Université de Montréal

Département de Sciences Économiques

L'évolution du prix des ressources naturelles

Test d'une version stochastique de la règle d'Hotelling

par

Christian Felx

Sous la direction de M. Gérard Gaudet

Rapport de recherche présenté en vue de l'obtention du grade

Maître ès sciences (M. Sc.) en sciences économiques

Août 2001

L'évolution du prix des ressources naturelles

Test d'une version stochastique de la règle d'Hotelling

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement M. Gérard Gaudet pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de la rédaction de ce rapport de recherche.

Tout en me guidant à l'aide de judicieux conseils, M. Gaudet a su me laisser l'autonomie et une certaine liberté qui m'ont permis d'explorer ce passionnant sujet qu'est l'économie des ressources naturelles et, en particulier, la règle d'Hotelling et ses développements depuis le début des années 1930.

Une pensée également pour ceux et celles qui ont pris connaissance de mon rapport et qui m'ont fait part de leurs suggestions et commentaires.

Sommaire

Dans ce rapport, nous abordons le thème de l'évolution du prix des ressources naturelles d'un point de vue théorique et empirique. Après une revue des études antérieures, nous exposons un modèle développé par Gaudet et Khadr (1991) qui présente une version stochastique de la règle d'Hotelling. Cette version s'apparente au modèle intertemporel d'évaluation des actifs financiers; elle caractérise l'évolution du prix des ressources naturelles. L'incertitude est introduite dans le modèle à l'aide d'indices de productivité stochastiques tant dans la fonction de production d'un bien composite que dans le processus d'extraction d'une ressource naturelle non renouvelable. Par la suite, nous réécrivons la règle d'Hotelling sous la forme bêta consommation. Celle-ci annonce que le rendement excédentaire espéré sur la ressource in situ est proportionnel à la covariance entre ce même rendement et le taux de croissance de la consommation par habitant. Cette version de la règle d'Hotelling est ensuite testée après confirmation que les séries boursières utilisées supportent le CAPM. Nous trouvons que dans la grande majorité des cas, nos données n'appuient pas la règle d'Hotelling modifiée pour la présence du risque.

Table des Matières

Liste des Tableaux

Introduction

Au début des années 1930, Harold Hotelling publie un éminent article sur l'économie des ressources naturelles (Hotelling, 1931). À cette époque, on avait remarqué une baisse importante des stocks de minéraux ainsi que d'autres ressources naturelles non renouvelables. Les mouvements de conservation demandèrent alors une réglementation sur le prix et l'exploitation des ressources. Selon eux, un prix faible et une exploitation rapide engendraient l'extinction des ressources. Or, à la même époque, les monopoles et les oligopoles oeuvrant dans les industries concernées par l'exploitation des mêmes ressources, jouissaient d'une croissance phénoménale. On assista donc à une confrontation d'idées. En effet, comment pouvait-on adhérer aux opinions des mouvements de conservation alors que les industries en concurrence imparfaite sont reconnues pour réduire la production afin de majorer les prix?

Hotelling s'est donc penché sur le problème de l'extraction optimale des ressources naturelles afin de caractériser l'évolution de leur prix. Le modèle de base d'Hotelling prédit qu'en l'absence de coût d'extraction, le prix p d'une ressource naturelle non renouvelable va croître au taux d'intérêt r. Ce taux représente le rendement sur un actif certain. Ainsi, $\dot{p}/p = r$. Il existe, bien sûr, des versions généralisées du modèle que nous aborderons ultérieurement. Cependant, bien que du côté théorique les efforts du chercheur se soient avérés un succès (il n'existe aucune autre théorie pouvant réellement confronter son modèle), du côté empirique, la majorité des tests effectués ont produit des résultats non concluants. Un des problèmes associés au modèle d'Hotelling est qu'il a été développé dans un cadre déterministe. Nous allons donc, dans ce rapport, faire appel à un modèle qui introduit l'incertitude et ainsi développer une version stochastique de la règle d'Hotelling (Gaudet et Khadr, 1991).

Dans un premier temps, nous effectuerons une brève revue des études antérieures. Nous classerons, à l'instar de Slade et Thille (1997), ces études en trois catégories, puis nous analyserons les différents résultats qu'elles ont produits. Dans un deuxième temps, nous exposerons une version stochastique de la règle d'Hotelling. Pour ce faire, nous étudierons l'effet de l'incertitude sur l'évolution du prix des ressources naturelles dans un modèle avec production (d'un bien) et consommation. Dans ce modèle, un consommateur type choisit son niveau de consommation ainsi que la composition de son portefeuille entre deux actifs : un stock de bien composite et un stock d'une ressource naturelle non renouvelable. L'analyse est donc faite dans le cadre d'un modèle intertemporel d'évaluation des actifs financiers (Merton 1973). La présence d'un actif non renouvelable introduit un élément d'irréversibilité dans le choix de portefeuille. De plus, une des conditions d'équilibre prend la forme d'une règle d'Hotelling modifiée pour la présence de l'incertitude. Cette règle peut également être écrite sous la forme consommation bêta. Cette dernière forme prédit que le rendement excédentaire de la ressource in situ est proportionnel à sa covariance avec le taux de croissance de la consommation. Enfin, nous aurons recours à certains indices boursiers de la bourse de Toronto pour tester la forme consommation bêta de la règle d'Hotelling. Ces indices sont, bien sûr, liés au domaine des ressources naturelles non renouvelables, mis à part l'indice du TSE 300 qui servira à établir les rendements du portefeuille de marché. Les résultats des tests économétriques sont présentés dans la dernière section de ce rapport.

Revue des études antérieures

Nous avons introduit précédemment le contexte économique qui a amené Hotelling à rédiger un article sur l'économie des ressources naturelles non renouvelables (Hotelling, 1931). Conscient des difficultés liées à l'exploitation des ressources, celui-ci s'est penché sur le sujet. Partant de l'hypothèse que les entreprises propriétaires des différentes ressources maximisent la valeur présente de tous leurs profits futurs, il est parvenu à caractériser l'évolution du prix des ressources naturelles non renouvelables. Le modèle de base de Hotelling prédit qu'en l'absence de coût d'extraction, le prix p d'une ressource épuisable va croître au taux d'intérêt r. Ainsi $\dot{p}/p = r$, où $\dot{p}$ représente la dérivée du prix par rapport au temps. Lorsque le taux d'extraction est non nul, c'est plutôt le prix net $\lambda = (p - C_q)$ qui croît avec le taux d'intérêt : $\dot{\lambda}/\lambda = r$. Dans ce cas-ci, C_q correspond au coût marginal d'extraction. Enfin, lorsque le coût d'extraction dépend du stock d'une ressource R, le prix net croît à un taux inférieur au taux d'intérêt. Ceci peut s'écrire : $\dot{\lambda}/\lambda = r + C_R/\lambda$, où C_R est le coût associé à la détérioration de la qualité du minerai à mesure que le stock de la ressource s'épuise. C_R est, bien sûr, négatif.

Depuis la parution de l'article d'Hotelling, de nombreux auteurs ont tenté de généraliser ou d'améliorer la portée du modèle de base. Par exemple, on a introduit dans le modèle des coûts d'extraction variables, de l'incertitude quant à la quantité des réserves totales ou quant à l'ampleur et au moment des nouvelles découvertes. Or, au niveau empirique, la majorité des tests effectués ont été non concluants. En particulier, nous verrons que souvent les prix ne croissent pas comme le prévoit le modèle. Commençons donc par une revue des études antérieures. Ces études peuvent être classées en trois catégories distinctes.

La première catégorie comprend les tests relatifs au comportement des prix. Il ne s'agit pas de tests directs du modèle d'Hotelling, mais ils utilisent tout de même l'évolution du prix des ressources comme indicateur de rareté. Si nous nous attardons aux résultats de ces tests, nous remarquons un déclin évident dans les prix relatifs de la majorité des ressources (particulièrement des minéraux). Cette constatation est évidemment en contradiction avec le modèle de base qui prédit une hausse exponentielle du prix des ressources naturelles. Parmi les études importantes de cette catégorie, notons celles de Barnett et Morse (1963), Smith (1979) et Slade (1982).

Barnett et Morse (1963) ont testé l'hypothèse que la rareté des ressources naturelles augmente avec le temps dans une économie en croissance. Pour ce faire, ils ont observé la tendance dans les prix relatifs (ratio du prix unitaire de biens fabriqués à l'aide des ressources et de celui des autres biens) de cinq groupes agrégés de ressources. Ils ont utilisé des données américaines annuelles couvrant une période allant de 1870 à 1957. Des cinq groupes, seul celui des produits forestiers montre une réelle tendance à la hausse dans son prix relatif. Ainsi, Barnett et Morse ont conclu que les secteurs des minéraux, de l'agriculture, de la pêche et de l'ensemble des ressources extraites ne vérifient pas l'hypothèse de rareté. Pour certains secteurs, ils ont même remarqué des prix relatifs qui ont diminué au lieu d'augmenter, ce qui contredit l'hypothèse de rareté. Dans une mise à jour du rapport, Barnett (1979) tire la même conclusion.

De son côté, Smith (1979) a voulu déterminer la tendance dans les prix relatifs de quatre groupes agrégés de ressources. Ses données portaient sur les mêmes groupes que ceux de l'étude précédente, mis à part le secteur de la pêche, et couvraient la période 1900-1973. À l'aide d'une régression linéaire (prix relatif en fonction de la tendance), il a trouvé des coefficients de tendance qui ne sont pas différents de zéro de façon significative, sauf pour le secteur des produits forestiers. Ces résultats concordent avec ceux de Barnett et Morse. Par contre, Smith a poussé son analyse plus loin en utilisant les statistiques de Brown-Durbin (CUSUM) et de Quandt (rapport de vraisemblance) afin de vérifier la stabilité des coefficients. Les deux tests ont révélé des séries de prix instables. Ainsi, pour Smith, il est difficile de juger d'une tendance quelconque et, par le fait même, d'une rareté grandissante des ressources. L'auteur a attribué cette instabilité aux changements dans la composition des groupes agrégés de ressources et aux transformations économiques et institutionnelles qui ont marqué la société américaine au cours de la période étudiée.

