

Université de Montréal

**"La détermination du prix des options."**

par

**Benoit Durocher**

Département de sciences économiques  
Faculté des arts et des sciences

Rapport de recherche présenté  
à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en sciences économiques

Centre de documentation

OCT 07 1993

Sciences économiques

Septembre 1993

## Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. René Garcia pour son aide et ses judicieux conseils ainsi que sa grande disponibilité qui fut très appréciée. J'aimerais également remercier M. Pierre Disalvo, du département de recherche et d'information sur le marché à la Bourse de Montréal, qui m'a gracieusement procuré mes données ainsi que plusieurs informations essentielles à ma recherche.

# Table des matières

<u>Introduction:</u>	p. 1
1) <u>Présentation des modèles théoriques:</u>	p. 4
A) Intuition à la tarification des options	p. 4
B) Le modèle de Black-Scholes	p. 6
C) Le modèle de Hull-White	p. 9
2) <u>Revue des études empiriques:</u>	p. 13
3) <u>Application à des options canadiennes:</u>	p. 19
A) Description des données	p. 19
B) Description des algorithmes	p. 23
i) <i>Volatilités historiques</i>	p. 23
ii) <i>Volatilité induite</i>	p. 26
C) Résultats	p. 30
D) Commentaires sur les résultats	p. 48
<u>Conclusion:</u>	p. 61
<u>Bibliographie:</u>	p. 63
<u>Annexe:</u>	p. 66

## Introduction

Le principal but de ce rapport de recherche est d'étudier la détermination du prix des options sur des actions. Ceci est d'autant plus intéressant lorsqu'on sait que le marché des options est très important et que depuis ces vingt dernières années, il y a eu une prolifération énorme de ce genre d'outils financiers. De plus, l'étude des modèles de tarification des options est intéressante puisque les investisseurs utilisent ces mêmes modèles dans leurs décisions d'investissement.

Avant d'aller plus loin, il me semble qu'il serait utile de donner quelques définitions propres aux options. Une option est un contrat qui donne le droit d'acheter (dans le cas des options d'achat, «call» en anglais) ou de vendre (dans le cas des options de vente, «put» en anglais) un actif particulier à un certain prix à une date fixée ou avant cette date. L'exercice d'une option est l'action d'acheter ou de vendre une action selon les termes de l'option. Le prix d'exercice ou de levée est le prix de vente ou d'achat qui est prescrit par l'option. La date d'expiration (ou date d'échéance) est la date à laquelle prend fin l'option, c'est-à-dire la période limite pour exercer l'option. On dit d'une option qu'elle est de type européen si on ne peut exercer celle-ci qu'à la date d'expiration ou qu'elle est de type américain si on peut exercer celle-ci n'importe quand avant la date d'expiration. Et finalement, une option d'achat est "en jeu" (en anglais<sup>1</sup>: «in-the-money») lorsque le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice actualisé, "hors jeu" (en anglais: «out-of-the-money») lorsque le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice actualisé et "au milieu" (en anglais: «at-the-money») lorsque le cours de l'action est égal au prix d'exercice actualisé.

Nous allons surtout mettre l'accent dans ce rapport de recherche sur les deux modèles théoriques de base les plus importants soit le modèle de Black et Scholes (1973) et celui de Hull

---

1 La traduction de ces termes de l'anglais au français provient du "Guide du marché des options" produit par la Bourse de Montréal.

et White (1987). Le premier modèle est un des pionniers dans la détermination du prix des options et demeure toujours le modèle de référence par excellence. Il suppose que le prix de l'action sous-jacente à l'option suit un processus stochastique Brownien tandis que la volatilité des rendements est constante. Le second modèle quant à lui, nous donne un autre point de vue en ajoutant au mouvement stochastique Brownien du prix des actions un second processus stochastique Brownien, afin de décrire la volatilité qui n'est plus considérée comme étant constante. Ces deux modèles seront présentés plus en détail dans la première section du rapport.

Bien évidemment, il n'y a pas que ces deux modèles qui ont été proposés. Le modèle de Ball et Torous (1983 et 1985) nous donne une autre approche en considérant la possibilité qu'il y ait des sauts dans le prix de l'action sous-jacente. Ces auteurs ajoutent au processus stochastique du modèle de Black-Scholes un processus de Poisson afin de tenir compte de la possibilité d'avoir des sauts dans le prix de l'action sous-jacente. Plus récemment, le modèle de Amin et Ng (1992) se situe dans un cadre plus général. Ce modèle consiste à maximiser la fonction d'utilité de la consommation d'un agent investisseur à travers le temps. Le modèle de Amin et Ng suppose que les marchés financiers sont incomplets, ce qui implique que l'on ne peut plus faire l'hypothèse d'absence d'arbitrage telle que faite dans les modèles précédents. C'est donc par les conditions de maximisation de la fonction d'utilité de consommation temporelle que les auteurs trouvent un équilibre et la valeur des titres financiers. Ce modèle implique donc un univers complètement stochastique, autant pour le prix des actions, pour la volatilité des rendements que pour les autres variables comme les taux d'intérêt et la consommation.

Plusieurs auteurs ont testé la validité du modèle de Black-Scholes à l'aide d'études empiriques. Les articles de Macbeth et Merville (1979), Black (1975), Gultekin et al. (1982), Hammer (1989), Sterk (1983 et 1983) sont très utiles lorsque l'on cherche à savoir la capacité du modèle de Black-Scholes à prédire la réalité. On cherche donc à comparer le prix de l'option prédit par le modèle de Black-Scholes à celui observé sur le marché financier. Nous analyserons plus en détails les résultats de ces études dans la deuxième section.

Après une revue approfondie de la littérature sur les modèles de tarification des options, cinq options canadiennes sont utilisées pour l'année 1992, soit Bombardier, BioChem, Banque de Montréal, Laidlaw, et Banque Nationale afin de tester à notre tour le modèle de Black-Scholes. Il est important de noter que malgré le nombre restreint d'options utilisées, nous obtenons quand même plus de 80% du marché<sup>2</sup> montréalais des options<sup>3</sup> avec ces options uniquement. De plus, il est important d'indiquer une particularité du marché des options à la Bourse de Montréal pour l'année 1992, l'option de BioChem compte pour plus de 60% des échanges à elle seule.

Le plan du rapport de recherche s'établit comme suit. Dans la première partie, l'intuition à la tarification des options ainsi que l'élaboration des modèles de Black-Scholes et de Hull-White sont proposées. Une revue des études empiriques et des tests de validité forme la deuxième partie du rapport. La troisième partie consiste en la description de mon étude sur les options montréalaises et des différentes techniques utilisées.

---

2 En volume, et ces même options représentent 94% de la valeur des échanges sur ce marché.

3 Il y a en tout une vingtaine d'options cotées à la Bourse de Montréal.

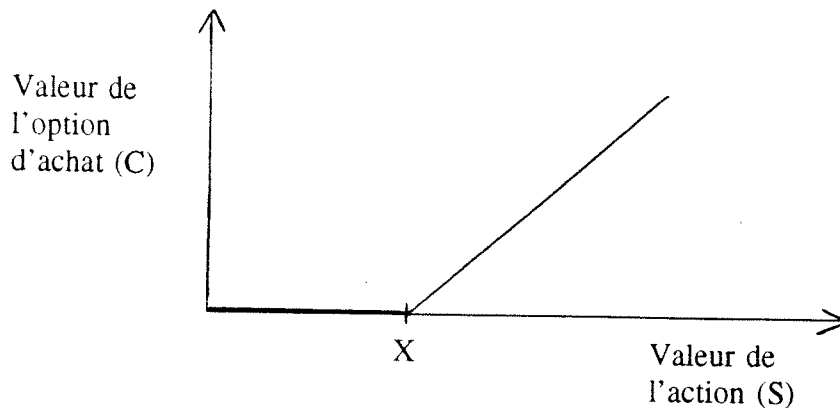
## 1) Présentation des modèles théoriques

Dans cette section, nous allons étudier deux des plus importants modèles théoriques de base dans la tarification des options soit le modèle de Black et Scholes (1973) et celui de Hull et White (1987). Mais pour commencer, un bref exposé de l'intuition à la détermination du prix des options peut s'avérer fort utile.

### A) Intuition à la tarification des options

Supposons une option d'achat de type européen ayant un prix d'exercice "X" et que l'on se situe à une période infinitésimale avant l'expiration de cette option. On peut alors exprimer le prix de cette option d'achat "C" en fonction du cours de l'action sous-jacente "S" à cette période. Si le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice, le prix de l'option équivaut à la différence entre le cours de l'action et le prix d'exercice prescrit par l'option. Par contre, si le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice, le prix de l'option est nul car cela ne vaut plus la peine d'exercer cette option puisqu'elle donne le droit d'acheter une action à un prix plus cher que celui que l'on retrouve sur le marché sans utiliser l'option. Graphiquement, cela donne ce qui suit:

Figure 1:



- Si  $S \geq X$ , alors  $C = S - X$
  - Si  $S < X$ , alors  $C = 0$
- Donc:  $C = \text{Max}[0, S - X]$

Ainsi, le prix de cette option est donc le maximum entre zéro et la différence entre le cours de l'action et le prix d'exercice. Lorsque le cours est supérieur au prix d'exercice, la différence est positive et détermine le prix de l'option. Tandis que dans les cas où le cours est inférieur au prix d'exercice, la différence est négative ce qui implique que l'option a une valeur nulle.

Un même raisonnement conduit pour une option de vente à  $P = \text{Max}[0, X - S]$  où P est le prix d'une option de vente.

Nous allons maintenant passer à l'étude du modèle théorique de tarification des options le plus important de la littérature, soit celui de Black-Scholes.



## **B) Le modèle de Black et Scholes**

Fisher Black et Myron Scholes en 1973 ont été parmi les premiers à proposer un modèle de détermination du prix des options. Leur modèle a permis aux investisseurs de se faire une idée sur le prix de ce genre d'actif financier et de prendre des décisions plus réfléchies. Ce modèle a également été le tremplin à une multitude d'études sur le sujet pendant les vingt dernières années. Ce n'est donc pas surprenant que l'on retrouve le modèle de Black et Scholes en référence de plusieurs articles et que cela continue encore vingt ans après sa parution. Il est également aisé de sauter à la conclusion que le modèle de Black-Scholes n'est pas étranger à l'essor de ce genre d'actifs financiers depuis ces deux dernières décennies.

Avant de décrire le modèle de Black-Scholes, il est important de donner les hypothèses sur lesquelles se base le modèle. Premièrement, le modèle de Black-Scholes ne s'applique qu'à des options d'achat de type européen. Deuxièmement, la volatilité des rendements et le taux d'intérêt sans risque sont constants dans le temps. Troisièmement, il faut qu'il n'y ait aucune possibilité d'arbitrage. Et finalement, les marchés sont supposés être parfaits (pas de taxe ni de coût de transaction ou autre entrave aux échanges).

Le modèle de Black-Scholes repose sur un processus de diffusion lognormal qui décrit le rendement de l'action. Il s'agit en fait d'un mouvement Brownien géométrique en temps continu. Ainsi, le processus stochastique utilisé par le modèle Black-Scholes se décrit comme suit (on suppose qu'il n'y a pas de dividende<sup>4</sup>).

---

4 Le rendement d'une action pour une période "t" est défini comme étant tout dividende émis pendant cette période ainsi que le changement dans la valeur (cours) de l'action:  $R_t = [(S_t - S_{t-1})/S_{t-1}] + Div_t$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

- Où:
- dS: Représente un changement infinitésimal du prix de l'action.
  - dt: Représente une période de temps infinitésimale.
  - $\mu$ : Est la moyenne du rendement de l'action. Ainsi,  $\mu S dt$  est l'augmentation espérée dans le prix de l'action pour l'intervalle de temps dt.
  - $\sigma^2$ : Est la variance (volatilité) du prix de l'action.
  - dz: Représente une variable aléatoire avec une moyenne de 0·dt et une variance de 1·dt (processus de Wiener). Ainsi, pour un intervalle de temps de longueur "T", les réalisations de la variable dz sont cumulées en une valeur qui est normalement distribuée avec une moyenne nulle et une variance égale à T.

À partir du processus spécifié pour le prix de l'action, Black et Scholes dérivent la formule du prix d'une option d'achat de type européen en s'appuyant sur le principe d'absence d'arbitrage sur le marché. L'idée de base est qu'en présence de marchés complets, l'option peut être reproduite à partir d'un portefeuille d'actions et d'un actif sans risque. Pour éviter tout arbitrage, le prix de l'option doit être égal au prix du portefeuille.

La formule s'établit comme suit:

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot (e^{-rT}) \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

- Où:
- C = Prix de l'option
  - X = Prix d'exercice
  - T = Date d'expiration (en année)
  - S = Prix contemporain de l'action
  - r = Taux d'intérêt réel sans risque
  - $\sigma^2$  = Volatilité des rendements de l'action (constante)
  - N(•) = Probabilité cumulative d'une loi normale

Le premier terme de cette formule " $S \cdot N(d_1)$ " correspond à la valeur actualisée de l'action si l'option expire avec une valeur positive. Le second terme " $X \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$ " exprime quant à lui la valeur actualisée du prix de levée payé si l'option expire avec une valeur positive. Ceci termine la brève présentation du modèle de Black-Scholes qui a permis de donner l'essentiel à la compréhension de ce modèle. Nous allons maintenant passer au second modèle théorique, soit le modèle de Hull et White.

### C) Le modèle de Hull et White

La différence entre le premier modèle et celui-ci est que la volatilité des rendements ( $\sigma$ ) n'est plus supposée être constante. Ainsi, tout comme le modèle de Black-Scholes, le modèle de Hull et White (1987) postule que les prix des titres suivent un mouvement Brownien géométrique. Mais en plus, le modèle de Hull-White utilise un deuxième processus stochastique afin de décrire la volatilité. Ainsi, le modèle se décrit à l'aide des deux processus suivants (où  $V=\sigma^2$ ):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

$$dV = \phi V dt + \xi V dz$$

- Où:
- $\mu$ ,  $dS$ ,  $dt$  et  $\sigma$  sont décrits comme dans le modèle de Black-Scholes.
  - $dV$ : Représente un changement infinitésimal dans la volatilité (variance).
  - $\phi$ : Est la moyenne de la variance.
  - $\xi$ : Est la variance de la volatilité du prix des actions.
  - $dw$  et  $dz$ : Sont deux processus de Wiener (moyenne nulle et variance égale à l'unité) qui ont une corrélation " $\rho$ " entre eux.

À l'aide de cette formulation stochastique, Hull et White (1987) élaborent un modèle d'évaluation des options d'achat européennes. Le développement de ce modèle est très long et complexe, c'est pourquoi ce ne sont que les grandes lignes de son développement qui se retrouvent dans ce texte. Les auteurs définissent la variable suivante comme étant la moyenne de la volatilité pendant la période " $T$ ", soit la durée de l'option:

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) \cdot dt$$

Après plusieurs transformations, Hull et White arrivent à la formule d'évaluation suivante pour les options d'achat européennes (avec une volatilité stochastique):

$$\text{Prix de l'option} = f(S_t, \sigma_t^2) = \int C(\bar{V}) h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V}$$

Où:

$$C(\bar{V}) = S_t \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\bar{V}}{2}\right) \cdot (T-t)}{[\bar{V}(T-t)]^{1/2}}$$

$$d_2 = d_1 - [\bar{V}(T-t)]^{1/2}$$

$$h(\bar{V} | \sigma_t^2) \rightarrow \text{Fonction de densité conditionnelle de } \bar{V}$$

Donc, selon la formule de Hull-White, le prix d'une option est obtenu en intégrant le prix donné par le modèle de Black-Scholes lorsqu'utilisé avec  $\bar{V}$ , " $C(\bar{V})$ ", par rapport à la distribution conditionnelle de la volatilité moyenne " $h(\bar{V} | \sigma^2)$ ".

Hull et White font des estimations de Monte Carlo<sup>5</sup> de leur modèle et comparent les résultats obtenus avec ceux du modèle de Black-Scholes. Leurs principales conclusions sont les suivantes:

- Avec  $\rho=0$ : Le modèle de Black-Scholes surestime les options au milieu et sous-estime les options extrêmement en jeu et extrêmement hors jeu.
- Avec  $\rho>0$ : Le modèle de Black-Scholes sous-estime les options hors jeu et surestime les options en jeu,
- Avec  $\rho<0$ : Le modèle de Black-Scholes surestime les options hors jeu et sous-estime les options en jeu.

L'intuition de ces différents résultats est simple et peut être expliquée par l'impact de la corrélation ( $\rho$ ) sur la distribution du prix des actions. Si on considère le cas où la volatilité est positivement corrélée avec le prix de l'action ( $\rho>0$ ). Des prix d'actions élevés impliquent généralement une volatilité élevée. Ainsi, lorsque le prix des actions augmente, la probabilité de grands changements dans le prix des actions augmente. Des prix d'actions bas impliquent généralement une faible volatilité. Donc, si le prix des actions diminue, il devient moins probable d'observer de grands changements. L'effet total est que la distribution finale du prix des actions est plus biaisée positivement que la distribution lognormale résultant d'une volatilité fixe (i.e. le modèle de Black-Scholes). Pour ce qui est du cas où la volatilité est négativement corrélée avec le prix de l'action ( $\rho<0$ ), les relations inverses sont observées. Les augmentations du prix des actions réduisent la volatilité et les diminutions du prix des actions augmentent la volatilité. L'effet total est que la distribution finale du prix des actions est plus concentrée que la distribution lognormale.

---

5 Des formules analytiques ont récemment été obtenues pour le prix de l'option dans des modèles à volatilité stochastique. Voir Heston (1993).

Ceci termine le survol des deux principaux modèles de tarification des options. Nous allons maintenant passer à l'étude des tests de validité du modèle de Black-Scholes ainsi que des études empiriques qui ont été proposées dans la littérature.

## 2) Revue des études empiriques

Lorsque que l'on veut faire une étude empirique du modèle de Black-Scholes on se bute à deux réalités du marché qui peuvent sembler incompatibles avec le modèle de Black-Scholes. Premièrement, la presque totalité des options que l'on retrouve sur les marchés mondiaux sont de type américain. Plusieurs auteurs ont proposé des modèles alternatifs pour les options américaines. Les études les plus importantes en ce domaine sont celles de Roll (1977), Geske (1979) et Whaley (1980) analysées par Sterk (1982 et 1983). Mais en règle générale, ces modèles sont peu utilisés car ceux-ci améliorent très peu la qualité de la prévision par rapport au modèle de Black-Scholes. On comprend donc pourquoi les investisseurs et les chercheurs utilisent le modèle de Black-Scholes même pour l'étude d'option américaine. Le deuxième problème est la présence d'un dividende sur beaucoup d'actions qui sont sous-jacentes à une option. Le modèle de Black-Scholes ne considère pas cette possibilité pour déterminer le prix de ce genre d'option. La façon de régler le problème est fort simple et fait l'unanimité dans la littérature: Si l'action sous-jacente à l'option comporte des dividendes pendant la durée de l'option, on ampute à la valeur de l'action la somme actualisée de ces dividendes. Ainsi, au lieu de prendre le cours initial de l'action ( $S_0$ ) dans la formule de Black-Scholes, on prend la nouvelle valeur de l'action ( $S_0^x$ ) qui a été débitée de la valeur actualisée des dividendes telle que:

$$S_0^x = S_0 - \sum_{i=0}^n D_i e^{-rt_i}$$

Malgré ces corrections, le modèle de Black-Scholes nécessite plusieurs hypothèses très contraignantes que nous ne retrouvons pas nécessairement dans la réalité. On peut donc se demander à quel point ce modèle est adéquat dans la tarification d'options que l'on retrouve sur les marchés. Plusieurs études ont été faites sur le sujet mais malheureusement, il n'y a pas de consensus parmi celles-ci. Même si toutes ces études s'entendent pour dire que le modèle de



Black-Scholes ne correspond pas exactement à la réalité (i.e. que les prix prédits par le modèle ne correspondent pas aux prix du marché), les raisons pour l'expliquer ne sont pas unanimes. D'un côté il y a Macbeth et Merville (1979) et de l'autre il y a tous les autres<sup>6</sup>: Black (1975), Gultekin et al (1982) et Sterk (1983). Un résumé des résultats de ces études est présenté au tableau 1.

