Université de Montréal

Formules de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel

par

Nadia Bahri

Département de mathématiques et statistique

Faculté des études supérieures

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Août 2012

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Formules de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel

présenté par :

Nadia Bahri

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

André Giroux
(président-rapporteur)

Qazi Ibadur Rahman
(directeur de recherche)

Richard Fournier
(membre du jury)

Sommaire

Ce mémoire contient quelques résultats sur l'intégration numérique. Ils sont liés à la célèbre formule de quadrature de K. F. Gauss. Une généralisation très intéressante de la formule de Gauss a été obtenue par P. Turán. Elle est contenue dans son article publié en 1948, seulement quelques années après la seconde guerre mondiale. Étant données les circonstances défavorables dans lesquelles il se trouvait à l'époque, l'auteur (Turán) a laissé beaucoup de détails à remplir par le lecteur. Par ailleurs, l'article de Turán a inspiré une multitude de recherches ; sa formule a été étendue de différentes manières et plusieurs articles ont été publiés sur ce sujet. Toutefois, il n'existe aucun livre ni article qui contiennent un compte-rendu détaillé des résultats de base, relatifs à la formule de Turán. Je voudrais donc que mon mémoire comporte suffisamment de détails qui puissent éclairer le lecteur tout en présentant un exposé de ce qui a été fait sur ce sujet.

Voici comment nous avons organisé le contenu de ce mémoire.

1-a. La formule de Gauss originale pour les polynômes - L'énoncé ainsi qu'une preuve.

1-b. Le point de vue de Turán - Compte-rendu détaillé des résultats de son article.

2-a. Une formule pour les polynômes trigonométriques analogue à celle de Gauss.

2-b. Une formule pour les polynômes trigonométriques analogue à celle de Turán.

3-a. Deux formules pour les fonctions entières de type exponentiel, analogues à celle de Gauss pour les polynômes.

3-b. Une formule pour les fonctions entières de type exponentiel, analogue à celle de Turán.

4-a. Annexe A - Notions de base sur les polynômes de Legendre.

4-b. Annexe B - Interpolation polynomiale.

4-c. Annexe C - Notions de base sur les fonctions entières de type exponentiel.

4-d. Annexe D - L'article de P. Turán.

Mots-clés : formule de quadrature - polynômes - polynômes trigonométriques - fonctions entières de type exponentiel.

Summary

This mémoire contains some results about numerical integration. They are related to the famous quadrature formula of K. F. Gauss. A very interesting generalization of the formula of Gauss was obtained by P. Turán. It is contained in a paper that was published in 1948, only a few years after the second world war. Due to adverse circunstances he was in at the time, the author (Turán) left many details for the reader to fill in. Otherwise, the article of Turán inspired a multitude of research, and his formula has been extended in many ways and several papers have been written on this subject. However, there is no single book or paper where one can find a clear and comprehensive account of the basic results pertaining to Turán's formula. Thus, I would like my Master's mémoire to contain enough details that can enlighten the reader and present an exposition of much that has been done on this subject.

Here is how we have arranged the contents of the mémoire.

1-a. The original formula of Gauss for polynomials - statement along with a proof.

1-b. Turán's point of view - detailed account of the results contained in his paper.

2-a. A formula for trigonometric polynomials analogous to that of Gauss.

2-b. A formula for trigonometric polynomials analogous to that of Turán.

3-a. Two formulae for entire functions of exponential type, analogous to the one of Gauss for polynomials.

3-b. A formula for entire functions of exponential type, analogous to that of Turán.

4-a. Annexe A - Basic facts about Legendre polynomials.

4-b. Annexe B - Polynomial interpolation.

4-c. Annexe C - Basic facts about entire functions of exponential type.

4-d. Annexe D - Paper of P. Turán.

Key words : quadrature formula - polynomials - trigonometric polynomials - entire functions of exponential type.

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu mon directeur de recherche Monsieur Qazi Ibadur Rahman, pour son soutien scientifique, sa disponibilité illimitée ainsi que pour sa grande patience. Je lui en suis grandement reconnaissante. Je remercie aussi tous les professeurs qui m'ont enseigné.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail.

Je remercie également mes collègues ou plutôt frères Foued Zitouni et Mohamed Amine Hachani.

Je remercie tous ceux et toutes celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Merci infiniment à mes parents qui m'ont toujours encouragée et qui m'ont permis d'arriver là où je suis. Merci beaucoup.

Dernièrement, mais non les moindres, mes remerciements les plus sincères à mon époux pour son soutien, sa patience ainsi que ses encouragements dans les moments difficiles.

Sans oublier, bien sûr, un exceptionnel merci à mon adorable bébé.

Table des matières

Introduction

Il a été démontré par Gauss qu'un polynôme $f(x)$ de degré $< n$ est exactement déterminé par ses valeurs en n points distincts, tandis que l'intégrale sur [-1,1] d'un polynôme de degré $< 2n$ est exactement évaluée par la formule de Gauss si on connaît les valeurs de ce polynôme en seulement n points particuliers. Ces n points sont les zéros du polynôme de Legendre de degré n. Une généralisation de ce résultat a été donnée par Turán [12] sous la forme suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_{\nu}^{(\mu)} f^{(\mu)}(x_{\nu}). \tag{1}$$

Cette formule est valide pour tout polynôme de degré au plus $mn - 1$. Cependant, compte tenu de la formule de Gauss, on se demande s'il existe un choix approprié d'un système $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de n points distincts, pour lequel, la formule (1) serait valide pour des polynômes de degré $\geq mn$.

Dans son article intitulé *"On the theory of the mechanical quadrature"*, Turán [12] a donné la réponse sous la forme suivante :

(i) Pour $m \in \mathbb{N}$ impairs, il n'existe aucun système $X = (x_1, \cdots, x_n)$ pour lequel la formule (1) est valide pour tout polynôme de degré $\leq mn$.

(ii) Pour $m \in \mathbb{N}$ pairs, il existe un unique système $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ pour lequel la formule (1) est valide pour tout polynôme de degré $\leq (m+1)n - 1$.

(iii) Le système $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ est caractérisé par le fait que

$$\pi_{X^*}(x) := \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_{\nu}^*)$$

minimise l'intégrale

$$I_m(f) := \int_{-1}^{1} |f(x)|^{m+1}\,\mathrm{d}x$$

parmi tous les polynômes unitaires de degré n.

Si $m = 1$, alors on obtient la formule classique de Gauss.

Il existe un analogue à la formule de Turán pour les fonctions entières de type exponentiel. Selon le résultat de F. Carlson [1, Théorème 9.2.1], une fonction entière de type exponentiel $< \pi$ est exactement évaluée par ses valeurs en tous les entiers. Plus précisément, une fonction entière de type exponentiel τ appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$ est entièrement déterminée par ses valeurs en $0, \pm\frac{\pi}{\sigma}, \pm\frac{2\pi}{\sigma}, \cdots$ si $\tau \le \sigma$.

En utilisant le théorème de Paley-Wiener [1, Théorème 6.8.1], Boas [2] remarque que l'intégrale d'une fonction f de type exponentiel 2π appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$ peut être exactement évaluée si on connaît les valeurs de f en tous les entiers. En effet, ce résultat peut être formulé sous la forme plus générale suivante :

Soit f une fonction entière de type exponentiel 2σ appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2\sigma}\right).$$

Par ailleurs, Frappier et Rahman [4, Théorème 1] prouvent le résultat suivant, lequel est l'analogue au résultat de Gauss

Soit f une fonction entière de type exponentiel $\tau < 2\sigma$. Alors

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

pourvu que l'intégrale et la série soient convergentes.

Ce mémoire a pour objectif de détailler les résultats de Turán ainsi que d'énoncer quelques formules analogues en élaborant leurs preuves.

Au chapitre 1, nous allons commencer par présenter un énoncé de la formule de quadrature de Gauss pour les polynômes ainsi qu'une preuve de ce résultat. Ce même chapitre contiendra un compte-rendu détaillé des résultats de base reliés à la formule de Turán.

Ensuite, au chapitre 2, nous allons traiter une formule pour les polynômes trigonométriques analogue à la formule de Gauss. Nous énoncerons aussi un résultat analogue à celui de Turán. Nous allons expliquer en détail l'analogie entre ces formules.

Puis, on enchaînera avec le chapitre 3, où l'on énoncera deux formules pour les fonctions entières de type exponentiel, analogues à celle de Gauss pour les polynômes et où l'on étudiera une formule pour les fonctions entières de type exponentiel analogue à celle de Turán. Ce chapitre se terminera par une preuve de ce résultat, différente de celle déjà faite par Frappier et Rahman ; cette preuve est inspirée de l'article de Rahman et Schmeisser [10].

Finalement, le chapitre 4 contiendra quatre annexes comportant respectivement quelques notions de bases sur les polynômes de Legendre, l'interpolation polynomiale, des notions de base sur les fonctions entières de type exponentiel ainsi que l'article de Turán en question.

Chapitre 1

Formules de quadrature de Gauss, Gauss-Jacobi, Turán, etc.

1.1 La formule de Gauss

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un ensemble de n points distincts dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\omega(x) := \prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu) \quad \text{et} \quad \ell_\nu(x) := \frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x - x_\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \tag{1.1.1}$$

Pour tout polynôme f de degré $\leq n - 1$, on a

$$f(x) := \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\ell_\nu(x),$$

et par conséquent

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu), \tag{1.1.2}$$

où

$$\lambda_\nu := \int_{-1}^{1} \ell_\nu(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Gauss se pose la question : Existe-t-il des points $x_1, x_2, \dots, x_n$, pour lesquels la formule (1.1.2) est valide pour des polynômes de degré $\leq m$ où $m > n-1$? Clairement, une telle formule ne peut pas être vraie pour des polynômes de degré $2n$. En effet, si on prenait pour $x_1, x_2, \dots, x_n$, les n racines du polynôme $\prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu)^2$, on voit que le côté gauche de (1.1.2) est strictement positif tandis que celui de droite vaut zéro.

Cherchons alors un système de n points $x_1, x_2, \dots, x_n$, pour lequel la formule (1.1.2) est vraie pour tout polynôme de degré $\leq 2n - 1$.

Pour cela, on considère un polynôme quelconque g de degré $\leq 2n-1$ et on note par f, le polynôme de degré $\leq n-1$ tel que

$$f(x_\nu) = g(x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors,

$$g(x) - f(x) = \omega(x)h(x),$$

où h est un polynôme de degré $\leq n-1$. Puisque la formule de quadrature (1.1.2) est valide pour f, alors on a :

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) + \int_{-1}^{1} \omega(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu g(x_\nu) + \int_{-1}^{1} \omega(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la formule (1.1.2) est valide pour tout polynôme de degré $\leq 2n-1$ seulement si :

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pour tout polynôme h de degré $\leq n-1$.

Cette propriété exigée pour $\omega(x)$, est satisfaite par le polynôme unitaire de Legendre $\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{*}$ de degré n (voir Annexe A). En effet, c'est l'unique choix de ω pour lequel la formule (1.1.2) est vraie pour tout polynôme de degré $\leq 2n-1$.

Remarque

Le raisonnement utilisé au paragraphe 1.1 peut être facilement modifié afin de prouver le résultat suivant qui contient la formule de Gauss.

Théorème 1.1.1. *Soit* $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$ *le polynôme de Jacobi défini dans l'Annexe A. Notons* $x_1 < \cdots < x_n$ *les zéros de* $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ *qui sont tous dans (-1,1). Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que pour tout polynôme* p *de degré au plus* $2n-1$, *on a*

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu p(x_\nu). \tag{1.1.3}$$

Il est clair que la formule (1.1.3) n'est pas vraie pour des polynômes de degré $2n$.

Les coefficients λ_ν apparaissant dans le membre de droite de (1.1.3) sont appelés nombres de Christoffel. Ces nombres sont toujours positifs.

Dans le cas où $\alpha = \beta = -1/2$, les nombres de Christoffel λ_ν sont tous égaux à π/n et (1.1.3) aura la forme suivante :

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p\left(\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathcal{P}_{2n-1}. \tag{1.1.4}$$

1.2 Les idées de Turán

Considérant un ensemble de n points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En utilisant $\omega(x)$ et $\ell_\nu(x)$ définis en (1.1.1), on introduit

$$\ell_{\nu,0}(x) := \left(1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x - x_\nu)\right)\ell_\nu^2(x) \quad \text{et} \quad \ell_{\nu,1}(x) := (x - x_\nu)\ell_\nu^2(x). \tag{1.2.1}$$

Alors, par la formule de Fejér, pour tout polynôme f de degré $\leq 2n-1$ on a

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell_{\nu,0}(x) f(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \ell_{\nu,1}(x) f'(x_\nu). \tag{1.2.2}$$

En intégrant les deux côtés de (1.2.2) sur [-1,1], on obtient

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(0)} f(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(1)} f'(x_\nu), \tag{1.2.3}$$

où

$$\lambda_\nu^{(0)}(x) := \int_{-1}^{1} \ell_{\nu,0}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lambda_\nu^{(1)}(x) := \int_{-1}^{1} \ell_{\nu,1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans la formule (1.2.3), qui est valide pour tout polynôme de degré au plus $2n-1$, il n'y a pas de restriction sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à part le fait qu'ils doivent être distincts. Comme Gauss, on peut se demander s'il existe un système de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour lequel la formule (1.2.3) serait valide pour des polynômes de degré $\leq m$ où $m > 2n-1$. La réponse à cette question est "non". En effet, l'exemple du polynôme $\prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu)^2$ (étudié au paragraphe précédent) montre que pour tout choix $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la formule (1.2.3) ne peut pas être vraie pour les polynômes de degré $\leq 2n$.

