Croissance économique de long terme et capital humain

Rapport de recherche présenté par Patrick González dans le cadre du programme de maîtrise en sciences économiques.
Professeur : **Emanuela Cardia**

DÉPARTEMENT DE SCIENCES ÉCONOMIQUES
FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
SEPTEMBRE 1991

1.0 Introduction

Ce rapport de recherche est divisé en trois parties. Dans un premier temps, j'esquisse une revue de la littérature traitant de modèles exhibant une «croissance endogène». Ensuite, une version légèrement modifiée du modèle de croissance endogène de Lucas (1988), est présentée. Cette exposition me permet également de souligner les principales caractéristiques du modèle de Lucas. Enfin, je conclus en exposant un second modèle mal spécifié mais suggérant d'éventuelles avenues de recherche.

1.1 Les problèmes du modèle néoclassique traditionnel

La panoplie de modèles de croissance économique développés dans les années cinquante et soixante, notamment par Solow (1956), s'est considérablement étendue depuis cinq ans avec l'élaboration de modèles introduisant une « croissance endogène ». Ces nouveaux modèles tentent essentiellement d'élargir le pouvoir explicatif des modèles de croissance traditionnels, déficients quant à leurs prédictions concernant l'éventuelle convergence des taux de croissance des différentes économies sur la planète.

Le long d'un équilibre stationnaire, une économie modélisée de manière néo-classique affiche des taux de croissance de l'output, de la consommation et du stock de capital *per capita* égaux au taux de croissance du progrès technologique exogène non imbriqué, quelles que soient les préférences de sa population ou la performance de sa fonction de production. Deux économies complètement différentes afficheront à long terme les mêmes taux de croissance *per capita* pour peu que le progrès technologique croisse au même rythme dans chaque économie. Le long d'un sentier de transition, si l'une des deux économies s'avère mieux munie en biens de capital que l'autre, son ratio capital/travail efficient sera supérieur et le rendement sur le capital en sera d'autant diminué. Dans la mesures où les capitaux peuvent circuler librement, leurs détenteurs auront avantage à investir dans l'économie moins développée afin de profiter de meilleurs rendements et cet afflux de capital devrait diminuer le différentiel de rendement sur le capital et hausser les salaires dans le pays pauvre, de sorte qu'à long terme, les rendements marginaux sur le capital et sur la main d'oeuvre efficiente devraient être les mêmes dans chaque économie et celles-ci de croître au même rythme.

On observe pourtant une grande disparité des taux de croissance entre pays. Selon l'analyse néo-classique traditionnelle, cela suggère que le taux de croissance du progès technologique exogène n'est pas le même dans chaque pays ou que ces différentes économies n'ont tout simplement pas atteint un équilibre de long terme. Ces deux explications sont insatisfaisantes à plus d'un point de vue.

Une plus faible croissance du progrès technologique non imbriqué, neutre au sens de Harrod (progrès technologique affectant le travail), peut entraîner la sous-capitalisation des pays pauvres. Les salaires et le rendement sur le capital y seraient alors plus bas. Cependant, la niveau de technologie présent dans un pays dépend de décisions relatives à l'investissement dans l'éducation, la recherche et le développement, soit des décisions essentiellement économiques qui méritent d'être explicitées dans un modèle de croissance.

Par ailleurs, l'expérience de l'après-guerre a montré comment des pays connaissant initialement un semblable niveau de développements pouvaient connaître des taux de croissance différents. Le relèvement du Japon et de l'Allemagne après la guerre et la croissance des nouveaux pays industrialisés de l'Asie du Sud-Est se sont fait alors que l'Argentine périclitait et que perdurait la stagnation endémique de l'Afrique. Ces pays ayant adopté des politiques économiques différentes, on peut supposer qu'une judicieuse politique puisse affecter positivement la croissance d'une manière durable.

Or, la théorie néo-classique traditionnelle invalide la capacité des pouvoirs publiques d'accroître, par des politiques fiscales appropriées, le taux de croissance de l'économie. Dans une telle modélisation, le taux de croissance de long terme d'une économie est essentiellement fonction de paramètres exogènes, comme le taux de croissance de la main d'œuvre et du progrès technologique. L'introduction d'un secteur public cherchant à affecter le taux de croissance de long terme en affectant les décisions d'épargne des agents, n'a qu'un effet transitoire sur la croissance, susceptible d'accroître le niveau de richesse de l'économie mais sans effet positif sur le taux de croissance de long terme. Étant donné que, sans la présence d'externalités, la croissance optimale, maximisant l'utilité moyenne *per capita* d'un ensemble de ménages homogènes, peut être atteinte en équilibre concurrentiel, les modèles néo-classiques traditionnels ne réservent aux pouvoirs publics qu'un rôle parasitaire en ce qui concerne la croissance de long terme.

1.2 L'hypothèse de la prépondérance de l'effet de transition

L'interprétation traditionnelle des tenants du modèle néo-classique traditionnel recours aussi à la prépondérance des effets de croissance transitoire pour justifier la disparité des taux de croissance. Toutes les économies n'auraient tout simplement pas atteint leur état d'équilibre de long terme. Les différences persistantes dans les taux seraient dûes à la lenteur avec laquelle le ratio capital/travail d'efficience s'ajuste pour atteindre sa valeur d'équilibre de long terme.

À la suite d'une étude empirique minutieuse, King et Rebelo (1989) devaient toutefois rejetter cette hypothèse en observant notamment que pour observer de larges effets de la dynamique de transition, on devait présumer d'une forte productivité marginale du capital initial, ce qui implique un taux d'intérêt réel très élevé, incompatible avec les données historiques. King et Rebelo consacrent ainsi la nécessité de développer une nouvelle approche au problème de la croissance.

1.3 La disparité internationale des taux de croissance

Cette nouvelle approche reprend, pour l'essentiel, le cadre du modèle néo-classique traditionnel. Les questions de base, illustrées par les fameux cinq premiers faits stylisés de Kaldor (cf. Romer,1989), demeurent : un modèle de croissance économique doit pouvoir rendre compte de régularités empiriques comme la croissance régulière de la productivité et du niveau de capitalisation par travailleur ; la stabilité du ratio capital/output, du taux d'intérêt, ainsi que des parts du revenu national allouées aux détenteurs du capital et à la main d'œuvre.

Le premier défi que rencontre le modélisateur est alors d'expliquer le dernier fait stylisé de Kaldor, soit la diversité des taux de croissance de la productivité entre pays. Romer (1989), étoffe ce programme en soulignant cinq autres observations, soit l'absence de corrélation dans les coupes transversales entre croissance et niveau de développement ; une corrélation positive entre la croissance des échanges et la croissance de l'économie ; la présence d'une croissance résiduelle inexpliquée par un afflux de facteurs ; une corrélation négative entre croissance de la population et importance du revenu et, enfin, les pressions migratoires de la main d'œuvre, qualifiée et non qualifiée, des pays pauvres du Sud vers les pays riches du Nord.

1.4 La croissance endogène

Les modèles, en économie fermée, développés pour aborder le problème de la croissance à la lumière des observations empiriques citées plus haut, se distinguent des modèles néo-classiques traditionnels par leur capacité à générer une croissance endogène. C'est-à-dire que les taux de croissance de long terme y dépendent des paramètres caractérisant les préférences individuelles et la technologie de production. Ce résultat permet alors d'attribuer les différentes expériences de croissance à la diversité géographique, humaine et physique[1], de chaque pays.

Une croissance soutenue de la productivité *per capita* est obtenue en modélisant la technologie de production de façon telle que les facteurs reproductibles ne présentent pas de rendements décroissants. Généralement, cette propriété est réalisée en introduisant des

1. La « géographie » d'un pays doit être prise au sens large et comprendre les facteurs physiques, climatiques, politiques, sociaux, religieux, etc, qui font, par exemple, qu'on ne peut indifféremment procéder à l'analyse d'un système économique selon qu'il se situe en Californie ou sur les hauts plateaux andins...

externalités positives affectant la production (Romer, 1986, 1987, Barro, 1990). Une variante de cette approche (Uzawa, 1965, Lucas, 1988, Buiter & Kletzer, 1991) consiste à introduire le capital humain, dont la production dépend d'une technologie à rendements constants, qui joue alors le rôle d'un progrès technologique, soutenant la productivité, croissant de manière endogène[2].

Le recours à des externalités n'est pas une condition cruciale. Rebelo (1990) a fait la synthèse de ces approches en démontrant que la présence d'un noyau de biens de capital pouvant être produits avec une technologie à rendements constants (comme le capital humain, par exemple, dans le modèle d'Uzawa-Lucas), sans nécessiter l'apport direct ou indirect de facteurs non-reproductibles, était une condition suffisante pour qu'un modèle néo-classique puisse bénéficier d'une croissance endogène. La modélisation avec externalités, qu'elle résulte en une fonction de production à rendements constants ou croissants, permet toutefois d'explorer diverses situations de sous-optimalité de l'équilibre concurrentiel.