Tableau 1: Résultats selon différentes études

<b>Auteurs:</b>	Macbeth et Merville	Black, Gultekin et al. et Sterk
Option en jeu	Sous-estime le prix du marché	Surestime le prix du marché
Option hors jeu	Surestime le prix du marché	Sous-estime le prix du marché

Tout d'abord, on doit indiquer de quelle façon ces auteurs ont estimé leurs variables de volatilité et du taux d'intérêt sans risque. De leur côté, Macbeth et Merville estiment le taux d'intérêt sans risque à partir des valeurs "bid" et "ask" des bons du Trésor américains. Ainsi, lorsqu'une option est transigée, ils considèrent un bon du Trésor qui expire immédiatement après cette option. L'option suit donc le rendement du bon du Trésor pendant toute sa durée. Pour ce qui est de l'estimation de la volatilité des rendements, Macbeth et Merville utilisent une routine numérique<sup>7</sup> afin de trouver la volatilité induite par le modèle de Black-Scholes pour chaque option. Il s'agit en fait de la volatilité obtenue avec le modèle de Black-Scholes en

---

6 Même si Macbeth et Merville font bande à part contre tous les autres, il ne faut pas négliger leur étude. En effet, les résultats de Macbeth et Merville ont souvent été repris dans d'autres études et servent de référence très fréquemment.

7 Les détails du principe de la volatilité induite seront discutés dans la section 3.

utilisant le prix du marché de l'option comme étant le prix théorique. Pour ce qui est des autres auteurs, Black utilise les taux de certificats de dépôt ou de papier commercial afin d'estimer le taux d'intérêt sans risque, tandis que Sterk, Gultekin et Al. utilisent, comme Macbeth et Merville, le rendement des bons du Trésor (mais Gultekin et Al. ont pris une période où les taux d'intérêt étaient historiquement élevés). Black estime la volatilité des rendements en regardant la grandeur d'un changement typique dans le prix de l'action d'un jour à l'autre. Gultekin et Al. se servent quant à eux des rendements historiques de l'action lors des six mois précédant la date de leur échantillon. Et finalement, Sterk prend la volatilité induite comme estimateur.

Lorsque l'on regarde tous ces résultats contradictoires, il ne semble pas évident de tirer des conclusions sur la nature de l'erreur d'estimation. Heureusement, Hammer (1989) a fait une étude qui vient démêler le tout. Selon lui, la divergence dans les conclusions des études précédentes vient du fait que leurs auteurs ont fait des erreurs d'estimation dans le calcul de leurs variables du taux d'intérêt sans risque ( $r_f$ ) et de la volatilité du rendement ( $\sigma$ ). Les uns auraient surestimé une variable et sous-estimé l'autre tandis que les autres auraient fait les erreurs inverses. Ces résultats sont présentés dans le tableau 2.

Tableau 2: Types d'erreurs des auteurs selon Hammer (1989)

<b>Auteurs:</b>	Macbeth et Merville	Black, Gultekin et al. et Sterk
Type d'erreur d'estimation sur $\sigma$	Surestimation	Sous-estimation
Type d'erreur d'estimation sur $r_f$	Sous-estimation	Surestimation

Afin d'analyser l'impact des erreurs d'estimation sur  $r_f$  (le taux d'intérêt sans risque) et  $\sigma^2$  (la volatilité), Hammer utilise l'équation suivante:

$$\Delta C = \left( \frac{\partial C}{\partial r_f} \right) \Delta r_f + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right) \Delta \sigma$$

Où:  $\Delta C$ : Erreur de prévision du modèle

$\Delta r_f$ : Erreur de prévision de l'estimateur de  $r_f$

$\Delta \sigma$ : Erreur de prévision de l'estimateur de  $\sigma$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial r_f} > 0 \quad (\text{obtenues à partir du modèle de Black-Scholes})$$

Hammer ainsi que plusieurs autres auteurs dans la littérature<sup>8</sup> considèrent que le modèle de Black-Scholes ne fait pas d'erreur de prévision pour les options au milieu. On obtient alors la relation suivante pour ces options:

$$0 = \left( \frac{\partial C}{\partial r_f} \right) \Delta r_f + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right) \Delta \sigma$$

---

8 Par exemple, Macbeth et Metville (1979) ainsi que Sterk (1983) utilisent des régressions sur des options au milieu afin d'estimer la volatilité induite.

Ce qui implique:

$$\Delta \sigma = - \left[ \frac{\left( \frac{\partial C}{\partial r_f} \right)}{\left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right)} \right] \Delta r_f$$

Lorsque l'on substitue, pour les autres options (hors jeu et en jeu) comportant des erreurs de prévision<sup>9</sup> ( $\Delta C \neq 0$ ), cette valeur dans la première équation de Hammer, on obtient l'équation suivante qui exprime l'erreur de prévision du modèle de Black-Scholes pour les options en jeu et hors jeu.

$$\Delta C^* = \left( \frac{\partial C^*}{\partial r_f} \right) \Delta r_f + \left( \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} \right) \left[ \frac{- \left( \frac{\partial C}{\partial r_f} \right)}{\left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right)} \right] \Delta r_f$$

Où:  $\Delta C^*$ : Est le biais du modèle induit par les erreurs d'estimation pour une option d'achat  
 $\Delta \sigma$ : Est le biais dans l'estimateur de la volatilité induite pour une option d'achat "au milieu"

---

9 Selon *Hammer* les erreurs de prévision sont le résultat d'erreurs d'estimation dans les paramètres  $r_f$  et  $\sigma^2$ .

De plus, les études faites sur la validité du modèle de Black-Scholes nous éclairent sur les points suivants:

- Le modèle estime mieux les prix du marché plus on se rapproche de la maturité, sauf que, pour les options très près de la maturité, le modèle tend à sous-estimer les prix du marché.
- Lorsque les estimations de la volatilité du rendement de l'action sont élevées (basses), le modèle tend à surestimer (sous-estimer) les prix du marché.

### 3) Application à des options canadiennes

Dans cette section, nous allons tester la validité du modèle de Black-Scholes à l'aide d'options canadiennes de type américain<sup>10</sup>, plus particulièrement, des options cotées à la Bourse de Montréal. Pour ce faire, nous avons besoin d'estimer plusieurs paramètres dont le taux d'intérêt réel sans risque et la volatilité des rendements. Pour ce qui est du taux d'intérêt réel sans risque, le taux de rendement (débité du taux d'inflation) d'un bon du Trésor qui expire en même temps que l'option est utilisé. La volatilité quant à elle est estimée à l'aide de plusieurs techniques afin de comparer la performance des différents estimateurs. Tout d'abord, une description des données utilisées dans cette étude est proposée, et ensuite, suit une analyse des différents algorithmes employés. La section se termine avec l'exposé des résultats ainsi que leur analyse.

#### A) Description des données

Les données utilisées consistent en cinq options: Bombardier #B, BioChem, Banque de Montréal, Laidlaw #B et Banque Nationale. Le choix de ces cinq options a été guidé par le fait que ces options sont celles ayant le plus de volume d'échange<sup>11</sup> pour la durée de l'étude. Pour chaque option, on dispose de données journalières pour toute l'année 1992. Ainsi, chaque observation de la base de données fournie par la Bourse de Montréal<sup>12</sup> comprend le nom du titre, le prix de fermeture de l'option (cours), la date d'observation, le prix d'exercice, la date d'expiration, le volume, le rendement (qui nous donne les dividendes émis) et le prix de

---

10 Les titres utilisés comportent des dividendes.

11 En fait elles représentent à elles seules 84% du volume et 94% de la valeur des échanges du marché des options à la Bourse de Montréal. (Il y a en tout une vingtaine d'options cotées à Montréal.)

12 Cette base de données comprend 7 858 observations pour les paramètres se rapportant aux options et 1 262 observations pour les paramètres se rapportant aux actions (5 actions à 253 observations chacune).

fermeture de l'action pour cette date. Pour chaque jour d'échange<sup>13</sup>, chaque titre possède une observation pour le prix de l'action et plusieurs observations pour les options qui diffèrent par leur prix d'exercice ou leur date d'expiration.

En plus de cela, nous avons des données hebdomadaires provenant de la Banque du Canada sur le taux de rendement des bons du Trésor. Nous avons également des estimations de l'inflation provenant du même organisme.

Il est important de noter que presque la majorité des observations sur l'option de la Banque de Montréal sont inutilisables. Ceci s'explique par le fait que le cours de l'action est inférieur, dans la plupart des cas, au prix d'exercice actualisé. Or, intuitivement, ce genre d'option devrait n'avoir aucune valeur. Et effectivement, les estimations faites à l'aide du modèle de Black-Scholes sur ces options nous donnent une valeur théorique presque nulle sur ces options. Par contre, les observations provenant de la base de données ont toute une valeur positive pour le prix de ces options. Il en résulte que le pourcentage d'erreur du modèle (selon la notion de Macbeth et Merville) dans ces cas est infini. Les deux graphiques suivants (figure 2 et 3) illustrent bien tout cela<sup>14</sup>. On y remarque facilement que dans le cas de la Banque de Montréal, la moyenne des prix d'exercice<sup>15</sup> est toujours supérieur au cours de l'action. Si on compare ce titre à un autre ("normal") comme BioChem, on s'aperçoit bien que la moyenne des prix d'exercice et le cours de l'action sont près un de l'autre et se croisent même à plusieurs reprises. Même si le cours de BioChem est parfois inférieur à la moyenne des prix d'exercice, il ne faut pas penser pour autant que ces options ont une valeur nulle. Car la différence entre le cours et le prix d'exercice n'est jamais très grande et le principe d'actualisation du prix

---

13 En 1992, il y a eu 253 jours d'échange.

14 Il est important de mentionner que sur les graphiques, les indices du jour d'échange représentent chaque jour d'échange (1 = 1<sup>er</sup> janvier 1992 et 253 = 31 décembre 1992).

15 Il s'agit de la moyenne à chaque jour d'échange des différents prix d'exercice offerts pour ces titres.

d'exercice aide à contrebalancer et même à dépasser cette minime différence<sup>16</sup>. Ainsi, nous avons dû renoncer à l'utilisation du titre Banque de Montréal pour notre étude sur la validité du modèle de Black-Scholes. On se doit donc de mettre ce titre de côté pour les raisons que l'on vient de mentionner. Ceci explique pourquoi on ne fera plus référence au titre Banque de Montréal pour le restant de ce texte.

Plusieurs observations sur les autres titres ont dû également être rejetées soit parce que leur date d'expiration était supérieure à janvier<sup>17</sup> 1993 ou bien parce que les différentes mesures de la volatilité pour ces observations ont donné des valeurs farfelues<sup>18</sup>.

---

16 De plus, il ne faut oublier qu'il s'agit d'une moyenne des prix d'exercice et que ce phénomène ne peut provenir que d'une seule option extrêmement hors jeu.

17 Car les données sur le prix des actions que nous avons obtenues ne couvrent que l'année 1992.

18 Selon les études empiriques qui ont été faites, on doit rejeter les observations qui donnent une valeur de la volatilité trop élevée.



Figure 2:

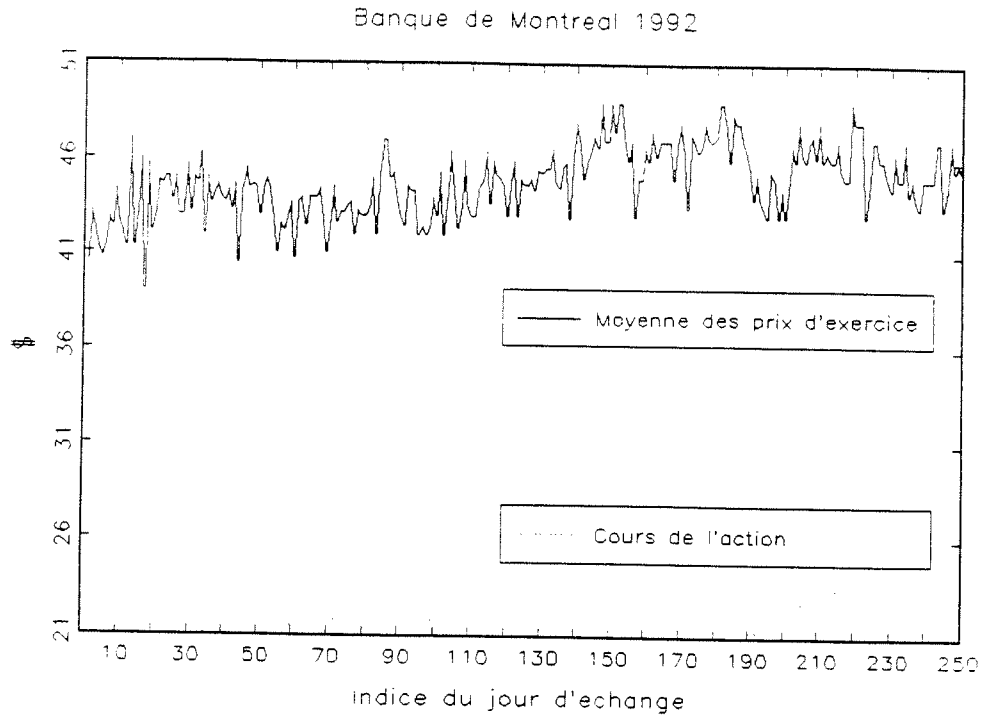
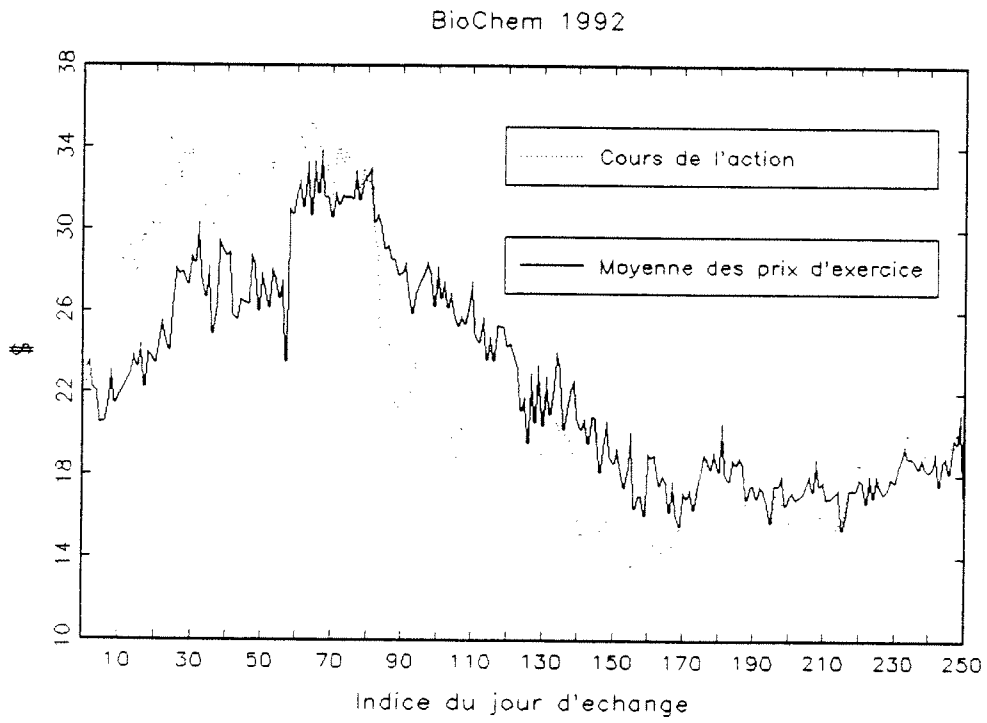


Figure 3:



De plus, tout comme la plupart des études faites sur le sujet, les rendements de fin de semaine<sup>19</sup> sont considérés comme étant des rendements journaliers. Passons maintenant à la description des différents algorithmes que j'ai dû utiliser lors de cette recherche.

## **B) Description des algorithmes**

Tel que mentionné précédemment, le taux d'intérêt sans risque a été estimé à partir des bons du Trésor. Mais il nous manque toujours une mesure de la volatilité avant d'être dans la possibilité d'utiliser le modèle de Black-Scholes. Pour ce faire, plusieurs modèles ont été utilisés dans cette étude. Premièrement, un article de Kunitomo (1992) nous procure trois façons différentes de calculer la volatilité historique des rendements. Et ensuite, Day et Lewis (1992) donnent une technique itérative afin d'obtenir la volatilité induite par le modèle de Black-Scholes.

### *i) Volatilités historiques*

L'article de Kunitomo est basé, tout comme le modèle de Black-Scholes, sur l'hypothèse que le prix des actions suit un mouvement Brownien géométrique. Soit  $S_t$ , le prix de l'action et posons  $X_t = \ln(S_t)$ . Prenons " $nT$ ", la durée de l'option qui est divisée en " $n$ " intervalles de longueur " $T$ " chacun. Définissons  $d_i = X_{iT} - X_{(i-1)T}$  (où  $i=1,2,\dots,n$ ) qui représente la différence entre la première et la dernière observation de chaque intervalle " $i$ ". Le premier estimateur que l'on retrouve dans l'article est l'estimateur classique de la volatilité.

---

19 C'est-à-dire le changement entre le prix du Lundi et du Vendredi.

$$\hat{\sigma}^2(c) = \frac{1}{T(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$$

Où:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

Kunitomo nous rappelle également l'estimateur de Parkinson (1980) qui considère la valeur maximale et minimale de  $X_t$  dans chaque intervalle "I". Cet intervalle correspond à ce qui suit:

$$I_i = [(i-1)T, iT] \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

Ainsi, l'estimateur de Parkinson est:

$$\hat{\sigma}^2(p) = \frac{1}{(4 \ln(2)) Tn} \sum_{i=1}^n l_i^2$$

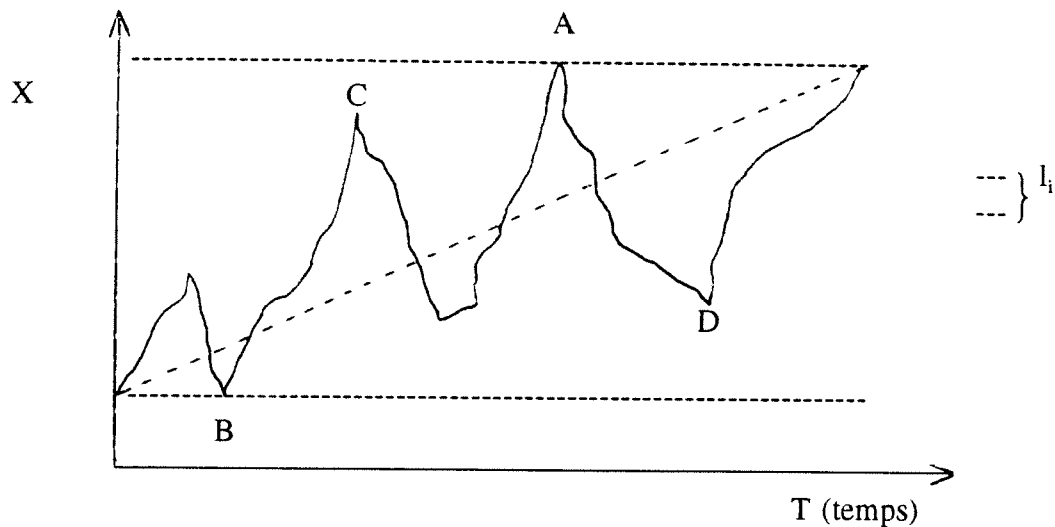
Où:

$$l_i = \text{Max}(X_t) - \text{Min}(X_t)$$

Par la suite, Kunitomo tente un nouvel estimateur qui n'a pas donné de résultats satisfaisants avec nos données. En effet, alors que l'intuition et la logique nous dit que l'estimateur de Kunitomo devrait être inférieur aux estimations faites à l'aide des deux premiers, nous

obtenons les résultats tout à fait contraires. Cependant, l'idée de Kunitomo étant intéressante, l'essentiel de l'estimateur de Kunitomo a été conservé, mais en nous référant à la formule de Parkinson pour calculer la volatilité. L'idée derrière ce nouvel estimateur consiste à prendre, non pas le simple maximum et minimum de chaque intervalle, mais plutôt le maximum et minimum de chaque intervalle par rapport à la tendance dans cet intervalle. Le graphique qui suit exprime bien la différence entre le modèle de Parkinson et celui de Kunitomo.

Figure 4:



Point A: Maximum selon Parkinson  
 Point B: Minimum selon Parkinson  
 Point C: Maximum selon Kunitomo  
 Point D: Minimum selon Kunitomo

Distance A-B:  $I_i$  selon Parkinson  
 Distance C-D:  $I_i$  selon Kunitomo

Une fois que l'on a trouvé le nouveau maximum et minimum par rapport à la tendance de l'intervalle, il ne reste plus qu'à utiliser la formule de Parkinson pour avoir une nouvelle estimation de la volatilité.

Ainsi, pour chaque observation, les trois estimateurs de la volatilité ont été calculés en prenant bien soin de rejeter les observations où la durée était trop courte pour permettre de diviser celle-ci en intervalles<sup>20</sup>.

On a donc testé le modèle de Black-Scholes à l'aide de ces trois mesures de la volatilité. On est donc à même de dire lequel des trois estimateurs historiques performe le mieux<sup>21</sup> avec nos options. Une autre mesure de la volatilité a également été utilisée, soit la volatilité induite.

