Université de Montréal

Mesure de Mahler supérieure de certaines fonctions rationelles

par
Jean-Sébastien Lechasseur

Département de mathématiques et de statisque
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

août, 2012

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Mesure de Mahler supérieure de certaines fonctions rationelles

présenté par:

Jean-Sébastien Lechasseur

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Andrew Granville,	président-rapporteur
Matilde Lalín,	directeur de recherche
Mathew Rogers,	membre du jury

Mémoire accepté le: 3 octobre 2012

RÉSUMÉ

Nous exprimons la mesure de Mahler 2-supérieure et 3-supérieure de certaines fonctions rationnelles en terme de valeurs spéciales de la fonction zêta, de fonctions L et de polylogarithmes multiples. Les résultats obtenus sont une généralisation de ceux obtenus dans [10] pour la mesure de Mahler classique.

On améliore un de ces résultats en réduisant une combinaison linéaire de polylogarithmes multiples en termes de valeurs spéciales de fonctions L. On termine avec la réduction complète d'un cas particulier.

Mots clés : Mesure de Mahler supérieure, fonction zêta, fonction L de Dirichlet, polylogarithmes multiples, polynômes.

ABSTRACT

The 2-higher and 3-higher Mahler measure of some rational functions are given in terms of special values of the Riemann zeta function, a Dirichlet L-function and multiple polylogarithms. Our results generalize those obtained in [10] for the classical Mahler measure.

We improve one of our results by providing a reduction for a certain linear combination of multiple polylogarithms in terms of Dirichlet L-functions. We conclude by giving a complete reduction of a special case.

Keywords: Higher Mahler measure, Riemann zeta function, Dirichlet L-function, multiple polylogarithms, polynomials.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Merci beaucoup à Matilde Lalín pour son excellente supervision, sa grande patience, mais surtout, pour m'avoir fait connaître ce merveilleux sujet.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La mesure de Mahler est apparue pour la première fois en 1933 dans un article de Lehmer ([12]). Elle doit son nom à Kurt Mahler qui l'introduit sous une forme équivalente en 1961 dans ses travaux sur la transcendence ([13]). Pour les polynômes $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \backslash \{0\}$, il a définit la fonction

$$m(P) := \exp\left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \log|P(e^{2\pi i\theta_1}, \cdots, e^{2\pi i\theta_n})| \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n\right).$$

Pour les polynômes à une variable, cette fonction représente la moyenne géométrique de $|P(z)|$ avec z sur le cercle unité. Elle apparaît dans plusieurs domaines des mathématiques dont la théorie ergodique, la théorie des noeuds et la théorie des nombres. Elle est surtout connue pour son rôle dans le problème de Lehmer[1], encore ouvert à ce jour.

En 2006, Lalín a exprimé la mesure de Mahler de certaines familles de polynômes en termes de valeurs spéciales de la fonction zêta et des fonctions L ([10]). Nous nous intéressons ici à la plus simple de ces familles, les polynômes

$$Q_n := z(1+x_1)\cdots(1+x_n) + (1-x_1)\cdots(1-x_n).$$

Pour ces polynômes, Lalín a montré les identités suivantes,

$$\pi^{2n} m(Q_{2n}) = \sum_{h=1}^{n} \frac{s_{n-h}(2^2, 4^2, \cdots, (2n-2)^2)}{(2n-1)!} \frac{(2h)!(2^{2h+1}-1)}{2} \pi^{2n-2h} \zeta(2h+1) \tag{1.1}$$

$$\pi^{2n+1} m(Q_{2n+1}) = \sum_{h=0}^{n} \frac{s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)}{(2n)!} (2h+1)! 2^{2h+1} \pi^{2n-2h} \mathrm{L}(\chi_{-4}, 2h+2), \tag{1.2}$$

[1]On réfère le lecteur intéressé à l'article de Smyth ([16]).

où $$L(\chi_{-4},s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{-4}(n)}{n^s} \quad , \quad \chi_{-4}(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n\equiv 1 \mod 4\\ -1 & \text{si } n\equiv -1 \mod 4\\ 0 & \text{si } n\equiv 0 \mod 4\end{cases}$$

et $$s_l(a_1,\cdots,a_k)=\begin{cases}1 & \text{si } l=0\\ \sum_{i_1<\cdots<i_l} a_{i_1}\cdots a_{i_l} & \text{si } 0<l\le k\\ 0 & \text{si } k<l\end{cases}.$$

Comme nous allons le voir plus loin, il n'est pas rare que la mesure de Mahler puisse être exprimée en termes de valeurs spéciales de fonctions L. Dans [7], Deninger a interprété ce phénomène de la façon suivante : dans certains cas favorables, la mesure de Mahler peut être vue comme la valeur d'un régulateur. Ainsi, l'évaluation de la mesure de Mahler peut fournir des exemples de conjectures de Beilinson.

