Son sensibles a la cohesión de las matemáticas y les gusta descubrirla tanto por la aplicación en otras disciplinas como por un método general aplicable a todos los casos. Según ellos, han conocido una apertura sobre las posibilidades de aplicación en los cursos de Cálculo I y II con una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría, y atribuyen a estos cursos un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo. A Tomás le gusta reutilizar sus conocimientos en otras disciplinas, y al mismo tiempo generalizar un enfoque o resultado en sus aplicaciones. A Roberto, particularmente, le gusta el desafío de resolver problemas complejos y simplificar expresiones matemáticas en la búsqueda fructosa de un enfoque de resolución. Consideran que el curso de Álgebra es una sucesión de problemas difíciles sin vínculos evidentes con la teoría. Le reprochan al profesor por haber focalizado demasiado en las definiciones, teoremas y demostraciones y dicen que se utilizan problemas demasiados difíciles para su comprensión, y un conjunto de métodos de cálculo.

- Octavio y Pedro: Les gusta simplificar una expresión compleja mediante manipulaciones algebraicas y confirmar el resultado por un método matemático enseñado. Describen el curso favorito como un conjunto coherente de conceptos, de teoremas y demostraciones proporcionadas por el profesor para hacer comprender la teoría hacia una apertura sobre el desarrollo del razonamiento. Pero a Octavio, no le gustó su curso de Cálculo que le hacía descubrir por sí mismo una parte de la teoría haciendo un lugar a la exploración y la experimentación, que él reduce a una sucesión de problemas difíciles sin vínculo evidente con la teoría. Por su parte, Pedro rechaza su curso de Geometría por encontrarlo muy enfocado a un estudio formal de espacios abstractos que lo describe como una sucesión de problemas difíciles sin vínculo evidente con la teoría.

- Emilio y Fernando: Les gusta reutilizar los métodos y los conceptos matemáticos en particular resolviendo problemas complejos. Aprecian la forma de estudio formal de espacios abstractos y de estructuras matemáticas en la compresión de un nuevo concepto que les hace pensar de otro modo. Por otro lado, se resisten al aprendizaje de una sucesión de teoremas y de demostraciones proporcionadas por el profesor, a un aprendizaje por ejercicios donde se tiene que utilizar las fórmulas y métodos enseñados y a resolver problemas difíciles sin vínculos con la teoría. Estas características enmarcan los cursos que menos les gustaron. Prefieren los cursos que dan prueba de una apertura sobre el desarrollo del razonamiento y la abstracción matemática, por eso a

Fernando le gustó su curso de Álgebra. Ambos son perceptivos de la coherencia matemática de sus cursos preferidos. Emilio dice apreciar por el Cálculo una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría y lo reduce a un encadenamiento progresivo de conceptos.

4.6 Análisis a posteriori de las situaciones problemas

Con el fin de describir el trabajo de los estudiantes y contribuir así a la interpretación de los resultados, de los esfuerzos desarrollados en la explicitación del aprendizaje de la TL, hacemos el análisis *a posteriori* de cada tarea y las del equipo típico en mayor profundidad.

4.6.1 Actividad 1: En busca de un modelo

Hacia una comprensión lineal

La utilización de una tabla de valores muestra un problema casi inmediatamente reconocible como una situación extraída de la vida real. Pero, en el establecimiento hipotético de una distribución proporcional basada en algoritmos de proporciones, los valores no proporcionan una simplificación inmediatamente reconocible. El esfuerzo frente a la complejidad de los resultados en el desarrollo de una buena comprensión del funcionamiento del concepto lineal, hace movilizar conocimientos que no reflejan coherencia con la noción de proporciones. Esto solicita un giro hacia una representación de nivel superior que incite a una nueva significación de las propiedades lineales de la proporcionalidad (directa).

Equipo 1: Roberto y Tomás, se distinguen por aplicar un razonamiento deductivo en las conexiones de las operaciones que hacen cuando tratan de sacar el modelo lineal. En el análisis de las posibles combinaciones de cálculos que representan, basan sus argumentos en las propiedades proporcionales. Pero en el descubrimiento que el modelo proporcional está limitado para representar la situación real, ellos se replantean la construcción de un nuevo modelo: uno más funcional.

Desde el inicio de la actividad, cuando abordan los datos de la tabla valores, tratan de asegurar coherencia real a través de una relación proporcional:

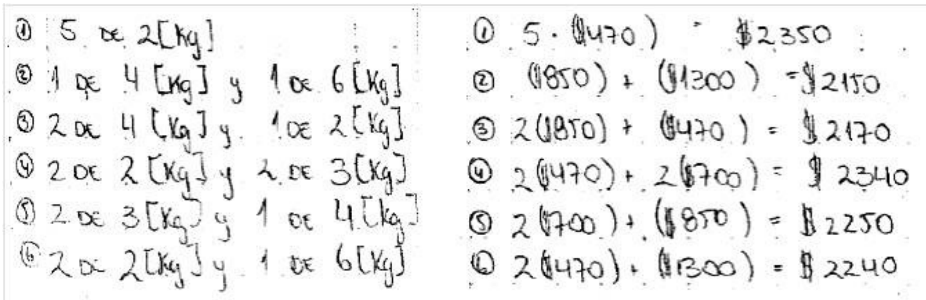
> *"Bueno lo que primero que se me ocurrió, o sea, al ver la tarea uno siempre se va como a las proporciones, si es directa o inversamente proporcional, entonces traté primero de buscar una relación así"* (Roberto).

Ambos estudiantes recurren a la definición y a las propiedades proporcionales, evalúan la cohesión de los datos e identifican las incoherencias conceptuales sospechadas en el aspecto irregular de los precios:

> *"Por la forma en que estaban dados los paquetes yo dije; puede ser una proporción directa porque mientras aumenta una, aumenta la otra. Entonces ahí empecé a jugar cuando después ya me fui como dando un giro, porque nunca encontré la proporción…"* (Roberto)

> *"Es que no hay una razón entre todos los cambios, por ejemplo, el de 2 kilogramos tenía un valor, el de 4 kilogramos tenía otro valor, pero no era el doble al de 2 kilogramos, es que no había como una razón constante de cambio entre los precios, entonces al combinarlos no iban a dar todos los mismos precios"* (Tomás).

Aunque la explicación de una tal incoherencia repose sobre las combinaciones de los paquetes, vuelven aparecer más incoherencias al momento que obtienen diferentes precios para el paquete de 10 kg. Mostrando la dependencia de la forma de "*combinar los paquetes*" y no de combinar el "*peso de los paquetes*". En este proceso, ellos transfieren de todas maneras las combinaciones lineales de los "*pesos*" de los paquetes a combinaciones lineales de los "*precios*" de los mismos paquetes. Apoyados en un modelo de tipo proporcional dejan entrever, implícitamente, un sentido lineal de la correspondencia "peso-precio":



(Tomás)

Figura 20. Combinaciones lineales de los precios para 10 kg.

> *"Ese fenómeno difícil sería igual explicarlo, tiene que ver con las combinaciones lineales, eso sería yo creo, que hay distintas combinaciones lineales para un valor de 10 kilogramos"* (Roberto).

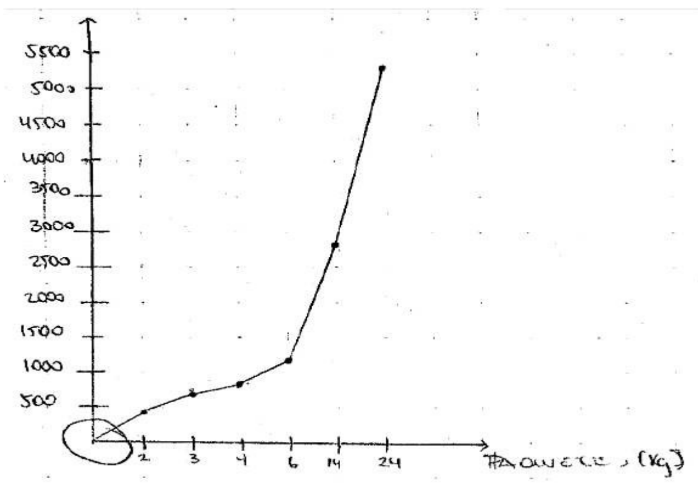
El uso que hacen de "combinación lineal" no corresponde necesariamente a las propiedades de la linealidad como suma ponderada de vectores, tal vez las entienden, pero se refieren más bien a expresar un determinado valor como suma de otros valores que disponen para introducir la idea de "combinar los paquetes".

Intentan entonces determinar el precio para 10 kg promediando los distintos precios de 10 kg, lo que les permite reemplazar de forma unificada los cálculos dispersos para aproximarse a un valor único:

> *"El promedio, como me daban distintos valores para el valor de 10 kilogramos, yo dije bueno, yo creo que el precio debe estar entre el promedio, eso pienso yo. Bueno, si uno es cliente y mira los precios, obviamente se va al que está más barato al tiro, pero para el vendedor, yo creo que el promedio entre todo eso puede ser"* (Roberto).

La distribución gráfica de los puntos (peso, precio) les permitió también ganar en propiedades lineales, como por ejemplo, el tipo de curva que podían trazar; una que se aproximara bastante a la realidad. La influencia del contexto les impuso así añadir gráficamente el punto (0,0):

“Es que, si no vende no cobra, la función, o sea, que la gráfica fue dada por una función, esta función al evaluarla en 0 daría 0, por así decirlo, como gráfica” (Tomás).



(Tomás)

Figura 21. Añaden una condición lineal

“Es que la gráfica en función del peso tendría que ser como si que fuera constante la tasa de cambio, podría ser una recta hacia arriba” (Tomás).

La representación gráfica les permite interpretar el cambio del precio y traer una relación más pertinente a la realidad. Ambos estudiantes establecen como hipótesis la propiedad *“por 0 kg, un costo 0”*, que es una característica intrínseca de la TL.

Respecto a las condiciones impuestas por el vendedor de mantener los precios de 14 kg y 24 kg, ellos asignan como precio para 10 kg la diferencia de estos precios, que es otra propiedad lineal que interviene en la construcción del modelo. En especial, Roberto utiliza esta propiedad lineal de “diferencia” para obtener algunos valores, pero le vuelve a producir nuevas incoherencias al examinar los resultados:

“Es que ahí estaba haciendo como combinaciones lineales, restando para ir encontrando los valores, pero ahí llegué como a una incoherencia…porque se

> *supone que siguiendo como la idea que yo por lo menos tenía en la cabeza, es que mientras más kilogramos va aumentando el valor del precio, entonces igual ahí hay como algo…”* (Roberto).

> *“…porque el de 2 kilos iba a quedar como que valía $ 900 y el de 4 kilogramos me iba a quedar en $ 300, entonces como que yo por lo menos lo que pensé…yo dije, no po!… como va a valer el de 2 kilos más que el de 4 kilos.”* (Roberto).

Si Roberto intenta modelizar por el sentido lineal, pretendiendo considerar la realidad del vendedor, no llega a poder juzgar las dificultades reales contenidas en esa construcción para que su modelo funcione:

> *“Ehhh, es que yo creo que ahí hubo o fue el problema, es que las proporciones, ahí como que me enredé y al final es como que comencé a dar vueltas en una sola dirección y tampoco como que pensaba en apoyarme en otras cosas matemáticas, que podrían a lo mejor, me podrían servir”* (Roberto).

En eso Tomás manifiesta una interpretación sobre los resultados de mantener fijos los precios de 14 kg y 24 kg en la validación de su modelo, explica esta exigencia y prevé la forma de proporcionar un valor en el sentido de buscar un precio único para los 10 kg:

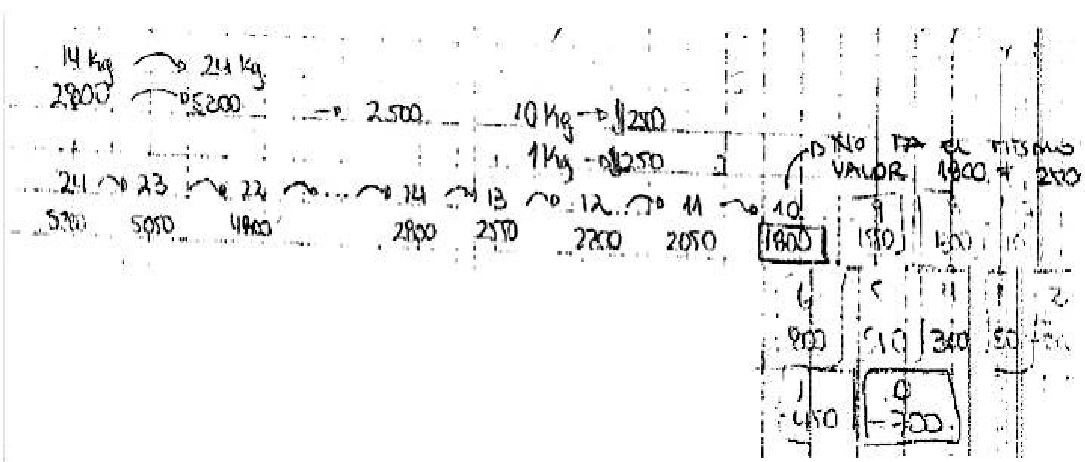
> *“Esa, porque si es que podía cambiar la… los valores, pero conservaba esos dos, tenía que haber entonces una relación de todos los demás valores respecto a esos dos. Entonces, al pasar de 14 kilos a 24 kilos hay 10 kilos de diferencia entonces su precio iba a ser el de los 10 kilos y un 1 kilo iba a ser la décima parte de los que costaba los 10 kilogramos entonces el precio de 10 kilogramos iba a ser $ 2.500”* (Tomás).

Para el análisis de los resultados establece una condición para el precio unitario y aplica ese tratamiento del precio unitario a todos los valores, validando así las exigencias de la situación inicial:

> *“Después en la b) dice que establezca un modelo definido, entonces como 10 kilogramos son $ 2.500, un 1 kilogramo iban a ser $ 250, entonces del valor más*

alto que da el de 24 kilogramos $ 5.300 que iba decreciendo a una razón de $ 250, entonces hasta al llegar al valor de 10 kilogramos que me dio $ 1.800, no corresponde al valor que me había dado anterior que era de $ 2.500. Lo que quiere decir que no va variando en una razón, no tiene una tasa de cambio ascendente o descendente que sea la misma. Entonces, después comprobé si es que el valor de esos 10 kilogramos con esa razón de cambio era lo mismo que sumar 2 paquetes más pequeños que sumaran 10 kilogramos y volví a sumar el de 4 con el de 6 y sus valores $ 800 y $ 300 sumaban $ 1.100. Y no era lo mismo que el del paquete de 10 kilogramos entonces no, al mantener fijos esos valores de 14 kg y 24 kg o a lo menos uno de ellos, no era como una tasa de cambio que diera los valores exactos y que después al combinarlos diera otro de uno mayor" (Tomás).

En la clarificación de estos hechos, deja entrever implícitamente que la variación entre los precios unitarios debe ser constante (que él llama, razón de cambio o tasa de cambio). Para ello propone como "razón de cambio" el precio unitario para 10 kg (que lo obtiene por linealidad) en un modelo definido por recurrencia de tipo aritmético y que consiste en una parte (discreta) del modelo afín $g(x) = 250x - 700$. Esta construcción le permite precisamente describir que el cambio de precio local, que produce con esa diferencia, respeta los precios para 14 kg y 24 kg pero no le funciona ni para 10 kg ni para 0 kg, para este último le da un valor negativo.



(Tomás)

Figura 22. Uso de la recurrencia para modelizar el precio

> *"En esta función que modele en el cambio de 250, el valor de 0 kilogramos me daba negativo porque en 3 kilogramos desde el de 24 restando 250, en 3 kilogramos era $ 50 entonces de ahí hacia abajo iban a ser negativos y no puede ser así"* (Tomás).

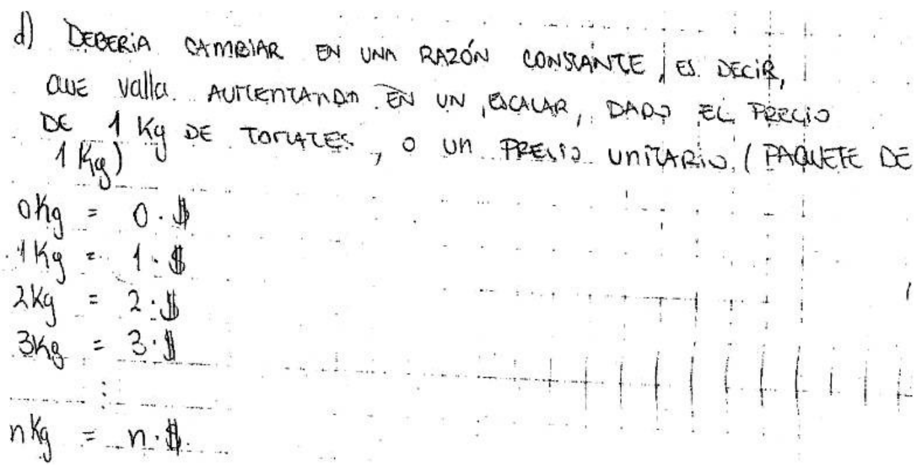
En este proceso Tomás habla de manera explícita del uso de función al describir la variación del precio que la relación de recurrencia establece. Como esta aplicación no alcanza a entregar los resultados reales esperados, eso le da una nueva influencia para la construcción del modelo lineal, manteniendo siempre su hipótesis: un cambio de razón constante, pero esta vez con un modelo de tipo multiplicativo:

> *"… debería ser para un valor unitario o para 1 kilogramo un valor determinado y los demás que vayan cambiando con respecto a esa razón, por ejemplo 0 kilogramos era 0 por ese y 1 kilogramo iba a ser 1 por ese precio, 2 kilogramos 2 por ese precio entonces que fuera cambiando por una razón constante."* (Tomás).

Además, la experiencia previa de calcular resultados complejos en la tabla de valores motivó en Tomás una autonomía en la matematización de ese resultado. Sobre su experiencia él nos relata así:

> *"Entonces intenté buscar como una relación, por ejemplo en el 3 y 2 kilos, o sea 2 paquetes de 3 kilogramos sería lo mismo que comprar uno de 6, o sea, se supone que sería lo mismo, entonces el valor de ese era 700 el doble era 1.400, pero el de 6 costaba 1.300. Entonces intenté buscar una relación así; como el valor de 2 veces el valor del paquete, de la mitad del paquete menos 100 hacía eso, pero no funcionaba con ese ni con los demás, entonces era como se pudiera hacer con un unitario y su doble haría una relación, pero si intentaba buscar entre combinar esas relaciones que existiera entre todos los demás no podía, se hacía muy complicado, intenté buscar un precio unitario"* (Tomás).

Se ve que tiene el deseo de combinar de manera más sencilla las relaciones, pide las propiedades lineales que le permitan reflejar y asegurar la coherencia de los precios. Para lograr esto, establece el precio unitario como la razón de cambio, y organiza un modelo multiplicativo:


d) DEBERIA CAMBIAR EN UNA RAZÓN CONSTANTE, ES DECIR, QUE valla AUMENTANDO EN UN ESCALAR, DADO EL PRECIO DE 1 Kg DE TOMATES, O UN PRECIO UNITARIO (PAQUETE DE 1 Kg)

0Kg = 0 · $
1Kg = 1 · $
2Kg = 2 · $
3Kg = 3 · $
⋮
nKg = n · $

(Tomás)

Figura 23. Un modelo que entrega precios coherentes

Así que, la técnica que ha sido la base del proceso de validación de la tabla de valores ahora se utiliza en el proceso de la misma modelización del precio. Además, Tomás intenta acceder a la idea unificadora y generalizadora del concepto TL al combinar el precio de una cantidad compleja en combinaciones de precios más sencillos:

> *"En buscar un precio unitario porque podíamos escribir cada precio como una combinación de varios paquetes, o su precio por uno unitario"* (Tomás).

> *"… es que 10 kilogramos sería 10 por el valor y aquí sería, por ejemplo, 4 por el valor más 6 por el valor entonces como son, eh… por así decirlo, se podría factorizar por el valor y se sumarían los escalares, serían 6 + 4 = 10 y sería 10 por el valor entonces si se cumpliría en este caso, porque si es que tiene razón de cambio constante…"* (Tomás).

En consecuencia, para validar las exigencias iníciales de fijar esos valores en la tabla, Tomás hace intervenir el nuevo modelo lineal a partir del "precio unitario" de 14 kg para calcular el valor de 24 kg, constatando que no le entrega el valor que realmente desea el vendedor.

De esta manera, Tomás comprende y estructura el tipo de propiedades que debería tener un modelo que proporcione un precio único y coherente para cualquier valor. Esta interpretación de las funciones (tasa de cambio, relación de recurrencia) le estaría permitiendo una comprensión del concepto de linealidad en una situación concreta. Por otro lado, la dificultad de Roberto por elaborar el modelo lineal se puede explicar por la poca comprensión del rol de las proporciones las que utiliza en un contexto más bien limitado y menos funcional.

Características:

- Estiman que el modelo lineal estructuralmente es el más eficaz para reflejar la coherencia de los precios y juzgan el realismo de las condiciones del vendedor.
- Organizan y validan diferentes modelos atendiendo a regularidades observadas.
- Establecen y justifican condiciones de aplicación del modelo lineal.
- Interpretan la proporcionalidad en un contexto más general (funcional, linealidad).
- Proporcionan sentido y organizan un modelo coherente con las propiedades lineales.
- Identifican vínculos entre las representaciones geométricas, numéricas y algebraicas de las propiedades lineales.
- Aplican un razonamiento coherente con el concepto lineal en la matematización y la solución del problema.

Trabajan el sentido de las variables que vinculan y de los conceptos lineales a los cuales recurren. Utilizan el cuestionamiento y la argumentación para identificar el alcance del concepto, aseguran la coherencia y la pertinencia del modelo lineal, entran al nivel de estructuración.

Equipo 2: Octavio y Pedro, para tratar de comprender la situación, presuponen que los precios en la tabla de valores están establecidos proporcionalmente, y definen un modelo sin tener en cuenta las incoherencias que resultan en el contexto. Proceden en un trabajo de aproximación, pretendiendo de todas maneras otorgar un sentido lineal a las condiciones del vendedor. Recurren a una regla explícita sobre los datos de una tabla de valores, para predecir los precios por el sentido del modelo predeterminado.

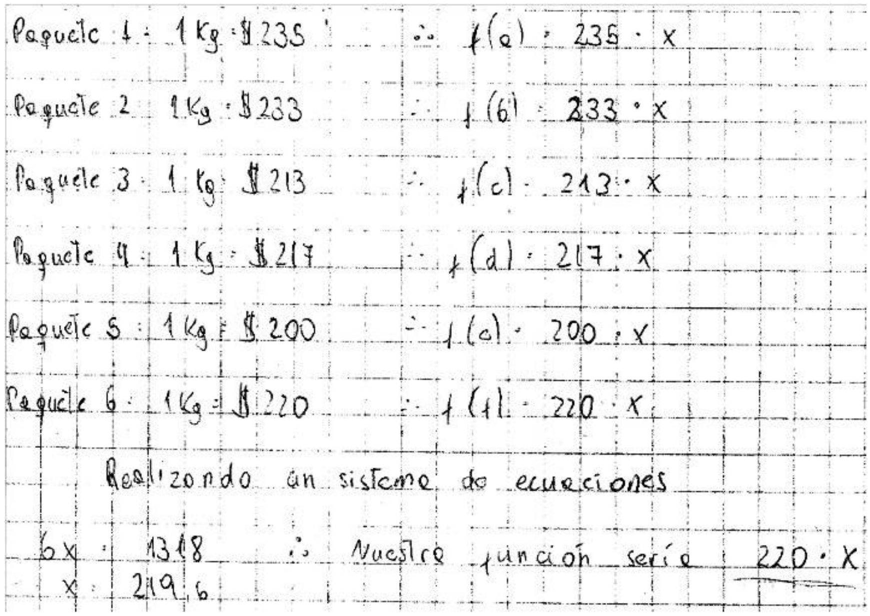
En el tratamiento matemático, desde un principio se observó un sentimiento de frustración de no poder apartarse de un enfoque acostumbrado para tratar de comprender la situación:

> *"Frustración, que no llegaba al resultado. Llegar al valor de los 10 kilos que nunca lo pude encontrar perfecto, nunca pude encontrar un valor único para eso…ahí se veía que eran desproporcionales"* (Octavio).

La idea de definir un precio para 10 kg que haga intervenir el promedio de los precios unitarios les llegó de forma espontánea al no tener un modelo conocido que represente a esos valores:

> *"O sea, era lo más lógico al no tener un modelo a seguir entonces había que sacar un promedio, es lo que se me ocurrió…"* (Octavio).

En esta etapa de la actividad en que debían realizar un planteamiento de la situación para vincular los datos de las diferentes combinaciones de paquetes y proporcionar sentido de acuerdo a esos valores, simplifican la tarea recurriendo directamente al método proporcional. Se apoyaron de esta manera en una ecuación que esencialmente vincula los precios unitarios con el promedio de estos valores.



Paquete 1 : 1 kg : $235 ∴ f(a) : 235 · x
Paquete 2 1 kg : $233 ∴ f(b) 233 · x
Paquete 3 · 1 kg $213 ∴ f(c) · 213 · x
Paquete 4 : 1 kg : $217 ∴ f(d) : 217 · x
Paquete 5 : 1 kg : $200 ∴ f(e) · 200 : x
Paquete 6 : 1 kg : $220 ∴ f(f) : 220 · x
Realizando un sistema de ecuaciones
6x : 1318 ∴ Nuestra función sería 220 · x
x : 219,6

(Pedro)

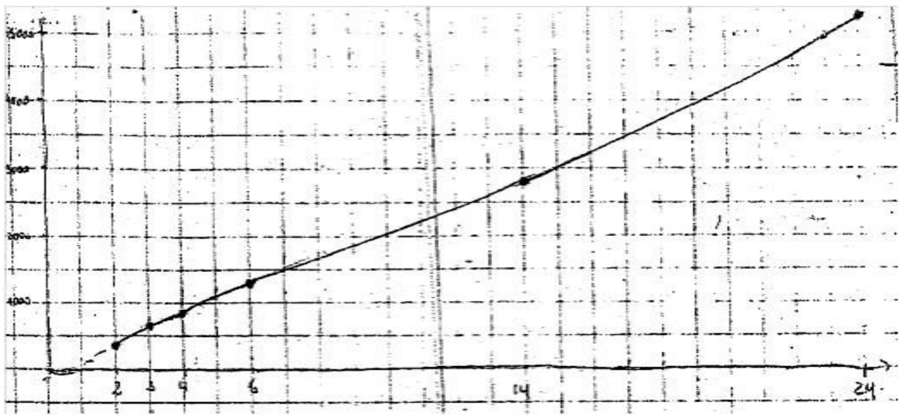
Figura 24. Aproximación al modelo lineal

> *"… no tenían relación, entonces había que encontrar una función más genérica que pudiera relacionar todo, era como mi función, entonces por cada cantidad de paquetes lo multiplicaba por ese valor* [el promedio de los valores unitarios] *y llegaba como a un precio y ese precio era como el general."* (Pedro).

Para aproximarse a la situación y reducir su complejidad, describen el cambio de precio con un modelo simple y eficaz: *costo* = *cantidad* × *precio unitario*. No sintieron ninguna tensión de tratar de simular operaciones de combinar y descomponer valores para tratar de explicar el fenómeno de la incoherencia entre los precios.

Del lado de la representación gráfica constataron que los valores de la tabla debían ser asociados a una relación proporcional y ajustan la curva en el punto $(0, 0)$:

> *"…entonces como lo único que se puede observar que a medida que aumenta el paquete…no se puede observar cómo, tan claro la diferencia aumenta, porque obviamente, por ejemplo, después del paquete 6 se va al 14 y después al 24, como que el cambio no va tan seguido como en los primeros paquetes, entonces se ve solamente que va aumentando a medida que aumenta la cantidad de paquetes"* (Pedro).



(Pedro)

Figura 25. Ajuste quasi-lineal de la curva en el $(0, 0)$

> *"Ah, aquí en la gráfica fue tal cual decía la tabla, para 2 kilogramos cuál era el precio que correspondía? 470. Es así que me dio como una especie de una recta…o algo parecido"* (Pedro).

La curva la aproximan a una relación lineal, es decir tratan de todas maneras buscar un modelo proporcional que responda a la situación, pero no se pronuncian sobre las características de esta propuesta de modelo si se adecua o no a esa realidad. En el contexto del vendedor de querer mantener los precios de los paquetes de 14 kg y 24 kg operan de manera coherente, pero con otro dominio de validez que no incluye a esos dos valores, orientan un modelo que presumen ajustable a la situación:

> *"Si los precios del vendedor no tienen un valor unitario específico con el sistema calculado anteriormente por cada valor unitario, el modelo desarrollado debería funcionar para lo que desee el vendedor"* (Pedro).

Para Octavio la propiedad mágica del precio unitario promedio debía funcionar:

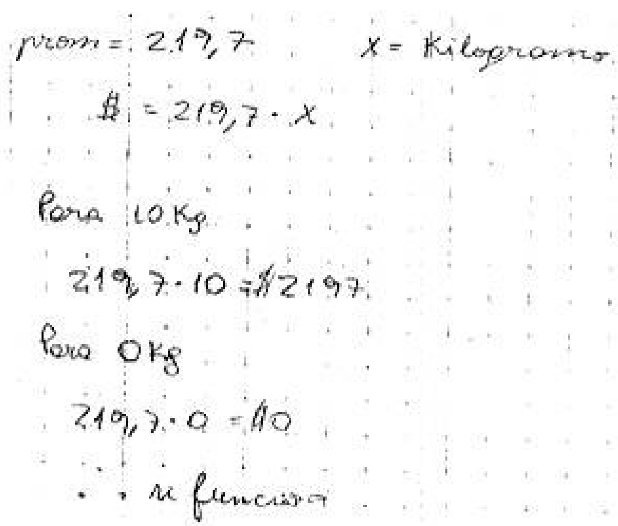
> "*Ah, porque funcionaba para todos los kilos siempre que fuera un* [valor] *promedio"* (Octavio).

El hecho que esos valores de 14 kg y 24 kg quedaran fijos y al no quedar considerados en el proceso del promedio, el tipo de relación elegida no podría funcionar para los deseos del vendedor:

> *"Ah, porque…decía que tenía que mantenerse el de 14 y 24 y yo al sacar el promedio no tomé en cuenta los 14 y 24, como decía al principio, entonces no me iba a funcionar para los 14 y los 24 kilos la función que yo me había definido antes, que era los 219,7 por el kilo"* (Octavio).

Se focalizan en un modelo proporcional desde un punto de vista pragmático en base a las características de un modelo que responda a la situación, o que se aproxime a ella. Es decir, realizan una conexión casi automática entre la tabla de valores y la proporcionalidad.

Disponen entonces de un modelo parcial obtenido por regresión así como de las relaciones proporcionales que expresan bien la variación de los precios y los kilógramos:



(Octavio)

Figura 26. Validación del modelo fuera del contexto del vendedor

Así pues, Octavio y Pedro, formulan un modelo de manera independiente al propósito de la actividad. Recurrieron directamente a la proporcionalidad para eliminar la complejidad de la incoherencia de los resultados, dispensando así la necesidad de percibir el modelo general. Esto explica por qué estos estudiantes ignoraron las restricciones que puso el vendedor, buscaron la eficacia en el modelo proporcional, y no se complicaron con la evaluación ni retroacción de sus cálculos y resultados. El uso del precio unitario promedio en el modelo proporcional se puede aparentar a una regresión lineal sobre los valores de la tabla con el fin de predecir. Consiguen acercarse a todos los objetivos con un modelo aproximativo de la situación, se quedan a nivel de la situación de manera pragmática, y no entran en consideraciones estructurales sobre las propiedades del modelo.

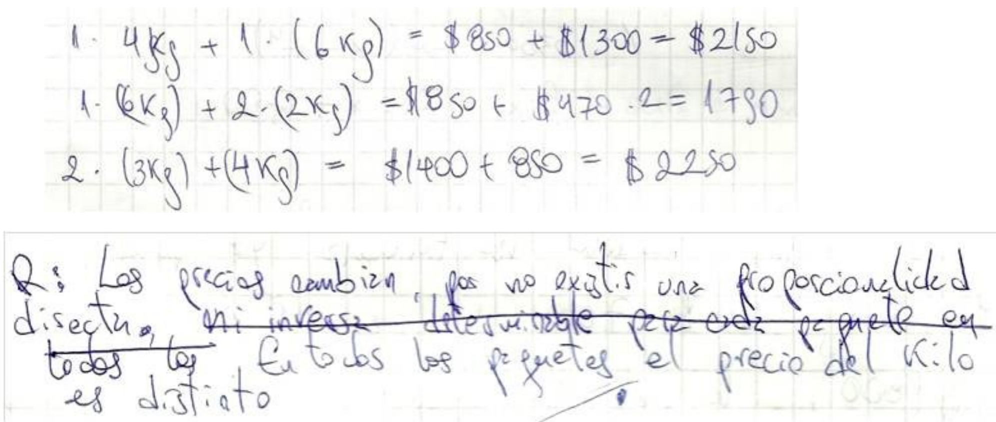
Características:

- Suponen un modelo proporcional en la tabla de valores.
- Se basan sobre los números y la geometría analítica para ilustrar el método proporcional.
- Predicen los valores por el sentido de un modelo predeterminado (proporcional).
- Interpretan la realidad sin juzgar las condiciones del contexto inicial.
- Reducen con promedios la complejidad de la situación para mantener el modelo proporcional.
- No entran en consideraciones estructurales sobre las propiedades del modelo lineal.
- No sintetizan resultados para proporcionar respuesta en el contexto de la situación.

Perciben la situación de forma pragmática para vincular propiedades lineales y aplicación pero sin haber desarrollado en ello la coherencia del modelo con el contexto del problema. Para conferir sentido a los resultados se sitúan en un modo de regresión lineal, ubicándose a nivel de comprensión.

Equipo 3: Emilio y Fernando, para intentar acceder a la complejidad de la situación, buscan estructurar sobre las proporciones tratando de asegurar la coherencia entre este dominio y la situación. Buscan regularidades, proponen hipótesis e intentan validar el modelo lineal como el modelo que representa mejor la situación. Un razonamiento de tipo lineal se ve implícitamente reflejado cuando replantean los valores en torno a una variable en común: el precio unitario, haciendo más eficiente la interpretación de los datos en función del contexto.