Enfin, Slade (1982) a analysé le mouvement des prix relatifs (ratio de l'indice des prix d'une industrie extractive et d'un indice des prix global) à long terme en utilisant les données agrégées des principaux métaux et combustibles

(12 au total) pour la période 1870-1978. L'estimation d'un modèle linéaire s'apparentant à celui de Smith, a démontré qu'aucune généralisation ne pouvait être faite quant à une certaine tendance dans les séries de prix étudiées, puisque les coefficients de tendance de plusieurs métaux et combustibles se sont révélés non significatifs. Par contre, en utilisant un modèle de forme quadratique (introduction d'un terme de tendance élevé au carré), les coefficients estimés laissent entrevoir des courbes de prix convexes. En effet, les coefficients du nouveau terme sont tous positifs (et significatifs à un niveau de confiance de 90% pour 11 des 12 régressions), tandis que ceux du terme de tendance sont négatifs. D'après ces résultats, Slade a conclu que les ressources se raréfient, puisque après une période de déclin, les prix relatifs ont commencé à augmenter. Cependant, au dire même de l'auteur, le modèle est simple et incomplet. Il néglige plusieurs aspects importants tels la réglementation gouvernementale, les politiques fiscales et la structure des marchés. D'ailleurs, dans un article subséquent, Slade (1991) s'attaque à ce dernier problème.

Suite à ces résultats, il est devenu pertinent de se demander si le modèle d'Hotelling ne pouvait pas être modifié pour expliquer le déclin des prix constaté pour certaines périodes. Dans le modèle de base, le stock des ressources est connu avec certitude. Toutefois, en pratique, les activités d'extraction et d'exploration (pour la découverte de gisements inconnus) prennent place en même temps. Ainsi, une grande découverte d'un certain minerai pourrait fort probablement amener le prix de la ressource en question à abaisser. De plus, de nouvelles méthodes d'extraction permettant de réduire les coûts de production pourraient aussi faire diminuer les prix. Enfin, la découverte de substituts affectant à la baisse la demande pour une ressource naturelle non renouvelable, peut également jouer un rôle important dans l'évolution de son prix.

D'après les quelques exemples précédents, les périodes de déclin des prix sont donc pertinentes parce qu'elles peuvent être expliquées par des variantes du modèle d'Hotelling. Néanmoins, des chocs comme la découverte d'un nouveau gisement ne peuvent affecter indéfiniment les prix d'une ressource et, par le fait même, à long terme, le prix devrait logiquement augmenter. Ce n'est cependant pas ce qu'on observe.

La deuxième catégorie des études antérieures concerne les tests relatifs au comportement des prix nets. Il s'agit de tests plus formels du modèle d'Hotelling. On retrouve parmi ces études celles de Stollery (1983), Farrow (1985), Gaudet et Howitt (1989), Halvorsen et Smith (1991), Young (1992), Slade et Thille (1997), Young et Ryan (1996) ainsi que Chermak et Patrick (1999).

Stollery (1983) a appliqué le modèle concernant l'épuisement des ressources développé par Hotelling à une industrie particulière, celle du nickel. Pour la période étudiée, INCO (International Nickel Corporation) était un " price leader " dans l'industrie et on remarquait une augmentation importante du prix du nickel. L'auteur a toutefois étendu le modèle de base pour tenir compte des changements technologiques et des nouvelles découvertes possibles ainsi que de l'augmentation probable des coûts d'extraction en raison de l'épuisement graduel de la ressource. La variable d'intérêt du modèle est le prix d'une tonne de nickel, net de son coût d'extraction. Le test consiste à calculer ce prix net en estimant une fonction de demande (de forme log-linéaire) et une fonction de production (Cobb-Douglas) tout en utilisant les données d'INCO, pour la période 1952-1973. Par la suite, Stollery a vérifié si l'évolution du prix net est réaliste comparée à celle prédite par le modèle avec un taux d'actualisation évalué séparément à l'aide du CAPM (capital asset pricing model). Il a trouvé que l'épuisement de la ressource (augmentation de la rareté) était un facteur déterminant du prix du nickel fixé par INCO, pour la période 1952-1973.

Deux ans après l'analyse de Stollery sur l'évolution du prix du nickel, Farrow (1985) a publié un article utilisant des données mensuelles d'une industrie minière (qui tenait à demeurer anonyme) qui testait le modèle d'Hotelling. Ces données concernent entre autres le prix des inputs et des outputs et la productivité de la firme; elle couvrent la période de janvier 1975 à décembre 1981, inclusivement. À l'aide des données, Farrow a estimé une fonction de coûts pour pouvoir (avec les données sur le prix de l'output) calculer la valeur de la ressource in situ. Ensuite, il a comparé statistiquement l'évolution de cette valeur avec celle prédite par le modèle. Or, les résultats se sont révélés non concluants. En effet, l'auteur a trouvé pour la firme un taux d'actualisation négatif indiquant une baisse dans le prix de la ressource, ce qui est en désaccord avec la règle d'Hotelling. Farrow a également fait varier les hypothèses de son modèle, notamment en permettant un taux d'actualisation variable dans le temps, mais les résultats ont aussi dû être rejetés.

Gaudet et Howitt (1989) ont, par la suite, dérivé une règle d'Hotelling, modifiée pour tenir compte de la présence d'incertitude. Selon eux, puisque le modèle d'évaluation des actifs financiers sous-entend qu'en présence d'incertitude les taux de rendement varieront selon les différents actifs, la règle de base d'Hotelling ne sera généralement pas exacte. Rappelons que la règle d'Hotelling spécifie qu'en *absence de risque*, le taux de rendement sur une ressource épuisable sera le même que celui des autres actifs, à l'équilibre. Les auteurs ont donc utilisé un modèle à deux périodes et deux biens qui introduit l'incertitude quant aux taux de rendement. Un des biens est une ressource non renouvelable tandis que l'autre est un bien de consommation homogène. En maximisant la fonction d'utilité d'un ménage type, ils ont trouvé que le prix net de la ressource évolue à un taux plus ou moins élevé que le taux d'intérêt. La différence est due à la covariance entre l'utilité marginale de consommation et la différence entre le taux de croissance du prix net de la ressource et du taux d'intérêt. Ils ont également illustré leur propos à l'aide d'un exemple. Ainsi, l'incertitude pourrait expliquer une partie des divergences entre les modèles théoriques et empiriques des études faites à cette date. D'ailleurs, d'autres auteurs ont, par la suite, produit des analyses introduisant l'incertitude sur les taux de rendement.

Halvorsen et Smith (1991) ont, pour leur part, utilisé la théorie duale pour dériver un modèle économétrique à partir duquel ils ont pu tester la règle d'Hotelling. Pour ce faire, ils se sont servis d'une fonction de coûts afin d'obtenir des estimés des prix nets de la ressource in situ pour des industries minières canadiennes. Leur étude portait sur la période 1954-1974. Les implications de la théorie d'Hotelling sont introduites dans le modèle par des contraintes sur les paramètres de la fonction de coûts. Elles sont ensuite testées à l'aide d'un test de spécification de Hausman. Les auteurs ont trouvé que pour l'industrie en question, la théorie des ressources épuisables est à rejeter, parce que le modèle théorique d'Hotelling n'est pas respecté.

Dans une autre étude, Young (1992) a imputé les problèmes des études empiriques antérieures à de mauvaises spécifications dans les modèles. Pour cette raison, elle a travaillé sur la paramétrisation des fonctions de coûts auxquels font face quatorze petites entreprises canadiennes propriétaires de mines de cuivre. Les données couvrent la période 1956-1982. Une fois la spécification choisie, l'auteure a introduit la fonction de coûts dans le problème de maximisation des profits des firmes afin d'en déterminer les équations d'Euler qu'elle a estimées directement à l'aide de la méthode généralisée des moments. Ces équations fournissent des indications appréciables sur les niveaux de production optimale des firmes (et, par le fait même, sur l'évolution du prix net du cuivre). Elle a trouvé que la méthode généralisée des moments permet de meilleures estimations des équations d'Euler que dans les études précédentes.

Par contre, ses résultats révèlent que le modèle d'Hotelling est inadéquat pour expliquer le comportement des firmes et l'évolution du prix net du cuivre.

Slade et Thille (1997) se sont basés sur les travaux théoriques de Gaudet et Khadr (1991). Nous n'avons pas discuté de ce modèle puisqu'il s'agit de celui que nous utilisons. Il sera donc développé en entier dans la section suivante. Ce modèle intègre les marchés financiers (en particulier par l'utilisation du CAPM) dans l'étude de l'évolution du prix net des ressources. En effet, puisque le prix et le coût d'extraction sont des variables aléatoires, la ressource peut être considérée comme un actif risqué. On peut donc se servir des autres actifs existants pour diversifier le risque. Un problème de choix de portefeuille en découle. Par contre, Slade et Thille ont modifié le modèle de Gaudet et Khadr de deux façons. Premièrement, ils permettent des rendements d'échelle qui ne sont pas constants et, deuxièmement, ils dérivent l'équation estimée comme une condition de non arbitrage. À partir d'un problème de maximisation de la valeur présente des profits, dans lequel ils introduisent l'incertitude par des chocs aléatoires sur la productivité, ils obtiennent une équation pour l'évolution du prix net des ressources qui sera nécessaire pour effectuer les tests économétriques. Pour exécuter ces tests, ils se sont servis des fonctions de coûts dérivées par Young (1992), ainsi que du rendement du TSE 300 (portefeuille de marché) et du taux des bons du trésor canadien à 90 jours, converti en taux annuel (taux sans risque). D'après leur résultat, le modèle d'Hotelling n'est pas rejeté. Il semble donc que l'introduction d'incertitude peut améliorer les résultats. D'un autre côté, les auteurs ne prétendent pas avoir solutionné entièrement le problème d'Hotelling, puisque certains de leurs résultats ne semblent pas plausibles.