L'objectif de cet ouvrage est d'obtenir des résultats analogues à ceux de (1.1) et (1.2) pour la mesure de Mahler supérieure, une généralisation de la mesure de Mahler. Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Pour $n\geq 1$, on a les identités suivantes,*

$$m_2\left(R_{2n}\right)=\sum_{h=1}^{n}\frac{s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n-2)^2)}{(2n-1)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2h}A(h) \tag{1.3}$$

$$m_3\left(R_{2n}\right)=\sum_{h=1}^{n}\frac{s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n-2)^2)}{(2n-1)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2h}B(h) \tag{1.4}$$

avec

$$A(h):=(2h+1)!\left(1-\frac{1}{2^{2h+2}}\right)\zeta(2h+2)+(2h-1)!\mathscr{L}_{2,2h}(1,1)$$

$$B(h):=-3(2h-1)!\mathscr{L}_{1,2,2h}(1,1,1)+\frac{3}{2}(2h)!\mathscr{L}_{2,2h+1}(1,1)+(2h+2)!\left(1-\frac{1}{2^{2h+3}}\right)\zeta(2h+3).$$

Pour $n \geq 0$, on a les identités suivantes,

$$m_2\left(R_{2n+1}\right) = \sum_{h=0}^{n} \frac{s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)}{(2n)!} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2h+1} C(h) \tag{1.5}$$

$$m_3\left(R_{2n+1}\right) = \sum_{h=0}^{n} \frac{s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)}{(2n)!} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2h+1} D(h) \tag{1.6}$$

avec

$$\begin{aligned} C(h) :=& (2h+2)!\mathrm{L}(\chi_{-4}, 2h+3) - i(2h)!\mathscr{L}_{2,2h+1}(i,i) \\ D(h) :=& 3i(2h)!\mathscr{L}_{1,2,2h+1}(1,i,i) - \frac{3}{2}i(2h+1)!\mathscr{L}_{2,2h+2}(i,i) + (2h+3)!\mathrm{L}(\chi_{-4}, 2h+4). \end{aligned}$$

Corollaire 1. *Nous verrons à la conclusion que pour un cas particulier, on a la simplification suivante :*

$$m_2(R_2) = -\frac{31\pi^2}{360} + \frac{28}{\pi^2}\log 2\zeta(3) + \frac{32}{\pi^2}\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3\pi^2}\log^2 2(\log^2 2 - \pi^2).$$

Les R_n sont des fonctions rationelles étroitement reliées aux polynômes Q_n. Elles sont définies au chapitre 2. Les termes de la forme $\mathscr{L}_{n_1,\cdots,n_m}(x_1, \cdots, x_m)$ sont des combinaisons linéaires de polylogarithmes multiples. Ils sont définis au chapitre 3. Au chapitre 4, nous verrons comment réduire certains de ces termes. En particulier, nous montrerons le résultat suivant.

Proposition 1. *Pour k pair, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{0<n\leq m} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m+1)^k} =& \zeta(2)\mathrm{L}(\chi_{-4}, k) - k(k+1)\mathrm{L}(\chi_{-4}, k+2) \\ & - \sum_{h=1}^{k/2} \frac{(-1)^h \pi^{2h}(2^{2h}-1)}{(2h)!} B_{2h}(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4}, k-2h+2) \end{aligned}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli donnés par $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!}$.

1.1 Définitions et propriétés

Dans cette section, on fait un survol rapide des propriétés de base de la mesure de Mahler. Notons que nous utiliserons la version logarithmique :

Définition 1. *Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \backslash \{0\}$ un polynôme à n variables. Sa* ***mesure de Mahler logarithmique*** *est définie par*

$$m(P) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \cdots, x_n)| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \tag{1.7}$$

où $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n | |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}$ est le tore unité.