Ces modèles ne présentent des sentiers de croissance équilibrés que sous certaines conditions. D'abord, il faut s'assurer de pas permettre une croissance explosive. Cette condition est généralement respectée en imposant une borne supérieure à l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation, de sorte que les ménages n'aient pas intérêt à épargner de manière disproportionnée.

Les modèles décentralisés présentant des externalités nécessitent ensuite de vérifier qu'une telle particularité est compatible avec l'existence d'un équilibre concurrentiel dans un contexte dynamique. Romer (1986) et Lucas (1988), ont bâti de tels modèles avec rendements

2. Cette approche suppose néanmoins une forme d'externalité. Cf. la page 28.

croissants, dûs à une externalité positive de la fonction de production, qui affichent un équilibre concurrentiel. Tous deux empêchent les situations de monopole en supposant que la rente sur cette externalité n'est pas récupérable par la firme (Romer) ou par les agents (Lucas). L'équilibre des prix se fait instantanément sur le marché des facteurs et cette convergence est justifiée mathématiquement en faisant appel au théorème du point fixe de Brouwer.

Diverses formes d'externalité ont été étudiées. Qu'elles soient issues de l'industrie (Romer), du secteur public (Barro) ou de l'accumulation de capital humain (Uzawa, Lucas, Buiter et Kletzer), l'idée demeure la même : il s'agit d'obtenir une productivité marginale non-décroissante des facteurs reproductibles.

1.5 Externalités dues à la recherche ou à la spécialisation

À la source de cette littérature, Romer (1986), considère une industrie de la recherche produisant du savoir utilisé comme input dans la fonction de production du bien composite de consommation et de capital et y générant des retours croissants dûs aux retombées non patentables des découvertes scientifiques. Chaque firme compétitive perçoit cependant sa prodution comme connaissant des retours constants puisqu'aucune ne peut s'approprier la rente de cette externalité. Un équilibre concurrentiel compatible avec une juste rémunération des facteurs y est donc possible.

Dans un autre article, Romer (1987) expose un modèle où les divers firmes de l'industrie se spécialisent dans l'élaboration d'inputs intermédiaires. Cette spécialisation, limitée par la présence de coûts fixes, entraîne une externalité dont les firmes ne peuvent s'approprier la rente.

La fonction de production, bien que concave en fonction de ses inputs, y est convexe selon le *nombre* de firmes, illustrant le degré de spécialisation de l'économie.

Puisque le secteur productif est dans l'incapacité structurelle de récupérer la rente de ces externalités, les investissements dans la ressource génératrice de l'externalité seront défaillants par rapport à l'optimum social. Il existe un équilibre concurrentiel mais celui-ci n'est pas efficace au sens de Pareto. Ceci ouvre la porte à une intervention des pouvoirs publics afin d'orienter le marché vers l'optimum social.

1.6 Les biens publics comme source d'externalité

Barro (1990) construit un modèle de croissance endogène avec la présence d'un gouvernement retirant des taxes qu'il réinvestit en biens publics. À l'instar de Romer, Barro obtient une croissance endogène régulière de long terme en spécifiant une technologie à rendements constants où le bien de capital composite (capital physique et humain), de source privée et publique, n'affiche pas de productivité marginale décroissante. Les dépenses publiques sont à la source de ces rendements constants et peuvent donc y être considérées comme génératrices d'une externalité positive. En contre-partie, la taxation affecte négativement l'épargne ce qui traduit une fois de plus la sous-optimalité de l'équilibre concurrentiel par rapport à l'équilibre centralisé. Barro impose la présence du gouvernement en faisant des dépenses publiques un facteur essentiel de la production. Il peut alors distinguer des règles de conduite optimale pour les secteurs privé et public maximisant les intérêts respectifs des agents.

Barro suggère que la disparité dans les taux de croissance pourrait être expliquée par les différentes technologies de production où la nécessité des biens publiques dépendrait de facteurs géographiques. Un pays disposant d'une géographie moins avantageuse commanderait de ses autorités un investissement public optimal plus élevé qui résulterait néanmoins par une croissance de long terme plus faible, en affectant l'investissement privé.

1.7 L'accumulation de capital humain

L'introduction d'un processus d'accumulation de capital humain, jouant le rôle du progrès technologique, permet également de soutenir la croissance. L'hypothèse fondamentale sous-tendant cette approche est que la génération de capital humain, où la notion de capital humain recoupe celle de la connaissance, n'est pas affectée, à long terme, de rendements marginaux décroissants. Cette idée est assez séduisante. Si la somme des connaissances humaines a pu plafonner autour d'un paradigme épuisé, l'histoire scientifique est néanmoins ponctuée de révolutions regénératrices. Ceci suggère que la somme des connaissances humaines doit éventuellement continuer à croître.

Uzawa (1965) fut l'un des premiers à introduire explicitement un processus d'accumulation de capital humain dans un modèle de croissance néo-classique. Son modèle distingue la proportion de la main-d'œuvre consacrée à la production de celle consacrée à la production de bien de capital humain (de connaissances). Le principal intérêt de cette approche tient au fait qu'elle met en relief les écarts persistants entre les degrés de richesse des économies identiques, mais initialement différemment dotées, même si leurs taux de croissance sont appelés à converger. La convergence implique l'égalité des rémunérations marginales des facteurs mais pas le nivellement des stocks. Une économie ainsi modélisée atteint un équilibre de croissance endogène dont la valeur actualisée des stocks est proportionnelle aux conditions initiales.

Reprenant les travaux d'Uzawa, Lucas réinterprète cette proportion comme l'allocation optimale du temps déterminée par chaque travailleur entre sa formation et son travail, afin de pouvoir considérer un équilibre concurrentiel avec un ensemble d'agents homogènes. Grâce à la présence d'une externalité générée par le stock moyen de capital humain par travailleur, Lucas démontre que des différences dans les salaires peuvent persister le long d'un équilibre stationnaire entre des travailleurs étrangers disposant pourtant des mêmes compétences. Ce phénomène expliquerait les fortes poussées migratoires des populations pauvres du Sud que subissent les pays industrialisés du Nord. Quel que soit son niveau d'éducation ou sa compétence, un travailleur serait effectivement mieux payé dans un pays riche que dans un pays pauvre.

1.8 La croissance endogène en économie ouverte

La récente littérature sur la croissance endogène cherche à expliquer les différences persistantes dans les taux de croissance entre pays, malgré la libre circulation des capitaux. Cependant, la grande majorité des modèles développés jusqu'ici ne concernaient que des économies fermées.

En plus des conséquences sur les migrations internationales de la main d'œuvre, Lucas (1988) a exploré, dans un second modèle, les conséquences du *learning-by-doing* en économie ouverte alors que chaque pays est conduit à se spécialiser dans la production de biens à haute ou à basse teneur en technologie. Les conditions initiales des différents stocks de capitaux s'y avèrent critiques pour déterminer de la nature future du type de bien que produira chaque économie. Les pays les mieux dotés auront avantage à se spécialiser dans la production de biens à haute teneur en technologie alors que les moins riches trouveront leur compte dans celle des biens générant moins de *learning-by-doing*. À l'équilibre de croissance, chaque économie connaît un taux de croissance plus ou moins élevé selon qu'elle s'est spécialisée dans la production de l'un ou l'autre des types de biens.

Buiter & Kletzer (1991) ont récemment développé un modèle de croissance endogène en économie ouverte avec deux pays. Il s'agit d'un modèle à la Uzawa-Lucas avec générations imbriquées. Leur modèle permet d'observer des différences entre pays dans les taux de croissance fondées essentiellement sur la non-mobilité du capital humain. À technologies équivalentes, un pays dont la population a une plus grande préférence pour la consommation immédiate va effectivement croître moins vite à long terme. Leur modèle met également en relief l'effet de diverses mesures fiscales sur le différentiel de croissance qu'on observe entre les deux économies.

La littérature sur les modèles néo-classiques de croissance endogène en économie ouverte est encore à l'état embryonnaire mais l'on perçoit quelques pistes de recherche. D'une part, la présence d'externalités positives est susceptible de créer des pôles attracteurs de capitaux attirés par l'espérance d'un meilleur rendement. Ces meilleurs rendements attirent également la main d'œuvre qui peut alors trouver de meilleurs salaires. Cependant, la main d'œuvre ne jouit généralement pas de la même mobilité internationale que les capitaux. Conséquemment, il est peu probable que l'effet de ces externalités ne disparaisse à mesure que le capital afflue et cette concentration de capital peut alors perdurer aux dépens des régions défavorisées.