La predisposición que tienen al proceso de modelización los llevará a buscar una regularidad al visualizar la no proporcionalidad en la tabla de valores cuando intentan relacionar los datos. Irregularidad que en sí misma les basta para explicar las incoherencias que resultan de las distintas combinaciones para 10 kg:



(Emilio)

Figura 27. Justificación del modelo lineal

El pensamiento lineal está implícito en Fernando cuando esperaba ver una regularidad salida de un sentido particular de la vida real integrada en la actividad:

> *"Primero vi la tabla y que estaba la relación de paquetes, la relación paquetes-precios, pero ya se notaba que no era una relación constante, si uno dividía el precio por la cantidad de paquetes, digamos un promedio constante por cada kilogramo que hay, entonces comencé ya, lo primero que pedía era 10 kilogramos, comencé a hacer las posibles combinaciones y ver cuál era más rentable en relación al precio-cantidad"* (Fernando).

Quiere una combinación de paquetes lo más conveniente posible. Es por la actividad, en esta parte de la tarea les hace representar gráficamente los valores de la tabla, que lo lleva a apreciar de manera global el carácter no constante de la razón de cambio, y a refinar un poco ese intento:

> *"Matemáticamente ahí no se puede insistir en eso, porque ya en la segunda parte cuando había que graficar ahí me di cuenta que no era constante, si uno promediaba los precios y tomaba lo que correspondería a cada kilo los precios van aumentando, disminuye en el caso de 14 y después suben un poco"*(Fernando).

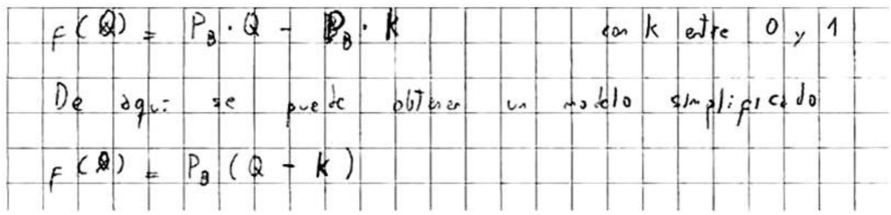
Como estrategia matemática, en el intento de aproximarse a la realidad del vendedor, Fernando propone espontáneamente que "*a mayor cantidad de kg el precio unitario es menor"* que es una característica que él observa de la realidad, y que se aleja del sentido lineal:

> *"Es que aquí ocupé lo de la conclusión que yo tuve; que el precio disminuía conforme aumentaba la…, digamos el precio per cápita disminuía conforme aumentaba la cantidad, mientras uno tomaba un precio base"* (Fernando).

Si este análisis permanece indispensable para comprender la variación del precio unitario, debió complementarse con el análisis de la gráfica a la cual había tenido ya una confrontación. Pero su afán de hacer una interpretación real del fenómeno observado, lo lleva a insistir, y a poner en contribución un principio económico, en parte pragmático.

> *"La idea era un modelo que se aproximara a la realidad que quería el vendedor"* (Fernando).

Primero, propone un modelo proporcional que denomina "*modelo constante*" $f(Q) = P_B \cdot Q$ de precio base P_B. Luego, lo ajusta para considerar un descuento con una reducción que simboliza $P_B \cdot k$ (*k* constante entre 0 y 1). Descuento que no contribuye necesariamente a eso, ya que no logra relacionarlo con la variable cantidad, perdiendo el control de la validación de su reflexión inicial.



$f(Q) = P_B \cdot Q - P_B \cdot k$ con k entre 0 y 1

De aquí se puede obtener un modelo simplificado

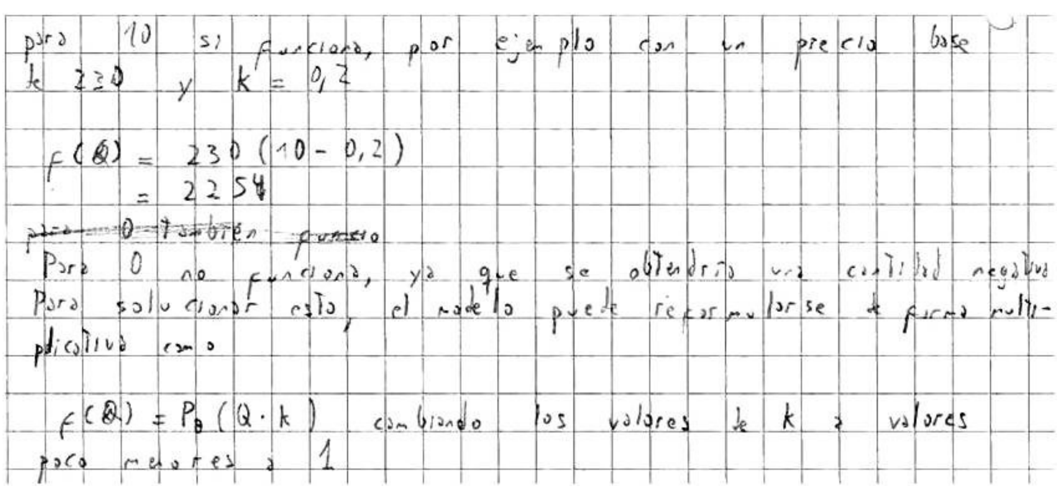
$f(Q) = P_B (Q - k)$

(Fernando)

Figura 28. Un modelo simplificado

> *"Sí entonces, después llegué a la parte que había que experimentar con ese modelo y tomé un…, digamos un valor arbitrario de 230 por 1 kilogramo y una constante de 0,2; un 20% de descuento y me dio un precio razonable, si uno lo toma comparando aquí viendo la gráfica, es como un precio cerca"* (Fernando).

Para 10 kg, para asegurar su modelo, conviene los valores del precio base y del descuento tratando de aproximarse al valor real. Pero, la incoherencia que se produce para 0 kg (cuando no se tiene la intención de comprar), esencial para la resolución del problema y para escoger un modelo más eficaz, le hace replantearse por una función más simple.



para 10 si funciona, por ejemplo con un precio base de 230 y k = 0,2

$f(Q) = 230\,(10 - 0{,}2)$

$= 2254$

~~pero 0 también funciona~~

Para 0 no funciona, ya que se obtendría una cantidad negativa. Para solucionar esto, el modelo puede reformularse de forma multiplicativo como

$f(Q) = P_B\,(Q \cdot k)$ cambiando los valores de k a valores poco menores a 1

(Fernando)

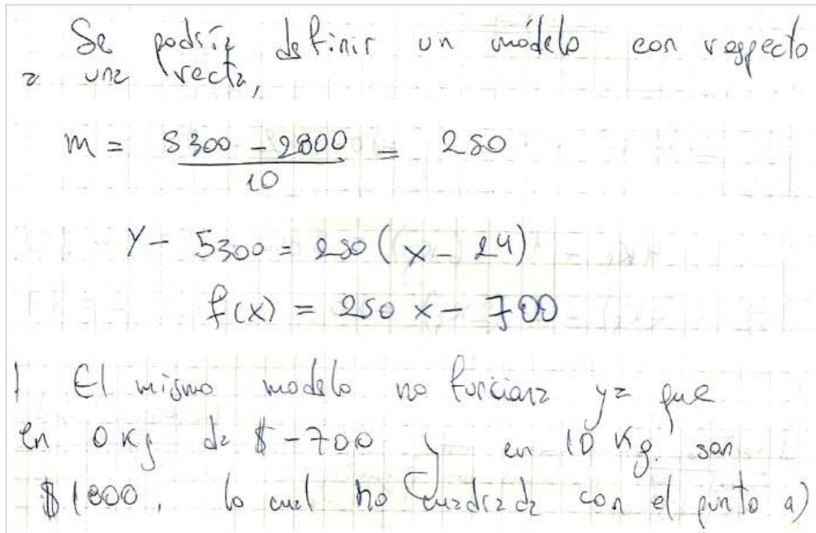
Figura 29. Reconciliación con el modelo lineal

> *"Después probé el modelo acá, pero me di cuenta que para los valores de 0 no funcionaba, como era como una resta aquí, si uno ponía 0 obtenía un valor negativo de precio, entonces ahí lo cambié por un modelo multiplicativo, que la cantidad se multiplicaba por una variable que decía cuánto se descontaba el precio original"* (Fernando).

Como el modelo no era pertinente para el punto $(0, 0)$, que incluso había precisado en la gráfica de la tabla de valores, decide entonces reformular el modelo e integrar esa condición lineal con la función $f(Q) = P_B \cdot (Q \cdot k)$ que llama "*modelo multiplicativo*" donde k representa una reducción que todavía intenta sostener. Pero, como quiere un modelo multiplicativo, esto lo lleva a prescindir de la reducción, a mantener el precio unitario constante y a estructurar los valores en función del modelo multiplicativo:

> *"Es que este modelo sería lineal* [multiplicativo]*, si uno toma por ejemplo 10 sería lo mismo que si tomara 4 y tomara 6 y los juntara. También sería lo mismo que tomara dos de 5, un paquete de 2 uno de 3 y otro de 5, la linealidad de ese modelo como que lo hace más constante para los valores… un único precio"* (Fernando).

Emilio, para asegurar las exigencias del vendedor de mantener los precios de 14 kg y 24 kg, intenta representar la situación con la recta que pasa por los dos puntos $(14, 2800)$ y $(24, 5300)$ entregando un modelo afín, encontrándose con dos incoherencias; una para 0 kg que obtiene un valor negativo y la otra, para 10 kg cuyo valor no corresponde al que había determinado previamente.


Se podría definir un modelo con respecto a una recta,

$$m = \frac{5300 - 2800}{10} = 250$$

$$Y - 5300 = 250(x - 24)$$

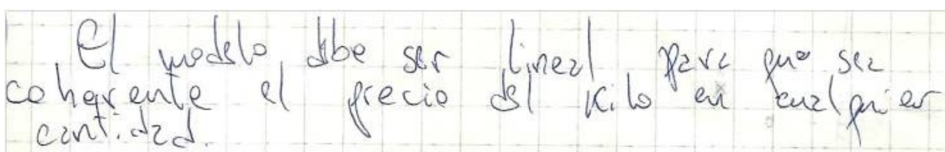
$$f(x) = 250x - 700$$

El mismo modelo no funciona ya que en 0 Kg da $-700 y en 10 Kg son $1800, lo cual no cuadra con el punto a)

(Emilio)

Figura 30. Evaluación del modelo lineal

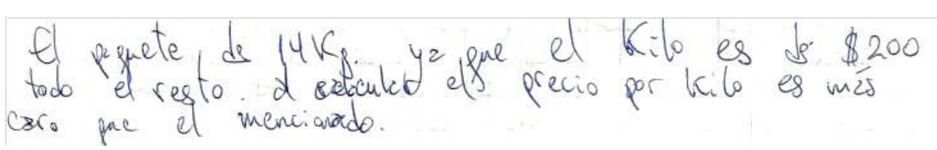
Esta puesta en relación lleva a Emilio a reconsiderar el modelo lineal como el más pertinente en cuanto a la coherencia entre los precios y que dé un precio único.


El modelo debe ser lineal para que sea coherente el precio del kilo en cualquier cantidad.

(Emilio)

Figura 31. Coherencia del modelo lineal

Para ambos estudiantes la concepción lineal se encuentra presente al momento de establecer el paquete más económico cuando comparan uniformemente los precios. En cierto sentido, frente a la complejidad de los valores de la tabla, al tratar de relacionar los precios, la linealidad que proviene de la proporcionalidad les facilitó esa tarea:


El paquete de 14Kg. ya que el kilo es de $200 todo el resto al calcular el precio por kilo es más caro que el mencionado.

(Emilio)

Figura 32. Utilización del modelo lineal

En resumen, aunque Fernando se haya perdido en la modelización del descuento, ambos estudiantes desarrollan un nivel de estructuración favorecido por un modo de razonamiento de la no proporcionalidad de los precios en la tabla. Formulan el modelo lineal como el más eficaz de los métodos disponibles, unificando coherentemente los valores con un precio unitario único, pero el modelo lineal no puede satisfacer las exigencias del vendedor.

> *"El vendedor desea mantener los precios de 14 y 24 pero como es un modelo lineal* [multiplicativo] *y las cantidades aquí no varían linealmente, es difícil mantener… cumplir los deseos del vendedor y a la vez mantener un modelo simplificado. Entonces, yo creo, que no se pueden mantener sus deseos; tiene que subir el valor de los 14 o bajar el valor de los 24"* (Fernando).

Características:

- Utilizan la linealidad para orientar la resolución del problema buscando un invariante unificador.
- Justifican sus resultados con las propiedades lineales.
- Establecen características de un modelo coherente y unificador.
- Identifican relaciones entre las variables.
- Interpretan la proporcionalidad en un contexto más general (funcional, linealidad)
- Explican contradicciones del modelo.
- Validan un modelo y resultados en el contexto.
- Traducen elementos de representaciones gráficas al marco lineal.

Establecen y justifican la organización del concepto en función de sus propiedades lineales. Desarrollan un pensamiento deductivo en la estructuración del concepto y reconocen su pertinencia en la unificación de los valores. En estas acciones, superan el nivel de estructuración.

Resumimos las principales características de los tres equipos y análisis global de las soluciones de estos estudiantes para cada actividad (páginas 207, 229, 252 y 271). Las explicitaciones observadas en el desarrollo de los resultados podemos asociarlas principalmente con la formación del concepto en la evolución del aprendizaje de la TL por estos estudiantes. De las relaciones entre los objetos, de sus formulaciones y de las representaciones asociadas a la TL se deja divisar la utilidad percibida de la noción.

Tabla resumen de las producciones

Equipos	**Características principales**	**Análisis global**
Equipo 1 Roberto/Tomás	Obtienen diferentes formulaciones del problema, poniendo en acción las propiedades lineales y técnicas de unificación de los resultados.	El interés por el razonamiento les lleva a valorar el modelo general lineal. La necesidad impuesta por la incoherencia de los valores los lleva a razonar de manera explícita en un proceso de deducción sobre propiedades lineales que interrogan, critican y resuelven la situación, apoyándose en la unificación de los resultados.
Equipo 2 Octavio/Pedro	Muestran un pensamiento pragmático y no entran en consideraciones estructurales sobre las propiedades del modelo. Suponen un modelo proporcional sin establecer las condiciones de su aplicación.	El interés por el enfoque procedural les lleva a evitar la validación del modelo teórico lineal con el repertorio dado de la situación. Pero de todas maneras intentan acercarse a la situación por un modelo proporcional.
Equipo 3 Emilio/Fernando	Sintetizan la proporcionalidad en un contexto funcional y general. Muestran un nivel de explicitación superior vinculado al uso del concepto. Organizan, validan y justifican sus resultados en cada etapa del desarrollo.	El razonamiento deductivo se apoya sobre propiedades lineales para justificar y explicar una organización general de los procesos lineales o de un método general que sintetice el concepto. Es decir, integran la unificación de la TL y expresan de manera explícita el modelo general.

4.6.2 Actividad 2: Rotación del plano

Sentido de la linealidad

En base a conceptos y procedimientos geométricos de carácter conocidos, esta actividad permitió a algunos estudiantes darse cuenta de la economía del proceso lineal cuando se vincula la rotación con el modelo lineal de $\mathbf{R}^2$ en el tratamiento local relacionado a la rotación $R_\theta(C)$. La experiencia de esta acción llevó a los estudiantes a conservar la estructura de combinación lineal por el sentido lineal del punto $P(x, y)$ para deducir la rotación de manera más eficaz que el método geométrico-trigonométrico.

***Equipo 1: Roberto, Tomás**,* buscan estructurar la rotación relacionando las coordenadas del punto que se quiere rotar en base a las propiedades lineales de $\mathbf{R}^2$ (espacio vectorial). Reconocen que el modelo lineal resuelve la rotación de C de manera eficaz e intentan extraer una estructura equivalente que respete ese principio lineal rotando los vectores canónicos, para establecer la rotación en un vector cualquiera. Demuestran autonomía en la matematización del problema percibiendo la economía del modelo lineal.

Se destacaron por la importancia concedida al modelo lineal desde el momento en que acceden a una cierta reflexión lineal respecto de la rotación del punto C:

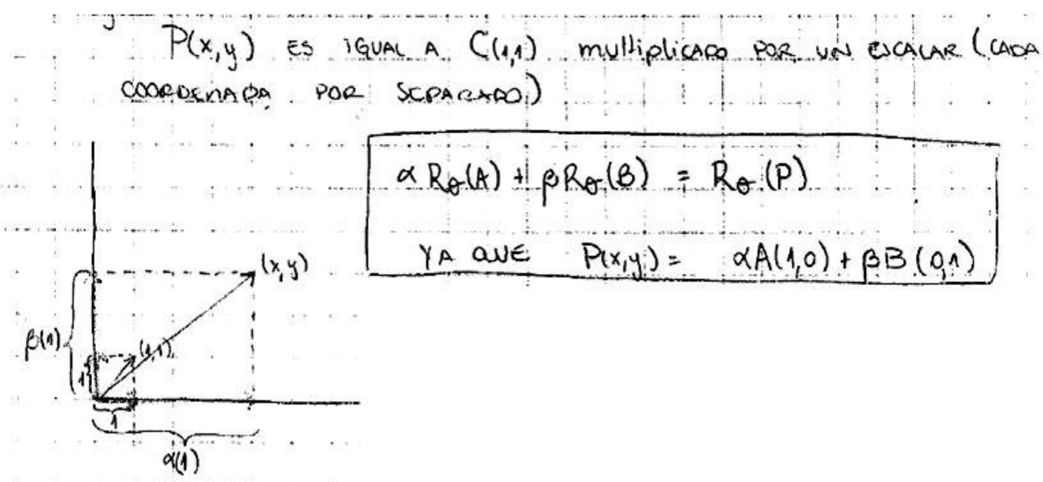
> *"…calculé la rotación de C con la fórmula que había despejado antes* [modelo geométrico-trigonométrico] *y me dio esa expresión de sus coordenadas ahí, entonces… la rotación de C era la suma de la rotación de A más rotación de B"* (Tomás).

> *"…primero me basé en el desarrollo anterior que teníamos del $(1,1)$ que al rotarlo… nuevamente C' iba a ser combinación lineal del x' e y' tanto así como el C con el que empezamos que también es combinación lineal del x e y, se podía apreciar eso, que había una… que jugaba un rol importante, eso que era combinación lineal"* (Roberto).

La vinculación que hacen de la rotación $R_\theta(C)$ (modelo geométrico-trigonométrico) con la combinación lineal de los vectores canónicos rotados $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ pasa a ser completamente esencial para la rotación $R_\theta(P)$. Tomás basa su razonamiento en la representación lineal de $P(x,y)$ para reproducir el modelo lineal en $R_\theta(P)$: rota los vectores basales conservando las coordenadas y la estructura lineal de la representación de $P(x,y)$.

> *"…pensé que la rotación de P era lo mismo que rotar solo las componentes de P, o sea, la rotación de A y la rotación de B estaban multiplicadas por un escalar que hacían como un caso general de la rotación de las componentes canónicas. Entonces alfa veces la rotación de A más beta veces la rotación de B iba a ser la rotación del punto P, porque P era combinación lineal de alfa veces A y beta veces B."* (Tomás).

Interpreta gráficamente la rotación de *P* en el sistema ortogonal obtenido de la rotación del sistema canónico, de la misma forma que la representación gráfica del punto *P* en el sistema canónico.



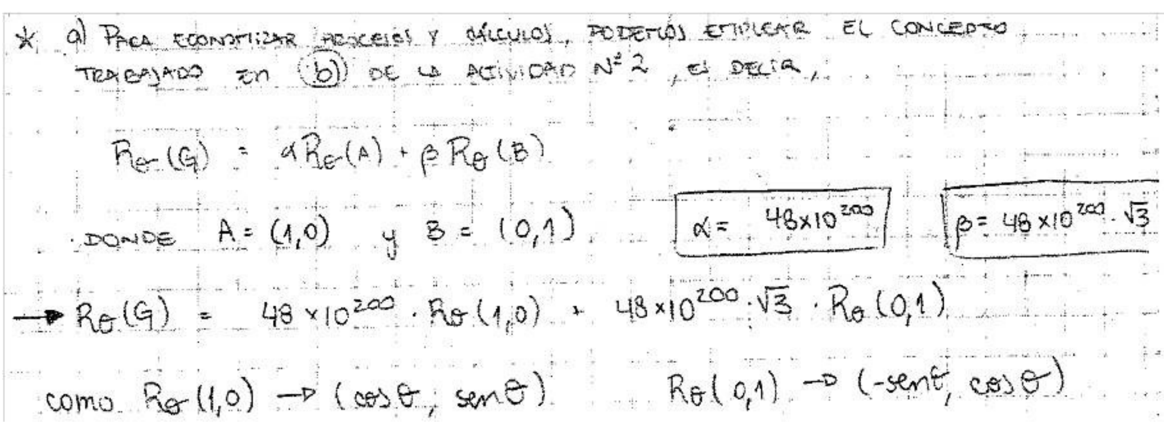
(Tomás)

Figura 33. El modelo lineal a partir de la propiedad lineal de $\mathbf{R}^2$

Tomás intenta estructurar $R_\theta(P)$ sobre la descomposición vectorial $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ de $P(x, y)$ y sitúa su atención en las rotaciones $R_\theta(1, 0)$ y $R_\theta(0, 1)$ aplicando el mismo principio, pero en el nuevo sistema de coordenadas. Traduce entonces $R_\theta(x, y)$ como la suma vectorial de $xR_\theta(1, 0)$ e $yR_\theta(0, 1)$ cuando nos dice: *"... pensé que la rotación de P era lo mismo que rotar solo las componentes de P..."* es decir, $R_\theta(x, y) = xR_\theta(1, 0) + yR_\theta(0, 1)$ Si bien parece intuir el vínculo directo entre esa última expresión y $R_\theta\big(x(1, 0) + y(0, 1)\big)$ no se sabe realmente si utiliza la maestría de la TL en esa relación.

> *"...luego, la rotación de un vector que estaba compuesto por otros vectores* [vectores basales] *era lo mismo que rotar esos otros dos..."* (Tomás).

Aunque queda por reconocer que comprende el rol de esta relación lineal cuando la aplica para resolver la rotación $R_\theta(G)$; en la escritura vemos cómo expresa haber apreciado una economía "*de procesos y de cálculos*" del hecho de utilizar este concepto:



* a) PARA ECONOMIZAR PROCESOS Y CÁLCULOS, PODEMOS EMPLEAR EL CONCEPTO TRABAJADO EN (b) DE LA ACTIVIDAD N° 2, ES DECIR,

$R_\theta(G) = \alpha R_\theta(A) + \beta R_\theta(B)$

DONDE $A = (1,0)$ y $B = (0,1)$ $\boxed{\alpha = 48\times 10^{200}}$ $\boxed{\beta = 48\times 10^{200}\cdot\sqrt{3}}$

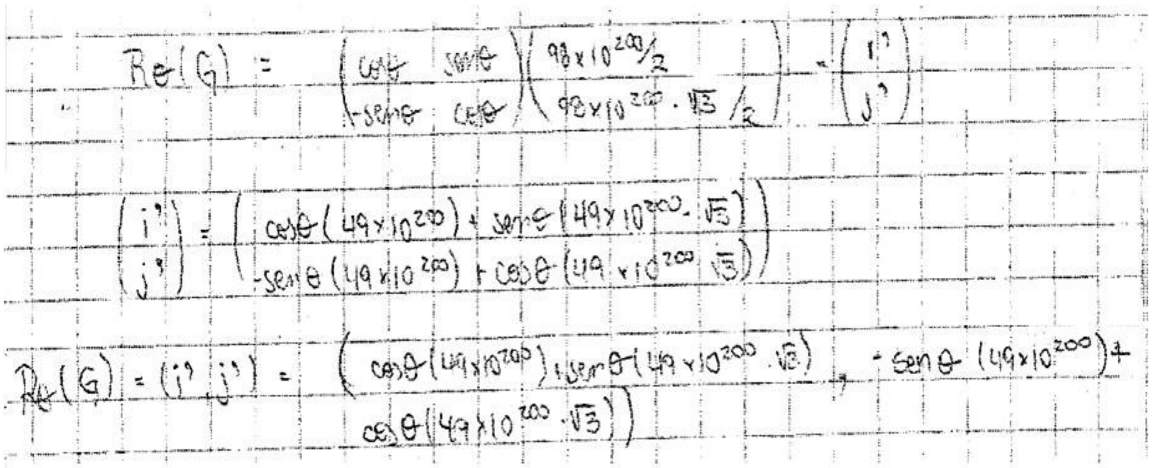
$\rightarrow R_\theta(G) = 48\times 10^{200}\cdot R_\theta(1,0) + 48\times 10^{200}\cdot\sqrt{3}\cdot R_\theta(0,1)$

como $R_\theta(1,0) \rightarrow (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $R_\theta(0,1) \rightarrow (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

(Tomás)

Figura 34. Economía del modelo lineal

Además, Tomás valida este resultado con la representación matricial que hace de la rotación R_θ. Análisis que le permite pasar del modelo geométrico al modelo algebraico haciendo una posible abstracción más avanzada para la rotación.

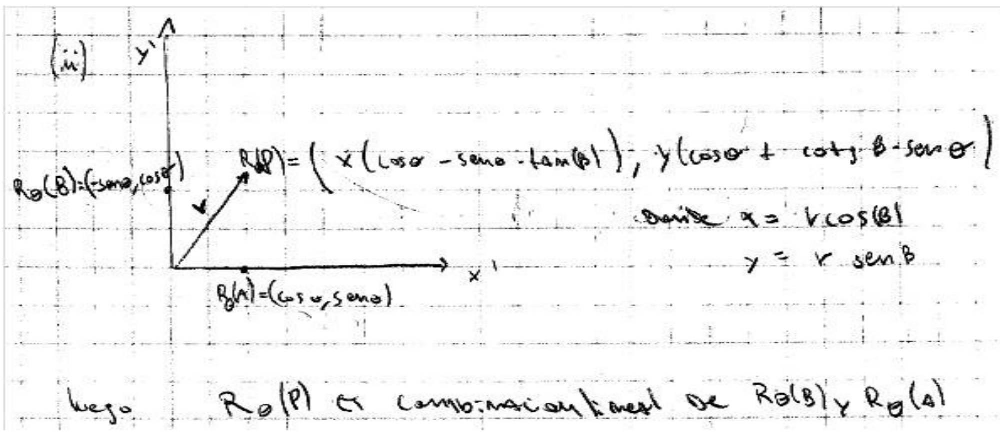


(Tomás)

Figura 35. Validación de la representación matricial

> *"Es que al resolver esa matriz me volvía a dar el mismo resultado que había encontrado antes, entonces había comprobado que al multiplicar esa matriz* [matriz representación] *por sus componentes* [de G] *me iba a dar lo mismo que al calcular geométricamente el* G *rotado"* (Tomás).

Este enfoque es compartido por Roberto que "*al rotar también debería cumplirse la misma condición"*, ó sea, que el rotado de *P* preserva la estructura de combinación lineal que presenta *P*.

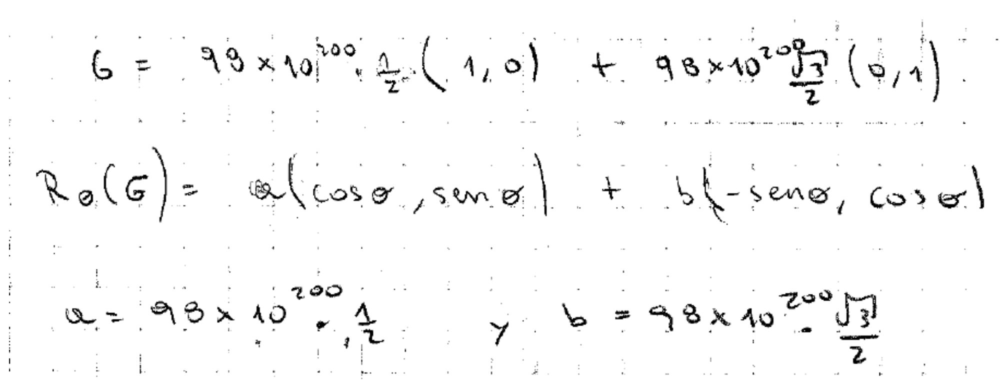


(Roberto)

Figura 36. Conservación de la combinación lineal

> *"… el P vendría siendo igual como el rotado de* C *lo único que en* C' *ya sabíamos el valor inicial que tenía antes de ser rotado, pero el de P no, y como se llama…ehh… si esos dos cumplen que son igual combinación lineal, también se tiene que cumplir para el punto P rotado, también tienen que ser igual combinación lineal"* (Roberto).

Roberto explica la rotación $R_\theta(P)$ mediante la "*mantención de la combinación lineal*", como una característica estructural de la rotación, tampoco se sabe si la vincula directamente con $R_\theta\big(x(1,0)+y(0,1)\big)$. Esta exploración lo lleva a valorar la eficacia del modelo lineal y concibe que para determinar la posición de $R_\theta(G)$ sólo basta conocer las coordenadas de G:



(Roberto)

Figura 37. Utilización del modelo lineal

> *"…la rotación en G iba a mantener los dos escalares pero solamente cambiaban las coordenadas de los vectores unitarios" (Roberto).*

Así que, para estos estudiantes no hay ninguna necesidad de usar el modelo geométrico-trigonométrico, el encuentro con el modelo lineal es conceptualmente más económico para encontrar la rotación de un punto. Ellos dicen haber apreciado el hecho de poder ver por la rotación de los vectores canónicos la utilidad de la linealidad, lo que les habría llevado a comprender mejor este concepto y a sacar sus propias conclusiones sobre la eficacia del modelo:

> *"Es que, si se está en un plano y se tiene un vector, poder separarlos en sus componentes y hacer operatorias con esas componentes, es más fácil la operatoria que sobre un vector"* (Tomás).
>
> *"Con el método así* [método geométrico-trigonométrico] *a lo mejor hubiese sido más largo, y la linealidad me permitió simplificar ese proceso"* (Roberto).

Después de eso, estos estudiantes fueron capaces de imaginar el modelo lineal en un contenido diferente para juzgar sobre su validez y reflexionar sobre las condiciones de su aplicación. De manera natural un cierto cuestionamiento se revela necesario sobre el método utilizado y los límites de lo que se había aprendido: la posibilidad de generalizar el concepto emerge dentro del mismo contexto geométrico.

Tomás evoca al modelo lineal para transferirlo a una situación física cuando expresa "*trabajar las componentes separadas*" y que "*luego las juntaba*"… esa sería su forma de cómo está comprendiendo la linealidad en una situación de poleas estudiada en el curso de Física.

> *"Por ejemplo en Física, cuando trabajamos con poleas móviles, había que cambiar el ángulo en que ejercía la fuerza de la tensión, entonces ese cambio de ángulo era una rotación, lo que nos explicaba la profesora, pero no nos explicó, no entró a detallar, cómo se calculaba esa, porque era mucho más fácil trabajar las componentes separadas. Hacía esos cambios y luego al final las juntaba, porque eran varias operaciones, a una sola. Entonces, si lo separaba eran operaciones por coordenadas que era mucho más fácil, tal vez era mucho más largo, pero más fácil que calcularlas así* **…***(como un todo) "*(Tomás).

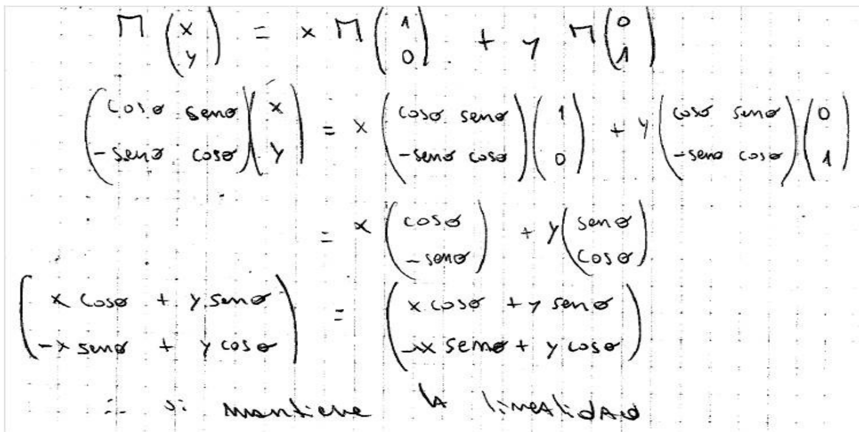
Saca del experimento una heurística general de resolución del problema: frente a un problema complejo se lo descompone en problemas más sencillos y luego se juntan las soluciones, y es exactamente lo que nos permite la TL. Por su parte Roberto intenta desarrollar una idea unificadora cuando compara esta experiencia con la actividad anterior "*en busca de un modelo*", ilustrando la articulación didáctica entre las tareas:

> *"Se supone que este* [la rotación de *P*] *es como… por lo menos lo que pienso yo, que sería como el f de la función de los paquetes que tiene que ser igual a la función de un paquete más el otro paquete y que sería como la suma de los precios, sería como la misma idea pero ahora trabajando con rotación"* (Roberto).

Parece sensible a la estructuración lineal de ambas actividades; reconstruye el modelo por el sentido lineal de la suma de los paquetes y comprende por analogía, que éste no viene dado necesariamente con la proporcionalidad directa, sino que también con una transformación geométrica que preserva la estructura lineal de $\mathbf{R}^2$.

