Université de Montréal

TEST DE L'HYPOTHÈSE DE REVENU PERMANENT ET ANTICIPATIONS RATIONNELLES AVEC PRÉSENCE D'UNE RUPTURE DANS LA FONCTION DE TENDANCE

fait par

Rachida OUYSSE

dirigée par

René GARCIA & Serena NG

second lecteur

Francisco Ruge-MURCIA

Département des Sciences Économiques
Faculté des Arts et des Sciences

Rapport de Recherche présenté à la Faculté des Études Supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maitrise (Msc)
En Sciences Économiques

Juillet, 1997

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur René Garcia et le professeur Serena NG, directeurs de ce rapport de recherche, pour leurs conseils précieux et leur disponibilité constante, je leurs témoigne toute ma gratitude.

Je présente aussi mes remerciements au professeur Francisco Ruge-Murcia d'avoir accepté d'être le second lecteur de ce rapport de recherche.

A,
Mes parents,
Frères & Soeurs...

TABLE DES MATIÈRES

0.1. INTRODUCTION:

L'hypothèse de revenu permanent et anticipations rationnelles est d'une importance majeure dans la littérature traitant de la relation entre le revenu permanent et la consommation. Cette hypothèse qui a été proposée pour la première fois par Hall (1978) et Sargent (1978), assume qu'au delà de la relation classique entre la consommation et le revenu courant mesurée par la propension marginale à consommer, il y a une relation de proportionnalité entre la consommation et le revenu permanent sous l'hypothèse de la rationnalité des agents consommateurs. Dans leurs papiers, Hall et Sargent testent cette hypothèse en analysant la relation engendrée par cette dernière entre la consommation, la consommation retardée et la révision dans le revenu permanent. Cependant les deux auteurs arrivent à des conclusions empiriques conflictuelles, Hall confirme l'hypothèse alors que Sargent la rejette.

Flavin (1981) reprend le test avec une nouvelle formulation des implications de cette hypothèse sur les relations entre la consommation, le revenu permanent, le revenu courant et les retards de ce dernier. Elle arrive à la conclusion d'un rejet confirmé de cette hypothèse.

L'idée derrière le présent travail est de voir l'effet d'un " break " dans la fonction de tendance sur les conclusions du test, vu que l'effet d'un tel changement a déjà été confirmé dans d'autres tests notament le test de racine unitaire dans le papier de Perron (1993).

Dans le présent rapport, le travail de simulation soutient le fait que dans un processus avec "break", ignorer ce dernier donne pratiquement toujours un rejet, alors que le considérer donne une évidence en faveur de l'hypothèse nulle. Le travail empirique, ne fera qu'affirmer ce constat.

Dans une première partie, sera présentée une définition de l'hypothèse de revenu permanent et anticipations rationnelles; dans la seconde on verra un bref survol du papier de Flavin puisque toute la formulation adoptée dans ce rapport est empruntée du travail de celle-ci; la troisième partie soulevera la motivation de l'étude, apèrs on passera au travail de simulation dans la quatrième partie; dans la cinquième partie, on présentera les résultats empriques où l'on testera la racine uniaire et l'existance de changement dans la fonction de tendance et finalement, on verra le test de l'hypothèse avec break dans la tendance.

0.2. DÉFINITION ET IMPLICATIONS DE L'HYPOTHÈSE DE REVENU PERMANENT ET ANTICIPATIONS RATIONNELLES:

L'hypothèse jointe de revenu permanent et anticipations rationnelles comporte en fait deux sous-hypothèses :

(a)- Hypothèse de revenu permanent: les agents consommateurs ajustent leurs consommations à leurs ressources futures intertemporelles et non à leur revenu mesuré d'une période arbitraire donnée.

En effet, c'est le revenu permanent que les agents considèrent pour gérer leurs dépenses de consommation; ce revenu permanent, dit aussi valeur annuelle de la richesse nette, consiste en une richesse réelle courante, w_t, plus la valeur présente des revenus salariaux des périodes courante et futures x_{t+i}, i = 0, 1, 2, 3,....∞

Les revenus salariaux sont déterminés de façon exogène. Le fait que la trajectoire des revenus futurs n'est pas connue avec certitude, l'agent consommateur doit formuler ses plans de consommation sur la base d'un ensemble d'anticipations sur sa richesse future. Étant donné ces anticipations sur le revenu futur, à la période t, le revenu permanent peut être exprimer de la façon suivante:

$$^{1}y_t^p = r\left[w_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i}\right] \qquad (0.1)$$

y_t^p : revenu permanent calculé à la date t.
[2]r : taux de rendement réel.
w_t : richésse réelle au début de la période t
E_t : opérateur représentant la prévision à la période t.
x_{t+i} : revenu salarial reçu à la fin de la période $t+i$.
$E_t x_{t+i}$: revenu espéré pour la période $t+i$

.

(b)- Hypothèse d'anticipations rationnelles : les individus sont des agents intelligents et rationnels, ils exploitent toute l'information qui leur est disponible pour établir leurs prévisions à la date t; en effet, une fois la nouvelle information

[1]la formulation prise est celle de Flavin (1981)
[2]Le taux de rendement réel est constant par hypothèse.

arrivée, elle est incorporée immédiatement dans l'ensemble d'informations de la période t, et les anticipations sur le futur seront ainsi révisées à la lumière de cette nouvelle information.

Ces deux hypothèses considérées simultanément donnent l'hypothèse du revenu permanent et anticipations rationnelles PIREH (permanent income rational expectations hypothesis).

Étant donné que les anticipations sont rationnelles, le revenu permanent peut être vu comme un flux constant de ressources, qui peut être maintenu pour le restant de l'horizon futur de l'individu. Ainsi, une des propriétés caractérisant le revenu permanent est :

$$^{3}E_t y^p_{t+i} = y^p_t \tag{0.2}$$

Par ailleurs, le plus important postulat de cette hypothèse jointe, est que la consommation est proportionnelle au revenu permanent, en d'autres temes:

$$^{4}c_t = \beta y^p_t \tag{0.3}$$

Les implications de PIREH sont nombreuses et il y a plusieures façons de les exprimer, selon la formulation adoptée. Si la consommation est à chaque période proportionnelle au revenu permanent, et ce dernier, en retour représente, étant donné l'ensemble d'informations présentement disponiles, la meilleure estimation pour la richesse future des individus, alors la consommation courante devrait diverger de la consommation de la période passée par le montant de la révision dans le revenu permanent. En effet, la plus simple des implications est que la consommation retardée plus d'une période n'a pas de pouvoir prévisionnel sur la consommation courante, plus encore la consommation n'est reliée à aucune variable économique observée dans le passé, ainsi le revenu retardé sera sans pouvoir explicatif pour la consommation courante. Ceci s'explique par le fait que si la valeur précédente de la consommation incorporait toute l'information disponible à cette date, alors, les valeurs retardées du revenu actuel ne devraient pas apporter plus d'explication une fois incluse la consommation de la période précédente. Les

[3] voir appendice 1

[4] la forme la plus générale est : $c_t = \beta\ y^p_t + \mu_t$ où μ_t est la consommation transitoire, le fait de ne pas la considérer dans le présent travail ne change en rien les conclusions; β est le coefficient de proportionalité, Flavin prend le cas $\beta = 1$

approches utilisées par Hall et Sargent (1978) utilisent la propriété selon laquelle la révision dans le revenu permanent doit être non corrélée avec les variables retardées. Ainsi, pour Hall, une façon de tester PIREH est de tester si le processus de consommation est une marche aléatoire.

0.3. BREF SURVOL DU PAPIER DE FLAVIN:

Le papier de Flavin (1981), présente une autre façon de tester l'hypothèse de revenu permanent et anticipations rationnelles en analysant le rôle du revenu courant comme fournisseur de la nouvelle information et ainsi comme signal pour les changements dans le revenu permanent. Formellement, le modèle utilise une représentation moyenne mobile autorégressive (ARMA) pour le processus de revenu , dans laquelle, l'innovation représente la nouvelle information contenue dans le revenu courant observé. En se basant sur la réalisation de l'innovation dans le revenu courant, les individus révisent leurs anticipations sur leurs revenus futurs; ainsi la révision dans le revenu permanent va être proportionnelle à l'innovation dans le revenu courant.

Suivant cette approche; Flavin a spécifié une équation structurelle reliant le changement dans la consommation à la révision contemporaine du revenu permanent, et au changement dans le revenu courant.

Ainsi, tester l'hypothèse jointe du revenu permanent et anticipations rationnelles, revient à tester la signification des coefficients mesurant la sensibilité des variations de la consommation aux variations présentes et passées du revenu courant. Autrement dit :

H0 ={ revenu permanent et anticipations rationnelles} est équivalente à:

$$\text{H0} = \{c_t = y_t^p, E_t(x_{t-1} * \epsilon_t) = 0\}$$

x_{t-1} = élément de l'ensemble d'informations pour la période t.
ϵ_t = l'innovation à la date t.

Tester H0 serait équivalent à tester si les coefficients β_i figurant dans l'équation suivante sont statistiquement et/ou quantitativement insignifiants:

$$\Delta c_t = \mu_2 + \alpha\varepsilon_t + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \nu_t \tag{0.4}$$

Δc_t= changements de consommation.
Δy_t = changements de revenu courant.
ν_t = la nouvelle information de la période t.
μ = constante.

Au fait, le modèle utilisé par Flavin (1981) est un modèle à équations simultanées représenté par le système d'équations suivant:

$$y_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{p} \rho_i y_{t-i} + \epsilon_{1t} \tag{0.5}$$

$$\Delta c_t = \mu_2 + \alpha\epsilon_{1t} + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{t-i}\Delta y_{t-i} + \epsilon_{2t} \tag{0.6}$$

Les restrictions posées sur les β_i proviennent de cette formulation structurelle. L'idée encore est que sous l'hypothèse H0 l'information contenue dans les Δy_{t-i} a déjà été incorporée dans c_{t-1} et que seule ϵ_{1t}, qui est orthogonale à l'ensemble d'information Φ_{t-1}, peut être pertinent dans l'explication de la variation de la consommation. Ainsi les β_i devraient être statiquement et/ou quantitativement faibles. Le processus générateur des revenus est supposé être un AR(p): équation (5). Par construction le processus de revenu est donc hautement autocorrélé et le revenu observé y_t se compose d'une partie prévisible, étant donné l'information Φ_{t-1} et les coefficients estimés ρ_i, et une partie non prévisible ϵ_{1t}.