La notion de capital humain peut en outre être facilement élargie pour recouper un ensemble de facteurs géographiques dont la commune caractéristique est la fixité. Ainsi, autant les travailleurs guatémaltèques, par exemple, ne peuvent espérer recevoir du jour au lendemain un permis de travail américain leur permettant de rentabiliser leur potentiel humain dans un meilleur contexte économique, autant le Guatémala, dans le but d'attirer des capitaux, ne peut «importer» l'ensemble des caractéristiques géographiques américaines qui font des États-Unis un pays fondamentalement plus performant.

2.0 Une variation sur le modèle de Lucas

Je me suis particulièrement intéressé à l'étude du modèle d'accumulation de capital humain de Lucas (1988). Ce modèle a retenu mon intérêt puisqu'il imbrique à la fois une externalité et une fixité de certains facteurs. Dans son modèle, Lucas ne considère qu'une technologie d'accumulation de capital humain fonction du temps passé sur les bancs d'école à chaque période. Bien qu'il mentionne la possibilité de sophistiquer davantage son modèle en permettant par exemple l'apport de *learning-by-doing*, il n'explore pas cette avenue dans le même modèle, par souci de simplicité. Il n'aborde les conséquences du *learning-by-doing* que dans un second temps afin d'en illustrer les conséquences sur la spécialisation des pays dans la production de biens au contenu plus ou moins important en technologie.

Le temps étant une ressource inéluctablement contrainte, il existe un arbitrage direct entre les effets sur le capital humain du temps passé à l'école et celui passé au travail. De plus, il est plausible que le capital humain acquis à l'école ne puisse être parfaitement substitué à celui issu de l'apprentissage au travail. Dans la version légèrement modifiée du modèle de Lucas que je développe plus bas, j'entrouvre cette porte en imposant une allocation optimale du temps non-consacré aux loisirs différente de celle du modèle de Lucas où l'accroissement maximal de capital humain est obtenu en allouant toutes les ressources de main d'œuvre à l'éducation. Cette spécification n'affecte pas les résultats de Lucas puisqu'elle peut être interprétée comme la conséquence d'un simple changement de variable. Cet essai n'a pas de prétention autre que d'être un exercice permettant la révision du modèle de Lucas qui est, à certains égards, assez complexe.

2.1 Le modèle de Lucas modifié

Ma version du modèle de Lucas permet l'accumulation de capital humain grâce aux activités de production de biens de consommation et d'équipement. L'allocation optimale du temps y est déterminée une fois pour toute de manière exogène et n'est en rien affectée par les variables endogènes. Quel que soit l'état des stocks, il demeure le même ratio optimal qui maximise la formation de capital humain, abstraction faite des préférences pour la consommation contemporaine. En introduisant une forme simplifiée d'apprentissage au travail, je m'attends, *ceteris paribus*, à obtenir des taux de croissance supérieurs puisque que le temps passé à la production de biens physiques génère en plus du capital humain. Évidemment, cela va aussi entraîner un taux de long-terme d'activité dans la production de bien physiques supérieur.

On pose une économie fermée[2] de N consommateurs-travailleurs homogènes retirant toute leur utilité des biens de consommation selon une fonction affichant une aversion relative au risque constante (CRRA). Chaque agent maximise sa fonction d'utilité séparable sur un horizon infini. Puisque tous les agents sont homogènes, ils ont tous la même fonction d'utilité. En procédant à l'aggrégation, on obtient une fonction objectif qui caractérise à la fois le programme d'une économie centralisée ou décentralisée.

2. J'ai conservé presque intégralement la notation de Lucas dans ce premier modèle.

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} N_t \, dt \tag{1}$$

Le revenu des consommateurs est alloué entre la consommation et l'épargne, laquelle est investie en nouveaux biens de capital :

$$Y_t = N_t c_t + \dot{K}_t \tag{2}$$

Le bien composite de consommation et de capital physique est produit selon la technologie :

$$Y_t = AK_t^{\beta} (u_t h_t N_t)^{1-\beta} h_{a_t}^{\gamma} \tag{3}$$

où $(u_t h_t N_t)$ représente le flux de main d'œuvre en unités d'efficience ou, de manière équivalente, la proportion u du stock aggrégé de capital humain hN consacrée à la production.

$0 \leq u_t \leq 1$ est la proportion du temps alloué à la production, le complément $1-u$ allant à l'éducation[3]. Dans son modèle, Uzawa interprète plutôt ce ratio comme la proportion de la main-d'œuvre qu'un planificateur central destine aux activités de production. Cette dernière interprétation ne se prête toutefois pas à l'analyse d'une économie décentralisée où tous les travailleurs sont homogènes. On ne pourrait, en effet, justifier alors des comportements différents selon les agents à moins d'introduire un mécanisme endogène de discrimination.

3 . Le temps à allouer entre les activités de production et d'éducation ne concerne pas le temps consacré aux loisirs. Le temps à allouer est normalisé à 1 et l'on suppose donc que les ménages consacrent une proportion fixe de leur temps à leurs loisirs. Buiter et Kletzer ont introduit le loisir dans la fonction d'utilité en en faisant une variable de choix.

$h\ (t)$ est le niveau de capital humain de chaque travailleur et $h_a\ (t)$ est le niveau *moyen* de capital humain par travailleur dans l'économie[4]. Ce niveau moyen détermine une externalité positive de la fonction de production, soit $h_a{}^{\gamma}$. Lucas l'interprète comme le fruit de relations informelles entre les agents économiques de sorte que la communauté des travailleurs, en elle-même, est plus performante que la simple somme de ses composantes. En tout temps, $h_a{}^{\gamma}$ est considéré comme évoluant de façon autonome par les agents concurrentiels. Chaque agent est trop petit pour chercher à l'influencer par ses choix d'investissement en capital humain. Dans la perspective du modèle, le rôle de cette externalité est d'illustrer la sous-optimalité de l'équilibre concurrentiel par rapport à l'équilibre centralisé.

L'offre de main-d'œuvre est inélastique et la main d'œuvre est payée au salaire d'équilibre, par unité d'efficience, sur le marché de l'emploi. Dans la version décentralisée de ce modèle, le salaire est inférieur à la productivité marginale d'une unité d'efficience puisque le facteur d'externalité $h_a{}^{\gamma}$ est considéré comme exogène par les agents. Ceci est à la source de l'inefficience de l'économie décentralisée.

Le capital humain est accumulé grâce à la technologie :

$$\dot{h}_t = h_t\ \delta\, G\ (u_t) \tag{4}$$

La fonction G est positive et telle que son maximum atteigne 1 sur le domaine de u, de sorte que le taux maximal d'accumulation de capital humain est égal à δ. Ce dernier paramètre reflète l'efficacité de cette technologie.

---

4 . On considère qu'il y a une parfaite homogénéité entre les travailleurs si bien que $h\ (t) = h_a\ (t)$, $\forall\ t$.

2.2 Technologie d'accumulation de capital humain non-strictement décroissante en *u*

Mon modèle se distingue légèrement de celui de Uzawa-Lucas par la forme de la fonction G. Je considère le cas où le taux maximal d'accumulation du capital humain est obtenu en allouant une partie du temps à la production, afin de générer du *learning-by-doing*, plutôt qu'en consacrant tout à l'éducation. Dans la formulation d'Uzawa, ceci reviendrait à poser l'hypothèse vraisemblable que le secteur de la recherche est plus performant lorsqu'une partie de la main-d'œuvre assure une certaine production et maintient un lien entre le développement de nouvelles connaissances académiques et leur réalisation effective dans le secteur de la production.

G se décompose en deux effets, soit $G(\Lambda(u),\Gamma(1-u))$, où Λ et Γ sont respectivement les apports de l'apprentissage au travail et de l'apprentissage à l'école. Ces deux processus ont tous deux strictement concaves et positifs et monotones croissants respectivement en u et en $(1-u)$. Par ailleurs, G est concave en Λ et Γ, de sorte que G est monotone strictement concave en u. et ne possède qu'un maximum sur le domaine de u. C'est-à-dire

$$\Lambda_u > 0,\ \Lambda_{uu} < 0,\ \Gamma_{(1-u)} > 0,\ \Gamma_{(1-u)(1-u)} < 0,\ G_\Lambda > 0,$$

$$G_\Gamma > 0,\ G_{\Lambda\Lambda} < 0,\ G_{\Gamma\Gamma} < 0,\ G_{\Lambda\Gamma} > 0.$$

De sorte que $G_{uu} < 0$ et G a un seul maximum sur $0 \le u \le 1$. De plus, $G(1) = 0$ de sorte que l'éducation est un facteur essentiel pour l'acquisition de capital humain. Puisque G atteint son maximum en $u \ge 0$, la concavité de G implique que $G_u(1) \ge 1$.