Turán passe alors à l'étude de l'analogue de la formule de quadrature utilisant $f(x_\nu)$, $f'(x_\nu)$ et $f''(x_\nu)$.

Étant donné un ensemble de n points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il existe un polynôme $\ell_{\nu,0}$ de degré $3n-1$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\ell_{\nu,0}(x_\nu) = 1,\ \ell_{\nu,0}(x_\mu) = 0 \quad \forall\mu \neq \nu \quad \text{et} \quad \ell'_{\nu,0}(x_\mu) = \ell''_{\nu,0}(x_\mu) = 0 \quad \forall\mu. \tag{1.2.4}$$

Par ailleurs, il existe un polynôme $\ell_{\nu,1}$ de degré $3n-1$ tels que

$$\ell'_{\nu,1}(x_\nu) = 1,\ \ell'_{\nu,1}(x_\mu) = 0 \quad \forall\mu \neq \nu \quad \text{et} \quad \ell_{\nu,1}(x_\mu) = \ell''_{\nu,1}(x_\mu) = 0 \quad \forall\mu. \tag{1.2.5}$$

En plus, il existe un polynôme $\ell_{\nu,2}$ de degré $3n-1$ pour lequel

$$\ell''_{\nu,1}(x_\nu) = 1,\ \ell''_{\nu,2}(x_\mu) = 0 \quad \forall\mu \neq \nu \quad \text{et} \quad \ell_{\nu,2}(x_\mu) = \ell'_{\nu,2}(x_\mu) = 0 \quad \forall\mu. \tag{1.2.6}$$

Les polynômes fondamentaux $\ell_{\nu,0}$, $\ell_{\nu,1}$ et $\ell_{\nu,2}$ peuvent être calculés explicitement en terme de ℓ_ν, défini en (1.1.1). Pour cela, on doit utiliser la formule générale (4.2.8) présentée au chapitre “Annexe B ”. Pour commencer, nous devons reconnaître que dans la situation actuelle, les nombres α_ν apparaissant dans (4.2.8) sont tous égaux à 3. De plus, par (1.1.1) on a

$$\psi(z) = \prod_{\mu=1}^{n} (z - z_\mu)^3 = \{\omega(z)\}^3 = \{(z - z_\mu)\,\ell_\nu(z)\,\omega'(z_\nu)\}^3.$$

En utilisant (4.2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\ell_{\nu,0}(x) &= \frac{\psi(x)}{(x-x_\nu)^3}\,\frac{1}{0!}\sum_{\ell=0}^{2}\frac{1}{\ell!}\left[\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left\{\frac{(x-x_\nu)^3}{\psi(z)}\right\}\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu)^\ell \\
&= \{\ell_\nu(x)\,\omega'(x_\nu)\}^3\frac{1}{0!}\sum_{\ell=0}^{2}\frac{1}{\ell!}\left[\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left\{\frac{1}{\ell_\nu(x)\omega'(x_\nu)}\right\}^3\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu)^\ell \\
&= \{\ell_\nu(x)\}^3\sum_{\ell=0}^{2}\frac{1}{\ell!}\left[\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\frac{1}{\ell_\nu(x)^3}\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu)^\ell \\
&= \{\ell_\nu(x)\}^3\Bigg\{1+\frac{1}{1!}\left[-\frac{3\ell'_\nu(x)}{(\ell_\nu(x))^4}\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu) \\
&+ \frac{1}{2!}\left[12\frac{(\ell'_\nu(x))^2}{(\ell_\nu(x))^5}-\frac{3\ell''_\nu(x)}{(\ell_\nu(x))^4}\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu)^2\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme fondamental $l_{\nu,0}$ est de la forme suivante :

$$\ell_{\nu,0}(x) = \Big[1 - 3\ell_\nu'(x_\nu)(x-x_\nu) + \frac{3}{2}\Big\{4(\ell_\nu'(x_\nu))^2 - \ell_\nu(x_\nu)\Big\}(x-x_\nu)^2\Big]\,\ell_\nu(x)^3. \qquad (1.2.7)$$

Ce polynôme a toutes les propriétés énumérées en (1.2.4).

Clairement,

$$\begin{aligned}
\ell_{\nu,1}(x) &= \frac{\psi(x)}{(x-x_\nu)^2}\,\frac{1}{1!}\sum_{\ell=0}^{1}\frac{1}{\ell!}\left[\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left\{\frac{(x-x_\nu)^3}{\psi(z)}\right\}\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu)^\ell \qquad (1.2.8)\\
&= (x-x_\nu)\{\ell_\nu(x)\,\omega'(x_\nu)\}^3\left\{\frac{1}{1!}\,\frac{1}{(\ell_\nu(x_\nu)\,\omega'(x_\nu))^3}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{(\ell_\nu(x_\nu)\,\omega'(x_\nu))^3}\right]_{x=x_\nu}(x-x_\nu)\right\}\\
&= (x-x_\nu)\Big\{1-3\ell_\nu'(x_\nu)(x-x_\nu)\Big\}\ell_\nu^3(x).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\ell_{\nu,2}(x) &= \frac{\psi(x)}{x-x_\nu}\,\frac{1}{2!}\,\frac{1}{0!}\left[\frac{(x-x_\nu)^3}{\psi(z)}\right]_{x=x_\nu} \qquad (1.2.9)\\
&= \frac{1}{2}(x-x_\nu)^2\{\ell_\nu(x)\,\omega'(x_\nu)\}^3\frac{1}{(\ell_\nu(x_\nu)\,\omega'(x_\nu))}\\
&= \frac{1}{2}\,(x-x_\nu)^2\ell_\nu(x)^3.
\end{aligned}$$

En vue des propriétés des polynômes fondamentaux $\ell_{\nu,0}$, $\ell_{\nu,1}$ et $\ell_{\nu,2}$, la formule

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,\ell_{\nu,0}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} f'(x_\nu)\,\ell_{\nu,1}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} f''(x_\nu)\,\ell_{\nu,2}(x) \qquad (1.2.10)$$

est valide pour tout polynôme de degré $\leq 3n-1$.

Pour $\nu = 1, \ldots, n$, on pose

$$\lambda_\nu^{(j)} := \int_{-1}^{1}\ell_{\nu,j}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour} j = 0,1,2. \qquad (1.2.11)$$

En intégrant les deux côtés de la formule (1.2.10) sur [-1,1], on voit que pour tout polynôme f de degré $\leq 3n-1$, on obtient la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(0)} f(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(1)} f'(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(2)} f''(x_\nu). \tag{1.2.12}$$

Dans cette formule, les points $x_1, \ldots, x_n$ doivent être distincts.

Maintenant, on se pose la question suivante : Existe-t-il un système $(x_1, \ldots, x_n)$ de n points distincts pour lequel la formule de quadrature (1.2.12) est valide pour tout polynôme de degré $\leq 4n-1$?

Tout d'abord, nous observons que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un tel système et que si $\omega(x) := \prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu)$, alors

$$I(h) := \int_{-1}^{1} \omega(x)^3\, h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pour tout}\, h \in \mathcal{P}_{n-1}, \tag{1.2.13}$$

cette intégrale $I(h)$ doit être nulle pour tout polynôme h de degré $\leq n-1$. Afin de prouver ce résultat, considérons un polynôme quelconque f de degré $\leq 4n-1$. Cherchons alors un polynôme g de degré $\leq 3n-1$ tel que

$$g(x_\nu) = f(x_\nu),\; g'(x_\nu) = f'(x_\nu) \text{ et } g''(x_\nu) = f''(x_\nu), \tag{1.2.14}$$

pour $\nu = 1, \ldots, n$. À partir de (1.2.14), on remarque que

$$f(x) - g(x)$$

possède des zéros de multiplicité 3 en chacun des points x_ν. Alors

$$f(x) - g(x) = \omega(x)^3\, h(x), \tag{1.2.15}$$

où h est un polynôme de degré $\leq n-1$. La formule de quadrature (1.2.12) est sûrement valide pour g puisqu'il est de degré $\leq 3n-1$. D'où, par (1.2.12) et (1.2.14), on a

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(0)} f(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(1)} f'(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(2)} f''(x_\nu). \tag{1.2.16}$$

Ainsi, en raison de (1.2.15), la formule de quadrature (1.2.12) est valide pour f si (1.2.13) est vraie. Autrement dit, (1.2.13) *est une condition suffisante pour que* (1.2.12) *soit valide pour tout polynôme de degré* $\leq 4n-1$. *Cette condition est aussi nécessaire.* En effet, pour tout polynôme g de degré $\leq 3n-1$, le polynôme $f(x) := g(x) + \omega(x)^3\, h(x)$ est de degré $\leq 4n-1$. Puisque (1.2.12) est valide pour g, alors elle est valide pour f seulement si

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)^3\, h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La question se pose : *Exite-t-il un* ω *pour lequel* (1.2.13) *est valide* ?

Essayons alors de déterminer s'il existe ou non un système $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)\, h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu)\, h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pour tout}\, h \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Pour cela, on désigne par $\mathcal{P}_k^*$ la classe de tous les polynômes $p \in \mathcal{P}_k$ où le coefficient de x^k est 1, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_k^* := \Big\{ p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j\, x^j \Big\}, \text{ ce sont les polynômes unitaires de degré}\, k.$$

En anglais, ces polynômes sont appelés “ monic polynomials of degree k ”.

On note que $\pi_n \in \mathcal{P}_n^*$ si et seulement si $\pi_n(x) = \omega(x) + h(x)$, où $h \in \mathcal{P}_{n-1}$ et donc si $\overline{h}(z) := \overline{h(\overline{z})}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^4 \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} |\omega(x) + h(x)|^4 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \{\omega(x) + h(x)\}^2 \{\omega(x) + \overline{h}(x)\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} |\omega(x)|^4 \mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} \omega(x)^3 \{h(x) + \overline{h}(x)\} \mathrm{d}x \\ &+ \int_{-1}^{1} \Big[\, |h(x)|^2 + \omega(x)\{h(x) + \overline{h}(x)\}\Big]^2 \mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} |h(x)|^2 \omega(x)^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'où, si

$$\Delta := \int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^4 \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} |\omega(x))|^4 \mathrm{d}x$$

alors

$$\Delta \geq 2\int_{-1}^{1} \omega(x)^3 h(x) \mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} \omega(x)^3 \overline{h}(x) \mathrm{d}x, \tag{1.2.17}$$

où l'égalité est vraie *seulement si*

$$\int_{-1}^{1} \Big[\, |h(x)|^2 + \omega(x)\{h(x) + \overline{h}(x)\}\Big]^2 \mathrm{d}x = 0, \tag{1.2.18}$$

et aussi

$$\int_{-1}^{1} |h(x)|^2 \omega(x)^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{1.2.19}$$

Clairement, la deuxième intégrale du membre de droite de (1.2.17) est nulle si et seulement si la première l'est. D'où, si (1.2.13) est vraie et si $\pi_n \neq \omega$, alors $\Delta > 0$; c'est-à-dire que ω minimise l'intégrale $\int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^4 \mathrm{d}x$ parmi tous les polynômes appartenant à $\mathcal{P}_n^*$. Il est préférable de rappeler au lecteur que ω est de degré n. Il est alors plus approprié d'écrire ω_n au lieu de ω.

À ce stade, il est naturel de se demander s'il existe vraiment un polynôme $\pi_{n,*}$ qui minimise l'intégrale $\int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^4 \mathrm{d}x$ parmi tous les polynômes appartenant à $\mathcal{P}_n^*$. L'existence et l'unicité de $\pi_{n,*}$ sont prouvées par D. Jackson [6].