## ii) Volatilité induite

Le principe de la volatilité induite consiste à calculer la volatilité qui est donnée à partir du modèle<sup>22</sup> lorsque l'on prend comme prix calculé de l'option le prix de celle-ci observé sur le marché. Ainsi, on connaît tous les paramètres de la formule de Black-Scholes, sauf la volatilité que l'on obtient par résidu. L'avantage de cette méthode est qu'elle donne en même temps une information sur l'idée que se font les investisseurs de la volatilité pour cette période.

On peut s'interroger tout de suite sur la pertinence d'utiliser cette méthode afin de tester le pouvoir prévisionnel du modèle de Black-Scholes. En effet, le prix d'une option obtenu avec le modèle de Black-Scholes à l'aide de la volatilité induite calculée préalablement doit logiquement donner exactement le prix observé sur le marché utilisé pour avoir la volatilité induite. Cela peut paraître comme étant une tautologie. Mais il n'en est rien puisqu'on utilise plusieurs options différentes en même temps. Comme on le sait intuitivement, toutes options sur le même titre ayant la même date d'expiration mais qui diffèrent seulement par leur prix d'exercice devraient avoir la même volatilité<sup>23</sup>. On se sert donc d'un ensemble d'options ayant

---

20 Dans les calculs, dix intervalles comprenant le même nombre de jours ont été utilisés.

21 C'est-à-dire, avec lequel le modèle de Black-Scholes donne les plus petites erreurs de prévision.

22 Le modèle de Black-Scholes dans notre cas.

23 Car la volatilité dépend de l'action et non pas de l'option.

toute la même expiration afin de calculer la volatilité induite. Ainsi, on élimine le problème de tautologie que l'on avait avec l'utilisation d'une seule option.

De plus, plusieurs évidences empiriques démontrent que la volatilité peut changer à travers le temps. Quoique inconsistant avec les hypothèses de base du modèle de Black-Scholes, il est intéressant, à la lumière du modèle de Hull et White, de considérer une telle possibilité. C'est pourquoi, pour tous les titres, de nouveaux estimateurs de la volatilité ont été calculés pour chaque jour d'échange<sup>24</sup>.

L'article de Day et Lewis (1992) propose une façon intéressante de calculer la volatilité induite. Cette méthode consiste à rassembler, pour chaque jour, toutes les options ayant la même date d'expiration et se différenciant par leur prix d'exercice. À l'aide de ces options, on calcule la volatilité qui est induite par le modèle de Black-Scholes pour ce jour et cette durée (date d'expiration) en utilisant le prix observé de l'option comme étant la valeur théorique<sup>25</sup>. Par la suite, on obtient le prix calculé pour chacune de ces options à l'aide du modèle de Black-Scholes en utilisant la volatilité induite que l'on vient juste de calculer comme étant l'estimateur de la volatilité. On peut ainsi comparer le prix de l'option ainsi calculé au prix observé sur le marché.

Pour calculer la volatilité induite, Day et Lewis nous donnent les algorithmes suivants: Soit  $C_k(\sigma_0(\tau))$ , le prix théorique<sup>26</sup> d'une option ayant une expiration " $\tau$ " et un prix d'exercice " $k$ " avec une volatilité  $\sigma_0(\tau)$ . Le prix observé sur le marché de cette même option est représenté  $C_{k\tau}$  et  $N_\tau$  est le nombre d'options ayant la même date d'expiration ( $\tau$ ) pour cette journée mais se différenciant par leur prix d'exercice. À partir d'une valeur initiale pour la volatilité ( $\sigma_0(\tau)$ ), on calcule un nouvel estimateur de la volatilité à l'aide de la formule suivante:

---

24 On a fait de même pour les estimateurs historiques de la volatilité.

25 C'est-à-dire la valeur du modèle.

26 Donné par le modèle de Black-Scholes.

$$\sigma(\tau) = \sigma_0(\tau) + [(\Omega X)'(\Omega X)]^{-1}(\Omega X)' \Omega Y$$

- Où:
- $\Omega =$  Matrice  $N_t \times N_t$  dont les éléments diagonaux correspondent au volume (en pourcentage) des échanges de chacune des options dans le volume total des échanges de toutes les options de ce jour ayant la même expiration.
  - $X =$  Vecteur  $N_t \times 1$  dont les éléments correspondent aux dérivés partielles, à partir de la formule de Black-Scholes, du prix de l'option par rapport à la volatilité<sup>27</sup> évaluée en  $\sigma = \sigma_0(\tau)$ .
  - $Y =$  Vecteur  $N_t \times 1$  dont les éléments correspondent aux différences entre le prix de l'option observé et le prix calculé à l'aide de la précédente mesure de l'estimateur ( $\sigma_0(\tau)$ ).

Le principe est de recommencer l'opération en posant  $\sigma_0(\tau)$  de la seconde itération égale au résultat de la première itération  $\sigma(\tau)$ . On recommence ce processus afin de minimiser les erreurs de prévision du modèle de Black-Scholes. C'est-à-dire, l'estimé de la volatilité est celui qui minimise l'équation suivante:

---

27 Selon Hammer (1989):

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T} \left[ \frac{\exp\left(\frac{-d_1^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \right]$$

Il est important de noter que j'ai vérifié les résultats de cette équation en recommençant les calculs, mais avec la procédure de dérivation de Gauss. Les résultats ainsi obtenus étaient tout à fait identiques aux précédents.

$$\sum_{k=1}^{N_{\tau}} [\delta_{k\tau}(C_{k\tau} - C_k(\sigma_0(\tau)))]^2$$

Où:  $\delta_{k\tau}$  = Proportion de l'option ayant le prix d'exercice "k" dans le volume d'échange des options ayant l'expiration "τ" pour cette journée.

Autrement dit:

$$\Omega_{N_{\tau} \times N_{\tau}} = \begin{bmatrix} \delta_{k_1\tau} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_{k_2\tau} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{k_{N_{\tau}}\tau} \end{bmatrix}$$

C'est ainsi que nous sommes dans la possibilité d'obtenir un estimateur "induit" de la volatilité. L'avantage de cette méthode de calcul de la volatilité induite sur d'autres comme celles utilisées par Macbeth et Merville est la rapidité du processus d'itération. En effet, le modèle de Day et Lewis ne nécessite que quelques itérations avant d'arriver à une bonne mesure de la volatilité.

On se sert de cette mesure de la volatilité obtenue pour chacune des observations de l'échantillon afin de tester la validité du modèle de Black-Scholes<sup>28</sup>. Ces résultats ainsi que ceux obtenus en utilisant les mesures de volatilité historique sont présentés dans la prochaine section.

---

28 i.e. comparer le prix calculé à l'aide du modèle au prix observé sur le marché.



### C) Résultats

Les articles de Macbeth et Merville (1979) et de Melino et Turnbull (1990) guident l'analyse des différents résultats. Afin de tester le pouvoir prévisionnel du modèle de Black-Scholes, deux méthodes sont utilisées. La première, celle de Macbeth et Merville consiste à faire une régression des erreurs de prévision du modèle en fonction du pourcentage de déviation des options en jeu ou hors jeu. Trois régressions pour chacun des titres sont proposées. Premièrement, on régresse les erreurs de prévision des options en jeu seulement en fonction de leur pourcentage de déviation<sup>29</sup>. Par la suite, on fait la même chose mais pour les options hors jeu uniquement. Et finalement, l'ensemble des options (en jeu et hors jeu) est utilisé pour la régression. Ces régressions sont faites à partir de l'équation suivante:

$$V = \alpha_0 + \alpha_1 M + \mu$$

Où:

$$V = \frac{C_i - \hat{C}_i}{\hat{C}_i}$$

$$M = \frac{S_i - X_i e^{-r_i T_i}}{X_i e^{-r_i T_i}}$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

---

29 C'est-à-dire à quel point le prix d'exercice de l'option est loin du cours de l'action.

- $C_i$  = Prix observé sur le marché de l'option "i".  
 $\hat{C}_i$  = Prix calculé de l'option "i" avec le modèle de Black-Scholes.  
 $S_i$  = Prix de l'action sous-jacente à l'option "i".  
 $X_i$  = Prix d'exercice de l'option "i".  
 $r_i$  = Taux d'intérêt réel sans risque utilisé pour le calcul de l'option "i".  
 $T_i$  = Date d'expiration (en année<sup>30</sup>) de l'option "i".  
 $n$  = Nombre d'observations valables dans l'échantillon pour le titre en question.

Ainsi lorsque  $V < 0$ , le modèle de Black-Scholes surestime<sup>31</sup> la réalité tandis que lorsque  $V > 0$  il la sous-estime<sup>32</sup>. Si  $M > 0$ , cette option est en jeu, alors que lorsque  $M < 0$ , l'option est hors jeu.

Le tableau suivant donne un résumé des différents résultats selon cette analyse en utilisant les notions de volatilités historiques et induite pour tous les titres utilisés. Les résultats de chacune des régressions sont exposés en entier dans les tableaux en annexe.

---

30 6 mois  $\rightarrow t=0,5$  et 1 an  $\rightarrow t=1$ .

31 i.e. le prix calculé est supérieur au prix observé.

32 i.e. le prix calculé est inférieur au prix observé.

**Tableau 3: Résumé des résultats  
Régression de Macbeth-Merville**

Légende: + → positif (à 1%)  
 - → négatif (à 1%)  
 ✱ → nul (à 1%) ou n'a presque pas d'effet.

Estimateurs de la volatilité:	Signe des estimateurs de $\alpha_0$ et $\alpha_1$ pour l'ensemble des titres					
	En jeu seulement		Hors jeu seulement		En jeu et Hors jeu	
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
Classique	+ <sup>1</sup>	-	- <sup>2</sup>	-	+	-
Parkinson	+ <sup>3</sup>	-	+ <sup>4</sup>	-	+	-
Kunitomo	+ <sup>5</sup>	-	-	-	+	-
Induite	✱ <sup>6</sup>	✱ <sup>7</sup>	✱ <sup>8</sup>	- <sup>9</sup>	+ <sup>10</sup>	-

- 
- 1 Sauf Laidlaw où  $\alpha_0=-0.64$
  - 2 Sauf BioChem où  $\alpha_0=0$
  - 3 Sauf Laidlaw où  $\alpha_0=-0.67$
  - 4 Sauf Laidlaw où  $\alpha_0=-3.93$
  - 5 Sauf Laidlaw où  $\alpha_0=-0.68$
  - 6 Sauf Laidlaw où  $\alpha_0=-0.07$
  - 7 Sauf Laidlaw où  $\alpha_1=-0.66$
  - 8 Sauf BioChem où  $\alpha_0=-7.18$
  - 9 Sauf Laidlaw et Bombardier où  $\alpha_1=0$
  - 10 Sauf Laidlaw où  $\alpha_0=-0.13$

La deuxième méthode d'analyse, soit celle de Melino et Turnbull, consiste en une régression, non seulement en fonction de leur pourcentage de déviation, mais aussi de plusieurs autres variables explicatives. Ainsi, Melino et Turnbull ajoutent la durée de l'option et le taux d'intérêt sans risque. De plus, afin de savoir si la période de l'année influence les résultats, cette variable a également été ajoutée sous notre initiative. Tel que précédemment, trois régressions (en jeu seulement, hors jeu seulement, en jeu et hors jeu) sont effectuées pour chacun des titres. Ces régressions sont faites, à partir du modèle de Melino et Turnbull, à l'aide de l'équation suivante<sup>23</sup>:

$$V = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 t + \beta_3 r + \beta_4 T + \mu$$

Où:

$$V = C_i - \hat{C}_i$$

$$M = \frac{S_i - X_i}{X_i}$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

---

23 Notez bien que les définitions de "V" et de "M" diffèrent entre l'article de Macbeth et Merville et celui de Melino et Turnbull.

- $C_i$  = Prix observé sur le marché de l'option "i".  
 $\hat{C}_i$  = Prix calculé de l'option "i" avec le modèle de Black-Scholes.  
 $S_i$  = Prix de l'action sous-jacente à l'option "i".  
 $X_i$  = Prix d'exercice de l'option "i".  
 $r_i$  = Taux d'intérêt réel sans risque utilisé pour le calcul de l'option "i".  
 $t_i$  = Date d'expiration (durée) de l'option "i".  
 $T_i$  = Période de l'année (1 = 1<sup>er</sup> janvier 1992 et 253 = 31 décembre 1992) .  
 $n$  = Nombre d'observations valables dans l'échantillon pour le titre en question.

De même qu'avec Macbeth et Merville, lorsque  $V < 0$ , le modèle de Black-Scholes surestime la réalité tandis lorsque  $V > 0$  il la sous-estime. Un  $M$  positif implique que cette option est en jeu, alors qu'un  $M$  négatif dicte que l'option est hors jeu.

Un résumé des résultats des régressions faites selon la méthode de Melino et Turnbull avec les volatilités historiques ainsi que celle induite est présenté dans le tableau suivant. Les résultats complets des régressions pour chacun des titres sont présentés dans les tableaux en annexe.

**Tableau 4: Résumé des résultats**  
**Signe des estimateurs de  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$**   
**pour l'ensemble des titres**  
**Régression de Melino-Turnbull**

Légende: + → positif (à 1%)  
 - → négatif (à 1%)  
 ⚙ → nul (à 1%) ou n'a presque pas d'effet.

Estimateurs de la volatilité	Options en jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Classique	⚙ <sup>1</sup>	-	⚙ <sup>2</sup>	⚙ <sup>3</sup>	⚙
Parkinson	+ <sup>4</sup>	-	⚙ <sup>5</sup>	⚙ <sup>6</sup>	⚙
Kunitomo	⚙ <sup>7</sup>	-	⚙ <sup>8</sup>	⚙ <sup>9</sup>	⚙
Induite	⚙ <sup>10</sup>	- <sup>11</sup>	⚙ <sup>12</sup>	+ <sup>13</sup>	⚙

- 
- 1 Sauf Laidlaw où  $\beta_0 = -0.62$  et BioChem où  $\beta_0 = 1.71$
  - 2 Sauf BioChem où  $\beta_1 = 2.27$
  - 3 Sauf BioChem où  $\beta_3 = -13.63$
  - 4 Sauf Laidlaw où  $\beta_0 = -0.65$
  - 5 Sauf BioChem où  $\beta_2 = 2.27$
  - 6 Sauf BioChem où  $\beta_3 = -14.12$
  - 7 Sauf BioChem où  $\beta_0 = 0.92$  et Laidlaw où  $\beta_0 = -0.64$
  - 8 Sauf Laidlaw où  $\beta_2 = -0.19$  et BioChem où  $\beta_2 = 2.40$
  - 9 Sauf Bombardier où  $\beta_3 = 19.79$
  - 10 Sauf Bombardier où  $\beta_0 = -0.93$
  - 11 Sauf Bombardier et Banque Nationale où  $\beta_1 \approx 0$
  - 12 Sauf BioChem où  $\beta_2 = 0.96$
  - 13 Sauf BioChem et Banque Nationale où  $\beta_3 \approx 0$

Tableau 4: (Suite)

Estimateurs de la volatilité	Options hors jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Classique	⚙ <sup>14</sup>	-	- <sup>15</sup>	⚙	⚙
Parkinson	⚙ <sup>16</sup>	-	- <sup>17</sup>	⚙ <sup>18</sup>	⚙ <sup>19</sup>
Kunitomo	⚙ <sup>20</sup>	-	- <sup>21</sup>	⚙ <sup>22</sup>	- <sup>23</sup>
Induite	⚙	⚙ <sup>24</sup>	- <sup>25</sup>	⚙ <sup>26</sup>	⚙

14 Sauf BioChem où  $\beta_0=229.53$

15 Sauf Laidlaw où  $\beta_2=0$

16 Sauf Laidlaw où  $\beta_0=-58.30$

17 Sauf Laidlaw où  $\beta_2=0$

18 Sauf Laidlaw où  $\beta_3=942.66$

19 Sauf BioChem où  $\beta_4=0.89$  et Laidlaw où  $\beta_4=0.12$

20 Sauf BioChem où  $\beta_0=-175.97$

21 Sauf Bombardier et Laidlaw où  $\beta_2=0$

22 Sauf BioChem où  $\beta_3=4422.2$

23 Sauf Banque Nationale où  $\beta_4=0$

24 Sauf Laidlaw où  $\beta_1=1.00$  et Banque Nationale où  $\beta_1=-0.25$

25 Sauf Laidlaw où  $\beta_2=0.91$  et Banque Nationale où  $\beta_2=0$

26 Sauf BioChem où  $\beta_3=-4.83$

Tableau 4: (Suite)

Estimateurs de la volatilité	Options en jeu et hors jeu				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Classique	⚙ <sup>27</sup>	-	⚙	⚙ <sup>28</sup>	⚙
Parkinson	⚙ <sup>29</sup>	-	⚙	⚙ <sup>30</sup>	⚙
Kunitomo	⚙ <sup>31</sup>	-	⚙ <sup>32</sup>	⚙ <sup>33</sup>	⚙ <sup>34</sup>
Induite	⚙ <sup>35</sup>	- <sup>36</sup>	⚙ <sup>37</sup>	⚙ <sup>38</sup>	⚙

27 Sauf BioChem où  $\beta_0=110.63$

28 Sauf BioChem où  $\beta_3=-1190.9$

29 Sauf BioChem où  $\beta_0=103.27$  et Laidlaw où  $\beta_0=-13.68$

30 Sauf Laidlaw où  $\beta_3=273.39$

31 Sauf BioChem où  $\beta_0=118.43$

32 Sauf Banque Nationale où  $\beta_2=-32.78$

33 Sauf BioChem où  $\beta_3=-934.81$  et Laidlaw où  $\beta_3=70.03$

34 Sauf Laidlaw où  $\beta_4=-0.01$  et Banque Nationale où  $\beta_4=0.10$

35 Sauf Laidlaw où  $\beta_0=-3.86$

36 Sauf BioChem et Banque Nationale où  $\beta_1 \approx 0$

37 Sauf Bombardier où  $\beta_2=-0.67$

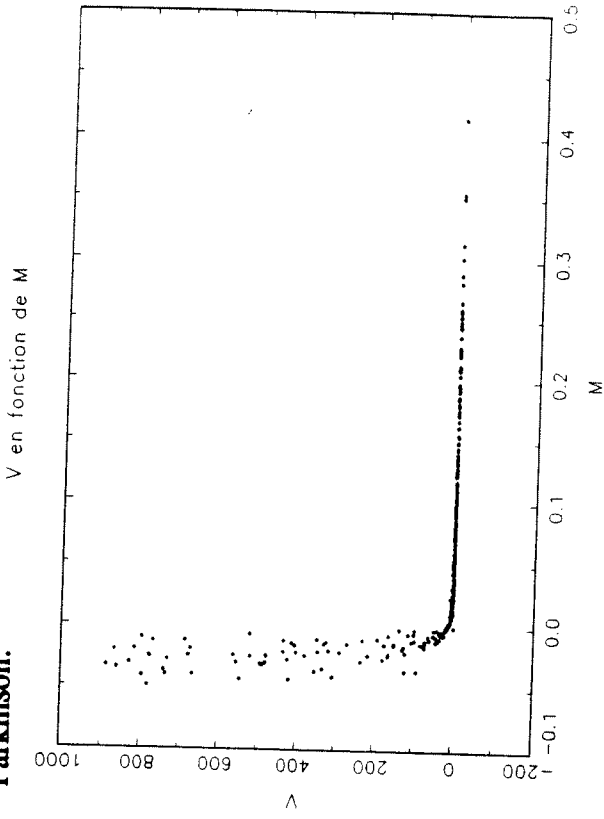
38 Sauf BioChem où  $\beta_3=9.58$



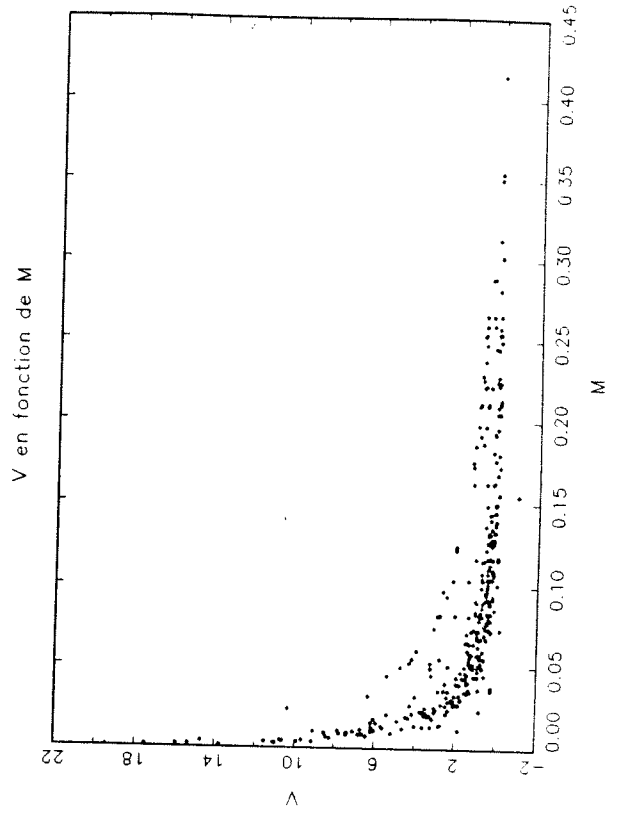
Une autre façon d'analyser l'efficacité des différents modèles est par le biais de graphiques. En mettant l'erreur de prédiction du modèle ("V" selon Macbeth et Merville) en fonction du pourcentage de déviation de l'option ("M" selon Macbeth et Merville) pour chacune des observations de tous les titres utilisés, nous serons à même de tirer des conclusions intéressantes. Ces graphiques nous montrent ainsi lequel des modèles d'estimation de la volatilité engendre le moins d'erreur et nous permettent de caractériser les erreurs de prévisions par rapport au pourcentage de déviation pour chacune des méthodes d'estimation de la volatilité.