Suivant cette formulation une implication de l'hypothèse PIREH est que seule l'innovation pourrait apporter une explication pour le revenu. Une fois le revenu observé, la nouvelle information l'est aussi; ce qui fait que les agents vont mettre à jour leur ensemble d'informations. Cette dernière idée est très importante du fait qu'elle illustre le rôle du revenu comme signal de l'information et comme source de révisions dans le revenu permanent puisque les prévisions sont révisées à la lumière des changements dans l'ensemble d'information.

Les coefficients β_i sont aussi une mesure de l'"excess sensitivity" de la consommation par rapport au revenu. Cette notion est au fait une autre façon de voir les implications de PIREH; en effet la réponse de la consommation aux variations du revenu, en excès de celle attribuée à la révision dans le revenu permanent, doit être nulle ou insignifiante. Ainsi PIREH implique que l'"excess sensitivity" est nul.

LES RÉSULTATS DE FLAVIN (1981):

Flavin prend la série du revenu disponible par tête et la série de consommation des biens non-durables ajustées pour la saisonalité. Les deux séries sont exprimées en dollars constants. Elle considère que le processus du revenu est stationnaire autour d'une tendance exponentielle, et elle a adopté une représentation autorégressive pour le logarithme du revenu après en avoir enlevé une tendance linéaire. Le fait qu'une tendance a été introduite dans le processus du revenu, fait que sous l'hypothèse PIREH (proportionnalité de la consommation au revenu permanent), le processus de la consommation va contenir à son tour une tendance exponentielle. La série de consommation a été traitée de la même façon que celle des revenus.

La période prise par Flavin pour faire les transformations des données, prendre le logarithme et enlever la tendance, est de 1947:1 à 1979:1. Cependant pour avoir la représentation AR(8), il faudra considérer les variables retardées; c'est pour cela que la période retenue pour l'estimation est de 1949:3 jusqu'à 1979:1. Flavin a exprimé la forme réduite en fonction des paramètres structurels qu'elle a estimé par moindres carrés.

L'équation (0.6) peut être écrite sous la forme suivante mettant en évidence la relation entre la variation de la consommation et les retards du revenu:

$$^{5}\Delta c_t = \tilde{\mu}_2 + \sum_{i=1}^{8} \pi_i y_{t-i} + \nu_{2t} \tag{0.7}$$

Les résultats trouvés par Flavin sont les suivants:

(*) Coefficients de la tendance :
pour le log(revenu) = 0.00565259.
pour le log(consommation) = 0.0032616.

(*) Les valeurs estimées des coefficients sous l'hypothèse alternative sont présentées dans le tableau (1.1).

(*) Les résultats sous H0 (PIREH); c'est à dire avec les restrictions: $\beta_i = 0, i = 0, 1, 2, ..., 7$, sont présentés dans le tableau (1.2).

[5] Voir appendice 3.

$$\{\text{SOUS H0}\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{p} \rho_i y_{t-i} + \nu_{1t} \\ \Delta c_t = \tilde{\mu}_2 + \nu_{2t} \end{array} \right\}$$

(*) Le ratio de vraissemblance de l'hypothèse $\beta_i = 0, i = 0, 1, .., 8$ est distribué selon un chi-carré $\chi_{(8)}$. La valeur du ratio est de 27.024, étant donné la valeur critique tabulée pour un niveau de confiance 0.5% de 21.96, on a une évidence statistique au profit de l'"excess sensitivity" de la consommation aux changements du revenu et contre l'hypothèse du revenu permanent et anticipations rationnelles.

0.4. MOTIVATION DE L'ETUDE:

On a vu que le papier de Flavin considère que le processus générateur des revenus,pris en logarithme, est stationaire autour d'un "trend" linéaire dont le niveau ne change pas.

Le modèle est le suivant :

$$y_t = \mu + \alpha t + \tilde{y}_t + \eta_t$$

avec

$\tilde{y}_t$: partie stochastique.

$\mu + \alpha t$: partie déterministe.

$$\eta_t \sim BB(0, \sigma^2)^6$$

Un tel modèle suppose que α et μ sont invariants quel que soit la date t. Une des implications de cette formulation est la suivante: toutes les variations inexpliquées par la fonction de tendance et/ou la partie autorégressive sont attribuées au bruit η_t.

Cependant, des travaux faits par Box et Tiao (1975), montrent que les changements aberrants peuvent être séparés du bruit et ainsi expliqués par la partie déterministe. Ces variations sont incluses dans la tendance en permettant des changements dans la moyenne μ (c'est le cas de "crash model" où le changement se produit dans le niveau de façon soudaine) et/ou dans la pente α.

[6]BB: Bruit blanc; un processus qui satisfait: $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = \sigma^2$ et $E(\eta_t \eta_\tau) = 0$ pour $t \neq \tau$.

Vogelsang & Perron (1994), évoquent les effets de ces ruptures dans la fonction de tendance sur les tests de racine unitaire. Une de leurs conclusions est que le fait empiriquement fréquent, de ne pas rejeter l'hypothèse de racine unitaire, est consistant avec la possibilité de stationnarité du processus autour d'une fonction de tendance dont le niveau et/ou la pente subissent au moins un changement.

L'idée est qu'ignorer ces changements dans la partie déterministe du processus, a une grande chance d'intoduire une racine unitaire dans la partie stochastique avec toutes les implications qui en découlent. La question qui se pose est alors la suivante : si les ruptures dans la fonction de tendance ont de tels effets sur les statistiques des tests reportés dans le papier de Vogelsang & Perron, alors des effets similaires ne seraient-ils pas source de distortion pour le test d'hypothèse fait par Flavin? Le but est donc de vérifier ce constat. Autrement dit, voir si le rejet de H0 par Flavin est réellemet dû au fait que celle-ci est fausse, ou bien c'est à cause d'une mauvaise spécification du modèle.

0.5. TRAVAIL DE SIMULATION: EXPÉRIENCE DE MONTE CARLO:

Avant de traiter les données de Flavin, on va chercher une évidence théorique. Pour cela, un travail de simulation est fait de la manière suivante:

On générera une série de données pour le revenu à partir d'un processus autorégressif d'ordre p=8 avec une fonction de tendance dans laquelle on introduit une rupture dans le niveau. Pour voir l'effet de l'oubli du "break" sur les conclusions du test de l'hypothèse H0 de PIREH; on estimera et construira le modèle sous H0 avec et sans break. Puis on testera pour l'hypothèse nulle.

DÉSCRIPTION DES MODÈLES CONSTRUITS:

Le processus générateur des données est le suivant:

$$y_t = u + \lambda t + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \eta_t \qquad (0.8)$$

$$t = 1, 2, ..., T(= 150)$$

$$\eta_t \sim N(0,1)^7$$

avec: $u = u_1$ si $t < d$ et $u = u_2$ sinon; d est la date du break.

Dans une première partie où le "break" est ignoré; c'est à dire $u = u_1 = u_2$, on enlève la tendance en faisant une régression du logarithme du revenu sur une constante et sur la tendance pour toute la série de revenu. Après on estime un modèle AR(8) par une régression de la variable y_t sur ces retards qui vont jusqu'à l'ordre $p = 8$. Sous H0, on construit la série des consommations qui vont être égales aux revenus permanents. Le revenu permanent est calculé à partir de l'équation (1), sauf que l'on va fixer un horizon de prévision κ (on prend κ=20) puisqu'on ne peut pas sommer à l'infini. Les anticipations rationnelles vont être remplacées par les prévisions à la base du modèle AR(8) estimé. Ainsi le revenu permanent sera le suivant:

$$y_t^p = r\left[\sum_{i=0}^{\kappa}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1}\widehat{y}_{t-i}\right]$$

on considère que la richesse initiale $\omega_t = 0$ et que

$$\widehat{y}_{t-i} = u + \lambda(t-i) + \sum_{j=1}^{8}\phi_{t-i-j}\widehat{y}_{t-i-j} \tag{0.9}$$

$\widehat{y}_t$ = prévision du revenu pour la période t.

Remarquons que le terme du bruit n'apparaît pas dans (0.9) car la prévision du bruit est nulle.

Le taux d'intérêt pris est la moyenne sur la période 47:1 à 79:1 des rendements sur les bons du Trésor à trois mois.

Disposant de la série des consommations; on peut faire le test de l'hypothèse nulle, à savoir celle du revenu permanent et anticipations rationnelles. Le test est

[7] Loi normal de moyenne zéro et de variance égale à l'unité.

fait en estimant les paramètres des équations (0.4) et (0.5) par la méthode des moindres carrés indirects (ou FIML[8]).

Dans une seconde partie; on prend en considération le changement de niveau. On suppose que le changement se produit à une date donnée T_b qu'on connait. Dans ce travail; la date du "break " $T_b = 0.5T_b$ avec T nombre d'observations ($T = 150$). On procède selon la *même* démarche que dans la première partie, sauf que la régression pour enlever la tendance va contenir une variable dummy:

DUM(t) = 1 si $t > T_b$

La régression pour enlever la tendance sera donc:

$$y_t = \mu + DUM(t) + \alpha t + +\tilde{y}_t$$

On construit la série de consommation à partir des prévisions du modèle selon l'équation (0.3). Le test pour H0 sera fait exactement de la même façon. On va vérifier l'hypothèse nulle pour différents niveaux de confiance et on utilisera le test de Wald[9]. Les niveaux de signification considérés et les valeurs tabulées de la statistique du test sont les suivantes:

niveau de confiance	statistique du test
0.5%	21.96
1%	20.09
2.5%	17.53
5%	15.5
10%	13.3

On répète cette opération (le test du PIREH) pour 10000 itérations.

Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau (6) de l'annexe.

On remarque à partir de la comparaison des résultats pour les deux cas, sans et avec rupture, que le fait d'ignorer le changement dans la moyenne n'est pas sans effet sur le test. En effet, pour le niveau de confiance 0.5%, le nombre de rejet de l'hypothèse nulle (PIREH) passe de 2031 sur 10000, dans le cas où l'on prend en considération le "break", à 4460 sur 10000 quand il y a oubli de la rupture dans la fonction de tendance. Le pourcentage de rejet passe de 20.3% à 44.6%, ce qui est

[8]La méthode FIML (full information maximum likelihood) est équivalente aux moindres carrés indirects car le système est exactement identifié.

[9]C'est un test de chi-carré à 8 degrés de liberté.

considérable. Pour les autres niveaux de confiance, on remarque que le nombre de rejet double ou presque quand le "break" n'est pas inclus dans le test.

À la lumière de ces remarques, il devient clair qu'il y a de fortes chances que le rejet de l'hypothèse de revenu permanent et anticipations rationnelles par Flavin soit dû à un oubli d'une rupture dans la fonction de tendance, si il y en a une, plutôt qu'au fait que cette hypothèse soit fausse.