Maintenant, montrons que

$$\int_{-1}^{1} \Big\{\pi_{n,*}(x)\Big\}^3 h(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pour tout}\, h \in \mathcal{P}_{n-1}. \tag{1.2.20}$$

Si ce résultat n'est pas vrai, alors il existe un polynôme $h_* \in \mathcal{P}_{n-1}^*$ tel que

$$\int_{-1}^{1} \Big\{\pi_{n,*}(x)\Big\}^3 h_*(x)\mathrm{d}x < 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, nous aurions

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |\pi_{n,*}(x)|^4 \mathrm{d}x \;&<\; \int_{-1}^{1} |\pi_{n,*}(x) + \epsilon\, h_*(x)|^4 \mathrm{d}x \\
&=\; \int_{-1}^{1} |\pi_{n,*}(x)|^4 \mathrm{d}x + 2\epsilon \int_{-1}^{1} \{\pi_{n,*}(x)\Big\}^3 \{h_*(x) + \overline{h}_*(x)\}\mathrm{d}x \\
&+\; \epsilon^2 \int_{-1}^{1} \Big[\, |h_*(x)|^2 + \pi_{n,*}(x)\{h_*(x) + \overline{h}_*(x)\}\Big]^2 \mathrm{d}x \\
&+\; 2\,\epsilon^2 \int_{-1}^{1} |h_*(x)|^2 \{\pi_{n,*}(x)\}^2 \mathrm{d}x \\
&<\; \int_{-1}^{1} |\pi_{n,*}(x)|^4 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$ *suffisamment petit*. D'où (1.2.20) est vraie.

Ainsi, nous avons démontré que (1.2.13) est valide si et seulement si $\omega = \pi_{n,*}$. On obtient le résultat suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit $\pi_{n,*}(x) := \prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu)$ l'unique polynôme de degré n tel que $\int_{-1}^{1} |\pi_{n,*}(x)|^4 \mathrm{d}x < \int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^4 \mathrm{d}x$ pour tout $\pi_n \in \mathcal{P}_n^*$. Alors la formule de quadrature (1.2.12) est vraie pour tout polynôme f de degré $\leq 4n-1$.*

Formule de Tschakaloff et généralisation du théorème 1.2.1

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système de n points distincts et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ n entiers . Pour tout $\nu\in\{1,\dots,n\}$ et pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, considérons le polynôme $l_{\nu,k}$ de degré $\le N:=\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}$ tel que

$$\ell_{\nu,k}^{(j)}(x_\mu)=\begin{cases}1 & \text{si } \mu=\nu \text{ et } j=k,\\ 0 & \text{si } \mu=\nu \text{ et } j\in\{0,\dots,\alpha_\nu-1\}\backslash\{k\},\\ 0 & \text{si } \mu\neq\nu \text{ et } j=0,\dots,\alpha_\nu-1.\end{cases}$$

Alors, par le théorème 4.2.1 (voir formule (4.2.9)), on obtient la représentation suivante :

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\Big[f(x_\nu)\,\ell_{\nu,0}(x)+f'(x_\nu)\,\ell_{\nu,1}(x)+\dots+f^{(\alpha_\nu-1)}(x_\nu)\,\ell_{\nu,\alpha_\nu-1}(x)\Big],\tag{1.2.21}$$

cette formule est valide pour tout polynôme de degré $\le N:=\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}$. En effet, la différence des deux côtés de (1.2.21) constitue un polynôme de degré $\le N$ qui possède des zéros de multiplicité α_ν en x_ν pour chaque $\nu\in\{1,\dots,n\}$. En tenant compte de la multiplicité de chaque zéro, on compte au moins $N+1$ zéros.

En intégrant les deux côtés de (1.2.21), on obtient la formule de quadrature de L.Tschakaloff [11]

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)}+f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)}+\dots+f^{(\alpha_\nu-1)}(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(\alpha_\nu-1)}\Big\},\tag{1.2.22}$$

valide pour tout polynôme de degré $\le N:=\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}$.

En particulier, prenons $\alpha_1=\dots=\alpha_n=m$, on obtient la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_{\nu,k}f^{(k)}(x_\nu),\tag{1.2.23}$$

avec

$$\lambda_{\nu,k}:=\int_{-1}^{1}\ell_{\nu,k}(x)\,\mathrm{d}x\qquad(0\le k\le m-1),$$

où $\ell_{\nu,k}(x)$, $(\nu=1,\dots,n;k=0,1,\dots,m-1)$ sont des polynômes chacun de degré au plus $mn-1$ tel que

$$\ell_{\nu,k}(x_\nu)=\delta_{\nu,j}\cdot\delta_{k,j}$$

avec

$$\delta_{\rho,\lambda}:=\begin{cases}0 & \text{si } \rho\neq\lambda,\\ 1 & \text{si } \rho=\lambda.\end{cases}$$

Turán [12] n'a pas juste démontré le théorème 1.2 mais encore plus le résultat général suivant :

Théorème 1.2.2. *(i) Pour $m \in \mathbb{N}$ impairs, il n'existe aucun système $(x_1, \ldots, x_n)$ pour lequel la formue (1.2.23) est valide pour tout polynôme de degré $\leq mn$.*

(ii) Pour $m \in \mathbb{N}$ pairs, il existe un unique système $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ pour lequel la formule (1.2.23) est valide pour tout polynôme de degré $\leq (m+1)n - 1$.

(iii) Le système $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est caractérisé par le fait que

$$\pi_{X^*}(x) := \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu^*)$$

minimise l'intégrale

$$I_m(f) := \int_{-1}^{1} |f(x)|^{m+1} \, \mathrm{d}x$$

parmi tous les polynômes unitaires de degré n.

On rappelle qu'un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ est dit unitaire si $a_n = 1$.

Chapitre 2

Formules de quadrature pour des polynômes trigonométriques analogues à celles de Gauss et de Turán

2.1 Formule analogue à celle de Gauss

Un polynôme trigonométrique $t(\theta) := \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \, e^{i\nu\theta}$ possède $2n+1$ coefficients, ainsi il peut être exactement déterminé si on connaît ses valeurs en $2n+1$ points distincts. Connaître les valeurs de ce polynôme en $2n$ points seulement ou moins ne sera pas suffisant pour le déterminer. Cependant, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ du polynôme trigonométrique t sur $[-\pi, \pi]$ est correctement évaluée en termes des valeurs de t en $2n$ points particuliers θ_ν tel que

$$\theta_\nu := \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}, \quad \nu = -n+1, -n+2, \ldots, 0, \ldots, n-1, n, \tag{2.1.1}$$

à condition que le degré de t ne dépasse pas $2n-1$. On obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1.1. *Pour tout polynôme trigonométrique* $t(\theta) := \sum_{\nu=-(2n-1)}^{(2n-1)} c_\nu \, e^{i\nu\theta}$, *de degré* $< 2n$, *on a*

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-(n-1)}^{n} t\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right). \tag{2.1.2}$$

L'exemple $t(\theta) := 1 + \cos 2n\theta$ montre que la formule (2.1.2) *n'est pas vraie pour tout* polynôme trigonométrique de degré $2n$.

Nous allons présenter deux preuves différentes du théorème 2.1.1.

Si $\mathfrak{Re} c_\nu = a_\nu$ et $\mathfrak{Im} c_\nu = b_\nu$ pour $\nu = -(2n-1), \ldots, 0, \ldots, (2n-1)$, alors on écrit

$t(\theta) = U(\theta) + iV(\theta)$, où

$$U(\theta) := \sum_{\nu=-(2n-1)}^{(2n-1)} a_\nu \, e^{i\nu\theta}, \quad V(\theta) := \sum_{\nu=-(2n-1)}^{(2n-1)} b_\nu \, e^{i\nu\theta}.$$

On voit que (2.1.2) est valide pour tout polynôme trigonométrique à coefficients dans $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est valide pour les polynômes trigonométriques à coefficients tous réels. Donc ci-après, nous allons supposer que les coefficients de t sont tous réels. En utilisant la notation définie en (2.1.1), on peut écrire (2.1.2) comme suit :

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-(n-1)}^{n} t(\theta_\nu).$$

Puisque

$$\theta_\nu = -\theta_{-\nu-1} \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

alors la formule de quadrature est trivialement valide pour les polynômes trigonométriques impairs de degré $< 2n$. En effet, $\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta) \, \mathrm{d}\theta$ et $\sum_{\nu=-(n-1)}^{n} t(\theta_\nu)$ s'annulent, tous les deux, pour tout polynôme trigonométrique. Par conséquent, il suffit de démontrer (2.1.2) pour les polynômes trigonométriques pairs.

Première preuve du Théorème 2.1.1. Tel qu'observé ci dessus, on peut supposer $t(\theta) := \sum_{\nu=-(2n-1)}^{(2n-1)} c_\nu \, \cos \nu\theta$, où les coefficients c_ν sont tous réels.
Puisque

$$\cos \nu \, \theta = \frac{\nu}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor \nu/2 \rfloor} (-1)^j \, \frac{(\nu - j - 1)!}{j!(\nu - 2j)!} \, (2 \cos \theta)^{\nu - 2j},$$

pour laquelle nous avons simplement besoin de rappeler que

$$T_n(x) = \cos n \arccos x = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \, \frac{(n - m - 1)!}{m!(n - 2m)!} \, (2x)^{n-2m},$$

on peut écrire

$$t(\theta) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_\nu (\cos \theta)^k = p \, (\cos \theta),$$

où $p(x) := \sum_{\nu=0}^{2n-1} a_\nu x^\nu$ est un polynôme de degré $\leq 2n - 1$.

Alors la formule (2.1.2) aura la forme suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-(n-1)}^{n} p\left(\cos\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) = \frac{2\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p\left(\cos\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right),$$

où $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$.

Cette formule peut aussi s'écrire comme suit

$$2\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-(n-1)}^{n} p\left(\cos\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) = \frac{2\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p\left(\cos\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right),$$

à savoir que

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-(n-1)}^{n} p\left(\cos\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) \quad \text{pour tout}\, p \in \mathcal{P}_{2n-1},$$

qui est tout simplement la formule de quadrature de Gauss-Jacobi (1.1.4). □

Deuxième preuve du Théorème 2.1.1. Soit

$$\omega = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right), \text{où}\, k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, (2n-1)\}.$$

Alors

$$\omega^2 \neq 1 \quad \text{et} \quad (\omega^2)^{2n} = 1.$$

Donc

$$1 + \omega^2 + \cdots + \omega^{4n-2} = \frac{1-\omega^{4n}}{1-\omega^2} = 0.$$

Il en découle que

$$\sum_{\nu=-n+1}^{n} \omega^{2\nu-1} = \omega^{-2n+1}\left(1 + \omega^2 + \cdots + \omega^{4n-2}\right) = 0,$$

et par conséquent

$$\sum_{\nu=-n+1}^{n} \exp\left(\frac{ik(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) = 0 \quad \text{pour}\, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2n-1). \tag{2.1.3}$$

Maintenant, soit $t(\theta) := \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} c_k\, e^{ik\theta}$ un polynôme trigonométrique quelconque de degré au plus $2n-1$. Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = c_0 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 2\,\pi c_0, \tag{2.1.4}$$

puisque $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = 0$ pour $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(2n-1)$. D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-n+1}^{n} t\left(\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) &= \sum_{\nu=-n+1}^{n} \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} c_k e^{ik\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}} \\ &= \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} c_k \sum_{\nu=-n+1}^{n} \exp\left(\frac{ik(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) \\ &= c_0 \sum_{\nu=-n+1}^{n} 1 \end{aligned}$$

par (2.1.3). Donc

$$\sum_{\nu=-n+1}^{n} t\left(\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) = 2n\,c_0. \tag{2.1.5}$$

La formule désirée découle de (2.1.4) et (2.1.5). □

2.2 Un analogue du Théorème 1.2.2 pour les polynômes trigonométriques

Le résultat de Olivier et Rahman [9, Lemme1] suivant contient une formule de quadrature pour les polynômes trigonométriques, qui est analogue au Théorème 1.2.2.

Théorème 2.2.1. *Soit t un polynôme trigonométrique de degré $< (m+1)n$ avec m impair et $n \geq 1$. Nous avons alors :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu pair}}^{m-1} \frac{1}{(2n)^{\mu}}\, a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-n+1}^{n} t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu-1)\,\pi}{2n}\right) \tag{2.2.1}$$

où $a_{0,0} = 1$ tandis que pour $m > 1$ les $a_{\mu,m-1}$ sont donnés par

$$\sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu pair}}^{m-1} a_{\mu,m-1} z^{\mu} = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2} \left(1 + \frac{z^2}{\mu^2}\right). \tag{2.2.2}$$

Le lecteur trouvera une démonstration bien détaillée dans l'article de Olivier et Rahman [9, pp.522-526].

Chapitre 3

Formule de quadrature de Gauss pour les fonctions entières de type exponentiel et un analogue de la formule de Turán

3.1 Formule de quadrature de Gauss pour les fonctions entières de type exponentiel

Le polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$ de degré $< n$ est exactement déterminé par ses valeurs en n'importe quel ensemble de n points distincts. Cependant, l'intégrale sur [-1,1] d'un polynôme de degré $< 2n$ est correctement évaluée par la formule de Gauss si on connaît les valeurs de ce polynôme en n points particuliers ; ce sont les n zéros du polynôme de Legendre de degré n.