En el plano matricial, la representación matricial viene a complementar el pensamiento lineal ya que no se trata de cualquier representación por la información que sintetiza: la acción de la rotación y su linealidad, así que la verificación de la linealidad sugerida de ella no es al azar. Diremos entonces en adelante, que estos dos tipos de conocimientos deberían ser considerados como inseparables y complementarios en el sentido de Sfard (1991). Lo que llevó implícitamente a Roberto a sentir la necesidad de ver si la propiedad *"conservación de las combinaciones lineales"* le funcionaba de manera matricial:

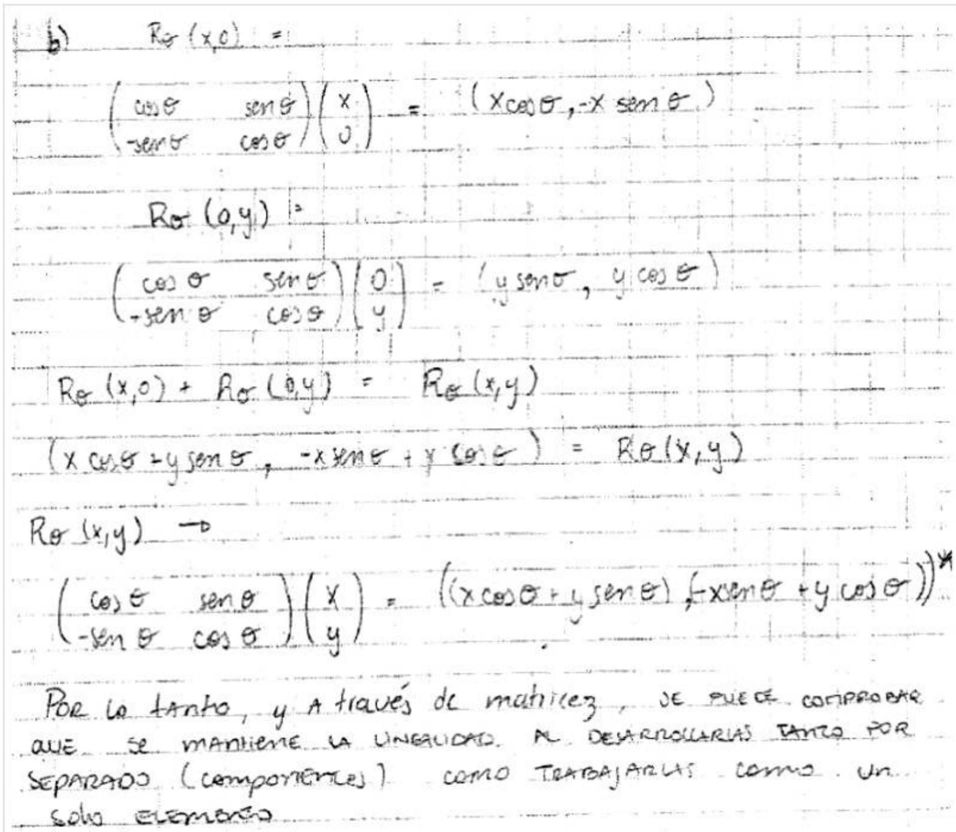
"Necesitaba ver si realmente se mantenía la linealidad con la matriz…y llegué a lo mismo, a los dos lados llegué a lo mismo, a una igualdad de matrices, entonces de esa forma me pude dar cuenta que se mantiene la linealidad" (Roberto).



(Roberto)

Figura 38. Validación del modelo matricial lineal

Aunque tenían otro punto de vista de ver la linealidad, que les hizo apreciar "*la conservación lineal*" con las matrices, se observa un falso sentimiento de prueba y no se dan cuenta que eso hubiera funcionado con cualquier matriz. En el reconocimiento de un nivel general de las matrices, para distinguir de manera clara, lo que viene con la rotación y lo que va con la matriz en la multiplicación por un vector, se necesita una clase para la institucionalización del rol de la linealidad.



b) $R_\theta(x,0) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = (x\cos\theta, -x\operatorname{sen}\theta)$$

$R_\theta(0,y) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = (y\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta)$$

$$R_\theta(x,0) + R_\theta(0,y) = R_\theta(x,y)$$

$$(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) = R_\theta(x,y)$$

$R_\theta(x,y) \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ((x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta), (-x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta))^{*}$$

Por lo tanto, y a través de matricez, se puede comprobar que se mantiene la linealidad al desarrollarlas tanto por separado (componentes) como trabajarlas como un solo elemento

(Tomás)

Figura 39. Comprobación de la mantención lineal matricial

La idea de aplicación lineal está presente cuando en la verificación de la linealidad de la representación matricial, él realiza la propiedad aditiva comparando la adición de los términos matriciales $R_\theta(x,0)$ y $R_\theta(0,y)$ (que llama "componentes") con la expresión general $R_\theta(x,y)$ (que llama "como un solo elemento"). En los cambios de marcos observamos en la escritura, que el marco de geometría analítica interfiere en el algebraico el falso sentimiento de seguridad que viene de la comprobación de la linealidad del producto entre matriz y vector.

La definición matricial de la transformación constituye en sí la síntesis obtenida en el contexto funcional de la TL, haciendo posible el uso algebraico, este último hecho llevó a Tomás a valorar la utilidad aportada por esta nueva representación. El interés por la matriz de poder sintetizar procedimientos desarrollados por la rotación, lo llevó a descubrir la utilidad de su aplicación cuando validó el resultado de la rotación $R_{\theta}(G)$ con la representación matricial:

> *"Facilita por ejemplo… en una rotación yo no sabía qué tenía qué hacer, entonces a empezar a juntar cosas y usando las propiedades, llegar al cómo usar la matriz de rotación, parecía mucho más fácil y entretenido a la vez el tener que hacerlo yo, encontrarla yo a que me la den, y tener que aprender cómo usarla"*(Tomás).

Vemos una confirmación de sus intereses matemáticos, ya que él nos había informado preferir descubrir y utilizar nuevos conceptos:

> *"Aunque aprendizaje de aprender cosas nuevas, la rotación me dio más información, o sea, cosas que no sabía que podían pasar"* (Tomás).

> *"La rotación para lo algebraico entregó más, más resultados, o sea, cosas nuevas… porque cuando lo desarrollé llegué a varias cosas que estaban, que al momento de calcular me pareció más fácil la geométrica que la algebraica, pero luego no…"* (Tomás).

Características:

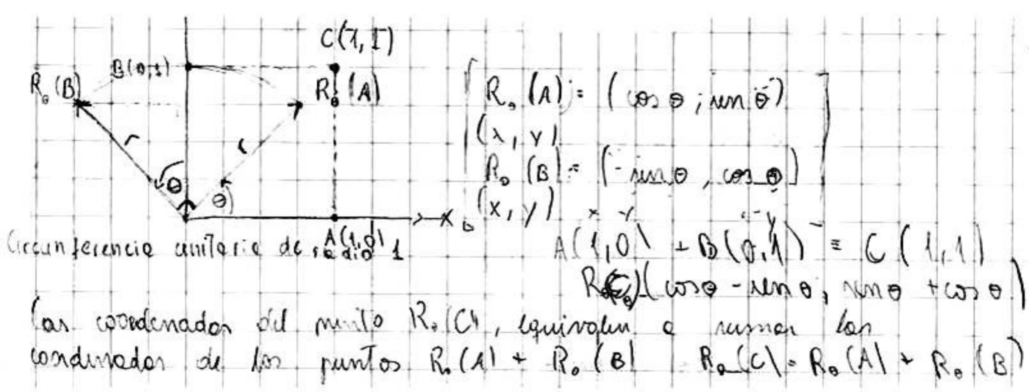
- Estructuran el modelo lineal geométricamente.
- Justifican las condiciones de aplicación del modelo lineal en situaciones diferentes (física, proporcionalidad).
- Muestran autonomía en la modelización del problema.
- Traducen la linealidad de la rotación a través de la mantención de las combinaciones lineales.
- Establecen relaciones lineales del procedimiento geométrico en vías de estructurar un modelo lineal como una forma más general de calcular la rotación.
- Comprenden la función del modelo lineal y lo aplican para calcular de manera eficaz la rotación.
- Validan sus resultados con la representación matricial de la rotación.

- Intuyen la TL como una transformación en coherencia con una estructura de espacio vectorial.

Estructuran en función de la invariancia de combinación lineal, y se convencen de la eficacia y economía del modelo lineal. Transfieren propiedades subyacentes procediendo a sintetizar la TL de manera general sobre los basales, con indicios de reformulación.

<u>Equipo 2: Octavio y Pedro,</u> dan mayor énfasis a la rotación a nivel de puntos por medio de las coordenadas cartesianas, más bien que a nivel de vectores por la revisión de las propiedades lineales de $\mathbf{R}^2$. Conducen la linealidad de la rotación $R_\theta(C)$ por el resultado de la suma de coordenadas la cual validan con el modelo geométrico. Al no poder estructurar la rotación $R_\theta(P)$ por el sentido lineal, se sienten obligados a recurrir al modelo geométrico, sin poder advertir la invariancia de la estructura lineal de $\mathbf{R}^2$ por la rotación.

Para la rotación $R_\theta(C)$, interpretan la rotación de C por el modelo geométrico como una descomposición aditiva de las rotaciones de A y B, ven lo que "da" en la suma por coordenadas de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(A)$ y lo comparan con la rotación $R_\theta(C)$ en el sentido geométrico:



(Pedro)

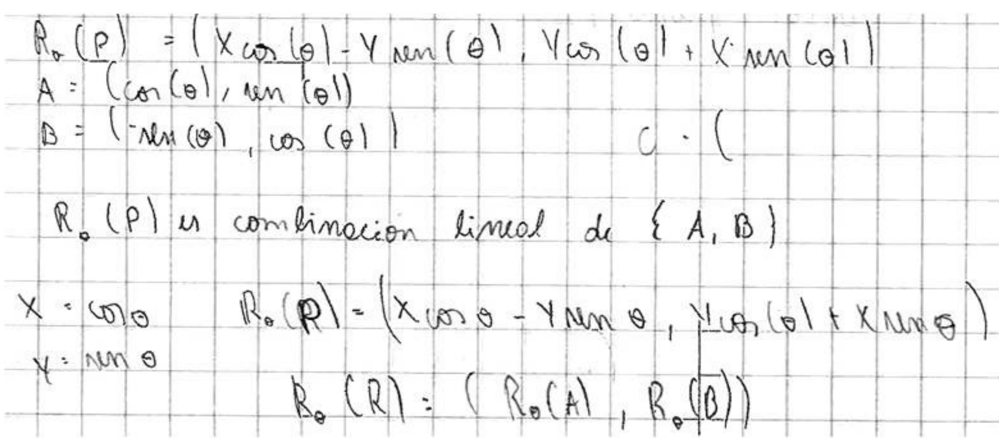
Figura 40. Confrontación con el modelo lineal

Aunque validan el modelo lineal en el sentido de las propiedades lineales numéricas que movilizan ahí, no garantizan un razonamiento lineal sobre un plan superior. En realidad, la descripción del carácter lineal les parece superflua:

> *"Con las coordenadas que dan ahí es fácil de hacer esto, el A es* $(1,0)$ *y el B* $(0,1)$ *la suma tiene que ser* $(1,1)$*, si fuesen coordenadas distintas no se podría saber"* (Pedro).

> *"Pero no es que como imaginárselo, sólo estamos ubicando el punto que es la suma de los dos y es sumar las coordenadas no tiene nada de… no le encuentro ningún grado de dificultad"* (Pedro).

En el paso del proceso geométrico al proceso lineal, no parecen mostrar mucho interés sobre el alcance de la expresión lineal tanto de C como de $R_\theta(C)$. No la tienen y no la usan en un trabajo de simplificación. Observamos en la rotación $R_\theta(P)$ nuevamente el mismo enfoque sobre las coordenadas. La familiaridad que tienen con las *n*-uplas no les otorga una idea clara de los vínculos entre la estructura vectorial del punto y la rotación del sistema de coordenadas, privándoles de un modelo alternativo al modelo geométrico:



(Pedro)

Figura 41. La rotación como combinación lineal

La dificultad para construir el modelo lineal $R_\theta(P) = xR_\theta(A) + yR_\theta(B)$ podría encontrar en parte su origen en la forma pragmática que estos estudiantes tienen de ver la situación al referirla a cuestiones específicas del contexto geométrico que le son más familiares. La idea de expresar y justificar por sí mismos el modelo lineal, les parecía complicada porque no disponían de métodos aplicables conocidos o sugeridos para trabajar la actividad bajo su propia responsabilidad. Estaban forzados a hablar de combinación lineal de la cual ellos tienen una intuición, la actividad les hacía sentir algo de combinación lineal, pero tienen el reflejo de trabajar a nivel de coordenadas.

Conviene reconocer además, el intento por interpretar en sus propias palabras el sentido que da a la rotación $R_\theta(C)$ como una primera forma de tratar de ir más allá de la fórmula geométrica:

> *"Yo creo que depende del ángulo por el que se rota, entonces si es el mismo ángulo y se rotan con las mismas cantidades de coordenadas... si es el* $(0,1)$ *y el* $(1,0)$ *tiene que llegar al otro, no hay como..."* (Pedro).

> *"Ah no sé, no sé relacionarlo matemáticamente, no como lenguaje matemático solamente la explicación, yo me entiendo por lo menos"* (Pedro).

Esta expresión espontánea constituye en sí una manera propia de entender el concepto: frente a la formalidad de la expresión que pone obstáculos a su comprensión lineal se basan en el principio de la acción realizada para $R_\theta(C)$, que procuran reconocer cuando tratan de validar $R_\theta(P)$ respecto de la situación geométrica inicial. Resumiendo, definen la rotación recurriendo directamente al resultado privilegiando el proceso al objeto (Sfard, 1991) pensando más en casos particulares que en reconocer el modelo.

La idea de definir una relación lineal para $R_\theta(P)$ como una combinación lineal de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ los lleva a plantear un sistema de ecuaciones lineales:

$$(X\cos(\theta) - Y\mathrm{sen}(\theta), Y\cos(\theta) + X\mathrm{sen}(\theta)) = \alpha(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta)) + \beta(-\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta))$$
$$X\cos(\theta) - Y\mathrm{sen}(\theta) = \alpha\cos(\theta) - \beta\mathrm{sen}(\theta)$$
$$Y\cos(\theta) + X\mathrm{sen}(\theta) = \alpha\mathrm{sen}(\theta) + \beta\cos(\theta)$$

(Octavio)

Figura 42. Una forma diferente de encontrar $R_\theta(P)$

"Sumé y me tenía que dar eso, con el modelo geométrico da eso, entonces quería buscar otra forma de encontrar eso" (Octavio).

$$\alpha = X$$
$$\beta = Y$$

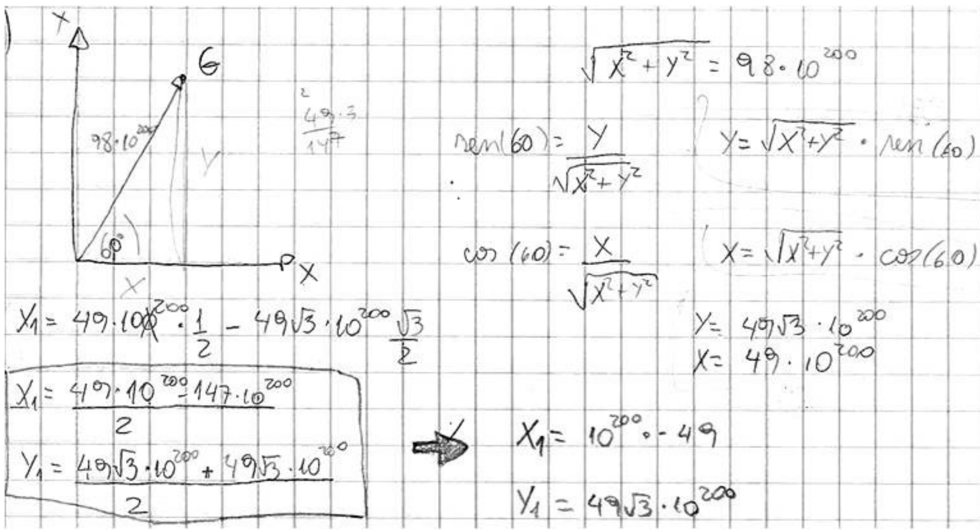
(Octavio)

Figura 43. Solución del sistema de ecuaciones lineales

"Cuando encontramos la relación de las nuevas coordenadas…ahí ocupé transformación lineal como combinación lineal, hicimos la combinación lineal…ehh que eran dos componentes distintos que los podíamos relacionar" (Octavio).

Este procedimiento estándar de expresar vectores como combinación lineal no los lleva a comprender necesariamente la estructura lineal, ni menos a concretizar un modelo lineal para $R_\theta(P)$. Se sienten reducidos a recurrir nuevamente al proceso geométrico-trigonométrico para calcular la rotación $R_\theta(G)$:

Para esta tarea, proponen un acercamiento procedural para resolver el problema; disponiendo las etapas convenientemente ordenadas:



(Octavio)

Figura 44. Un enfoque procedural

El hecho de no tener el modelo lineal les hace volver otra vez a las coordenadas. Se puede ver las huellas de un trabajo en que esencialmente se vinculan cálculos exactos y que difícilmente pueden movilizar las propiedades que el modelo pide. No parecen muy sensibles a la estructura que se puede sacar en función de la generalidad del modelo, para ir más allá de un problema resuelto.

> *"Pero para sacar eso* [$R_\theta(G)$] se *supone que necesitaba un ángulo que era el 60° y puedo reemplazarlo ahí, y ya con el seno de 60° y el coseno de 60° ya ahí se pueden encontrar valores numéricos"* (Pedro).

Casi es una expresión de felicidad al no tener que trabajar con valores indeterminados; la elección de un ángulo en particular le permite manipular la rotación según las fórmulas trigonométricas que dan economía en su pensamiento y no tener que proporcionar sentido al modelo trabajado. Su prisa por focalizar al nivel particular y por sustituir valores numéricos cuanto antes, podría ser interpretada como una dificultad de abstracción del modelo lineal.

Notamos además un sentimiento de frustración al no llegar al nivel de abstracción requerido por la tarea:

> *"No, obvio que veo que se rota en ciertos ángulos y todo, pero no sé cómo funciona, qué ejercicio hay que aplicar o si se ocupa alguna ecuación, algo de que se rote, qué pasa con las funciones, con el ángulo, con las coordenadas, todo eso no lo sé. Entonces yo no puedo llegar y hacerlo, necesito saber en qué se basa todo eso…"* (Pedro).

> *"Todo, como aún no lo vemos con el profe, entonces eso me costó, como no tenía un ejemplo ni ná…"* (Octavio).

Del lado matricial, con la ayuda del anexo (Anexo E) determinan la matriz de la rotación correctamente. Aunque verifican que las coordenadas de $R_\theta(x, y)$ son los coeficientes del producto matricial MX, no verifican la linealidad de esta representación. Lo que podría explicar la desvinculación entre la transformación y el carácter lineal de la representación, es decir, el tratamiento procedural de los aspectos geométrico y numérico prevalece desligado de las propiedades lineales del plano geométrico $\mathbf{R}^2$ (espacio vectorial).

Características:

- Interpretan la rotación a nivel de coordenadas (afín).
- Buscan comprender el modelo lineal en un trabajo específico con valores numéricos.
- Validan el modelo por el resultado y no por el sentido lineal.
- Trabajan con métodos familiares referidas al contexto geométrico (afín) a nivel de coordenadas.
- Luchan por establecer vínculos entre la rotación de un punto específico y la de un punto cualquiera para conferir sentido al modelo lineal.
- Muestran poca sensibilidad a las estructuras algebraicas que se puede sacar en función de la generalidad del modelo.

- Reducen la matematización del problema a la aplicación de métodos conocidos o sugeridos para obtener resultados.
- Disponen de una visión procedural para desplegar la solución.

Desarrollan el concepto por aplicación geométrica (afín) e infunden un sentido lineal ayudándose de coordenadas. Vinculan relaciones geométricas llegando a validar pero de manera específica. Se quedan a nivel de comprensión luchando por una estructuración.

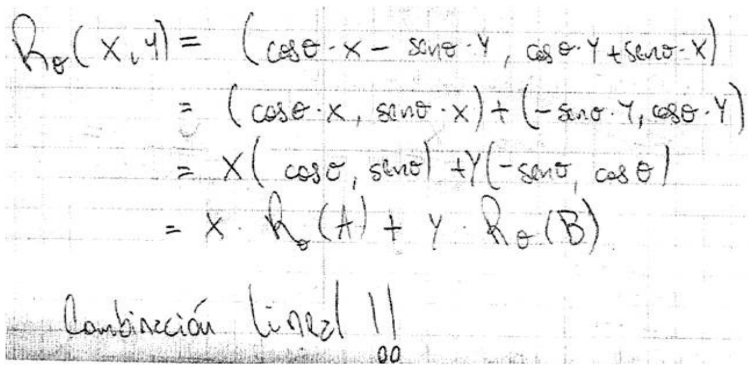
Equipo 3: Emilio, Fernando, muestran un cierto nivel de abstracción cuando reformulan de manera espontánea, de acuerdo a la estructura lineal de $P(x, y)$, la rotación $R_\theta(P)$ del método geométrico. La estructuración que deducen la justifican usando definiciones y propiedades lineales del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Se aproximan a una abstracción de la linealidad de $R_\theta(P)$ y no llegan a establecer un vínculo directo con la combinación lineal de $P(x, y)$ como un vector de $\mathbf{R}^2$.

En el razonamiento implícito en que determinan $R_\theta(C)$ de forma análoga a la estructura lineal de C, concerniente a los basales canónicos A y B (que Fernando llama "*componentes*" de C), trabajan $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ como las componentes basales de $R_\theta(C)$ en el nuevo sistema:

> *"...el hecho de que se pueden separar por componentes da que se pueden sumar las componentes de su rotación también"* (Fernando).

> *"el hecho de separarlas por componentes y después que la rotación de esas componentes se pudiera unir y fuera equivalente a la rotación de la variable sin que se hubiera separado por componentes, eso es ya la propiedad lineal"* (Fernando).

A partir del resultado geométrico, ellos buscan estructurar la rotación $R_\theta(P)$ aplicando propiedades lineales de $\mathbf{R}^2$ de manera de reencontrar la estructura lineal desplegada en $R_\theta(C)$:



(Emilio)

Figura 45. Reformulación espontánea de la estructura lineal

Se observa casi un sentimiento de felicidad al deducir la estructura lineal de la rotación, la que le permite acceder a un nuevo enfoque de resolución lineal para la rotación.

Esta modelización los lleva necesariamente a comprender la estructura lineal aprehendiendo el sentido económico que moviliza. Aunque producen la linealidad de manera local y parcial, ya que la relación lineal que deducen no la vinculan a $R_\theta(xA + yB)$, como una generalización explícita de la linealidad, eso les lleva de todos modos a alcanzar la rotación $R_\theta(P)$. Alentándose de esta manera la eficacia del modelo lineal.

Para determinar la posición de $R_\theta(G)$, Emilio reconoce esa utilidad que le hace "*ahorrar una gran cantidad de trabajo*" según él, y ejecuta bien el cálculo:

$$R_\theta(G) = x\cdot(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)$$
$$= 45\times 10^{200}(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) + 45\times 10^{200}\times\sqrt{3}(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)$$

Aplicando las propiedades d combinación lineal.

De esta manera se ahorra una gran cantidad d trabajo utilizando los resultados anteriores

(Emilio)

Figura 46. Economía del modelo lineal

En el contexto matricial, ambos estudiantes obtienen la representación matricial de la rotación dándole sentido a la linealidad de esta representación, cuya comprobación la realizan en un contexto abstracto manipulando algebraicamente las matrices. La verificación de la linealidad de la representación matricial produce también una retroacción frente a la expresión lineal $xR_\theta(A)+yR_\theta(B)$ como un medio alternativo de cálculo de $R_\theta(P)$ dando así un mayor sentido al rol lineal de la rotación. En este sentido se podría estar hablando de un inicio al nivel de reformulación.

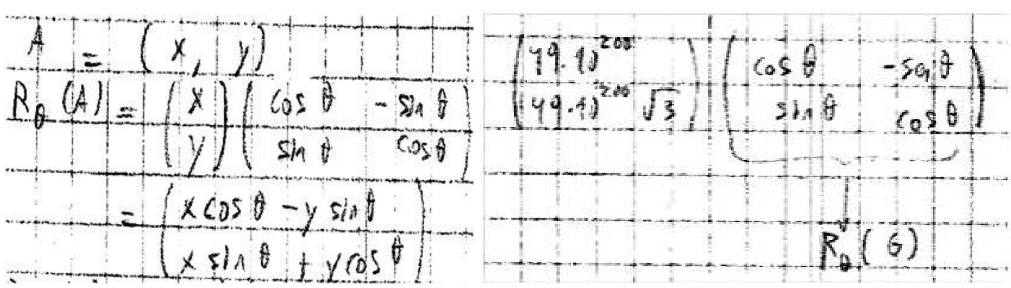
$$R_\theta(A) + R_\theta(B) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta + x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (x+x')\cos\theta - (y+y')\sin\theta \\ (x+x')\sin\theta + (y+y')\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$
$$= R_\theta(A+B)$$

(Fernando)

Figura 47. Comprobación de la propiedad lineal aditiva

Procede en un trabajo de estructuración que deduce de la transformación matricial de la rotación. En el dominio matricial conduce la propiedad lineal aditiva en analogía a la estructuración lineal de puntos, incorporando este conocimiento a la suma de matrices solamente.

Hay que añadir sin embargo que Fernando se equivocó en la expresión matricial de la rotación, no escribió bien el orden de los factores, pero eso no afectó su producto matricial:



(Fernando)

Figura 48. La rotación vista de manera matricial

> *"Aquí yo… fue problema de lectura ahí* [del Anexo E] *que tomé el orden cambiado"* (Fernando).

En el desarrollo de este resultado, expresa bien la rotación con la acción multiplicativa de la representación matricial, que es más abstracta. En este sentido esta representación está vista como una estructuración más conveniente para el tratamiento de la rotación:

> *"Aprendí como era, como se podía formalizar el proceso de la rotación, que se podía por ejemplo, simplificar todo con una matriz de rotación que hacia todo el trabajo algebraico que uno debería haber tenido que hacer, rotándolo por ángulos y cosas así…"*(Fernando).

Sobre si le atribuye el carácter económico de la transformación lineal, en ese momento, o si era solo un sentimiento algebraico derivado de la matriz, él manifiesta un interés por la funcionalidad del modelo que le viene del enfoque práctico de las tareas, en particular de esta a través del contexto geométrico, que le hace sacar una idea simplificadora de separar un problema complejo en partes más simples:

> *"No, sino, que las mismas transformaciones que se aplicaban sobre algo podían aplicarse por separado, podían aplicarse de distintas formas y siempre la transformación general iba a ser lo mismo"* (Fernando).

Para ambos estudiantes, la representación matricial es vinculada a la rotación desde un punto de vista reductor algebraico. Permite la integración de los procesos de cálculos geométricos realizados en una versión estructural del modelo lineal; no es claro que en el desarrollo de las automatizaciones matriciales, el reconocimiento de vínculos con la TL siga siendo controlado y referido a la comprensión lineal de la rotación.

Características:

- Redefinen espontáneamente el modelo lineal como un método alternativo de resolución en lugar del método geométrico.
- Manifiestan un razonamiento casi a nivel abstracto conducido por la estructura lineal de $\mathbf{R}^2$ (espacio vectorial) en la interpretación y utilización del concepto lineal.
- Buscan estructurar y comprender la rotación como una transformación coherente a la estructura de espacio vectorial.
- Reconocen la conservación de la linealidad en la representación matricial.
- Valoran el modelo lineal por la simplicidad y la generalidad que permite producir.
- Sintetizan la rotación por la acción sobre los vectores basales y la linealidad de la transformación. Demuestran las propiedades lineales para la matriz asociada.

Unifican y sintetizan resultados mediante notaciones generales. Estructuran en función del concepto. Perciben la utilidad de las relaciones lineales y aplican el modelo como un medio más económico y eficaz, entrando en un nivel de reformulación.

Tabla resumen de las producciones

Equipos	Características principales	Análisis global
Equipo 1 Roberto/Tomás	Estructuran el concepto en función de la invariancia de combinaciones lineales utilizando la estructura lineal de $\mathbf{R}^2$. Utilizan el modelo general lineal de manera económica y eficaz para calcular. Descubren la coherencia entre la TL y su representación matricial.	Pasando por un trabajo de relaciones geométricas y de procesos algebraicos lineales sobre $\mathbf{R}^2$, el funcionamiento de la herramienta lineal sobre los marcos geométrico y algebraico hizo contemplar el modelo lineal como un método más eficaz y conveniente. Este uso de la estructura lineal de $\mathbf{R}^2$, no para encontrar una solución particular sino para justificar una invariancia lineal, sirvió para identificar las características lineales esenciales que definen el modelo abstracto de la TL, pero no son explícitos en la definición.
Equipo 2 Octavio/Pedro	Hacen funcionar el concepto a nivel de coordenadas cartesianas y se apoyan de la herramienta de sistemas de ecuaciones lineales para validar el modelo general. No alcanzan a vincular la acción lineal de la transformación con la representación matricial.	La validación del modelo lineal no sólo favorece la comprensión sino que permite también proseguir la formación del concepto, pero sólo de manera local. Es decir, dan sentido al concepto utilizando la formulación analítica sobre el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$.
Equipo 3 Emilio/Fernando	Redefinen el modelo lineal en coherencia con la estructura lineal de $\mathbf{R}^2$; lo desarrollan en el contexto algebraico y a un nivel abstracto. También generalizan el enfoque lineal del modelo como un método de resolución más económico y eficaz. Establecen y justifican la linealidad de la representación matricial, vinculándola estructuralmente a la TL.	La utilización que hacen de las propiedades lineales para justificar la acción de la transformación (sobre los basales) los acerca a la unificación y generalización del modelo abstracto. Debido a que expresan un lenguaje y un enfoque general en sus formulaciones.

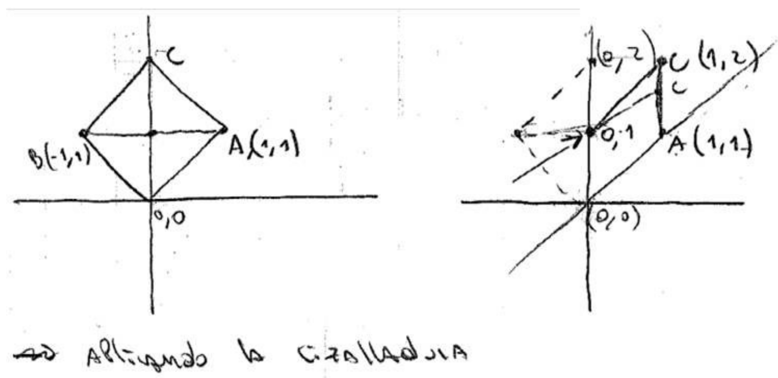
4.6.3 Actividad 3: Cizalladura

Estructuración de la linealidad

El problema pretende pasar por una representación geométrica que requiere necesariamente la aplicación de la linealidad de la cizalladura. Se trata de un concepto lineal del campo de la Física un poco particular por el aspecto vectorial que presenta su definición, lo que obliga a validar los resultados dentro del mismo marco lineal. La reformulación de la cizalladura con las propiedades lineales lleva a profundizar el sentido lineal, desplegando los vínculos que unen a estos conceptos y a proceder por consiguiente en un trabajo de una mejor comprensión y estructuración de la TL.

Equipo 1: Roberto, Tomás, tienden a traducir la cizalladura por un movimiento geométrico constituido por dos acciones: primero fijan la dirección $\vec{u}$ como establece la definición y luego, aplican un movimiento como si fuera una rotación sobre el vector perpendicular $\vec{u}_{\perp}$. Desarrollan de esta manera la idea de "conservación de combinaciones lineales" que reutilizan y transfieren a la cizalladura para imaginar la forma y posición de la estructura resultante.

Si nos fijamos en su representación geométrica, Roberto habla de la cizalladura "*como si aplicara una rotación"* basado en una idea de un movimiento de "rotación local" en el sentido procedural de Sfard (1991). Vemos en la Figura 49 (p. 231) que determina hacer coincidir la imagen del vector perpendicular $\vec{u}_{\perp}$ que trabajan a nivel de las coordenadas $(-1,1)$ con el punto $(0,1)$.



(Roberto)

Figura 49. Aplicación de la cizalladura

Intentan interpretar la situación con elementos geométricos conocidos transfiriendo el contexto más que el modelo:

> "…. [la cizalladura] *es como que si se le aplicara una rotación… es como en el caso anterior… en la actividad anterior de la rotación en que se mantenía la combinación lineal, esto es como lo mismo, o sea, por lo menos aquí hay una, solamente una fuerza que se aplica con la cizalladura pero va a implicar una rotación y esa rotación me va a permitir, por la actividad anterior, que se mantenga la combinación lineal"* (Roberto).

> *"Una rotación negativa, o sea… sería la rotación de un vector, si lo miro por un vector"* (Roberto).

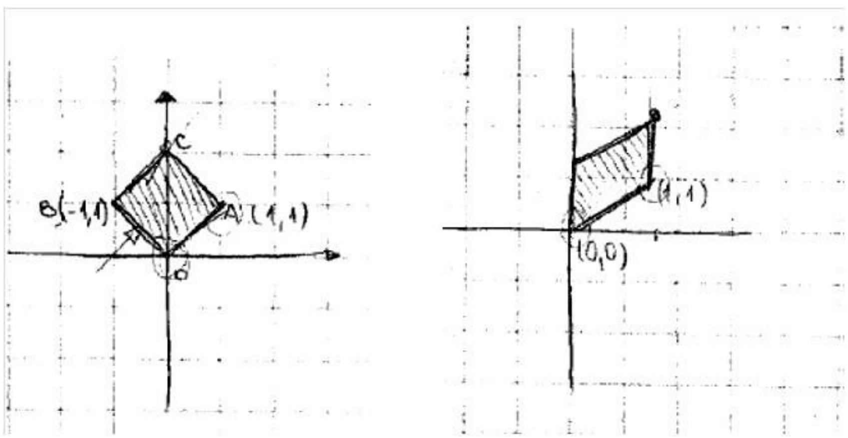
Mantienen la linealidad recurriendo a regularidades geométricas, que son consecuencias de las propiedades lineales:

> *"una de las características que tenía la cizalladura es que al hacer una cizalladura sus lados paralelos se mantienen paralelos…aunque cambian pero se mantenían los lados paralelos…"* (Tomás).

Roberto y Tomás entran en un proceso de modelización identificando lo que cambia y lo que no cambia, empiezan con los puntos que permanecen fijos e integran al mismo tiempo, la invariancia del paralelismo de los lados (dada en la presentación) para representar gráficamente los vértices que cambian:

> *"Si le aplico una cizalladura así... lo único que va a variar va a ser el* $(-1,1)$ *que es el valor de B que va a variar en un ángulo* [el de la rotación] *y le va a dar nuevas coordenadas para B y C, los puntos en la base se van a mantener iguales"* (Roberto).