0.6. TRAVAIL EMPIRIQUE:

En un premier temps, et pour fin de comparaison, on procédera de la même manière que Flavin (1981).

On prendra les séries de revenu disponible et de la consommation de biens non-durables par tête pour la période entre 1947:01 et 1994:04. Pour enlever la tendance exponentielle on prend le logarithme des deux séries, puis on les régresse sur la fonction de tendance :

$$y_t = \mu + \alpha t + +\tilde{y}_t \tag{0.10}$$

On applique les mêmes opérations qu'on a vu dessus sur les résidus $\tilde{y}_t$.

Les résultats de l'estimation des équations (0.5) et (0.7) sont présentés dans les tableaux (2.1) et (2.2) annexés. Remarquons que pour les tests de l'hypothèse nulle, la statistique de Fisher calculée est égale à $\simeq$ 4.445. On conclut donc; que sur la période considérée l'hypothèse de revenu permanent et anticipations rationnelles est rejetée puisque la statistique de Fisher tabulée est $\simeq 2$.

Flavin dans son papier considère que les séries sont stationnaires autour d'un "trend" exponentiel. Dans ce qui suit, on essayera de vérifier la stationnarité; c'est à dire faire un test de racine unitaire. Ensuite on entamera le test de "break" dans le niveau. Au fait ces deux tests sont trés liés. Comme l'on a déjà mentionné, si il y a rupture dans la moyenne cela risque d'affecter le test de stationnarité.

0.6.1. TEST DE RACINE UNITAIRE:

Un processus Y_t est dit stationnaire si son espérence et ses autocovariances sont indépendantes du temps. Pour tout t et j on a:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu \\ & et \\ E(Y_t-\mu)(Y_{t-j}-\mu) &= \gamma_j \end{aligned}$$

Ce type de processus est dit " covariance-stationnary". On verra plus loin d'autres caractéristiques de la stationnarité.

Soit le processus générateur des données suivant:

1.

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{t-i} + \xi_t \tag{0.11}$$

Ce processus autorégressif peut s'écrire sous la forme moyenne mobile suivante:

$$y_t = v + \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \xi_{t-j}{}^{10} \tag{0.12}$$

La stationnarité implique que:

$$E(y_t) = v$$

et

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \widehat{y}_{t+s} = v$$

Cependant la stationnarité n'est pas une caractéristique fréquente dans les séries économiques et financières qui présentent souvent une tendance temporelle. Il y a en effet deux approches pour caractériser la tendance observée dans les

[10] Pour vérifier le passage de la représentation autorégressive à celle moyenne mobile, voir annexe mathématique appendice 4.

séries chronologiques: La première consiste à inclure une tendance déterministe dans le processus générateur, ainsi l'équation (6.2) devient:

$$y_t = v + \alpha t + \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \xi_{t-j} \tag{0.13}$$

La seconde approche par contre, inclut une tendance stochastique (une racine unitaire) dans le processus des données:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \xi_{t-j} \tag{0.14}$$

Ceci revient à dire que la première différence est un processus stationnaire:

$$\begin{aligned} (1-L)y_t &= \delta + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \xi_{t-j} \\ L y_t &= y_{t-1} \end{aligned}$$

Cependant, ce qui arrive souvent c'est que les deux types de non-stationnarité se manifestent simultanément. S'il est facile de repérer la tendance déterministe par une représentation graphique de la série, il est moins évident de procéder pareillement pour ce qui est de la tendance stochastique.

Flavin(1981) considère que le processus de logarithme[11] des revenus et de consommation est stationnaire autour d'une tendance linéaire; c'est à dire qu'elle inclut seulement la possibilité d'une non-stationnarité déterministe. En effet l'examen de la représentation graphique[12] du logarithme des deux séries suffit pour rendre compte de l'existence de cette tendance. La regression (0.10) permet d'enlever cette tendance. Cependant, on n'est pas sûr de la stationnarité de la série résiduelle $\tilde{y}_t$ de (0.10). Le graphique[13] de $\tilde{y}_t$ n'est pas informateur à ce sujet.

Cette discussion nous amène à parler des tests de racine unitaire. La littérature sur ce sujet est très riche et il n'y a pas une seule façon de procéder. Un des tests utilisés est celui de Dicky-Fuller augmenté. Le test se déroule comme suit:

[11] On prend le logarithme car les séries progressent de façon exponentielle, voir graphiques.
[12] Voir graphique.
[13] graph (0.3) pour la série des revenus et graph (1.3) pour la série de consommation.

On prend les données aprés avoir enlever la tendance linéaire, c'est à dire $\tilde{y}_t$, puis on fait la régression suivante par moindres carrés ordinaires:

$$\begin{aligned} {}^{14}\tilde{y}_t &= \mu + \rho\tilde{y}_{t-1} + \zeta_1\Delta\tilde{y}_{t-1} + \zeta_2\Delta\tilde{y}_{t-2} + ... + \zeta_7\Delta\tilde{y}_{t-7} + \varrho_t && (0.15) \\ & avec && (0.16) \\ \rho &= \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_8 && (0.17) \end{aligned}$$

L'hypothèse nulle qu'on va tester est : H0* ={ racine unitaire $\Leftrightarrow \rho = 1$}. a statistique du test est $\frac{T(\widehat{\rho}-1)}{1-\sum_{j=1}^{7}\widehat{\zeta}_j}$. Les disributions de ces statistiques sont présentées dans le tableau (B.5, cas2)[15].

La régression (0.15) donne:

(*) Pour la série des revenus: $\frac{T(\widehat{\rho}-1)}{1-\sum_{j=1}^{7}\widehat{\zeta}_j}$= -0.566 avec T = 184

(*) Pour la série de consommation: $\frac{T(\widehat{\rho}-1)}{1-\sum_{j=1}^{7}\widehat{\zeta}_j}$ = -0.838

La valeur tabulée de la statistique correspondante pour un niveau de signification de 5% est égale à -13.9. Rappelons que l'hypothèse nulle est H0* ={ ρ = 1 }, l'hypothèse alternative étant H1*={$|\rho|<1$). Puisque -0.566 > -13.9 et -0.838 >-13.9, alors H0* n'est pas rejetée et le test de Dickey-Fuller augmenté conclut à l'existence d'une racine unitaire.

Etant donné la non-stationnarité du processus des revenus, on ne peut pas modéliser directement la série des revenus comme un processus autorégressif AR(8) autour d'un "trend" exponentiel. vant de chercher à stationnariser les séries, c'est à dire les différencier une fois ou plus, il est intéressant de vérifier si la racine unitaire n'est pas le fruit d'une rupture dans le processus générateur des données.

[15]" Time Series Analysis " de James.D.Hamilton.

On prend les données aprés avoir enlever la tendance linéaire, c'est à dire $\tilde{y}_t$, puis on fait la régression suivante par moindres carrés ordinaires:

$$
\begin{aligned}
{}^{14}\tilde{y}_t &= \mu + \rho\tilde{y}_{t-1} + \zeta_1\Delta\tilde{y}_{t-1} + \zeta_2\Delta\tilde{y}_{t-2} + \ldots + \zeta_7\Delta\tilde{y}_{t-7} + \varrho_t && (0.15)\\
& avec && (0.16)\\
\rho &= \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_8 && (0.17)
\end{aligned}
$$

L'hypothèse nulle qu'on va tester est : H0* ={ racine unitaire $\Leftrightarrow \rho = 1$}. a statistique du test est $\frac{T(\widehat{\rho}-1)}{1-\sum_{j=1}^{7}\widehat{\zeta_j}}$. Les disributions de ces statistiques sont présentées dans le tableau (B.5, cas2)[15].

La régression (0.15) donne:

(*) Pour la série des revenus: $\frac{T(\widehat{\rho}-1)}{1-\sum_{j=1}^{7}\widehat{\zeta_j}}$= -0.566 avec T = 184

(*) Pour la série de consommation: $\frac{T(\widehat{\rho}-1)}{1-\sum_{j=1}^{7}\widehat{\zeta_j}}$ = -0.838

La valeur tabulée de la statistique correspondante pour un niveau de signification de 5% est égale à -13.9. Rappelons que l'hypothèse nulle est H0* ={ ρ = 1 }, l'hypothèse alternative étant H1*={$|\rho|$<1). Puisque -0.566 > -13.9 et -0.838 >-13.9, alors H0* n'est pas rejetée et le test de Dickey-Fuller augmenté conclut à l'existence d'une racine unitaire.

Etant donné la non-stationnarité du processus des revenus, on ne peut pas modéliser directement la série des revenus comme un processus autorégressif AR(8) autour d'un "trend" exponentiel. vant de chercher à stationnariser les séries, c'est à dire les différencier une fois ou plus, il est intéressant de vérifier si la racine unitaire n'est pas le fruit d'une rupture dans le processus générateur des données.

15" Time Series Analysis " de James.D.Hamilton.

0.6.2. TEST D'EXISTENCE D'UN "BREAK " DANS LE NIVEAU DES SÉRIES DE REVENU ET DE CONSOMMATION:

Pour tester l'existence d'un changement dans le niveau on utilisera les procédures dévelopées par *Vogelsang&Perron*[16] (1994). En plus de détecter la date du "break" qui est inconnue, ces procédures permettent de tester l'hypothèse nulle de racine unitaire avec la possibilité de changement dans la fonction de tendance.

Il y a deux sortes d'approches:

(a)- "Innovational Outlier" : dans ce cas la rupture se produit lentement et s'étend sur une intervalle de temps.

(b)- "Additive Outlier" : contrairement à la première, cette approche modélise une rupture soudaine et ponctuelle.

Dans notre cas, on se limitera à la seconde approche. Autrement dit; on va s'intéresser uniquement aux changements de niveau se produisant de façon soudaine et instantanée.

Le modèle que l'on va considérer est le suivant:

[17] $$y_t = \mu + \beta t + \theta DU_t + z_t \tag{0.18}$$

$DU_t = 1(\mathrm{t} > \mathrm{T}_b)$: fonction indicatrice avec T_b date de rupture dans le niveau.

z_t : résidus spécifiés comme un processus autorégressif moyenne mobile ARMA(p+1,q), définit comme :

$$A(L)z_t = B(L)e_t \tag{0.19}$$

$$e_t \sim i.i.d(0, \sigma^2) \tag{0.20}$$

L: opérateur retard.

A(L) et B(L) sont des polynômes en L. A(L) peut être écrit comme suit:

$$A(L) = (1 - \alpha L) * A^*(L) \tag{0.21}$$

La factorisation (0.19) est trés utile car permet d'exprimer A(L) sous forme de deux composantes:

[16] "Additional Tests For A Unit Root Allowing For A Break In The Trend Function At An Unknown Time", apparu dans le Cahier de Recherche #2694 du CRDE.