Remarque 1. *Soient P et Q deux polynômes à n variables. On a*

$$\begin{aligned}
m(P) + m(Q) =& \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} + \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |Q| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\
=& \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P| + \log |Q| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\
=& \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |PQ| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\
=& m(PQ).
\end{aligned}$$

Remarque 2. *Il est souvent pratique de faire le changement de variable $x_k = e^{2\pi i \theta_k}$. On obtient alors*

$$m(P) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |P(e^{2\pi i \theta_1}, \cdots, e^{2\pi i \theta_n})| \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n.$$

La mesure de Mahler d'un polynôme à une variable est facile à calculer. On utilise un résultat classique d'analyse complexe :

Théorème 2 (Formule de Jensen)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur une région contenant le disque fermé centré à l'orgine D de rayon r. Soient $a_1, \cdots, a_n$ les zéros de f à l'intérieur de D. Si $f(0) \neq 0$, alors*

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{|a_k|}{r}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

En utilisant ce résultat avec $f(z) = a\prod_{j=1}^{d}(z-\alpha_j)$ et $r = 1$, on obtient

$$m(P) = \log|a| + \sum_{j=1}^{d} \log^+|\alpha_j| \tag{1.8}$$

où $\log^+(x) := max(\log|x|, 0)$.

Exemple 1. *Soit $P(z) = \prod_{j=1}^{d}(z-\alpha_j)$ un polynôme cyclotomique. En utilisant (1.8), on obtient*

$$m(P) = \log 1 + \sum_{j=1}^{d} \log^+ 1 = 0.$$

Notons que tel que démontré par Kronecker, la réciproque est aussi vraie.

Pour ce qui est des polynômes à plusieurs variables, les calculs sont souvent beaucoup plus complexes.

Exemple 2. *En 1981, Smyth ([15]) a montré que*

$$m(x+y+1) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(\chi_{-3}, 2), \tag{1.9}$$

où $$L(\chi_{-3}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{-3}(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad \chi_{-3}(n) = \begin{cases} 1 & si\ n \equiv 1 \mod 3 \\ -1 & si\ n \equiv -1 \mod 3 \\ 0 & si\ n \equiv 0 \mod 3 \end{cases}.$$

Exemple 3.

$$m(x+y+z+1) = \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2}. \tag{1.10}$$

Nous sommes maintenant prêts à introduire l'objet principal de cet ouvrage.

Définition 2. *Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \backslash \{0\}$ un polynôme à n variables. Sa* ***mesure de Mahler** k-**supérieure*** *est définie par*

$$m_k(P) := \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n} \log^k|P(x_1, \cdots, x_n)| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}. \tag{1.11}$$

Remarque 3. *La principale motivation pour étudier la mesure de Mahler supérieure est qu'elle fait intervenir des périodes différentes. Il s'agit d'intégrales de fonctions rationnelles dont le domaine dans $\mathbb{R}^n$ est défini par des inégalités polynomiales avec coefficients dans $\mathbb{Q}$ (voir [9]). Elles jouent un rôle important dans l'étude du lien entre les valeurs spéciales de fonctions L, les conjectures de Beilinson, les valeurs de régulateurs et la mesure de Mahler.*

Remarque 4. *En général, $m_k(P)+m_k(Q) \neq m_k(PQ)$ lorsque $k>1$. De plus, si P est un polynôme cyclotomique, il n'est pas toujours vrai que $m_k(P)=0$.*

Même pour les polynômes les plus simples, la mesure de Mahler supérieure est souvent difficile à calculer.

Exemple 4.

$$\begin{aligned} m_2(x-1) &= \frac{\pi^2}{12} \\ m_3(x-1) &= \frac{-3\zeta(3)}{2} \\ m_3(x+y+2) &= \frac{9\zeta(2)}{2}\log 2 - \frac{15}{4}\zeta(3) \end{aligned}$$

1.2 Mesure de Mahler zêta

Définition 3. *Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \setminus \{0\}$ un polynôme à n variables. Sa **mesure de Mahler zêta** est définie par*

$$Z(s,P) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |P(x_1,\cdots,x_n)|^s \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}. \tag{1.12}$$

Remarque 5. *Il y a un lien important entre la mesure de Mahler supérieure et la mesure de Mahler zêta :*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^k Z(s,P)}{\mathrm{d}s^k} &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\mathrm{d}^k |P(x_1,\cdots,x_n)|^s}{\mathrm{d}s^k} \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |P(x_1,\cdots,x_n)|^s \log^k |P(x_1,\cdots,x_n)| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k Z(s,P)}{\mathrm{d}s^k}\right|_{s=0} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n} \log^k |P(x_1,\cdots,x_n)| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\cdots\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} = m_k(P).$$

En d'autres mots,

$$Z(s,P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k(P)s^k}{k!}.$$

Comme elle ne contient pas de logarithme, la mesure de Mahler zêta peut parfois être plus simple à calculer. L'exemple suivant de [3] est important pour la suite.