Bombardier:

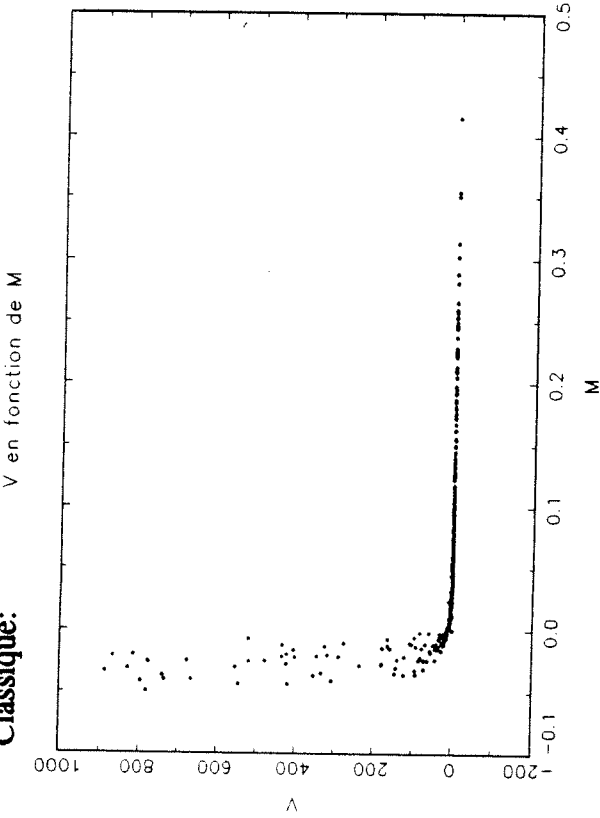
**Parkinson:**



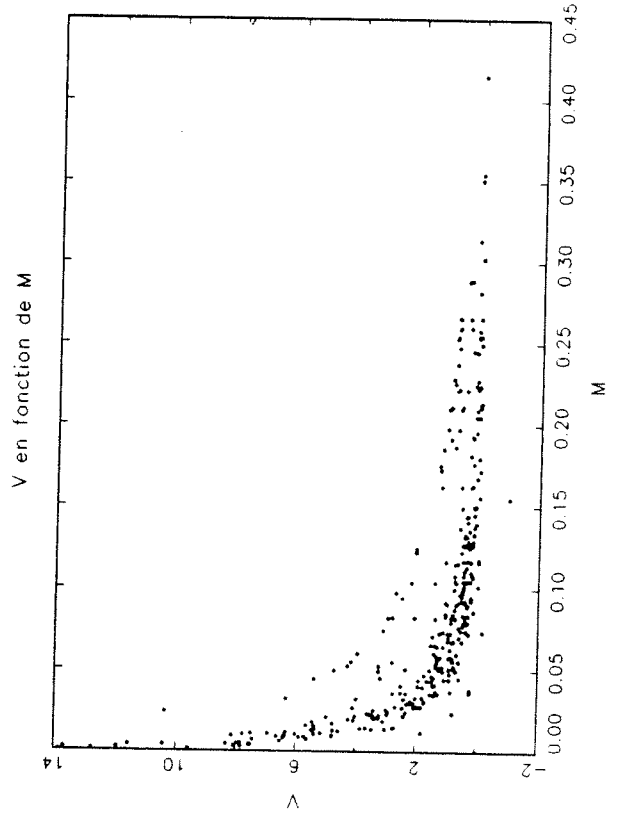
**Parkinson (M>0):**



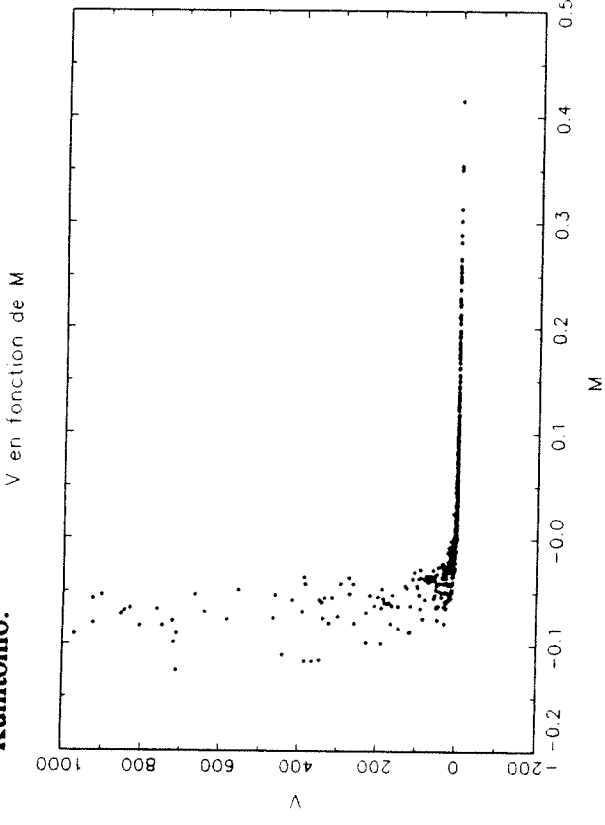
**Classique:**



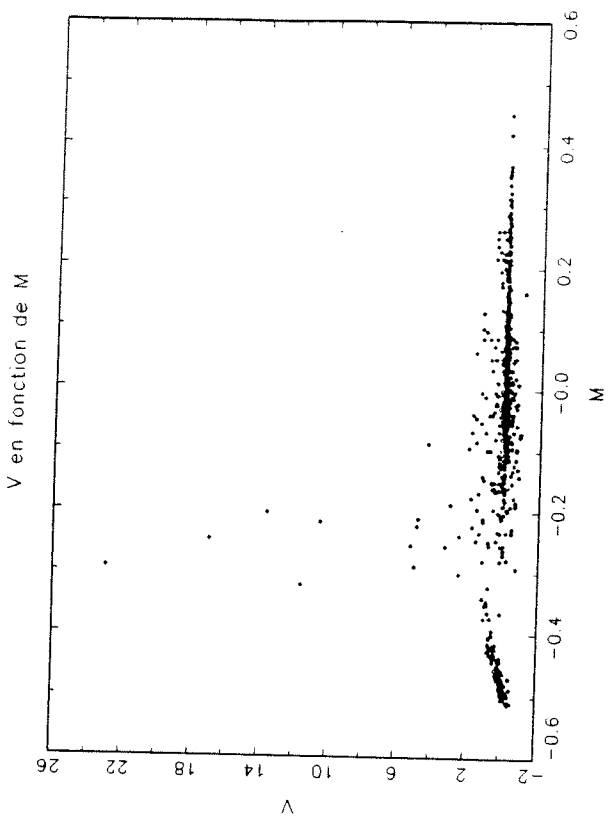
**Classique (M>0):**



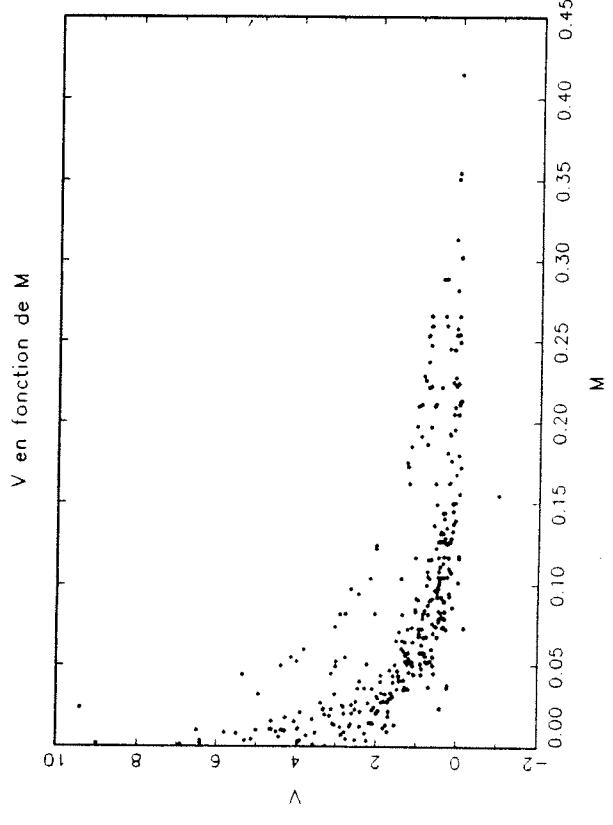
**Kunitomo:**



**Induit:**

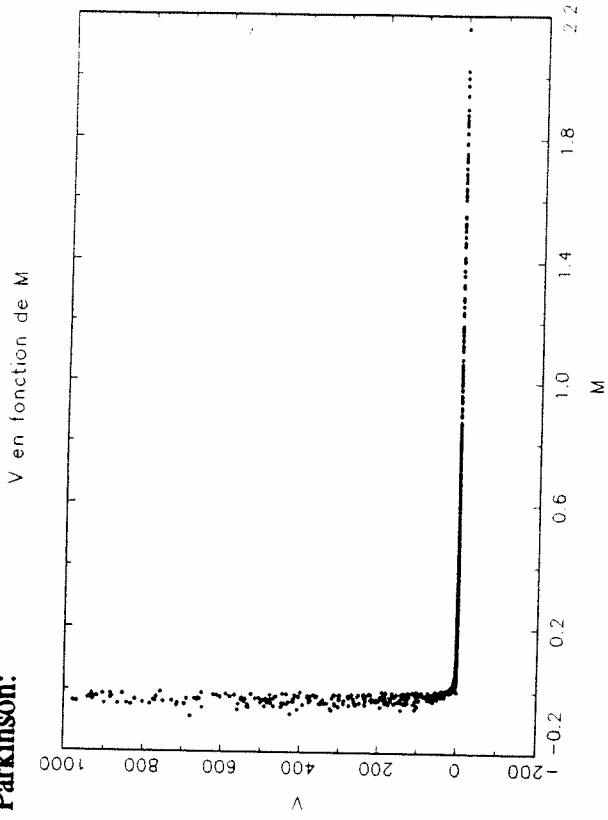


**Kunitomo (M>0):**

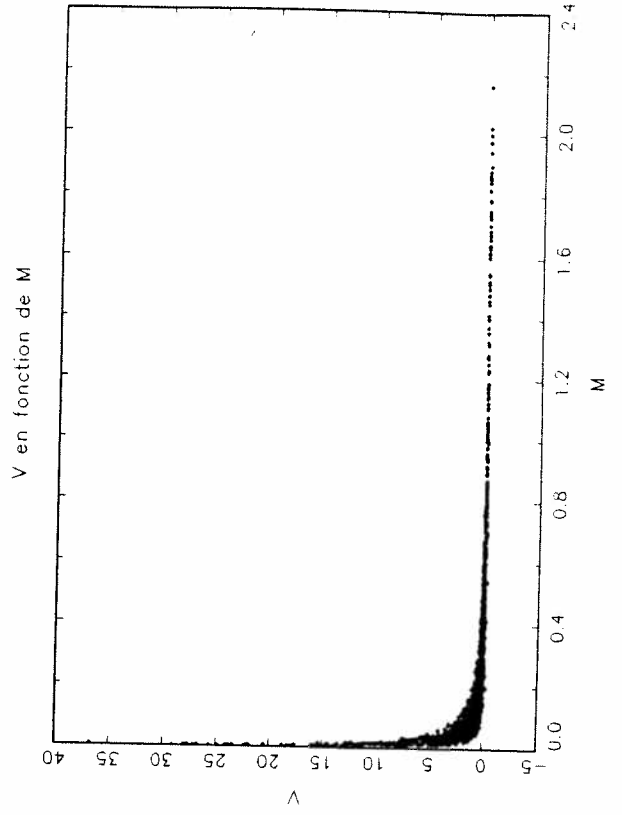


BioChem:

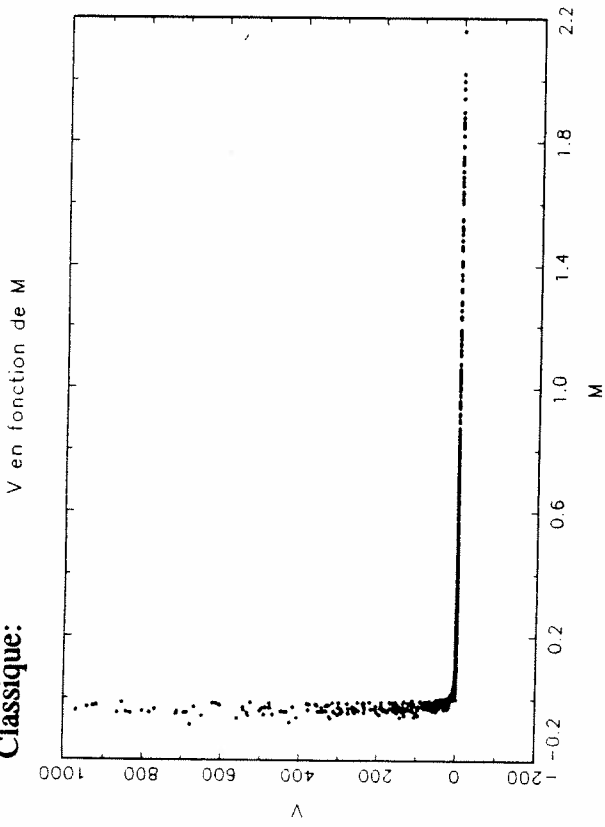
**Parkinson:**



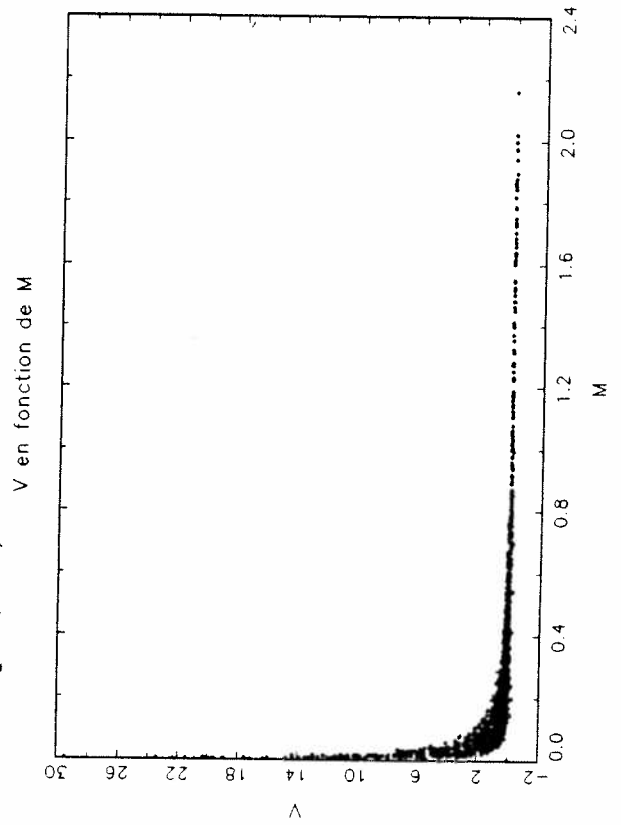
**Parkinson (M>0):**



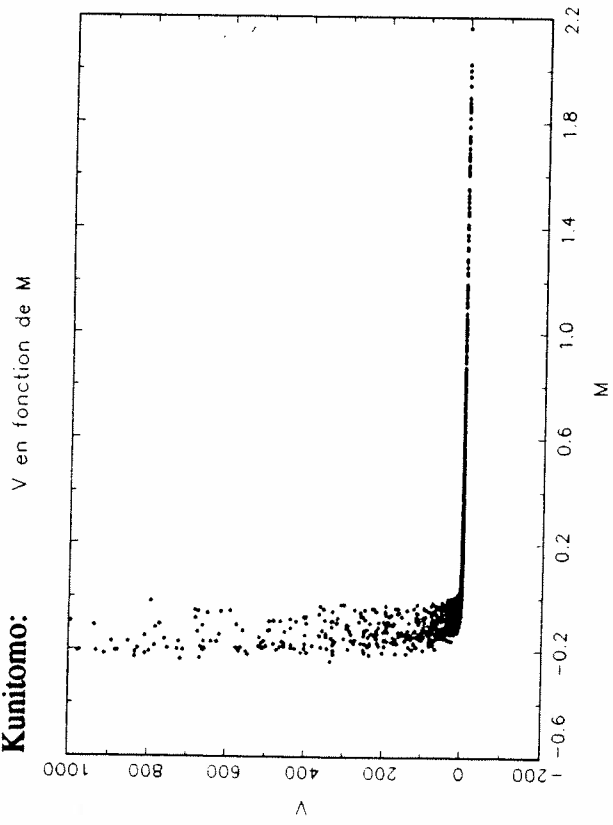
**Classique:**



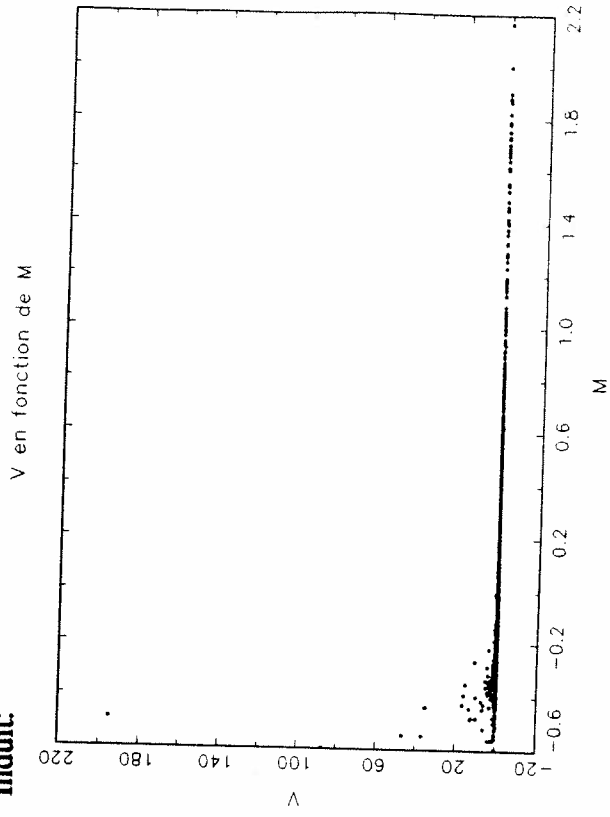
**Classique (M>0):**



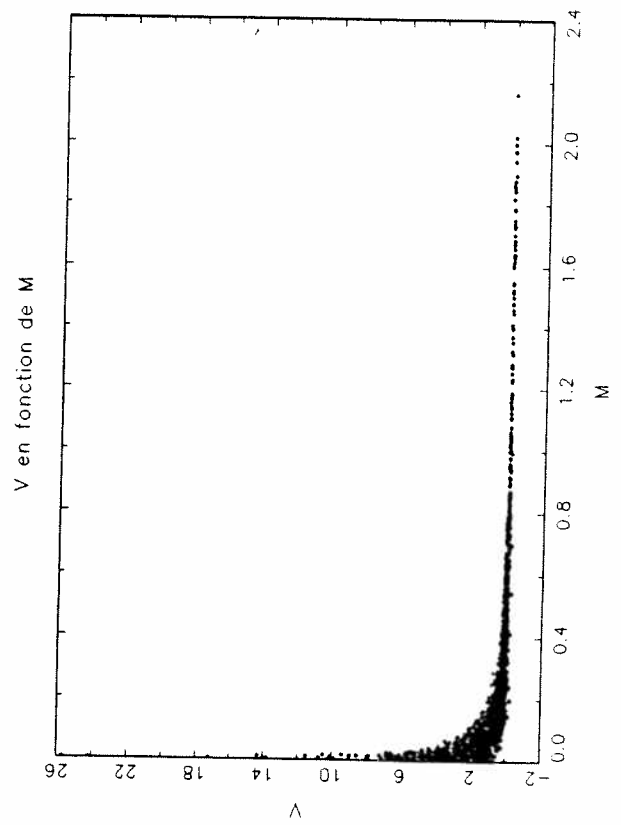
**Kunitomo:**



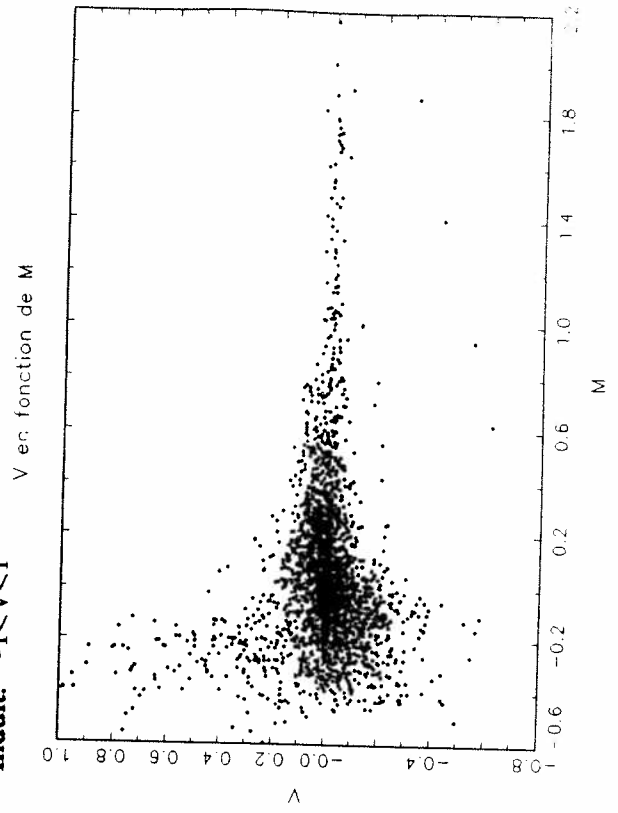
**Induit:**



**Kunitomo (M>0):**

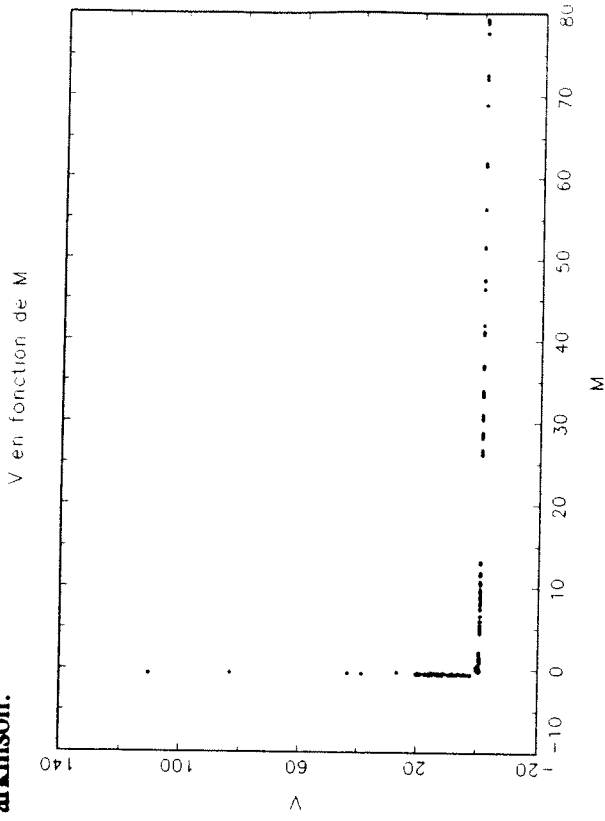


**Induit:  $-1 < V < 1$**

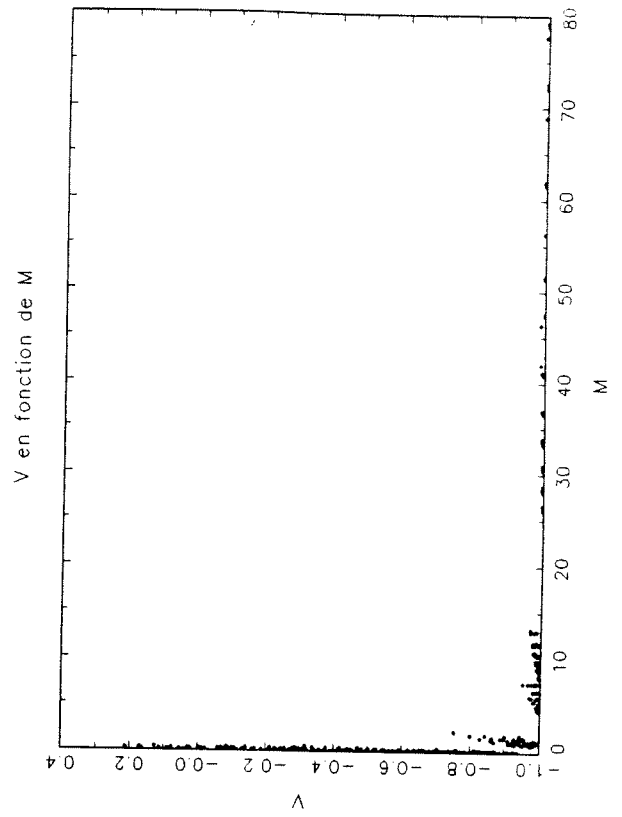


Laidlaw:

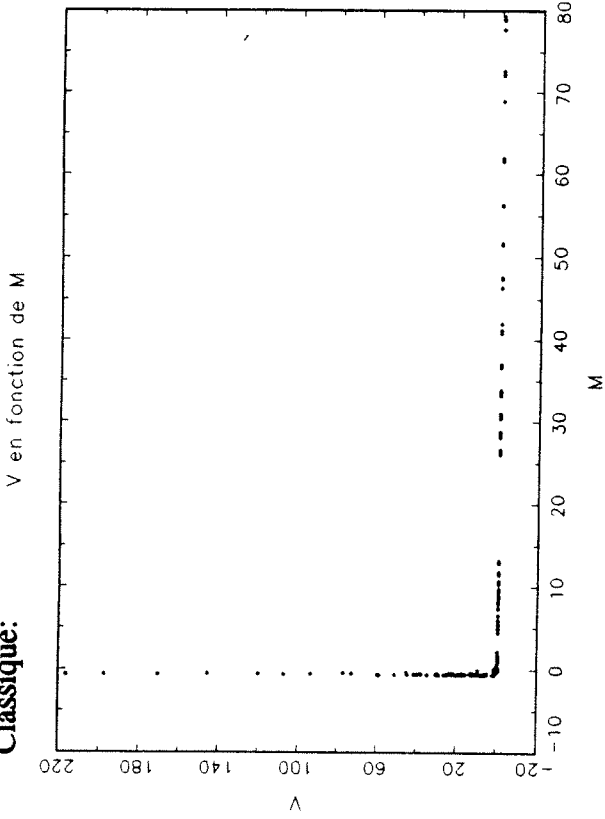
**Parkinson:**



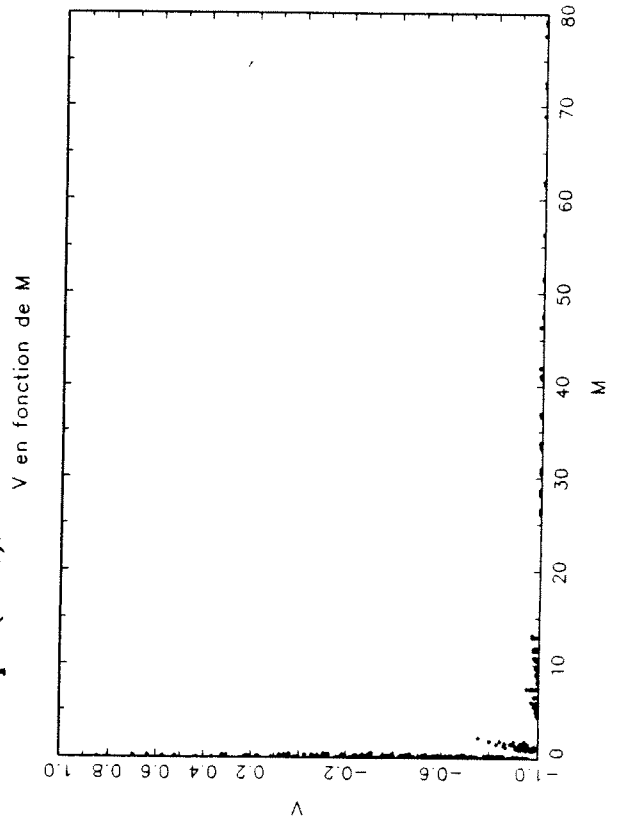
**Parkinson (M > 0):**



**Classique:**

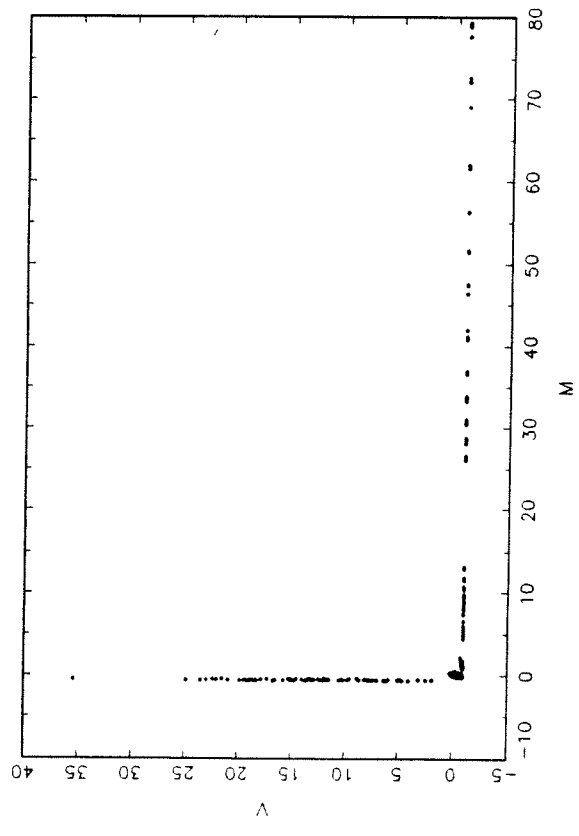


**Classique (M > 0):**



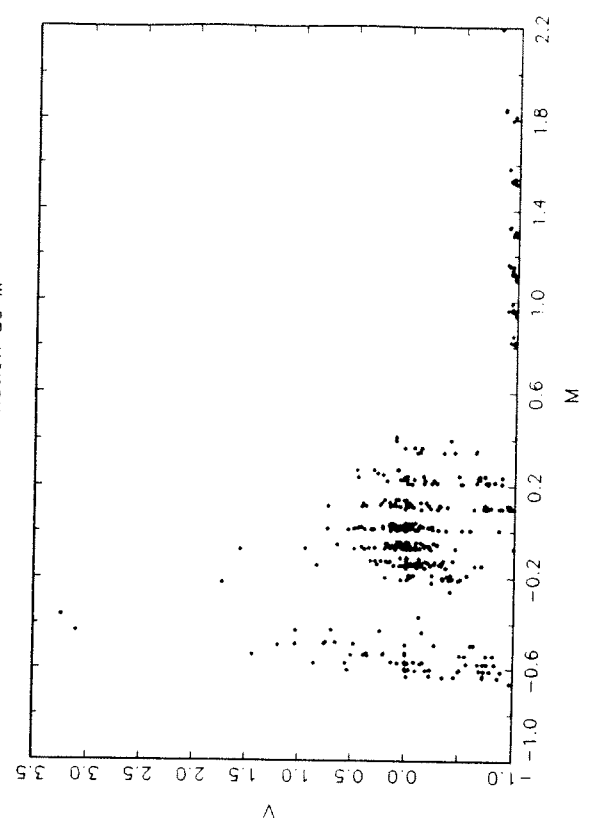
**Kunitomo:**

V en fonction de M



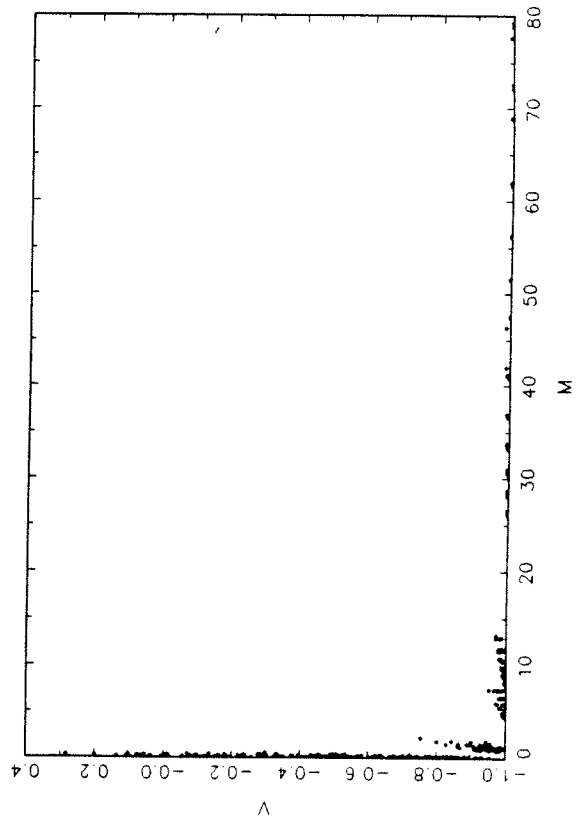
**Induit:**

V en fonction de M



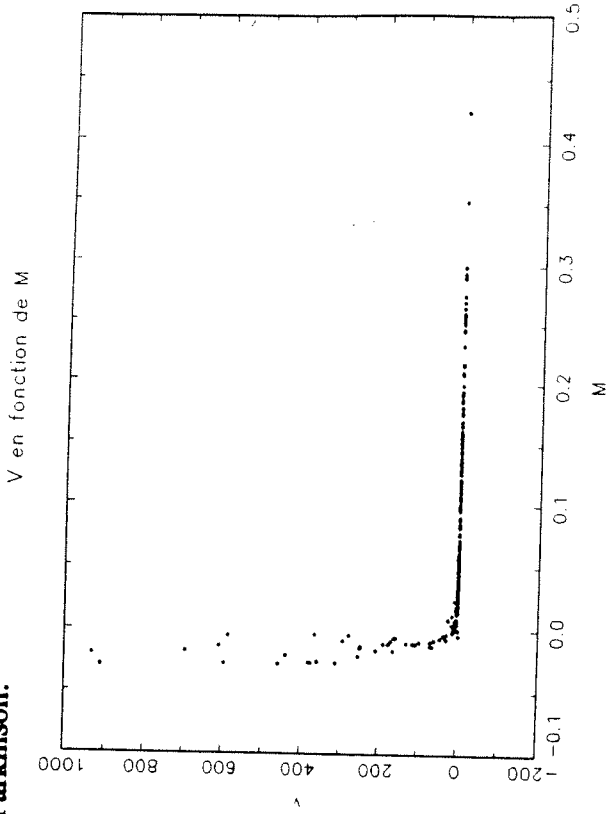
**Kunitomo (M>0):**

V en fonction de M

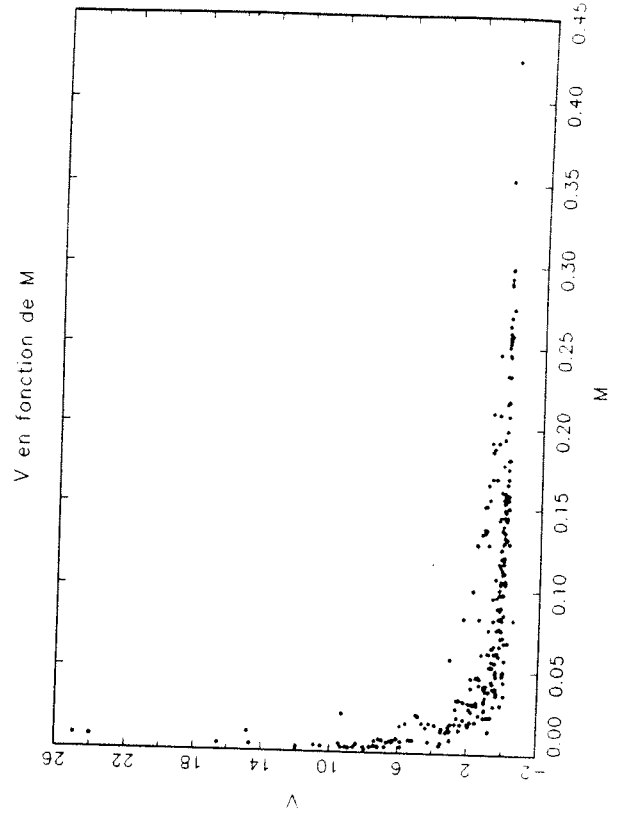


Banque Nationale:

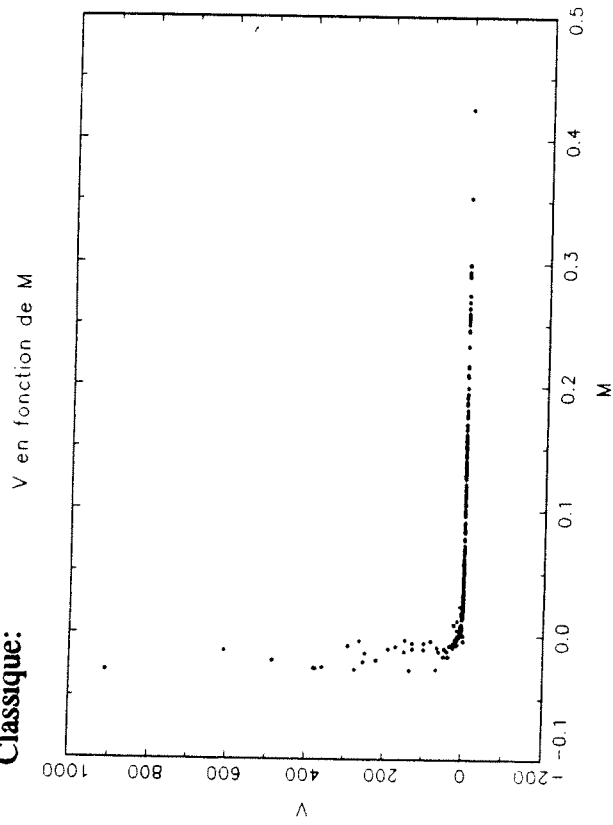
**Parkinson:**



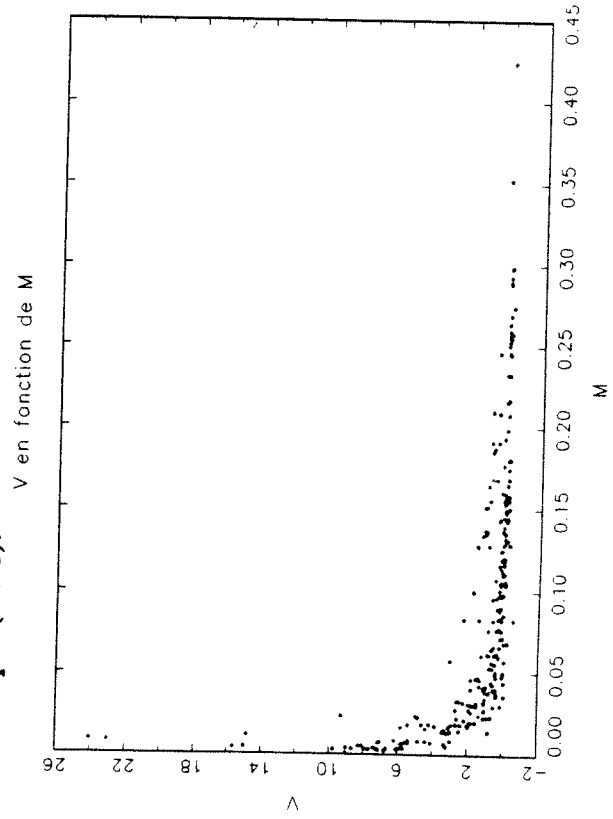
**Parkinson (M>0):**



**Classique:**

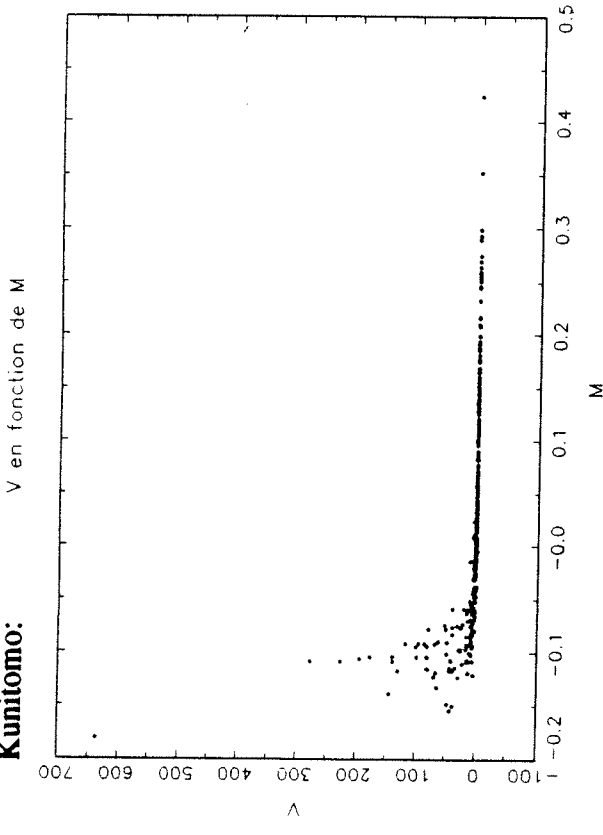


**Classique (M>0):**



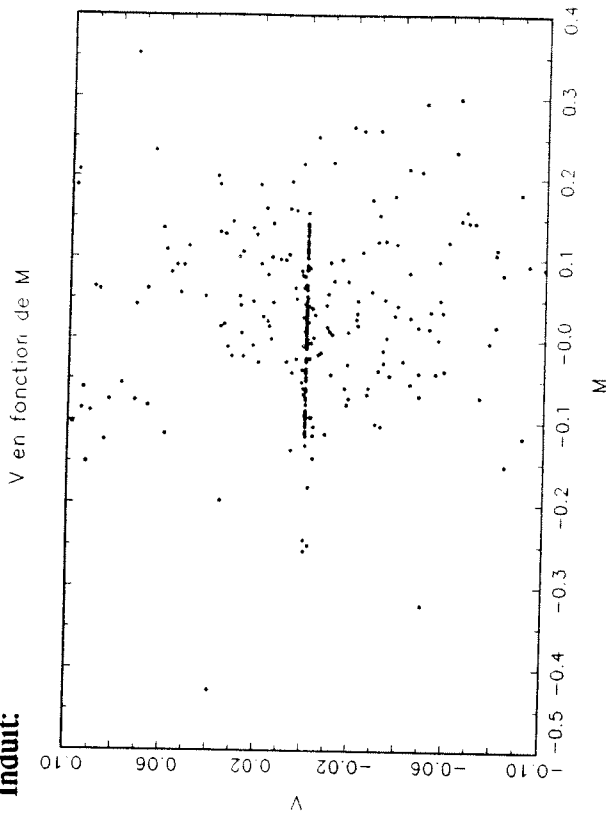


**Kunitomo:**



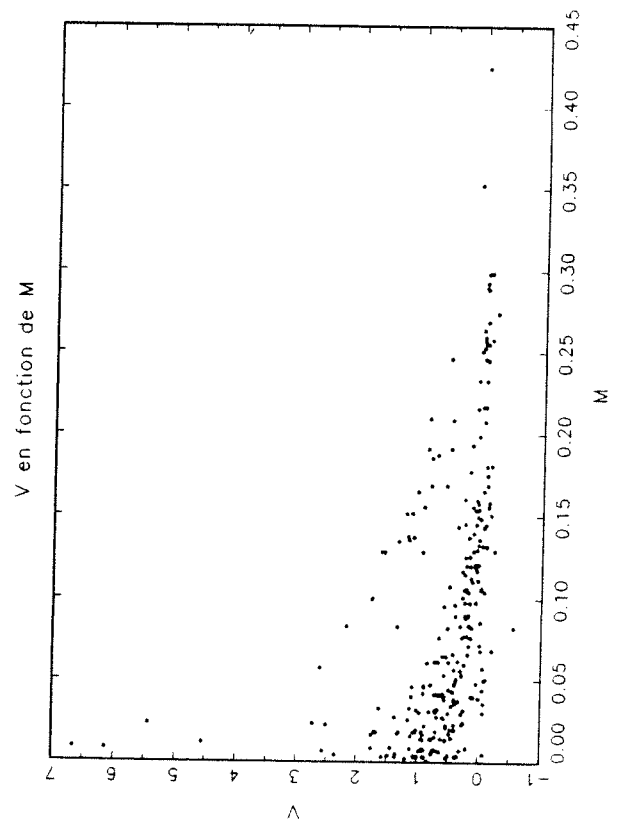
V en fonction de M

**Induit:**



V en fonction de M

**Kunitomo (M>0):**



V en fonction de M

Tous les outils utiles à l'analyse de l'efficacité des différents modèles d'estimation de la volatilité ainsi que l'analyse de l'efficacité du modèle de Black-Scholes en tant que tel viennent d'être donnés. Dans la prochaine section, une analyse des ces différents résultats est proposée ainsi qu'un retour sur les articles où l'on teste la validité du modèle de Black-Scholes. On compare ainsi nos résultats à ceux qui ont déjà été obtenus à l'aide d'options et de techniques différentes.

#### D) Commentaires sur les résultats

Pour débiter l'analyse des résultats, nous allons examiner de plus près les différents graphiques. Il est difficile de tirer des conclusions quant à la supériorité d'un des estimateurs historiques de la volatilité (Classique, Parkinson, Kunitomo). En effet, il n'est pas évident en regardant simplement les différents graphiques des volatilités historiques de dire lequel des trois engendre les plus petites erreurs de prévision. Pour chacun des titres, ces trois mesures de la volatilité engendrent à peu près le même ordre d'erreur de prévision ( $V$ ) du modèle de Black-Scholes pour le même pourcentage de déviation ( $M$ ). Par contre, ce qui est très intéressant à remarquer, c'est comment les erreurs de prévision du modèle de Black-Scholes semblent petites pour les options en jeu comparativement aux erreurs de prévision observées avec les options hors jeu. De plus, il est curieux de voir la tendance de diminution des erreurs de prévision ( $V \downarrow$ ) lorsque le pourcentage de déviation des options en jeu augmente ( $M \uparrow$ ). Par contre, lorsque le pourcentage de déviation des options en jeu diminue ( $M \downarrow$ ), les erreurs de prévision augmentent de manière drastique ( $V \uparrow$ ). On remarque également que pour la majorité des options en jeu ( $M > 0$ ), on observe une erreur de prévision correspondante positive ( $V > 0$ ), ce qui implique que le modèle de Black-Scholes sous-estime la réalité dans ces cas (prix calculé < prix observé). Pour ce qui est des options hors jeu ( $M < 0$ ), il est curieux de voir à quel taux les erreurs de prévision augmentent ( $V \uparrow$ ) avec le pourcentage de déviation ( $M \downarrow$ ). Il faut également ajouter, que pour toutes les options hors jeu utilisées, les estimateurs historiques de la volatilité engendrent des erreurs de prévision du modèle de Black-Scholes qui sont énormes. En effet, un "V" égal à l'unité implique que l'erreur de prévision est de 100%, et on obtient certains "V" supérieurs à 100! L'utilisation des trois estimateurs historiques de la volatilité avec le modèle de Black-Scholes s'est donc avérée, selon notre analyse graphique, totalement inefficace dans le cas d'options hors jeu.

Pour ce qui est de la volatilité induite, les résultats sont beaucoup plus intéressants. Tout d'abord, le modèle de Black-Scholes est dans son ensemble énormément plus efficace lorsqu'utilisé avec cette volatilité. En effet la majorité des observations se situent entre  $V=1$  et  $V=-1$ . On peut même remarquer pour tous les titres une concentration de points en  $V=0$  (ou presque),

c'est-à-dire où il n'y a pas d'erreur de prévision. Encore une fois, il est intéressant de constater que les erreurs de prévision sont supérieures avec les options hors jeu. En effet, les plus grandes erreurs de prévision correspondent toutes au cas d'une option hors jeu. Mais ces erreurs demeurent quand même bien en-deçà de celles observées à l'aide des volatilités historiques. Dans le cas où les options sont en jeu, les erreurs de prévision sont près de zéro, avec une nette concentration à cette valeur (sauf pour Laidlaw où l'on remarque que le modèle de Black-Scholes surestime les options en jeu ayant un fort pourcentage de déviation). Par contre, il est ardu cette fois-ci de déterminer graphiquement si le modèle de Black-Scholes surestime ( $V < 0$ ) ou sous-estime ( $V > 0$ ) systématiquement les options hors jeu car le nuage de points est dispersé.

Même si ces graphiques nous donnent de bonnes informations générales sur le comportement de nos options avec les différents modèles, il demeure difficile d'obtenir des conclusions rigides à l'aide de ces graphiques. L'étude des différents résultats des modèles économétriques est donc intéressante afin de connaître un peu mieux l'efficacité des modèles utilisés.

Les tableaux 3 et 4 donnés précédemment, nous procurent un résumé des résultats des trois régressions (options en jeu seulement, options hors jeu seulement, toutes les options) selon Macbeth et Merville et Melino et Turnbull pour tous les titres.

Pour commencer, nous allons analyser les résultats de la régression de Macbeth et Merville qui utilise seulement les options qui sont en jeu. Ainsi, pour l'ensemble de nos titres, le modèle de Black-Scholes lorsqu'utilisé avec n'importe laquelle des volatilités historiques semble sous-estimer<sup>24</sup> ( $V > 0$ ) les options qui sont au milieu<sup>25</sup> ( $M=0$ ). Tandis que le modèle de Black-Scholes surestime les options en jeu puisque  $\alpha_1 < 0$ . Les résultats sont tout à fait différents pour ces mêmes options lorsqu'elles sont utilisées avec la volatilité induite. Premièrement,

---

24 Sauf pour Laidlaw où le modèle de Black-Scholes surestime les options au milieu.

25 En fait, pour les options au milieu («at-the-money»), c'est la constante  $\alpha_0$  qui nous intéresse.

L'étude de la constante nous dicte que le modèle de Black-Scholes ne fait aucune erreur de prévision avec les options au milieu. Deuxièmement, comme l'estimation de  $\alpha_1$  n'est pas statistiquement différente de zéro (à 1%), on ne peut donc établir aucun lien entre le pourcentage de déviation des options en jeu et les erreurs de prévision. Cela implique donc que, le pourcentage de déviation n'influence pas les erreurs de prévision du modèle de Black-Scholes<sup>26</sup>.

Pour ce qui est des régressions de l'équation de Macbeth et Merville avec les options hors jeu seulement, les trois modèles de volatilité historique donnent des résultats différents pour l'estimation de la constante. Il est donc difficile, avec les modèles historiques, de donner d'une façon globale, le comportement des options au milieu. Ceci n'est pas très grave car comme les options au milieu sont plutôt rares, c'est l'estimation de la variable  $\alpha_1$  qui nous intéresse le plus. Et, la variable  $\alpha_1$  est négative selon les trois estimateurs historiques de la volatilité. Cela implique donc que le modèle de Black-Scholes sous-estime les options hors jeu. Les résultats pour la volatilité induite sont moins roses que ceux obtenus avec les options en jeu seulement. En effet, même si l'estimation de la constante est nulle<sup>27</sup>, les évaluations de  $\alpha_1$  donnent deux résultats différents. Tout d'abord, la variable  $\alpha_1$  pour Laidlaw et BioChem est statistiquement nulle. Ensuite, la variable  $\alpha_1$  pour les titres Bombardier et Banque Nationale est négative. Ces résultats ne sont pas surprenants, rappelons-nous que l'on avait observé sur les graphiques de la volatilité induite de plusieurs titres, que le nuage de points était dispersé dans la région des options hors jeu. Cette dispersion du nuage de points justifie donc le fait que l'on obtienne pour  $\alpha_1$  des résultats différents de zéro.

Les deux dernières régressions caractérisaient le comportement des options en jeu et hors jeu lorsque prises séparément. Mais afin de connaître les caractéristiques de notre échantillon au complet, il est important d'étudier la même régression mais pour toutes les options (en jeu et hors jeu). Pour les estimateurs historiques de la volatilité, il est intéressant de voir que les

---

26 Ces dernières conclusions ne sont démenties que par Laidlaw où l'on observe une estimation négative pour  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .

27 Sauf pour BioChem où  $\alpha_0$  est négatif.

résultats sont unanimes pour tous les titres. Le modèle de Black-Scholes sous-estime les options au milieu ( $\alpha_0 > 0$ ), surestime les options en jeu ( $\alpha_1 < 0$ :  $M \uparrow [M > 0] \rightarrow V \downarrow$ ) et sous-estime les options hors jeu ( $\alpha_1 < 0$ :  $M \downarrow [M < 0] \rightarrow V \uparrow$ ). Les résultats avec la volatilité induite vont exactement dans le même sens qu'avec ceux des volatilités historiques, à l'exception que l'estimation de  $\alpha_0$  ne fait pas l'unanimité parmi les titres. En effet, on obtient pour Laidlaw une constante négative. Il est important toutefois de souligner une distinction entre les volatilités historiques et la volatilité induite. Comme on peut s'en rendre compte dans les tableaux de l'annexe, même si les résultats des quatre mesures de la volatilité vont dans un sens identique, les estimateurs des volatilités historiques se distinguent de ceux de la volatilité induite par leur ordre de grandeur. Les estimations de  $\alpha_1$  par exemple, sont beaucoup plus grandes pour les volatilités historiques que pour celles de la volatilité induite<sup>28</sup>. Cela signifie que les erreurs de prédiction du modèle de Black-Scholes sont beaucoup plus sensibles au pourcentage de déviation de l'option lorsque le modèle est utilisé avec une volatilité historique qu'avec la volatilité induite<sup>29</sup>.

D'autres régressions, basées sur l'article de Melino et Turnbull, ont également été proposées<sup>30</sup>. Ces régressions, en plus de caractériser le comportement des options selon leur pourcentage de déviation, tentent d'expliquer les erreurs de prévision par d'autres variables. Ainsi, la durée de l'option, le taux d'intérêt sans risque et la période de l'année ont été utilisés afin de déterminer s'ils avaient une influence sur les erreurs de prédiction du modèle de Black-Scholes. Encore une fois, trois régressions ont été effectuées, une avec les options en jeu seulement, une autre avec les options hors jeu seulement, et enfin, une dernière avec toutes les options. L'ajout des variables de la durée ( $\beta_2$ ), du taux d'intérêt ( $\beta_3$ ) et de la période ( $\beta_4$ ) ne

---

28 Sauf pour la Banque Nationale.

29 Cela confirme ce que l'on avait remarqué sur les graphiques, c'est-à-dire que les erreurs de prévision étaient plus petites avec la volatilité induite.

30 Il est utile de rappeler que les notions de "V" (variable dépendante) et "M" (variable indépendante) de Melino et Turnbull sont différentes de celles de Macbeth et Merville utilisées auparavant.

Ici:  $V = \text{Prix observé} - \text{Prix calculé}$

$M = (S-X)/X$

s'est pas avéré très fructifiant. En effet, ces trois variables n'ont en général<sup>31</sup> aucun effet sur les erreurs de prédiction, à l'exception de la durée qui semble avoir un effet négatif sur les erreurs de prédiction des options hors jeu seulement<sup>32</sup>. Pour ce qui est de la constante ( $\beta_0$ ) qui caractérise les options au milieu, de manière générale, seule la régression des options en jeu seulement avec le modèle de Parkinson résulte en une estimation différente de zéro. Pour tous les titres, sauf Laidlaw<sup>33</sup>, l'estimation de la constante de ces options est positive avec le modèle de Parkinson. Ceci implique que pour les régressions des quatre modèles de volatilité des options en jeu seulement, hors jeu seulement et toutes les options, le modèle de Black-Scholes ne diffère pas statistiquement du prix de l'option observé sur le marché ( $V=0$ ) pour les options au milieu. La variable  $\beta_1$  quant à elle donne des informations sur le comportement des options en jeu et hors jeu. Les estimations de cette variable, autant pour les régressions des options en jeu seulement, hors jeu seulement, ou toutes les options, sont en règle générale négatives<sup>34</sup>.

Si on compare les résultats des régressions faites, pour les options en jeu et hors jeu, selon le modèle de Macbeth et Merville à celles faites à partir du modèle de Melino et Turnbull, on arrive essentiellement aux mêmes conclusions. La différence entre les deux interprétations étant que selon l'analyse comme Macbeth et Merville, le modèle de Black-Scholes sous-estime les options au milieu tandis que selon Melino et Turnbull, le modèle de Black-Scholes ne fait pas d'erreur de prévision en général pour ces mêmes options. Le prochain tableau donne un résumé de l'analyse des résultats des quatre modèles de volatilité pour l'ensemble des options (options en jeu et hors jeu).

---

31 Bien entendu il y a des exceptions. Ainsi, certains titres sont influencés par une ou l'autre de ces variables, mais de façon globale, on ne peut pas dire que l'on observe un effet en particulier.

32 On remarque également un effet positif du taux d'intérêt sur les erreurs de prédiction ( $r \uparrow \rightarrow V \uparrow$ ) avec la volatilité induite uniquement, ainsi qu'un effet négatif de la période sur les erreurs de prédiction ( $T \uparrow \rightarrow V \downarrow$ ) avec la volatilité de Kunitomo. Ce qui implique que plus on avance dans le temps, plus les erreurs de prédiction sont petites avec la volatilité de Kunitomo.

33 La constante est négative avec ce titre.

34 Sauf pour les options hors jeu seulement où cette variable n'a pas d'effet en général sur les erreurs de prévision.

**Tableau 5: Résumé de l'analyse des résultats**

Estimateurs de la volatilité	Macbeth et Merville			Melino et Turnbull		
	M=0	M>0	M<0	M=0	M>0	M<0
Classique	V>0	V<0	V>0	V=0	V<0	V>0
Parkinson	V>0	V<0	V>0	V=0	V<0	V>0
Kunitomo	V>0	V<0	V>0	V=0	V<0	V>0
Induit	V>0	V<0	V>0	V=0	V<0	V>0



À la lumière de ces résultats, on peut conclure de manière générale, que le modèle de Black-Scholes surestime ( $V < 0$ ) la réalité pour les options en jeu ( $M > 0$ ) et qu'il sous-estime ( $V > 0$ ) le prix du marché pour les options hors jeu ( $M < 0$ ). Le prochain tableau donne un aperçu de ces conclusions.

**Tableau 6: Conclusions de l'analyse des résultats**

Options en jeu:	Surestime le prix du marché
Options hors jeu:	Sous-estime le prix du marché

Comme on peut le voir à partir des tableaux 1 et 6, les résultats obtenus sont tout à fait le contraire de ceux qu'avaient obtenus Macbeth et Merville et s'apparentent plutôt à ceux des autres auteurs tels que Black, Gultekin et Sterk. Ainsi, selon l'article de Hammer, les différents estimateurs de la volatilité utilisés auraient sous-estimé la réalité tandis que notre estimation du taux d'intérêt sans risque serait supérieure à la réalité.

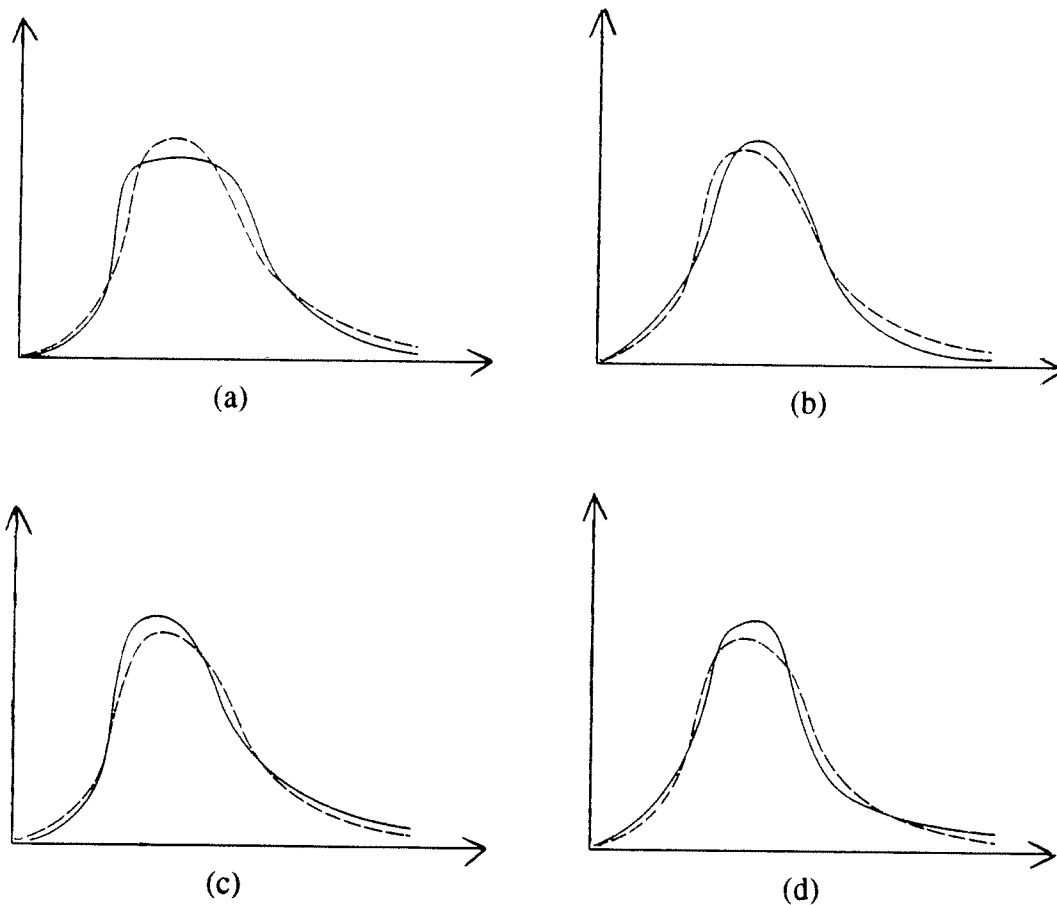
John Hull (1989) et Jarrow et Rudd (1982) exposent une façon intéressante d'interpréter les résultats que nous avons obtenus. Ces auteurs utilisent l'étude des distributions du rendement des titres<sup>35</sup> pour expliquer les divergences dans les conclusions de plusieurs études comme celles de Macbeth-Merville et Black. Ainsi, les divergences entre les résultats obtenus s'expliqueraient par la manière dont la vraie distribution du rendement diffère de la distribution lognormale. Le principe de cette méthode, selon John Hull, est donc d'étudier les conséquences du fait que la vraie distribution du rendement des titres ne soit pas lognormale tel que spécifié dans le modèle de Black-Scholes. John Hull donne quatre graphiques représentant les possibilités que la vraie

---

35 Soit  $\ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$ .

distribution du rendement des actions puisse être différente de la distribution lognormale. La figure 5 reproduit ces quatre graphiques. On y retrouve le graphique (a) dont les deux queues de la vraie distribution sont plus petites que celles de la distribution lognormale, le graphique (b) dont la queue de gauche est supérieure mais dont la queue de droite est inférieure, le graphique (c) où nous retrouvons les relations inverses du graphique (b), et enfin, le graphique (d) où les deux queues de la vraie distribution sont plus grandes que celles de la loi lognormale.