Il est connu [1, Corollaire 9.4.4] que si f_1 et f_2 sont deux fonctions entières de type exponentiel toutes les deux $o(e^{\sigma|z|})$ quand $|z| \to \infty$ et qui sont égales aux points

$$0, \pm\frac{\pi}{\sigma}, \pm\frac{2\pi}{\sigma}, \cdots ,$$

alors elles doivent être identiques. Cela veut dire qu'une fonction entière de type exponentiel est complètement déterminée par ses valeurs en ces points à condition que $f(z) = o(e^{\sigma|z|})$ quand $|z| \to \infty$. Tel qu'expliqué au second paragraphe de la preuve du Théorème 1 dans [5], si f est une fonction entière de type exponentiel σ appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$, alors $f(z) = o(e^{\sigma|z|})$ quand $|z| \to \infty$. Ainsi, une fonction entière de type exponentiel τ appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$ est entièrement déterminée par ses valeurs en $0, \pm\frac{\pi}{\sigma}, \pm\frac{2\pi}{\sigma}, \cdots$ si $\tau \leq \sigma$. Il n'en est pas de même pour $\tau > \sigma$. En effet, supposons que

$\tau > \sigma$ alors les fonctions

$$f_\epsilon(z) := \left(\frac{\sin \epsilon z}{z}\right)^2 \sin \sigma z \qquad \left(0 < \epsilon < \frac{\tau - \sigma}{2}\right)$$

sont toutes de type exponentiel τ, appartiennent à $L^1(-\infty, \infty)$ et sont égales en tous les points $0, \pm\frac{\pi}{\sigma}, \pm\frac{2\pi}{\sigma}, \cdots$ sans être identiques.

En utilisant le théorème de Paley-Wiener [1, Théorème 6.8.1] en conjonction avec la formule de sommation de Poisson de la théorie des intégrales de Fourier, Boas [2] conclut que l'intégrale d'une fonction f de type exponentiel 2π appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$, peut être complètement évaluée si on connaît les valeurs de f en tous les entiers. En effet, la conclusion peut être formulée sous la forme plus générale suivante :

Théorème 3.1.1. *Soit f une fonction entière de type exponentiel 2σ appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{(2\nu - 1)\,\pi}{2\sigma}\right). \tag{3.1.1}$$

Il convient de noter que (3.1.1) utilise les valeurs de la fonction aux points $0, \pm\frac{\pi}{\sigma}, \pm\frac{2\pi}{\sigma}$, $\pm\,\frac{3\pi}{\sigma}, \ldots$ mais encore elle évalue correctement l'intégrale de toute fonction entière de type exponentiel 2σ appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$. Nous allons donc la voir comme une formule de quadrature de Gauss.

L'utilité de (3.1.1) est compromise par le fait qu'on exige que f appartienne à $L^1(-\infty, \infty)$ puisque cette formule exclut la possibilité d'évaluer plusieurs intégrales familières comme $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. En partant d'ici, Frappier et Rahman [4] cherchent des conditions sous lesquelles (3.1.1) devient valide si l'intégrale est prise au sens de Cauchy sur $(-\infty, \infty)$.

Rappelons qu'une fonction f est intégrable au sens de Cauchy sur $(-\infty, \infty)$ si elle est intégrable sur $(0, R)$ et $(-R, 0)$ pour tout $R > 0$, et si $I_1 := \lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 := \lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{0}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$ existent. La somme de I_1 et I_2 est appelée l'intégrale de f au sens de Cauchy et elle est habituellement notée par $\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Frappier et Rahman [4, Théorème 1] prouvent le résultat suivant, lequel est l'analogue au Théorème 3.1.1

3.2 Analogue de la formule de Turán pour les fonctions entières de type exponentiel

Théorème 3.2.1. *Soit f une fonction entière de type exponentiel $\tau < 2\sigma$. Alors*

$$\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \tag{3.2.1}$$

pourvu que l'intégrale et la série, dans (3.2.1), soient convergentes.

Exemple.

Soit $f(z) := (\sin 2\sigma z)/z$. Alors $\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$ tandis que $\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = \frac{\pi}{\sigma} f(0) = 2\pi$, de sorte que $\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$.
Ce qui montre que $\tau = 2\sigma$ n'est pas admissible à (3.2.1).

Démonstration du théorème 3.2.1. Soient $T > 0$ et N un entier naturel. On définit le rectangle suivant :

$$\mathfrak{R} := \{z \in \mathbb{C} : -N - \frac{1}{2} \leq \mathfrak{Re} z \leq N + \frac{1}{2}, \mathfrak{Im} z \leq T\}$$

et on note par Γ_N le bord de ce rectangle.

Soit f une fonction entière de type exponentiel $b < 2\pi$. Alors d'après le théorème des résidus on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \pi \cot(\pi z) f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{\nu=-N}^{N} \Big\{\text{résidu de}\, \pi(\cot \pi z) f(z) \,\text{en}\, z = \nu\Big\}, \\
&= \sum_{\nu=-N}^{N} \lim_{z \to \nu} \left\{(z - z_\nu) \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} f(z)\right\}, \\
&= \sum_{\nu=-N}^{N} f(\nu). \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que $\cot \pi z$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\cot \pi z = i \left(\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right) = -i \left(\frac{e^{-2i\pi z} + 1}{e^{-2i\pi z} - 1}\right) = -i \left(1 + \frac{2}{e^{-2i\pi z} - 1}\right). \tag{3.2.3}$$

Nous pouvons aussi représenter $\cot \pi z$ comme suit :

$$\cot \pi z = i\left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi z} - 1}\right). \tag{3.2.4}$$

On note par $\Gamma_{N,1}$, la partie de Γ_N située dans le demi plan supérieur fermé et par $\Gamma_{N,2}$ le reste. Puisque f est une fonction entière, le théorème de Cauchy nous donne

$$-\int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.2.5}$$

Ainsi, en utilisant (3.2.3) et la première égalité dans (3.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z &= -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\left(1 + \frac{2}{e^{-2i\pi z} - 1}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\left(\frac{1}{e^{-2i\pi z} - 1}\right)\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

et en utilisant (3.2.4) et la deuxième égalité de (3.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi z} - 1}\right)\mathrm{d}z \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\left(\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}\right)\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Par (3.2.6), (3.2.7) et (3.2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_N} f(z)\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\frac{1}{e^{-2i\pi z} - 1}\,\mathrm{d}z \\ &- \int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}\,\mathrm{d}z \\ &= \pi\sum_{\nu=-N}^{N} f(\nu) + \int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\frac{1}{e^{-2i\pi z} - 1}\,\mathrm{d}z \\ &- \int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Désignons par $[N+\frac{1}{2}+iT, -N-\frac{1}{2}+iT]$ le segment de droite d'origine $N+\frac{1}{2}+iT$ et d'extrémité $-N-\frac{1}{2}+iT$. Soit $z = x+iT$ un point de ce segment. Alors

$$\left|\frac{1}{e^{-2i\pi z}-1}\right| = \left|\frac{1}{e^{-2i\pi(x+iT)}-1}\right| = \left|\frac{1}{e^{2\pi T}\cdot e^{-2i\pi x}-1}\right| \leq \frac{1}{e^{2\pi T}-1},$$

ce qui implique que

$$\left|\int_{[N+\frac{1}{2}+iT,-N-\frac{1}{2}+iT]} f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{2N+1}{e^{2\pi T}-1} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad T\to\infty. \tag{3.2.9}$$

Par hypothèse, f est de type exponentiel $b < 2\pi$. Par ailleurs, f est supposée être intégrable au sens de Cauchy sur l'axe réel. Tel que mentionné dans l'Annexe C, cela implique que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$. En particulier, $|f(x)|$ est bornée sur l'axe réel. Ce qui implique que

$$|f(z)| \leq Ce^{b|\mathfrak{Im} z|} \quad \text{pour un} \quad C < \infty. \tag{3.2.10}$$

Maintenant, on note par $I_{N,1,1}$ l'intégrale de $f(z)\frac{1}{e^{-2i\pi z}-1}$ sur la demi-droite $z = N+\frac{1}{2}+iy$, $0 \leq y \leq \infty$. Alors, en utilisant (3.2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
|I_{N,1,1}| &= \left|\int_0^\infty f(N+\frac{1}{2}+iy)\,\frac{1}{e^{-2i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}-1}\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \left|\int_0^\infty f(N+\frac{1}{2}+iy)\,\frac{1}{e^{2\pi y}+1}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \int_Y^\infty \frac{|f(N+\frac{1}{2}+iy)|}{e^{2\pi y}+1}\,\mathrm{d}y + \int_0^Y f(N+\frac{1}{2}+iy)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq C\int_Y^\infty e^{-(2\pi-b)y}\,\mathrm{d}y + \int_0^Y f(N+\frac{1}{2}+iy)|\,\mathrm{d}y \qquad \text{par (1.3.10).}
\end{aligned}$$

Maintenant, soit ϵ un nombre positif. Choisissons $Y = Y_\epsilon$ tel que

$$C\int_{Y_\epsilon}^\infty e^{-(2\pi-b)}\,\mathrm{d}y < \frac{\epsilon}{16}$$

ensuite, choisissons N si grand que (en utilisant Théorème 4.3.5 de l'Annexe C)

$$\int_0^{Y_\epsilon} |f(N+\frac{1}{2}+iy)|\,\mathrm{d}y < \frac{\epsilon}{16}.$$

Nous aurions alors

$$|I_{N,1,1}| < \frac{\epsilon}{8}. \tag{3.2.11}$$

D'une façon similaire, nous pouvons démontrer que si $I_{N,1,2}$ dénote l'intégrale de $f(z)\dfrac{1}{e^{-2i\pi z}-1}$ sur la demi-droite $z = -N - \frac{1}{2} + iy$, $0 \leq y \leq \infty$, alors

$$|I_{N,1,2}| < \frac{\epsilon}{8}. \tag{3.2.12}$$

Nous remarquons que la partie horizontale de $\Gamma_{N,1}$ dépend de T, mais par (3.2.9) l'intégrale de $f(z)\dfrac{1}{e^{-2i\pi z}-1}$ sur cette partie tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. D'où, par (3.2.11) et (3.2.12),

$$\left|\int_{\Gamma_{N,1}} f(z)\frac{1}{e^{-2i\pi z}-1}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{pour tout grand } T \text{ et tout grand } N. \tag{3.2.13}$$

De la même manière, nous pouvons prouver que

$$\left|\int_{\Gamma_{N,2}} f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z}+1}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{pour tout grand } T \text{ et tout grand } N. \tag{3.2.14}$$

En utilisant (3.2.13) et (3.2.14) dans (3.2.8), nous concluons que

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu)$$

si f est une fonction entière de type exponentiel $b < 2\pi$ qui est intégrable au sens de Cauchy sur l'axe réel. D'où, si f est de type exponentiel $< 2\sigma$, alors

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right).$$

Cette démonstration du Théorème 3.2.1 est différente de celle donnée par Frappier et Rahman [4]. Elle est tirée de [10]. $\square$

Le résultat suivant (voir [9] ; voir aussi [7] et [8]) contient la formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel qui est l'analogue de celle donnée par Turán dans le Théorème 1.2.2 et de la formule du Théorème 2.2.1.

Théorème 3.2.2. *Soient m un entier positif impair et $\sigma > 0$. De plus, soit $a_{0,0} = 1$ et pour $m > 1$, $0 \leq \mu \leq m-1$ on définit $a_{\mu,m-1}$ par*

$$Q_m(z) := \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2} \left(1 + \frac{z^2}{\mu^2}\right) = \sum_{\mu=0}^{m-1} a_{\mu,m-1} z^\mu.$$

Alors

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\mu=0}^{(m-1)/2} \frac{1}{(2\sigma)^{2\mu}}\, a_{2\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f^{(2\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \tag{3.2.15}$$

est valide pour toute fonction entière de type exponentiel τ plus petit que $(m+1)/\sigma$ si l'intégrale à gauche (prise au sens de Cauchy) et les $(m+1)/2$ séries à droite sont convergentes.

Si $f(z) := \dfrac{\sin^m \sigma z}{z}(1 - \cos\sigma z)$, alors $\displaystyle\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \binom{m}{\frac{m+1}{2}}$ tandis que $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{(m-1)/2} \frac{1}{(2\sigma)^{2\mu}}\, a_{2\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f^{(2\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = 0$. Ainsi, $\tau = (m+1)\sigma$ n'est pas admissible dans le Théorème 3.2.2.

Remarque

Olivier et Rahman [9, Théorème 2] démontrent aussi que si $f \in L^1(-\infty,\infty)$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\mu=0}^{(m-1)/2} \frac{1}{(2\sigma)^{2\mu}}\, a_{2\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f^{(2\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \tag{3.2.16}$$

non seulement pour les fonctions entières de type exponentiel plus petit que $(m+1)\sigma$ mais aussi pour celles d'ordre 1 et de type $(m+1)\sigma$.