[17] Modèle (1.1) dans Perron&Vogelsang (1994).

$A^*(L)$: composante stationnaire; c'est à dire que ce polynôme d'ordre "p" en "L" possède des racines en dehors du cercle unitaire[18].

$(1 - \alpha L)$: composante éventuellement non stationnaire.

B(L) : polynôme en "L" avec des racines à l'extérieur du cercle unitaire.

Le test de racine unitaire se fait en deux étapes:

(1)* enlever la fonction de tendance par la régression (0.16). Le paramètre θ mesure la magnitude de la rupture dans l'ordonnée à l'origine. Quand la série est stationnaire l'ordonnée à l'origine est égale à μ avant la date du "break" T. Elle sera égale à $(\mu + \theta)$ aprés la rupture. Si par contre il y a racine unitaire, avant T_b l'ordonnée à l'origine est égale à "y_0" (condition initiale[19]), après le "break" le niveau devient $(y_0 + \theta)$.

(2)* prendre la série des résidus "$\tilde{z}_t$" (estimés de z_t) et tester l'hypothèse nulle:

$$H0 = \{\alpha = 1\}$$

L'hypothèse nulle découle de la factorisation (0.19), car les résidus une fois exprimés sous la forme:

$$(1 - \alpha L) * A^*(L)\tilde{z}_t = B(L)e_t \tag{0.22}$$

On peut manipuler (0.20) pour avoir une spécification plus pratique qui, telle que rapportée dans Perron&Vogelsang(1994), est la suivante:

$$^{20}\tilde{z}_t = \sum_{i=0}^{k} \omega_i D(T_b)_{t-i} + \alpha \tilde{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} c_i \Delta \tilde{z}_{t-i} + u_t \tag{0.23}$$

Cependant, avant d'exécuter (1) et (2), il faut déterminer la date éventuelle du "break" et choisir une valeur pour "k". Deux méthodes sont valables pour choisir "T_b":

* La première est de choisir "T_b" telle que la racine unitaire soit la moins vraissemblable.

[18]Voir appendice 5 pour plus de détails.

[19]Voir appendice 6.

[20]Voir appendice 7 pour les détails techniques.

* la seconde est de prendre la date de rupture la plus significative qui permet de maximiser la valeur absolue[21] de la statistique du test de l'hypothèse "$\theta = 0$".

Il existe aussi un grand nombre d'approches pour le choix de "k" (Truncation lag). Ces approches vont d'un choix fixe d'un "$\overline{k}$" à un choix dépendant de certains critères étant donné une valeur maximale pour "k". Pour avoir plus de détails et de précisions sur ces critères de choix, voir le papier de Ng & Perron (1990).

Après ce bref aperçu théorique du test joint de racine unitaire et de "break", on entamera l'application de ce test sur la série des revenus. On choisit la procédure [22]qui utilise le critère de maximisation de la signification de la rupture et le critère de "t-sig" pour "k".

Le test donne les résultats suivants:

(*) Date de rupture: T_b= 67:04 (le 4ème triméstre de l'année 1967), ce qui correspond à l'observation "74".

(*) k(t-sig) = 10.

(*) "α" = 0.8948

(*) La statistique du test pour " $\alpha = 1$" est: t_α = -2.09332.

(*) "θ" = -0.39945

(*) la statistique du test pour "$\theta = 0$"est : t_θ = -53.200.

Les distributions de ces statistiques sont présentées dans le Perron&Vogelsang (1994), et on a :

* la valeur tabulée pour la statistique "t_α", à un niveau de signification de 5%, est égale à -4.17. Puisque -2.0933 > -4.17, l'hypothèse nulle de racine unitaire n'est pas rejetée.

Pour la distribution de la statistique "t_θ ", il est mentionné dans Perron & Vogelsang (1994) que c'est une statistique de Student. Dans ce cas la valeur critique correspondante est 1.96. On remarque que $|-53.200| > 1.69$ et donc la rupture de niveau détectée est statistiquement significative.

[21]on prend la valeur absolue car on ne connait pas le sens de la rupture.

[22]Toutes les procédures sont disponibles en version RATS et sont dues à S.Ng et P.Perron. La procédure utilisée ici est nommée "Aom1tgab".

0.6.3. TEST DE L'HYPOTHÈSE DE REVENU PERMANENT ET ANTICIPATIONS RATIONNELLES AVEC PRÉSENCE D'UN CHANGEMENT DE NIVEAU:

D'après les résultats du test de changement de niveau, on a une rupture significative de -0.399 dans le niveau de la série des revenus. L'estimation[23] d'un AR(8) pour la série des revenus transformée en logarithme donne une moyenne égale à $\simeq$0.222, et on remarque que le changement de niveau est trés important.

Il est temps maintenant de refaire le test de l'hypothèse nulle de revenu permanent et anticipations rationnelles en tenant compte de la rupture de la fonction de tendance au niveau de la moyenne. Le test se déroule de la même façon qu'au début de la section. Toutefois la fonction de tendance que l'on va soustraire de la série des revenus et celle de consommation prises en logarithme est la suivante:

$$y_t = \mu + +\alpha t + DU(t) + \tilde{y}_t \tag{0.24}$$

où $DU(t)$ = 1*(t > 74).

Pour des raisons de comparaison avec les résultats du test fait par Flavin; on prendra aussi l'exponentielle de "$\mu + \tilde{y}_t$".

Le test donne une statistique de Fisher égale à 1.7523. Cette valeur ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle. Remarquons que considérer la variation de niveau fait passer la statistique de test de 4.444 à 1.7523, ce qui n'est pas négligeable.

Notons que le même test appliqué sur la série "$\mu + \tilde{y}_t$" donne pratiquement les mêmes résultats[24], puisque dans ce cas aussi le F-test passe de 4.536 à 1.716.

Avant de conclure cette section, notons qu'on a présenté dans les tableaux (5.1) et (5.2), les valeurs estimées du système à équations simultanées avec la série [25]différenciée des revenus.

[23]Les résultats détaillés de l'estimation sont présentés dans les tableaux (3.1) et (3.2).

[24]Voir les tableaux (4.1) et (4.2).

[25]La différentiation permet d'enlever la racine unitaire et se fait en appliquant l'opérateur (1-L) au processus du revenu. C'est suffisant pour assurer la stationnarité puisque la valeur de la statistique du test de Dicky Fuller augmenté est : -199 qui est inférieur à la valeur tabulée -13.9.

0.7. CONCLUSION:

Dans ce rapport; l'étude s'est portée sur l'hypothèse de revenu permanent et anticipations rationnelles avec la présence d'une rupture dans la fonction de tendance. On s'est intéressé plus particulièrement au saut dans le niveau de la série, lequel changement est supposé se produire une seule fois.

L'étude s'est inspirée du papier de Flavin (1981), qui traite le même sujet mais dans le cas où la fonction de tendance est linéaire et ne présente aucune anomalie. Elle a donc testé la vraissemblance de l'hypothèse de proportionnalité de la consommation au revenu permanent de chaque période. Elle est arrivée à la conclusion d'un rejet statistique et quantitatif de celle-ci.

L'importance de revoir la même hypothèse mais avec possibilité d'un changement dans la moyenne, prend son essence des travaux faits sur les tests de racine unitaire, notamment dans Perron (1993), et qui rendent compte de l'effet d'une telle possibilité sur la conclusion des tests de stationnarité.

En effet, le travail empirique effectué dans le présent rapport, donne des résultats si l'on peut dire impréssionnants mais non surprenants qui confirment l'intuition ci-dessus.

La rupture dans la tendance a été testée et localisée au niveau du quatrième trimestre de l'année 1967 (qui correspond à la $74^{ème}$ observation), laquelle rupture s'est avérée significative à la fois statistiquement et quantitativement. Cette rupture une fois incorporée dans la fonction de tendance change le résultat du test. Ainsi avec le nouveau test on est amené à accepter (ne pas rejeter) l'hypothèse nulle selon laquelle le revenu permanent est la meilleure variable explicative de la consommation une fois qu'on suppose la rationnalité, c'est à dire si toute l'information disponible est incorporée par les agents pour formuler leurs prévisions des revenus courants futurs.

1. APPENDICE MATHÉMATIQUE:

1.1. APPENDICE 1:

Montrer que (*) $E_t y^p_{t+k} = y^p_t$.
on a l'équation (1) du revenu permanent:

$$y^p_t = r\left[\omega_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i}\right]$$

ω_t *: la richesse réelle au début de la période.*
on va montrer (*) pour k=1, le cas général peut facilement en être déduit .

notons que la richesse ω_t *va évoluer de la façon suivante:*

$$\omega_{t+1} = (1+r)\omega_t + x_t - y^p_t$$

par ailleurs, on a :

$$(**) \qquad y^p_{t+1} = r\left[\omega_{t+1} + \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_{t+1}x_{t+1+i}\right]$$

on remplace ω_{t+1} *dans (**):*

$$y^p_{t+1} = r\left[(1+r)\omega_t + x_t - y^p_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i+1}\right]$$

on ajoute et retranche le terme

$$(1+r)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i}$$

$$y_{t+1}^p = r\left[\begin{array}{c} (1+r)\left[\omega_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i}\right] - y_t^p - \\ (1+r)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i} \\ +x_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i+1} \end{array}\right]$$

$$y_{t+1}^p = r\left[\begin{array}{c} (1+r)\left[\omega_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i}\right] + \\ \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_{t+1} x_{t+1+i} - \\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i} E_t x_{t+i} \end{array}\right]$$

finalement, on obtient:

$$y_{t+1}^p = r\left[\left(\frac{1+r}{r}\right) y_t^p - y_t^p + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} (E_{t+1} - E_t)\, x_{t+i+1}\right]$$

car si on pose j=i+1:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{j} E_t x_{t+j} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i+1}$$

$$y_{t+1}^p = y_t^p + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} (E_{t+1} - E_t)\, x_{t+i+1}$$

maintenant si l'on prend (*):

$$E_t y_{t+1} = E_t y_t + \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t\,(E_{t+1} - E_t)\, x_{t+i+1}$$

$$\begin{aligned} E_t(E_{t+1} - E_t)x_{t+i+1} &= (E_t E_{t+1} - E_t E_t)x_{t+i+1} \\ E_t E_{t+1} x_{t+i+1} &= E_t x_{t+i+1} (***) \end{aligned}$$

(***) selon la loi de projection itérative (law of iterated expectations) si les anticipations sont rationnelles alors l'espérance de la révision des anticipations pour la période suivante est nulle:

$$E_t(E_{t+1} - E_t)x_{t+i+1} = 0$$

Ainsi on retrouve le résultat (*) pour k = 1.