Young et Ryan (1996) ont, eux aussi, exploité une règle d'Hotelling modifiée pour la présence de risque. Ils se sont en effet servis du modèle à deux périodes développé par Gaudet et Howitt (1989). Ces derniers, rappelons-le, avaient obtenu une règle ajustée pour la présence du risque en maximisant la fonction d'utilité d'un ménage type. Ici, Young et Ryan ont spécifié trois formes d'utilité pour le ménage type (CRRA, CARA et Kreps et Porteus). Ils ont, par la suite, estimé les équations d'Euler (conditions de 1er ordre) à l'aide de la méthode généralisée des moments. Pour examiner la relation entre le taux de rendement sur la ressource et celui des autres actifs, ils ont utilisé des données agrégées de quatre secteurs de l'industrie minière canadienne (plomb, zinc, cuivre et argent), ainsi que le rendement sur d'autres actifs (bons du trésor, TSE 300). Leurs résultats se sont avérés forts encourageants. En particulier, les primes de risque étaient significatives et d'un ordre de grandeur très plausible. Cependant, malgré le rapprochement entre la théorie et la pratique, les auteurs concluent qu'une grande partie de l'évolution des prix nets demeure inexpliquée.

Finalement, Chermak et Patrick (1999) ont développé un modèle économétrique du même type que celui d'Halvorsen et Smith (1991). Ils ont approfondi le modèle en prétendant que les firmes, non seulement extraient la ressource brute, mais la traitent (au moins partiellement) dans le processus de transformation en produit fini. Cette hypothèse est pertinente avec l'analyse du gaz naturel dont ils possèdent les données pour 29 puits appartenant à 5 firmes productrices. Les auteurs ont utilisé la théorie duale pour faire l'estimation du prix net du gaz naturel. Enfin, ils ont testé la théorie des ressources épuisables, tant avec une fonction de coûts finaux indirecte qu'avec une fonction de coûts d'extraction de la ressource brute. Ils ont trouvé que le prix de la ressource in situ décroît avec la production brute, mais s'accroît avec la production finale en tout point dans le temps. Leur test ne rejette donc pas la théorie. Ainsi, celle-ci peut être utile pour décrire le comportement des producteurs. Chermak et Patrick suggèrent, par contre, d'introduire explicitement l'incertitude dans le modèle afin de renforcer les résultats.

Les test analysant le comportement des prix nets expliquent bien quelques lacunes des modèles plus simples de la catégorie précédente. En particulier, les changements technologiques et les variations dans les courbes de demande peuvent être modélisés. Malgré tout, la performance générale de ces études s'est avérée relativement pauvre. Certains estimés des prix nets décroissant même à un rythme plus rapide que le prix des ressources.

La dernière catégorie de test présente un corollaire de la règle d'Hotelling : le principe d'évaluation d'Hotelling (Miller et Upton, 1985 a et b). Ce principe montre que si l'évolution du prix net d'un minerai quelconque respecte la règle d'Hotelling, alors la valeur des réserves exploitées de façon optimale dépend principalement du prix *courant* et du coût d'extraction, et ce, peu importe la date d'extraction. Les auteurs ont testé cette proposition en faisant la régression de la valeur sur le marché des réserves détenues par un échantillon de compagnies américaines spécialisées dans la production d'huile et de gaz sur la valeur estimée selon Hotelling. Des régressions ont été faites à plusieurs points dans le temps pour la période allant du mois de décembre 1979 au mois d'août 1981. La valeur sur le marché est basée sur la valeur boursière des firmes en question tandis que celle d'Hotelling dépend des estimés des prix, des coûts d'extraction et des stocks de ressources pour ces mêmes firmes. Les auteurs ont trouvé que le principe d'évaluation d'Hotelling offrait une bonne description de l'évolution de la valeur boursière des firmes étudiées. Par contre, d'autres tests effectués pour la période subséquente (août 1981-décembre 1983) ne se sont pas avérés concluants. La stabilité relative dans le prix des minerais explique en grande partie ces nouveaux résultats.

En bref, depuis la parution de l'article d'Hotelling, en 1931, plusieurs auteurs ont tenté d'améliorer la portée du modèle de multiples façons. Par exemple, certains chercheurs ont introduit des coûts d'extraction variables (Levhari et Liviatan, 1977), d'autres ont introduit l'incertitude quant à l'ampleur des nouvelles découvertes (Pyndick, 1980). Cependant, bien qu'aucune théorie ne puisse contredire le modèle d'Hotelling, les études empiriques ne montrent généralement que très peu d'appui aux différents modèles théoriques. Une des explications (Young et Ryan, 1996) est l'accessibilité à des données de qualité. De plus, Young (1992) parle de mauvaises spécifications dans les modèles, en particulier dans les fonctions de coûts.

Dans la prochaine section, nous exposons le modèle développé par Gaudet et Khadr (1991). Ceux-ci ont dérivé une version stochastique de la règle d'Hotelling en introduisant l'incertitude par des indices de productivité stochastiques dans la fonction de production d'un bien composite et dans le processus d'extraction de la ressource. Voyons donc en détail le modèle développé par Gaudet et Khadr.

Analyse théorique

Nous avons vu précédemment les études antérieures consacrées à la théorie des ressources naturelles non renouvelables. Sur le plan empirique, ces études ne supportent généralement pas la règle d'Hotelling qui, pourtant, d'un point de vue théorique semble plutôt inébranlable. Dans cette section, nous exposerons un modèle développé par Gaudet et Khadr (1991) introduisant l'incertitude sous forme d'indices de productivité dans le processus d'extraction d'une ressource non renouvelable et dans celui de la production d'un bien composite. Les auteurs obtiennent une version stochastique de la règle d'Hotelling prédisant que le taux de rendement espéré de l'unité marginale de la ressource in situ doit être égal au taux de rendement obtenu en conservant notre richesse sous la forme du bien composite. Après quelques transformations, il est possible d'écrire cette nouvelle loi sous la forme bêta consommation, celle-ci facilitant les tests empiriques. Voici donc le modèle (pour une description plus formelle, se référer à l'article de Gaudet et Khadr, 1991).

D'entrée de jeu, Gaudet et Khadr supposent qu'il existe deux biens dans l'économie. Le premier est une ressource naturelle non renouvelable tandis que l'autre est un bien composite. Ce bien composite peut être soit consommé, soit accumulé. L'accumulation peut se faire de deux façons. Premièrement, on peut détenir un stock du bien composite sous la forme d'obligations. Ce stock d'obligations se reproduit à un taux constant instantané r. Nous pouvons deuxièmement accumuler le bien composite sous forme de capital. Il est alors possible de le combiner à un flux de la ressource afin de produire le bien composite, ou tout simplement de l'utiliser dans le processus d'extraction de la ressource non renouvelable (voir tableau 1).

Si on note y(t), la production du bien composite au temps t, x(t), le taux d'extraction de la ressource épuisable, R(t), le stock de la ressource et K(t) le stock de capital disponible, nous pouvons écrire les fonctions de production pour les deux biens :

$$y(t) = F(K_y(t), x(t), \theta_1(t)) \qquad (1)$$

$$x(t) = G(K_x(t), \theta_2(t)). \qquad (2)$$

Ici, $K(t) = K_y(t) + K_x(t)$. Le vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ introduit l'incertitude dans chacun des processus de production. Par hypothèse, ces indices de productivité évoluent comme des processus d'Itô. Ainsi,

$$d\theta_i = \mu_i dt + \sigma_i \xi_i \surd dt, \qquad i= 1,2, \; (3)$$

avec $\xi_i \sim N(0,1)$ et $cov(d\theta_1, d\theta_2) = \sigma_{12}dt + o(dt)$. De plus, μ_i et σ_i dépendent de l'état du monde mais pas de t. Ainsi, nous sommes en présence de deux indices de productivité évoluant selon des processus d'Itô et qui, en principe, peuvent être corrélés. Il est important de mentionner les hypothèses faites sur les deux fonctions de production (voir tableau 2 pour un résumé de ces hypothèses). Gaudet et Khadr supposent $F(\bullet)$ deux fois différentiable. Cette fonction doit également satisfaire $F_k > 0$ et $F_x > 0$ (produit marginal positif), $F_{xk} > 0$, $F_1 > 0$, $F_{x1} > 0$ et $F_{k1} > 0$ où l'indice 1 (par exemple) fait référence à une dérivée par rapport