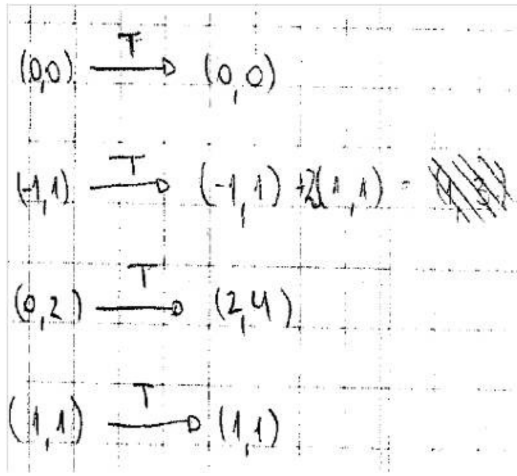
> *"Estos dos no cambian porque se mantienen, por ejemplo ese elemento el* $(0,0)$ *se mantiene y el* $(1,1)$ *también lo mantiene, por la definición me guíe"* (Tomás).



(Tomás)

Figura 50. Validación en el marco geométrico

Su voluntad de validar en el marco geométrico (con el paralelismo) les hace descuidar la definición de la cizalladura. Utilizan la definición de la cizalladura sin proporcionar una mirada crítica a los vértices que cambian. Los resultados obtenidos por linealidad sobre los vértices $B(-1,1)$ y $C(0,2)$ no los hacen coincidir con aquellos que reflejan en la figura (Figura 50, p. 232) de manera de asegurar la coherencia del modelo lineal. Así que, no logran hacer los vínculos necesarios para favorecer a la estructura cuadrada.

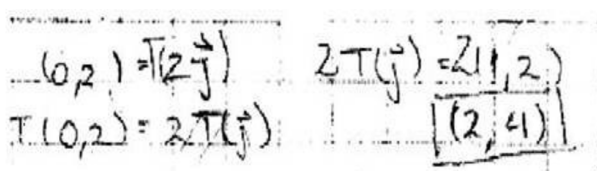


(Tomás)

Figura 51. Incoherencia del modelo lineal con la representación geométrica

Geométricamente perciben el punto $(0,1)$ como la imagen del vértice $(-1,1)$ y tachan incluso el resultado que les entrega la definición, el punto $(1,3)$.

Al mismo tiempo, ponen en relación la definición de la cizalladura sobre los vértices del cuadrado, unificando diferentes representaciones que utilizan obedeciendo a las propiedades lineales:



(Tomás)

Figura 52. Validación del modelo lineal

> *"Porque acá el* T *sería de* $2\vec{j}$*, pero como es por propiedad lineal sale el escalar, es lo mismo que hacer* T *de* $\vec{j}$ *dos veces entonces el dos se mantiene y el* T *de* $\vec{j}$ *que ya habíamos calculado…El* $2T$ *de* $\vec{j}$ *era dos veces* $(1,2)$ *y daba* $(2,4)$*, es decir, queda* $(2,4)$ *en el modelo y el* $(1,1)$ *no sufría cambios y porque… eso, me costó un poco hacer esto…" (*Tomás).

Pero en la cuestión de la comparación de los resultados entre la estructura lineal y la estructura geométrica, queda la inquietud que no les parece fácil hacer coincidir la imagen algebraica de $(0, 2)$ con la imagen geométrica de $(0, 2)$. De hecho, Tomás no refleja los valores de las imágenes de B y C en su representación gráfica (Figura 50, p. 232).

Con la rotación (Actividad 2) tienen el marco geométrico para determinar directamente la rotación de cualquier punto, y establecer y justificar la "relación lineal". Con la cizalladura, al no tener un ejemplo concreto en que puedan basar sus desarrollos, usan el marco algebraico, enfoque de resolución que están forzados a utilizar, para ver si las operaciones desarrolladas son significativas en términos del objeto que representan. Ellos están conscientes de esto, toda la concepción requerida por la actividad de aplicar la TL les induce a tomar esta decisión.

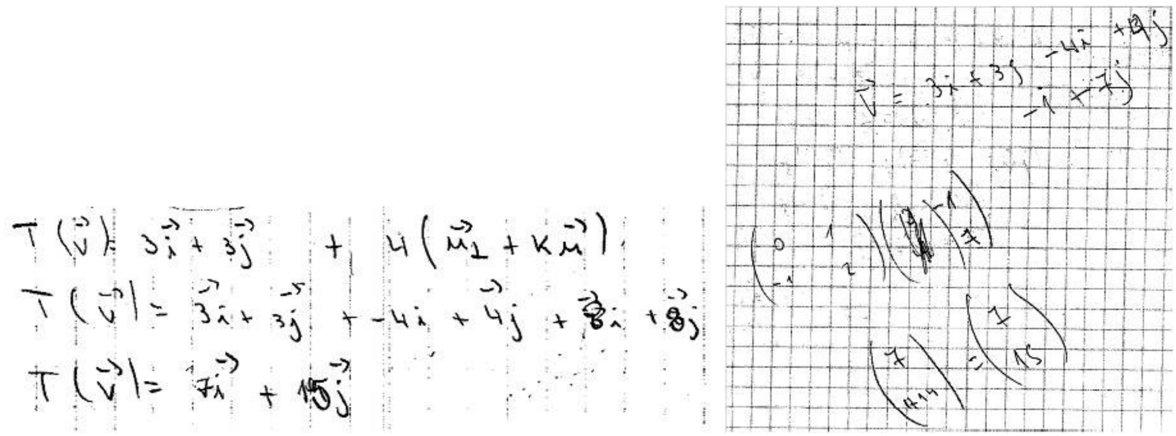
Si bien manifiestan un nivel de estructuración que les hace reformular la cizalladura aplicando la TL, el desarrollo de sus producciones es conducido por un modo de argumentación aceptado a un nivel de comprensión. En realidad, ellos reformulan la cizalladura, identificando los elementos lineales necesarios para aplicar las propiedades lineales, cuando establecen las imágenes de los vectores $\vec{v}$, $\vec{i}$ y $\vec{j}$ por la definición:

> "*Es que rotar $3\vec{u}$ sería lo mismo que rotar, o sea, no. Hacer esa transformación en $\vec{u}$, en $3\vec{u}$ sería lo mismo que hacerlo en $\vec{u}$ y, paréntesis, 3 veces*" (Tomás).

> *"Sí aplique T a todo eso…pero con combinación lineal, esto se separa en T de $\vec{u}$, 3 veces T de $\vec{u}$ más 4 veces T de $\vec{u}$ perpendicular"* (Roberto).

> *"Apliqué lo que decía la definición de que se mantenía el $\vec{u}$, el $\vec{u}$ perpendicular era el que variaba, que cambiaba"* (Roberto).

Proceden en un trabajo de estructuración, representando los vectores y sus imágenes (por la transformación) bajo la misma estructura de *"combinación lineal"*. Estos vínculos son explicitados por el desarrollo de los pasos intermedios cuando verifican las propiedades lineales tratando de asegurar la invariancia de la estructura lineal. También Roberto, aprecia la validez del modelo sobre $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$ por la representación matricial de la transformación:



(Roberto)

Figura 53. Validación del modelo lineal

De esta manera, se percibe una falta de coordinación entre representaciones: gráfica y algebraica, dificultad que puede ser vista a un nivel de dificultad al cual no habían sido acostumbrados. De hecho, el formalismo de la definición no les ayuda mucho en representar ese fenómeno físico que no conocen (que encuentran por primera vez). Esto podría explicar la tendencia a volver al marco geométrico con algo más conocido (la rotación). Ellos aceptan guiarse por la definición, pero muestran un rechazo, posiblemente temporal, al no utilizarla para orientar el proceso de la resolución gráfica, ya que dicen no entender muy bien como ilustrar geométricamente esa acción por la cizalladura, ni siquiera saber cómo imaginar lo que sucede punto a punto, o lo que se esconde, en términos de vectores detrás de ella. Sobre todo cuando hay una fuerza externa que actúa en dirección de la cizalladura. Al no tener un ejemplo concreto del proceso matemático en su aplicación se sienten realmente perdidos:

> *¿En qué me sentí más perdido?*
> *"En la lectura del ejercicio en la definición de cizalladura, ahí me perdí… al ser algo desconocido y al no tener ejemplos como concretos…"* (Roberto).

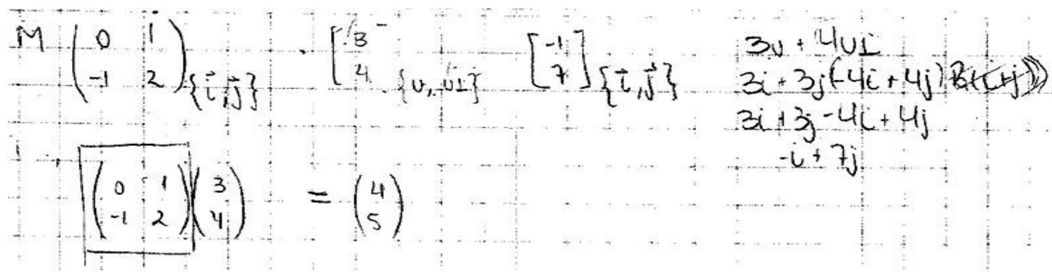
> *"Yo creo que en la cizalladura, porque me costó más. Encontrar la matriz y cambiar la base, la confundí, entonces ahí me costó más."* (Tomás).

La búsqueda de un modo de generalización a partir de un contexto geométrico conocido revela así una complejidad con la definición cizalladura. Como la aplicación en sí conlleva a involucrar lenguajes y escrituras propias de la Física (la fuerza externa que actúa en dirección del vector $\vec{u}$) la formalidad de la definición puede, por lo menos temporalmente, constituir un obstáculo a la emergencia de la TL, al valorizar elementos geométricos que son más accesibles y conocidos para ellos:

> *"Bueno, en el ejercicio de cizalladura igual fue difícil en el asunto que, por lo menos, yo estaba acostumbrado a que después de que pasen la materia, expliquen o hagan un ejemplo de cómo utilizarlo, para poder desarrollarlo, entonces, al no tener un ejemplo concreto, costaba verlo propiamente así por uno solo el ejercicio…es como que uno no está acostumbrado a ese mecanismo y a seguir como a ese orden…"* (Roberto).

La falta del marco geométrico o de una referencia específica que les permita organizar en ese sentido, posiblemente, les impide hacer los vínculos necesarios para realizar la traducción geométrica. La costumbre de hacer aplicar un modelo en particular (la cizalladura no es una isometría) parece entonces dispensar la necesidad de un cierto nivel de abstracción que permita realizar ese pasaje. Se quedan a nivel de la resolución, combinando un conjunto de objetos y de métodos y no proceden en un trabajo de estructuración sobre el concepto lineal.

Incluso, si Roberto hizo bien la tarea de validar matricialmente el resultado de la transformación sobre $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$ (Figura 53, p. 235), Tomás manifiesta que "*no estaba* *seguro de lo que tenía que hacer, o de lo que estaba haciendo"* al utilizar la matriz en la base canónica, que le condujo a un resultado sin sentido:



(Tomás)

Figura 54. Falta de coordinación entre las dos bases

Dejando ver una cierta desvinculación lineal en la dependencia de una base para reconocer la transformación en su globalidad. Acción que ya había experimentado con la rotación y que ahora no la alcanza a rehacer con la matriz asociada a la TL.

La tarea de la representación matricial respecto de la base canónica no los lleva necesariamente a comprender el rol de los coeficientes de las columnas en el caso de la base B. De hecho, Roberto y Tomás muestran la cizalladura sobre los vectores canónicos expresándolos como combinación lineal de los mismos vectores canónicos para formar los coeficientes de las columnas de la matriz canónica. Pero, la familiaridad que tienen con los vectores canónicos "*como números*" les dificulta ver $T(u)$ y $T(u_{\perp})$ por un enfoque similar, más precisamente por las características lineales:

> *"Al tener que encontrar en la base B no sabía qué hacer"* (Roberto).
>
> *"Es que no tenía claro que tenía que hacer exactamente con esa base* [la base B], *porque la canónica como son números era como más fácil visualizarlas, entonces el desarrollo matemático era más fácil, pero el de la otra base no se me ocurrió cómo…"* (Tomás).

Resulta que, la matriz en la base canónica aparece como una matriz cómoda de calcular por la costumbre de representar algunos vectores concretos como combinaciones lineales de los vectores canónicos. Representar T respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$ requiere una comprensión más formal de la representación matricial: las columnas son los vectores columnas de las imágenes de los elementos de B respecto de B, en la matriz canónica, las columnas son directamente las imágenes. Además, la formalidad de la base B también constituyó de por sí un obstáculo por la representación de los vectores. No consiguen pasar a la expresión de la cizalladura con respecto a la base B, la base "natural" de esta cizalladura.

Por otro lado, la acción sugerida por la actividad de representar la cizalladura en el sistema ortogonal de base $B=\{\vec{u},\vec{u}_{\perp}\}$ por una rotación de ejes canónicos, llevó a los estudiantes al interés implícito de interpretar el cambio de base en el contexto geométrico, porque el encuentro con la cizalladura horizontal en la dirección $\vec{i}$ era conceptualmente más económico (y más cerca del ejemplo) que en la dirección $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$. Esto constituyó una motivación importante para los estudiantes para justificar la descripción de la cizalladura sometida a ese cambio de base como consecuencia de la rotación del sistema cartesiano, lo que ayudó a favorecer la imaginación del concepto cizalladura apropiándose de este enfoque para aplicarlo como una "retroacción" hacia su figura geométrica (Figura 50, p. 232). Tomás, intenta nuevamente hacer la coherencia del paralelismo de los lados con la aplicación de la cizalladura:

> *"Me pareció mucho más fácil rotarlo y trabajarlo así, porque hacer todo este cálculo para poder hacer, aplicar la cizalladura… Es que, no se mantenía como una misma forma, los lados paralelos en realidad no quedaban muy paralelos… porque por ejemplo T en ese C* [(0,2)] *quedaba en* $(2,4)$ *y si es que éste se mantenía en* $(1,1)$ *…uhm"* (Tomás).

> *"…hice la rotación para pasar de acá a acá… todo eso en vez de haber hecho todo de una vez… de haber aplicado la cizalladura ahí, esto me simplificó más las cosas,*

> *es que incluso se ve mucho mejor y al aplicar la cizalladura* [en dirección de $\vec{i}$] *te salen resultados también más… más bonitos […] y que sí, que con las combinaciones lineales nuevamente se hace más simple"* (Roberto).

Si Roberto y Tomás parecen haberse sentido algo inestables por la falta de enlace entre lo geométrico y lo algebraico, ahora manifiestan un interés particular en comprender de qué se trata en el fondo esta combinación de acciones. Ellos traducen e identifican las transformaciones geométricas con las representaciones matriciales percibiendo que el producto matricial, en el orden adecuado, les hace volver a la matriz de la cizalladura respecto a la base canónica.

En este proceso ellos son conscientes que se trata solamente de un cambio de descripción de la cizalladura donde las propiedades lineales permanecen invariantes:

> *"Verifiqué que el producto de esas matrices nos hace volver a la matriz de la cizalladura"* (Roberto).
>
> *"Me demoré harto en revisarla así como matriz* [la cizalladura] *no estaba seguro de lo que tenía que hacer, o de lo que estaba haciendo, pero cuando hice esta* [rotación del plano cartesiano] *me la hice al tiro, porque me pareció mucho más fácil rotarla, aplicar la fuerza y volver a rotarla, y desarrollarla también me pareció mucho más fácil"* (Tomás).

Es interesante notar un sentimiento de comprensión de saber de qué se trata cuando se rota el sistema de coordenadas y de por qué es así, llegando incluso a conjeturar de forma gráfica que la cizalladura $T_{\vec{i}+\vec{j}}$, en la dirección $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ es equivalente a la sucesión $R_{-45°} \to T_{\vec{i}} \to R_{45°}$[41]. Esto puede favorecer la articulación entre las representaciones geométricas y algebraicas para apreciar lo que se grafica teniendo en cuenta la TL, también

---

[41] Esta sucesión indica primero la aplicación de la rotación $R_{-45°}$ (en -45°), luego la cizalladura horizontal $T_{\vec{i}}$ (en la dirección $\vec{i}$) y finalmente la rotación $R_{45°}$ (en 45°).

para justificar la eficacia en la ejecución, y para acceder al sentido de la representación matricial en una base determinada.

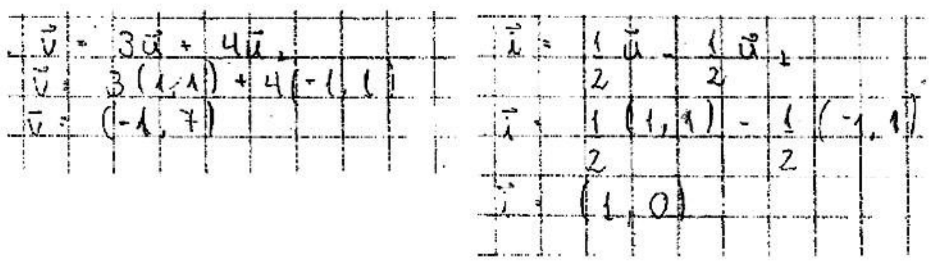
Características:

- Generalizan la idea de "conservación de las combinaciones lineales" de manera más abstracta combinando objetos y métodos.
- Interpretan la cizalladura a una "falsa" combinación de transformaciones de identidad y rotación.
- Justifican la linealidad (conservación de las combinaciones lineales) de la cizalladura por analogía y deducción del concepto lineal rotación.
- Justifican de manera gráfica la descripción de la cizalladura sometida a un cambio de base vectorial.
- Valoran de manera gráfica la simplificación de la cizalladura por la aplicación de la rotación (cambio de base).
- Identifican la linealidad con propiedades geométricas (lados paralelos se mantienen paralelos)
- Describen de manera intuitiva y geométrica la acción de la cizalladura sobre una figura geométrica.
- Traducen las transformaciones geométricas en objetos más formales (matrices).
- Reconocen implícitamente el carácter lineal de la transformación al ser representada matricialmente.
- Descuidan el paso de lo geométrico a lo lineal en la aplicación de la linealidad (aplicando correctamente las propiedades lineales).

Proceden a redefinir según la estructura lineal pero la transferencia vía la definición al marco geométrico les plantea un problema de articulación. Interpretan la noción de cambio de base y los vínculos matriciales en la representación gráfica. Vuelven a nivel de estructuración luchando por una reformulación.

<u>Equipo 2: Octavio y Pedro</u>, conceden importancia a la aplicación de la cizalladura a nivel de coordenadas. Los límites de su trabajo son puestos a prueba en el contexto geométrico cuando intentan producir una respuesta desde el enfoque lineal de $\mathbf{R}^2$.

Un primer intento de parte de ellos es trabajar en un contexto geométrico. Ellos centran su atención sobre las coordenadas cartesianas del vector $\vec{v}$, que interpretan como *"imagen de $\vec{v}$ ",* la cual calculan por medio del proceso de *"sustituir las variables"* $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ para proporcionar sentido a esa representación formal:



(Pedro)

Figura 55. Identificación de las coordenadas

Incluso si la búsqueda para $\vec{i}$ y $\vec{j}$ llega a ser un resultado simple y conocido por ellos, no manifiestan un cuestionamiento, en el momento, por la transformación de esos vectores. En esa tarea no saben cómo empezar y si lo que han calculado es válido, la cizalladura no se parece a la definición de función que ellos están acostumbrados: una "*fórmula*" para $T(x, y)$ en términos de las coordenadas x e y. En realidad, necesitan un ejemplo para ver los procedimientos (aplicados) y saber cómo guiarse:

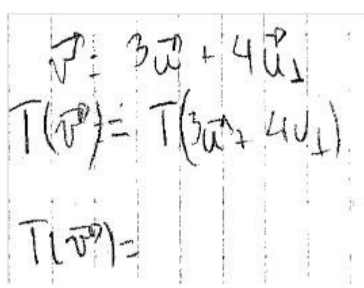
> *"No tenía un ejemplo con qué guiarme para hacer la actividad, entonces no sabía cómo hacerlo"* (Octavio).

> *"…hay que entender un poco, una introducción o conocer algo de la transformación lineal, obviamente si uno lo ve por otro lado y aprende algo, alguna definición a lo mejor se puede aplicar, pero la mayoría* [de las situaciones] *venía*

sin nada, nadie sabía lo que era, y era como una materia nueva por decirlo así, entonces en ningún momento nos dieron como un algún ejemplo de cómo se hace…" (Pedro).

Reclaman por la orientación de un enfoque conocido para poder vincularse a la situación, y para saber de qué se trata en el fondo. En el sentido geométrico de las coordenadas, cuando intentan deducir la representación matricial respecto de la base canónica, visualizan recién en ese momento $T(\vec{i})$, y vuelven ahí a las imágenes de estos vectores. Sin embargo, este resultado no les lleva a cuestionarse sobre los valores canónicos obtenidos anteriormente.

También, en la representación lineal de $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$ que permanece en el contexto formal (vector algebraico, combinación lineal, espacio vectorial), encontramos que en el desarrollo de la imagen por la TL no consiguen utilizar sus propiedades:



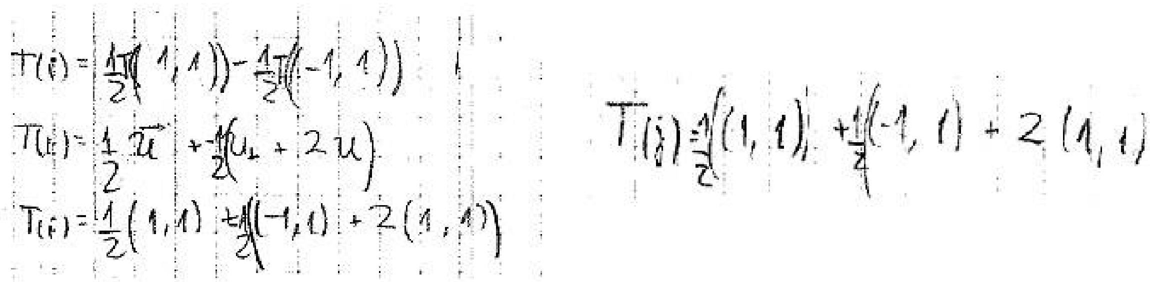
(Octavio)

Figura 56. Dificultad al formalismo de la TL

El nivel de formalismo (el simbolismo asociado) que caracteriza la aplicación de la TL en ese vector expresado como combinación lineal, constituye en sí un obstáculo para poner en funcionamiento el modelo lineal. Mantienen la igualdad, pero no despliegan las propiedades lineales que se vinculan a la definición de cizalladura.

Por otro lado, examinamos la contradicción entre lo rápido que hicieron $T(\vec{i})$ y la dificultad para hacer $T(\vec{v})$. Para determinar $T(\vec{i})$ a partir de $\vec{i} = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$, aplican

T directamente sobre las coordenadas cartesianas de $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$ sin intentar verificar las propiedades lineales de *T*, es decir, ellos no muestran señales de las etapas intermedias de la acción por la linealidad sobre la combinación lineal inicial de $\vec{i}$ sino más bien, "imponen" *T* como un tratamiento de aplicar directamente la definición de la cizalladura. Posiblemente por un efecto del contrato didáctico de la actividad; aplicamos la cizalladura según la forma que tiene su definición. Para $T(\vec{j})$ proceden de forma similar.



(Octavio)

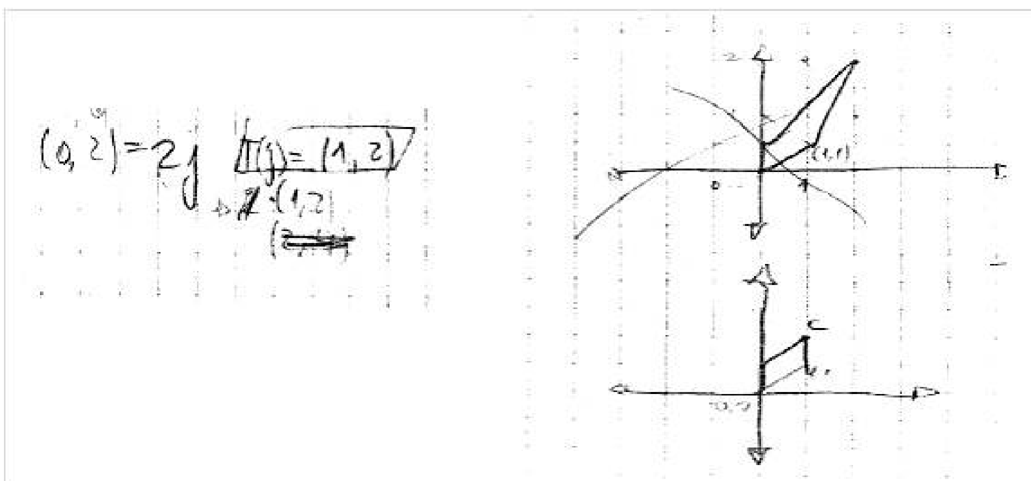
Figura 57. Aplicación de la TL por efecto del contrato didáctico

En este sentido, ellos desarrollan un vínculo entre el lenguaje algebraico y numérico del vector imagen que les hace luchar por la estructuración. Este tratamiento de la linealidad está limitado sin embargo a la representación de los vectores, específicamente de los valores numéricos de las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$, ya que logran realizarla bajo esa representación.

> *"Es que eso de las letras no lo entiendo, que hice con el T o que hice con el ortogonal, no entiendo mucho eso"* (Pedro).

Esta discontinuidad en el desarrollo de su razonamiento lineal es coherente con la comprensión desarrollada en la actividad de la rotación de no representar simultáneamente bajo la misma forma de "*combinación lineal*" un vector antes y después de la acción lineal. Sino que necesitan del modelo geométrico para interpretar sus resultados.

En la tarea, la de ver cómo resulta la estructura cuadrada si se le aplica la cizalladura, encontramos de nuevo la TL reducida al mismo procedimiento de "imponer la *T*" directamente sobre el vector $\vec{j}$ cuando se aplica sobre $(0, 2)$. En eso, Octavio manifiesta un fuerte deseo de reconocer el valor algebraico que le entrega la propiedad lineal, incluso lo refleja en su gráfica que el tacha (Figura 58, p. 244). Se desenvuelve bien ahí en ese cálculo inicial, pero comete un error geométrico, en lugar de hacer corresponder al punto $(1, 3)$ como imagen del $(-1, 1)$ él determina a un punto del eje *Y,* según su figura (Figura 58, p. 244). Con eso, sus lados habrían conservado igual la propiedad lineal geométrica del paralelismo tal como, posiblemente, lo pensaba.



(Octavio)

Figura 58. Validación del modelo lineal

Su voluntad de validar en el marco geométrico lo lleva a rechazar, por lo menos temporalmente, el resultado lineal. Sin embargo, hay que reconocer que busca el resultado geométrico por el efecto lineal de la cizalladura, así como él dice, *es una "transformación lineal" entonces debe tener los lados paralelos* (Octavio). Su razonamiento lo lleva a estructurar la figura (Figura 58, p. 244) combinando la TL con ese método geométrico, pero sin cuestionarse sobre las razones que le hacen contradecir su intento geométrico inicial.

Pedro en cambio, decidió no someterse más a esa tensión y abandona la actividad y la investigación:

> *"Sé que está mal ser así, pero de repente cuando veo que algo no me da o que no puedo hacerlo, no me sigo como calentando la cabeza por así decirlo, y seguir haciéndolo, prefiero preguntarle a alguien y que me aclare bien las cosas, y no estar yo tratando de entender algo que de lo cual no tengo ninguna base ni nada"* (Pedro).

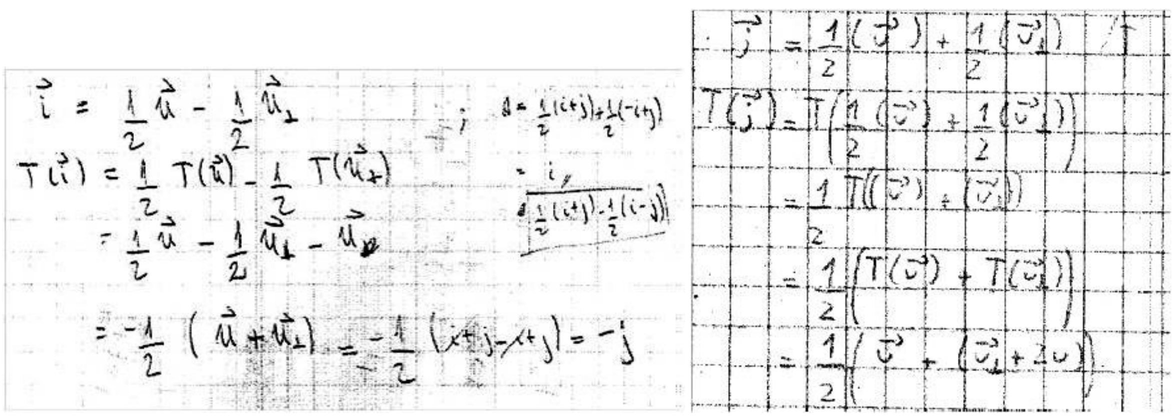
Características:

- Dificultad con el lenguaje formal de vectores y de las propiedades lineales de la cizalladura.
- Definen la linealidad de la cizalladura a nivel de coordenadas como estrategia de resolución.
- Utilizan la linealidad de manera subordinada a la representación de los vectores, específicamente de los valores numéricos de las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{u}_{\perp}$.
- Requieren la presencia de ejemplos que sirvan de modelo a seguir.
- Describen de manera intuitiva y geométrica la acción de la cizalladura sobre una figura geométrica.
- Identifican la linealidad con propiedades geométricas (lados paralelos se mantienen paralelos).

Se interesan en identificar relaciones lineales en el sentido de coordenadas e identifican vínculos de procedimientos geométricos pero no alcanzan a estructurar en función de su generalidad; quedan en un nivel de comprensión de muy poca estructuración.

Equipo 3: Emilio y Fernando, se destacan particularmente por un nivel superior de abstracción sobre el vector algebraico y propiedades lineales en que reformulan la cizalladura conservando la estructura de combinación lineal del vector. La búsqueda de la estructura lineal los lleva principalmente a conectar diferentes representaciones de la transformación (geométrica, algebraica, matricial) en la base ortogonal de la cizalladura y la base canónica. Profundizando de esta manera en la estructuración del concepto y en las propiedades lineales. Se podría casi suponer que la linealidad de la cizalladura es utilizada conscientemente como un modelo alternativo para la obtención y la validación de los resultados, dándole así la funcionalidad que caracteriza a esta noción.

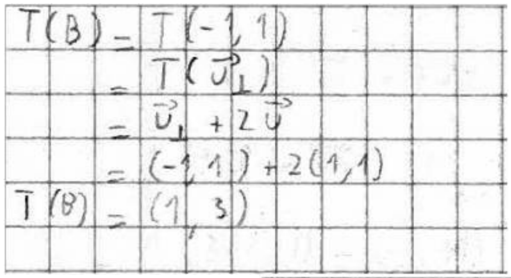
Ambos estudiantes proceden en un trabajo de reformulación de la cizalladura aplicando las propiedades lineales, y combinando modelos complementarios (de espacio vectorial) y unificadores (vector) de manera más abstracta:

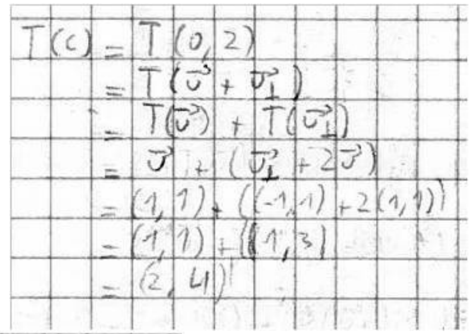


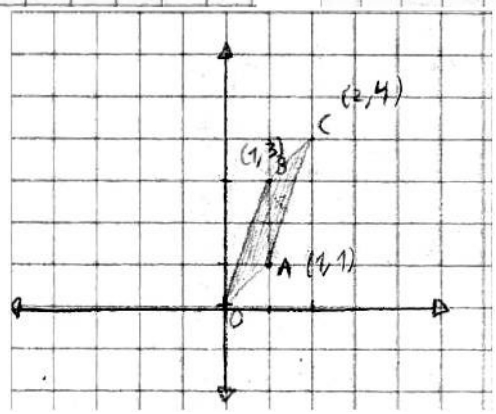
(Emilio) (Fernando)

Figura 59. Reformulación de la cizalladura

Esta reformulación, beneficia también la interpretación de la representación geométrica, para guiar y controlar los vínculos entre el marco geométrico y el marco algebraico. Proceden así, en un trabajo de estructuración y simplificación a partir de la "conservación de las combinaciones lineales":







(Fernando)

Figura 60. Articulación entre el marco geométrico y algebraico con la TL

Buscan mantener la estructura lineal sobre la figura cuadrada, evidenciándose aquí, una cierta apertura al enfoque deductivo en el paso de lo algebraico a lo geométrico para validar los vértices de la nueva figura por la acción de la cizalladura. Combinan modelos complementarios y unificadores, generalizando, por analogía y deducción, el enfoque de la invariancia lineal desplegado con la rotación. Un modo de razonamiento que se acerca a un nivel de reformulación.