1.2. APPENDICE 2:

Retrouver les restrictions sur les coefficients β_i ,impliquées par H0:
on a sous H0 :

$$c_t = y_t^p = r\left[\omega_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} E_t x_{t+i}\right]$$

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= y_{t+1}^p = y_t^p + r\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1}(E_{t+1}-E_t)x_{t+i+1} \\ (\#) &= c_t + r\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1}(E_{t+1}-E_t)x_{t+i+1} \end{aligned}$$

si on prend la représentation AR(p) pour le processus des revenus:

$$\begin{aligned} \Phi(L)x_t &= \mu_1 + \varepsilon_{1t} \\ \Phi(L) &= 1 - \sum_{i=1}^{p}\rho_i L^i \\ L^i x_t &= x_{t-i} \end{aligned} \tag{1.1}$$

La représentation autorégressive (1), admet une représentation moyenne mobile (on suppose que le processus générateur des données est stationnaire, sinon on transforme les données avant de les traiter):

$$\begin{aligned} x_t &= \Phi^{-1}(L)(\mu_1 + \varepsilon_{1t}) \\ &= \Phi^{-1}(1)\mu_1 + \Psi(L)\varepsilon_{1t} \\ \Psi(L) &= \sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j L^j = \Phi^{-1}(L) \\ \tilde{\mu} &= \Phi^{-1}(1)\mu_1 \end{aligned}$$

Selon la représentation MA(∞) et à cause du fait que $E_t\varepsilon_{1t+k} = 0$ pour $k \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
x_{t+s} &= \tilde{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{1t+s-j} \\
E_t x_{t+s} &= \tilde{\mu} + \sum_{j=s}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{1t+s-j} \\
E_{t-1} x_{t+s} &= \tilde{\mu} + \sum_{j=s+1}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{1t+s-j}
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

de ce fait :

$$E_t x_{t+s} - E_{t-1} x_{t+s} = \Psi_s \varepsilon_{1t}$$

remplaçons dans (#):

$$
\begin{aligned}
(E_{t+1} - E_t) x_{t+i+1} &= \Psi_{i+1} \varepsilon_{1t+1} \\
c_{t+1} &= c_t + r \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{i+1} \Psi_{i+1} \varepsilon_{1t+1} \\
\Delta c_{t+1} &= c_{t+1} - c_t = r \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{i+1} \Psi_{i+1} \right] \varepsilon_{1t+1}
\end{aligned}
$$

De même:

$$(\#\#) \Delta c_t = r \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{i+1} \Psi_{i+1} \right] \varepsilon_{1t}$$

Donc si on teste H0, il est clair que cela revient à tester si les coefficients β_i sont statistiquement et/ou quantitativement faibles.

{H0 implique (##)} ceci est équivalent à tester $\beta_i = 0, i = 0, 1, 2, .., pl$.
Notons que ces coefficients figurent dans l'équation (##) si H0 n'est pas vérifiée:

$$
\begin{aligned}
\Delta c_t &= r \Lambda \varepsilon_{1t} + \sum_{i=0}^{p} \beta_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{2t} \\
\Lambda &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{i+1} \Psi_{i+1}
\end{aligned}
$$

1.3. APPENDICE 3:

Retrouver la forme réduite du modèle structurel proposé par Flavin:
la forme structurelle:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_1 + \sum_{i=1}^{p} \rho_i y_{t-i} + \varepsilon_{1t} \\ \Delta c_t &= \mu_2 + r\Lambda \varepsilon_{1t} + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

exprimant ε_{1t} *en fonction de* y_t *et ces retards :*

$$\Delta c_t = \mu_2 + r\Lambda(y_t - \mu_1 - \sum_{i=1}^{p} \rho_i y_{t-i}) + \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_{2t}$$

puisque y_t *est une variable endogène dans le modèle, il faut la remplacer par son expresssion en foction des variables prédéterminées du modèle; puis regroupant tous les termes en* y_{t-i}*:*

$$\begin{aligned} \Delta c_t &= \tilde{\mu}_2 + \sum_{i=1}^{p} \pi_i y_{t-i} + \nu_{2t} \\ \tilde{\mu}_2 &= \mu_2 + \beta_0 \mu_1 \\ \nu_{2t} &= (r\Lambda + \beta_0)\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} \\ \pi_1 &= \beta_0(\rho_1 - 1) + \beta_1 \\ \pi_i &= \beta_0 \rho_i - \beta_{i-1} + \beta_i; i = 2, .., 7 \\ \pi_8 &= \beta_0 \rho_8 - \beta_7 \end{aligned}$$

1.4. APPENDICE 4:

On veut montrer qu'un processus autorégressif AR(p) peut s'écrire sous la forme moyenne mobile MA(∞); c'est à dire que :

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{t-i} + \xi_t$$

admet une représentation moyenne mobile:

$$y_t = \upsilon + \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \xi_{t-j}$$

prenons le cas simple ou p=1, dans ce cas la forme AR(1) du processus est la suivante:

$$y_t = \mu + \Phi y_{t-1} + \xi_t$$

cette expression est équivalente à:

$$(1 - \Phi L)y_t = \mu + \xi_t$$

$(1 - \Phi L)$: polynôme autorégressif. L: opérateur retard.
La représentation moyenne mobile suppose que le polynôme autorégressif est inversible;c'est à dire que l'on peut écrire $((1 - \Phi L)^{-1})$. La condition nécessaire et suffisante pour assurer l'inversibilité est que " $|\Phi| < 1$ " parce que:
si on résout de façon récurssive pour "y_t" on va trouver:

$$y_t = \mu + \Phi(\mu + \Phi y_{t-2} + \xi_{t-1}) + \xi_t$$

si pour simplifier on pose μ=0 et en continuant "backward" on arrive à:

$$y_t = \Phi^t y_0 + \Phi^{t-1}\xi_1 + \Phi^{t-2}\xi_2 + ... + \Phi\xi_{t-1} + \xi_t.$$

Le multiplicateur dynamique "$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial \xi_j} = \Phi^j$", mesure l'impact d'un choc aléatoire sur y_t. Pour que le système soit stable il faut que ce choc ne soit pas explosif.

Autrement dit qu'il se dégrade au fur et à mesure que le choc est loin dans le passé, ce qui correspond à dire que:

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \Phi^j = 0$$

Ceci implique que " $|\Phi| < 1$ ".

La représentation $MA(\infty)$ découle directement de l'inversibilté de la représentation $AR(1)$:

$$y_t = (1 - \Phi L)^{-1} * (\mu + \xi_t)$$

$$y_t = \frac{\mu}{1 - \Phi} + \frac{\xi_t}{1 - \Phi L}$$

On sait que $(1\text{-}\Phi L)^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^j \xi_{t-j}$.
Ainsi on arrive à:

$$y_t = \upsilon + \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \xi_{t-j}$$

avec:
$\upsilon = \frac{\mu}{1-\Phi}$;
$\Psi_j = \Phi^j$.

Pour un processus $AR(p)$ avec $p>1$; la même démarche est valable, c'est à dire s'assurer que le polynôme autorégressif est inversible puis chercher les coefficients du polynôme inverse.

1.5. APPENDICE 5:

Soit le processus x_t tel que:

$$\begin{aligned} x_t\Phi(L) &= e_t \\ e_t &\sim iid(o,\sigma^2) \end{aligned}$$

On a le polynôme $\Phi(L)$, et on veut montrer que la stationnarité requiert que les racines de ce dernier soit à l'extérieur de cercle unitaire.

Supposons que ce polynôme est d'ordre p, avec comme example p=2;

$$\Phi(L) = 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2$$

En factorisant, on a:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 &\overset{(***)}{=} (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L) \\ &= 1-(\lambda_1+\lambda_2)L + \lambda_1\lambda_2 L^2 \end{aligned}$$

avec :

$\Phi_1 = \lambda_1 + \lambda_2$
$\Phi_2 = -\lambda_1\lambda_2$

On doit trouver λ_1 et λ_2 tel que (***) est vrai pour toute variable dummy " L". Appelons la "z".

Considérant:

$$(1 - \Phi_1 Z - \Phi_2 Z^2) = (1-\lambda_1 Z)(1-\lambda_2 Z)$$

On doit résoudre :

$$(1-\lambda_1 Z)(1-\lambda_2 Z) = 0$$

ceci donne que :

$$\begin{aligned} Z &= 1/\lambda_1 \\ & OU \\ Z &= 1/\lambda_2 \end{aligned}$$

Mais Z doit aussi être solution de :

$$(1 - \Phi_1 Z - \Phi_2 Z^2) = 0$$

c'est à dire que :

$$Z_{1,2} = \frac{\Phi_1 \pm \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}}{-2\Phi_2}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1/\lambda_1 \\ & ET \\ Z_2 &= 1/\lambda_2 \end{aligned}$$

On dit que l'équation de différence $x_t(1 - \Phi_1 Z - \Phi_2 Z^2) = e_t$ *est stable si les racines de* $(1 - \Phi_1 Z - \Phi_2 Z^2) = 0$ *sont à l'extérieur du cercle unitaire.*

1.6. APPENDICE 6:

Soit $\{y_t\}$ *une série non-stationnaire. Supposons pour fin de simplicité que* "y_t" *est une marche aléatoire avec dérive; c'est à dire que:*

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + e_t \\ e_t &\sim iid(o, \sigma^2) \end{aligned}$$

On cherche l 'ordonnée à l 'origine. On peut procéder de façon recurssive et avoir:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + (\mu + y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\ &= \ldots \\ &= \mu t + y_0 + e_1 + \ldots + e_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine c'est:

$$E\{y_t/t = 0\} = y_0$$

Il faut remarquer que dans le cas ou la série est stationnaire, l'intercept est égale à la moyenne inconditionnelle"$\upsilon = \mu/(1-\phi)$"*, si par exemple on a un processus stationnaire AR(1):*

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \phi y_{t-1} + e_t \\ avec &: |\phi| < 1 \end{aligned}$$

$$E\{y_t\} = \upsilon = \mu/(1-\phi)$$

Dans le cas stationnaire, la moyenne ne varie pas avec le temps, alors que c'est le cas quand on a une racine unitaire, plus précisement la moyenne inconditionnelle de la série à la date t est :

$$\upsilon_t = \mu t + y_0$$

1.7. APPENDICE 7:

On veut montrer que :

$$A(L)\widetilde{z}_t = B(L)e_t$$

peut s'écrire sous la forme:

$$\widetilde{z}_t = \sum_{i=0}^{k} \omega_i D(T_b)_{t-i} + \alpha \widetilde{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} c_i \Delta \widetilde{z}_{t-i} + u_t$$