Tableau 1 : Schéma des hypothèses de base du modèle de Gaudet et Khadr

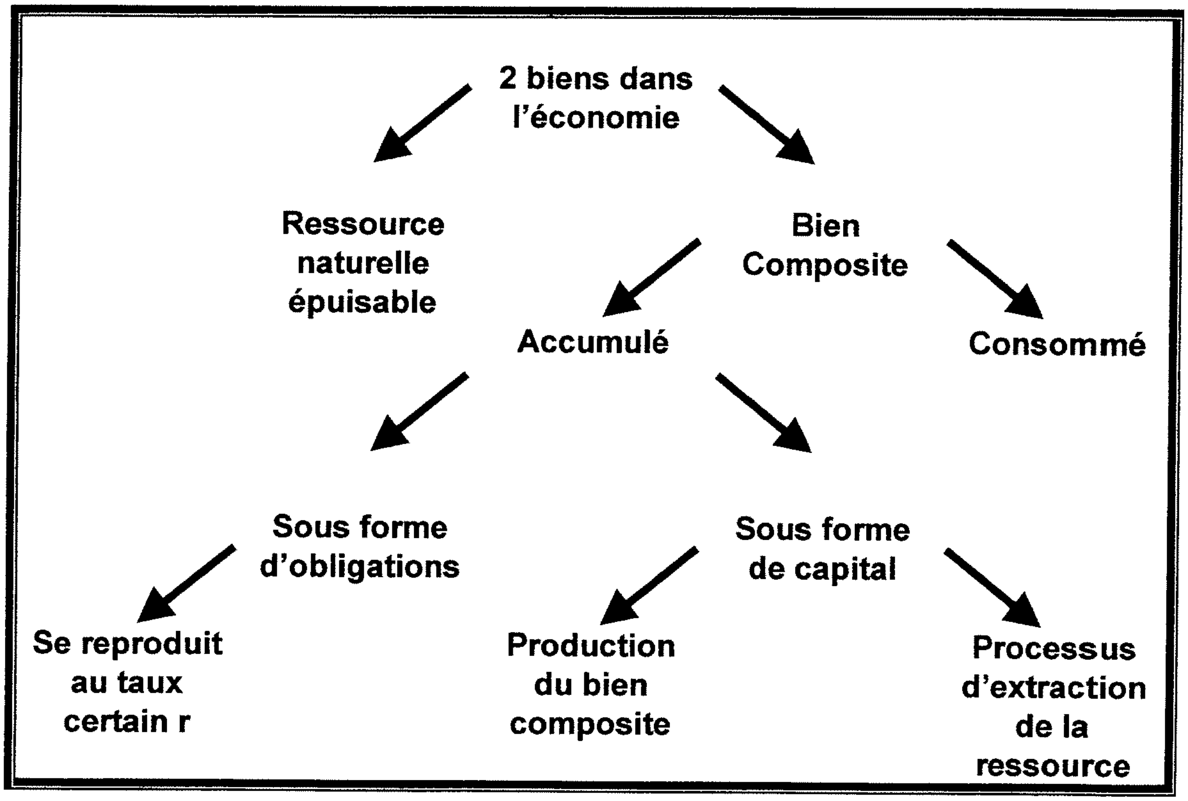

Tableau 2 : Les hypothèses sur les fonctions de production

Fonction de production du bien composite	Processus d'extraction de la ressource
$y(t) = F(K_y(t), x(t), \theta_1(t))$	$x(t) = G(K_x(t), \theta_2(t))$
Hypothèses	*Hypothèses*
F(•) est deux fois différentiable	$G(K_x, \theta_2) = K_x / \gamma(\theta_2)$
$F_k > 0, F_k > 0, \quad F_{xk} > 0$	$\gamma(\theta_2)$ est deux fois différentiable
$F_1 > 0, \quad F_{x1} > 0, \quad F_{k1} > 0$	$\gamma'(\theta_2) > 0$
$\lim_{x \to 0} F_x = \infty$ et $\lim_{k \to 0} F_k = -\infty$	$\lim_{\theta 2 \to -\infty} \gamma(\theta_2) = 0$ et $\lim_{\theta 2 \to \infty} \gamma(\theta_2) = \infty$

à θ_1. Enfin, les conditions d'Inada ($\lim_{x\to 0} F_x = \infty$ et $\lim_{k\to 0} F_k = -\infty$) doivent également être satisfaites. Ces postulats sont suffisants pour contrer la possibilité d'un épuisement de la ressource dans un temps fini. Quant au processus d'extraction, il est donné par $G(K_x, \theta_2) = K_x / \gamma(\theta_2)$. Ici, $\gamma(\theta_2)$ représente le nombre d'unités de capital requis pour extraire une unité de la ressource. La production est donc proportionnelle à la quantité de capital employée. $\gamma(\theta_2)$ est deux fois différentiable et $\gamma'(\theta_2) > 0$, $\lim_{\theta 2\to -\infty} \gamma(\theta_2) = 0$ et $\lim_{\theta 2\to \infty} \gamma(\theta_2) = \infty$. Finalement, pour les besoins du modèle, les auteurs définissent également p(t) comme le prix de la ressource une fois extraite, mesuré en unité du bien composite, q(t) comme le prix de demande du bien composite en unité monétaire, c(t) comme le flux de consommation et U(c(t)) comme l'utilité du consommateur type. De plus, α est utilisé comme taux d'actualisation instantané. Ils supposent aussi que les variables p(t) et q(t) évoluent comme des processus d'Itô. On peut montrer que c'est bel et bien le cas à l'équilibre (voir Gaudet et Khadr, 1991), mais cette démonstration ne sera pas présentée dans ce rapport. Finalement, les hypothèses sur la fonction d'utilité du ménage type sont : $U(c) \geq 0$, $U'(c) > 0$ et $U''(c) \leq 0$ pour $c \geq 0$ ainsi que $\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty$.

À la lumière de ce qui précède, on peut remarquer que nous sommes en présence d'un problème d'équilibre général. En effet, nous avons 2 biens et trois types d'agents. Ces agents sont ou extracteurs, ou producteurs ou consommateurs. L'agent consommateur doit choisir sa consommation et la composition de son portefeuille.

L'extraction optimale de la ressource

Envisageons le marché de l'extraction afin d'établir une équation liée au *niveau d'extraction optimal pour une firme*. Dans le modèle, une firme typique maximise la valeur présente espérée (exprimée en unité monétaire) des flux de profits futurs. En d'autres mots, celle-ci maximise la rente qu'elle retire de ses réserves. Cette rente sera supérieure à 0 puisque la firme n'égalise pas le prix au coût marginal, étant donné la présence d'un stock fini de ressource. Gaudet et Khadr supposent qu'il existe un grand nombre de firmes. Par le fait même, celles-ci n'ont aucune influence sur les prix (" price takers "). La fonction de valeur à maximiser est donnée par :

$$V(R(t), p(t), q(t), \theta_2(t)) = \max_{\{x(s)|s\in[t,\infty)\}} E_t \int e^{-\alpha(s-t)} q(s) \, [p(s)-r\gamma(\theta_2(s))] \, x(s) \, ds.$$

Cette maximisation est sujette à $dR(s) = -x(s)ds$, aux processus d'Itô, ainsi qu'aux conditions initiales. En outre, les réserves ne sont pas stochastiques et l'équation de Bellman qui en résulte est :

$$\alpha V = \max_{\{x\}} [\, q(p-r\gamma)x - V_R x + \textstyle\sum_i \mu_i V_i + 1/2 \sum_i V_{ii}\sigma_i^2 + 1/2 \sum_i \sum_j V_{ij}\sigma_{ij}] \quad (4)$$

pour i, j = p, q, 2 avec V_i, la dérivée partielle par rapport à θ_i. Une condition nécessaire pour une solution positive et finie est :

$$V_R = q[p-r\gamma] \quad (5).$$

Nous pouvons remarquer que si les réserves sont infinies (un baril en terre ne vaut rien), alors $V_R = 0$. Dans ce cas particulier, $qp = qr\gamma$. C'est-à-dire que le prix est égal au coût marginal. Mais, ici, il y a une rente : $qp = qr\gamma + V_R$. Le fait que nous ayons affaire à une ressource non renouvelable apparaît donc dans V_R (coût d'usage).

En différentiant l'équation de Bellman (4) par rapport à R et en utilisant le lemme d'Itô ainsi que la condition (5), il est possible d'obtenir :

$$(1/\pi)(1/dt)E_t(d\pi) = \alpha \qquad (6),$$

où $\pi = q[p-r\gamma]$ équivaut au prix net de la ressource évalué en terme monétaire. Cette dernière équation peut être considérée comme une version stochastique de la règle d'Hotelling dans un contexte d'équilibre partiel. On peut remarquer la ressemblance entre cette équation et l'équation $\dot{\lambda}/\lambda = r$, citée précédemment. La firme doit donc choisir son taux d'extraction de façon à satisfaire l'équation (6) sinon des possibilités d'arbitrage intertemporel en résultent.

La production du bien composite

Pour établir la règle d'Hotelling véritable, nous devons solutionner le problème du producteur. La firme typique oeuvrant sur le marché du bien composite maximise son profit à chaque temps t :

$$\mathrm{Max}_{\{Ky,x\}}\, q[\, F(K_y, x\, , \theta_1) - rK_y - px]$$

On suppose qu'il n'y a pas de coût d'ajustement (la firme ajuste son stock de capital instantanément). Les conditions nécessaires sont les suivantes :

$$F_k(K_y, x, \theta_1) = r \qquad (7)$$

$$F_x(K_y, x, \theta_1) = p. \qquad (8)$$

Ces deux équations peuvent être utilisées pour dériver les fonctions de demande pour la ressource et pour le stock de capital nécessaire à la production du bien composite. Étant donné les hypothèses sur F(•), ces fonctions de demande sont caractérisées par des effets de prix croisés négatifs et par l'absence d'un prix “ choke off ” fini.

Le problème du consommateur

Le consommateur doit, pour sa part, déterminer son niveau de consommation ainsi que la composition de son portefeuille. On suppose que le consommateur est propriétaire du stock de bien composite (K(t) + B(t)) et du stock de ressource R(t). Il choisit c(t) et la composition de son portefeuille à chaque date t pour maximiser l'espérance de ses flux d'utilité actualisés, la maximisation étant sujette à sa contrainte de richesse. Ces décisions dépendent des espaces d'opportunité stochastiques générés par le problème du producteur et celui de l'extraction optimale de la ressource. En particulier, le consommateur type prend comme donnés les rendements sur chaque actif. Ces rendements sont notés :

$$\rho_i(t), \text{ où } i = K, B, R.$$

Puisque r est le rendement instantané sans risque sur les obligations, nous avons $\rho_B = rdt$. Pour K et B, Gaudet et Khadr postulent que les rendements évoluent comme des processus d'Itô. Ainsi, $\rho_i = \mu_i dt + \sigma_i \xi_i \sqrt{dt}$, où i= K et R. Encore une fois, on peut montrer que c'est bien le cas à l'équilibre (voir Gaudet et Khadr, 1991). Les mêmes restrictions que précédemment s'appliquent aux processus d'Itô.