La representación matricial respecto de la base ortogonal $B = \{\vec{u}, \vec{u}_{\perp}\}$, la calculan correctamente interpretando las relaciones de la definición de cizalladura:

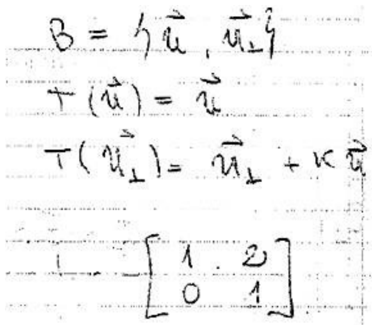
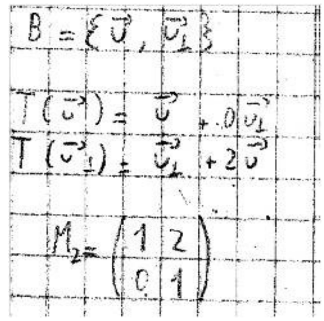
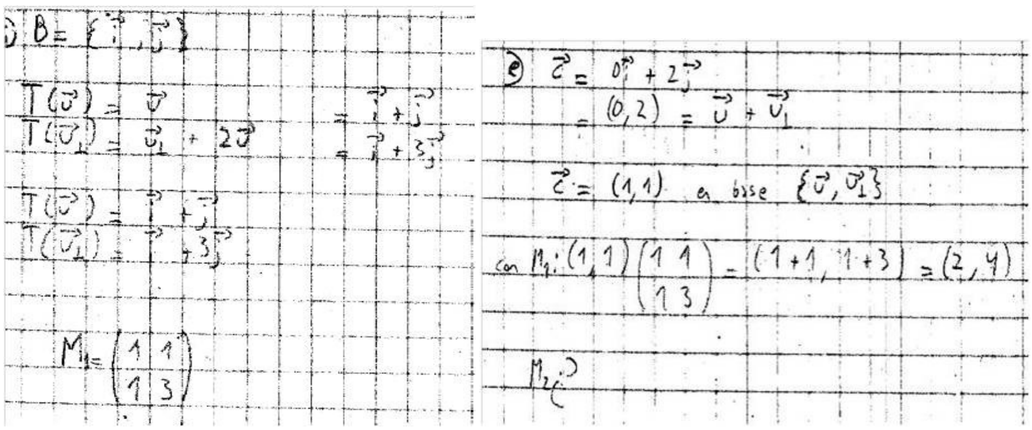
 (Emilio)  (Fernando)

Figura 61. Representación matricial de la TL

Pero, para calcular la matriz respecto a la base canónica Fernando se equivoca y no calcula precisamente $T(\vec{i})$ y $T(\vec{j})$. A cambio, mantiene la base de la cizalladura y calcula una matriz que se puede obtener como un producto de matrices, aunque no haya procedido de esa manera. Se trata de una representación matricial M_1 muy particular, diferente a la requerida por la actividad: aplica la definición de la cizalladura sobre la base *B*, y convierte las combinaciones lineales resultantes a combinaciones lineales en la base canónica. Es decir, deduce M_1 como una representación matricial mixta del producto $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pone a prueba eficazmente esta matriz M_1 para validar la transformación sobre el vértice $C(0, 2)$, expresando este último como combinación lineal de la misma base de la cizalladura y luego, le aplica la transformación matricial en coherencia con la representación del producto matricial que hizo con la rotación:



(Fernando)

Figura 62. Validación del modelo lineal

En M_2, Fernando parece haberse perdido en su representación mixta ya que no le permite validar con ella. Habiendo calculado bien esa matriz y representado el vector $(0, 2)$ conforme a la misma base de M_2, su método ahora, no le resulta:

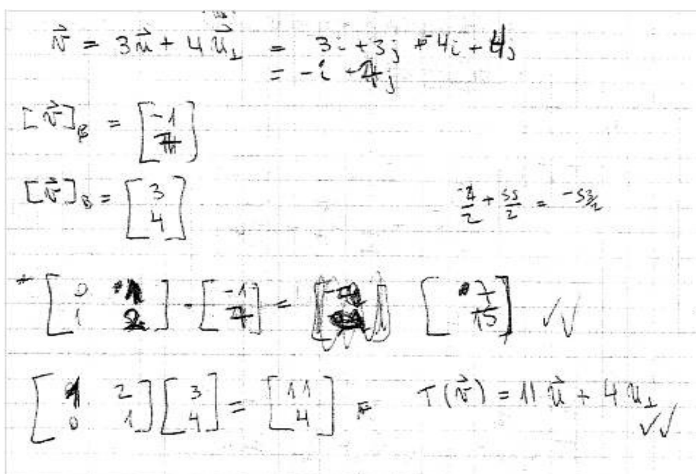
> *"…con la primera matriz me resultaba, pero con la segunda* [con M_2]*…eh, no me funcionó ahí, estuve harto rato atrapado en eso…"* (Fernando).

Sin embargo, este método de resolución, eficaz en el contexto de la definición cizalladura, se constituye en un obstáculo cuando lo adapta para la determinación de M_2, dado que esta matriz ya había sido previamente calculada por Fernando respecto de la base de la cizalladura.

> *"Saber si estaba correctamente expresado esta matriz* $[M_2]$ *porque…y además, la mayor complicación fue saber en qué base tenía que expresar este vector* $[(0, 2)]$ *porque la primera matriz estaba expresada como combinación lineal de* $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ *pero la segunda no estaba expresada como esa combinación lineal, era como una combinación lineal de* $\{\vec{u}, \vec{u}_\perp\}$*, entonces eso me complicó porque no sabía bien cómo en qué base tenía que trabajar eso"* (Fernando).

El proceso que le resultó para M_1 lo trata de aplicar a M_2 pero, en la representación de $C(0,2)$ pierde el control pues no logra establecer la base adecuada para hacer el producto matricial, esto último lo lleva a una incoherencia. Esta misma incoherencia ya se le había manifestado con el vector $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_{\perp}$ cuando determinó las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica y luego aplicó M_2.

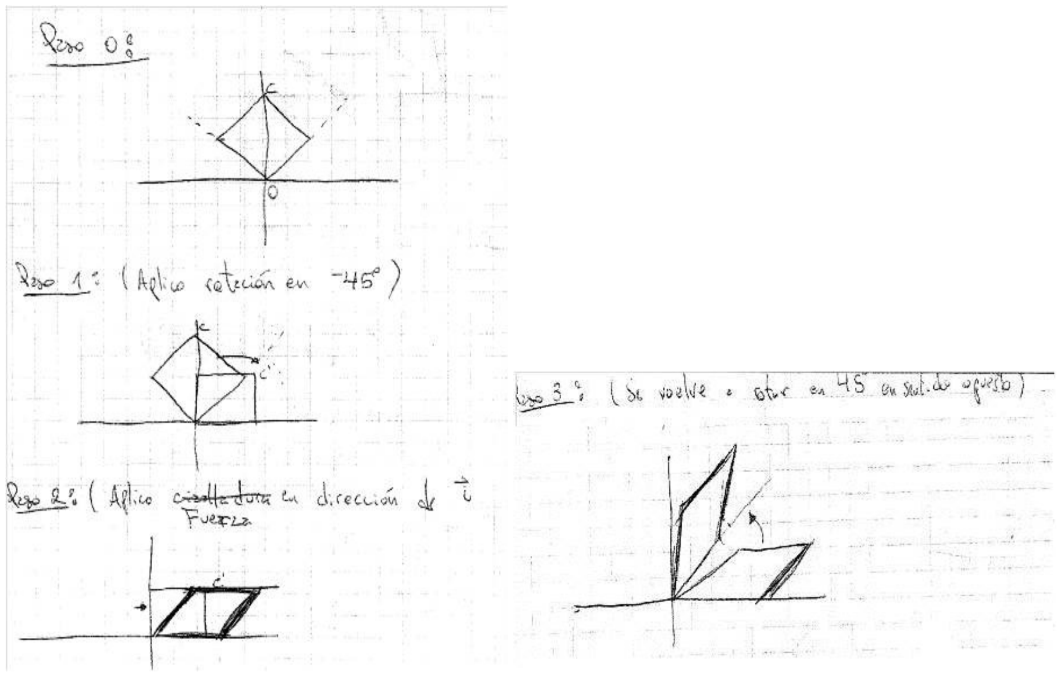
Por su parte, Emilio se caracteriza por un razonamiento abstracto y de carácter simplificador que le orienta la resolución del problema. El confirma sus resultados a través de una comprobación. Sobre todo cuando utiliza la TL para verificar la representación matricial del modelo lineal:



(Emilio)

Figura 63. Verificación de la representación matricial

Aunque cada estudiante evalúa por su lado y no como trabajo en equipo, ambos validan de manera intuitiva la secuencia gráfica de las transformaciones geométricas con la deformación inicial del cuadrado; garantizando con eso la linealidad de las transformaciones. En la descripción de la cizalladura que resulta por medio de la rotación, Emilio establece las representaciones matriciales de las transformaciones geométricas que intervienen y comprueba que el resultado es la misma representación matricial que la cizalladura original.



(Emilio)

Figura 64. Composición gráfica de transformaciones lineales

Características:

- Generalizan a nivel abstracto las propiedades lineales de la cizalladura trabajando con vectores algebraicos.
- Utilizan la linealidad para reformular la cizalladura.
- Establecen y justifican condiciones de aplicación del modelo lineal.
- Establecen y justifican la deformación del cuadrado por un razonamiento lineal y su representación matricial.
- Justifican una descripción equivalente de la cizalladura (en base a una rotación y cizalladura horizontal).
- Definen el método lineal (linealidad de la cizalladura) como método de resolución.
- Traducen gráficamente (deformación del cuadrado) la secuencia de transformaciones lineales (rotación y cizalladura horizontal).

Proceden en una estructuración geométrica por medio del razonamiento lineal. Articulan diferentes representaciones (geométrica, algebraica, gráfica) para poder unificar y generalizar los resultados, están en estructuración hacia una reformulación.

Tabla resumen de las producciones

Equipos	Características principales	Análisis global
Equipo 1 Roberto/Tomás	Reformulan la cizalladura aplicando las propiedades lineales pero no vinculan los procesos algebraicos de la herramienta lineal al contexto geométrico. Valoran la acción de la rotación como herramienta geométrica para producir un cambio de base en la simplificación de la cizalladura.	Redefinen una estrategia de resolución combinando métodos y propiedades lineales pero sin establecer las condiciones de aplicación del modelo. Debido a que imponen la puesta en acción de la formulación anterior (la rotación) y los resultados del cuadro algebraico no son traducidos en el marco geométrico. La formalidad de la definición constituye más bien un obstáculo al trabajo de validación que confiere la articulación entre los dos marcos.
Equipo 2 Octavio/Pedro	El lenguaje formal abstracto de los conceptos les produce dificultades para desplegar los vínculos que los unen. Privilegian trabajar las propiedades lineales en juego a nivel de coordenadas para conceder sentido a la transformación lineal. Perciben una idea de la acción geométrica de la cizalladura que no es coherente con su estructura lineal. No logran vincular la transformación con su representación matricial.	El sentido lineal de la definición les resulta complicado al no reconocer el enunciado del problema. Su interés por relacionar variables los lleva a requerir una formulación analítica de la definición en términos de variables explícitas. Se quedan en un nivel de comprensión de muy poca estructuración.

Equipo 3 Emilio/Fernando	Haciendo una revisión consecuente con la estructura lineal articulan diferentes representaciones del concepto (geométrica, algebraica, matricial) para analizar el concepto en profundidad. Generalizan el enfoque del modelo lineal para la funcionalidad de la noción.	Combinando modelos unificadores buscan redefinir espontáneamente el modelo de manera abstracta. La formación del concepto está referida a un aprendizaje por reformulación.

4.6.4 Actividad 4: Áreas entre curvas

Estructuración de la linealidad

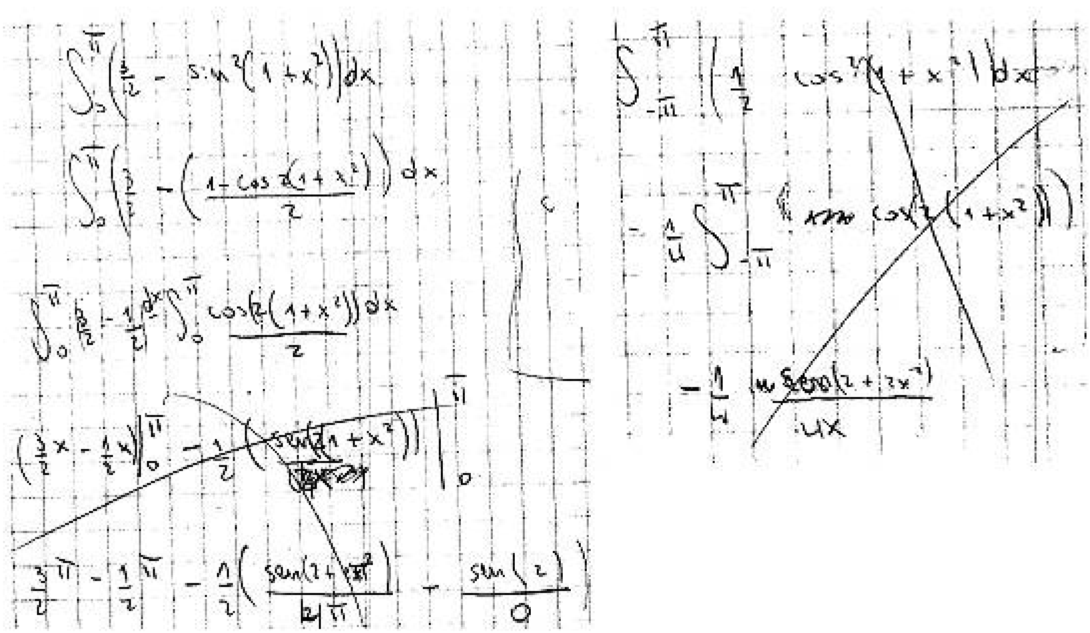
La TL debería proporcionar el marco lineal necesario para que la integral acceda como operador lineal independiente de las representaciones geométricas. La utilidad percibida de la TL en el cálculo del área deberá ayudar a conducir la estrategia de este cálculo y permitir poder distinguir la integral del área bajo la curva. Para esto, se requiere reflexionar la TL como un objeto explícito, con un cierto nivel de abstracción de la linealidad de la integral vinculada al área como contexto, para asegurar la eficacia de tal conducción.

Equipo 1: Roberto, Tomás, perciben la utilidad de la TL para simplificar el proceso de cálculo de las integrales. Pero en el enlace con la geometría, el uso de la herramienta lineal revela un entendimiento parcial con el concepto integral y que domina en el ejercicio: cambian el signo del resultado de una integral para que ésta represente un área. Se disponen a calcular áreas separando el modelo lineal del operador de integración.

En la primera parte, para reducir la integral $\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\sin^2(1+x^2)\right)dx-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos^2(1+x^2)\right)dx$,

Roberto asegura su respuesta intentando calcular cada sumando por separado, no vacila en usar una identidad trigonométrica conocida porque ese enfoque le parecía más eficaz. Pero, cuando su trabajo se volvió muy difícil y demasiado extraño para él, entonces ahí recién, decidió frenar su impulso:

> *"Al principio vi la integral y llegué y calculé. Me puse a calcular la primera integral y llegué como a una contradicción, entonces dije que no puede ser así. Me puse a hacer la otra integral como para ver y realizar si me daba algo bonito y también como que llegué a una cosa como extraña, entonces dije tampoco puede ser así..."* (Roberto).

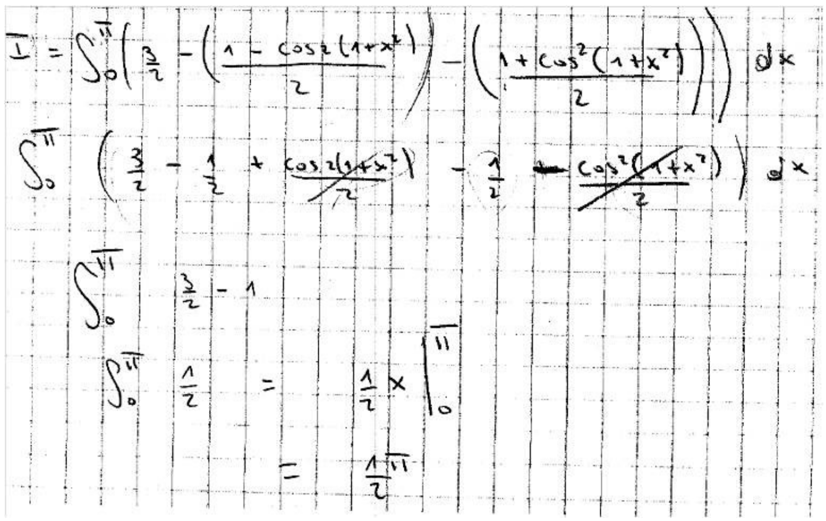


(Roberto)

Figura 65. Un impulso inicial de llegar y calcular

La experiencia inicial de Roberto muestra claramente que en él, la forma más segura de resolver el problema no es intentar aplicar la linealidad de la integral, sino con técnicas rutinarias que le simplificarían los cálculos, y a pesar de las restricciones del problema!

Como los resultados obtenidos no eran de su entera satisfacción por falta de ser *"bonito"*, invoca entonces a las propiedades lineales para simplificar ese trabajo, mostrando así un efecto claro del contrato didáctico de los procedimientos que son enseñados con la integral:



(Roberto)

Figura 66. Simplificación de la integral I por la linealidad

Roberto, saca de la experiencia una ganancia en la convicción que el sentido lineal puesto en funcionamiento le resulta realmente válido y eficaz para resolver esa integral. Llegando incluso a reconocer que la estrategia de su procedimiento inicial no era necesariamente la manera más conveniente de resolver el problema.

> *"…puedo hacer una transformación lineal para simplificar y poder acortar el trabajo y por lo menos ahí aprendí eso, o sea, me pude percatar y fijar en esas cosas, y cosas que aprendo nunca se me olvidan."*(Roberto).

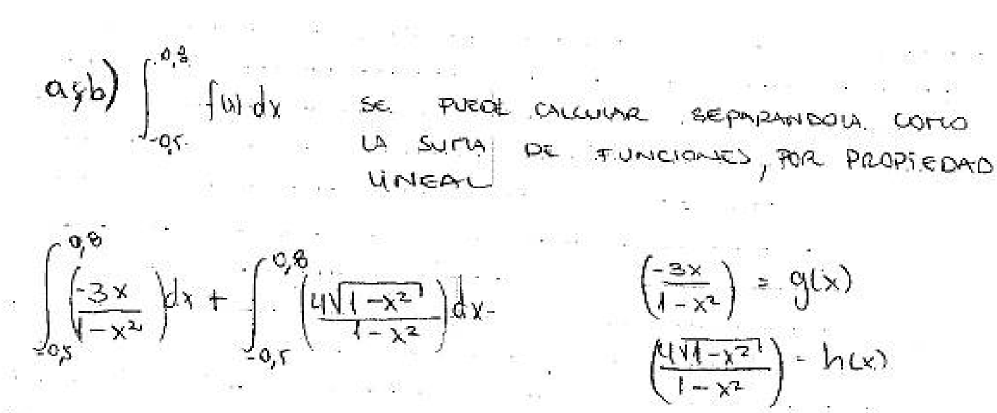
En esta primera parte, ambos estudiantes utilizaron bien las propiedades lineales, unificando las expresiones integrales de acuerdo al modelo teórico lineal. Constatando así la eficacia de la TL en relación a las técnicas reservadas al cálculo de integrales que aparecen como medio más económico

> *"… y ahora al desarrollar esa integral y encontrar el valor del I se me iba a ser mucho más simple el cálculo y encontrar rápidamente cuanto iba a valer el área… me va a quedar una integral de una constante no más..."* (Roberto).

En el análisis de este resultado de la integral *I*, ellos aprecian la simplificación en el resultado, pero no lo vinculan con la altura constante del área de un rectángulo de base π y altura $\frac{1}{2}$ que les permita validar por sí mismos la solución correcta. Recurren más bien a contenidos que constituyen un contrato claro de los procedimientos de áreas, por aplicaciones de las sumas de Darboux-Riemann:

> *"Es que, en la definición de la integral siempre nos dijeron que era el área bajo esa curva y como aquí tengo otra, bajo esa, entonces el área limitada por esas dos curvas sería la que estaba entremedio y como se calcula esa, era con alguna figura geométrica que cayera ahí y que pudiéramos calcular su área lo más fácil posible. Entonces el rectángulo era una de las figuras más fáciles con su base y altura"* (Tomás).

En la segunda parte de la actividad descomponen rápidamente la función integrando $f(x) = \dfrac{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$ en una suma de funciones más simples:



(Tomás)

Figura 67. Aplicación del modelo lineal

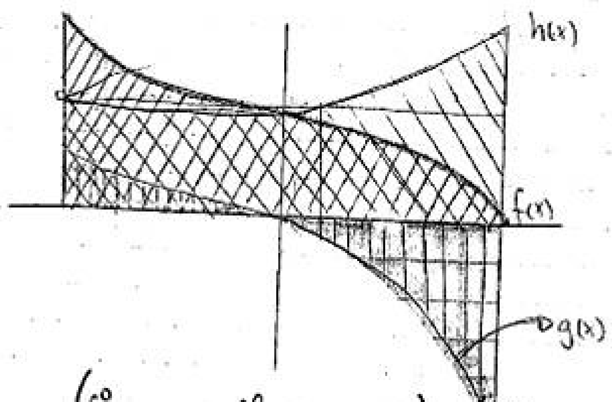
Aplican correctamente la propiedad lineal con la suma de integrales. Sin embargo, en la determinación del área el acento es puesto en la técnica geométrica de separar por regiones de acuerdo al signo de la función integrando, para anteponer un signo menos a la integral de la función negativa. No aseguran la coherencia de este método con el resultado que arroja la propiedad lineal de la integral.

Si nos fijamos en la Figura 68 (p. 258) observamos en la escritura un "signo menos" en la integral de $g(x)$ que contradice la acción lineal de la integral. Cuando quiere justificar la utilización de esta técnica se refiere a efectuar "la resta" para relacionar la medida del área total como la "suma de las áreas" así mismo como la "suma de las integrales":

> *La integral de la función la separé por propiedad lineal, eso más eso ahí está, y también lo separé por intervalos, entonces llamé* $g(x)$ *a esa función y* $h(x)$ *a esa función y en el gráfico están así, y esa era la original* $f(x)$ *antes de separarlas. Entonces al como buscar la relación que había entre las que separé y la original* [Ω]*, esa que entre ciertos intervalos ambas áreas que ya habíamos calculado se sumaban para completar eso, y acá también"* (Tomás).

Tomás explica el signo menos que antepone a la integral de la función $g(x)$ para medir el área de la región acotada por una función negativa, la cual reconoce complicada:

> *"Se resta a toda... esta complicada, se le resta esta parte y da eso. Es lo mismo que sumarla esa* [$g(x)$]*, pero como esta negativa al sumarla esa que está negativa, se resta"* (Tomás).



Relación $\Omega = \left(\int_{-0,5}^{0} \left(\frac{-3x}{1-x^2} \right) dx + \int_{0,5}^{0} \left(\frac{4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \right) dx \right) + \left(\int_{0}^{0,8} \left(\frac{4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \right) dx + \left(\int_{0}^{0,8} \left(\frac{-3x}{1-x^2} \right) dx \right) \right)$

$\Rightarrow \left(\int_{0,5}^{0} g(x)\,dx + \int_{0,5}^{0} h(x)\,dx \right) + \left(\int_{0}^{0,8} h(x)\,dy - \int_{0}^{0,8} g(x)\,dx \right)$

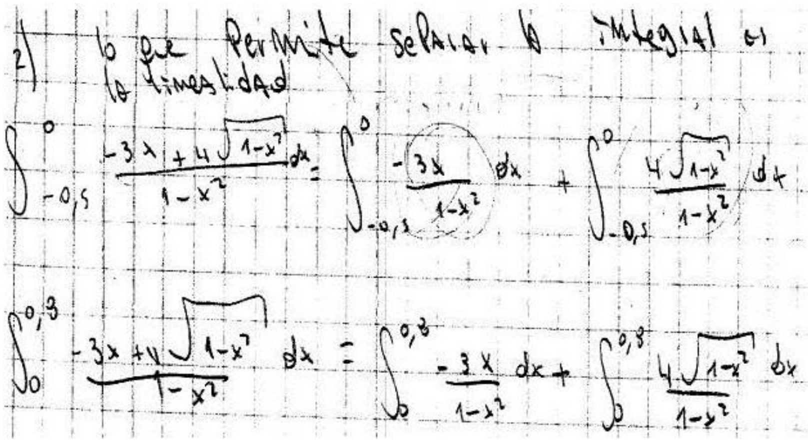
(Tomás)

Figura 68. Interpretación de la propiedad lineal (como sumas de áreas)

Así que, no estarían utilizando la TL para interpretar la “diferencia” de las áreas en la región que representa en el intervalo [0, 0.8]. Determinan anteponer un signo menos a $g(x)$ porque es negativo. Esto los conduce a un error que les hace la diferencia de integrales $\int_{0}^{0.8} h(x)dx - \int_{0}^{0.8} g(x)dx$ y que en realidad le vuelve a hacer una “suma de áreas” dado que el valor $\int_{0}^{0.8} g(x)dx$ es negativo. Roberto intenta referirse a la relación de las áreas:

> *“Sí, porque el área de la región original va a ser el área de la región de esa función más la otra función”* (Roberto).

En la siguiente ilustración de su trabajo, él también expresa que la propiedad lineal le permite “*separar la integral*”:

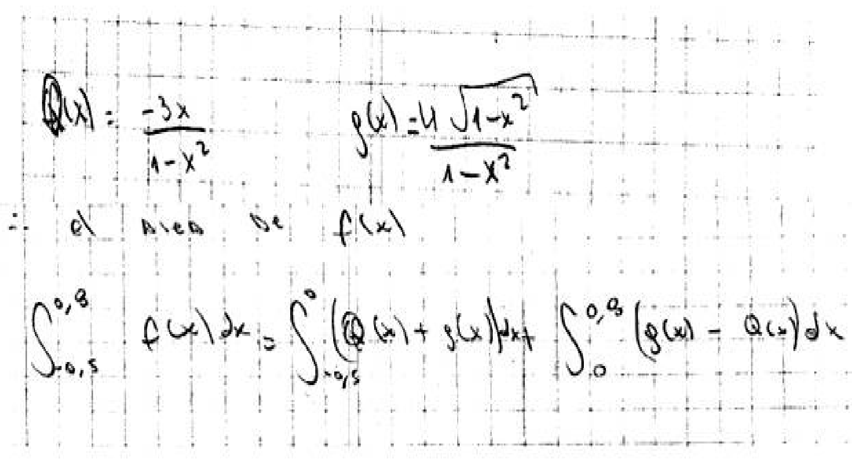


(Roberto)

Figura 69. Separación de la integral I por la propiedad lineal

Resulta de ello, que el área de la región Ω aparece con el signo menos en la función negativa $Q(x)$:

> *"…Mmm del 0 al 0,8 tenía que sacar el área que estaba bajo la curva de $g(x)$, pero después tenía que restarle, restarle el otro trozo, porque era el trozo que me sobraba de acá arriba y que iba a ser el mismo a la de acá, tenía que restar"* (Roberto).



(Roberto)

Figura 70. Incoherencia de la TL en el signo negativo

No mantienen la suma de las integrales a pesar que, es la propiedad lineal la que se va encargar de por sí de la resta de las áreas en la descomposición de esa región.

Se ve que están dispuestos a utilizar la TL pero en el enlace con el marco geométrico ellos hacen privilegiar un entendimiento parcial que tienen de la integral: el área bajo la curva. El modelo lineal es entonces separado de las acciones que muestran la intención de calcular el área. La TL actúa más bien como un ***revelador*** de un tipo de entendimiento incompleto de la integral que un modelo "conciliador" entre esos dos puntos de vista: el geométrico y el analítico.

De hecho, para describir la propiedad lineal de la integral incluyendo componentes geométricas y numéricas no hace falta la división de la región ya que f es positiva. Pero si se habla de calcular áreas, por efecto del contrato, predomina la estrategia del signo cuando la función es negativa. Por lo demás, el medio didáctico les pide verificar la relación entre las áreas, aproximando por áreas de polígonos simples pero como el rol de esta pregunta no pertenece al contrato didáctico, no llegan entonces a comprobar la validez de sus resultados.

Por lo anterior, no podemos decir que Roberto y Tomás justifican la aplicación de la TL como una herramienta lineal que les permita conducir el cálculo del área. No les proporciona el marco necesario para traducir el problema geométrico y tampoco la usan como un detonante para mejorar su comprensión lineal.

Características:

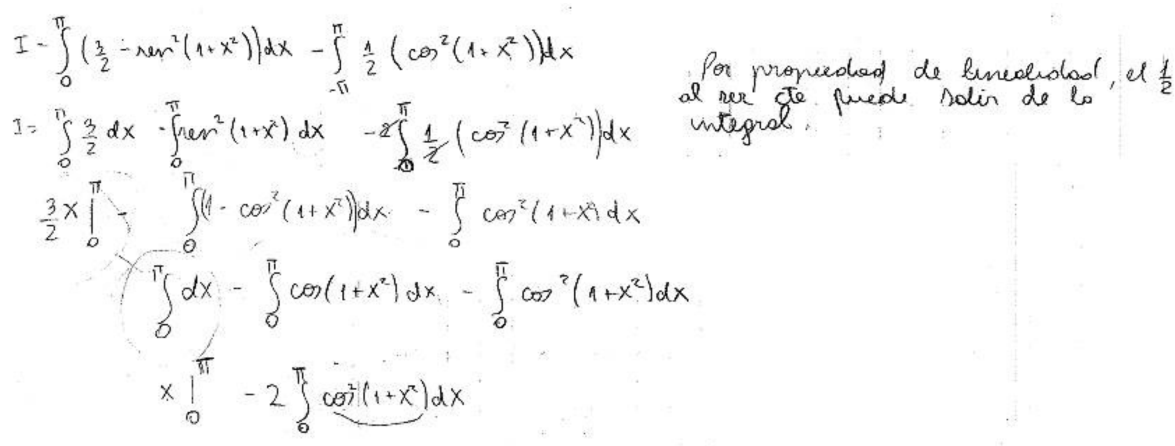
- Ponen en relación los objetos matemáticos subyacentes en un modelo original.
- Eligen un método de resolución en función de criterios (eficacia, convergencia, etc.).
- Explican el funcionamiento de las propiedades lineales del operador de integración.

- Presentan dificultades con las “áreas negativas” al pasar de la descomposición en subregiones a la descomposición de la integral. En particular identifican la integral de una función con el cálculo de área.
- Valoran la simplicidad que les entrega la TL.

Utilizan la TL eficazmente para simplificar el problema de integración, pero en el uso geométrico que supone el control de la modelización del área, el concepto se encuentra limitado por una falsa concepción. Quedan a nivel de estructuración sin lograr la reformulación del concepto.

Equipo 2: Octavio, privilegia una forma pragmática de utilizar las propiedades lineales de la integración cuando separa la integral para poner en evidencia el uso de tales propiedades. Esta utilización lo lleva a reconsiderar las propiedades lineales para una mejor acción, accediendo así a una mejor comprensión del concepto lineal. En el recurso geométrico del cálculo del área, donde está confrontado a un nuevo enfoque de la utilización de la linealidad, se desenvuelve con reglas específicas de integración en la explotación de los vínculos por la linealidad de la integral. Limitando así su capacidad de emitir un juicio sobre el funcionamiento lineal en el contexto geométrico.

El impulso de querer calcular lo lleva, en un primer momento, a separar mecánicamente las integrales aplicando consecutivas veces la linealidad del operador. Pero en este desarrollo comete un error algebraico del signo el cual lo lleva a una integral compleja de resolver.



(Octavio)

Figura 71. Aplicación consecutiva de la propiedad lineal

La utilización de la propiedad lineal parece contribuir a la comprensión del concepto lineal del operador ya que identifica una relación lineal (invariancia de la multiplicación por escalar).

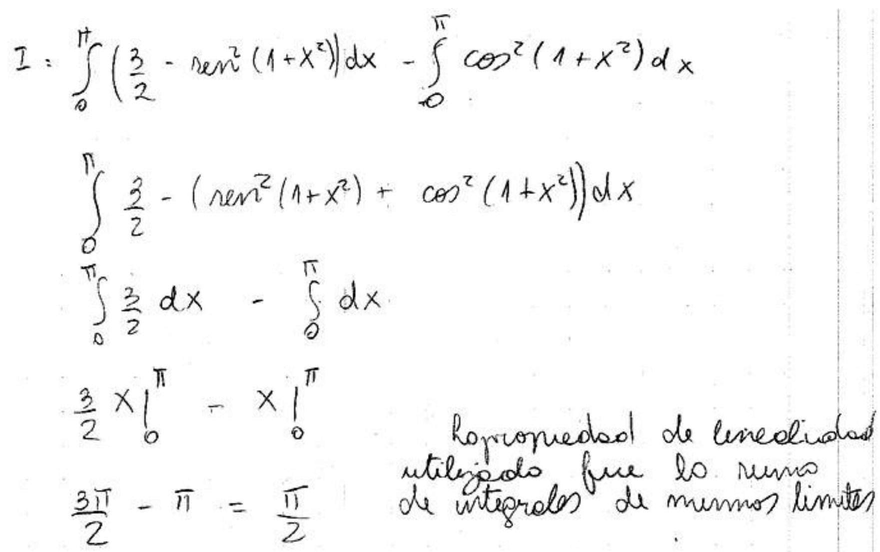
La complejidad de la integral que obtuvo lo obliga a cambiar su punto de vista; del automatismo de separar la integral a utilizar de manera más pensada tan acostumbrada propiedad, testimoniando aquí una cierta apertura al enfoque deductivo:

> *"De la integral de las propiedades lineales de la suma de las funciones que están dentro de aquí, que si tienen los mismos límites se pueden juntar dentro de una sola integral. Entonces ya se simplificó todo, ya era más fácil y ahí saqué el valor"* (Octavio).

Además, esta dificultad resulta ser también efectiva porque hace destacar un hecho importante en el desarrollo de la integral inicial; el uso de la propiedad lineal aditiva en el "sentido inverso" de la igualdad, es decir, "factorizar" en lugar de "descomponer". Octavio se refiere a eso como *"…las junté en una sola integral"*:

"Pero, que la vez anterior era muy complicado sacar la integral. Probé una forma de separarlos, ahora junté las dos integrales, éstas de acá, que a la final era lo mismo, las junté en una sola integral (Octavio).

Si el tratamiento está completamente correcto y completo, nuevamente, en pleno proceso, se observa el reflejo de separar la integral para asegurar el valor de la integral, condición no necesaria para la situación:

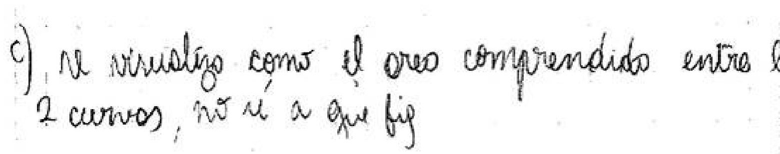


(Octavio)

Figura 72. Identificación de la propiedad lineal aditiva

Recurre a la lengua natural para expresar la propiedad lineal aditiva de manera general sobre un intervalo de definición. Esta traducción que resulta de su interpretación, es un primer paso para ir más allá de la "separación de una integral" para atribuirle un sentido lineal al proceso que realiza ahí, si miramos la igualdad de la propiedad lineal en dirección opuesta como más difícil de ejecutar para los estudiantes por esa técnica. Puede ser también, una primera aproximación a representar el concepto lineal de manera más funcional.