En effet on commence par poser:

$$B(L)e_t = u_t$$

On va utiliser ce qu'on appelle la représentation sous forme de modèle de correction d'erreur "Error Correction Model":

Soit le processus AR(p) suivant:

$$\begin{aligned} \Phi(L)x_t &= u_t \\ \Phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ... - \phi_P L^P \end{aligned}$$

posons:

$$\begin{aligned} \rho &= \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_P \\ & \quad et \\ \zeta_j &= -[\phi_{j+1} + \phi_{j+2} + ... + \phi_p] \\ pour &: \; j = 1, 2, ..., p-1 \end{aligned}$$

Notons que pour toutes les valeures de, $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$,on a une équivalence entre les polynômes suivants:

$$\begin{aligned}
& (1-\rho L)-(\zeta_1 L+\zeta_2 L^2+...+\zeta_{P-1}L^{P-1})(1-L) \\
= \; & 1-\rho L-\zeta_1 L+\zeta_1 L^2-\zeta_2 L^2+\zeta_2 L^3-...-\zeta_{P-1}L^{P-1}-\zeta_{P-1}L^P \\
= \; & 1-(\rho+\zeta_1)L-(\zeta_2-\zeta_1)L^2-(\zeta_3-\zeta_2)L^3-...-(\zeta_{P-1}-\zeta_{P-2})L^{P-1}-(-\zeta_{P-1})L^P \\
= \; & 1-[(\phi_1+\phi_2+...+\phi_P)-(\phi_2+\phi_3+...+\phi_P)]L \\
& -[-(\phi_3+\phi_4+...+\phi_P)+(\phi_2+\phi_3+...+\phi_P)]L^2-... \\
& -[-(\phi_P)+(\phi_{P-1}+\phi_P)]L^{P-1}-(\phi_P)L^P \\
= \; & 1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-...-\phi_P L^P
\end{aligned}$$

Ainsi on a:

$$\{(1-\rho L)-(\zeta_1 L+\zeta_2 L^2+...+\zeta_{P-1}L^{P-1})(1-L)\}x_t=u_t$$

D'où le résultat:

$$\begin{aligned}
x_t &= \rho x_{t-1}+(\zeta_1 L+\zeta_2 L^2+...+\zeta_{P-1}L^{P-1})\Delta x_t \\
&= \rho x_{t-1}+(\zeta_1\Delta x_{t-1}+\zeta_2\Delta x_{t-2}+...+\zeta_{P-1}\Delta x_{t-p+1}) \\
&= \rho x_{t-1}+\sum_{i=1}^{p-1}\zeta_i\Delta x_{t-i}
\end{aligned}$$

Si on remplace la série $\{x_t\}$ *par la série* $\{\tilde{z}_t\}$, *et si on pose:*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \rho \\
& \quad et \\
\Phi(L) &= A(L)
\end{aligned}$$

on arrive a une expression proche du résultat qu'on cherche. Dans ce dernier, au lieu de prendre le nombre des retards égale à "p-1", il est déterminé suivant d'autres procédures par le nombre "k"; et on a aussi un terme de plus qui est

$$\sum_{i=0}^{k}\omega_i D(T_b)_{t-i}$$

l'inclusion de ces (k+1) variables "dummy" " $D(T_b)_{t-i}, i = 0, 1, ...k$*" est nécessaire, selon le papier de Perron&Vogelsang(1994) pour assurer l'invariabilité de la distribution limite de la statistique de Student à la structure d'autocorrélation des erreurs.*

1.8. RÉFÉRENCES:

[1] Bai.J, Perron.P " Estimating and Testing Linear Models With Multiple Structural Changes" Cahier 4695, Université de Montréal & CRDE.

[2] Flavin.M.A "The Adjustement of Consumption to Changing Expectations about Future Income." University of Chicago, apparu dans "Journal of Politicl Economy, 1981, vol. 89,no. 5".

[3] Flavin.M.A " The Excess Smoothness of Consumption: Identification and Interpretation." University of California,San Diego; apparu dans" Review of Economic Studies(1993) 60, 651-666".

[4] Hall.R.E "Stochastic Implications of The Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evédence." University of Chicago, apparu dans " Journal of Political Economy, 1978, vol. 86, no. 6".

[5] Hamilton.J.D " Time Series Analysis " Princeton University Press.

[7] Ng.S & Perron.P " Unit Root in ARMA Models With Data-Dependent Methods for The Selection of the Truncation Lag " Journal of the American Statistical Association, March 1995, Vol. 90, N0. 429, Theory and Methods.

[6] Perron.P (1993) " Trend, Unit Root and Structural Change in Macroeconomic Time Series " apparu dans " Cointegration: Expository Essays for The Applied Economists, B. B. Rao (ed.), Basingstoke:Macmillan Press."

[8] Vogelsang.T.J et Perron.P (1994) " Additional Tests For A Unit Root Allowing For A Break In The Trend Function At An Unknown Time " Cahier 2694, Université De Montréal & CRDE.

ANNEXE 1:

TABLEAUX

Résultats de la régréssion faite par Flavin(1981):

A/Cas sans restrictions:

Tableau (1.1)

	Estimateur	Std-error
$\mu 1$	92.54	64.26
$\rho 1$	.964	.092
$\rho 2$	.069	.126
$\rho 3$	.074	.125
$\rho 4$	-.360	.122
$\rho 5$	.112	.123
$\rho 6$	.157	.124
$\rho 7$	-.008	.122
$\rho 8$	-.053	.085
$\mu 2$	32.71	25.95
$\pi 1$	.058	.037
$\pi 2$	.002	.051
$\pi 3$	-.138	.050
$\pi 4$	.103	.049
$\pi 5$	-.148	.050
$\pi 6$	.179	.050
$\pi 7$	-.065	.049
$\pi 8$	-.007	.034

B/ Cas sous l'hypothèse H0:{ i=0, I=1,2,..,8}

Tableau (1.2):

	Estimateur	Std-Error
$\mu 1$	55.62	57.72
$\rho 1$	.898	.082
$\rho 2$	.067	.113
$\rho 3$	.231	.112
$\rho 4$	-.476	.110
$\rho 5$	.280	.111
$\rho 6$	-.045	.111
$\rho 7$	.065	.110
$\rho 8$	-.045	.076
$\mu 2$	.068	.862

Résultats des estimations de la forme réduite avec la méthode "SUR" (Seemingly Unrelated Regression) pour la série des revenus de 1947:01à 1994:04 :

A\Cas sans restrictions:

Tableau (2.1):

	Estimateur	Std-error	T-Stat	Signification
$\mu 1$	147.65	138.53	1.065	.286
$\rho 1$	.980	.0748	13.11	.0000
$\rho 2$	.00089	.1043	.0085	.993
$\rho 3$	.1434	.1040	1.378	.168
$\rho 4$	-.326	.1042	-3.128	.001
$\rho 5$	.1359	.1022	1.329	.183
$\rho 6$	.0586	.1008	.581	.560
$\rho 7$	.0779	.0720	.787	.430
$\rho 8$	-.097	.0720	-1.357	.174
$\mu 2$	54.92	44.71	1.22	.219
$\pi 1$	.086	.0241	3.56	.0003
$\pi 2$	-.043	.033	-1.28	.200
$\pi 3$	-.071	.0335	-2.131	.033
$\pi 4$	.037	.0336	1.100	.271
$\pi 5$	-.074	.033	-2.268	.023
$\pi 6$	.0895	.032	2.75	.005
$\pi 7$	-.004	.031	-136	.891
$\pi 8$	-.028	.023	-1.221	.222

B\Cas sous l'hypothèse nulle:

Tableau (2.2):

	Estimateur	Std Error	T-Stat	Signif
$\mu 1$	119	120.5	.987	.323
$\rho 1$	.877	.085	10	.000
$\rho 2$	.076	.115	.657	.511
$\rho 3$	.180	.115	1.56	.117
$\rho 4$	-.421	.114	-3.67	.000
$\rho 5$	.268	.112	2.391	.016
$\rho 6$	-.009	.110	-.088	.929
$\rho 7$	.048	.108	.448	.653
$\rho 8$	-.044	.080	-.556	.577
$\mu 2$	.458	1.72	.265	.790

Résultats de l'estimation de la forme réduite en appliquant la méthode "SUR" sur la série du logarithme der revenus:

A\Cas sous l'hypothèse altErnative:

Tableau (3.1):

	Estimateur	Std Error	T-Stat	Signif
μ1	.291	.232	1.25	.210
ρ1	.940	.089	10.5	.000
ρ2	.045	.121	.373	.709
ρ3	.108	.120	.899	.368
ρ4	-.394	.120	-3.28	.001
ρ5	.221	.117	1.89	.058
ρ6	.069	.116	.598	.549
ρ7	.048	.113	.430	.667
ρ8	-.075	.083	-.89	.370
μ2	.194	.173	1.11	.264
π1	.168	.066	2.53	.011
π2	- .077	.090	-.85	.394
π3	-.202	.090	-2.24	.024
π4	.111	.089	1.24	.213
π5	-.193	.086	2.94	.027
π6	.255	.086	2.94	.003
π7	-.021	.084	-.25	.802
π8	-.064	.062	-1.03	.301

B\Cas sous l'hypothèse nulle:

Tableau (3.2) :

	Estimateur	Std Error	T-Stat	Signif
$\mu 1$	.220	.221	.992	.320
$\rho 1$	.878	.084	10.3	.000
$\rho 2$	.073	.115	.637	.523
$\rho 3$	.183	.115	1.59	.111
$\rho 4$	-.435	.114	-3.80	.000
$\rho 5$	.293	.111	2.62	.008
$\rho 6$	-.024	.110	-.221	.824
$\rho 7$	.056	.108	.523	.600
$\rho 8$	-.051	.079	-.642	.520
$\mu 2$	.0002	.000	.263	.792

Résultats de l'estimation de la forme réduite en appliquant la méthode "SUR" sur la série du logarithme der revenus avec rupture dans la tendance:

A\Cas sous l'hypothèse altErnative:

Tableau (4.1):