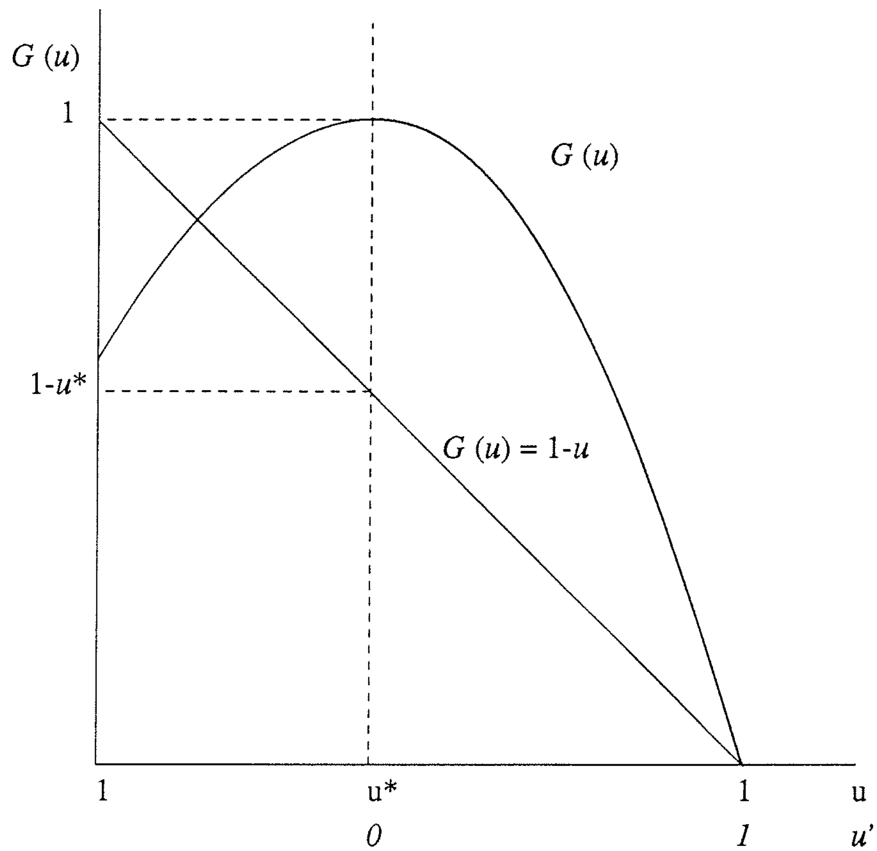

Figure 1: Technologie G déterminant le taux de croissance du stock de capital humain en tout t comme une fonction de la proportion u du temps non consacré aux loisirs qui est allouée à la production de biens physiques.

Il est facile de relâcher l'hypothèse de monotonicité croissante en $1-u$ de Lucas afin de développer une fonction $G\ (u)$ connaissant éventuellement un maximum u^* sur le domaine de u. En tout t, en effet, tous les u situés en-deça de u^* ne peuvent être optimaux du point de vue du travailleur puisque celui-ci peut toujours leur préférer un u plus élevé qui engendrera un taux de croissance du capital humain au moins aussi élevé tout en accroissant du coup la production. Puisque tous ces u sont déterminés en début de programme par la technologie exogène G, on ne change pas la nature du problème en les excluant de l'espace des commandes. On peut donc envisager d'effectuer un changement de variable par rapport au u^* maximal afin de retrouver une fonction G monotone croissante en $1-u$ sur le domaine des commandes. Soit la nouvelle variable $u' = (u - u^*)/(1-u^*)$. Il est clair alors que tous les points de l'espace des commandes engendrent une croissance supérieure.

La comparaison est cependant plus équivoque lorsqu'il s'agit de comparer deux fonctions concaves entre elles. La valeur de u qui maximise G ne suffit pas à déterminer de la performance d'une économie. Il faut en effet considérer les préférences des ménages puisque ceux-ci sont enclins à choisir un u sous-optimal afin de rencontrer leurs préférences pour la consommation contemporaine. Selon la fonction considérée, ces préférences peuvent plus ou moins affecter la performance de long-terme de l'économie. Une technologie inférieure absolument (c'est-à-dire ayant son maximum plus à gauche sur le graphique), pourra supplanter une une autre technologie supérieure mais par trop concave. Seule l'approche mathématique nous permet de distinguer alors quelle technologie générera une croissance de long-terme supérieure.

2.3 La différence entre les solutions centralisée et décentralisée du problème d'optimisation

Ce problème d'optimisation dynamique, avec $\{c\}$ et $\{u\}$ comme commandes, peut être résolu en développant les conditions du hamiltonien, exprimé en valeurs courantes, où θ_1 et θ_2 sont respectivement les prix ombres, en valeurs courantes, du capital physique et du capital humain.

$$H = N\,\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \theta_1\left[AK^{\beta}(uhN)^{1-\beta}h_a^{\gamma} - N\,c\right] + \theta_2\delta hG \tag{5}$$

À cause de la présence de l'externalité h_a^γ, les solutions centralisées et décentralisées du système ne seront pas identiques. Je vais développer chacune de ces solutions puisqu'une grande part de l'intérêt de ce modèle consiste à montrer en quoi l'équilibre décentralisé est sous-optimal par rapport à l'équilibre centralisé.

La différence apparaît dans la détermination des salaires sur le marché (implicite) du travail. Tant pour le planificateur central que pour les agents en système concurrentiel, l'efficience, dans le premier cas, et l'équilibre de marché, dans le second, commandent que les travailleurs soient rémunérés selon leur productivité marginale. Dans les modèles néo-classiques traditionnels, la main d'œuvre est offerte de façon parfaitement inélastique si bien que cette condition est sans grande conséquence.

Ici, le flux de main d'œuvre peut s'interpréter comme un stock de capital humain dont il faut juger de l'emploi alternatif dans le secteur de l'éducation. Cette évaluation dépend de la valeur accordée au capital humain dans le secteur de la production. En équilibre concurrentiel, les agents perçoivent l'externalité h_a^γ comme une donnée exogène. Pour les agents privés, le capital humain ne vaut que pour ce qu'il apporte directement à la production, soit à uhN, et est rémunéré comme tel. Le planificateur, par contre, considère également son apport indirect par le biais de l'externalité. Cette distinction va trouver son sens, dans la résolution du problème d'optimisation dynamique, dans la dérivation de la condition dynamique de la variable d'état h.

2.4 Résolution du modèle

En plus des équations d'accumulations et des usuelles conditions de transversalité, les conditions de premier ordre du hamiltonien nous donnent,

$$\frac{\partial H}{\partial c} = c^{-\sigma} - \theta_1 = 0$$

soit,

$$c^{-\sigma} = \theta_1 \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \theta_1 \beta A K^{\beta-1} (uhN)^{1-\beta} h_a^{\gamma} = \rho\theta_1 - \dot{\theta}_1$$

soit,

$$\beta A K^{\beta-1} (uhN)^{1-\beta} h_a^{\gamma} = \rho - \frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \theta_1 (1-\beta) A K^{\beta} (uhN)^{-\beta} h_a^{\gamma} hN + \theta_2 \delta h G_u = 0$$

où G_u représente la première dérivée de $G(u)$ par rapport à u. Après quelques manipulations, on obtient :

$$-\frac{\theta_1}{\theta_2} (1-\beta) A K^{\beta} (uhN)^{-\beta} h_a^{\gamma} uN = \delta u G_u \tag{8}$$

La solution centralisée du système est obtenue en considérant l'externalité du capital humain moyen dans la dérivation de la condition sur le capital humain. Le planificateur rétribue les ménages à leur véritable apport marginal à la production,

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \theta_1 A K^{\beta}(uN)^{1-\beta}\left[(1-\beta)\, h^{-\beta} h_a^{\gamma} + \gamma\, h^{1-\beta} h_a^{\gamma-1}\right] + \theta_2 \delta G = \rho\theta_2 - \dot{\theta}_2$$

où, bien sûr, $h = h_a$ puisque tous les agents sont identiques. Conséquemment, on peut simplifier cette expression pour obtenir la condition :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \left(\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right)\frac{\theta_1}{\theta_2}(1-\beta)AK^{\beta}(uhN)^{-\beta}h_a^{\gamma}uN - \delta G \tag{9}$$

La solution décentralisée commande, par contre, que les agents considèrent comme donné le niveau moyen de capital humain dans l'économie lorsque sont déterminés les salaires. L'apport marginal du rehaussement du capital moyen n'est donc pas considéré ni par les travailleurs, ni par les firmes, dans la détermination du salaire par unité d'efficience. La dérivation de la condition du hamiltonien sur h tient h_a pour fixe.