Théorème 3 (Akatsuka)**.** *Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \neq 1$. On a alors*

$$Z(s,x+a) = \begin{cases} \mathrm{F}\left(\frac{-s}{2},\frac{-s}{2};1;|a|^2\right) & si\ |a|<1 \\ |a|^s\mathrm{F}\left(\frac{-s}{2},\frac{-s}{2};1;|a|^{-2}\right) & si\ |a|>1 \end{cases}$$

$$où \qquad \mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!} \qquad (|z|<1),$$

$$(\alpha)_0 := 1 \qquad et \qquad (\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) \qquad pour \quad n\geq 1.$$

En utilisant la remarque 5, il est possible de calculer $m_2(x+a)$ et $m_3(x+a)$ en dérivant $Z(s,x+a)$.

Lemme 1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<1$ et*

$$G_z(s) = \mathrm{F}\left(\frac{-s}{2},\frac{-s}{2};1;z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-s}{2}\right)_n^2 \frac{z^n}{(n!)^2}. \tag{1.13}$$

On a les égalités suivantes :

$$G_z'(0) = 0 \tag{1.14}$$

$$G_z''(0) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \tag{1.15}$$

$$G_z'''(0) = -\frac{3}{2}\sum_{0<j<n<\infty}\frac{z^n}{jn^2}. \tag{1.16}$$

Démonstration. Premièrement remarquons que si $f(s) = (as)_n$, on a

$$f'(s) = a \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(as)_n}{as+j}.$$

En dérivant une seconde fois, on obtient

$$\begin{aligned}
f''(s) &= a \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(as)_n}{as+j} \right)' \\
&= a \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(as)'_n}{as+j} - \frac{a(as)_n}{(as+j)^2} \right) \\
&= a \sum_{j=0}^{n-1} \left(a \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(as)_n}{(as+i)(as+j)} - \frac{a(as)_n}{(as+j)^2} \right) \\
&= 2a^2 \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \frac{(as)_n}{(as+i)(as+j)}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $s = 0$ on a

$$f'(0) = a(n-1)! \tag{1.17}$$

$$f''(0) = 2a^2(n-1)! \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}. \tag{1.18}$$

En dérivant $G_z(s)$ trois fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
G'_z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{-s}{2} \right)_n \left(\frac{-s}{2} \right)'_n \frac{z^n}{(n!)^2} \\
G''_z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left[\left(\frac{-s}{2} \right)'_n \left(\frac{-s}{2} \right)'_n + \left(\frac{-s}{2} \right)_n \left(\frac{-s}{2} \right)''_n \right] \frac{z^n}{(n!)^2} \\
G'''_z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left[3 \left(\frac{-s}{2} \right)'_n \left(\frac{-s}{2} \right)''_n + \left(\frac{-s}{2} \right)_n \left(\frac{-s}{2} \right)'''_n \right] \frac{z^n}{(n!)^2}.
\end{aligned}$$

On évalue ensuite en $s = 0$ avec (1.17) et (1.18) pour obtenir le résultat. □

Proposition 2. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour $|a| < 1$ on a*

$$m_2(x+a) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^{2n}}{n^2} \tag{1.19}$$

$$m_3(x+a) = -\frac{3}{2}\sum_{0<j<n<\infty} \frac{|a|^{2n}}{jn^2} \tag{1.20}$$

et pour $|a| > 1$ on a

$$m_2(x+a) = \log^2|a| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a|^{2n}n^2} \tag{1.21}$$

$$m_3(x+a) = \log^3|a| + \frac{3}{2}\log|a|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a|^{2n}n^2} - \frac{3}{2}\sum_{0<j<n<\infty} \frac{1}{|a|^{2n}jn^2}. \tag{1.22}$$

Démonstration. Par le théorème 3, on sait que pour $|a| < 1$,

$$Z(s, x+a) = G_{|a|^2}(s).$$

Nous avons donc

$$m_k(x+a) = \left.\frac{\mathrm{d}^k Z(s,x+a)}{\mathrm{d}s^k}\right|_{s=0} = G^{(k)}_{|a|^2}(0).$$