Nous avons vu qu'à l'équilibre nous avons $F_k = r$ (équation 7). C'est donc dire, que les producteurs s'assurent que la productivité marginale du stock de bien composite sera la même quelle qu'en soit l'utilisation. Puisque μ_k doit aussi être égal à F_k, alors σ_k doit être nul. Il s'ensuit qu'à l'équilibre :

$$\rho_B = \rho_k = \rho = rdt, \qquad (9)$$

où ρ_k représente le rendement d'une unité de capital à l'équilibre.

En définissant W(t) comme la richesse totale du consommateur type à la date t nous avons :

$$W(t) = K(t) + B(t) + \lambda(t)R(t), \qquad (10)$$

où λ représente la valeur d'une unité de la ressource *en terme du bien composite*. La différentielle totale de l'équation précédente est donnée, après les substitutions nécessaires, par :

$$dW = -cdt + W[\omega\rho + (1-\omega)\rho_R]\ , \qquad (11)$$

où $\omega(t)$ est la part de la richesse détenue en stock du bien composite. Cette dernière équation représente la contrainte stochastique de richesse du consommateur type. Son problème de choix se pose de la manière suivante :

$$J(W(t), \theta_1(t), \theta_2(t)) = \max_{\{c(s)\}\{\omega(s)\}} E_t \int e^{-\alpha(s-t)}\ U(c(s))ds,$$

Cette maximisation est sujette à sa richesse au temps t, à sa contrainte de richesse ainsi qu'aux équations pour les rendements de B, K et R. L'équation de Bellman associée à ce problème est :

$$\alpha J = \max_{\{c,\,\omega\}} [U(c) + \{W[\omega r + (1-\omega)\mu_R] - c\}J_W$$

$$+ (1/2)(1-\omega)^2W^2\sigma^2{}_R J_{WW} + (1-\omega)W\Sigma_i J_{Wi}\sigma_{Ri}$$

$$+ \Sigma_i J_i\mu_i + (1/2)\Sigma_i J_{ii}\sigma^2{}_i + J_{12}\sigma_{12}],$$

pour $i = 1, 2$, où $\sigma_{Ri}dt = \mathrm{cov}(\rho_R, d\theta_i)$ et J_i est la dérivée partielle de J par rapport à θ_i. En maximisant par rapport au deux variables d'état, on obtient deux conditions nécessaires :

$$U' = J_w \qquad (12)$$

$$J_w[\mu_R - r] + J_{ww}W(1-\omega)\sigma_R^2 - \Sigma_i J_{wi}\sigma_{Ri} = 0. \quad (13)$$

La première équation est la condition de l'enveloppe tandis que l'autre montre la relation entre la part du portefeuille allouée à l'actif risqué, $(1-\omega)$, et son rendement excédentaire ainsi que la variance de son rendement. Dans un cadre déterministe, μ_R serait égal à r. Cependant, la présence d'incertitude (risque) fait que $\mu_R > r$ si la ressource (par exemple, le pétrole) est un actif relativement risqué.

Les prix d'équilibre

Avant de dériver la règle d'Hotelling modifiée pour la présence d'incertitude, il reste à caractériser l'évolution, à l'équilibre, du prix de la ressource en terme du bien composite (p), du prix de demande du bien composite en unité monétaire (q) et du rendement d'une unité de ressource in situ (ρ_R).

Si nous remplaçons K_y et x par leur valeur à l'équilibre dans l'équation (8), nous avons :

$$p(t) = P(K(t) + B(t), R(t), \theta_1(t), \theta_2(t)).$$

De la même façon, puisque q = U'(c), en remplaçant c par sa valeur à l'équilibre, nous obtenons :

$$q(t) = Q(K(t) + B(t), R(t), \theta_1(t), \theta_2(t)).$$

Enfin, pour caractériser ρ_R, il faut remarquer que le rendement d'une unité de la ressource in situ est donné par le gain de capital qu'elle peut procurer. Ce faisant, il s'agit d'une augmentation du prix d'une unité de la ressource in situ en terme du bien composite. Nous avons appelé ce prix λ. C'est le prix brut de la ressource diminué de son coût d'extraction ou simplement : $\lambda = p - r\gamma(\theta_2)$. À l'équilibre, nous avons donc :

$$\lambda(t) = P(K(t) + B(t), R(t), \theta_1(t), \theta_2(t)) - r\gamma(\theta_2(t)).$$

De plus, à l'aide du lemme d'Itô, Gaudet et Khadr ont démontré que puisque θ_1 et θ_2 évoluent comme des processus d'Itô, il en est de même pour les valeurs d'équilibre de p, q et ρ_R. Par le fait même, les processus stochastiques postulés précédemment avec :

$$\mu_p = (1/dt)E_t(dp),\ \mu_q = (1/dt)E_t(dq) \text{ et } \mu_\lambda = (1/\lambda)(1/dt)E_t(d\lambda),$$

ainsi que :

$$\sigma_p^2 = (1/dt)Var(dp),\ \sigma_q^2 = (1/dt)Var(dq) \text{ et } \sigma_\lambda^2 = (1/dt)Var(d\lambda/\lambda),$$

sont appropriés et nous avons un problème d'équilibre général.

La règle d'Hotelling.

Nous allons montrer comment Gaudet et Khadr ont dérivé une règle d'Hotelling dans un contexte d'incertitude. Comme nous l'avons mentionné, l'équation (6) est une condition d'arbitrage qui s'apparente à la règle d'Hotelling ($\dot{\lambda}/\lambda = r$). Cependant, il s'agit d'une condition d'équilibre partiel. Celle-ci s'écrit :

$$(1/\pi)(1/dt)E_t(d\pi) = \alpha,$$

où $\pi = q[p\text{-}r\gamma]$ représente le prix net de la ressource évalué en unité monétaire.

Pour trouver la règle d'Hotelling à partir des conditions d'équilibre précédentes, les auteurs utilisent l'équation $\pi = q[p\text{-}r\gamma]= U'\lambda$, qu'ils substituent dans l'équation (6), nous pouvons alors écrire :

$$(1/U'\lambda)(1/dt)E_t(dU'\lambda) = \alpha, \qquad (14)$$

Puis, en différentiant l'équation de Bellman du problème du consommateur (par rapport à W), en utilisant le lemme d'Itô et en réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$(1/J_W)(1/dt)E_t(dJ_W) = \alpha - r - ((1\text{-}\omega)/J_W)[J_W(\mu_R - r) + J_{WW}W(1 - \omega)\sigma_R^2 - \Sigma_i J_{Wi}\sigma_{Ri}],$$

qui, après des substitutions à partir des équations (12) et (13), devient :

$$(1/U')(1/dt)E_t(dU') = \alpha - r. \qquad (15)$$

Cette dernière équation nous dit que le taux de croissance espéré de l'utilité marginale doit être égal à l'écart entre le taux d'actualisation et le rendement certain possible sur le marché.

Les équations (14) et (15) mènent directement à la règle d'Hotelling généralisée pour la présence d'indices de productivité stochastiques dans les processus de production et d'extraction. Cette règle s'écrit:

$$(1/U'\lambda)(1/dt)E_t(dU'\lambda) - (1/U')(1/dt)E_t(dU') = r. \quad (16)$$

Ainsi, le taux de rendement espéré d'une unité de la ressource in situ (mesuré par la différence entre le taux de croissance espéré de la valeur de l'unité marginale de la ressource in situ et le taux de croissance espéré de l'utilité marginale de consommation) doit être égal au taux de rendement qu'il est possible d'obtenir en conservant sa richesse sous forme de bien composite. En faisant l'expansion de la règle précédente (voir Gaudet et Khadr, 1991), nous pouvons obtenir une règle d'Hotelling pour le taux de croissance d'équilibre du prix de la ressource in situ en terme du bien composite. Il devient alors plus facile d'analyser la règle pour différents scénarios. De cette façon nous avons :

$$(1/\lambda)(1/dt)E_t(d\lambda) = r - [U''(A_1\sigma_1^2 + A_2\sigma_2^2 - A_{12}\sigma_{12})/\lambda U'], \quad (17)$$

où $A_1 = F_1F_{x1}$, $A_2 = F_k(\gamma')^2x(x F_{xk} + r)$ et $A_{12} = \gamma'[x F_{x1}F_k + F_1(xF_{xk} + r)]$. Avec les hypothèses faites sur les fonctions de production, il est possible de vérifier que A_1, A_2 et A_{12} sont tous positifs. Nous pouvons remarquer que le taux de croissance espéré de la valeur en terre de la ressource peut être supérieur ou inférieur au taux d'intérêt r. Tout dépend du signe du deuxième terme du côté droit de l'équation ci-haut. Voici différents cas possibles.

Le cas le plus simple concerne le cadre déterministe. Dans ce cas, σ_1, σ_2 et σ_{12} sont nuls et, par le fait même, nous reconnaissons la règle d'Hotelling de base; le taux de croissance du prix de la ressource in situ est égal au taux d'intérêt. L'opérateur d'espérance disparaît puisqu'il y a absence d'incertitude. Un autre cas a trait au consommateur type neutre au risque (U'' =0). La règle dit alors que le taux de croissance *espéré* est égal au taux d'intérêt.

Les cas plus généraux peuvent également être analysés. Dans un premier temps, si des chocs défavorables à l'extraction de la ressource sont accompagnés de chocs favorables dans le processus de production (et vice versa), nous avons $\sigma_{12} > 0$. Dans un contexte semblable, la ressource peut être considérée comme un actif relativement peu risqué, d'où un taux de rendement excédentaire moins élevé. Cette situation prévaut en raison des deux effets qui agissent en sens contraire et qui réduisent le risque total que supporte le consommateur. Dans un deuxième temps, si $\sigma_{12} < 0$, la ressource est considérée comme un actif plus risqué et le consommateur s'attend à recevoir un rendement plus élevé sur celle-ci.