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \theta_1(1-\beta)\, AK^{\beta}(uhN)^{-\beta}uN\, h_a^{\gamma} + \theta_2\delta G = \rho\theta_2 - \dot{\theta}_2$$

soit, après avoir substitué[5] h pour h_a,

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \frac{\theta_1}{\theta_2}(1-\beta)AK^{\beta}(uhN)^{-\beta}h^{\gamma}uN - \delta G \tag{9'}$$

En notant v le taux de croissance du capital humain :

$$v = \frac{\dot{h}}{h} = \delta G \tag{10}$$

---

5 . Afin de simplifier la notation, je ne distinguerai plus le capital humain des travailleurs du capital moyen puisqu'il existe une parfaite homogénéité des agents. De plus, la notation prime distinguera désormais les équations de l'économie décentralisée que je développerai parallèlement.

En substituant (6), exprimée en taux de croissance dans (7) on obtient :

$$\beta A K^{\beta-1} (uhN)^{1-\beta} h^{\gamma} = \rho + \sigma\chi \tag{11}$$

où χ représente le taux de croissance de la consommation *per capita*.

Grâce au fait que la productivité moyenne de la technologie Cobb-Douglas soit toujours proportionnelle à celle de sa productivité marginale, on peut, en divisant par β, poser l'égalité avec la contrainte technologique :

$$\frac{Nc}{K} + \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\rho + \sigma\kappa}{\beta} \tag{12}$$

En exprimant cette équation en taux de croissance on obtient le taux de croissance du capital physique de long terme, alors que u et χ sont stables,

$$\phi = \chi + \lambda \tag{13}$$

Par ailleurs, l'équation (11) en taux de croissance donne, le long d'un équilibre stationnaire,

$$(\beta - 1)\ \phi - (1-\beta)\ (\nu + \lambda) + \gamma\,\nu = 0$$

soit, après avoir substitué pour ϕ :

$$\chi = \left(\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right)\nu \tag{14}$$

où la croissance de long-terme de la consommation apparaît comme une fonction croissante du facteur d'externalité et de la croissance du capital humain.

Dans le modèle d'Uzawa, qui ne comprend pas d'externalité dans la fonction de production ($\gamma = 0$), la consommation *per capita* croît au même taux que le capital humain par travailleur ($\chi = \nu$) de sorte que le capital par unité d'efficience est constant. Ici, le capital par unité d'efficience va croître au taux $(\gamma/(1-\beta)\nu$. Ceci a pour notable conséquence que l'on ne peut confondre les deux variables en une seule pour les fins de l'analyse dynamique.

À l'instar des modèles de croissances traditionnels, la consommation et le capital par tête croissent au même taux, lequel est proportionnel au taux de croissance du capital humain. Pour compléter l'analyse stationnaire, il faut maintenant déterminer le taux de croissance du capital humain, véritable moteur de la croissance.

En exprimant (8) taux de croissance, on obtient, après avoir substitué pour $\dot{\theta}_1/\theta_1$ et ϕ (et χ), une expression générale de l'évolution du prix ombre du capital humain :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = -\frac{[\sigma(1-\beta+\gamma) - \gamma]}{1-\beta}\nu + \lambda \tag{15}$$

En combinant cette condition à celle obtenue en substituant (8) dans la condition dynamique de premier ordre sur le capital humain, on va pouvoir éliminer $\dot{\theta}_2/\theta_2$. Cette condition dynamique étant différente dans les cas centralisé et décentralisé, on pourra résoudre pour les taux de croissance stationnaires du capital humain en économie centralisée, ν, et décentralisée, ν^*.

Dans le cas centralisé, on obtient, en substituant (8) dans la (9), l'évolution du prix ombre dans le cas d'une économie centralisée :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \delta\left[G - \left(\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right)uG_u\right] \tag{16}$$

Par ailleurs, en substituant (8) dans la (9'), on obtient cette même évolution dans le cadre d'une économie décentralisée :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \delta (G - uG_u) \tag{16'}$$

En combinant l'expression générale de l'évolution du prix ombre avec, respectivement, celles des économies centralisée et décentralisée, on obtient les taux de croissance de long-terme du capital humain :

$$\nu^* = \frac{(1-\beta)\left[\delta\left[(G-uG_u) - [\gamma/(1-\beta)]\,uG_u\right] - (\rho-\lambda)\right]}{\sigma(1-\beta+\gamma)-\gamma} \tag{17}$$

$$\nu = \frac{(1-\beta)\left[\delta(G-uG_u) - (\rho-\lambda)\right]}{\sigma(1-\beta+\gamma)-\gamma} \tag{17'}$$

Comme toujours, si l'on fait disparaître l'externalité en posant $\gamma = 0$, les solutions centralisées et décentralisées concordent. Ces deux expressions, combinées avec l'expression générale (10) de croissance du capital humain, nous donnent des équations non-linéaires en u dont les solutions représentent les u de long-terme, lesquels déterminent les taux de croissance de long-terme.

$$(1-\sigma)G - uG_u - \frac{(1-\beta)(\rho-\lambda)}{\delta(1-\beta+\gamma)} = 0 \tag{18}$$

$$(1-\sigma)\frac{(1-\beta+\gamma)}{(1-\beta)}G - uG_u - \frac{(\rho-\lambda)}{\delta} = 0 \tag{18'}$$

Ceci n'est possible que si ces expressions acceptent des solutions sur le domaine de *u*. En posant une élasticité de substitution inter-temporelle unitaire, on a :

$$-u\,G_u = \frac{(1-\beta)\,(\rho-\lambda)}{\delta\,(1-\beta+\gamma)} \tag{19}$$

$$-u\,G_u = \frac{(\rho-\lambda)}{\delta} \tag{19'}$$

$-u\,G_u$ est croissante depuis zéro sur $[u^*, 1]$, en notant u^* la valeur qui maximise G à 1. L'égalité peut donc se faire à l'intérieur du domaine restreint de u puisque $-G_u(1) \geq 1$. On voit également que, u sera inférieur dans le cas centralisé que dans le cas décentralisé. Puisque $G-uG_u$. est décroissante en u et que G_u est négatif, on voit, en comparant (17) et (17') que la croissance de long terme du capital humain (et, de là, de la consommation et du capital physique *per capita*) sera supérieure dans le cas centralisé que dans l'économie décentralisée.

L'adoption d'une technologie concave et non strictement croissante en $1-u$ se solde-t-elle par des taux de croissance plus élevés? Dans le cas d'une économie décentralisée, on peut voir avec (17') que le taux de croissance de long terme du capital humain est une fonction croissante de $G-uG_u$. Puisque G est une fonction concave, on peut poser :

$$G(u^*) \leq G(u) + G_u(u)\,(u^*-u)$$

soit $G(u) - uG_u(u) \geq 1 - G_u(u)u^* \geq 1$ puisque $G_u(u) \leq 0$ comme nous l'avons illustré précédemment (tous les u où $G_u(u) > 0$ étant dominés). Or $G - uG_u$ atteint son minimum avec la fonction linéaire $1-u$ comme chez Lucas. La solution décentralisée avec une technologie strictement concave donnera donc toujours une croissance supérieure.

Pour le cas centralisé, on réarrange (18) afin d'obtenir :

$$G - u\,G_u = \sigma G - \frac{(1-\beta)\,(\rho - \lambda)}{\delta\,(1-\beta+\gamma)} \geq 1$$

l'égalité se produisant dans le cas où G est linéaire. Ceci entraîne que le taux de croissance du capital humain avec une technologie concave est toujours supérieure au cas linéaire.

$$v^* = \delta\,G \geq \sigma^{-1}\left[\delta - \frac{(1-\beta)\,(\rho - \lambda)}{(1-\beta+\gamma)}\right]$$

Ce qui confirme notre intuition graphique illustrée précédemment.

2.5 Discussion de l'état stationnaire

Dans un monde néo-classique traditionnel, sans externalité, on établit une équivalence entre les économies centralisée et décentralisée. Cette équivalence suggère l'inefficience de toute politique cherchant à affecter la croissance puisque l'optimum est atteint en équilibre concurrentiel.

En présence d'une externalité, ce n'est plus le cas. Il est clair qu'une politique exogène qui inciterait les agents concurrentiels à opter pour une règle de conduite de long terme u inférieure (c'est-à-dire d'encourager les agents à consacrer plus de temps à la constitution de capital humain) affecterait positivement la croissance en rapprochant cette conduite de celle qui serait dictée par un planificateur central.