Il a été démontré par Rahman et Schmeisser [10] qu'il était superflu d'exiger que les séries dans (3.2.1) et les $(m+1)/2$ séries dans (3.2.15) soient convergentes.

Chapitre 4

Annexes

4.1 Annexe A : Polynômes de Legendre

4.1.1 Définition

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par

$$\mathrm{P}_n(0) := 1 \text{ si } n = 0 \text{ et } \mathrm{P}_n(x) := \tfrac{1}{2^n n!} D^n(x^2-1)^n \text{ si } n = 1, 2, 3, \dots .$$

Ici D^n est la $n^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x. Cette représentation est appelée "Formule de Rodrigues".

4.1.2 Orthogonalité des polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux sur (-1,1), dans le sens que

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(x) \cdot \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)\,.$$

Pour simplifier les calculs, on pose

$$f_n(x) := D^n(x^2-1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)\,.$$

Pour $0 \leq m < n$, on a

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_{-1}^{1} f_m(x) \cdot f_n(x) \mathrm{d}x \\ &= [D^m(x^2-1)^m \cdot D^{n-1}(x^2-1)^n]_{-1}^{1} \\ &- \int_{-1}^{1} D^{m+1}(x^2-1)^m \cdot D^{n-1}(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{1} D^{m+1}(x^2-1)^m \cdot D^{n-1}(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n - \int_{-1}^{1} D^{2m}(x^2-1)^m \cdot D^{n-m}(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \frac{(2m)!}{m!}[F(1) - F(-1)]\,, \end{aligned}$$

où $F(x) := D^{n-m-1}[(x^2-1)^n]$ qui a un zéro de multiplicité au moins 1 au point -1 et au point 1. Donc

$$\int_{-1}^{1} f_m(x) \cdot f_n(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (0 \leq m < n)\,.$$

Mais

$$\textstyle\int_{-1}^{1} f_n(x) \cdot f_m(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_m(x) \cdot f_n(x) \mathrm{d}x \text{ pour tout } m \text{ et } n\,;$$

donc, en fait, on a

$$\textstyle\int_{-1}^{1} f_m(x) \cdot f_n(x) \mathrm{d}x = 0 \text{ si } m \neq n\,.$$

4.1.3 Norme des polynômes de Legendre

Calculons à présent :

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f_n(x)\cdot f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} D^n(x^2-1)^n \cdot D^n(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= [D^n(x^2-1)^n \cdot D^{n-1}(x^2-1)^n]_{-1}^{1} \\
&- \int_{-1}^{1} D^{n+1}(x^2-1)^n \cdot D^{n-1}(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{1} D^{n+1}(x^2-1)^n \cdot D^{n-1}(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} D^{2n}(x^2-1)^m \cdot D^{0}(x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= (-1)^n 2n(2n-1)\ldots 2.1 \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= (2n)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= (2n)!\, 2 \int_{0}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x \\
&= 2(2n)! \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \\
&= 2(2n)! \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta \\
&= 2(2n)! \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{2\Gamma(\frac{2n+3}{2})} \\
&= 2^{2n}(n!)^2 \frac{2}{2n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\,.$$

4.1.4 Décomposition d'un polynôme quelconque en polynômes de Legendre

Soit

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu} x^{\nu} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

La propriété d'orthogonalité (4.1.1) nous permet d'exprimer un polynôme

$p(x) := \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x^\nu$ de degré n comme une combinaison linéaire des polynômes f_n :

$$p(x) = \lambda_n f_n(x) + \cdots + \lambda_\nu f_\nu(x) + \cdots + \lambda_0 f_0,$$

et donc comme une combinaison linéaire des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$.
En effet, on a

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{p_n}{a_{n,n}} f_n(x) + \left(p_{n-1} - p_n \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}\right) x^{n-1} + \cdots + \left(p_\nu - p_n \frac{a_{n,\nu}}{a_{n,n}}\right) x^\nu \\
&+ \cdots + \left(p_0 - p_n \frac{a_{n,0}}{a_{n,n}}\right) \\
&= \frac{p_n}{a_{n,n}} f_n(x) + \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \left(p_{n-1} - p_n \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}\right) f_{n-1}(x) \\
&+ \text{un polynôme de degré} \leq n-2 \\
&= etc.
\end{aligned}$$

4.1.5 Équation différentielle dont P_n est une solution

Rappelons la formule de Leibnitz :

$$D^n(fg) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} D^\nu(f) D^{n-\nu}(g).$$

On pose

$$U_n(x) := (x^2-1)^n,$$

Donc, on a

$$f_n(x) = D^n(U_n(x)),$$

Dérivons $U_n(x)$, on obtient

$$U_n'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1},$$

soit encore :

$$(x^2-1)U_n'(x) = 2nxU_n(x).$$

Dérivons les deux côtés de cette équation $n+1$ fois. En appliquant la formule de Leibnitz au membre de gauche, on obtient

$$\begin{aligned} D^{n+1}[(x^2-1)U_n'(x)] &= \sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}D^{\nu}[(x^2-1)]D^{n+1-\nu}[U_n'(x)], \\ &= (x^2-1)D^{n+2}U_n(x) + 2xD^{n+1}U_n(x) + n(n+1)D^nU_n(x), \end{aligned}$$

De même une application de la formule de Leibnitz au membre de droite donne

$$D^{n+1}[2nxU_n(x)] = 2nxD^{n+1}U_n(x) + 2n(n+1)D^nU_n(x),$$

Finalement, en égalant les deux membres, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)D^{n+2}U_n(x) - 2xD^{n+1}U_n(x) + n(n+1)D^nU_n(x) = 0.$$

ce qui signifie que f_n satisfait à l'équation différentielle

$$(1-x^2)f_n''(x) - 2xf_n'(x) + n(n+1)f_n(x) = 0.$$

4.1.6 Une propriété extrémale de P_n

On note $\mathrm{P}_n^*(x)$ le polynôme de Legendre de degré n, dont le coefficient de x^n est égal à l'unité.

Théorème 4.1.1. *Parmi tous les polynômes de degré n ayant pour coefficient de x^n l'unité, celui qui minimise $\int_{-1}^{1}|\mathrm{p}_n(x)|^2dx$ est le polynôme $\mathrm{P}_n^*(x)$.*

Preuve. En effet, considérons un polynôme quelconque $p(x)$ de degré n ayant 1 pour coefficient de x^n. Décomposons-le selon une combinaison linéaire de polynômes de Legendre, on obtient

$$p(x) = \mathrm{P}_n^*(x) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathrm{P}_{n-k}^*(x),$$

alors

$$\int_{-1}^{1}|p(x)|^2\mathrm{d}x =$$
$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_n^*(x)+\lambda_1\mathrm{P}_{n-1}^*(x)+\lambda_2\mathrm{P}_{n-2}^*(x)+\cdots][\mathrm{P}_n^*(x)+\lambda_1\mathrm{P}_{n-1}^*(x)+\lambda_2\mathrm{P}_{n-2}^*(x)+\cdots]\,\mathrm{d}x,$$

et compte tenu de l'orthogonalité des polynômes de Legendre, on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|p(x)|^2\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}[(\mathrm{P}_n^*(x))^2+|\lambda_1|^2(\mathrm{P}_{n-1}^*(x))^2++|\lambda_2|^2(\mathrm{P}_{n-2}^*(x))^2+\cdots]\mathrm{d}x,\\ &\geq \int_{-1}^{1}[(\mathrm{P}_n^*(x))^2]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

4.1.7 Propriétés des zéros du polynôme de Legendre

Les zéros de P_n, $n \geq 1$ sont tous simples et se retrouvent dans l'intervalle ouvert (-1,1).

Si $\mathrm{P}_n(x)$ était de même signe pour tout x dans (-1,1), disons positif, alors $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_0(x)\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1\cdot \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x > 0$, ce qui contredit l'orthogonalité $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour $m \neq n$. Donc, il existe un point $x_1 \in (-1,1)$ tel que $\mathrm{P}_n(x_1) = 0$. Supposons que x_2 est un zéro multiple de P_n. Alors, $\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_2)^2}$ est un polynôme de degré $n-2$ et donc

$$0 = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_2)^2}\cdot \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left\{\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_2)}\right\}^2\mathrm{d}x > 0$$

ce qui est une contradiction. Donc P_n ne peut pas avoir un zéro multiple, c'est-à-dire que les zéros de P_n sont tous simples. Supposons maintenant que P_n possède exactement j zéros $x_1,\ldots,x_j$ dans (-1,1). Alors

$$\mathrm{P}_n(x)(x-x_1)\cdots(x-x_j) = g(x)(x-x_1)^2\cdots(x-x_j)^2,$$

où g est un polynôme de degré $n-j$ qui ne change pas de signe dans (-1,1). Donc si $j < n$, on aurait

$$0 = \int_{-1}^{1}(x-x_1)\cdots(x-x_j)\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g(x)(x-x_1)^2\cdots(x-x_j)^2\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Cette contradiction montre que $j \geq n$. Puisque $j > n$ est impossible, il faut que j soit égal à n.

4.1.8 Les polynômes de Jacobi

Pour tout $\alpha > 1$ et tout $\beta > 1$, il existe pour chaque $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ un polynôme $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ tel que

$$\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$$

et

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad m \neq n.$$

Les sélections spéciales suivantes de α et β portent des noms spéciaux.

- $\alpha = 0$, $\beta = 0$: Polynômes de Legendre,
- $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$: Polynômes de Chebyshev (de première espèce),
- $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$: Polynômes de Chebyshev (de seconde espèce),
- $\alpha = \beta$: Polynômes ultrasphériques.

Le polynôme $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' + \{(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x\}y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Les zéros de $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ sont tous simples et se trouvent dans l'intervalle ouvert (-1,1).

4.2 Annexe B : Interpolation de Lagrange par des polynômes

Nous allons commencer en rappelant les deux lemmes dont nous aurons besoin dans cette section.

Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble de tout polynôme $p(z) := \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$ de degré au plus k. Considérons n points distincts $z_1, z_2, \ldots, z_n$, dans $\mathbb{C}$ et $w_1, w_2, \ldots, w_n$, des nombres complexes distincts ou non. Alors il existe un unique polynôme $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ tel que

$$p(z_\nu) = w_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{4.2.1}$$

Ce résultat sur l'interpolation polynomiale est obtenu par la règle de Cramer, qui s'énonce comme suit

Lemme 1. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ non singulière, c'est à dire que son déterminant $|A|$ est non nul. Alors le système d'équations linéaires*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \cdots + a_{1n}\zeta_n =& w_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \cdots + a_{nn}\zeta_n =& w_n \end{aligned}\right\} \tag{4.2.2}$$

où les ζ_ν sont les inconnues, possède une solution unique. Cette solution est donnée par

$$\zeta_\nu = \frac{|A^{(\nu)}|}{|A|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2.3}$$

où $A^{(\nu)}$ est la matrice obtenue en remplaçant la $\nu^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$.

Pour appliquer le lemme 1, il est important de vérifier si le déterminant $|A|$ est non nul. Cependant le calcul de ce déterminant peut être difficile mais tout ce qui compte c'est qu'il soit non nul. Ceci peut être décidé à l'aide du lemme suivant :

Lemme 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des nombres $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, pas tous nuls, satisfaisant le système d'équations suivant :*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \cdots + a_{1n}\zeta_n =& 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \cdots + a_{nn}\zeta_n =& 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2.4}$$

est que $|A| = |a_{jk}|_{n\times n} = 0$*. Autrement dit,* $|a_{jk}| \neq 0$ *si et seulement si le système homogène (4.2.2) n'est satisfait que pour* $\zeta_1 = \cdots = \zeta_n = 0$*.*

4.2.1 Interpolation de Lagrange

On peut utiliser (4.2.3) afin de déterminer le polynôme p de degré au plus $n-1$ qui satisfait la propriété d'interpolation (4.2.1). Mais il est plus facile d'écrire p sous la forme

$$p(z) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \ell_\nu(z),$$

où ℓ_ν est le polynôme de degré $n-1$ qui satisfait

$$\ell_\nu(z_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $\psi(z) := \prod_{\mu=1}^{n}(z - z_\mu)$, alors

$$\ell_\nu(z) = \frac{1}{\psi'(z_\nu)} \frac{\psi(z)}{(z - z_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ainsi

$$p(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{w_\nu}{\psi'(z_\nu)} \frac{\psi(z)}{(z - z_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p(z_\nu)}{\psi'(z_\nu)} \frac{\psi(z)}{(z - z_\nu)}.$$

4.2.2 Interpolation d'Hermite par des polynômes

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ un ensemble de n entiers positifs. Le problème consiste à trouver le plus petit N tel que pour tout ensemble de n points distincts $z_1, \ldots, z_n$ dans le plan complexe et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ des valeurs arbitrairement prescrites

$$w_{\nu,0}, \ldots, w_{\nu,\alpha_\nu - 1} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

il existe un polynôme $p(z) := \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu$ de degré $\leq N$ satisfaisant au système suivant :

$$\left.\begin{aligned} p^{(j)}(z_1) =& w_{1,j} \qquad (j = 0, \ldots, \alpha_1 - 1) \\ &\vdots \\ p^{(j)}(z_n) =& w_{n,j} \qquad (j = 0, \ldots, \alpha_n - 1) \end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}$$

Ce système contient $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ équations à $N + 1$ inconnues $a_0, \ldots, a_N$.
Afin d'appliquer le lemme 1, on doit poser $N = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1$ et vérifier par la suite si le déterminant $|A|$ de la matrice correspondante est non nul. Dans ce cas, calculer ce déterminant est un travail formidable, mais le lemme 2 nous facilite beaucoup la tâche. On a seulement besoin de montrer que si $p \in \mathcal{P}_N$, $N = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1$, et

$$p^{(j)}(z_\nu) = 0 \qquad (j = 0, \ldots, \alpha_1 - 1; \nu = 1, \ldots, n), \tag{4.2.6}$$

alors p doit être identiquement nul. C'est trivial puisque (4.2.6) implique que p possède des zéros de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $z_1, \ldots, z_n$ respectivement. Ainsi, le déterminant de la matrice correspondante au système (4.2.5) de $N = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 1$ équations ayant $N + 1$ inconnues (les coefficients du polynôme d'interpolation p de degré au plus N) est non nul. Donc, par le lemme 1, le système possède une solution unique.