L'équation précédente (17) est formulée en terme du prix de la ressource in situ. Cependant, ce prix est souvent non observable. Il devient alors plus utile d'énoncer celle-ci en terme de p(t), le prix de la ressource extraite. Pour ce faire, nous pouvons utiliser $p = \lambda + r\gamma$ qui dit que le prix d'équilibre de la ressource est la somme du coût d'usage et du coût d'extraction. Étant donné que r est exogène et constant, nous avons :

$$(1/p)(1/dt)E_t(dp) = (\lambda/p)(1/\lambda)(1/dt)E_t(d\lambda) + [r\gamma/p](1/\gamma))(1/dt)E_t(d\gamma). \quad (18)$$

En recourant au lemme d'Itô et à l'équation(3) nous obtenons :

$$(1/dt)E_t(d\gamma) = \gamma'\mu_2 + \gamma''\sigma_2^2/2 \qquad (19),$$

puis, substituant (17) et (19) dans (18) :

$$(1/p)(1/dt)E_t(dp) = r - [U''(\bullet)/\lambda U'']*[1-r\gamma/p] + [r\gamma/p][(\gamma'\mu_2 + \gamma''\sigma_2^2/2)/\gamma],$$

où le • fait référence à la même parenthèse que dans l'équation (17). Le taux de croissance espéré du prix de la ressource est donc une somme pondérée du taux de croissance espéré de la ressource in situ et du taux de croissance espéré du coût marginal d'extraction. Le prix est donc composé d'une rente et d'un coût .

Cela dit, nous transformons subséquemment l'équation qui caractérise l'évolution du prix des ressources naturelles non renouvelables sous la forme consommation bêta. Nous pourrons alors tester empiriquement cette nouvelle équation.

La forme consommation bêta.

Le modèle d'évolution du prix des ressources naturelles peut aussi prendre la forme consommation bêta (Breeden 1979). En plus de suggérer une nouvelle interprétation, celle-ci a l'avantage de pouvoir être testée empiriquement.

Encore une fois, c'est en utilisant le lemme d'Itô qu'il nous sera possible de déterminer l'expression recherchée. Ce dernier, appliqué à (16), nous donne les deux équations suivantes :

$$(1/U'\lambda)(1/dt)E_t(dU'\lambda) = (1/\lambda)(1/dt)E_t(d\lambda) + (U''c/U')(1/c)(1/dt)E_t(dc)$$
$$+ (1/2)(U'''/U')(1/dt)E_t(dc)^2 + (U''c/U')(1/c)(1/\lambda)(1/dt)E_t(dcd\lambda)$$

et

$$(1/U')(1/dt)E_t(dU') = (U''c/U')(1/c)(1/dt)E_t(dc) + (1/2)(U'''/U')(1/dt)E_t(dc)^2.$$

En transposant ces résultats dans l'équation (16) et en utilisant le fait que $d\lambda/\lambda = \rho_R$ et que $(1/\lambda)(1/dt)E_t(d\lambda) = \mu_R$, la règle d'Hotelling peut être réécrite de la façon suivante:

$$\mu_R - r = -(U''c/U')\,\sigma_{Rc},$$

où $\sigma_{Rc}dt = \mathrm{cov}(\rho_R, dc/c)$. Il s'agit de la covariance instantanée entre le taux de rendement sur la ressource et le taux de croissance de la consommation. Le coefficient d'aversion relative au risque est supérieur à 0 si on suppose que le consommateur est averse à ce même risque. D'après cette équation, le rendement excédentaire espéré de la ressource in situ présente donc le même signe que la covariance entre le rendement sur la ressource in situ et le changement relatif dans la consommation. Ainsi, si la covariance est supérieure à 0, l'actif peut être considéré comme risqué puisque son rendement s'accroît lorsque le besoin s'en fait le moins sentir (étant donné l'utilité marginale décroissante de la consommation). Dans ce cas, le taux de rendement espéré de la ressource in situ surpasse le taux d'intérêt sans risque pour compenser l'accroissement d'incertitude. Le raisonnement contraire est également vrai.

S'il existe plusieurs actifs risqués, nous pouvons noter μ_M comme le taux de rendement instantané d'un portefeuille ayant une covariance non nulle avec le taux de variation de la consommation. Dans ce cas, nous avons

$\mu_M - r = - (U''c/U') \sigma_{Mc}$, et en effectuant la substitution dans l'équation précédente nous obtenons :

$$\mu_R - r = \beta[\mu_M - r],$$

où $\beta = \sigma_{Rc}/\sigma_{Mc}$. Par définition, ce β est le coefficient obtenu en régressant μ_R sur μ_M et en utilisant la variation dans la consommation par habitant comme variable instrumentale. Cette dernière équation fera l'objet des tests empiriques que nous effectuerons dans la prochaine section.

Analyse empirique

Dans la partie précédente, nous avons exposé un modèle développé par Gaudet et Khadr (1991). Ces derniers ont dérivé une version stochastique de la règle d'Hotelling. En prenant la forme bêta consommation, cette règle prédit que le rendement excédentaire sur la ressource in situ est proportionnel à la covariance entre le rendement de la ressource et le taux de variation de la consommation par habitant. Les auteurs ont d'ailleurs suggéré un test de la règle d'Hotelling à partir de l'équation qu'ils ont dérivée.

Dans cette section, nous présentons une méthode pour tester l'équation dérivée par Gaudet et Khadr (1991). Cette équation, rappelons-le, était donnée par :

$$\mu_R - r = \beta[\mu_M - r] \,,$$

où μ_R représente le rendement de la ressource in situ, μ_M, le taux de rendement instantané d'un portefeuille ayant une covariance non nulle avec la variation dans la consommation, r, le taux d'intérêt sans risque et, enfin, β représente une mesure du risque.

Pour tester cette équation, nous avons utilisé des données boursières de la bourse de Toronto. Nous nous sommes, en effet, servi de l'indice du TSE 300 afin de calculer les rendements du portefeuille de marché. Les sous-indices huile et gaz, métaux et minéraux, or et argent, nous ont ensuite été utiles pour calculer les rendements sur la ressource. Concernant le taux sans risque, nous nous sommes servis du taux de rendement à 30 jours des papiers commerciaux. L'utilisation de ce taux comme taux sans risque est pertinente; au dire de plusieurs analystes, il s'agit d'un meilleur indicateur que le taux de rendement sur les bons du Trésor. Les rendements excédentaires ont, pour leur part, été comptabilisés à l'aide des rendements des indices et du taux sans risque. Les données sur les séries boursières (quatre) comprennent les valeurs à la fermeture des marchés pour chacun des mois compris entre janvier 1960 et décembre 1995, inclusivement. Ainsi, pour toutes les séries, nous avons recueilli 432 données mensuelles. Le tableau 3 présente les statistiques des rendements mensuels pour les séries utilisées (ces rendements étant donnés par $R_T = (P_T/P_{T-1}) - 1$, où R_T représente le rendement au temps T et, P_T la valeur de

Tableau 3 : Statistiques des rendements des séries boursières utilisées

Série (1960-1995)	Observation	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
TSE 300	*432*	*0.0059471*	*0.0440882*	*-0.2262984*	*0.1725838*
Huile et Gaz	*432*	*0.0081744*	*0.070342*	*-0.2536176*	*0.3163347*
Métaux et Minéraux	*432*	*0.006602*	*0.0656232*	*-0.3062452*	*0.2373786*
Or et argent	*432*	*0.012632*	*0.0976402*	*-0.3503847*	*0.4088097*

l'indice boursier au temps T). Pour calculer le taux de variation de la consommation par habitant, nous avons récupérer sur CANSIM, les données sur la population pour les années étudiées en supposant que la population est constante au cours d'une même année. Pour les dépenses personnelles en biens et services de consommation (données désaisonnalisées) , nous avons également eu recours à une base de données de CANSIM. Par contre, puisque les valeurs étaient trimestrielles, nous avons dû procéder à des estimations linéaires pour obtenir des données mensuelles. Ces estimations peuvent être considérées relativement exactes étant donné le peu de variation dans les dépenses de consommation (en général) entre deux trimestres consécutifs. Le tableau ci-dessous présente les statistiques pour la variation dans la consommation par habitant entre 1960 et 1995.

Tableau 4 : Statistiques de la variation dans la consommation par habitant

Série	Observation	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
Var. cons **(per capita)**	***432***	***0.0057115***	***0.005724***	***-0.0327799***	***0.0169296***

Par la suite, nous avons effectué des régressions du rendement excédentaire sur les ressources (μ_R - r) sur celui du portefeuille marché (μ_M – r). Pour ce faire, nous avons, en plus de réaliser la régression pour chacun des sous-indices, divisé l'échantillon total en deux parties de même durée. Ainsi, nous présentons les résultats de neuf régressions. La méthode des moindres carrés ordinaires, actifs par actifs, a été utilisée pour conduire ces régressions.

La méthode du maximum de vraisemblance est recommandée parce que les estimateurs produits sont convergents, et efficaces et normaux de façon asymptotique (sous certaines conditions de régularité), mais, en raison de nos hypothèses, la méthode des moindres carrés ordinaires, mène aux mêmes résultats. C'est-à-dire que la constante et les bêtas sont les mêmes. Les tableaux 5 à 7, à la page suivante, montrent les résultats de ces régressions.