Il revient de noter que cette externalité n'est pas la seule présente dans le modèle. La technologie de formation du capital humain (équation 4) masque en effet la présence d'une externalité très importante. À mesure que la population croît, chaque nouvelle cohorte commence sa vie avec un niveau de capital humain proportionnel à celui de ses géniteurs. Comme le soulignent Buiter et Kletzer (1991), il s'agit bien là d'une externalité. On notera (équations 17 et 17') que le taux de croissance de long terme du capital humain par travailleur est une fonction croissante du taux de croissance exogène de la population.

Ce transfert de capital humain d'une génération à l'autre n'affecte pas la dotation des parents car le capital humain est *non-rival*, c'est-à-dire que plusieurs peuvent en faire un parfait usage en même temps. Cependant, les parents ne reçoivent aucune compensation pour cette externalité qu'ils procurent à leurs descendants, le capital humain étant ici considéré comme *non-excludable*, c'est-à-dire que les parents, détenteurs de capital humain, ne peuvent contrôler l'emploi qu'en feront leur progéniture (cf. Romer (1990) pour une discussion sur les biens *non-rival* et *non-excludable*).

Si l'on pouvait compenser les géniteurs par de la production future pour un effort supplémentaire en accumulation de capital humain, affectant le degré de capitalisation de la génération suivante, on pourrait obtenir une solution supérieure à celle que nous avons développée. Dans le modèle d'économie fermée développé précédemment, avec une contrainte de ressources stricte et sans possibilité d'emprunt, c'est impossible mais l'intérêt d'une telle approche est évident. Buiter et Kletzer exploitent ces possibilités. Dans leur modèle, une solution optimale au sens de Pareto commande des autorités qu'elles subventionnent les agents pour qu'ils accroissent leur niveau d'éducation, en finançant cette opération par des emprunts ou des transferts fiscaux entre générations.

2.6 La conséquence sur les salaires

L'externalité ajoutée par Lucas est, par contre, à la source d'un phénomène sur les salaires par unité d'efficience qui n'a pas d'équivalent dans ceux d'Uzawa et de Buiter et Kletzer. Les implications à ce chapitre du modèle de Lucas ne sont vraiment intéressantes qu'en économie ouverte aussi je les discute dans ce contexte.

Soit deux économies[7]: la première, notée r pour riche, étant initialement mieux dotée en K_0 et h_0 que la seconde, notée p pour pauvre. Toutes deux possèdent une la même fonction de production néo-classique, homogène de degré un dans ses arguments, K, le capital physique et L la main-d'œuvre dont l'offre est inélastique. La mobilité internationale des capitaux commande que les taux d'intérêts soient égaux dans ces deux économies, ce qui revient à poser que la productivité marginale du capital y est la même :

$$F_K(K_r, L_r) = F_K(K_p, L_p)$$

La fonction de production néo-classique étant homogène de degré un, ses dérivées sont homogènes de degré zéro, ce qui nous permet d'écrire :

$$F_K(K_r/L_r, 1) = F_K(K_p/L_p, 1) = f'(k)$$

f' étant inversible, on voit tout de suite que le capital par tête k de même que l'output par travailleur $f(k)$ seront les mêmes dans les deux pays. Les salaires, soit,

$$F_L(K_r, L_r) = f(k) - kf'(k) = F_L(K_p, L_p)$$

seront aussi égaux.

---

7. Je m'inspire ici de la présentation faite par Romer (1989).

En introduisant, à l'instar d'Uzawa, une forme de progrès technologique, associé au stock de capital humain, augmentant l'efficience du facteur non mobile (l'équivalent du progrès technologique neutre au sens de Harrod), l'égalité des taux d'intérêt entraîne que le long d'une croissance équilibrée :

$$F_K(K_r, L_r h_r) = F_K(K_p, L_p h_p)$$

$$f'(k_r/h_r) = f'(k_p/h_p)$$

Ceci n'est possible que si k et h croissent au même taux constant. Les valeurs en t de k et de h dépendant des conditions initiales, l'output *per capita* sera toujours supérieur dans le pays initialement le mieux doté :

$$F(k_r, h_r) > F(k_p, h_p)$$

et les salaires y seront plus élevés :

$$F_h(k_r, h_r) > F_h(k_p, h_p)$$

Typiquement, les travailleurs de l'économie riche sont mieux dotés en unités d'efficience, c'est-à-dire qu'ils sont plus productifs par unité de temps, et sont conséquemment mieux payés. Cependant, à compétences égales, les ouvriers reçoivent la même rétribution qu'ils travaillent dans le pays riche ou dans le pays pauvre, c'est-à-dire le même montant par unité d'efficience apportée à la production :

$$f'(k_r/h_r) = f'(k_p/h_p)$$

$$f(k_r/h_r) - (k_r/h_r)f'(k_r/h_r) = f(k_p/h_p) - (k_p/h_p)f'(k_p/h_p)$$

$$F_2(k_r/h_r, 1) = F_2(k_p/h_p, 1)$$

où F_2 est la dérivée de F par rapport à son second argument.

En introduisant, à l'instar de Lucas, une externalité $h^{\gamma}{}_a$ dans la fonction de production, on a toujours l'équilibre des taux d'intérêts commandée par la mobilité internationale du capital.

$$F_K\,(K_r\,,L_r\;h_r,\;h_r{}^{\gamma}\,) = F_K\,(K_p\;,\;L_p\;h_p\;h_p{}^{\gamma})$$

$$F_1\;(k_r\;/h_r,\;h_r{}^{\gamma}\,) = F_1\;(k_p\;/h_p,\;h_p{}^{\gamma}\,)$$

Puisque la valeur en t de l'externalité est plus élevée dans le pays le plus avancé, l'égalité n'est possible que si le capital par unité d'efficience est plus élevé dans cette même économie (F_1 est décroissante dans son premier argument), soit exactement ce que commande le modèle de Lucas en économie fermée alors que ce ratio croît au taux $\gamma/(1-\beta)$ le long d'un équilibre stationnaire. En quel cas, la rétribution des travailleurs, par unité d'efficience, est plus élevée dans le pays riche que dans le pays pauvre :

$$F_2\;(K_r\;/h_r,\;L_r\;/h_r,\;h_r{}^{\gamma}\,) > F_2\;(K_p\;/h_p,\;L_p\;/h_p,\;h_p{}^{\gamma}\,)$$

et ce pour deux raisons. D'abord parce que l'externalité accroît la productivité générale de l'économie et ensuite parce qu'elle entraîne une capitalisation supérieure. En clair, cela explique pourquoi, par exemple, à compétences égales, un ouvrier spécialisé américain est mieux payé qu'un ouvrier spécialisé mexicain. L'ouvrier américain bénéficie à la fois d'une externalité positive $h_r{}^{\gamma}$ supérieure (des collègues de meilleure qualité améliorant sa propre productivité) et des retombées en productivité d'une capitalisation supérieure (de meilleurs équipements, qui accroissent également sa productivité, dont les possesseurs espèrent un meilleur rendement à cause de la présence d'une main d'œuvre de haut calibre). L'ouvrier mexicain, quant à lui, améliorerait son sort en travaillant aux États-Unis. Lucas explique ainsi les pressions migratoires du Sud vers le Nord. Dans ma version de ce modèle, l'efficacité de la technologie générant le capital humain est strictement améliorée, cela doit donc accentuer cette tendance.

2.7 Discussion de la dynamique de transition

S'il est assez aisé de calculer les taux de croissance de long terme, la forme différentielle du système, à l'équilibre stationnaire, nécessite une écriture assez lourde. Quant à l'analyse des mécaniques de transition, elle dépasse largement mon entendement des systèmes dynamiques... Pour s'en convaincre, prenons le modèle décentralisé de Lucas, dans sa forme la plus simplifiée, avec une utilité logarithmique et une technologie d'accumulation du capital humain linéaire en u, soit $\dot{h} = \delta h(1-u)$. On peut trouver la forme différentielle du système en résolvant (8) pour u, soit :

$$u = \frac{K}{hN}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\frac{(1-\beta)Ah^{\gamma}N}{\delta}\right)^{1/\beta}$$

$$= \frac{K}{hN} z^{1/\beta} \text{ où } \quad z = \frac{\theta_1}{\theta_2}\frac{(1-\beta)Ah^{\gamma}N}{\delta}$$

En subtituant cette expression dans (2), (4), (7) et (15), la forme différentielle du système s'écrit alors :

$$\dot{K} = AKh^{\gamma}z^{(1-\beta)/\beta} - N/\theta_1$$

$$\dot{\theta}_1 = \theta_1(\rho - \beta Ah^{\gamma}z^{(1-\beta)/\beta})$$

$$\dot{h} = \delta h\,(1 - z^{1/\beta}K/hN)$$

$$\dot{\theta}_2 = \theta_2\,(\rho - \delta)$$

Ce jeu d'équations différentielles non linéaires ne connaît pas de solution analytique. Une approche courante en théorie de la croissance consiste alors à procéder à une linéarisation autour de l'équilibre stationnaire, alors que les variables sont stables. Ici, cependant, toutes les variables sont sans cesse en mouvement, quoiqu'elle croissent éventuellement à des taux constants lorsque

$t \to \infty$. Dans les modèles avec croissance exogène, cette difficulté est contournée en normalisant les variables endogènes par la variable exogène générant la croissance (normalisation par la population, par exemple, dans le modèle de Solow). Dans ce modèle de croissance endogène, nous ne pouvons procéder à cette normalisation car la variable qui génère la croissance, h, voit aussi son taux de croissance déterminé de manière endogène en tout temps.