	Estimateur	Std Error	T-Stat	Signif
$\mu 1$	1.442	.605	2.38	.017
$\rho 1$	.796	.089	8.89	.000
$\rho 2$	.124	.113	1.08	.275
$\rho 3$	.046	.114	.406	.684
$\rho 4$	-.276	.114	-2.41	.015
$\rho 5$	.038	.112	.341	.732
$\rho 6$	.066	.111	.599	.549
$\rho 7$	.057	.109	.524	.600
$\rho 8$	-.020	.087	-.237	.812
$\mu 2$	.847	.469	1.80	.071
$\pi 1$	-.057	.069	-.823	.071
$\pi 2$	.042	.088	.486	.626
$\pi 3$	-.124	.088	-1.40	.626
$\pi 4$	.076	.088	.866	.386
$\pi 5$	-.153	.086	-1.75	.079
$\pi 6$	.126	.086	1.46	.143
$\pi 7$	.029	.084	.350	.725
$\pi 8$	-.038	.067	-.57	.565

B\Cas sous l'hypothèse nulle:

Tableau (4.2) :

	Estimateur	Std Error	T-Stat	Signif
μ1	.931	.527	1.76	.077
ρ1	.831	.078	10.6	.000
ρ2	.098	.099	.989	.322
ρ3	.121	.099	1.22	.221
ρ4	-.322	.099	-3.23	.001
ρ5	.130	,098	1.33	.181
ρ6	-.009	.097	-.097	.921
ρ7	.039	.095	.413	.679
ρ8	.002	.076	.036	.971
μ2	.00018	.0009	.202	.839

Résultats de l'estimation de la forme réduite en utilisant la différence première de la série du logarithme des revenus:

A/Cas sans restrictions:

Tableau (5.1)

	Estimateur	Std-error
$\mu 1$	-2.77	-.523
$\rho 1$	-.097	-1.27
$\rho 2$	-.100	-1.31
$\rho 3$	.029	.383
$\rho 4$	-.204	-2.72
$\rho 5$	-.120	-1.61
$\rho 6$	-.092	-1.23
$\rho 7$	-.021	-282
$\rho 8$	-.061	-.831
$\mu 2$	-.605	-.360
$\pi 1$	.048	2.01
$\pi 2$	-.019	-.798
$\pi 3$	-.038	-1.58
$\pi 4$	-.019	-.810
$\pi 5$	-.057	-2.43
$\pi 6$	.010	.425
$\pi 7$	.0004	.020
$\pi 8$	-.037	-1.60

B/ Cas sous l'hypothèse H0:{ i=0, I=1,2,..,8}

Tableau (5.2):

	Estimateur	Std-Error
$\mu 1$	-2.748	-.516
$\rho 1$	-.170	-2.57
$\rho 2$	-.071	-1.072
$\rho 3$	.086	1.311
$\rho 4$	-.175	-2.69
$\rho 5$	-.033	-.524
$\rho 6$	-.107	-1.653
$\rho 7$	-.021	-.336
$\rho 8$	-.004	-.077
$\mu 2$	-.584	-.330

Tableau (6):

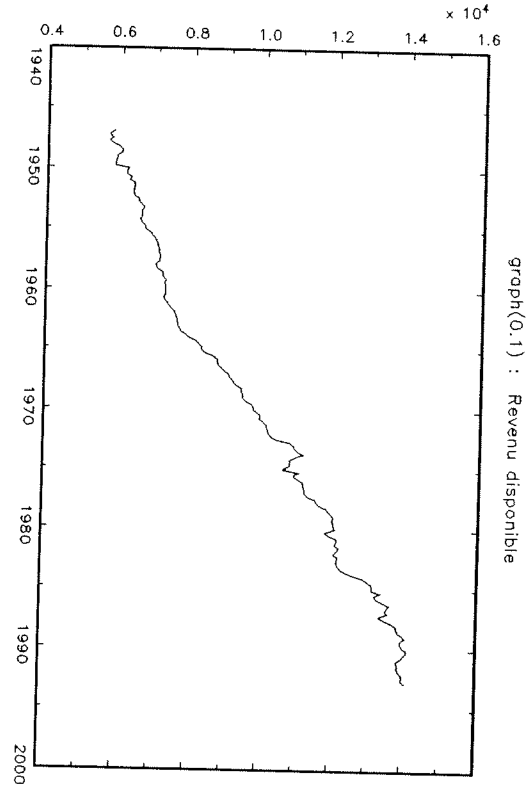
Les résultas de simulation de Monte Carlo, avec 10000 itérations et un échantillon de 150 observations.

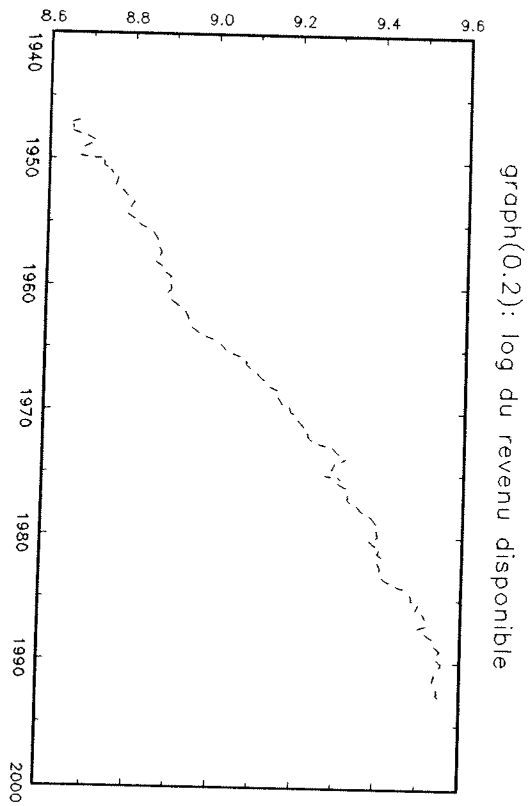
Les valeurs critiques tabulées sont celles de la loi Chi-deux à 8 degrés de liberté.

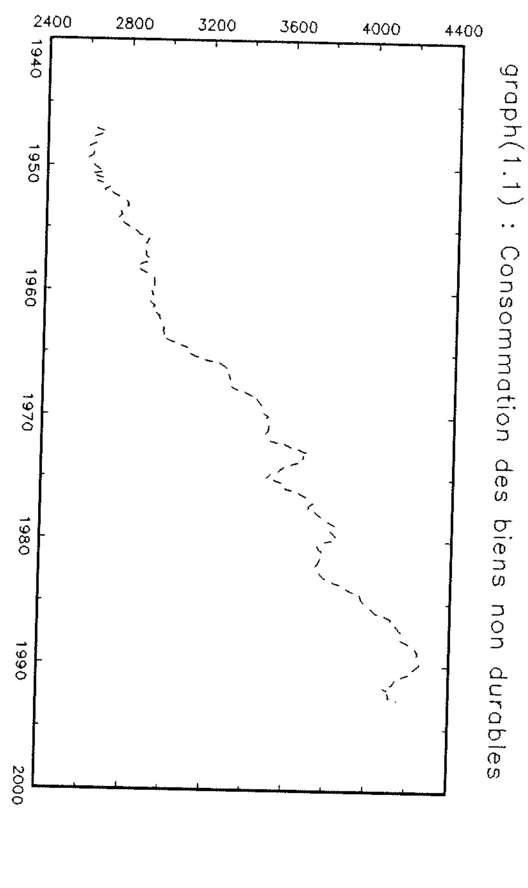
Niveau de confiance	Sans Rupture	Avec Rupture
0.5%	4505	2031
1%	4892	2313
2.5%	5451	2755
5%	5948	3163
10%	6551	3756

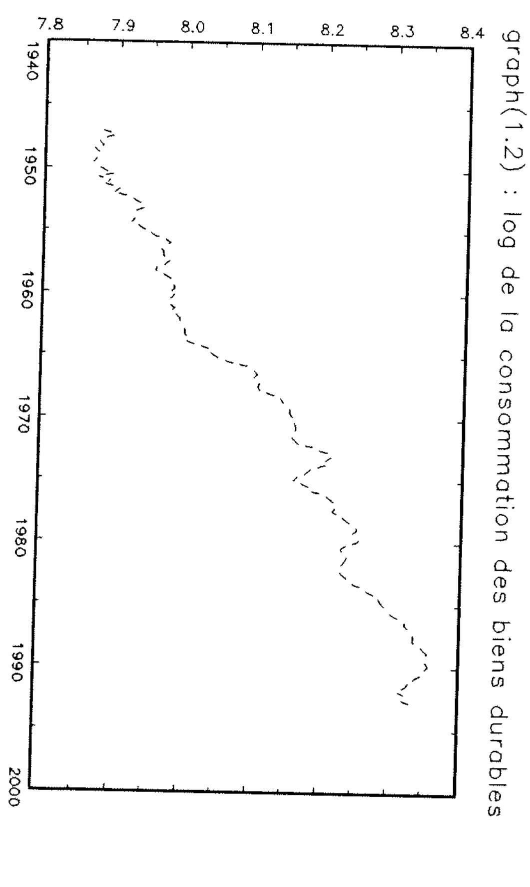
ANNEXE 1:

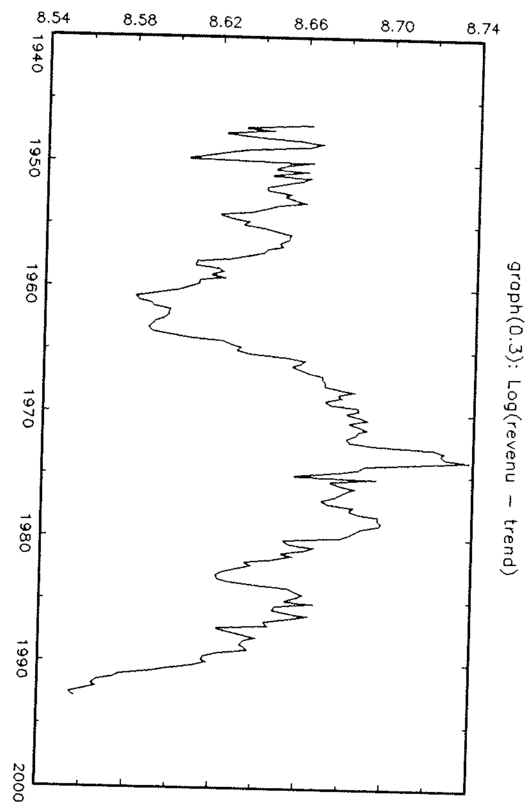
FIGURES

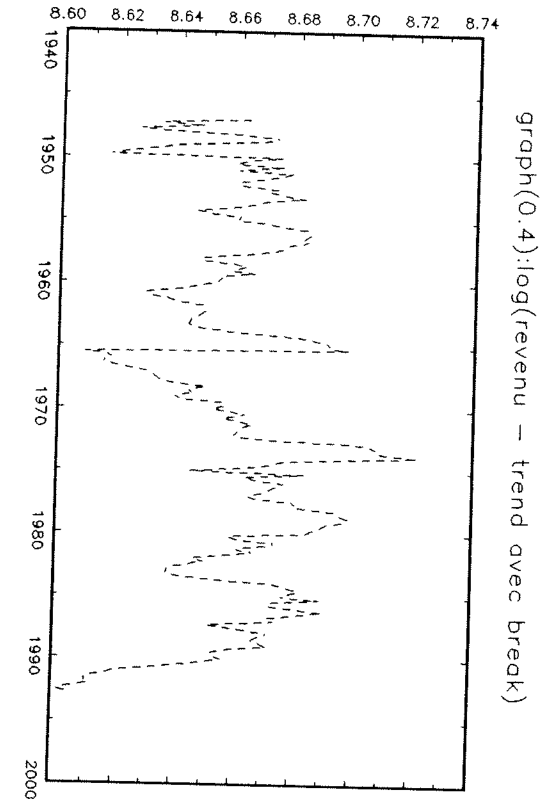

graph(0.1) : Revenu disponible
x 10^4
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000