Figure 5:



----- : Distribution lognormale  
 ——— : Vraie distribution

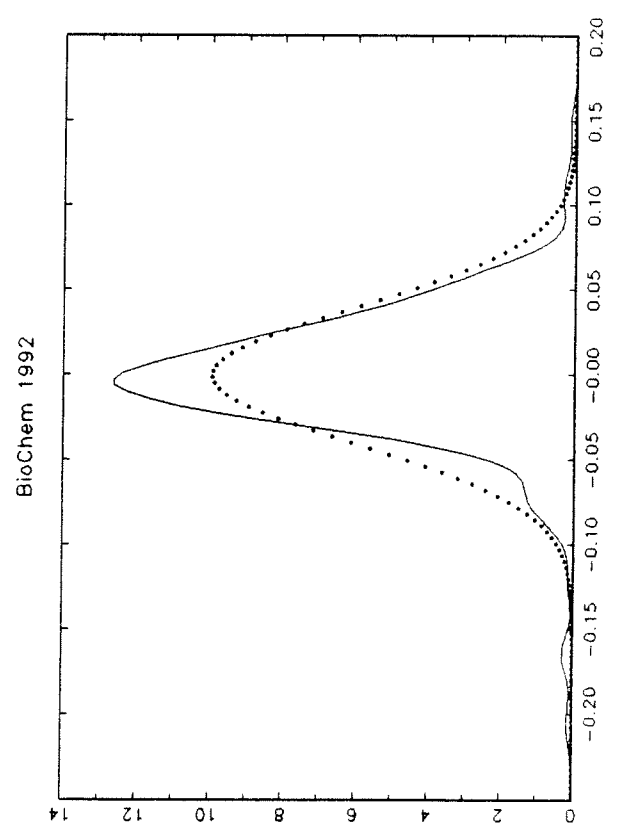
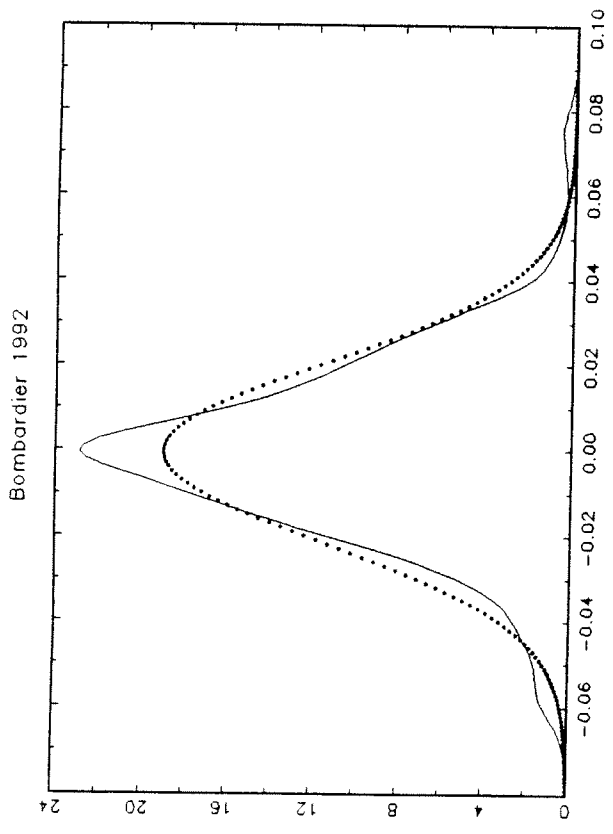
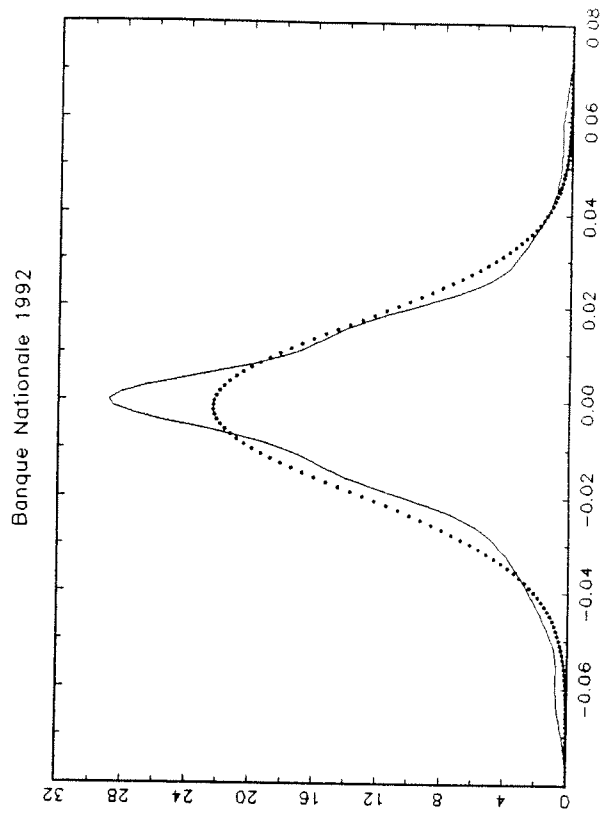
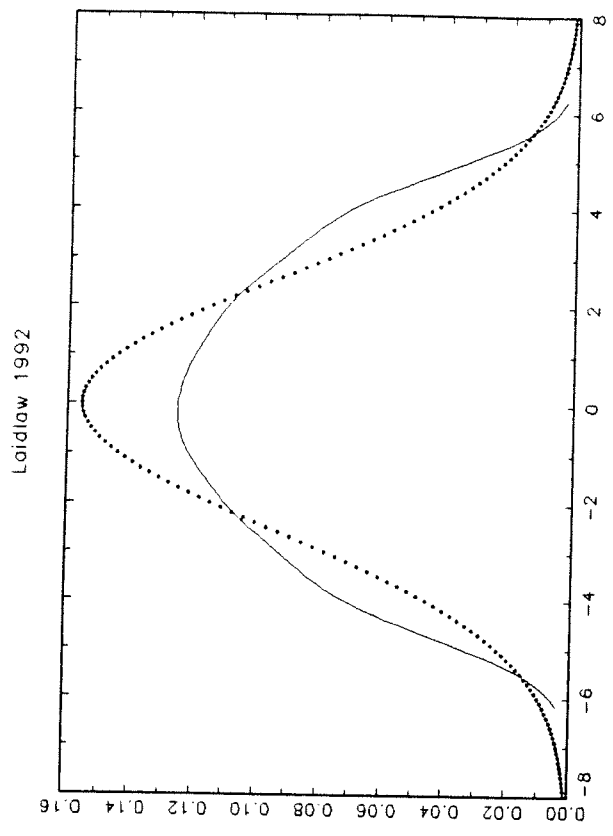
Hull caractérise ainsi les erreurs de prévision du modèle de Black-Scholes à l'aide des différences entre la vraie distribution du logarithme du rendement de nos titres et la distribution lognormale. Comme on le sait, une option d'achat qui est hors jeu a une valeur positive seulement si le prix de l'action monte beaucoup de sorte à dépasser le prix d'exercice actuel. Ces options dépendent donc uniquement de la queue de droite des distributions (i.e. les valeurs les plus grandes de la distribution). Plus la queue de droite pour ces options est élevée, plus celles-ci ont de la valeur. Ainsi, le modèle de Black-Scholes qui repose sur une distribution lognormale (ligne pointillée) tend à sous-estimer les options d'achat hors jeu des figures (c) et (d) (car la vraie distribution est supérieure à la lognormale) et surestimer les options d'achat hors jeu des figures (a) et (b) (car la vraie distribution est inférieure à la lognormale). Pour trouver une relation semblable pour les options d'achat en jeu, Hull utilise le théorème de parité achat-vente<sup>36</sup> et la relation d'une option de vente hors jeu. Ainsi, selon ce théorème, une option d'achat en jeu a les mêmes biais de prédiction qu'une option de vente hors jeu. Supposons une option de vente hors jeu afin d'étudier les erreurs de prédiction de celle-ci à l'aide de la distribution du rendement de l'action sous-jacente. Cette option a une valeur positive seulement si le prix de l'action diminue beaucoup de sorte que le prix d'exercice puisse être supérieur au cours de l'action. La valeur d'une telle option dépend donc uniquement de la partie de gauche de la distribution du rendement de l'action. Plus la queue de gauche de la distribution est élevée, plus cette option a de la valeur. Le modèle de Black-Scholes, avec une distribution lognormale du rendement de l'action, sous-estime les options de vente hors jeu telles que celles des graphiques (b) et (d) et surestime les options de vente hors jeu telles que celles des graphiques (a) et (c). Les mêmes conclusions peuvent être utilisées pour les options d'achat en jeu grâce au théorème de parité achat-vente.

---

36 Le théorème de parité achat-vente décrit la relation entre une option d'achat et de vente sur le même titre ayant le même prix d'exercice et la même date d'expiration:

$$P + S = C + X e^{-rT}$$

Les prochains graphiques représentent les distributions du rendement des actions utilisées dans ce rapport. Cette fois-ci également, les lignes pleines sont les vraies distributions tandis que les lignes pointillées correspondent aux distributions lognormales.



L'aspect des queues provenant des titres Bombardier, BioChem et Banque Nationale se ressemble beaucoup. La distribution lognormale est inférieure à la vraie distribution autant dans leur queue de gauche que dans celle de droite. Le graphique de ces titres correspond donc au graphique (d) de l'analyse de John Hull. Ainsi, selon l'analyse graphique de cet auteur, le modèle de Black-Scholes sous-estime les options d'achat en jeu et sous-estime également les options d'achat hors jeu. Cela correspond en partie aux résultats économétriques obtenus lors des estimations de ces titres faites à l'aide des quatre mesures de la volatilité. En effet, les conclusions pour les options d'achat hors jeu sont les mêmes, mais par contre, celles pour les options d'achat en jeu sont contradictoires. Selon les résultats économétriques, le modèle de Black-Scholes surestime les options en jeu tandis que selon l'analyse de John Hull, le modèle de Black-Scholes sous-estime ces mêmes options. Pour analyser cette contradiction dans les résultats, considérons les résultats des régressions, faites à l'aide de la volatilité induite<sup>37</sup>, des options en jeu et hors jeu prises séparément. Les résultats des régressions faites selon Macbeth et Merville et celles selon Melino et Turnbull sont identiques lorsqu'on considère l'ensemble des options. Par contre, les résultats des régressions pour les options en jeu seulement et hors jeu seulement sont différents dépendant de la méthode utilisée. Comme la méthode de Melino et Turnbull est loin d'avoir donné les résultats escomptés et qu'on observe plus d'exceptions dans les conclusions avec cette méthode, nous allons nous attarder aux conclusions obtenues à l'aide du modèle de Macbeth et Merville. L'étude des résultats des régressions provenant de l'article de Macbeth et Merville de la volatilité induite pour les options en jeu seulement<sup>38</sup> nous dit que le modèle de Black-Scholes ne fait pas d'erreur de prévision (sauf pour Laidlaw où le modèle surestime ces options). Ainsi, les erreurs de prédiction prédites par l'aspect des courbes de distribution, semblent ne pas être si importantes que cela puisqu'on est dans l'impossibilité d'observer ces biais à l'aide des statistiques. Cependant, l'étude des résultats des régressions de la volatilité induite pour les options hors jeu seulement confirme l'intuition que nous dicte l'aspect des courbes de distribution, c'est-à-dire que le modèle de Black-Scholes sous-estime ce

---

37 Car c'est cette méthode de calcul de la volatilité qui nous a donné les meilleurs résultats.

38 Voir les résultats du tableau 3.

genre d'options. Pour ce qui est du titre Laidlaw, le graphique correspond plus au type (a) de John Hull. Ceci implique que le modèle de Black-Scholes surestime les options d'achat hors jeu et en jeu. Les résultats des régressions pour les options en jeu seulement, faites selon la méthode de Macbeth et Merville à l'aide de la volatilité induite<sup>39</sup> pour ce titre, confirment l'intuition de John Hull pour les options en jeu mais contredisent celle des options hors jeu pour lesquelles les résultats économétriques nous dictent que le modèle de Black-Scholes sous-estime la réalité.

Si on se rappelle de l'analyse des graphiques de "V" en fonction de "M" des différents estimateurs de la volatilité, on se souviendra que de manière générale le modèle de Black-Scholes sous-estimait la réalité pour les options en jeu et hors jeu ( $V > 0$ ) avec les estimateurs historiques de la volatilité (sauf pour Laidlaw où le modèle sous-estimait les options hors jeu et surestimait les options en jeu). Ces conclusions correspondent exactement à l'analyse des distributions du rendement de nos titres telle que proposée par John Hull.

Ceci termine l'analyse des résultats obtenus à partir d'options canadiennes pour l'année 1992. Il serait intéressant dans une recherche ultérieure de comparer les résultats obtenus dans cette recherche à ceux que l'on obtiendrait avec les mêmes titres mais à une période différente. Car même si les résultats de 1992 ne semblent pas être influencés par la période de l'année ( $\beta_4$  de Melino-Turnbull), cela ne veut pas dire que le comportement de ces titres est identique à travers de longues périodes de temps<sup>40</sup>. Dans la prochaine section, un résumé de ce qui a été étudié dans ce rapport de recherche est présenté.

---

39 Voir résultats au tableau 9 en annexe.

40 Comme cinq ans par exemple.

## Conclusion

Nous avons étudié dans ce rapport de recherche la détermination du prix des options. Pour ce faire, on a fait tout d'abord un survol des modèles théoriques les plus importants et ensuite, on a testé l'efficacité du modèle de Black-Scholes à la lumière des études empiriques qui ont déjà été faites. Ainsi, le modèle de Black et Scholes (1973) et celui de Hull et White (1987) nous ont servi de modèles théoriques de base pour l'étude des options. Par la suite, une revue des études empiriques sur le modèle de Black-Scholes nous a permis de découvrir les résultats de Macbeth et Merville, Black, Gultekin et al., Sterk et enfin, Hammer. Ces études nous ont permis de caractériser les erreurs de prévision du modèle de Black-Scholes, mais malheureusement, il n'y a pas d'unanimité entre ces différentes études.

Cette recherche se termine avec une application à des options canadiennes. Pour ce faire, nous avons utilisé quatre façons différentes de calculer la volatilité des rendements des titres. Nous avons donc utilisé les estimateurs classique, de Parkinson, de Kunitomo et induit afin d'obtenir une mesure de la volatilité. Les résultats obtenus pour nos options sont semblables dans la plupart des cas à ceux qu'avaient obtenus Black, Gultekin et al. ainsi que Sterk. Ainsi, pour nos options d'achat qui sont en jeu, le modèle de Black-Scholes surestime le prix du marché tandis que pour nos options d'achat hors jeu, le modèle de Black-Scholes sous-estime le prix observé sur le marché. La Banque de Montréal, qu'on a dû rejeter car les observations étaient trop hors jeu, est un exemple extrême de ceci puisque les prix donnés par le modèle de Black-Scholes étaient presque nuls tandis qu'on observait des prix positifs sur le marché. L'article de John Hull (1989) donne une explication aux disparités dans les conclusions des différentes études empiriques (y compris celle-ci). À l'aide des queues des distributions du rendement des actions, on arrive à justifier pour les options hors jeu<sup>41</sup>, la raison pour laquelle nos résultats sont

---

41 Notez bien qu'il est moins important de justifier les erreurs de prévision des options en jeu puisque les résultats économétriques laissent sous-entendre que le modèle de Black-Scholes, lorsqu'utilisé avec la volatilité induite, ne fait en général que des erreurs minimales de prévision en général.



semblables à ceux de Black, Gultekin et al. ainsi que Sterk plutôt que ceux qu'avaient obtenus Macbeth et Merville.

Selon les résultats que nous avons obtenus, il est clair que le modèle de Black-Scholes fait des erreurs de prédiction. Mais, nous savons également que les erreurs du modèle de Black-Scholes sont beaucoup plus petites lorsque celui-ci est utilisé avec la méthode de la volatilité induite comme estimateur plutôt qu'avec une des volatilités historiques. De plus, on remarque pour les quatre mesures de volatilité utilisées que les erreurs de prévision pour les options en jeu sont beaucoup plus petites que celles des options hors jeu. On peut même dire selon nos résultats que le modèle de Black-Scholes, avec les estimations historiques de la volatilité, fonctionne très mal avec les options hors jeu, tandis qu'il fonctionne relativement bien avec la volatilité induite. Mais, même pour la volatilité induite, les erreurs de prédiction des options hors jeu sont beaucoup plus grandes que celles des options en jeu. Ainsi, selon nos résultats, le modèle de Black-Scholes est à son meilleur avec les options en jeu lorsqu'il est utilisé avec la volatilité induite.

Il ne faut tout de même pas rejeter le modèle de Black-Scholes du revers de la main parce qu'il commet des erreurs de prédiction. Car ainsi que nous l'avons vu dans cette étude, il est possible de caractériser les erreurs de prédiction du modèle selon les différentes caractéristiques des options (pourcentage de déviation du prix d'exercice, queues des distributions du prix des actions, etc.). Il est donc possible de prédire les erreurs du modèle en se fiant aux caractéristiques des options en cause.

## Bibliographie

1. **AMIN I., Kaushick et NG, Victor K. (1992)**, "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", University of Michigan, School of Business Administration, Dec. 1992.
2. **BALL, Clifford A. et TOROUS, Walter N. (1983)**, "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns", Journal of Financial and Quatitative Analysis, Vol 18, no 1, pp. 53-61.
3. **BALL, Clifford A. et TOROUS, Walter N. (1985)**, "On Jumps in Common Stock Prices and their Impact on Call Option Pricing", The Journal of Finance, Vol 40, no 1, pp. 155-173.
4. **BLACK, Fisher et SCHOLES, Myron**, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", The Journal of Political Economy, Vol 81, May 1973, pp. 637-654.
5. **BOURSE DE MONTRÉAL**, "L'option gagnante: Guide du marché des options", Les produits de gestion de risque, Bourse de Montréal, 1992, 28 pages.
6. **BREALEY, Richard, MYERS, Stewart et CHARETTE, François**, "Principes de gestion financière des sociétés", McGraw-Hill, 886 pages, 1984.
7. **COX, John C. et ROSS, Stephen A. (1976)**, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", The Journal of Finacial Economics, Vol 3, 1976, pp. 145-166.
8. **COX, John et RUBINSTEIN, Mark (1985)**, "Options Markets", Prentice-Hall, New-Jersey, 1985.
9. **DAY, Theodore E. et LEWIS, Craig M. (1992)**, "Stock Market Volatility and the Information content of Stock Index Option", The Journal of Econometrics, Vol 52, 1992, pp. 267-287.
10. **FIGLEWSKI, Stephen, SILBER, William L., SUBRAHMANYAM, Marti G.**, "Financial Options: From Theory to Practice", Business One Irwin, 1990, 580 pages.
11. **FRANKFURTER, George M. et LEUNG, Wai K. (1991)**, "Further Analysis of the Put-Call Parity Implied Risk-Free Interest Rate", The Journal of Financial Research, Vol 14, no 3, Fall 1991, pp. 217-232.