À l'aide de ces résultats, nous nous sommes tout d'abord assuré que les données vérifient le CAPM. Pour ce faire, nous avons procédé à la manière de Campbell, Lo et MacKinlay (1997). Le modèle est le suivant:

$$\mathbf{Z}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} Z_{mt} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = 0 \text{ , } E[\boldsymbol{\varepsilon}_t \, \boldsymbol{\varepsilon}_t'] = \boldsymbol{\Sigma}$$

$$E[Z_{mt}] = v_m \text{ , } E[(Z_{mt} - v_m)\text{^}2] = \sigma_m^2$$

$$\mathrm{Cov}[Z_{mt}, \boldsymbol{\varepsilon}_t] = 0.$$

Ici, $\mathbf{Z}_t$ représente un vecteur (NX1, où dans notre cas, N=3)) des rendements excédentaires pour un portefeuille formé des trois indices étudiés, $\boldsymbol{\alpha}$ est le vecteur des constantes, $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur (3X1) des bêtas, Z_{mt} est le rendement excédentaire au temps t du portefeuille de marché, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ est le terme d'erreur et, enfin, $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice variance covariance des résidus. Si on substitue Z_t par $\mu_R - r$ et Z_{mt} par $\mu_M - r$, ce modèle s'apparente à celui développé par Gaudet et Khadr (on teste que la constante est nulle). Le v représente donc l'espérance du rendement excédentaire. Les estimateurs de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ (trouvés à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, sont donnés respectivement par :

Tableau 5 : Résultats des régressions pour l'échantillon complet (jan.60-déc.95)

Série	Alpha (écart type)	Bêta (écart type)
Huile et Gaz	*0.0023153 (0.0022276)*	*1.201345 (0.0502125)*
Métaux et Minéraux	*0.0007592 (0.0017439)*	*1.238344 (0.0393101)*
Or et Argent	*0.0066835 (0.0042017)*	*0.9967276 (0.0947101)*

Tableau 6 : Résultats des régressions pour la première période (jan.60-déc.77)

Série	Alpha (écart type)	Bêta (écart type)
Huile et Gaz	*0.0046124 (0.0027166)*	*1.280643 (0.0656136)*
Métaux et Minéraux	*-0.0012549 (0.0019608)*	*1.123268 (0.0473573)*
Or et Argent	*0.0055185 (0.0058622)*	*0.4429808 (0.141587)*

Tableau 7 : Résultats des régressions pour la deuxième période (jan.78-déc.95)

Série	Alpha (écart type)	Bêta (écart type)
Huile et Gaz	*0.0000979 (0.0035255)*	*1.14122 (0.0747918)*
Métaux et Minéraux	*0.0026578 (0.0028563)*	*1.326204 (0.0605936)*
Or et Argent	*0.0072925 (0.0056783)*	*1.423422 (0.1204606))*

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\mathbf{v}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{v}_m,$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\Sigma_{t=1} (\mathbf{Z}_t - \hat{\mathbf{v}})(Z_{mt} - \hat{v}_m)) / \Sigma_{t=1} (Z_{mt} - \hat{v}_m)\text{^}2,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (1/T) \Sigma_{t=1} (\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt}) (\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})'.$$

À l'aide de ces estimateurs et de leur distribution conditionnelle au rendement excédentaire, il nous est possible de construire un test de Wald pour tester l'hypothèse de la nullité de la constante du modèle ($\boldsymbol{\alpha} = 0$). Pour tester cette hypothèse, nous avons fait appel à quatre statistiques (Campbell, Lo et MacKinlay, 1997), J1, J2, J3 et J7. Pour les trois premières, nous devons préalablement poser que les rendements des indices boursiers sont indépendants et identiquement distribués (iid) à travers le temps, et qu'ils suivent une loi normale multivariée (ceci afin de donner une dimension intertemporelle au CAPM qui est, en soit, un modèle d'une période). Bien que l'hypothèse soit forte, il s'agit d'une bonne approximation pour des données mensuelles (Campbell, Lo et MacKinlay, 1997). La dernière statistique permet la non-normalité, l'hétéroscédasticité et la dépendance entre les rendements à travers le temps. Un test robuste du CAPM peut alors être mené à l'aide de la méthode généralisée des moments. C'est la statistique J7 qui nous permettra de vérifier l'hypothèse nulle. Les tableaux de la page suivante montrent les caractéristiques de ces statistiques ainsi que leur valeur et leur p_value.

Les résultats empiriques du tableau 9 prouvent que les données utilisées supportent le CAPM. En effet, en se basant sur la p-value de toutes les statistiques, on ne rejette pas l'hypothèse nulle ($\boldsymbol{\alpha} = 0$) à un niveau de confiance

Tableau 8 : Caractéristiques des statistiques J1, J2, J3 et J7

Statistiques	Caract. générales	Formule	Distribution
J1	**Échantillon fini**	$((T\text{-}N\text{-}1)/N)[1+(\hat{v}_m^2/\hat{\sigma}_m^2)(\hat{\alpha}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha})$	$\sim F(N, T\text{-}N\text{-}1)$
J2	**Test du rapport de vraisem-blance**	$T[\log \mid \hat{\Sigma}^* \mid - \log \mid \hat{\Sigma} \mid]$ où Σ^* est l'estimateur contraint en posant $\alpha = 0$	$\sim^a X^2_{(N)}$
J3	**Ajustement à J2 pour échantillon fini**	$((T\text{-} N/2\text{-}2)/T)^*J2$	$\sim^a X^2_{(N)}$
J7	**Non-normalité et non iid**	$T\hat{\alpha}'[\mathbf{R}[\mathbf{D}'_T\mathbf{S}_T^{-1}\mathbf{D}_T]^{-1}\mathbf{R}']^{-1}]\hat{\alpha}$ où **R**, **D** et **S** sont des matrices utilisées pour effectuer la méthode généralisées des moments (voir Campbell, Lo, McKinlay, 1997)	$\sim^a X^2_{(N)}$

Tableau 9 : Résultats empiriques pour les tests du CAPM (version Sharpe-Lintner)

Période	J1 (p-value)	J2 (p-value)	J3 (p-value)	J7 (p-value)
Jan.60-Déc.95	***1.215*** ***(0.304)***	***3.663*** ***(0.300)***	***3.634*** ***(0.304)***	***3.893*** ***(0.273)***
Jan.60-Déc.77	***1.170*** ***(0.322)***	***3.548*** ***(0.315)***	***3.491*** ***(0.322)***	***4.219*** ***(0.239)***
Jan.78-Déc.95	***0.707*** ***(0.549)***	***2.151*** ***(0.542)***	***2.116*** ***(0.549)***	***3.611*** ***(0.307)***

de 5%. En particulier, si on s'attarde à la statistique J2 pour tout l'échantillon, on remarque une p-value de 0.300, suggérant que nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle au niveau de confiance de 5%. Nous obtenons aussi ce résultat en analysant la statistique elle-même. Nous avons dans ce même cas une valeur de 3.663 pour J2. Ainsi, en se référant à la table d'une chi carrée avec trois degrés de liberté, la valeur critique à un seuil de confiance de 95% est de 7.81. Notre valeur étant inférieure, nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle à ce niveau de confiance. Nous pouvons procéder au même raisonnement pour les autres valeurs du tableau. À la lumière de ce qui précède, on ne peut rejeter l'hypothèse nulle pour aucune des statistiques (J1, J2, J3 et J7) et, par le fait même, nous pouvons affirmer que nos données supportent le CAPM à un niveau de confiance de 95%.

Puisque les données appuient le CAPM, nous effectuons le test de la règle d'Hotelling modifiée pour la présence d'incertitude. Gaudet et Khadr (1991) ont proposé un test de cette règle à l'aide de la forme bêta consommation. Pour ce faire, nous avons, comme le suggèrent les auteurs, tester l'hypothèse qui veut que la constante des régressions effectuées précédemment (voir tableau 5,6 et 7) soit nulle et que le bêta soit égal au bêta d'une régression des rendements excédentaires sur les actifs (huile et gaz, métaux et minéraux, et or et argent) sur la variation dans la consommation par habitant utilisée comme variable instrumentale. Nous avons effectué ces régressions et les résultats sont donnés dans les tableaux de la page 42. Le coefficient de ces régressions nous donne par définition le bêta de la formule dérivée par Gaudet et Khadr (1991), c'est-à-dire, σ_{RC}/σ_{MC}.

Premièrement, si on s'attarde aux régressions concernant l'ensemble de l'échantillon (janvier 1960 à décembre 1995), on peut remarquer dans le tableau 13 qui présente les résultats des tests effectués pour l'ensemble de l'échantillon que les p-values de toutes les statistiques de test sont nulles. C'est donc dire qu'on rejette l'hypothèse nulle à un niveau de confiance de 5% pour tous les indices auxquels nous avons eu recours. Ainsi, pour l'ensemble de l'échantillon, les données ne semblent pas supporter la règle d'Hotelling modifiée pour la présence du risque.

Deuxièmement, en se reportant au tableau 14 qui montre les mêmes résultats pour la période allant de janvier 1960 à décembre 1977, nous pouvons constater le même résultat en ce qui a trait à l'indice métaux et minéraux. En effet, sa p-value est nulle. Par contre, la série huile et gaz, a une p-value de 0.2043. C'est donc dire que nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle à un niveau de confiance de 5%. Enfin, pour ce qui est de l'indice or et argent, la p-value, bien que positive, est très peu élevée (0.0322), et nous devons également rejeter l'hypothèse nulle à un niveau de confiance de 5%. Cependant, à un niveau de 1% on ne peut, dans ce cas-ci, rejeter l'hypothèse nulle. Ainsi, pour la première moitié de l'échantillon, les données semblent vérifier la règle d'Hotelling modifiée seulement pour ce qui est de la série huile et gaz et, peut-être, pour la série or et argent, à un niveau de confiance bien faible.