Afin de trouver une formule pour le polynôme p de degré au plus $N := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, satisfaisant (4.2.5), essayons de déterminer pour tout $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ et $k \in \{0, \ldots, \alpha_\mu - 1\}$, le polynôme fondamental $\ell_{\nu,k}$ de degré N tel que

$$\ell_{\nu,k}^{(j)}(z_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \text{ et } j = k, \\ 0 & \text{si } \mu = \nu \text{ et } j \in \{0, \ldots, \alpha_\nu - 1\} \backslash \{k\}, \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \text{ et } j = 0, \ldots, \alpha_\nu - 1. \end{cases}$$

On pose

$$\psi(z) := \prod_{\mu=1}^{n} (z - z_\mu)^{\alpha_\mu};$$

alors on a

$$\ell_{\nu,k}(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_\nu)^{\alpha_\nu}} \varphi(z),$$

où φ est un polynôme de degré $\alpha_\nu - 1$. Développons $\varphi(z)$ en série de puissances de $z - z_\nu$. En utilisant le fait que $\ell_{\nu,k}^{(j)}(z) = 0$ pour $j = 0, \ldots, k - 1$, nous pouvons écrire

$$\varphi(z) = \lambda_k (z - z_\nu)^k + \cdots + \lambda_{\alpha_\nu - 1} (z - z_\nu)^{\alpha_\nu - 1},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\ell_{\nu,k}(z) &= \frac{\psi(z)}{(z-z_\nu)^{\alpha_\nu}}[\lambda_k(z-z_\nu)^k+\cdots+\lambda_{\alpha_\nu-1}(z-z_\nu)^{\alpha_\nu-1}]\\ &= b_k(z-z_\nu)^k+b_{k+1}(z-z_\nu)^{k+1}+\cdots\,.\end{aligned}$$

Puisque

$$\ell_{\nu,k}^{(j)}(z_\nu)=\begin{cases}1 & \text{si } j=k,\\ 0 & \text{si } j\in\{0,\ldots,\alpha_\nu-1\}\backslash\{k\},\end{cases}$$

nous devons avoir

$$b_k=\tfrac{1}{k!} \text{ et } b_l=0 \text{ pour } l\in\{k,\ldots,\alpha_\nu-1\}\backslash\{k\}.$$

(On note que si $k=\alpha_\nu-1$, alors l'ensemble pour lequel $b_l=0$ est vide). Ainsi

$$\lambda_k+\cdots+\lambda_{\alpha_\nu-1}(z-z_\nu)^{\alpha_\nu-k-1}=\left\{\frac{1}{k!}+b_{\alpha_\nu}(z-z_\nu)^{\alpha_\nu-k}+\cdots\right\}\frac{(z-z_\nu)^{\alpha_\nu}}{\psi(z)}. \tag{4.2.7}$$

La fonction $(z-z_\nu)^{\alpha_\nu}/\psi(z)$ est holomorphe dans le plus grand disque $|z-z_\nu|<\rho$, qui ne contient aucun des autres z_μ. Elle est ainsi définie à l'intérieur de ce disque par une série de puissances, par exemple $c_0+c_1(z-z_\nu)+c_2(z-z_\nu)^2+\cdots$, où

$$c_\ell:=\frac{1}{\ell!}\left[\frac{d^\ell}{dz^\ell}\left\{\frac{(z-z_\nu)^{\alpha_\nu}}{\psi(z)}\right\}\right]_{z=z_\nu} \qquad (\ell=0,1,2,\ldots).$$

Puisque le membre de gauche de (4.2.7) est un polynôme de degré $\alpha_\nu-k-1$, on doit avoir

$$\begin{aligned}\lambda_k+\cdots+\lambda_{\alpha_\nu-1}(z-z_\nu)^{\alpha_\nu-k-1} &= \frac{1}{k!}\left\{c_0+c_1(z-z_\nu)+\cdots+c_{\alpha_\nu-k-1}(z-z_\nu)^{\alpha_\nu-k-1}\right\}\\ &= \sum_{\ell=0}^{\alpha_\nu-k-1}\frac{1}{\ell!}\left[\frac{d^\ell}{dz^\ell}\left\{\frac{(z-z_\nu)^{\alpha_\nu}}{\psi(z)}\right\}\right]_{z=z_\nu}(z-z_\nu)^\ell.\end{aligned}$$

D'où pour tout $\nu\in\{1,\ldots,n\}$ et $k=0,\ldots,\alpha_\nu-1$, on peut représenter le polynôme fondamental $\ell_{\nu,k}$ sous la forme suivante :

$$\ell_{\nu,k}(z) = \psi(z)(z-z_\nu)^{k-\alpha_\nu} \times \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{\alpha_\nu-k-1} \frac{1}{\ell!} \left[\frac{d^\ell}{dz^\ell} \left\{ \frac{(z-z_\nu)^{\alpha_\nu}}{\psi(z)} \right\} \right]_{z=z_\nu} (z-z_\nu)^\ell. \quad (4.2.8)$$

D'où le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. *Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n points distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n entiers positifs. On considère la fonction $\psi(z) := \prod_{\mu=1}^{n}(z-z_\mu)^{\alpha_\mu}$. Pour $\nu \in [0, \ldots, \alpha_\nu]$ et k=$0, \ldots, \alpha_\nu - 1$, on définit $\ell_{\nu,k}(z)$ par (4.2.8). Alors l'unique polynôme p de degré au plus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n - 1$, satisfaisant à la condition d'interpolation (4.2.8), est donné par*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} w_{1,k}\, \ell_{1,k}(z) + \cdots + \sum_{k=0}^{\alpha_\nu-1} w_{\nu,k}\, \ell_{\nu,k}(z) + \cdots + \sum_{k=0}^{\alpha_n-1} w_{n,k}\, \ell_{n,k}(z) \quad (4.2.9)$$

4.3 Annexe C : Fonctions entières de type exponentiel

4.3.1 L'ordre et le type d'une fonction entière

Étant donnée une fonction entière f, posons

$$M(r) = M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r \geq 0).$$

Sauf dans le cas où f est une constante de valeur absolue ≤ 1, l'ordre ρ de f est défini par

$$\rho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

Par convention, l'ordre d'une constante c tel que $|c| \leq 1$ est égal à 0. Si l'ordre ρ d'une fonction entière f est positif et fini alors le type T de f est défini par

$$T := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

4.3.2 Fonctions entières de type exponentiel

Une fonction entière f est dite de type exponentiel τ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K(\epsilon)$ tel que

$$|f(z)| < K(\epsilon)\, e^{(\tau+\epsilon)|z|} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

La classe des fonctions entières de type exponentiel τ comporte les fonctions d'ordre 1 et de type $T \leq \tau$ ainsi que les fonctions d'ordre $\rho < 1$.

Il est clair que $t(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu\, e^{i\nu z}$ est une fonction entière de type exponentiel n. Ainsi, un polynôme trigonométrique est la restriction d'une fonction entière de type exponentiel, sur l'axe réel.

Si f est une fonction entière de type exponentiel τ périodique, de période 2π, alors elle est de la forme

$$f(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu\, e^{i\nu z} \qquad (n = \lfloor \tau \rfloor)\,.$$

Tout polynôme trigonométrique est borné sur l'axe des réels, mais une fonction entière de type exponentiel qui n'est pas périodique n'est pas nécessairement bornée. Nous citons quelques exemples de fonctions entières de type exponentiel qui ne sont pas périodiques.

(i) Pour tout polynôme p non identiquement nul et tout $\tau > 0$, la fonction entière $f(z) := p(z)\sin(\tau z)$ est de type exponentiel τ.

(ii) Pour tout $\tau > 0$, la fonction entière $f(z) := \frac{\sin(\tau z)}{z}$ est de type exponentiel τ.

(iii) Pour tout $\tau > 0$, la série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{e\tau}{n})^n z^n$ définit une fonction entière de type exponentiel τ.

(iv) Pour tout $\tau > 0$ et tout $d \in (0, \frac{\pi}{2\tau}]$, le produit $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{n\pi}{\tau}+d\right)^2}\right)$ définit une fonction entière de type exponentiel τ.

(v) Pout tout $\alpha > 1$, le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - n^{-\alpha} z)$ définit une fonction entière d'ordre $\frac{1}{\alpha}$ (< 1), et donc de type exponentiel zéro.

La fonction en (i) est bornée sur l'axe réel si et seulement si p est une constante ; celle en (ii) est bornée sur l'axe réel ; tandis que celle en (iii) n'est pas bornée sur l'axe réel ; en (iv) la fonction n'est pas bornée sur l'axe réel pour $d \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$, elle est bornée pour $d = \frac{\pi}{2\tau}$. La fonction en (v) n'est pas bornée sur l'axe réel. En effet, une fonction entière de type exponentiel zero ne peut pas être bornée sur n'importe quelle ligne, à moins quelle soit une constante.

Les deux résultats suivants sont très importants dans l'étude des fonctions entières de type exponentiel.

Théorème 4.3.1. *Soit f une fonction entière de type exponentiel tel que $|f(x)| \le M$ sur l'axe réel et $h_f(\pi/2) := \limsup_{r\to\infty} \dfrac{\log|f(iy)|}{y} = c$. Alors*

$$|f(z)| \le M\, e^{cy} \qquad (z = x + iy, -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty).$$

Théorème 4.3.2. *(M. L. Catwright) Soit f une fonction entière de type exponentiel $b < \pi$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $K(\epsilon)$ telle que*

$$|f(z)| < K(\epsilon)\, e^{(b+\epsilon)|z|} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Supposons de plus que $|f(n)| \le M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$|f(x)| \le \left[4 + 2e\, \log\left(\frac{\pi}{\pi - b}\right)\right] M \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

En particulier si $M = 0$, c'est-à-dire que $f(n) = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots,$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $f(z) \equiv 0$.

Ce résultat a été généralisé par Duffin et Schaeffer comme suit

Théorème 4.3.3. *(Duffin et Schaeffer) Soit f une fonction entière de type exponentiel $b < \pi$. Si $\{\lambda_n\}$ est telle que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq 2\delta > 0$, $|n - \lambda_n| \leq \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ et $\{f(\lambda_n)\}$ est bornée, alors $f(x)$ est bornée pour $x > 0$. Si $f(\lambda_n) \to 0$, alors $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$.*

Théorème 4.3.4. *(Théorème d'unicité de Carlson) Si f est une fonction entière de type exponentiel $< \pi$ tel que $f(n) = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots,$ alors $f(z) \equiv 0$.*

Deux fonctions entières de type exponentiel $< \pi$ prenant les mêmes valeurs en tous les entiers doivent être égales. Ceci n'est pas vrai si on remplace la condition $< \pi$ par $\leq \pi$; la fonction $\sin \pi z$ est d'ordre 1 et de type π , elle s'annule en tous les entiers mais elle n'est pas identiquement nulle.

Une généralisation du théorème de Carlson est la suivante : Si f est une fonction entière qui satisfait

$$f(z) = o(e^{\pi|z|}), \tag{4.3.1}$$

et $f(n) = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots,$ alors $f(z) \equiv 0$.

On peut démontrer [5] que si f est de type exponentiel π et $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, alors (4.3.1) est satisfaite. Il est connu [1] que si f est une fonction entière de type exponentiel tel que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty$ pour un $p > 0$, alors $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.