Si l'on supprime l'externalité de la fonction de production en posant $\gamma = 0$, on retrouve le modèle d'Uzawa. En ce cas, ce système peut se réduire à un jeu de trois équations seulement (par exemple, en $x = K/hN$, en $y = \theta_1 h$ et en z) puisque le capital par tête et le capital humain croissent alors au même taux à long terme. Uzawa parvient alors, non sans peine, à caractériser la dynamique de transition. Les choses se compliquent davantage lorsque $\gamma \neq 0$. De fait, la dynamique de transition du modèle de Lucas n'est pas, à ce jour, élucidée formellement.

3.0 Conclusion

J'ai développé une version légèrement modifiée du modèle de Lucas en retenant une famille de fonctions d'accumulation de capital humain concave et non strictement décroissante en u. Avec une spécification exogène différente, j'ai pu établir que, toutes choses étant égales par ailleurs, la croissance dans une économie disposant d'une telle technologie serait supérieure à celle observée dans le modèle de Lucas.

Ce résultat était tout à fait prévisible puisqu'en optant pour cette technologie, j'augmentais les possibilités de cette économie sans que cela ne soit compensé nulle part ailleurs dans le modèle. Mais si j'ai pu établir des comparaisons entre cette famille et la fonction linéaire de Lucas (qui en constitue un cas limite) dans le cas où l'élasticité de substitution intertemporelle est égale à un, il est apparu que les résultats ne sont pas facilement discernables pour deux fonctions concaves quelconques.

Bien que j'ai pu facilement déterminer les taux de croissance de long terme et en discuter les implications dans un contexte d'économie ouverte, l'analyse de la dynamique de transition au voisinage de l'équilibre demeure par trop formidable pour être menée à bien dans le cadre de ce rapport de recherche.

4.0 Appendice: Une caractérisation plus sophistiquée du processus d'accumulation de capital humain

Les travaux de Uzawa et de Lucas n'épuisent pas les possibilités de modélisation du processus d'accumulation du capital humain dans un modèle de croissance économique. J'ai travaillé dans cet esprit à explorer d'autres formulations. Malheureusement, les résultats préliminaires que j'ai obtenus jusqu'à présent sont plutôt décevants. Je les expose toutefois ici en appendice.

Divers mécanismes d'accumulations du capital humain dans un contexte dynamique peuvent affecter la croissance de manière non-triviale. Le temps étant naturellement une ressource finie à chaque période (jour, année ou espace d'une vie), son allocation entre les divers mécanismes d'accumulations de capital humain doit faire l'objet d'une optimisation dynamique par les agents. Dans notre modèle, cette optimisation était sans grande conséquence puisque la technologie globale G unissant les mécanismes Λ et Γ était fixée de façon exogène une fois pour toute. Le problème avec cette formulation, c'est qu'elle néglige souvent la nature même, très particulière, du capital humain et de ses processus d'accumulations.

Mais il me semble que ce type de capital doit se prêter à une caractérisation plus complexe. Le degré de capital humain que dispose une économie dépend nécessairement de traditions difficiles à établir. Si l'on suppose que le capital humain est acquis par deux processus concurrents (parce qu'étant exclusifs) comme l'éducation et l'apprentissage au travail, on peut se demander si cette interaction ne pourrait pas conduire une économie à croupir en subissant le contre-coup d'une sous-capitalisation humaine. Je pense à un effet de «trappe de pauvreté» où une contrainte de subsistance empêche une économie de développer son plein potentiel.

La présence d'apprentissage au travail peut augmenter les possibilités de production immédiate mais diminuer celles de long-terme si un fort niveau de capital humain n'est réalisable qu'en fréquentant l'école. Une économie pauvre pourrait être conduite à investir massivement ses énergies dans la production de biens physiques (retirant ainsi l'essentiel de son capital humain de l'apprentissage au travail) afin de rencontrer ses préférences pour la consommation immédiate, et ce, au détriment des possibilités de production de long-terme.

Afin d'étudier les conséquences de la concurrence de deux processus d'accumulation de capital humain lorsque l'arbitrage entre ceux-ci est affecté par l'état courant de l'économie, j'ai cherché à bâtir un modèle qui garderait la trace de ces stocks. À mon plus grand dam, ce modèle n'est pas adéquat et ne permet pas la détermination d'états stationnaires. Néanmoins, je le développe ici puisque qu'un bon rapport de recherche ne veut pas nécessairement signifier, je crois, que la recherche a été fructueuse. Cette recherche me servira de garde-fou sur lequel je compte m'appuyer pour éventuellement développer un jour une approche plus réussie.

4.1 Un modèle à deux biens de capital humain

Je reprends essentiellement le modèle d'Uzawa, soit le même que précédemment sans la présence de l'externalité dans la fonction de production, avec comme seule modification que le stock de capital humain est scindé en deux sous-stocks, l'un issu de l'apprentissage au travail, l'autre des activités académiques, chaque unité de capital humain produite étant déterminée une fois pour toute.

Les consommateurs maximisent leur utilité séparable dans leur temps tirée de la consommation :

$$\text{Max} \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c)$$

où U est CRRA.

Le bien composite de consommation et de capital physique est produit selon une technologie à rendements constants où Q est homogène de degré un en k et Hu. On a la contrainte de ressources :

$$\dot{k} = Q(k, H(h_1,h_2)u) - c$$

où k et c représentent respectivement le stock de capital physique et la consommation *per capita*, h_1 est le stock de capital humain issu de l'apprentissage au travail et h_2 est le stock de capital humain issu de l'éducation. H est une fonction Cobb-Douglas de transformation des deux types de capital humain dans la production. Les deux types de capital humain sont donc essentiels à la présence de H dans la production. Le taux de croissance de la population est posé nul pour simplifier et il n'y a pas de dépréciation des différents types de capital.

Le capital humain issu de l'apprentissage au travail est acquis en tout t en fonction de la proportion du temps u allouée à la production et du stock de capital humain existant. Les deux types de capital humain peuvent accroître h_1 en fonction d'une fonction F homogène de degré un.

$$\dot{h}_1 = F(h_1,h_2)\, u$$

$$\frac{\dot{h}_1}{h_2} = f(h)\, u$$

où $h = h_1/h_2$

De même, la technologie G permettant l'acquisition de nouveau capital de type académique est-elle fonction des deux types de capital humain :

$$\dot{h}_2 = G(h_1, h_2)\,(1-u)$$

$$\frac{\dot{h}_2}{h_2} = g\,(h)\,(1-u)$$

Pour que ce problème ait une solution, il faut que l'intégrale du maximand converge. Ceci n'est possible que dans la mesure où le capital humain H effectif dans la production du bien de consommation ne puisse croître trop rapidement. Essentiellement, $\dot{H}$ doit être d'ordre égal ou inférieur à un en H.

En tout t, h évolue selon l'expression :

$$\frac{\dot{h}}{h} = F(1, h^{-1})u - G(h, 1)\,(1-u) \tag{20}$$

En tout t, le taux de croissance de H peut être exprimé en fonction de u et de h :

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{H}}{H} &= \frac{H_1\dot{h}_1 + H_2\dot{h}_2}{H} \\
&= \frac{H_1 h_1}{H} h_1^{-1} F u + \frac{H_2 h_2}{H} h_2^{-1} G(1-u) \\
&= \sigma F(1, h^{-1})\, u + (1-\sigma)\, G(h, 1)\,(1-u)
\end{aligned}$$

où σ représente la part constante de l'apprentissage au travail dans la production. Pour un h donné, maximiser sur u cette expression donne la condition de premier ordre :

$$\sigma F(1, h^{-1}) - (1-\sigma) G(h, 1) = 0$$

décroissante en h. Si la condition est égale à zéro, u est libre. Sinon, la contrainte peut ou ne pas serrer selon la valeur de h. Le u optimal sera 0 ou 1 selon le cas. Si h est trop élevé, alors la condition de premier ordre est négative, on a passé l'optimum. Alors $u = 0$ et,

$$\frac{\dot{h}}{h} = - G(1,h) < 0$$

h décroît. Si, par contre, h est trop faible, la contrainte est serrante et l'optimum réalisable est atteint en consacrant tout le temps à la production. $u = 1$ et,

$$\frac{\dot{h}}{h} = F(1,h^{-1}) > 0$$

h croît. Isolé, ce sous-système converge donc vers la seule valeur h finie telle que la contrainte de maximisation soit respectée et la croissance de H est bornée.