Tableau 10 : Résultats des régressions instrumentales pour l'échantillon complet

Série	Alpha (écart type)	Bêta (écart type)
Huile et Gaz	*0.0020852 (0.0025102)*	*0.674937 (0.6108385)*
Métaux et Minéraux	*0.0009305 (0.0019458)*	*1.630101 (0.4734973)*
Or et Argent	*0.0064443 (0.0043862)*	*0.4497769 (1.06735)*

Tableau 11 : Résultats des régressions instrumentales pour la première période

Série	Alpha (écart type)	Bêta (écart type)
Huile et Gaz	*0.0046124 (0.0027166))*	*1.280643 (0.0656136)*
Métaux et Minéraux	*-0.0009334 (0.0021975)*	*1.462579 (0.2687824)*
Or et Argent	*0.0058469 (0.0059824)*	*0.789486 (0.7317114)*

Tableau 12 : Résultats des régressions instrumentales pour la deuxième période

Série	Alpha (écart type)	Bêta (écart type)
Huile et Gaz	*-0.0001875 (0.0130846)*	*5.047113 (8.362406)*
Métaux et Minéraux	*0.0027039 (0.0035118)*	*0.6941869 (2.244383)*
Or et Argent	*0.0071692 (0.0078718)*	*3.111516 (5.030917)*

Tableau 13 : Résultats des tests de H_0 pour l'échantillon complet

Série	Distribution	Statistique (p-value)
Huile et Gaz	*~F(2,430)*	*55.39 (0.000)*
Métaux et Minéraux	*~F(2,430)*	*49.80 (0.000)*
Or et Argent	*~F(2,430)*	*17.85 (0.000)*

Tableau 14 : Résultats des tests de H_0 pour la première période

Série	Distribution	Statistique (p-value)
Huile et Gaz	*~F(2,214)*	*1.60 (0.2043)*
Métaux et Minéraux	*~F(2,214)*	*25.78 (0.000)*
Or et Argent	*~F(2,214)*	*3.49 (0.0322)*

Tableau 15 : Résultats des tests de H_0 pour la deuxième période

Série	Distribution	Statistique (p-value)
Huile et Gaz	*~F(2,214)*	*1363.65 (0.000)*
Métaux et Minéraux	*~F(2,214)*	*54.84 (0.000)*
Or et Argent	*~F(2,214)*	*98.99 (0.000)*

Troisièmement, le tableau 15 montre, pour le 2è sous-échantillon, les mêmes résultats que celui portant sur l'ensemble de l'échantillon : toutes les p-values sont nulles et nous devons donc rejeter l'hypothèse nulle à un niveau de confiance de 5%.

À la lumière de l'analyse précédente, on peut voir que dans la grande majorité des cas étudiés, les données n'appuient pas la règle d'Hotelling modifiée pour la présence d'incertitude. En effet, seulement un des neufs tests effectués ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle à un niveau de confiance de 5%. Il apparaît donc que, dans l'ensemble, la règle d'Hotelling modifiée pour la présence d'incertitude développée par Gaudet et Khadr (1991) n'est pas supportée par les séries boursières que nous avons utilisées. Rappelons-le, ces séries étaient toutes liées au domaine des ressources naturelles non renouvelables. Il serait surprenant que ce résultat soit expliqué par les estimations que nous avons dû effectuer pour combler les données manquantes dans la série des dépenses personnelles en biens et services de consommation. Effectivement, comme mentionné antérieurement, la différence dans la consommation entre deux trimestres consécutifs est, en général, relativement petite. Par contre, l'utilisation du changement dans les dépenses de consommation per capita comme instrument est, possiblement, à l'origine des résultats non concluants que nous obtenons. En effet, un bon instrument est censé être fortement corrélé avec la variable qu'il remplace, mais très peu avec la variable dépendante. Dans notre cas, si nous faisons l'analyse de la corrélation entre les variables (voir tableau suivant), nous notons que l'instrument n'est que très peu corrélé avec les rendements excédentaires du portefeuille de marché. Ainsi, les résultats produits ne sont pas nécessairement significatifs. D'ailleurs, les coefficients bêtas de ces régressions ne le sont que dans trois des neuf cas étudiés. Toutefois, puisque par définition le bêta de la règle d'Hotelling modifiée était le coefficient d'une régression instrumentale du rendement excédentaire sur la ressource sur la variation dans la consommation par habitant, nous nous devions d'utiliser cet instrument.

Tableau 16 : Corrélation entre les variables

	Rend. exc. TSE300	**Rend. exc. Huile et Gaz**	**Rend. exc. Mét. et Min.**	**Rend. exc. Or et Argent**	**Variation Cons/habitant**
Rend. exc. TSE300	1.000				
Rend. exc. Huile et Gaz	0.4532	1.000			
Rend. exc. Mét. et Min.	0.3592	0.5511	1.000		
Rend. exc. Or et Argent	0.4565	0.8280	0.7518	1.000	
Variation Cons/habitant	-0.0258	-0.068	-0.0432	-0.1007	1.000

Conclusion

Dans ce rapport, nous avons abordé un sujet qui touche plusieurs sphères de la science économique. En effet, outre l'économie des ressources naturelles, nous avons utilisé des notions des domaines de la finance et de l'économétrie afin d'exposer et de tester un modèle développé par Gaudet et Khadr (1991).

La problématique à laquelle nous nous sommes attardé concerne l'évolution du prix des ressources naturelles non renouvelables. En 1931, Hotelling a présenté un modèle qui prédit cette évolution. Par contre, bien que jusqu'à maintenant, aucune théorie n'ait pu confronter le raisonnement du chercheur, d'un point de vue empirique, comme nous l'avons mentionné à quelques reprises, la quasi totalité des tests n'ont pas produit les résultats escomptés.

Dans ce rapport, nous avons donc eu recours à un modèle qui introduit l'incertitude dans le modèle d'Hotelling afin de développer une règle qui tient compte de l'incertain (Gaudet et Khadr, 1991). Ainsi, nous avons utilisé une version stochastique de la règle d'Hotelling. L'incertitude a été introduite dans le modèle via des indices de productivité stochastiques dans la fonction de production d'un bien composite et dans celle du processus d'extraction d'une ressource naturelle épuisable. La règle obtenue s'apparente au modèle intertemporel d'évaluation des actifs financiers. Posée sous différentes formes, la règle peut caractériser, ou le taux de rendement espéré de la ressource in situ, ou le taux de croissance espéré du prix de la ressource extraite exprimé en unité monétaire. En examinant la version avec le taux de rendement espéré d'une unité de la ressource in situ, nous pouvons constater que ce taux peut être soit supérieur ou inférieur (ou égal) au taux de rendement sur un actif certain. En fait, tout dépend de l'aversion au risque du consommateur type et de la covariance entre le processus de production et celui d'extraction. Si les chocs défavorables pour l'un le sont également pour l'autre, on peut considérer la ressource comme un actif risqué et son rendement excédentaire sera d'autant plus élevé.

Dans la dernière partie, nous avons testé cette nouvelle règle exprimée sous la forme bêta consommation. En premier lieu, nous avons vérifié si nos séries boursières supportaient le CAPM intertemporel. Par la suite, nous avons utilisé la méthode suggérée par Gaudet et Khadr (1991) pour tester l'hypothèse nulle suivante à savoir que la constante est nulle et que le coefficient bêta est égal à celui de la régression instrumentale du taux de rendement excédentaire sur la ressource sur la variation dans la consommation par habitant. Les résultats que nous avons obtenus sont en majeure partie non concluants puisque seulement une des neuf régressions effectuées ne nous permettait pas de rejeter l'hypothèse nulle.

Bibliographie

Barnett, H.J., « Scarcity and growth revisited » In *Scarcity and Growth Reconsidered*, ed. V.K. Smith (Baltimore : John Hopkins University Press), 163-217,1979.

Barnett, H.J. et C. Morse, *Scarcity and Growth* (Baltimore : John Hopkins University Press), 1963.

Breeden, D.T., « An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities », *Journal of Financial Economics 7*, 1979, 265-296.

Campbell, J.Y., A.W. Lo et A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, (Princeton University Press), 1997.

Chermak, J.M. et R.H. Patrick, « A Microeconomic Test of the Theory of Exhaustible Resources », *Journal of Environmental Economics and Management 36*, 1999, 1-19.

Farrow, S. « Testing the efficiency of extraction from a stock resource », *Journal of Political Economy 93*, 1985, 452-487.

Gaudet, G. et P. Howitt, « A Note on the Uncertainty and the Hotelling Rule », *Journal of Environmental Economics and Management 16,* 1989, 80-86.

Gaudet, G. et A. M. Khadr, « The evolution of natural-resource prices under stochastic investment opportunities : an intertemporal asset-pricing approach », *International Economic Review 32*, 1991, 441-455.

Halvorsen, R. et T. Smith, « A test of the theory of exhaustible resources », *Quarterly Journal of Economics 106*, 1991, 123-140.

Hotelling, H., « The economics of exhaustible resources », *Journal of Political Economy 30*, 1931, 137-175.

Levhari, D. et N. Liviatan, « Notes on Hotelling's economics of exhaustible resources », *Canadian Journal of Economics 10*, 1977, 177-192.

Merton, R.C. « An intertemporal capital asset pricing model. » *Econometrica 41*, 1973, 867-887.

Miller, M.H. et C.W. Upton, « A test of the Hotelling Valuation Principle », *Journal of Political Economy 93*, 1985a, 1-25.

- « The pricing of oil and gas : some further results. », *Journal of Finance 40*, 1985b, 1009-1020.

Pyndick, R.S., « Uncertainty and exhaustible resource markets », *Journal of Political Economy 88*, 1980, 1203-1225.

Slade, M.E., « Trends in natural-resource commodity prices : an analysis of the time domain », *Journal of Environmental Economics and Management 9*, 1982, 122-137

- « Market structure, marketing method, and price instability », *Quarterly Journal of Economics 106*, 1309-1340.

Slade, M.E. et H. Thille, « Hotelling confronts CAPM : a test of the theory of exhaustible resources », *Canadian Journal of Economics 30*, 1997, 685-708.

Smith, V.K., « Natural resource scarcity : a statistical analysis. » *Review of Economics and Statistics 61*, 1979, 423-427.

Stollery, K.R., « Mineral depletion with cost as the extraction limit : a model applied to the behaviour of prices in the nickel industry », *Journal of Environmental Economics and Management 10*, 1983, 151-165.

Young D., « Cost Specification and firm behaviour in a Hotelling model of resource », *Canadian Journal of Economics 25*, 1992, 41-59.

Young D. et D. L. Ryan, « Empirical testing of a risk-adjusted Hoteling model », *Ressource and Energy Economics 18*, 1996, 265-289.