On peut trouver les théorèmes 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, et 4.3.4 dans [1].

La conclusion "$f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$" est vraie aussi pour toute fonction entière de type exponentiel pour laquelle $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ existe au sens de Cauchy [4]. En particulier si f est de type exponentiel π et elle est ou bien intégrable au sens de Cauchy ou bien intégrable au sens de Lebesgue, alors (11) est satisfaite. Alors, on peut dire qu'une fonction entière de type exponentiel π et appartenant à $L^1(-\infty, \infty)$ est complètement déterminée par ces valeurs en tous les entiers.

Par le résultat de P. Montel (voir [1,Théorème 1.4.9]) *si $f(z)$ est holomorphe et bornée dans la demi-bande*

$$\{z = x + iy : x > b, y_1 < y < y_2\}$$

et $f(z) \to a$ *lorsque* $x \to \infty$ *pour* $y = y_3 \in (y_1, y_2)$, *alors* $f(z) \to a$ *uniformément pour* $y_1 + \delta \leq y \leq y_2 - \delta$, $\delta > 0$.

De là, nous sommes en mesure de citer un autre résultat [1,Théorème 6.2.8] qui est utilisé au Chapitre 3.

Théorème 4.3.5. *Soit* f *une fonction entière de type exponentiel et supposons que* $f(x) \to 0$ *lorsque* $x \to \infty$. *Alors* $f(x + iy) \to 0$ *lorsque* $x \to \infty$ *pour chaque* y *fixé et d'où (par le résultat de Montel précédent)* $f(x + iy) \to 0$ *uniformément sur n'importe quel intervalle borné.*

4.4 Annexe D : L'article de P. Turán

On the theory of the mechanical quadrature.

By P. TURÁN in Budapest.

§ 1. In what follows I communicate a few simple remarks on the theory of mechanical quadrature to which also L. FEJÉR[1]) devoted an important paper. These remarks though they are rather naturally connected to the classical theory of mechanical quadrature of GAUSS—JACOBI, seem not to be observed so far. These reveal an interesting property of those polynomials $\pi^*_{n,2l}(x)$ (n, l fixed integers) which minimize the integral

$$I_{2l}(\pi_n)=\int_{-1}^{+1}|\pi_n(x)|^{2l}\,dx \tag{1.1}$$

among the polynomials

$$\pi_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{1.2}$$

This polynomial $\pi^*_{n,2l}(x)$ minimizes obviously at the same time also the expression

$$H_{2l}(\pi_n)=\Big[\int_{-1}^{+1}|\pi_n(x)|^{2l}\,dx\Big]^{\frac{1}{2l}}. \tag{1.3}$$

§ 2. The classical theorem of GAUSS—JACOBI deals with quadrature-formulae of the type

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,\lambda_\nu, \tag{2.1}$$

where $x_1,\ldots,x_n$ are different, arbitrarily prescribed numbers and the λ's are independent of f. Putting

$$\omega(x)=\prod_{\nu=1}^{n}(x-x_\nu)\quad\text{and}\quad l_\nu(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x-x_\nu)}\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)$$

we have $f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,l_\nu(x)$, for all polynomials $f(x)$ of degree $\leq n-1$,

1) L. FEJÉR, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschrift*, 37 (1933), pp. 287–310.

and consequently

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \int_{-1}^{+1} l_\nu(x)\,dx. \tag{2.2}$$

This is a quadrature-formula of type (2. 1) with the „Cotes-numbers" $\lambda_\nu = \int_{-1}^{1} l_\nu(x)\,dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, valid for all polynomials of degree $\leqq n-1$.

Now the above-mentioned theorem of Gauss – Jacobi solves the question how to choose the "fundamental points" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in order that the quadrature-formula (2. 2) be valid for "the greatest possible set" of polynomials. They proved that formula (2. 2) is valid for all polynomials of degree $\leqq 2n-1$ if and only if $x_1, \ldots, x_n$ are the zeros of the nth Legendre-polynomial

$$P_n(x) = [(x^2-1)^n]^{(n)}. \tag{2.3}$$

§ 3. Now we consider mechanical quadratures of the type

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)}, \tag{3.1}$$

where the quantities $\lambda_\nu^{(0)}, \lambda_\nu^{(1)}$ are independent of f. The existence of such a quadrature-formula follows immediately from the formula of Fejér[2])

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,l_{\nu,0}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} f'(x_\nu)\,l_{\nu,1}(x) \tag{3.2}$$

valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 2n-1$, where — again with the notation of § 2 —

$$l_{\nu,0}(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x-x_\nu)\right) l_\nu^2(x),\quad l_{\nu,1}(x) = (x-x_\nu)\,l_\nu^2(x). \tag{3.3}$$

Integrating (3. 2) over $[-1, +1]$ we obtain a formula of type (3. 1) with

$$\lambda_\nu^{(0)} = \int_{-1}^{+1} l_{\nu,0}(x)\,dx, \qquad \lambda_\nu^{(1)} = \int_{-1}^{+1} l_{\nu,1}(x)\,dx, \tag{3.4}$$

valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 2n-1$.

§ 4. The n zeros of the Legendre-polynomial $P_n(x)$ of (2. 3) are real. This fact implies that the Gauss – Jacobi formula is applied in praxis, e. g. in meteorology. Hence it is reasonable to modify a little Gauss—Jacobi's problem asking for a *real* system $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for which the quadrature-formula (3. 1)—(3. 4) is true for a greater variety of polynomials than those of degree $\leqq 2n-1$. It is easy to show that by *no* choice this formula

[2]) Implicitly in his paper: Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen,* **106** (1932), pp. 1—56. Our notation differs from his one; this change is motivated by the considerations of § 8.

(3. 1)—(3. 4) can be made precise even to all polynomials of degree $\leqq 2n$. The validity of formula (3. 1) for a class A of polynomials means namely that for any $f_1(x)$ and $f_2(x)$ of the class A, for which

$$(4.1)\qquad f_1(x_\nu)=f_2(x_\nu),\ f_1'(x_\nu)=f_2'(x_\nu)\qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

we have

$$(4.2)\qquad \int_{-1}^{+1}(f_1(x)-f_2(x))\,dx=0.$$

But it follows from (4. 1) that the polynomial $f_1(x)-f_2(x)$ is divisible by $\omega^2(x)$; hence if A is the class of polynomials of degree $\leqq 2n$, we have $f_1(x)-f_2(x)=c\omega^2(x)$, i. e. from (4. 2) we would have for all c

$$c\int_{-1}^{+1}\omega^2(x)\,dx=0.$$

But this is impossible for a proper polynomial $\omega(x)$ with real zeros only.

§ 5. Now we pass a step further. We consider quadrature-formulae of type

$$(5.1)\qquad \int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)}+\sum_{\nu=1}^{n}f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)}+\sum_{\nu=1}^{n}f''(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(2)},$$

where the $\lambda_\nu^{(j)}$'s are independent of f. It is again easy to show the existence of such a quadrature-formula (5. 1), valid for all $f(x)$ polynomials of degree $\leqq 3n-1$. Following namely the reasoning FEJÉR used to determine $l_{\nu 0}(x)$ and $l_{\nu 1}(x)$ in (3. 2), we obtain[3]) the representation

$$(5.2)\qquad f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,l_{\nu,0}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}f'(x_\nu)\,l_{\nu,1}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}f''(x_\nu)\,l_{\nu,2}(x)$$

valid for all $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$.

Here we have with the notation of § 2

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} l_{\nu,0}(x)&=\left\{1-3l_\nu'(x_\nu)(x-x_\nu)+\frac{3}{2}\left[5(l_\nu'(x_\nu))^2-l_\nu''(x_\nu)\right](x-x_\nu)^2\right\}l_\nu^3(x),\\ l_{\nu,1}(x)&=(x-x_\nu)\left[1-3l_\nu'(x_\nu)(x-x_\nu)\right]l_\nu^3(x),\quad l_{\nu,2}(x)=\frac{1}{2}(x-x_\nu)^2\,l_\nu^3(x), \end{aligned}$$

i. e. we obtain (5. 1) with

$$(5.4)\qquad \lambda_\nu^{(0)}=\int_{-1}^{+1}l_{\nu,0}(x)\,dx,\quad \lambda_\nu^{(1)}=\int_{-1}^{+1}l_{\nu,1}(x)\,dx,\quad \lambda_\nu^{(2)}=\int_{-1}^{+1}l_{\nu,2}(x)\,dx.$$

§ 6. Now we raise again the question to determine those systems $(x_1,\dots,x_n)$ of n different points for which the quadrature-formula (5. 1)—(5. 4) is valid for all polynomials of degree $\leqq 4n-1$. If B denotes this class of polynomials

3) The same formula was established also by Mr. I. RAISZ in an unpublished paper.

and $f_1(x)$, $f_2(x)$ denote any two members of the class B with

$$f_1(x_\nu)=f_2(x_\nu),\ f_1'(x_\nu)=f_2'(x_\nu),\ f_1''(x_\nu)=f_2''(x_\nu) \qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{6.1}$$

then we must have

$$\int_{-1}^{+1}(f_1(x)-f_2(x))\,dx=0. \tag{6.2}$$

Fixing $f_1(x)$ in B and choosing

$$f_2(x)=f_1(x)+\omega^3(x)\,h(x) \tag{6.3}$$

where $h(x)$ is an arbitrary polynomial of degree $\leqq n-1$, $f_2(x)$ belongs obviously to the class B and satisfies (6.1); hence by (6.2) we must have

$$\int_{-1}^{+1}\omega^3(x)\,h(x)\,dx=0 \tag{6.4}$$

for all polynomials $h(x)$ of degree $\leqq n-1$. Since any two polynomials with the property (6.1) fulfill the relation (6.3), the condition (6.4) is necessary and sufficient to the validity of the quadrature-formula (5.1)—(5.4).

§ 7. Now we have to determine whether or not there is an $\omega(x)$ with the "higher orthogonality-property" (6.4). We suppose that such an $\omega(x)$ exists. We show first that all the zeros of $\omega(x)$ lie in the interior of the interval $[-1,+1]$ and are simple. To prove this by a classical argument we remark that from (6.4) obviously

$$\int_{-1}^{+1}\omega^3(x)\,x^\nu\,dx=0 \qquad (\nu=0,1,\ldots,n-1). \tag{7.1}$$

If $\omega(x)$ would have in the interior of $[-1,+1]$ only $k<n$ sign-changing places, say $-1<\zeta_1<\zeta_2<\ldots<\zeta_k<+1$, then we would have

$$\omega^3(x)\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu x^\nu=\omega^3(x)\prod_{\nu=1}^{k}(x-\zeta_\nu)\geqq 0$$

in $[-1,+1]$ and hence

$$0<\int_{-1}^{+1}\omega^3(x)\prod_{\nu=1}^{k}(x-\zeta_\nu)\,dx=\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu\int_{-1}^{1}\omega^3(x)\,x^\nu\,dx=0$$

owing to (7.1); an obvious contradiction. Hence $k=n$ and the assertion concerning the zeros of $\omega(x)$ is proved. This implies of course that the coefficients of $\omega(x)$ are all real too. Since any polynomial $\pi_n(x)=x^n+\ldots+a_n$ may be written in the form $\pi_n(x)=\omega(x)+h(x)$ with an $h(x)$ of degree $\leqq n-1$ we have

$$\Delta=\int_{-1}^{+1}|\pi_n(x)|^4dx-\int_{-1}^{+1}|\omega(x)|^4dx=\int_{-1}^{+1}[\omega(x)+h(x)]^2\,[\omega(x)+\bar{h}(x)]^2\,dx-\int_{-1}^{+1}|\omega(x)|^4dx$$

where $\bar{h}(x)$ denotes that polynomial whose coefficients are conjugate-complex

F 3

to those of $h(x)$. Hence

$$(7.2)\qquad \Delta = 2\int_{-1}^{+1} \omega^3(x)\,(h(x)+\bar{h}(x))\,dx + \int_{-1}^{1} [|h(x)|^2 + \omega(x)\,(h(x)+\bar{h}(x))]^2\,dx + + 2\int_{-1}^{+1} |h(x)|^2\,\omega^2(x)\,dx.$$

But the first integral in (7.2) is 0 owing to (6.4) and hence we have $\Delta \geqq 0$; equality only in the case $h(x) \equiv 0$. *Hence if a polynomial $\omega(x)$ with property* (6.4) *exists, then it minimizes the integral $I_4(\pi_n)$ of* (1.1). But the existence and uniqueness of a solution of this extremal-problem was proved by JACKSON[4]). Hence we proved the following

Theorem I. *Among the quadrature-formulae* (5.1) *valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ there is exactly one choice of $(x_1, \ldots, x_n)$ for which the formula is valid for all polynomials of degree $\leqq 4n-1$. This $(x_1, \ldots, x_n)$-system consists of the n real distinct zeros in the interior of* $[-1, 1]$ *of that polynomial $\pi^*_{n,4}(x) = x^n + \ldots$ which minimizes the integral $I_4(\pi_n)$ of* (1.1) *in the class* (1.2).