El origen de querer "*juntar o separar*" para simplificar encuentra en él, la dificultad de calcular el valor de la integral. Dificultad que lo lleva a proceder de forma pragmática para resolver la integral. Esta última se convierte en la realidad "concreta" que hay que manipular aplicando los procedimientos prescritos, pero al momento de verificar el resultado por el área de una figura más sencilla, simplemente reconoce no saber hacerlo:

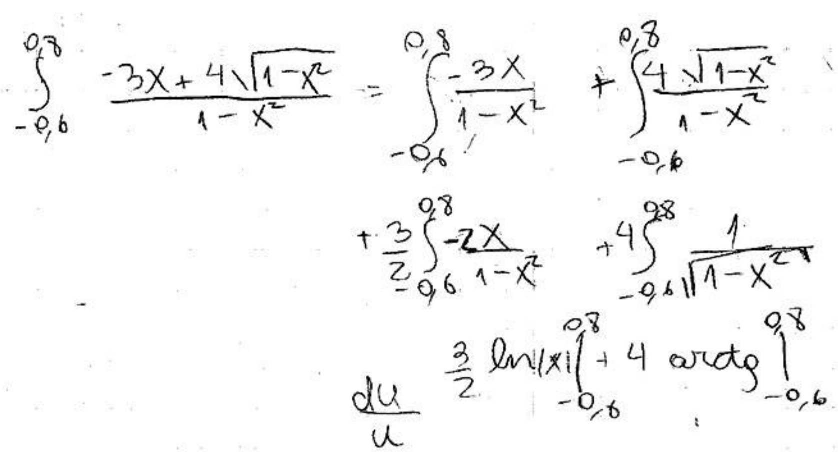


(Octavio)

Figura 73. Interpretación del resultado de la integral

Limitándose a ver el área entre las curvas decidió no involucrarse en esa investigación.

En la aplicación lineal, con la suma de la integral, se observa una manifestación clara de un tal procedimiento experto en la búsqueda del valor numérico de la integral que hace en el problema de la segunda parte de la actividad:



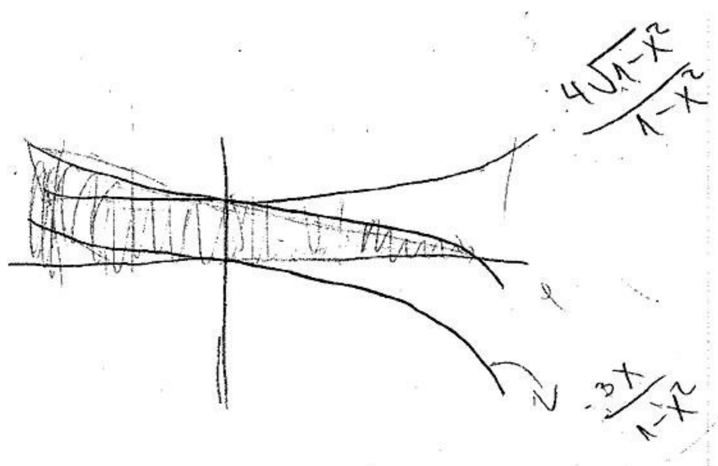
(Octavio)

Figura 74. Uso experto de las propiedades lineales

"Aquí…las separé en dos integrales entonces ya era más fácil encontrar el valor. Entonces sacaba las constantes y me daban las integrales conocidas" (Octavio).

"Sumo esa más esa me tiene que dar lo mismo que el área de la curva" (Octavio).

Suma las integrales sin explicitar las asociaciones que hace entre la descomposición lineal de la integral y la relación geométrica de las regiones representadas, para medir el área de Ω:



(Octavio)

Figura 75. Explicación del resultado de la suma de las integrales

Se adhiere bien al modelo lineal preparando las integrales, listas para su cálculo, no colocando necesariamente en evidencia la función de la TL con el área que refleja en el gráfico. Aunque produce un enlace geométrico entre la suma lineal de la integral y lo que representa en términos del área, no pone en cuestionamiento el resultado de la integral con el área de las regiones acotadas por el gráfico de las funciones para que la suma lineal represente lo que está calculando. Este hecho parece confirmar la dificultad de la confusión entre la integral y el área, al no valorar el rol del modelo lineal para guiar dicho cálculo y para poder explicar la validez del resultado inicial.

Características:

- Utiliza la linealidad del operador de integración para simplificar el cálculo de la integral.
- Explica en lenguaje natural las propiedades lineales y sus condiciones de aplicación.
- Dificultad para validar el área de una región (Ω) aproximando por áreas de regiones más simples.
- Dificultad en vincular la descomposición en subregiones de la región (Ω) con la descomposición lineal de las integrales para el cálculo del área.

Utiliza la herramienta lineal para simplificar el proceso de cálculo pero sin haber desarrollado los medios geométricos completamente en vinculación directa con la TL. Percibe la utilidad técnica de la TL quedándose a nivel de comprensión.

<u>Equipo 3: Emilio, Fernando,</u> utilizan explícitamente las propiedades lineales del operador integración para transformar expresiones complejas en otras más simples de calcular. Enfocando de forma precisa y razonada el funcionamiento del modelo lineal. En esto, muestran una concepción lineal de la integral a nivel de estructuración, lo que les permite conducir el cálculo del área. Esta vinculación se ve reflejada en la relación entre las áreas de las regiones que hacen (para medir el área de Ω); apreciando la propiedad lineal por la suma de las integrales.

Si ambos estudiantes redefinen espontáneamente la linealidad, es interesante ver cómo Emilio demuestra una capacidad de síntesis en sus desarrollos, evitando así la explotación innecesaria de las propiedades lineales en la simplificación de *I*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos^2(1+x^2)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(1+x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 \cdot \int_{0}^{\pi} \left(\cos^2(1+x^2)\right) dx \right]$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos^2(1+x^2)\, dx$$

b) $I = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \sin^2(1+x^2)\right) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos^2(1+x^2)\right) dx$

Reemplazamos el resultado anterior:

$$I = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \sin^2(1+x^2)\right) dx - \int_{0}^{\pi} \cos^2(1+x^2)\, dx$$

Utilizamos la linealidad con la suma:

$$I = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \left(\sin^2(1+x^2) + \cos^2(1+x^2)\right)\right) dx$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 1\right) dx = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = \frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

(Emilio)

Figura 76. Simplificación de la integral *I*

En la validación del modelo lineal Fernando asocia el símbolo "π" de su resultado a una semicircunferencia pero sin revisar la estructuración lineal que le pide la situación:

> *"...por el hecho de que fuera $\pi/2$... me imaginé una semicircunferencia para explicarlo acá lo tomé como una circunferencia con radio 1, el área sería πR^2, entonces la mitad del área sería $\pi/2$ por eso lo asocié a una circunferencia"* (Fernando).

La familiaridad que tiene con la tarea, le hace conferir al resultado una figura geométrica sencilla pero desconectada del punto de vista lineal, dispensando así el trabajo de juzgar el realismo de la respuesta obtenida de la estructuración lineal.

Aunque Fernando no parece hacer una revisión geométrica del modelo lineal, él hace beneficiar la estructuración lineal aplicando bien las propiedades lineales de la integral, procurando de abstraer un modelo que le permite simplificar y favoreciendo a la vez una generalización:

> *"Porque ahí cuando noté que era una suma se podían empezar a separar y a trabajar como las funciones por separado, pero visualizar ahí tuve problemas"* (Fernando).

> *"Qué da una forma más eficiente de trabajar con ciertos modelos, cuando un modelo es lineal, uno ya tiene la noción de que todos los cambios pueden descomponerse en cambios; digamos individuales a lo que se quiere operar, se puede descomponer y esos cambios van a ser igual si se hubiera hecho el cálculo completo, se puede como modelar ciertos trabajos"* (Fernando).

En el desarrollo de su relación con la aplicación lineal Emilio se desenvuelve bien, reconoce las condiciones de aplicación de las propiedades lineales de la integral y las utiliza para desarrollar el razonamiento del área de la región Ω en la partición en sub-regiones.

Primeramente, estructura el modelo lineal teórico con el operador de integración:

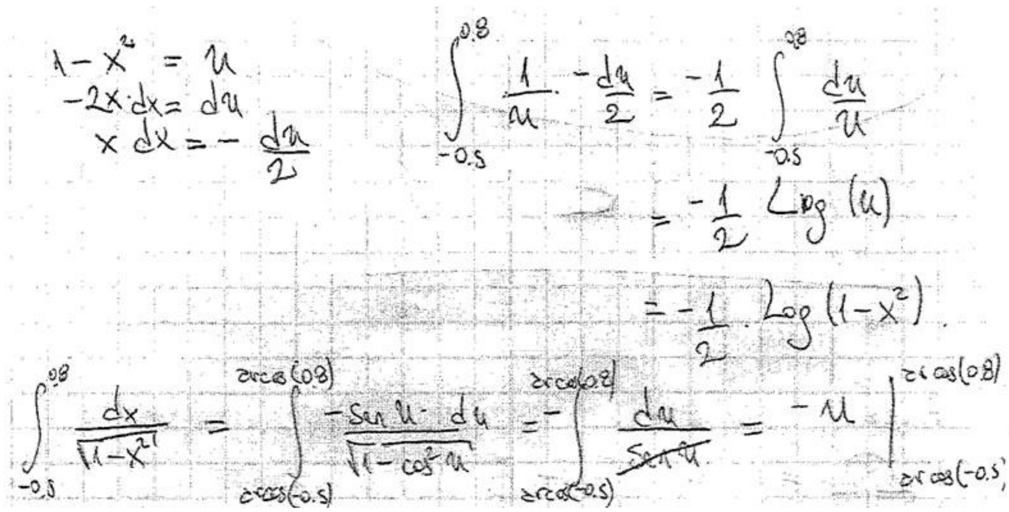
$$\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\,dx = \int_{-0.5}^{0.8} \left(\frac{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)dx = \int_{-0.5}^{0.8} \frac{-3x}{1-x^2} + \int_{-0.5}^{0.8} \frac{4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx$$

$$= -3\cdot\int_{-0.5}^{0.8} \frac{x\,dx}{1-x^2} + 4\int_{-0.5}^{0.8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Emilio)

Figura 77. Aplicación del modelo lineal

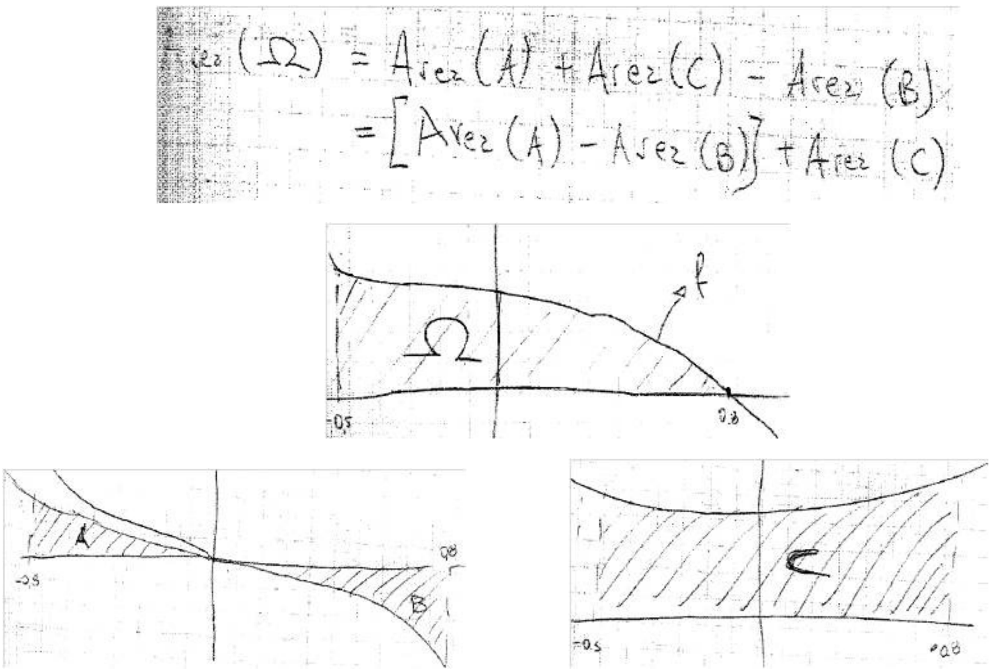
Luego, aplica un tratamiento técnico a las integrales, llegando incluso a obtener un resultado numérico para el área de Ω:



(Emilio)

Figura 78. Resultado numérico del área de Ω

Este resultado le será útil para validar su modelo lineal poniendo en contribución el sentido del concepto en el contexto geométrico, tarea que el medio didáctico le requiere. Para poner en relación la representación geométrica, Emilio busca separar la región Ω de manera de integrar la TL en la medida del área. La elección de su estrategia incorpora las propiedades lineales para enmarcar sus operaciones como resta de áreas y suma de integrales, asegurando así la eficacia en la ejecución de su acción:



(Emilio)

Figura 79. Validación del modelo lineal

Emilio vincula el área coherente a la suma lineal de la integral sin hacer separación de regiones según el signo de la función. Él razona sobre la estructura lineal que no distingue el signo de la función negativa, ya que, la TL por sí misma se encarga de sustraer las áreas. Aunque en su desarrollo favorece los vínculos entre estos dos puntos de vista, él tampoco verifica la relación de las áreas aproximándose por áreas de polígonos.

De otro lado, Fernando nos comparte una reflexión sobre el aspecto de las tareas y de sus resoluciones, el sentido unificador que había experimentado con la TL. La opinión de Fernando atribuye a la resolución de la secuencia de tareas, lo que le permitió hacer comprender por sí sola el carácter unificador del concepto:

> *"Unificador, como unificador yo entiendo que puede ser que es aplicable a muchas disciplinas distintas, como se vio con las actividades, la primera ya tenemos economía, después tenemos geometría, tenemos física y al final pasamos por cálculo, y que todos comparten los mismos principios elementales, yo creo que eso es lo que se refiere con unificador y los mismos temas que se han tratado son ejemplo de ello"* (Fernando).

Características:

- Utilizan las propiedades lineales para simplificar y economizar cálculos.
- Utilizan la linealidad en un marco abstracto que transforma la resolución más elegante y eficaz.
- Explican el funcionamiento de una propiedad lineal.
- Ponen en relación la representación gráfica.
- Sintetizan el desarrollo del proceso de cálculos.
- Vinculan el área de la región total Ω en coherencia con el modelo lineal.
- No identifican el resultado con el área de una figura simple.
- No utilizan elementos geométricos simples para validar geométricamente el resultado del cálculo de área (aproximación por el área de polígonos).

Organizan sus resultados en función de la TL para guiar los vínculos entre el marco geométrico y el analítico. Estructuran y transfieren eficazmente el concepto al contexto geométrico. Se quedan a nivel de estructuración a un paso de la reformulación de la TL.

Tabla resumen de las producciones

Equipos	**Características principales**	**Análisis global**
Equipo 1 Roberto/Tomás	Establecen un método de resolución explicando las propiedades lineales que intervienen. Imponen técnicas de cálculos de áreas y no pilotean las relaciones geométricas y procesos algebraicos de la integral con la TL.	La puesta en acción de la TL en el marco geométrico se revela desestabilizadora para los estudiantes que no han sido confrontados a cálculos de áreas por aproximaciones de figuras simples. Las formulaciones hechas de la TL en el marco geométrico revelan un falso conocimiento de la integral, quedando a nivel de estructuración sin reformular el concepto.

Equipo 2 Octavio	En un lenguaje natural explícito explica las propiedades lineales que hace uso de la integral. Percibe la utilidad técnica de la TL. Dificultad de vínculos de la integral con el área por medio de las propiedades lineales.	Tratando de identificar el método que hay que aplicar le lleva a descuidar el nivel de estructuración comprendiendo en función de la técnica de la integración.
Equipo 3 Emilio/Fernando	Reconocen el carácter general de las propiedades lineales para la reformulación del área. Establecen las relaciones lineales en el marco geométrico en coherencia con las formulaciones algebraicas hechas en el marco analítico. No utilizan el área de polígonos simples para aproximar el área de la región como una forma de validar el valor total del área.	Transfieren de manera eficaz el modelo lineal y confieren una revisión consecuente de la estructural lineal en el marco geométrico. Utilizan la herramienta lineal de manera eficaz dando cuenta de un método general y unificador para resolver el problema del área con la TL.

4.7 La travesía de la secuencia por los estudiantes

El análisis del trabajo de los estudiantes en la resolución de los problemas muestra una progresión en la abstracción del concepto TL y su utilización espontánea. La utilización de la linealidad en distintos contextos matemáticos trae consigo el potencial para tal progresión. Para intentar comprender mejor la articulación entre las actividades hacemos una descripción del uso de la TL en la travesía de la secuencia de las tareas para hacer emerger la unificación de los procesos implicados en las soluciones.

En la actividad "*En busca de un modelo*", explicar la naturaleza de los datos de una tabla de valores hace presentir implícitamente un modelo lineal. La lucha por las reglas de formación que traducen diferentes combinaciones de los kilogramos en coherencia con los precios, contribuyó en sí a cambiar el punto de vista de hacer funcionar la proporcionalidad. Resulta que, retienen las propiedades lineales que sacan de una síntesis de diferentes representaciones de los procedimientos de combinar paquetes. Este efecto de no linealidad no solo proporcionó una influencia pensada sobre la comprensión lineal, sino también hizo tender en la segunda actividad a la estructuración de la rotación en función del concepto lineal. Algunos estudiantes lo mencionan de manera explícita (sección 4.6.2).

El principio de resolución lineal que aplican para estructurar la "*Rotación del plano cartesiano*" está basado en la invariancia de la estructura "combinación lineal". La matematización que hacen de la solución la basan en la observación del modelo lineal de $\mathbf{R}^2$ para sugerir, por analogía y deducción, el funcionamiento de la rotación. Esto facilitó el paso a la estructuración y al reconocimiento de la eficacia en rotación de puntos que la rotación de todo el sistema cartesiano se reduce a la rotación de los vectores canónicos. El efecto de esta forma de comprender la linealidad se ve reflejado más adelante con la aplicación física del concepto cizalladura.

Esta parte de la tarea, también permitió sensibilizar al equipo 1 a la cohesión general que la economía del concepto lineal sirve tanto por la aplicación en otras disciplinas como por un método general aplicable a todos los casos:

> *"En matemáticas casi todas, separar y juntar elementos es mucho más fácil a veces, permite un desarrollo más fácil, entonces el cálculo se va a hacer más fácil si veo dónde separar o dónde juntar"* (Tomás).

En este mismo grupo que trabajan a nivel de estructuración y luchan a nivel de reformulación, comprobamos que intentan transferir el sentido lineal de la rotación más que el modelo mismo, con la acción gráfica de deformación en la "*cizalladura*". La utilidad percibida por la rotación resulta ser tan eficaz, que no toman en cuenta la naturaleza lineal de la cizalladura para poder juzgar si desarrollada de esa manera (como una rotación sobre el vector ortogonal) se corresponde con la definición. Por su parte, la definición cizalladura, formal y general, pareció ser muy complicada para controlar la representación gráfica por la exigencia de su escritura, propia de la física, y novedosa en su presentación. Además, disponían de este único medio para comprobar el resultado de esa deformación.

En el equipo 3, que trabaja a nivel superior, los estudiantes retienen la estructuración con la "*cizalladura*": se sirven de ella para guiar y controlar el procedimiento lineal geométrico. Ellos sienten que la situación "*cizalladura*" reutiliza el concepto TL para un enfoque más general que el desplegado en la rotación. Reutilizando la estructura que desarrollaban con la TL frente al problema de rotación, reformulan el problema de cizalladura en términos de una base que resulta más eficaz.

> *"A ver, por ejemplo en esta parte* [en la cizalladura], *aquí ya logré digamos internalizar mucho más la forma de descomponer algo, trabajarlo de una cierta forma y recomponer la forma ya trabajada"* (Fernando).

Para este equipo, la actividad en sí sirvió para beneficiar a la estructuración de espacios vectoriales y unificación del vector. Sirvió también a la funcionalidad de la linealidad que se pone de manifiesto de modo concomitante a la transformación. Sobre todo en la primera parte en que se reformula la cizalladura utilizando la TL a consecuencia de la deformación producida sobre los vectores u y $\vec{u}_{\perp}$ (que forman una base de $\mathbf{R}^2$), es donde ya apareció un esquema simplificador más conveniente para los estudiantes más sensibles a ese tipo de abstracción:

> *"Que ahí pude como internalizar la forma de tener algo que transformar, descomponer ese algo, transformarlo por separado y después volver a unir y ahí como que se formó un esquema para seguir trabajando lo que venía adelante"*(Fernando).

Para los estudiantes que prefieren aprender a utilizar métodos de cálculo y a validar por métodos conocidos, pareció más difícil lidiar con la complejidad de la situación:

> *"Sí se tiene conocimientos ya de algo, sí, pero si uno está, por decirlo así, con la mente en blanco con alguna materia, por lo menos, creo yo, que no se puede llegar y hacer algo que uno no conoce"*(Pedro).

La acción cizalladura a través de una rotación de ejes cartesianos acaparó la atención de los estudiantes por la posibilidad de poder estructurarla de manera más fácil y simple, fácil por el cambio de base de la matriz y simple por el tratamiento horizontal de la deformación. De manera que el rol lineal de la rotación implica el cambio de base en la representación matricial a consecuencia de la rotación del sistema cartesiano, transformando la dirección original de la cizalladura en dirección horizontal. El enfoque concernido, que está aplicado sobre las matrices y sobre el producto matricial, resulta una pista susceptible de favorecer el entendimiento de la dependencia de una base de esta representación matricial.

En la última actividad "*Áreas entre curvas*", donde intervienen los conceptos de integral y área, la TL está vista como una técnica eficaz que usan para "*separar o juntar*" las integrales. Con todo, el intento sorprendido de no arrojar cálculos inmediatos (por métodos directos conocidos) hace surgir el carácter económico de la TL y logra el reconocimiento del apoyo teórico de las propiedades lineales en la primera parte de la actividad.

En la integración de la TL al cálculo del área de una región acotada por el gráfico de funciones, las medidas utilizadas en la medición del área de las regiones que retienen, no permiten la construcción funcional del modelo. Resulta que, una técnica específica de contenido geométrico interviene en la interpretación de la medida: miden el área de la región acotada por una función negativa mediante la integral de la función y le anteponen el signo menos. Esta interpretación geométrica que les aleja del sentido de la integral no les parece requerir el control de la propiedad lineal de la integral.

> *"Porque la de cálculo de áreas, como ya habíamos visto cálculo de áreas, fue como saber un poco que iba a hacer y ver como actuaba la transformación lineal ahí"* (Tomás).

En esa actividad, el papel de la TL resultó ser más bien ***revelar*** un entendimiento incompleto que controlar y dirigir el proceso de cálculo requerido en la misma actividad: abordan la TL sólo por su carácter operatorio. El equipo, al que más le gusta la abstracción matemática, es el único que incorpora consideraciones de eficacia para expresar relaciones geométricas de dependencia lineal.

En el marco geométrico, la TL puede jugar un rol de apoyo esencial en el cálculo de áreas, a condición que no sea reducida a su cálculo técnico y que el trabajo no se limite a la simple "separación" de integrales, sino que se interrogue sus condiciones de aplicación y permita una anticipación del cálculo numérico. Sin embargo, es difícil superar el nivel técnico de la integral, puesto que la asociación de las condiciones de aplicación de la TL que caracterizan el área definida por la suma de las integrales, ya exige interpretaciones. De esta manera la costumbre de calcular la integral sin tener que plantearse la pregunta de la estructura lineal en la "separación" de las integrales puede volverse un obstáculo resistente a la articulación entre el marco geométrico y el algebraico. Este sentido obliga a salir del sólo nivel técnico de las integrales y hacer interpretaciones sobre condiciones lineales en el contexto geométrico, considerando, en el caso del cálculo de áreas, aproximaciones por áreas de figuras simples.

Sobre su percepción de la coherencia de las situaciones didácticas vemos una apreciación de la utilidad y de la claridad de las tareas:

> *"Que todas se podían resolver o relacionar en base a un sistema lineal, por ejemplo, esto* [1era actividad] *se podía demostrar que era ineficiente porque no era lineal. En cambio la segunda, por ejemplo, la de las rotaciones se podía generalizar el proceso aplicando la linealidad. La tercera, la de la cizalladura ahí ya se podía también agilizar y formalizar el proceso con transformaciones y propiedades lineales y con las integrales también se mostraban cómo se podían agilizar cálculos ocupando las propiedades lineales de las integrales"* (Fernando).

Si la unificación de las soluciones en un modelo general fue concernida al aprendizaje de la noción, esta unificación aparece como una reflexión de la construcción teórica sobre las situaciones. Los estudiantes que demuestran competencias superiores en la aplicación de la TL se aproximan más a concluir un modelo general inferido desde diferentes contextos:

> *"Como unificador yo entiendo que puede ser que es aplicable a muchas disciplinas distintas, como se vio con las actividades, la primera ya tenemos economía, después tenemos geometría, tenemos física y al final pasamos por cálculo, y que todos comparten los mismos principios elementales, yo creo que eso es lo que se refiere con unificador y los mismos temas que se han tratado son ejemplo de ello"* (Fernando).

Otros, que trabajan a nivel inferior la ven como "el método general aplicable a todos los casos" que sintetizan en "*un solo concepto*" para comprender conceptos subyacentes y vincular otras aplicaciones:

> *"Es que la transformación lineal, por lo menos, lo que hemos visto en las actividades y todo eso, todo lo que he visto hasta ahora en lo que es materia, la transformación lineal siempre estuvo ahí, aunque, a lo mejor no me había percatado, pero siempre estuvo ahí y la verdad que ahora todo eso se toma y se ve como una sola, sola fuente, podríamos decirlo así, en un solo concepto"* (Roberto).

4.8 Evolución de aprendizaje de la TL por los estudiantes

La Figura 80 (p. 278) ilustra de manera gráfica la formación del concepto TL que salió del análisis de las explicitaciones en la articulación de las actividades por los equipos retenidos. Las medidas y relaciones que aparecen en esta gráfica y que nos hace darle una forma aproximada, han sido identificadas por una gestión exploratoria e inductiva, a partir de los datos del cuestionario de entrada (A_0), las observaciones y análisis de las competencias requeridas (basadas en elementos de modelización) para la resolución de problemas y las entrevistas hechas para cada tarea.

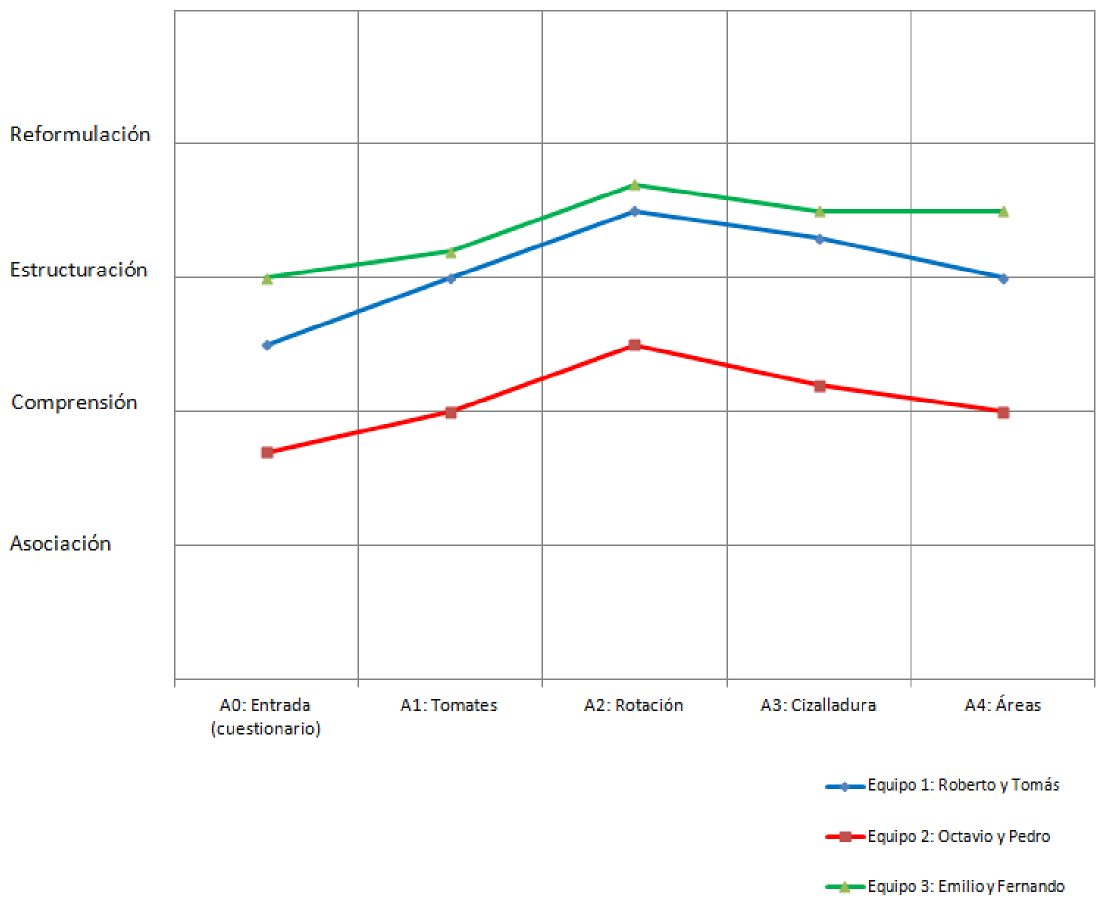


Figura 80. La progresión del aprendizaje de la TL

Los “niveles de explicitación” se lograron analizando las explicitaciones de los estudiantes manifestando en sus producciones las puestas en relación que contribuyeron en la modelización de los problemas con la TL. Estas produciones pudieron ser examinadas y corroboradas con la entrevista. Identificando las puestas en relación de las estrategias de aprendizaje con las competencias demostradas en cada actividad, hemos procurado ver, si estas competencias nos podrían contribuir a explicar la abstracción del modelo lineal. Pudimos identificar los niveles de explicitación (Caron, 2004) en la utilización de la TL que pueden contribuir al resultado de una tal abstracción, y por ende a la emergencia del concepto unificador.

El cuestionario de entrada sirvió para apreciar las concepciones y el nivel de explicitación de cada equipo al entrar en la secuencia de tareas.

En el nivel de asociación instruido por la comprensión, entran Octavio y Pedro a las tareas. Aceptan el contrato didáctico donde el profesor es el que tiene que hacer enseñar y una asociación instruida por la comprensión. Se inclinan por un enfoque procedural con la voluntad de pasar al nivel superior para vincular la TL a su aplicación. Tratan de infundir sentido a los conceptos enseñandos. El interés por la aplicación lineal que trae las actividades, llegó a doblegar algunas de sus costumbres de uso tradicional, incitándoles a comprender el *sentido lineal* por diferentes procedimientos para la misma aplicación: pudiendo ver las propiedades lineales a nivel operatorio y corresponder maneras de hacerlas funcionar más o menos eficaces en ciertas tareas. A partir de la situación real (de los tomates) por ejemplo, estos estudiantes produjeron un modelo de carácter funcional principalmente por una regresión lineal con el fin de predecir la situación del vendedor aunque sin alcanzar a contemplar la explicación del fenómeno. Aún así, la representación gráfica ayudó a contemplar más allá de la predicción una condición lineal impuesta por el contexto, la condición de *invariancia del cero*, que favoreció a una comprensión del concepto. Además, ver el tipo de distribución que tienen los datos (razón de cambio no uniforme) los motivó a prescribir el modelo lineal sin cuestionarse la correspondencia con el modelo real. Así mismo, en el marco geométrico, la rotación les permitió vincular diferentes fórmulas a la misma aplicación llegando a validar por el sentido lineal la rotación, sólo de manera local (rotación de los vectores canónicos). La especificidad comprendida de esta validación les hace interpretar la representación geométrica en forma lineal (a nivel de coordenadas).

En el nivel de comprensión, luchando por una estructuración, se encuentran Tomás y Roberto que buscan regularidades para comprender y establecer el modelo lineal. Su interés hacia aplicaciones les conduce a una mayor autonomía para comprender en mayor profundidad. Para describir y resolver situaciones complejas se basan en la construcción de modelos simples (relaciones de recurrencia) cuando intentan explicar de manera coherente el fenómeno, y resolver la situación en el contexto (del vendedor de tomates) por el sentido lineal. Acuden al sentido del concepto por la gráfica, que les trae la noción de “razón de cambio” y que les sirve para validar las regularidades. Infunden un sentido lineal ayudándose implícitamente de la herramienta lineal. Por un lado, la representación gráfica sirvió para encontrar el sentido detrás de los datos (por la situación no lineal) y darse cuenta de la complejidad de la situación y por otro, la comprensión de esta realidad en toda su complejidad contribuyó la necesidad de un cierto nivel de abstracción.

El modelo lineal les proporcionó un medio de unificación y justificación de resultados formulados por las proporciones. Al percibir esta utilidad, ganan en interés por el modelo lineal, procuran una actitud de cuestionamiento y utilizan el razonamiento lineal para seleccionar elementos de eficacia hacia soluciones generales. Esta utilidad es mejor valorada con la rotación; eso facilitó la estructuración sobre el principio subyacente (la invariancia de las combinaciones lineales) para abstraer las características lineales y generalizar en todo el plano $\mathbf{R}^2$. De esta manera, el modelo lineal les aparece más económico y útil. Se convencen de la utilidad de la TL para su aplicación, en particular la cizalladura, pero al no tener familiaridad con esta definición, no supieron controlar su uso y les condujo a una interpretación “falsa” (combinando la identidad y la rotación), necesitando el pasaje del marco algebraico al marco geométrico.

La utilización de la linealidad también les invita a una validación por el sentido para favorecer la estructuración de manera más fácil y simple: se sirven de la rotación como enlace para ver cómo funciona la cizalladura. Y además, el hecho de que un cambio de base mantiene invariante a la linealidad, eso les hace entender mejor las relaciones entre las variables.

Vienen a juzgar el valor de la TL a la luz de la utilización que le han proporcionado. En la secuencia didáctica, por un lado, la TL primero está vista como una especie de "*invariancia de combinaciones lineales*" que aparece de manera recurrente en las resoluciones de las tareas: su contribución a la cohesión general de la secuencia que permite justificar la unificación, aparece con claridad en la interacción con distintos dominios. Por otro lado, si una utilidad de las transformaciones lineales ha sido ilustrada, por estos estudiantes de ingeniería, de forma explícita en un curso de mecánica con la funcionalidad de las poleas, rara vez en la enseñanza de la TL este cuestionamiento se hace explícito. A pesar de los diferentes tipos de dependencias que interactúan con ciertas concepciones ya construidas por los estudiantes: proporciones, transformaciones geométricas, aplicaciones físicas…etc.