Si l'on emploie la technique du hamiltonien pour résoudre ce problème, on a :

$$H = U(c) + \theta_0(Q-c) + \theta_1 Fu + \theta_2 G(1-u)$$

qui donne les conditions nécessaires suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c) - \theta_0 = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \theta_0 Q_2 H + \theta_1 F - \theta_2 G = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \theta_0 Q_1 = \rho\theta_0 - \dot{\theta}_0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_1} = \theta_0 Q_2 H_1 u + \theta_1 F_1 u + \theta_2 G_1 (1-u) = \rho\theta_1 - \dot{\theta}_1 \tag{24}$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_2} = \theta_0 Q_2 H_2 u + \theta_1 F_2 u + \theta_2 G_2 (1-u) = \rho\theta_2 - \dot{\theta}_2 \tag{25}$$

auxquelles s'ajoutent les trois contraintes dynamiques de ressources et les usuelles conditions de transversalité pour chacun des types de capital. À l'équilibre stationnaire, les différentes variables du modèle doivent croître à des taux constants. En exprimant la condition (21) en taux de croissance et en la substituant dans (23), on trouve, comme à l'habitude que le taux de croissance de la consommation, noté κ, est égal à la différence entre la productivité marginale du capital et le taux d'escompte, pondérée par le coefficient de substitution intertemporelle.

$$\kappa = \frac{Q_1(k,Hu) - \rho}{\sigma} = \frac{q'\left(\frac{k}{Hu}\right) - \rho}{\sigma} \tag{26}$$

Le long d'un sentier équilibré, cette croissance devrait être stationnaire. En différentiant cette expression en un point de l'équilibre stationnaire, où u est supposé constant, on a,

$$q''\frac{K}{Hu}(\phi - \nu) = 0 \tag{27}$$

où ϕ et ν sont les taux de croissance de long-terme du capital physique du capital humain. L'expression indique que ces taux doivent être égaux. Puisque ν peut s'écrire comme une fonction de h et u, une solution d'équilibre de croissance pour ν et u implique que h est constant et donc que les taux de croissance des différents types de capital humain sont aussi constants. En réarrageant 20, on obtient le u optimal de long terme alors que h est constant

$$u = \frac{h\,g(h)}{f(h) + h\,g(h)} \tag{28}$$

En substituant cette expression dans l'une ou l'autre des équations d'accumulation de capital humain, on obtient le taux de croissance ν de l'économie :

$$\nu = \frac{f(h)\,g(h)}{f(h) + h\,g(h)} \tag{29}$$

Pour caractériser ce ratio h optimal de long terme, on réécrit (24) et (25) sous les formes suivantes en notant que les dérivées partielles de F, G et H (on note $\eta = H/h_2$) sont homogènes de degré zéro et peuvent être exprimées en fonction du seul argument h :

$$u\,\theta_0 Q_2 \theta_1^{-1} \eta_1 + u f_1 + (1-u)\,g_1 \frac{\theta_2}{\theta_1} = \rho - \frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} \tag{24a}$$

$$u\,\theta_0 Q_2 \theta_2^{-1} \eta_2 + u f_2 \frac{\theta_1}{\theta_2} + (1-u)\,g_2 = \rho - \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} \tag{25a}$$

On soustrait maintenant ces deux équations en substituant (22), telle que,

$$\theta_0 Q_2 = \frac{\theta_2}{\eta}\left(g - f\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \tag{22a}$$

pour obtenir, en notant σ la part constante du capital humain issu du travail dans la transformation H et θ le ratio des multiplicateurs :

$$u\,(\sigma\,\theta^{-1}\,h^{-1} - (1-\sigma))\;(g - f\,\theta) \;+\; u\,(f_1 - f_2\,\theta) \;+\; (1-u)\,(g_1\,\theta^{-1} - g_2) \;=\; -\frac{\dot{\theta}}{\theta} = 0 \tag{30}$$

Cette équation n'est fonction que de h, de u et du ratio des multiplicateurs. Le long d'un sentier stationnaire, chaque prix ombre croît à un taux constant, ce qui implique que leur ratio est constant. En différentiant cette expression, on obtient naturellement zéro de chaque côté de l'expression de sorte qu'on ne peut en tirer davantage d'information. On n'a que deux équations, (28) et (30) pour déterminer trois variables de long terme, u, h et θ.

De fait, il appert que la base de mes difficultés réside dans le fait que mon modèle est sous-déterminé. Une fois que l'arbitrage entre l'allocation des ressources temporelles entre la production de biens physiques et la production de capital humain au sens large a été faite, il ne reste plus de marge de manœuvre pour optimiser l'arbitrage entre les différents modes de production de capital humain.

Cette malheureuse conclusion n'entraîne pas qu'il faille abandonner toute recherche conceptuelle dans ce sens. Mon approche étant concentrée essentiellement sur les décisions des agents travailleurs-consommateurs (le comportement des firmes est ici primaire, elles ne font qu'utiliser des facteurs à leur rendement marginal sans chercher à diversifier leur production ou à se regrouper en coalitions), il faudrait repenser le problème depuis le début pour pouvoir aller plus loin. Dans le modèle d'Uzawa, sans externalité, le taux de croissance de long terme de l'économie ne dépend éventuellement que du taux d'escompte subjectif et de la technologie, une très nette amélioration par rapport aux modèles de croissance à un type de capital. Ce progrès n'était possible que par l'introduction d'une nouvelle variable de choix u dont la pertinence apparaît tout à fait naturelle. Il ne s'agit pas simplement de « faire choisir » à l'agent plus de choses (l'introduction du loisir dans la fonction d'utilité, par exemple, n'affecte pas grand chose), il faut encore considérer qu'il dispose de plus d'outils pour le faire. Chercher à sophistiquer les décisions des agents travailleurs-consommateurs nécessite d'élargir davantage l'espace des commandes, ce que nous n'avons pas fait ici.

Bibliographie

Barro, Robert J., « Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth », *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, no. 5, pp. S103-S125.

Blanchard, Oliver J. et Fisher, Stanley, « Consumption and Investment : Basic Infinite Horizon Models », in *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, 1989, pp. 37-90.

Buiter, Willem H. et Kletzer, Kenneth M., « Persistent Differences in National Productivity Growth Rates with a Common Technology and Free Capital Mobility. The Roles of Private Thrift, Public Debt, Capital Taxation and Policy towards Human Capital Formation », janvier 1991, *Yale University, Economic Growth Center Discussion Paper*, no 627.

Ehrlich, Isaac, « The problem of Development: Introduction », *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, no. 5, pp. S1-S11.

King, Robert G., et Rebelo, Sergio T., « Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model », *NBER Working Paper Series*, novembre 1989, no 3185.

Lucas, Robert E. Jr, « On the Mechanics of Economic Development », *Journal of Monetary Economics*, juillet 1988, no 22, pp. 3-42.

Lucas, Robert E. Jr, « Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries? », *American Economic Review*, mai 1990, vol. 80, no 2, pp. 92-96.

Rebelo, Sergio T., « Long Run Policy Analysis and Long Run Growth », *NBER Working Paper Series*, avril 1990, no 3325.

Romer, Paul M., « Are Nonconvesities Important for Understanding Growth? », *American Economic Review*, mai 1990, vol. 80, no 2, pp. 97-103.

Romer, Paul M., « Capital Accumulation in the Theory of Long-Run Growth », in *Modern Business Cycle Theory*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1989, pp. 51-127.

Romer, Paul M., « Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization », *American Economic Review*, mai 1987, vol. 77, no 2, pp. 56-62.

Romer, Paul M., « Increasing Returns and Long-Run Growth », *Journal of Political Economy*, 1986, vol. 94, no 5, pp. 1002-1037.

Solow, Robert M., « A Contribution to the theory of Economic Growth », *THe Quaterly Journal of Economics*, février 1956, vol. 70, pp. 65-94.

Uzawa, Hirofumi, « Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth », *International Economic Review*, janvier 1965, vol. 6, no 1, pp. 18-31.