12. **GESKE, Robert (1979)**, "A Note on an Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", Journal of Financial Economics, Vol 7, 1979, pp. 375-380.
13. **GULTEKIN,N.B., et al. (1982)**, "Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results", Financial Management, Vol 11, spring 1982, pp. 58-69.
14. **HAMMER, Jerry A. (1989)**, "On Baises Reported in Studies of the Black-Scholes Option Pricing Model", Journal of Economic and Business, Vol 41, 1989, pp. 153-169.
15. **HARVEY, Campbell R. et WHALEY, Robert E. (1992)**, "Dividends and S&P 100 Index Option Valuation", The Journal of Futures Markets, Vol 12, no 2, 1992, pp. 123-137.
16. **HESTON, L. Steven**, "A Closed-Form Solution for Option with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option", The Review of Financial Studies, Vol 6, no 2, 1993, pp. 327-343.
17. **HULL, John**, "Options, Futures, and others Derivatives Securities", Prentice-Hall International, 1989, 341 pages.
18. **HULL, John et White, Alan (1987)**, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", The Journal of Finance, Vol 42, no 2, June 1987, pp. 281-300.
19. **HULL, John et WHITE, Alan (1988)**, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 23, no 3, Sept 1988.
20. **JARROW, Robert et RUDD, Andrew**, "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes", The Journal of Financial Economics, Vol 10, 1982, pp. 347-369.
21. **MACBETH, James D. et MERVILLE, Larry J. (1979)**, "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model", The Journal of Finance, Vol 34, no 5, Dec. 1979, pp. 1171-1186.
22. **MELINO, A. et TURNULL, Stuart (1990)**, "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Variance", Journal of Econometrics, 1990, pp. 239-265.
23. **MERTON, Robert C. (1976)**, "Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous", Journal of Financial Economics, Vol 3, 1976, pp. 125-144.
24. **MERTON, R.C. (1990)**, "Continuous-Time Finance", Basil-Blackwell, 1990.
25. **PARKINSON, M.**, "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return", The Journal of Business, Vol 53, 1980, pp. 61-65.

26. **ROLL, R. (1977)**, "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options On Stocks with Know Dividends", Journal of Financial Economics, Vol 5, Nov 1977, pp. 251-258.
27. **ROSS, Sheldon M. (1989)**, "Intoduction to Pobability Models", Academic Press inc., 4<sup>th</sup> ed., 1989.
28. **SCOTT, Louis O. (1987)**, "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application", The Journal of Financial and Quatitative Analysis, Vol 22, no 4, Dec. 1987, pp. 419-438.
29. **STERK, William, (1983)**, "Comparative Performance of the BlackScholes and Roll-Geske-Whaley Option Pricing Models", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 18, Sept. 1983, pp. 345-354.
30. **STERK, William (1982)**, "Tests of Two Models for Valuing Call Options On Stocks with Dividends", The Journal of Finance, Vol 37, no 5, Dec 1982, pp. 1229-1237.
31. **SWIDLER, Steve (1986)**, "Simultaneous Option Prices and an Implied Risk-Free Rate of Interest: A Test of the Black-Scholes Model", Journal of Economics Business, Vol 38, 1986, pp. 155-164.
32. **TURNBULL, Stuart M. et MILNE, Frank (1991)**, "A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing", The Review of Financial Studies, Vol 4, no 1, 1991, pp. 87-120.
33. **WHALEY, Robert E. (1981)**, "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", Journal of Financial Economics, Vol 9, 1981, pp. 207-211.

## Annexe

### Tableaux des résultats

**Tableau 7:**

**Estimation de la volatilité: Modèle classique  
Régression de Macbeth-Merville**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	En jeu seulement		Hors jeu seulement		En jeu et Hors jeu	
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
Bombardier	3.64 (20.80)	-17.96 (-12.65)	-18.26 (-0.49)	-13284.5 (-7.80)	100.30 (11.34)	-694.77 (-8.56)
BioChem	2.63 (25.73)	-3.31 (-14.94)	19.89 (0.98)	-6973.1 (-10.23)	49.98 (15.66)	-73.80 (-9.78)
Laidlaw	-0.64 (-37.07)	-0.009 (-9.85)	-8.32 (-4.15)	-76.28 (-11.30)	3.23 (4.98)	-0.12 (-2.71)
Banque Nationale	3.62 (13.97)	-19.77 (-9.18)	-7.69 (-0.21)	-13197.3 (-5.37)	45.84 (7.31)	-306.80 (-5.46)

Titres:	Nombre d'observations valables et R <sup>2</sup> de chaque régression	
	En jeu seulement	En jeu et Hors jeu
Bombardier	obs=334 R <sup>2</sup> =0.325	obs=430 R <sup>2</sup> =0.146
BioChem	obs=1444 R <sup>2</sup> =0.134	obs=1716 R <sup>2</sup> =0.053
Laidlaw	obs=494 R <sup>2</sup> =0.165	obs=768 R <sup>2</sup> =0.009
Banque Nationale	obs=271 R <sup>2</sup> =0.239	obs=316 R <sup>2</sup> =0.087

**Tableau 8: Estimation de la volatilité: Modèle de Parkinson  
Régression de Macbeth-Merville**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	En jeu seulement		Hors jeu seulement		En jeu et Hors jeu	
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
Bombardier	4.08 (18.59)	-20.68 (-11.59)	47.12 (1.22)	-14418.1 (-8.21)	136.66 (13.35)	-939.50 (-10.01)
BioChem	2.91 (23.59)	-3.70 (-13.82)	127.54 (5.03)	-7214.8 (-8.46)	78.15 (18.05)	-114.81 (-11.22)
Laidlaw	-0.67 (-46.81)	-0.0086 (-10.84)	-3.93 (-5.38)	-33.66 (-14.03)	1.22 (4.67)	-0.06 (-3.49)
Banque Nationale	3.89 (13.94)	-21.42 (-9.23)	11.34 (0.26)	-18287.7 (-6.09)	70.64 (8.14)	-473.55 (-6.09)

Titres:	Nombre d'observations valables et R <sup>2</sup> de chaque régression		
	En jeu seulement	Hors jeu seulement	En jeu et Hors jeu
Bombardier	obs=334 R <sup>2</sup> =0.288	obs=96 R <sup>2</sup> =0.418	obs=430 R <sup>2</sup> =0.190
BioChem	obs=1444 R <sup>2</sup> =0.117	obs=272 R <sup>2</sup> =0.209	obs=1716 R <sup>2</sup> =0.068
Laidlaw	obs=494 R <sup>2</sup> =0.193	obs=281 R <sup>2</sup> =0.414	obs=775 R <sup>2</sup> =0.016
Banque Nationale	obs=271 R <sup>2</sup> =0.241	obs=46 R <sup>2</sup> =0.457	obs=317 R <sup>2</sup> =0.105

**Tableau 9:**

**Estimation de la volatilité: Modèle de Kunitomo modifié  
Régression de Macbeth-Merville**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	En jeu seulement		Hors jeu seulement		En jeu et Hors jeu	
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
Bombardier	2.53 (24.00)	-11.44 (-13.32)	-79.68 (-3.92)	-5211.4 (-12.15)	80.13 (12.73)	-672.40 (-10.58)
BioChem	1.75 (28.01)	-2.12 (-15.69)	-46.22 (-5.06)	-1971.0 (-2.148)	61.90 (21.94)	-113.37 (-14.77)
Laidlaw	-0.68 (-47.63)	-0.008 (-10.60)	-3.41 (-10.41)	-27.49 (-25.56)	0.83 (4.96)	-0.05 (-4.47)
Banque Nationale	0.96 (13.46)	-4.14 (-6.99)	-22.18 (-3.19)	-767.48 (-8.16)	14.84 (8.09)	-144.41 (-8.16)

Titres:	Nombre d'observations valables et R <sup>2</sup> de chaque régression			
	En jeu seulement		Hors jeu seulement	
Bombardier	obs=334	R <sup>2</sup> =0.348	obs=236	R <sup>2</sup> =0.387
BioChem	obs=1444	R <sup>2</sup> =0.146	obs=891	R <sup>2</sup> =0.342
Laidlaw	obs=494	R <sup>2</sup> =0.186	obs=281	R <sup>2</sup> =0.701
Banque Nationale	obs=271	R <sup>2</sup> =0.154	obs=193	R <sup>2</sup> =0.259
			obs=570	R <sup>2</sup> =0.165
			obs=2335	R <sup>2</sup> =0.085
			obs=775	R <sup>2</sup> =0.025
			obs=464	R <sup>2</sup> =0.126



**Tableau 10: Estimation de la volatilité: Induite  
Régression de Macbeth-Merville**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	En jeu seulement		Hors jeu seulement		En jeu et Hors jeu	
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
Bombardier	0.008 (0.43)	0.25 (1.79)	0.16 (1.57)	-0.83 (-1.87)	0.15 (3.31)	-0.80 (-3.57)
BioChem	0.015 (6.21)	-0.0136 (-2.33)	-7.18 (-3.11)	-60.87 (-5.38)	1.71 (2.30)	-7.75 (-3.32)
Laidlaw	-0.07 (-2.90)	-0.66 (-14.62)	0.03 (0.74)	0.22 (1.63)	-0.13 (-6.98)	-0.50 (-12.13)
Banque Nationale	0.0095 (0.99)	-0.04 (-0.045)	-2077.4 (-1.95)	-36456.2 (-3.61)	446.50 (1.35)	-9832.9 (-3.21)

Titres:	Nombre d'observations valables et R <sup>2</sup> de chaque régression	
	En jeu seulement	En jeu et Hors jeu
Bombardier	obs=382 R <sup>2</sup> =0.008	obs=895 R <sup>2</sup> =0.014
BioChem	obs=1483 R <sup>2</sup> =0.004	obs=3071 R <sup>2</sup> =0.004
Laidlaw	obs=257 R <sup>2</sup> =0.456	obs=533 R <sup>2</sup> =0.217
Banque Nationale	obs=240 R <sup>2</sup> =0.001	obs=441 R <sup>2</sup> =0.023

**Tableau 11: Options en jeu seulement**  
**Estimation de la volatilité: Modèle classique**  
**Régression de Melino-Turnbull**  
 Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
 (La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	0.16 (0.35)	-8.83 (-11.32)	0.32 (0.69)	15.56 (2.20)	0.007 (5.88)
BioChem	1.71 (5.27)	-1.68 (-15.39)	2.27 (6.81)	-13.63 (-2.48)	0.0009 (1.58)
Laidlaw	-0.62 (-5.93)	-0.006 (-10.63)	-0.165 (-2.03)	0.94 (0.54)	-0.0011 (-5.18)
Banque Nationale	0.68 (1.46)	-4.71 (-6.06)	-0.01 (-0.04)	-0.95 (-0.11)	0.0056 (6.81)

**Tableau 12:**

*Options hors jeu seulement*

**Estimation de la volatilité: Modèle classique**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options hors jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	291.06 (2.00)	-9794.1 (-9.54)	-800.52 (-5.68)	-1480.4 (-0.71)	-0.26 (-0.67)
BioChem	229.53 (2.65)	-6673.9 (-13.21)	-652.06 (-7.95)	-2740.6 (-1.91)	0.22 (1.19)
Laidlaw	-18.83 (-1.12)	-78.07 (-10.69)	1.08 (0.13)	128.74 (0.44)	0.03 (0.81)
Banque Nationale	377.94 (1.52)	-7276.9 (-7.04)	-509.12 (-5.61)	-4248.1 (-0.95)	-0.47 (-0.93)

**Tableau 13:**

***Options en jeu et hors jeu***

**Estimation de la volatilité: Modèle classique**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.

(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu et hors jeu				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	87.33 (1.50)	-766.0 (-8.78)	-46.54 (-0.81)	181.71 (0.21)	0.14 (0.88)
BioChem	110.63 (4.59)	-70.05 (-8.27)	-3.13 (-0.13)	-1190.9 (-2.92)	0.01 (0.26)
Laidlaw	-4.60 (-0.83)	-0.10 (-3.40)	1.17 (0.31)	184.35 (1.98)	-0.02 (-1.46)
Banque Nationale	64.63 (1.43)	-370.51 (-5.76)	-54.16 (-1.92)	138.81 (0.17)	-0.07 (-0.91)

**Tableau 14:**

*Options en jeu seulement*

**Estimation de la volatilité: Modèle de Parkinson**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.

(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	0.19 (0.40)	-8.90 (-11.31)	0.32 (0.68)	15.17 (2.13)	0.007 (5.86)
BioChem	1.78 (5.18)	-1.74 (-15.03)	2.27 (6.42)	-14.12 (-2.43)	0.0009 (1.37)
Laidlaw	-0.65 (-6.82)	-0.005 (-11.15)	-0.21 (-2.79)	1.26 (0.80)	-0.0010 (-4.94)
Banque Nationale	0.69 (1.46)	-4.71 (-6.07)	-0.01 (-0.04)	-1.00 (-0.12)	0.0056 (6.81)

**Tableau 15:**

***Options hors jeu seulement***

**Estimation de la volatilité: Modèle de Parkinson  
Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options hors jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	187.21 (1.28)	-12153.8 (-11.73)	-877.66 (-6.17)	886.23 (0.42)	-0.17 (-0.41)
BioChem	32.59 (0.30)	-8139.3 (-12.94)	-693.68 (-6.79)	1186.7 (0.66)	0.89 (3.88)
Laidlaw	-58.30 (-14.73)	-28.80 (-15.02)	-4.50 (-2.08)	942.66 (13.43)	0.12 (13.67)
Banque Nationale	709.01 (2.25)	-11337.2 (-8.79)	-599.00 (-5.24)	-10406.8 (-1.84)	-0.93 (-1.45)

**Tableau 16:**

***Options en jeu et hors jeu***

**Estimation de la volatilité: Modèle de Parkinson**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu et hors jeu				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	57.68 (0.86)	-1036.55 (-10.33)	-16.50 (-0.25)	1049.94 (1.03)	0.24 (1.32)
BioChem	103.27 (3.16)	-105.73 (-9.21)	41.11 (1.26)	-836.69 (-1.51)	0.10 (1.67)
Laidlaw	-13.68 (-6.43)	-0.05 (-4.17)	0.46 (0.31)	273.39 (7.66)	0.01 (2.90)
Banque Nationale	82.84 (1.32)	-551.62 (-6.19)	-40.35 (-1.03)	176.12 (0.16)	-0.08 (-0.70)

**Tableau 17:**

*Options en jeu seulement*

**Estimation de la volatilité: Modèle de Kunitomo**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.

(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	-0.21 (-0.54)	-7.44 (-11.01)	0.41 (1.00)	19.79 (3.24)	0.0064 (6.07)
BioChem	0.92 (4.10)	-1.37 (-18.13)	2.40 (10.39)	-2.48 (-0.65)	-0.0060 (-1.42)
Laidlaw	-0.64 (-6.82)	-0.005 (-11.15)	-0.19 (-2.64)	1.16 (0.74)	-0.0010 (-5.53)
Banque Nationale	0.24 (0.82)	-2.50 (-5.12)	0.08 (0.39)	1.27 (0.24)	0.0044 (8.55)



**Tableau 18:**

*Options hors jeu seulement*

**Estimation de la volatilité: Modèle de Kunitomo**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.

(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options hors jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	-59.22 (-0.77)	-5218.1 (-14.94)	-143.80 (-1.83)	1093.1 (1.00)	-0.72 (-3.19)
BioChem	-175.97 (-4.84)	-2442.6 (-27.76)	-138.79 (-3.39)	4422.2 (7.40)	-0.84 (-9.66)
Laidlaw	2.87 (1.23)	-27.95 (-24.66)	-1.27 (-0.99)	-92.21 (-2.22)	-0.02 (-4.55)
Banque Nationale	-14.24 (-0.55)	-512.74 (-6.26)	-47.94 (-2.36)	104.54 (0.24)	0.13 (2.01)

Tableau 19:

*Options en jeu et hors jeu*

**Estimation de la volatilité: Modèle de Kunitomo**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu et hors jeu				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	2.71 (0.06)	-702.89 (-10.52)	39.06 (0.79)	978.06 (1.36)	0.08 (0.58)
BioChem	118.43 (5.53)	-114.09 (-12.68)	-20.92 (-0.87)	-934.81 (-2.57)	-0.06 (-1.30)
Laidlaw	-1.48 (-1.07)	-0.04 (-5.79)	-0.26 (-0.27)	70.03 (3.03)	-0.01 (-4.11)
Banque Nationale	11.89 (0.80)	-133.33 (-6.97)	-32.78 (-3.10)	75.36 (0.29)	0.10 (3.25)

**Tableau 20:**

**Nombre d'observations valables et R<sup>2</sup> de chaque régression**  
**Estimation de la volatilité: Classique, de Parkinson et de Kunitomo**  
**Régression de Melino-Turnbull**

Titres:	Nombre d'observations valables et R <sup>2</sup> de chaque régression											
	Ex.: <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Nombre d'obs. (R<sup>2</sup> x 1000)</span>											
	Classique			Parkinson			Kunitomo					
	En	Hors	E & H	En	Hors	E & H	En	Hors	E & H			
Bombardier	281 (376)	124 (465)	405 (165)	281 (376)	124 (555)	405 (215)	281 (367)	264 (468)	545 (178)			
BioChem	1358 (237)	314 (389)	1676 (060)	1358 (226)	314 (381)	1672 (076)	1358 (296)	933 (456)	2291 (090)			
Laidlaw	461 (224)	274 (321)	735 (031)	461 (240)	281 (687)	742 (096)	461 (245)	281 (723)	742 (097)			
Banque Nat.	204 (321)	80 (449)	284 (110)	204 (322)	81 (523)	285 (128)	204 (357)	228 (286)	432 (188)			

**Tableau 21:** *Options en jeu seulement*

**Estimation de la volatilité: Induite**  
**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.  
 (La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	-0.93 (-2.44)	0.44 (0.87)	-0.29 (-1.09)	15.65 (2.45)	0.0026 (3.67)
BioChem	-0.44 (-1.83)	-0.39 (-4.83)	0.96 (4.07)	6.87 (1.74)	0.0003 (0.70)
Laidlaw	-4.42 (-1.47)	-16.76 (-24.54)	-1.40 (-0.53)	132.06 (2.76)	-0.01 (-2.21)
Banque Nationale	0.20 (1.63)	-0.24 (-1.35)	0.0038 (0.05)	-4.12 (-1.98)	0.0007 (3.33)

**Tableau 22:**

***Options hors jeu seulement***

**Estimation de la volatilité: Induite**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.

(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options hors jeu seulement				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	-0.04 (-0.16)	-0.42 (-1.84)	-0.85 (-3.57)	8.05 (1.79)	-0.0003 (-0.58)
BioChem	0.14 (2.22)	-0.11 (-2.14)	-0.31 (-5.18)	-4.83 (-4.79)	0.0007 (5.35)
Laidlaw	-0.81 (-1.57)	1.00 (4.67)	0.91 (3.36)	10.50 (1.17)	-0.00009 (-0.08)
Banque Nationale	0.08 (1.52)	-0.25 (-2.81)	-0.03 (-0.72)	-1.07 (-1.17)	-0.0005 (-4.25)

**Tableau 23:**

*Options en jeu et hors jeu*

**Estimation de la volatilité: Induite**

**Régression de Melino-Turnbull**

Résultats des trois régressions pour chaque titre.

(La statistique "t" est entre parenthèses)

Titres:	Options en jeu et hors jeu				
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
Bombardier	-0.24 (-1.16)	-0.34 (-2.43)	-0.67 (-3.86)	9.58 (2.72)	0.0005 (1.21)
BioChem	-0.17 (-1.53)	-0.06 (-1.40)	0.23 (2.04)	1.59 (0.87)	0.0003 (1.43)
Laidlaw	-3.86 (-2.40)	-11.52 (-31.45)	-0.61 (-0.59)	39.56 (1.46)	-0.0003 (-0.09)
Banque Nationale	0.06 (1.02)	0.03 (0.49)	0.01 (0.38)	-1.50 (-1.51)	0.00009 (0.79)

**Tableau 24:** Nombre d'observations valables et R<sup>2</sup> de chaque régression  
 Estimation de la volatilité: Induite  
 Régression de Melino-Turnbull

Titres:	Nombre d'observations et R <sup>2</sup> de chaque régression					
	En jeu seulement		Hors jeu seulement		En jeu et Hors jeu	
	# Obs.	R <sup>2</sup>	# Obs.	R <sup>2</sup>	# Obs.	R <sup>2</sup>
Bombardier	326	0.063	569	0.041	896	0.034
BioChem	1386	0.033	1685	0.085	3071	0.003
Laidlaw	157	0.817	376	0.089	533	0.666
Banque Nationale	169	0.135	272	0.079	441	0.010