§ 8. The generalisation of the quadrature-formula (5.1) is immediate. Given any system of n distinct points $(x_1, \ldots, x_n)$ and n integers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, HERMITE[5]) proved the existence and uniqueness of polynomials

$$l_{\nu 0}(x),\ l_{\nu 1}(x), \ldots, l_{\nu, m_\nu - 1}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

each of degree $\leqq (m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1)$, such that

$l_{\nu k}^{(h)}(x_\mu) = 0$ for all ν, μ, k, h $(1 \leqq \nu \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq n,\ 0 \leqq k \leqq m_\nu - 1,\ 0 \leqq h \leqq m_\mu - 1)$, except for $\nu = \mu$ and $k = h$; in the latter case

$$l_{\nu k}^{(k)}(x_\nu) = 1.$$

Then we have the representation

$$(8.1)\qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)\, l_{\nu 0}(x) + f'(x_\nu)\, l_{\nu 1}(x) + \ldots + f^{(m_\nu - 1)}(x_\nu)\, l_{\nu, m_\nu - 1}(x)],$$

valid for all polynomials of degree $\leqq (m_1 + \ldots + m_n - 1)$, for the difference of the expressions on both sides of (8.1) is divisible by $(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \ldots (x-x_n)^{m_n}$, i.e. identical zero. Hence integrating (8.1) over $[-1, +1]$ we obtain the quadrature-formula of L. TSCHAKALOFF[6])

---

4) D. JACKSON, On functions of closest approximation, *Transactions American Math. Society*, **22** (1921), pp. 117–128.

5) CH. HERMITE, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **84** (1878), pp. 70—79.

6) L. TSCHAKALOFF, Über eine allgemeine Quadraturformel, *Comptes Rendus de l'Acad. Bulgare des Sciences*, **1** (1948), pp. 9–12. The point of his paper is a method for computation of the $\lambda_j^{(i)}$'s.

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)} + f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)} + \ldots + f^{(m_\nu-1)}(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(m_\nu-1)}]$$

valid for all polynomials of degree $\leqq (m_1 + \ldots + m_n - 1)$, which was the starting point of these investigations.

§ 9. Specializing $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = k$ we obtain the quadrature-formula

$$(9.\,1) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)} + f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)} + \ldots + f^{(k-1)}(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(k-1)}],$$

valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq kn - 1$. In this case the functions $l_{\nu j}(x)$ of § 8 can explicitly be represented following FEJÉR's procedure[2]) and so the quantities $\lambda_\nu^{(j)}$. Asking by which choice of the x_ν's the formula (9. 1) will be exact for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq (k+1)\,n - 1$ we obtain similarly that there is no real system $(x_1, \ldots, x_n)$ if k is even, and for odd k if and only if $x_1, \ldots, x_n$ are the zeros of the minimizing polynomial $\pi^*_{n,k+1}(x)$ of § 1.

§ 10. Is this result compatible with the theorem of Gauss—Jacobi, explained in § 2 which corresponds to the special case $k - 1$? It is a well-known property of the nth Legendre-polynomial (2. 3) that, when properly normalized, it minimizes the integral $I_2(\pi_n)$ of (1. 1). Hence our results constitute a generalization of GAUSS—JACOBI's theorem.

§ 11. All these considerations can be applied to the theory of mechanical quadrature of MEHLER—CHRISTOFFEL—CHEBYSHEV—STIELTJES, where a weight-function is permitted, i. e. of quadrature-formulae of the type

$$(11.\,1) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,p(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)}$$

where the $\lambda_\nu^{(0)}$'s are independent of $f(x)$ but dependent in general on $p(x)$. The theorems so obtained will not be formulated explicitly except in the case

$$(11.\,2) \qquad p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

In this case — as S. BERNSTEIN discovered[7]) — the Chebyshev-polynomial $T_n(x)$ with

$$(11.\,3) \qquad T_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\vartheta$$

minimizes *all* functionals

[7]) S. BERNSTEIN, Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini, *Journal de Math.*, (9) 9 (1930), pp. 127—177 et (9) **10** (1931), pp. 219—286.

$$J_k(\pi_n)=\int_{-1}^{+1}\frac{|\pi_n(x)|^k}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (k\geqq 1,\ \text{fixed}) \tag{11.4}$$

in the class (1.2). Hence we obtained the following new property of the zeros of $T_n(x)$:

Theorem II. *Given an arbitrary odd integer k we can determine the numbers $\lambda_\nu^{(j)}$ so that quadrature-formula*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}\Big[f\Big(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\Big)\lambda_\nu^{(0)}+f'\Big(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\Big)\lambda_\nu^{(1)}+\\ +\dots+f_\nu^{(k-1)}\Big(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\Big)\lambda_\nu^{(k-1)}\Big]\end{aligned} \tag{11.5}$$

is valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq (k+1)\,n-1$.

§ 12. These results make desirable to find an explicit expression of the extremal-polynomials $\pi_{n,k}^*(x)$ (for all $k\geqq 1$) which minimize (1.3) with k instead of $2l$ in the class (1.2) or develop a similar asymptotical theory of them which exists[8]) in the case $k=2$. As to the explicit representation the following cases are only known to me.

$k=1$. The minimizing polynomial is the polynomial $U_n(x)$ with

$$U_n(\cos\vartheta)=\frac{1}{2^n}\,\frac{\sin(n+1)\,\vartheta}{\sin\vartheta}$$

(Result of Korkine and Zolotareff.)

$k=2$. The minimizing polynomial is the nth Legendre-polynomial.

$k=+\infty$. The minimizing polynomial is the polynomial $T_n(x)$ of (11.3). (Classical result of Chebyshev.)

As to the asymptotical theory of these polynomials little is known. Among the four main questions of the theory, namely

a) asymptotic behaviour on the segment $[-1,+1]$,

b) asymptotic behaviour outside the segment $[-1,+1]$,

c) asymptotic determination of the individual zeros,

d) uniform distribution of the zeros,

only the last one is in a somewhat satisfactory shape. As we have shown[9]), the zeros of $\pi_{n,k}^*(x)$ are "uniformly-distributed on the unit-circle" in the sense that writing them in the form (k and n fixed)

$$x_\nu=x_{\nu,n}=\cos\vartheta_{\nu,n}=\cos\vartheta_\nu \qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

we have for all $0\leqq\alpha<\beta\leqq\pi$

[8]) See e. g. G. Szegő, *Orthogonal polynomials* (New York, 1939).

[9]) P. Erdős and P. Turán, On the uniformly dense distribution of certain sequences of points, *Annals of Math.*, 41 (1940), pp. 162 - 173.

$$\left|\sum_{\alpha \leqq \vartheta_\nu \leqq \beta} 1 - \frac{\beta-\alpha}{\pi} n\right| < c(k)\sqrt{n \log n}.$$

As to the question *b)* we obtained certain results, but — as Prof. G. SZEGŐ mentioned in a conversation — he has found a sharper asymptotical formula for $\pi^*_{n,k}(z)$ outside the interval $[-1, +1]$. Essentially the same is quite recently announced by GERONIMUS [10]).

§ 13. Finally we return to the quadrature-formula (5. 1). FEJÉR[1]) has shown the importance of the fact that the Cotes-numbers λ_ν in (2. 1) are non-negative in some cases. The same advantages can be derived for the quadrature-formula (5. 1) if the numbers $\lambda_\nu^{(0)}, \lambda_\nu^{(1)}, \lambda_\nu^{(2)}$ are non-negative. In what follows I shall show that if the x_ν's are the zeros of $\pi^*_{n,4}(x)$, then

(13. 1) $$\lambda_\nu^{(2)} > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

The corresponding questions for $\lambda_\nu^{(0)}$ and $\lambda_\nu^{(1)}$ remain open.

To prove the assertion (13. 1) we remark that from (5. 3) and (5. 4)

$$\lambda_\nu^{(2)} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x-x_\nu)^2\, l_\nu^4(x)\, dx = \frac{1}{2[\omega'(x_\nu)]^3}\int_{-1}^{+1} \omega^3(x) \frac{1-l_\nu(x)}{x-x_\nu}\, dx.$$

But $[1-l_\nu(x)]/(x-x_\nu)$ is obviously a polynomial of degree $n-2$, i. e., from the orthogonality-property (6. 4), the last integral is 0. Hence

$$\lambda_\nu^{(2)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x-x_\nu)^2\, l_\nu^4(x)\, dx > 0. \qquad \text{Q. e. d.}$$

(Received August 8, 1949.)

---

10) JA. L. GERONIMUS, On asymptotic properties of polynomials deviating least from zero in the space L^p_σ, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **62** (1948), pp. 9—12. I know this paper only from its review in the *Math. Reviews*.

Conclusion

Dans son article intitulé *"On the theory of the mechanical quadrature"*, Turán [12] a fait appel à des résultats déjà démontrés par D. Jackson [6]. En effet, Turán utilise le polynôme $\pi_{n,*}$ dont Jackson a prouvé l'existence et l'unicité. À son tour, l'article de Turán a été une véritable source d'inspiration pour plusieurs recherches dont le présent mémoire.

En premier lieu, nous avons énoncé et démontré la formule originale de Gauss pour les polynômes. Ensuite, nous avons détaillé l'article de Turán pour mieux comprendre et expliquer son point de vue, ce qui nous a conduit à passer aux formules analogues pour les polynômes trigonométriques. Ce deuxième chapitre a mis en exergue l'analogie qui existe entre les formules de quadrature pour les polynômes et celles pour les polynômes trigonométriques. Dans le troisième chapitre, nous avons donné une généralisation de la formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel. Compte-tenu des résultats obtenus, nous étions en mesure de donner une preuve de la formule de quadrature pour les fonctions entières analogue à celle de Turán, différente de celle déjà faite par Frappier et Rahman ; cette preuve a été inspirée de l'article de Rahman et Schmeisser [10]. Pour compléter ce mémoire, nous avons inclus trois annexes comprenant plusieurs notions de base pour aider le lecteur à mieux comprendre ce travail ainsi qu'un quatrième annexe contenant l'article de Turán en question.

Ce mémoire a donc mis en évidence l'article de Turán en présentant aussi plusieurs résultats connexes, notamment, les formules de quadrature des fonctions entières de type exponentiel, leurs analogues pour les polynômes et pour les polynômes trigonométriques.

En conclusion, il serait intéressant de citer d'autres travaux reliés à ce sujet. Entre autres, C. Frappier et P. Olivier, dans leur article intitulé *"A quadrature formula involving zeros of Bessel functions"*, ont étudié une formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel en considérant comme noeuds les zéros de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre α. Ils ont donné une généralisation de ce résultat ainsi que démontré l'unicité de ces zéros. Nous citons aussi l'article de Grozev et Rahman, dans lequel, ils ont simplifié les conditions imposées pour la validité de la formule de quadrature, en donnant quelques applications. Cependant, la complexité du sujet laisse entrevoir de vastes avenues à explorer et une étude approfondie du sujet est facilement envisageable.

Bibliographie

[1] R. P. Boas, Jr. , *Entire functions*, Academic Press, New York, (1954).

[2] R. P. Boas, Jr. , *Summation formulas and band-limited signals*, Tôhoku Math. J., **24** (1972), 121-125.

[3] P. J. Davis, *Interpolation and approximation*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1963.

[4] C. Frappier et Q. I. Rahman, *Une formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel*, Ann. Sci. Math. Québec , **10**(1986), 17-26.

[5] G. R. Grozev et Q. I. Rahman, *Entire functions of exponential type belonging to* $L^p(\mathbb{R})$, J. London Math. Soc. **50**, 2 (1994), 121-134.

[6] D. Jackson, *On functions of closest approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1972), 117-128.

[7] R. Kress, *On the general Hermite cardinal interpolation*, Math. Comp. **26** (1972), 925-933.

[8] C. A. Micchelli et A. Sharma, *On a problem of Turàn : Multiple node gaussian quadrature*, Rendiconti di matematica, **3**, 7 (1983), 529-552.

[9] P. Olivier et Q. I. Rahman, *Sur une formule de quadrature pour des fonctions entières*, Rairo Modélisation Math. Anal. Numér. **20** (1986), 517-537.

[10] Q. I. Rahman et G. Schmeisser, *Quadrature formulae and functions of exponential type*, Math. Comp. **189** (1990), 245-270.

[11] L. Tschakaloff, *Über eine allgemeine quadraturformel*, Comptes Rendus de l'Acad. Bulgare des sciences. **1** (1948), 9-12.

[12] P. Turàn, *On the theory of the mechanical quadrature*, Acta Scient. Math. **12** (1950), 30-37.