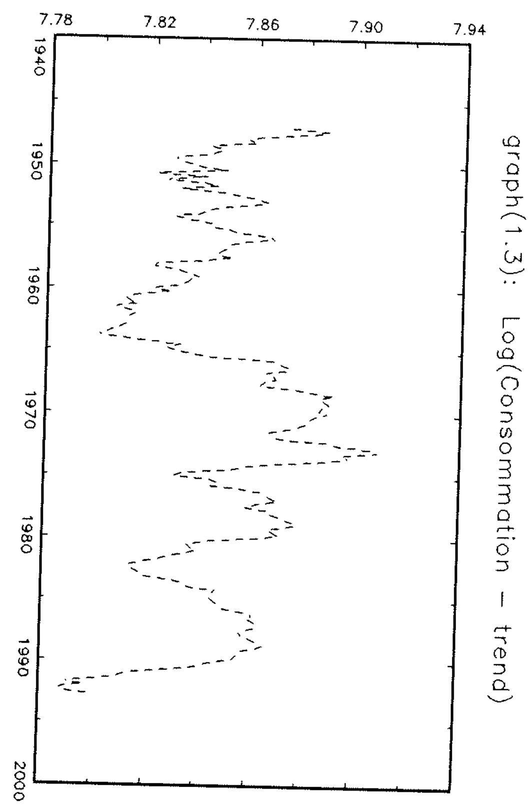

graph(0.2): log du revenu disponible
8.6
8.8
9.0
9.2
9.4
9.6
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000

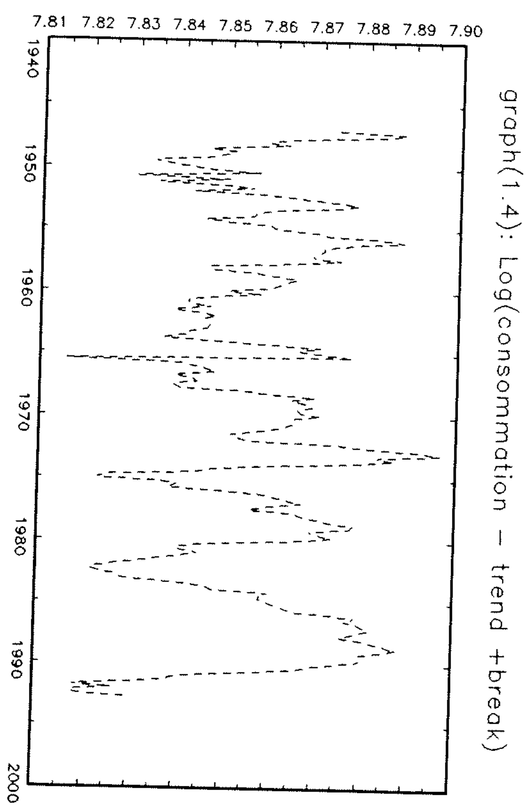

graph(1.1) : Consommation des biens non durables
2400
2800
3200
3600
4000
4400
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000

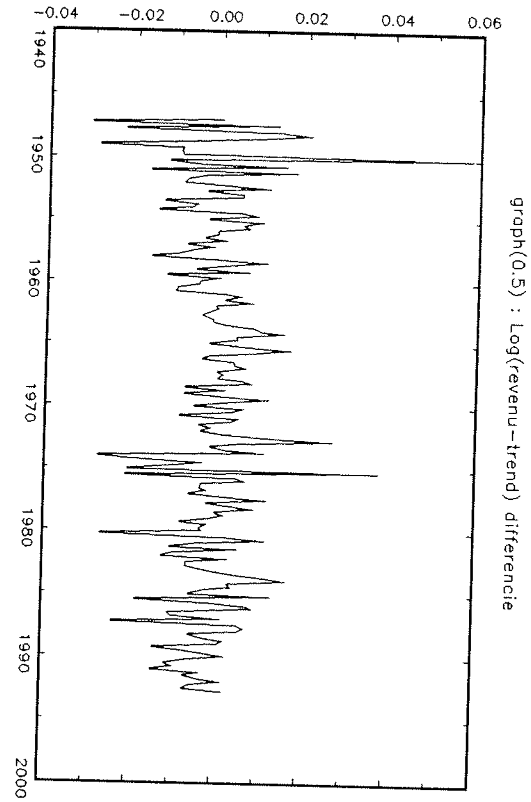

graph(1.2) : log de la consommation des biens durables
7.8
7.9
8.0
8.1
8.2
8.3
8.4
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000

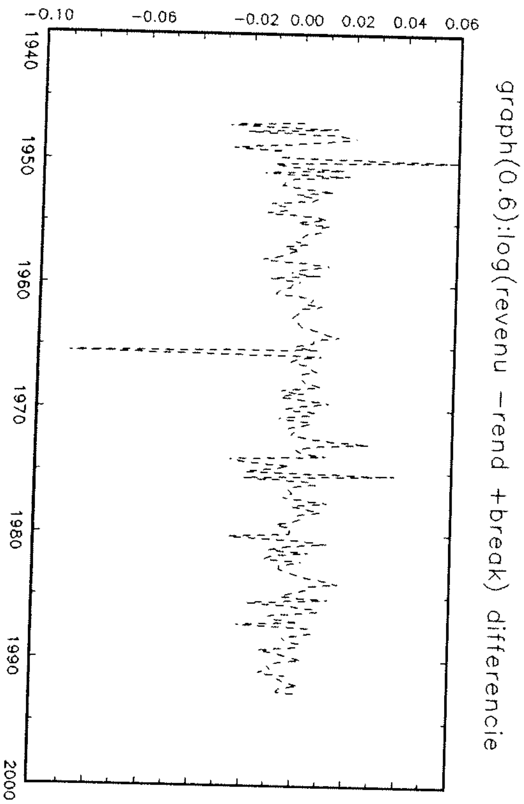

graph(0.3): Log(revenu - trend)
8.54 8.58 8.62 8.66 8.70 8.74
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000

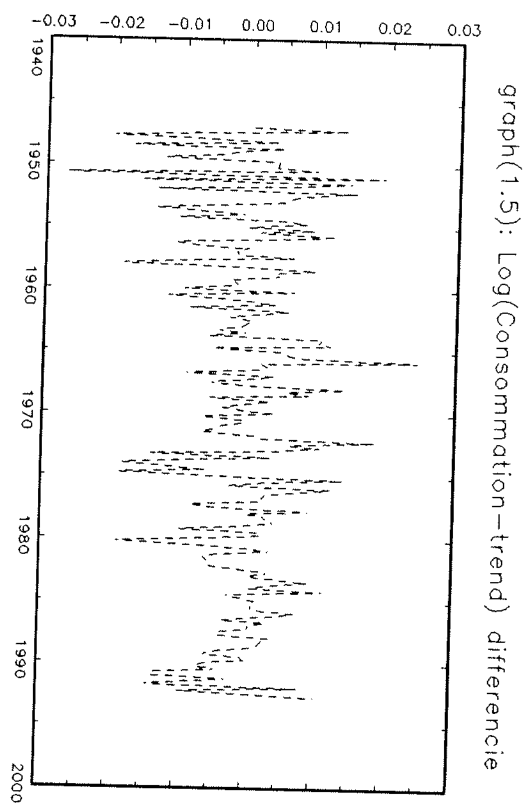

graph(0.4):log(revenu - trend avec break)
8.60 8.62 8.64 8.66 8.68 8.70 8.72 8.74
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000

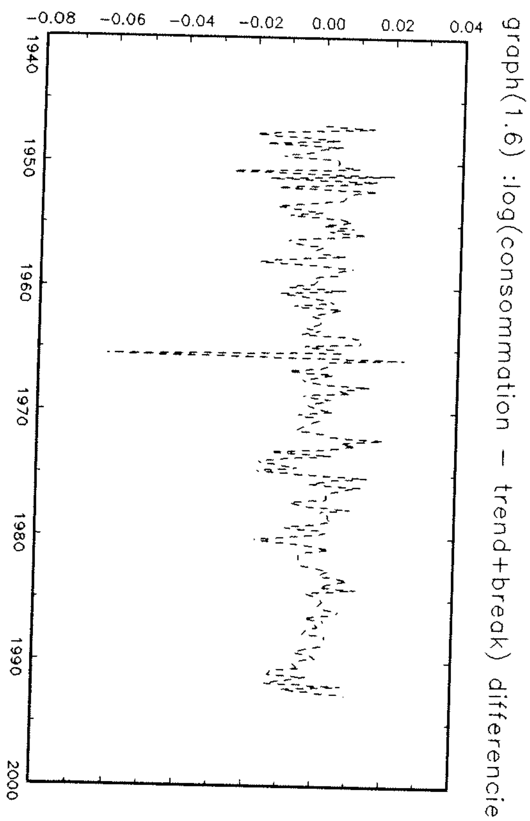

graph(1.3): Log(Consommation - trend)
7.78 7.82 7.86 7.90 7.94
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000


graph(1.4): Log(consommation - trend +break)
7.81 7.82 7.83 7.84 7.85 7.86 7.87 7.88 7.89 7.90
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000


graph(0.5) : Log(revenu-trend) differencie
-0.04 -0.02 0.00 0.02 0.04 0.06
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000


graph(0.6):log(revenu -rend +break) differencie
-0.10 -0.06 -0.02 0.00 0.02 0.04 0.06
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000


graph(1.5): Log(Consommation-trend) differencie
-0.03 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.03
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000


graph(1.6) :log(consommation - trend+break) differencie
-0.08 -0.06 -0.04 -0.02 0.00 0.02 0.04
1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000