En el nivel de estructuración, en la entrada de las tareas, encontramos a Emilio y Fernando. Buscan transferencia por reformulación, utilizando el cuestionamiento y la argumentación para identificar el alcance del concepto lineal: en la cizalladura, proceden en una estructuración geométrica por el razonamiento lineal de la TL, esquematizan la cizalladura por el modelo lineal en un problema nuevo en su relación con la aplicación. Reconocen en el modelo teórico una utilidad para desarrollar el razonamiento y llevar a una elección clara en la resolución de problemas. Proceden por analogía en el problema de cálculo de área: determinan utilizar la TL para lograr el pasaje del marco algebraico al geométrico (utilización que los otros equipos no pudieron hacer) que es más exigente que el acostumbrado, porque exige interpretaciones sobre las condiciones de aplicación de la TL más allá del nivel técnico.

4.9 Articulación de la secuencia didáctica

Al observar el tratamiento de los estudiantes de cada actividad, se puede volver sobre la articulación de la secuencia didáctica y su contribución al aprendizaje del carácter unificador de la transformación lineal, y al pasaje a niveles más abstractos de explicitación.

- La *actividad 1* sitúa a los estudiantes frente a un conflicto al cual no están habituados. La incoherencia de los datos de la tabla de valores resulta suficiente para impedir todo intento de resolver la pregunta por el único medio que conocen cuyas soluciones entran en contradicción con el resultado esperado. A partir de la integración de las combinaciones lineales, a la búsqueda de un resultado único y coherente, la necesidad de hacer funcionar el objeto TL y eventualmente definirlo se impuso. La validación que hace seguir la tarea no solo favorece la comprensión del concepto por la acción, sino que permite también cuestionar su generalidad acerca de las condiciones impuestas por el contexto y a comprender las causas del conflicto aparente. El cálculo de los valores que se revelan inadecuados al objetivo inicial actúa como un detonante para hacer erradicar la propensión a caracterizar la linealidad por las relaciones de tipo proporcional (directa) a favor de una capacidad de producir una generalización de cambio, lo que proporciona una influencia a un nivel de explicitación superior. La abstracción que resulta de la modelización hace presentir un modelo general de la "*invariancia de las combinaciones lineales*" para poder **prever** y **explicar** la situación. Es decir, la actividad no sólo trata de hacer establecer una relación (algebraica, funcional, etc) entre las variables sino que también **coherente** con la suma de cantidades (pesos y precios), lo que hace hacer al modelo más simple aún. Se constata que las relaciones contempladas de la búsqueda de un tal modelo tienen una forma explícita que se le acerca a la TL.

- La *actividad 2* permite hacer considerar la **eficacia y economía** del modelo lineal como herramienta útil de resolución del problema de rotación. Utilizan la propiedad de la "*invariancia de las combinaciones lineales*" como enlace operatorio para combinar un problema complejo en varios sub-problemas más simples de ejecutar (como el problema de poleas móviles en Física*;* extracto de la entrevista; p. 214*).* Los estudiantes tienen razón de reconocer que el tratamiento matemático de la rotación, para la cual también disponen de un método geométrico, se revela **coherente** con la estructura de espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ (sección 4.6.2; Figura 33,

Figura 34 y Figura 45). Este conocimiento hace valorar la rotación en los vectores basales como método de resolución más simple de operar y más fácil de comprender. También lo utilizan para deducir o **explicar** la generalidad del modelo con los resultados que obtienen (sección 4.6.2; Figura 33, Figura 34 y Figura 45). Tal utilización abre el enfoque unificador y da un sentido a la rotación como una transformación lineal, prosiguiendo con el desarrollo de una concepción más abstracta y conduciendo a extraer las características generales del modelo para dotarse de una nueva estrategia algebraica más **económica** y **eficaz**. Además, la integración de la herramienta matricial, cuya validación había sido apoyada en el modelo geométrico, hizo contemplar la TL como un objeto formal más familiar y de manera más funcional con el producto matricial.

- La a*ctividad 3* permite utilizar la estructuración para reformular la cizalladura y resolverla. Permite también **explicar** las condiciones generales de utilización combinando objetos y conceptos unificadores (vector algebraico, representación de vectores como combinación lineal, base) (sección 4.6.3; Figura 59 y Figura 60) para desplegar el concepto y sus propiedades lineales. La cizalladura proporciona un marco algebraico para hacer constatar que la TL es parte de una teoría más general y no necesariamente un método iterativo de resolución. La definición formal que presenta (en términos de una base y la linealidad) puso obstáculo al despliegue de su representación geométrica aproximándose a la historia cuando la formalidad del concepto representaba un cambio de perspectiva que inducía un pensamiento más sofisticado. Haciendo el examen del rol algebraico-vectorial del modelo se intenta sacar el carácter unificador de la TL concibiendo el pasaje del marco algebraico al marco geométrico. Expresar la cizalladura no horizontal en términos de transformaciones lineales más simples (composición de dos rotaciones y una cizalladura horizontal) permitió también poder encontrar nuevas utilizaciones e interrogar la **cohesión** matemática respecto de una estructura algebraica (grupo). Hasta para poder integrar cierta conceptualización de la dependencia de una base que resulta del cambio de ejes ortogonales (de la base ortogonal a la canónica), lo que permitió **explicar** y **describir** el pasaje del marco algebraico al geométrico volviendo a la cizalladura original. Todo esto constituye una buena ocasión para conceder a la matriz un rol de objeto (formal) en vínculo directo con el procedimiento lineal, en contribución del sentido de las matrices como un objeto de una teoría unificada y no solo como un elemento aislado.

- La *actividad 4,* pide utilizar la estructura lineal del operador de integración para dirigir el cálculo del área. Pero la TL se revela más bien adecuada a **revelar** una concepción errónea de la integral definida (como área positiva) que **predecir** una aproximación por su valor (sección 4.6.4; Figura 68 y Figura 70). La reformulación del concepto en el contexto geométrico se revela desestabilizadora para los estudiantes que no habían sido confrontados a este tipo de tareas de aproximación de áreas por figuras simples. Al variar esta enseñanza de la TL, concediendo más espacio al desarrollo de tareas que permitan asegurar la **coherencia** del modelo de la TL (en la articulación de una representación a la otra), se gana un cambio de punto de vista que induce un cambio de nivel en las explicitaciones haciendo funcionar más el operador lineal. Este cambio requiere inevitablemente, en la revisión de las integrales complejas, dejar las técnicas por manipulación directa y recurrir a la TL como herramienta necesaria de estructuración**.**

La mayoría de las tareas involucraron formas de comprensión, estructuración y reformulación para interpretar, justificar y reformular los resultados de la modelización de los problemas. La observación detallada de las producciones de los estudiantes dejó ver un auténtico uso de la herramienta lineal, otorgando un verdadero interés a la eficacia y simplificación que con ésta producían, en la integración de sus resultados. Por su parte, el modelo que resultaba debía retener en primer lugar una concepción unificadora que requería una buena capacidad de identificar los elementos esenciales. Tal como se muestra en los análisis *a posteriori* y en los análisis de las entrevistas se comprobó que los estudiantes:

- En la *1ª actividad*, todos los estudiantes orientaron la búsqueda del modelo general utilizando las propiedades lineales. Para asegurar un precio único y coherente recurrieron a la coherencia del modelo, a la vez, de modo interno (con las propiedades proporcionales) y de modo externo (con las condiciones de la situación). Se observó que los estudiantes revisaron algunas regularidades que les pareció plantear el problema; por ejemplo, un modelo discreto (1, 2, 3,…kg; que incluye los valores de la tabla) y luego deducen un modelo continuo (x kg; que incluye valores fraccionarios) y utilizan una razón de cambio que trae consigo la "*invariancia de las combinaciones lineales*" para unificar los valores (sección 4.6.1; Figura 22, Figura 23, Figura 24 y Figura 30). Utilizando reglas de proporcionalidad unifican así las combinaciones lineales, y constituyen un modelo general donde apoyan la validación de sus resultados, teniendo en cuenta el contexto que procuran representar. Haciendo esto, los estudiantes aceptaron una "transformación" del concepto proporcionalidad liberándose de la concepción discreta y aritmética, adecuándose al cambio de variación en un modelo continuo de un nivel de conocimiento de jerarquía mayor (Sfard, 1991).

- En la *2ª actividad,* se observó que transfirieron bien al contexto geométrico de la rotación el uso de las propiedades lineales que habían desarrollado en la primera actividad (sección 4.8; Figura 80). Reconocieron en este contexto la eficacia del modelo lineal y su carácter explicativo. Los estudiantes muestran una apertura a las propiedades lineales con una nueva estructura de linealidad y son capaces de hacerlas funcionar en el marco geométrico. Observamos también un cambio de punto de vista "punto/vector posición" cuando usan las relaciones lineales del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ (sección 4.6.2; Figura 33, Figura 34 y Figura 45) para formular la rotación de puntos de $\mathbf{R}^2$. Con este tipo de utilización ellos constataron la eficacia del modelo lineal evidenciando la cohesión de las matemáticas con la validación de sus resultados (sección 4.6.2) e identificaron las características esenciales que definen el modelo abstracto. Así, la rotación está vista y formulada a un nivel superior (Sfard, 1991; Caron, 2001) de pensamiento en contribución de la estructura vectorial subyacente reduciendo su acción sobre los vectores basales. Esto les permitió dar cuenta de la estructura lineal del concepto enseñado, producir respuestas económicas y reconocer el potencial de la invariancia de las combinaciones lineales (sección 4.6.2; extracto de la entrevista, p. 213). Además, algunos de los estudiantes descubrieron la acción de la rotación (asociada al contexto geométrico y funcional) como un producto matricial, que hasta ese entonces apreciaban (la rotación) como una representación matricial aislada de la TL (sección 4.6.2).

- En la *3ª actividad* se observó que la acción sobre los basales que traen de la rotación es tomada en cuenta para reformular (Caron, 2001) la cizalladura usando la TL. Pero, como la presentación de la definición cizalladura inducía a los estudiantes a trabajar de manera más formal, prefirieron involucrar una cierta concepción operacional del concepto (Sfard, 1991) para describir su representación geométrica sin tomar en cuenta la herramienta lineal. Esto fue particularmente evidente en el grupo típico (equipo 1). Usaron combinaciones de transformaciones de identidad y rotación para dirigir la resolución concediendo más importancia a la transferencia del contexto que al razonamiento estructurado que la tarea pedía. Permaneciendo la TL subordinada a algún tipo de movimiento de "rotación local" que parece revelar, por lo menos temporalmente, un obstáculo epistemológico a la noción de modelo unificado de la TL por el pensamiento sofisticado que ella requiere; hecho coherente con la evolución del concepto en la historia (Dorier, 1990, 2000). Al no tener una representación geométrica inicial (definida en un sistema ortogonal diferente al canónico) prevalece la cizalladura horizontal. Los estudiantes tendieron a confundirlas llevándolos a razonamientos erróneos y dificultades (D.2 y D.3 de la sección 1.4.1) muy relacionadas con las descritas por Hillel y Sierpinska (1994). De otro lado, todos comprendieron la dependencia de una base en la interpretación del resultado de la composición de transformaciones geométricas que les hizo volver a la cizalladura inicial. Ellos reconocieron el carácter operacional de la TL para simplificar la deformación y explorar nuevos métodos de resolución (sección 4.6.3; extracto de la entrevista, p. 238; Figura 64).

- En la *4ª actividad*, yendo de un marco al otro (geométrico y analítico), la tarea pide reconocer el carácter unificador de las propiedades lineales que están en juego, reconciliando el aspecto geométrico y analítico del concepto. Este proceso requiere utilizar competencias de explicitación superiores. En efecto, se debe dejar de lado la idea que la integral definida es un área, para utilizar la estructuración como reformulación de las mismas propiedades lineales. Sin embargo, la forma en que justificaron sus resultados reveló una concepción errónea de la integral definida; prevaleció la idea que la integral definida es un área (por lo que “debe dar un valor positivo”). Una dificultad que se encuentra en la enseñanza de la unificación; el rol prexistente de los conocimientos y competencias de nivel inferior (Dorier, 2000). La estructuración del concepto constituye sin embargo, para el cálculo de integrales complejas, una herramienta necesaria para los estudiantes. Llegaron a reformulaciones más eficaces de las integrales que tenían que resolver y descubrieron a la vez, la utilidad de los aspectos lineales, conocidos por ellos pero que no estaban muy bien conceptualizados, de *“separar o juntar las integrales”; “sacar el escalar”* (sección 4.6.4; Figura 69). Esto se observó cuando procedieron de golpe a calcular, asegurando el valor numérico de la integral, pero complicaron más el resultado (sección 4.6.4; Figura 65 y Figura 71). En esta acción ellos reconocieron que el aspecto general del operador lineal era adecuado y pertinente para la solución del problema (sección 4.6.4; Figura 66, Figura 72, Figura 74, Figura 76 y Figura 77).

5 CONCLUSIONES

Este trabajo ha pretendido proponer una nueva manera de enseñar la TL referida al rol unificador como condición necesaria para la comprensión profunda del concepto en su puesta en funcionamiento. Nuestro trabajo consistió en implementar en el contexto de la clase una secuencia didáctica, para hacer comprender mejor el sentido del concepto en interacción con distintos contextos suficientemente conocidos, donde la TL pudiera ser más pertinente y eficaz.

5.1 Resultados principales de la investigación

Hemos elegido enseñar la TL haciendo que los estudiantes aborden situaciones problemas originales no triviales y accesibles en distintos marcos de modo de proporcionar valor a la epistemología del saber, y darle de esta forma un sentido también. En particular, el análisis que realizamos con la enseñanza de la TL (dimensión didáctica de la ingeniería) , de la forma de educación formal o procedural (Sfard, 1991) y de la utilización del concepto, y con la historia del concepto (dimensión epistemológica de la ingeniería), de su valor unificador y generalizador (fue más fuerte que su potencial para resolver nuevos problemas) y de la poca aceptación por los matemáticos de la época (Dorier, 1990, 2000), puso en evidencia la dificultad de los estudiantes en llegar a una comprensión de la TL como concepto unificador. También destacó la necesidad de desarrollar tipos de utilización de la TL en diversos contextos, más allá de una *regla de acción* (Legrand, 2003), comprender porque el concepto funciona y para qué sirve. En consecuencia, hemos buscado favorecer en el estudiante una relación conveniente con este saber, desarrollando una secuencia de tareas que modifique el esquema actual de enseñanza de este concepto. Volvemos aquí a los preguntas de investigación que formulamos en la sección 2.6.

5.1.1 En relación con la elaboración de la secuencia didáctica

Teniendo en cuenta la dimensión epistemológica de la TL, y a partir de resultados de trabajos de didácticas de las ciencias y didácticas de las matemáticas (Dupin, 1995; Sfard,

1991) hemos podido elaborar una secuencia didáctica basándonos en elementos de modelización e intentando articular las dos formas de concebir el objeto: "procedural" y "estructural" vinculando diferentes contextos para acercarnos un poco a la historia del concepto (Dorier, 2000). Esta secuencia, innovadora en la enseñanza de la TL, se revela al mismo tiempo respetuosa de la historia del concepto matemático donde emergió como elemento unificador. Esta visión histórica nos animó en encontrar un equilibrio entre la enseñanza directa de la TL como estructura única y general y las formas en las cuales se manifestó. Buscamos vínculos entre el contenido de la noción y distintos contextos de utilización para garantizar la emergencia del concepto. Por sí misma, la secuencia didáctica se encarga de mantener un equilibrio entre el lado aplicado de las tareas a su dominio práctico profesional y el lado teórico, para ayudar a la estructuración del concepto.

La construcción de la secuencia ha sido organizada en torno a tareas cuya resolución es susceptible de necesitar o requerir la TL. En particular, tratamos de hacer buscar, más allá de un uso común, una utilidad común de este concepto a través de los diferentes contextos (aritmético, geométrico algebraico y gráfico) donde se revela explicativa. El planteamiento de la formación del concepto TL está basado en la gestión científica que los estudiantes experimentan en interacción con las situaciones, donde la modelización desempeña naturalmente un gran papel para la construcción. La modelización matemática se inscribe en el desarrollo de la capacidad de extraer la parte fundamental del concepto y atribuir el sentido conforme a su función, características y condiciones de empleo, para que desde ahí, analice posibilidades de unificación o generalización. Debido a que pide identificar objetos o relaciones conocidas, teniendo en cuenta el contexto inicial de la situación, las características que definen un modelo según Dupin (1995) y Brousseau (2003a) pueden hacer examinar los conocimientos previos desde un nuevo ángulo (Dorier, 2000) para la estrategia que pide elaborar.

Tratando de hacer producir respuestas pertinentes, estos nuevos problemas debían ser claros a los ojos del estudiante, para que se enganche el proceso de modelización (Dupin, 1995).

Revelar el aspecto funcional del objeto matemático constituyó en sí todo un desafío para favorecer tal devolución, y para tratar de evitar que los saberes que estaban incluidos no se instauraran en obstáculo a la abstracción del concepto. Por un lado, las situaciones debían comprender competencias de modelización y maneras de interpretar las soluciones y por otro lado, la TL debía jugar un rol esencial, transversal al proceso de resolución, debía aparecer como el medio más convincente de comprender y proporcionar sentido a las soluciones. En este sentido, la secuencia pone atención a los cambios de marcos, a las representaciones y lenguajes matemáticos, colocando en evidencia procesos y analogías que permitan encontrar medios de resolución más económicos y reutilizables de la noción. En conjunto, la secuencia ubica a los estudiantes en situación de resolución de problemas para que reflexionen y decidan por sí mismos si los problemas requieren un proceso integral para su resolución.

Para que el estudiante desarrolle una concepción unificadora de la TL, ha resultado importante crear situaciones sobre las acciones y procesos de *los conceptos previos* (Dorier, 1997) que den sentido a un mismo tipo de carácter lineal (proporcionalidad, transformaciones geométricas, cizalladura, áreas…etc en nuestro caso), y que sitúen a los estudiantes frente a una determinada *reorganización de sus capacidades y elementos de conocimientos* (Robert, 1998). Hemos creado algunos problemas sobre las semejanzas existentes entre procedimientos y métodos de estos conceptos para los cuales los estudiantes son confrontados a la modelización de las situaciones complejas, principalmente, *no con el propósito de resolver nuevos problemas, sino en la idea de reforzar la cohesión de las matemáticas* (Dorier, 1997, 2000; Artigue, 2002). Además, el análisis histórico y epistemológico desarrollado en torno a la TL (sección 2.1) resulta ser una componente esencial del proceso de emergencia del concepto unificador que muestra precisamente que su objetivo era principalmente encontrar un método general para resolver diferentes problemas con la misma herramienta lineal (Dorier, 1990). De manera que el diseño de las actividades más bien está ligado a aspectos funcionales del modelo, para reemplazar la complejidad estructural (Dupin, 1996; Brousseau, 2003a) del concepto, con la intención de promover la idea unificadora y generalizadora *ya que ningún problema único parece ser capaz de proporcionar una compensación suficiente por si sola* (Dorier, 1997; Artigue, 2002) en el sentido de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1998), y para darle de esta forma también un sentido.

La Teoría de las situaciones didácticas nos proporcionó un soporte teórico en el rol de los procedimientos a utilizar en la construcción del nuevo conocimiento. En este aspecto, la teoría nos permitió desarrollar medios racionales de controlar y optimizar las tareas; la retroalimentación que los estudiantes podían recibir y las formas asociadas de control y auto-validación que se inducían del *medio* didáctico de esas tareas. En este sentido, algunos estudiantes fueron capaces de juzgar realmente las dificultades contenidas en las preguntas, en el descubrimiento y la construcción de un método general gracias a la utilización de la TL. Esto les indujo a sacar sus propias conclusiones sobre la validez del método en función del contexto; produciendo resoluciones más económicas o transfiriendo el proceso de una situación a la otra para simplificar la búsqueda de la solución (rotación, cizalladura…).

Para promover la nueva visión de la unificación, la primera actividad sitúa a los estudiantes frente a un conflicto al cual no están habituados, más aún cuando sus estrategias no les conducían a un resultado único y coherente. La incoherencia de los datos de la tabla de valores resulta suficiente para impedir todo intento de resolver la pregunta por el método directo conocido (proporcionalidad). A partir de la integración de las combinaciones lineales a la búsqueda de un resultado coherente, la necesidad de hacer funcionar el objeto TL y eventualmente definirlo se impuso. Necesidad impuesta por la presentación matemática de la pregunta que no puede ser resuelta por el único medio que conocen, cuyas soluciones entran en contradicción con el resultado esperado. Las actividades siguientes llevaron los estudiantes a apreciar su carácter unificador a través de la valorización de su eficacia para reformular y solucionar problemas.

El diseño didáctico logrado nos parece constituir un aporte importante de este trabajo, particularmente, porque resultó innovador por la ausencia de problemas "simples" que permitan justificar por sí mismas la introducción de la TL (que tiene justificación sólo con su uso repetido a través de contextos distintos), y porque introduce el concepto por la utilidad percibida en interacción con distintos contextos sin seguir exactamente la cronología del desarrollo del concepto de la TL.

Nos parece que la secuencia de tareas, como producto de nuestra tesis, está bien apropiada para introducir el concepto unificador de la TL. A razón que los estudiantes ya traen una concepción global de la linealidad (que subyace a los problemas de proporcionalidad o al uso de propiedades como la distributividad y conmutatividad) de los elementos relacionados con los conocimientos lineales y competencias de nivel inferior. La adquisición del nuevo concepto parece tener todo conocimiento previo del reconocimiento de semejanzas entre objetos, herramientas y métodos, para pasar de una visión de resolución local a la búsqueda de una estrategia integral y uniforme. Estas competencias subyacentes ayudan, por el rol activo que los estudiantes juegan en su aprendizaje, a desprender una nueva representación de los conceptos involucrados en un modelo más general y unificador.

Se esperaba que los estudiantes fueran capaces de utilizar la TL con sentido y características propias en conexión con otros conceptos matemáticos, y que dieran signos de apropiación de una comprensión de la TL como concepto unificador. Valorar el análisis *a priori* en una posición detallada nos permitió reforzar la robusteza de la secuencia y al mismo tiempo preparar el análisis de los datos. En el análisis *a posteriori* de la secuencia, estudiamos de manera detallada las producciones en torno a las tareas. Como se constató a través de las entrevistas y las producciones, los estudiantes han valorado positivamente la secuencia didáctica de las tareas y reconocen su utilidad e interés para entender el concepto unificador de la TL.

5.1.2 En relación con la adquisición de la TL

Los análisis *a posteriori* muestran un auténtico uso de la herramienta lineal otorgando un verdadero valor a la eficacia y a la simplificación en los cálculos que con ésta producen. Los estudiantes conocían varias cosas sobre los conceptos implicados en la evolución del concepto (proporciones, rotación, física, áreas..), lo que produjo por parte de ellos una comprensión de la TL estrechamente vinculada a la comprensión de tales conceptos subyacentes a la noción (Sfard, 1991), por la posibilidad de volver a ellos.

Al resolver la secuencia de tareas, los estudiantes hicieron evolucionar su tratamiento de la TL, la cual tuvo más y más, la posibilidad de ser abstraída y utilizada considerablemente con sentido y características propias. Observamos además que en la exploración de las situaciones, los estudiantes buscan más trabajar un modelo unificado que tiende a simplificar las operaciones a través del contexto utilizado, comprendiendo bien sus aplicaciones.

A partir del análisis *a priori*, hemos podido elaborar una matriz de competencias matemáticas (Caron, 2001) asociando los niveles de los esfuerzos por explicitación (Caron, 2004) para poner en relación los niveles de explicitación en la utilización de la TL para la resolución de los problemas. Completando a estos datos con las verbalizaciones de las estrategias privilegiadas en el contexto de la entrevista, y con las concepciones y actitudes de entrada de los equipos en contribución por el cuestionario, pudimos caracterizar el uso de la TL por niveles de explicitación y diagnosticar de esta manera el impacto de la secuencia didáctica en la formación del concepto.

En el contexto particular de nuestra experimentación, de carácter exploratorio, creemos importante destacar los principales resultados que nuestra ingeniería didáctica permitió identificar.

- La integración de la secuencia didáctica en la enseñanza de la TL ha mostrado su pertinencia en situación de clase. Puede servir de apoyo importante (más cercano e intuitivo) a la formación del concepto TL para los estudiantes que aceptan entrar en el juego.

- La secuencia didáctica permite referir al modelo lineal teórico para reformular, interpretar y justificar los resultados formulados anteriormente (de la invariancia asociada a la TL). Las interpretaciones y reformulaciones de resultados así como la interacción en los diferentes contextos resultan ser interesantes y convincentes a la unificación de la noción.

- La secuencia didáctica ha mostrado ser eficaz para desarrollar la herramienta lineal con sentido y propiedades propias: aparece como un medio económico en el uso de su aplicación que parece otorgar a los estudiantes una abstracción de las condiciones reales.

- La secuencia permite que los estudiantes se refieran de manera espontánea a la utilidad de la TL en contextos distintos al álgebra lineal. La secuencia que mueve de un marco al otro hace que los estudiantes saquen el carácter unificador de la transformación lineal, y pasan a niveles más abstractos de explicitación, utilizando la estructuración para llegar a reformulaciones más eficaces de los problemas que tienen que resolver.

- Los procesos atados por la enseñanza a unos ciertos conceptos pueden actuar a veces como obstáculos a la unificación. Eso puede hacer volver a los estudiantes al punto de entrada, y el papel de la TL resulta más "revelar" un conocimiento parcial que "conducir" el proceso de la solución.

Los comentarios recibidos en las entrevistas nos ayudaron en identificar competencias matemáticas y el nivel de explicitación en la utilización de la TL. Lo que la articulación de las resoluciones de las tareas pone en evidencia, es la emergencia de la unificación de los diferentes aspectos desarrollados en una misma forma, incluso en aquellos cuyas costumbres en resolución de problemas matemáticos están marcadas por los enfoques procedurales de aprendizaje y de enseñanza.

En resumen, la experimentación de nuestra secuencia didáctica mostró que los estudiantes son capaces de llevar a una abstracción de las características de las situaciones propuestas sobre el reconocimiento de procesos semejantes, las que son conservadas en el modelo de la TL.

5.2 Límites del estudio y perspectivas de investigaciones futuras

Antes de querer poner en perspectivas de investigaciones futuras, todavía hace falta que los límites del estudio sean puestos en evidencia. Lo primero que hay que decir es el tamaño limitado de la muestra de estudiantes sobre la cual se llevo a cabo el estudio, y el carácter voluntario de la participación. Estos dos elementos hacen que no se puede atribuir de valor estadístico a los resultados. En cambio, ese tamaño limitado nos permitió entrar en profundidad en el análisis de las producciones para hacer posible el estudio de las estrategias puestas en ejecución en la formación del concepto de la TL. En especial, dimos mucha atención a un equipo que nos pareció más típico del grupo, halla la aplicación de la TL, reflejaba a menudo lo que habíamos anticipado en el análisis *a priori*. Cursando el álgebra lineal en el tercer semestre de su formación, los estudiantes participantes contaban además con un buen dominio técnico a su favor.

Entre los esfuerzos desplegados para dar cuenta de modo bien detallado el estudio de las producciones, contamos además con la adaptación a las condiciones particulares de la experimentación en el tiempo y espacio. A pesar del inicio de una huelga estudiantil en el medio de la experimentación, el interés por las tareas, tanto del profesor responsable del curso como de los estudiantes que contribuyeron a los datos, permitió completar la experimentación hasta el final de la recopilación de datos. Este contexto puso la cuestión del tiempo que interpela, y permitió programar la secuencia dos clases más de lo previsto, para dejar más espacio al aprendizaje de la modelización. En particular, nos condujo a colocar en el desarrollo de la clase la discusión de la evaluación en el análisis de los problemas y la validación de las soluciones. En su práctica matemática usual, los estudiantes no tenían grandes dificultades matemáticas. El hecho que la tarea era para la casa, les permitió traer el tratamiento matemático avanzado, cada vez, al inicio de cada actividad. En clase, podían entonces implicarse de manera más intensiva y ver el potencial de las tareas para su aprendizaje, lo que sirvió como un detonante para seguir hasta el final de la experimentación. Estirar la duración de la experimentación en el tiempo nos permitió también extender la duración de las entrevistas para situar las explicitaciones en evocación de "lo que hicieron" más en profundidad. Los datos recogidos son huellas directas de las intervenciones de los tres equipos concernidos, lo que pide tener en cuenta las condiciones del contexto para la continuación.

Para sobrepasar el nivel de la particularidad consideraríamos útil añadir al estudio, una integración de la secuencia en un curso en condiciones regulares con más estudiantes de ingeniería. Esto conduciría a construir indicadores más genéricos de la puesta en funcionamiento de la TL.

Creemos que el estudio puede animar a proponer nuevas secuencias didácticas para conceptos unificadores o modelizadores en matemáticas avanzadas, para tratar de hacer más accesible esta dimensión al estudiante. El estudio revela un cierto éxito en el desarrollo de la secuencia en la clase. En particular, fue una gran sorpresa de constatar una buena participación hasta el final de la secuencia, a pesar del paro estudiantil. Además, la integración de la secuencia en el curso de álgebra lineal fue evaluada de manera positiva por los estudiantes, lo mismo que, por la utilidad de la TL vinculada a las aplicaciones que habían experimentado, por la contribución percibida de la secuencia a su aprendizaje. Podemos pensar que el trabajo de modelización solicitado a los estudiantes puede permitir hacerles comprender lo que hace la abstracción útil; interesándonos en contextos conocidos en una puesta explícita de los aspectos unificador y generalizador. Por ejemplo, el concepto de espacio vectorial plantea algunas dificultades en su comprensión (Hillel y Sierpinska, 1994; Harel G, 1997; Dorier et al, 1997), en especial en la utilidad que su estructuración puede otorgar en su presentación formal. Sin embargo, algunas de las propiedades que definen esta noción son propiedades utilizadas en diferentes contextos (aritmético, algebraico, geométrico, vectorial, analítico, etc.) en ausencia de una potencia que permita conectar estos contenidos.

Lo que proponemos puede salir de las prácticas instauradas: esperamos no obstante, que la secuencia didáctica de nuestro estudio permita abrir una puerta y contribuir modestamente a una nueva manera de enseñar la TL y otros conceptos unificadores. Porque son ellos los que más enseñan la coherencia interna de las matemáticas, los que conducen a hacer elecciones para ganar en simplicidad y en fiabilidad y que muestran el valor de los significados y la pertinencia, elementos esenciales en la formación de ingenieros.

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON J. R. (1976). *Language, Memory, and Thought.* Erlbaum, Hillsdale, N.J.

ARSAC G. (1989). *Le rôle de professeur-aspects pratiques y théoriques, reproductivité.* Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l´informatique. Grenoble, France: AMAG-LSD.

ARTIGUE M. (1990). *Ingénierie didactique,* en Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9.3, Grenoble , La Pensée Sauvage, pp.281-307.

ARTIGUE M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* Relime Vol. **1**, Núm. **1**, pp.40-55.

ARTIGUE M. (2002). *Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd´hui?* Les dossiers des Sciences de l´Éducation. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. Revue Internationale des Sciences de l´Éducation. Presses Universitaires du Mirail. N° **8**.

ARTIGUE M. (2003). *¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. **X**, No. **2**.

ASTOLFI, J.P. et DROUIN, A.M. (1992). *La modélisation à l'école élémentaire* dans Enseignement et apprentissage de la modélisation en classe, Paris, INRP.

BURALI-FORTI C. et R. MARCOLONGO R. (1912). *Transformations linéaires*. Traduit de l'Italien par P. Baridon. Mattei.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, textes rassemblés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield.

BROUSSEAU G. & CHRISTOL G. (2000). *Les études doctorales de didactique des mathématiques à l'université.* In : Gazette de la SMF, **85**, juillet 2000 pp.55-60.

BROUSSEAU G. (2003a). *Quels type de savoirs mathématiques utilise t-on dans la modélisation?* Comité Scientifique des IREM. La Modélisation. 26 Novembre 2003, pp.13-17.

BROUSSEAU G. (2003b). *Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique*. Comité Scientifique des IREM. La Modélisation. 26 Novembre 2003, pp.25-27.

CARON F. (2001). *Effets de la formation fondamentale sur les compétences d´étudiants universitaires dans la résolution de problèmes de mathématiques appliquées.* Thèse de l´Université de Montréal.

CARON F. (2004). *Niveaux d'explicitation en mathématiques chez des étudiants universitaires.* Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXX, no 2, 2004, p. 279 à 301.

CARLSON D., JOHNSON C., LAY D., PORTER D. (1994). *The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra* (LACSG). The College Mathematics Journal. Vol. **24.** N° 1. pp.41-46.

CAYLEY A. (1963). *The collected mathematical papers (13 vol.),* Cambridge at the University Press 1889/Johnson reprint corporation, New-York.

CHEVALLARD Y. (1989). *Le passage de l´arithmétique à l´algèbre dans l´enseignement des mathématiques au collège.* Deuxième Partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit X. **N**° 19. pp 43-72.

CHEVALLARD Y. (1991). *La transposition didactique*, 2ème éd., Grenoble: La Pensée Sauvage.

COLEGIO DE INGENIEROS DE CHILE A.G. (2006). http://www.ingenieros.cl/

DE BOCK D., VAN DOOREN W., JANSSENS D. & VERSCHAFFEL L. (2002). *Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and irresistibility of secondary school students errors.* Educational Studies in Mathematics **50:** 311–334. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

DE TERSSAC, G. (1996). *Savoirs, compétences et travail*. *In* J.-M. Barbier (dir.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (p. 223-247). Paris: Presses universitaires de France.

DHOMBRES, J. (2003). *Modèles, modélisations et mathématisations, en vue d'activités IREM´S.* Comité Scientifique des IREM. La Modélisation. 26 Novembre 2003, pp.8-12.

DÖRFLER W. (1987). *Empirical investigation of the construction of cognitive schemata from actions* in Proceedings of the Eleventh International Conference of PME, Vol. **III**, pp. 3-9.

DÖRFLER W. (1989). *Protocols of actions as a cognitive tool for knowledge construction* in Proceedings of the Thirteenth International Conference of PME, Paris, Vol. **I**, pp.212-9.

DORIER J.-L. (1990). *Analyse historique de l´émergence des concepts élémentaires d´algèbre linéaire.* Cahier de Didirem N° **7**. Irem. Université Paris 7.

DORIER J.-L. (1995). *Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics*. Educational Studies in Mathematics **29**: 175-197. © KIuwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

DORIER J.-L. (1997). *L´enseignement de l´algèbre linéaire, en question*. La Pensée Sauvage Éditions.

DORIER J.-L. (2000). *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions*. Les cahiers du laboratoire Leibniz N°**12**, http://www.leibnizimag.fr/LesCahiers

DORIER J-L. & SIERPINSKA A. (2001): *Research into the teaching and learning of linear algebra*. In Derek Holton (Ed.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic Publisher. Printed in Netherlands. pp.255-273.

DORIER J-L. (2002). *Teaching Linear Algebra at University*. ICM 2002. Vol. **III**. pp.1–3

DORIER J-L. (2006). *La recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire.* Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques. Radisma. http://www.radisma.info/

DOUADY, R. (1983). *Rapport enseignement-apprentissage: Dialectique, outil-objet, jeux de cadres*. Cahiers de didactique des mathématiques. Nº **3**, IREM, Université Paris VII. Paris.

DUBINSKY E., LEWIN P. (1986). *Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness.* Journal of Mathematical Behavior **5**, pp.55-92.

DUBINSKY E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* Advanced Mathematical Thinking, . D. Tall Ed. Kluwer Academic Publishers. pp.95- 123.

DUBINSKY E. and HAREL G. (1992). *The nature of the process conception of function*, in G. Harel and E. Dubinsky (eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes, No. **25**, Math. Assn. Amer., pp.85-106.

DUPIN J-J. (1995). *Modèles et modélisation dans l´enseignement. Quelques contraintes didactiques.* Actes de la VIIIe École d´Été de Didactique des Mathématiques.

DUPIN, J.J. (1996). *Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques* dans Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

DUVAL, R. (1993). *Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?* Petit x, 3. Grenoble, France: IREM.

FERRIER J-P. (2003). *Les mathématiques enseignées peuvent-elles bénéficier du sens fourni par la modélisation?* IREM de Lorraine. Comité Scientifique des IREM. La Modélisation. 26 Novembre 2003, pp.18-24.

GASCON PÉREZ, J. (1996). *La modélisation mathématique et l'étude de champs de problèmes* dans Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

GUEUDET-CHARTIER G. (2004). *Rôle du géométrique dans l´enseignement de l´algèbre linéaire.* Recherches en Didactiques des Mathématiques. Vol. **24**, N° **1**. pp.81-114.

HALMOS P. R. (1985). *Pure thought is better yet*.... The College Mathematics Journal **16**, pp.14-16.

HAREL G. and KAPUT J. (1991) *The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols*, *in D. Tall* (ed), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht Ridel, pp.82-94.

HAREL G. (1997). *Sur trois principes d´apprentissage et d´enseignement : le cas de l´algèbre linéaire,* dans « L´enseignement de l´algèbre linéaire, en question » (J-L Dorier, 1997). La Pensée Sauvage Éditions, pp.215-230.

HENRICI P. (1974). *The influence of computing on mathematical research and education*, in Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. **20**, American Mathematical Society, Providence.

HIEBERT J. and LEFEVRE P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*, in Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* Erlbaum, Hillsdale, NJ.

HILLEL J. & SIERPINSKA A. (1994). *On One Persistent Mistake in Linear Algebra*, in The Proceedings PME **18**, University of Lisbon, Portugal, pp.65–72.

HILLEL J. (1997). *Des niveaux de description et du problème de la représentation en l´algèbre linéaire,* dans L´enseignement de l´algèbre linéaire, en question (J-L Dorier, 1997). La Pensée Sauvage Éditions, pp.231-247.

JOHSUA M.A.., JOHSUA S. (1987). *Les fondements didactiques de l´expérimental dans l´enseignement scientifique.* Recherches en didactiques des Mathématiques. **8**(3), pp.231-266.

LEGRAND M. (2003). *Différents types de modélisation dans l'enseignement*. Irem de Grenoble. Comité Scientifique des IREM. La Modélisation. 26 Novembre 2003, pp.34-35.

LESH R. and LANDAU M. (eds.)(1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press, New York.

ORANGE, C. (1997) *Problèmes et modélisation en biologie - quels apprentissages pour le lycée?,* Paris, Presses Universitaires de France.

OTTE M. (1984). *Komplementarit~it*. Dialektik **8**, pp.60-75.

PAVLOPOULOU K. (1994). *Coordination des registres de représentations sémiotiques,* dans L´enseignement de l´algèbre linéaire, en question (J-L Dorier, 1997). La Pensée Sauvage Éditions, pp.269-275.

PIAGET J. (1970). *Genetic Epistemology,* W. W. Norton, New York.

PIAGET J. et GARCÍA R. (1983). *Psychogenèse et histoire de sciences.* Flammarion. Paris.

POINCARÉ H. (1952). *Science and Method,* Dover Publications, New York.

ROBERT A. (1986a). *Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG*, Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques.

ROBERT A. (1986b). *Une démarche dans l'enseignement supérieur*, Cahier de didactique des mathématiques **28**, IREM de Paris VII.

ROBERT A. et ROBINET J. (1989). *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG.* Cahier de Didactique des Mathématiques **53**, IREM de Paris VII.

ROBERT A. (1992). *Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire: questions de problématique et de méthodologie*. Recherches en didactique des mathématiques, **12** (2/3), pp.181-220.

ROBERT A. et ROBINET, J. (1996). *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques **16-2**, pp.145,176.

ROBERT A. (1998). *Outils d´analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l´université,* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. **18**, N° **2**, pp.139- 190.

ROBINET (1984). *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur,* Thèse de l'Université de Paris VII.

ROBINET J. (1986). *Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire,* Cahier de Didactique des Mathématiques **29**, IREM de Paris VII.

ROGALSKI M. (1991). *Un enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A première année*. Cahier de didactique des mathématiques N°**11**, Irem Paris 7.

SFARD A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics **22**: pp. 1-36.

SIERPINSKA A. (1994). *Understanding in Mathematics* , The Falmer Press Ltd., London.

SIERPINSKA A. (1995). *La compréhension en Mathématiques*, De Boeck Université.

SIERPINSKA A. & HILLEL J. (1997). *Undergraduate linear algebra: Developing algebraic sense in students*, News of the Canadian Society for the Study of Education **24.1**, pp. 23-25

SIERPINSKA A., DREYFUS T., HILLEL J. (1999). *Evaluation of a teaching design in linear algebra : The case of linear transformations*. Recherches en didactique des mathématiques, Vol. **19**, N° 1, pp.7-40.

SIERPINSKA A. (2000). *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. In J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers., 209-246

SIERPINSKA A. (2004). *On the necessity of practical understanding of theory*. Paper presented at ICME-10, July, Copenhagen, Denmark. http://alcor.concordia.ca/~sierp/

SINCLAIR H. and SINCLAIR A. (1986). *Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts*, in Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* Erlbaum, Hillsdale, N.J.

STEINER H.-G. (1985). *Theory of mathematics education: An introduction*, For the Learning of Mathematics **5**(2), pp.11-17.

UHLIG F. (2002a). *Transform Linear Algebra*, New Jersey. Prentice-Hall.

UHLIG F. (2002b). *The role of proof in comprehending and teaching linear algebra*. Educational Studies in Mathematics **50.3**, pp.335–346.

VAN DER MAREN J.M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. 2e édition. Montréal : PUM; Bruxelles : Éditions De Boeck Université.

VERMERSCH, P. (1994) *L'entretien d'explicitation*, Paris, ESF – Collection Pédagogies.

Anexo A. Programas de estudio

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO
INSTITUTO DE MATEMATICAS

JORGE GONZALEZ GUZMAN, Secretario Académico Instituto de Matemáticas.

Certifica este,

PROGRAMA

Asignatura MAT 213 "ÁLGEBRA LINEAL"

I DATOS GENERALES

Horas semanales de Teoría	:	4
Horas semanales de Ayudantía	:	4
Duración	:	1 semestre
Créditos	:	4 (Cuatro)
Pre-requisitos	:	MAT 113

II OBJETIVOS

Generales:

a) Entregar al alumno un lenguaje eficiente para el estudio de sistemas lineales.
b) Capacitar al alumno para operar diestramente con las herramientas de Álgebra Lineal y plantear y resolver problemas mediante su uso.

<u>Específicos:</u>

El alumno al término del curso debe ser capaz de:

a) Conocer y manejar el lenguaje básico y/o las propiedades referentes a las matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales.
b) Operar con matrices y con matrices particionadas.
c) Calcular determinante directamente y aplicando propiedades.
d) Invertir matrices mediante operaciones filas y matriz adjunta.
e) Resolver sistemas de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas utilizando Método de Gauss, Sustitución, Regla de Cramer y otros métodos incluídos en el programa según sea el caso.
f) Manejar la relación existente entre sistemas de ecuaciones, Matrices y Transformaciones Lineales para la resolución general de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.
g) Determinar las coordenadas de un vector respecto de una base; Matriz asociada, núcleo y rango de una transformación lineal, Matriz cambio de base.
h) Manejar los teoremas de:
   - Sustitución y Extensión asociados a bases.
   - $Dim(V) = dim\ N(T) + dim\ I\ m$
   - $dim(U+ V) = dim\ U + dim\ V\text{-}UV$
   - n vectores *LI* en un espacio vectorial de "*dim n*" constituyen base.
   - Todos los espacios vectoriales reales de *dim n* son isomorfos.

   Para resolver problemas referentes a intersección o suma de subespacios, construir bases o determinar dimensión de un espacio o subespacio, construir subespacios especiales, etc.

i) Determinar si un conjunto de vectores es o no linealmente independiente, Subespacio vectorial, base, generador, etc.
j) Resolver problemas de valores y vectores propios y diagonalizar una matriz.

III ***<u>TEMAS Y CONTENIDOS</u>***

1. ***<u>Matrices</u>***

1.1. Álgebra de Matrices (3 sesiones)

- Definición de matrices reales, igualdad de matrices.
- Conjunto de matrices reales. Tipo de matrices (triangular, diagonal, etc.)

(MAT 213)

- Producto por escalar, suma y producto de matrices. Propiedades. Matriz nula y matriz identidad.
- Matriz inversa (definiciones).
- Matriz traspuesta, matriz simétrica. Propiedades.
- Matrices descompuesta en bloques, suma y producto

1.2. Inversión de Matrices (4 sesiones)

- Operaciones elementales filas y columnas.
- Matrices Elementales, equivalencias de matrices.
- Inversa mediante operaciones elementales.
- Determinante de una matriz.
- Propiedades del determinante y cálculo de él usando las propiedades. Determinante de una matriz descompuesta en bloques.
- Matriz adjunta. Cálculo de la inversa de una matriz mediante la matriz adjunta.

1.3. Sistemas de Ecuaciones y Matrices (4 sesiones)

- Sistemas de ecuaciones lineales. Conjunto solución; equivalencia de sistemas.
- Sistemas de ecuaciones y operaciones elementales.
- Matriz aumentada de coeficientes y reducción a la forma escalonada mediante operaciones elementales.
- Método de eliminación de Gauss. Consistencia e inconsistencia de un sistema de ecuaciones. Conjunto solución de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas.
- Sistemas de ecuaciones con matriz $n \times n$, no singular. Regla de Cramer, reducción mediante operaciones y uso de inversa para resolver sistemas de m ecuaciones y n incógnitas.

2. <u>Espacios Vectoriales Reales</u> (8 sesiones)

2.1. Lenguaje básico de Estructuras Algebraicas.
2.2. Espacios Vectoriales Reales. Espacios Vectoriales de Matrices. Ejemplos.
2.3. Subespacio vectorial.
2.4. Intersección y suma de subespacios.

2.5. Combinaciones Lineales. Subespacio generado.

(MAT 213)

2.6. Dependencia e independencia lineal.
2.7. Bases, Coordenadas respecto de una base.
2.8. Dimensión. Teorema *"n* vectores *LI.* Constituyen base en *V*, Espacio Vectorial de *dim n"*.
2.9. Teorema de sustitución. Teorema de Extensión.

3. <u>Transformaciones Lineales</u> (7 sesiones)

3.1. Transformaciones Lineales. Propiedades.
3.2. Álgebra de Transformaciones Lineales.
3.3. Núcleo, imagen y rango de una transformación lineal.
$\dim V = \dim N(T) + \dim Im(T)$.
3.4. Isomorfismo de espacios vectoriales. Teoría: "Todos los Espacios Vectoriales Reales de igual dimensión son isomorfos".
3.5. Transformaciones Lineales y matrices. Rango de una matriz.
3.6. Matriz cambio de base.
3.7. Sistemas de ecuaciones lineales y transformaciones lineales.

4. <u>Vectores Propios y Diagonalización</u> (4 sesiones)

4.1. Valores y vectores propios.
4.2. Polinomio característico.
4.3. Teorema de Cayley Hamilton. Aplicaciones.
4.4. Técnicas de Diagonalización general.
4.5. Cálculo de área de superficies de revolución.

IV <u>BIBLIOGRAFIA</u>

- Edición Instituto de Matemáticas, UCV
  "Álgebra Lineal"

VALPARAISO, 2007.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO
INSTITUTO DE MATEMATICAS

JORGE SANHUEZA DE LA FUENTE, Secretario Académico Instituto de Matemáticas.
Certifica este,

PROGRAMA

Asignatura MAT 127 "ÁLGEBRA LINEAL"

I DATOS GENERALES

Horas semanales de Teoría	:	4
Horas semanales de Ayudantía	:	2
Duración	:	1 semestre
Créditos	:	4 (Cuatro)
Pre-requisitos	:	MAT 113 ó MAT 116

II TEMAS Y CONTENIDOS

-***Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales***

1.***Álgebra de Matrices***:

1.Definición de matriz sobre el cuerpo ***R***, igualdad de matrices.
2.Producto por escalar, suma y producto de matrices. Propiedades. Ejemplos.
3.Tipos de matrices: Matriz nula, matriz identidad, matriz diagonal, matriz idempotente, matriz triangular. Ejemplos.

4.Definición de matriz inversa. Propiedades (matrices singulares y no singulares).
5.Matriz transpuesta, matriz simétrica, matriz ortogonal. Propiedades.
6.Partición de matrices. Suma y producto de matrices particionadas.

2.***Inversión de Matrices***:

1.Inversión de matrices particionadass.
2.Operaciones elementales filas y columnas.
3.Matrices elementales, matriz escalonada reducida por filas, equivalencia de matrices, rango de una matriz.
4.Inversa de una matriz utilizando operaciones elementales.
5.Determinante de una matriz de orden $n \times n$.
6.Propiedades de los determinantes y cálculo utilizando las propiedades.
7.Menores y cofactores. Expansión por cofactores.
8.Determinante de una matriz descompuesta en bloques.
9.Matriz adjunta. Cálculo de la inversa de una matriz utilizando la matriz adjunta.
10.La inversa de una matriz en forma de producto.

3.***Sistemas de Ecuaciones Lineales***:

1.Sistemas de ecuaciones lineales de orden $m \times n$. Conjunto solución y equivalencias de sistemas.
2. Consistencia e inconsistencia de un sistema de ecuaciones. Comparación del rango de la matriz aumentada del sistema con el rango de la matriz de coeficiente.
3.Método de Cramer.
4.Método de Gauss-Jordan.
5.Reducción mediante operaciones elementales y uso de inversa para resolver un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Soluciones Básicas.

-***Espacios Vectoriales sobre el cuerpo R***

1.Definición de espacio vectorial. Ejemplos diversos.
2.Subespacios vectoriales. Ejemplos. Caracterización de los subespacios vectoriales.
3.Combinaciones lineales. Subespacio generado.
4.Dependencia e independencia lineal.
5.Bases. Coordenadas de un vector respecto de una base. Matriz cambio de base.
6.Dimensión de un espacio vectorial. Propiedades.
7.Espacios vectoriales con producto interior. Ejs.
8.Definición de norma. Propiedades. La desigualdad de Cauchy-Schwartz.
9.Ortogonalidad. Procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt.

(MAT 127)

-***Transformaciones Lineales***

1.Definición de Transformación Lineal. Propiedades.
2.Álgebra de transformaciones lineales.
3.Núcleo e imagen de una transformación lineal. Teorema de la dimensión.
4.Isomorfismos de espacios vectoriales.
5.Correspondencia entre las matrices y las transformaciones lineales.
6.Trazo de una matriz. Propiedades.
7.Relación existente entre las matrices asociadas a una transformación lineal respecto de bases diferentes.
8.Sistemas de ecuaciones lineales y transformaciones lineales.

-***Conjuntos Convexos y Geometría en E_n***

1.Algunos conceptos topológicos: Definición de Bola abierta, bola cerrada, vecindad de un punto, punto interior, punto frontera, conjunto abierto, conjunto cerrado, conjunto acotado, conjunto estrictamente acotado, conjunto acotado superiormente, conjunto acotado inferiormente. Ejemplos.
2.Rectas e hiperplanos: Definición de: Recta, segmento de recta, conjunto conexo, región, hiperplano. Distancia de un hiperplano al origen. Hiperplanos paralelos. Interpretación geométrica de la búsqueda del óptimo en un problema de programación lineal. Definición de semiespacio abierto, semiespacio cerrado, ejemplos.
3.Conjunto Convexo: Definición de conjunto convexo, punto extremo. Ejemplos. Propiedades de los conjuntos convexos. Definición de octante no negativo. Definición de combinación convexa, propiedades.
4.La envoltura convexa de un conjunto (caracterización). La envoltura convexa de un número finito de puntos. Definición de poliedro convexo, simplex.
5.Teorema de separación de hiperplanos.
6.Un resultado básico en programación lineal.
7.Envoltura convexa de puntos extremos.
8.Introducción a los conos convexos.
9.Conos poliédricos convexos.

III BIBLIOGRAFIA

Hadley

"Linear Algebra"

Ed. Addison Wesley

Cullen

"Matrices and Linear Transformations"

Ed. Addison-Wesley

Hoffman-Kunze

"Linear Algebra"

Ed. Prentice Hall

F. Ayres

"Álgebra Lineal"

Ed. Schaum

"Álgebra Lineal"

Ed. Instituto de Matemáticas, U.C.V.

VALPARAISO, 2004.

Anexo B. Formulario de consentimiento

FORMULARIO DE CONSENTIMIENTO

Titulo de la investigación: Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería

Investigadora: Sara Pascual, estudiante de doctorado, Departamento de Didáctica, Facultad de Ciencias de Educación, Universidad de Montreal.

Directora de la investigación:

France Caron, profesora agregada, Departamento de Didáctica, Facultad de Ciencias de Educación, Universidad de Montreal.

A) INFORMACIONES A LOS PARTICIPANTES

1. Objetivos de la investigación

Este proyecto pretende desarrollar una manera de enseñar un nuevo concepto matemático, usando tipos de tareas en situación de resolución de problemas, en diversos contextos matemáticos, para ayudar a mejorar la habilidad de operar un objeto a nivel abstracto.

2. Participación en la investigación

La participación en esta investigación tendrá lugar en el trascurso del curso de álgebra lineal (aprox. dos semanas consecutivas en Mayo 2011 según programación del curso) y consiste, en *primer lugar*, en responder un cuestionario individual donde le serán planteadas preguntas relativas a conocer sus intereses por la matemática, la formación recibida en matemáticas, etc. La completación de este cuestionario será supervisado y tendrá una duración aproximada de 30 minutos.

En *segundo lugar*, en el contexto de las actividades normales del curso de álgebra lineal, ustedes serán participantes, en grupos de a dos, para resolver una propuesta de problemas con los conocimientos matemáticos anteriores (pre-requisitos de la asignatura). La actividad matemática tendrá la forma de una "tarea para la casa" para discutir y formalizar con el profesor en otras dos clases de cátedra del curso. Su participación (o su negativa de participar) no le provocará ningún efecto sobre la evaluación del curso, tampoco habrá ninguna transmisión de información personal al profesor o a la Institución, y no tendrá que someterse a ningún tipo de exámenes clínicos. Aceptando participar en la investigación, usted acepta que sus desarrollos, sus intervenciones y/o preguntas sean transcritas y analizadas, lo mismo que sus razonamientos matemáticos.

En *tercer lugar*, una clase de cátedra del curso (1hora y 30 minutos), cada vez, será puesta a disposición para los que hayan aceptado participar trabajen en forma grupal (de a dos) en la clase. Para formular y validar las estrategias elaboradas en la resolución de los ejercicios y preguntas propuestas en las tareas, con el fin que el trabajo de análisis grupal permita efectuar, por el profesor, una síntesis general de los métodos o procedimientos utilizados frente al curso.

En *cuarto lugar*, una vez finalizada esta tarea, en un breve plazo (una semana, aprox.), se invitará a una entrevista (conversación) individual con algunos estudiantes-participantes para conversar sobre las aplicaciones que usted haya podido visualizar a través de las tareas. Esta entrevista nos permitirá validar nuestras tareas y análisis, y para ello hemos previsto un tiempo de una hora aproximadamente por entrevista en una sala de la misma universidad (sala por determinar). La entrevista será registrada en una grabadora de audio (no habrá filmaciones audiovisuales) y luego transcrita, y que nos permitirá formular mejor las fortalezas y las dificultades observadas del uso de las tareas.

3. Confidencialidad

Las informaciones que usted nos dará serán confidenciales. Las informaciones obtenidas mediante el cuestionario y la entrevista serán transcritas y los registros de audio serán borrados posteriormente. Para su confidencialidad, a cada participante en la investigación le será asignado un código que sólo el investigador principal conocerá a que estudiante corresponde. Este código reemplazará los datos nominativos que figurarán sobre los cuestionarios individuales y las producciones recogidas. Este código también sustituirá su nombre en las transcripciones de la entrevista. Además, las informaciones serán conservadas en un archivador con llave situado en un escritorio cerrado. Ninguna información que permita identificarle, de un modo o de otro, será publicada. Estas informaciones personales serán destruidas 7 años después de la finalización del proyecto. Solamente los datos que no permitan identificarle serán conservados después de esta fecha, el tiempo necesario para su utilización.

4. Ventajas e inconvenientes

Al participar en esta investigación, usted no corre riesgos particulares. Usted podrá, no obstante, contribuir al avance del conocimiento como así mismo al mejoramiento de la enseñanza de un concepto matemático abstracto para futuros estudiantes de ingeniería. Aprenderá aún más, posiblemente sobre su propia experiencia e interés por situaciones de complejidad matemática y tendrá también la oportunidad de compartir sus propias reflexiones. Podrá privilegiar una forma de aprender a pensar de manera no-algorítmica, favoreciendo a la creatividad y al desarrollo de sus competencias lo que se traduciría al final por una mejor competitividad intelectual e profesional.

5. Derecho de retirarse

Su participación es completamente voluntaria. Usted es libre de retirarse en cualquier momento con un simple aviso verbal, sin perjuicio y sin tener que justificar su decisión. Al igual que la negativa de participar en la investigación, el retiro de su consentimiento por participar no puede, en ningún caso, afectar la evaluación de sus aprendizajes. Si usted decide retirarse de la investigación, usted se puede comunicar con la investigadora principal, al número de teléfono indicado más abajo. Si usted se retira de la investigación, las informaciones que habrán sido recolectadas hasta ese momento serán destruidas.

6. Indemnidad

Los participantes en la investigación no recibirán ninguna indemnidad.

7. Difusión de los resultados

Un informe será transmitido a los participantes describiendo las conclusiones generales de esta investigación en el curso del próximo año, cuando los análisis hayan sido efectuados.

B) CONSENTIMIENTO

Declaro haber tomado conocimiento de las informaciones descritas más arriba, haber obtenido las respuestas a mis preguntas sobre mi participación en la investigación y comprender el objetivo, la naturaleza, las ventajas, los riesgos y los inconvenientes de esta investigación.

Después de una reflexión y un plazo razonable, consiento libremente a participar en esta investigación. Sé que puedo retirarme en cualquier momento sin ningún perjuicio, con un simple aviso verbal y sin tener que justificar mi decisión.

Apellidos : ______________________ Nombres : ______________________
Firma : ______________________ Fecha : ______________________

Doy mi consentimiento a que los datos anónimos recogidos en el marco de esta investigación sean utilizados para proyectos de investigación subsecuentes de la misma naturaleza, condicionalmente a su aprobación ética y en el respeto de los mismos principios de confidencialidad y de protección de las informaciones. Si ☐ No ☐

Apellidos : ______________________ Nombres : ______________________
Firma : ______________________ Fecha : ______________________

Declaro haber explicado el objetivo, la naturaleza, las ventajas, los riesgos y los inconvenientes del estudio y haber respondido con el mejor de mi conocimiento a las preguntas planteadas.

Firma del investigador
(o de su representante) : ______________________ Fecha : ____________

Apellidos : ______________________ Nombres : ______________________

Para toda pregunta relativa a la investigación o para retirarse del proyecto, usted puede comunicarse con: Sara Pascual (investigadora principal), al número de teléfono: (56) (32) 2113664.

Toda queja relativa a su participación en esta investigación puede ser dirigida directamente a la Universidad de Montreal, al número de teléfono (514) 343-2100, **se aceptan los llamados con cobro revertido**).

Anexo C. Cuestionario

CUESTIONARIO

Elementos de interés matemático

Nombre: ____________________________________

Dirección permanente: ____

____

Número de teléfono: ________________________________

Correo electrónico (e-mail): ___________________________

Departamento, Escuela: ____

Notas y recuerdos

- El conocimiento de su número de teléfono y dirección de correo electrónico nos permitirá ponernos en contacto con usted si es deseable y necesario en la continuación del proyecto.
- El conocimiento de una dirección permanente donde ubicarlo (por ejemplo, en casa de sus padres) nos permitirá de enviarle después por el correo un breve documento que resume los principales resultados del estudio.
- Las informaciones contenidas en este cuestionario quedarán estrictamente confidenciales. Sólo el responsable del proyecto tendrá acceso a ellas.
- Toda publicación (tesis, artículo, conferencia, etc.) utilizará estos datos sólo preservando el anonimato de los encuestados.
- Usted decide de retirarse en cualquier momento del proyecto

1. ¿Cuál es el curso de matemáticas (o de otra disciplina) es el que **más le ha contribuido** para su comprensión de las matemáticas?

   ____

   ¿Cuál(es) enunciado(s), entre aquellos que figuran en la pregunta 2, lo describiría mejor?

   _______________ (*máximo de 4 enunciados*)

2. ¿Cuál es el curso de matemáticas que **menos le ha aportado**?

   ____

   ¿Cuál(es) enunciado(s) entre los que figuran a continuación lo describiría mejor?

   ______________ (*máximo de 4 enunciados*)

A. Una sucesión de puzles
B. Una sucesión de problemas difíciles sin vínculo evidente con la teoría
C. Una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría
D. Un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo
E. Un estudio formal de espacios abstractos y de estructuras matemáticas
F. Una sucesión de definiciones de objetos y de sus propiedades
G. Una sucesión de teoremas y de demostraciones dadas por el profesor
H. Una serie de ejercicios para aplicar las fórmulas enseñadas
I. Un conjunto de técnicas de cálculo con sus condiciones de utilización
J. Una voluntad de hacer descubrir la teoría por el estudiante
K. Una apertura sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración
L. Una focalización sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración
M. Una apertura sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados
N. Una focalización sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados
O. Una apertura sobre la exploración y la experimentación
P. Una focalización sobre la exploración y la experimentación
Q. Una apertura sobre la tecnología (calculadora, software o programación)
R. Una focalización sobre la tecnología (calculadora, software o programación)

3. ¿Cuál(es) enunciado(s) entre los indicados más arriba resumiría mejor el **conjunto de la formación que usted recibió** en matemáticas?

   _______________ (*máximo de 4 enunciados*)

4. ¿Qué es lo que le da más **satisfacción** en matemáticas? Por favor, elija uno o dos enunciados entre los que se indican a continuación. .

   _______________ (*máximo de 2 enunciados*)

A. El conocimiento de una fórmula o de un método general aplicable a todos los casos
B. La reutilización en otras disciplinas de conceptos o de métodos vistos en matemáticas
C. La búsqueda fructuosa (o exitosa) de un enfoque de resolución a un problema matemático complejo
D. La comprensión de un nuevo concepto formal que hace pensar de otro modo
E. La experimentación y la visualización con la ayuda del computador de fenómenos matemáticos
F. La simplificación de una expresión compleja mediante manipulaciones algebraicas
G. La confirmación por el modelo de corrección de su control de un concepto o de un método matemático
H. El diseño acertado de un programa o de un procedimiento de software para resolver un problema
I. El descubrimiento de una demostración elegante

Anexo D. Guía de entrevista

GUIA DE ENTREVISTA

Evaluación de las tareas

INTRODUCCION

- **Objetivo de la entrevista:** conocer tus ideas matemáticas y opinión de las tareas, en particular
  - ❑ Tus relaciones matemáticas de los procedimientos y razonamientos matemáticos realizados, de las conclusiones, y de cualquier otro saber matemático aplicado en las soluciones (con éxito o no).
  - ❑ Todo lo que te significó trabajar progresivamente con las tareas, *al inicio de la tarea* / *experimentar hacer lo que se te estaba pidiendo / sentir la coherencia o no*.
- **Estructura de la entrevista**
  - ❑ Algunas preguntas para que me describas lo que hiciste en el desarrollo de tareas respecto del sentido matemático que empleaste, para situarnos en tu visión matemática de las operaciones hechas.
  - ❑ Algunas preguntas de opinión sobre la utilidad y la claridad que hayas visto de las tareas, para buscar cómo mejorarlas y asegurarnos de dar un salto mayor.
  - ❑ Conclusión
- **Funcionamiento de la entrevista**
  - ❑ Para los fines de la investigación: registro audio y toma de apuntes

- Seguridad de la confidencialidad: nada de esto será accesible a otra persona que no sea yo.
- Seguridad del anonimato: en toda comunicación de los resultados.

- **Preguntas y objeciones**
  - ¿Te parece todo claro?
  - ¿Hay elementos que te molestan?

PARTE A: Preguntas de descripción

1. a) ¿Qué es lo que has hecho? ¿Cómo lo has hecho?
   b) ¿Con qué comenzaste? ¿Cómo sabías con qué había que comenzar?
   c) ¿Qué hace que tú hayas comenzado por…?

2. a) ¿Y luego que hiciste? ¿Cómo lograste llegar hasta aquí?
   b) ¿Recuerdas tener alguna dificultad haciendo eso?
   c) ¿Qué quieres decir con esto? ¿Qué pensaste haciendo eso?

3. a) ¿Encontraste un poco de dificultad? ¿Cómo lo resolviste?
   b) ¿Qué es lo que hiciste acá? (y cuando tú haces cualquier cosa, ¿tú haces qué?)
   c) ¿Cómo sabías que era difícil? ¿Qué te hizo pensar que era difícil?
   d) ¿Qué te hizo falta para que tu…? ¿Qué hiciste cuando…?

4. ¿En qué o cómo reconociste que se había terminado? ¿Cómo sabias que no había nada más que hacer…?

5. ¿Cómo sabes que has comprendido en…?

6. ¿Qué enlace puedes establecer entre esa tarea y otras?

PARTE B: Preguntas de opinión

1. a) ¿Qué te parece el intento de esta tarea? ¿La puedes relacionar con algo?
   b) ¿Se parecía con otras tácticas que ha hecho?
   c) ¿Te pareció claro el objetivo de la tarea? ¿Puedes ver el enlace con la actividad 1)?

2. a) ¿En qué tareas tuviste mayor éxito? ¿Qué has aprendido?
   b) ¿En qué tareas tuviste mayores problemas? ¿Te pareció algo poco claro, qué fue? ¿Qué sigue siendo oscuro?

3. ¿Dónde piensas que interviene la idea de transformación lineal? (¿Qué te hace pensar eso?)

4. a) ¿En qué momento dirías tu que has comprendido mejor la idea o el uso posible de la transformación lineal?
   b) ¿Eso coincide con la tarea en que tuviste más éxito? (o qué viste de utilidad de la tarea)?
   c) ¿Eso coincide con la tarea que más te ha contribuido en el aprendizaje?

   (*Descríbeme esta tarea con más detalle, eligiendo un momento preciso en que hayas logrado un aprendizaje particular*).

5. a) ¿En qué momento dirías tu que has comprendido menos (o que no has comprendido) la idea o el uso posible de la transformación lineal?
   b) ¿Eso coincide con la tarea en que tuviste más dificultades? (o qué no viste de utilidad de la tarea)?

c) ¿Eso coincide con la tarea que menos te ha contribuido en el aprendizaje?

   (*Descríbeme esta tarea con más detalle, eligiendo un momento preciso en que sentías que estabas perdido*).

6. ¿Qué intervenciones (del profesor, de la investigadora o de otro estudiante) te resultaron muy claras en la progresión?

7. ¿Qué utilidad ves ahora al concepto de transformación lineal?

8. Se dice que la TL es un concepto unificador ¿cómo lo ves tú? ¿me puedes proporcionar ejemplos?

PARTE C: Epílogo

- ❑ ¿Hay alguna otra cosa, que te gustaría agregar?
- ❑ ¿Tienes comentarios que hacer en cuanto a la entrevista que acabamos de tener?
- ❑ ¡¡¡Muchas gracias!!!

Anexo E. Anexo actividad de rotación del plano

DEFINICION. La rotación $R_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ se dice **representada por una matriz** M si $R_\theta(x, y) = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN

La rotación $R_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ está representada por la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si y sólo si

$$R_\theta(1, 0) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad R_\theta(0, 1) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Anexo F. Anexo actividad de la cizalladura

DEFINICION. Una transformación $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ se dice **representada por una matriz** M **respecto de la base** $B=\{u,v\}$ si las coordenadas de $T(x,y)$ respecto de la base $B=\{u,v\}$ es igual al producto matricial de M por las coordenadas de (x,y) respecto de la base B.

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN

Una transformación $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es **lineal** si y sólo si es representada por una matriz respecto de una base cualquiera.

En ese caso, si $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz que representa a T respecto de la base $B=\{u,v\}$, entonces

$$T(u)=au+cv \qquad \text{y} \qquad T(v)=bu+dv$$

DEFINICIÓN CIZALLADURA

Para $\vec{u}$ un vector no nulo de $\mathbf{R}^2$ y k un escalar, se define la cizalladura de factor k en la dirección $\vec{u}$ como la **transformación lineal** $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ para la cual

$$T(\vec{u})=\vec{u} \qquad \text{y} \qquad T(\vec{u}_\perp)=\vec{u}_\perp + k\vec{u}$$

donde $\vec{u}_\perp$ designa el vector ortogonal a $\vec{u}$ (en sentido positivo).