On obtient (1.19) et (1.20) en appliquant le lemme 1. Pour $|a| > 1$, on sait par le théorème 3 que

$$Z(s, x+a) = |a|^s G_{|a|^{-2}}(s).$$

Nous avons donc

$$m_k(x+a) = \left.\frac{\mathrm{d}^k Z(s,x+a)}{\mathrm{d}s^k}\right|_{s=0} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\log^j|a| G^{(k-j)}_{|a|^{-2}}(0).$$

On obtient (1.21) et (1.22) en appliquant le lemme 1.

□

Remarque 6. *On peut utiliser la même méthode pour calculer $m_k(x+a)$ pour $k > 3$, il suffit de continuer à dériver. On peut voir qu'autant pour $|a| < 1$ que pour $|a| >$*

1, *l'expression* $Z^{(k)}(s,x+a)$ *ne dépend que de* $|a|$. *En d'autres mots, l'argument de a n'affecte pas la valeur de* $m_k(x+a)$. *Dans [3], Akatsuka a calculé* $m_k(x+a)$ *lorsque* $|a|<1$ *pour* $k\geq 2$. *On a*

$$m_k(x+a) = (-1)^k k! \sum_{\frac{k}{2}-1\leq n\leq k-2} \frac{1}{2^{2(k-n-1)}} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{1,2\}^n \\ \#(i:\varepsilon_i=2)=k-n-2}} \mathrm{L}_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,2)}(|a|^2),$$

où

$$\mathrm{L}_{(b_1,\cdots,b_h,)}(t) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_h} \frac{t^{n^h}}{n_1^{b_1}\cdots n_h^{b_h}}.$$

CHAPITRE 2

MÉTHODE

On définie la famille de fonctions rationnelles suivante,

$$R_n := z + \frac{(1-x_1)}{(1+x_1)} \cdots \frac{(1-x_n)}{(1+x_n)}. \tag{2.1}$$

Remarquons que la définition de mesure de Mahler supérieure peut facilement être étendue aux fonctions rationnelles quelconques. Les fonctions R_n nous intéressent car elles sont étroitement reliées aux polynômes Q_n. En effet, on a vu à l'exemple 1 que si P est un polynôme cyclotomique, alors $m(P) = 0$. De plus, on sait grâce à la remarque 1 que $m(P) + m(Q) = m(PQ)$. Cela entraîne

$$m\left(z + \frac{(1-x)}{(1+x)}\right) = m(1+x) + m\left(z + \frac{(1-x)}{(1+x)}\right) = m(z(1+x) + (1-x)). \tag{2.2}$$

De la même façon, on a

$$m(Q_n) = m(R_n).$$

Remarquons que cette dernière égalité n'est pas valide pour $k > 1$. Il est difficile en général d'établir un lien entre $m_k(Q_n)$ et $m_k(R_n)$. Dans ce chapitre, nous allons voir comment la méthode introduite dans [10] permet de calculer $m_k(R_n)$. Tous les résultats et démonstrations proviennent de cet article.

2.1 L'idée générale

Soit $P_a \in \mathbb{C}[x]$ tel que ses coefficients sont des polynômes en $a \in \mathbb{C}$. Si $a = \left(\frac{x_1-1}{x_1+1}\right) \cdots \left(\frac{x_n-1}{x_n+1}\right)$, le polynôme P_a peut être vu comme une fonction rationnelle de $n+1$ variables, disons $\tilde{P}$. On a donc

$$
\begin{aligned}
m_k(\tilde{P}) &= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{\mathbb{T}^{n+1}} \log^k |\tilde{P}| \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{1}{(2\pi i)} \int_{\mathbb{T}} \log^k |\tilde{P}| \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} m_k \left(P_{\left(\frac{x_1-1}{x_1+1}\right) \cdots \left(\frac{x_n-1}{x_n+1}\right)} \right) \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} m_k \left(P_{i^n \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdots \tan\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} \right) \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n \qquad (x_j = e^{i\theta_j}) \\
&= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} m_k \left(P_{i^n y_1 \cdots y_n} \right) \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1^2+1} \cdots \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n^2+1} \qquad (y_j = \tan(\theta_j/2)).
\end{aligned}
$$

Notons que si $m_k\left(P_{i^n y_1 \cdots y_n}\right)$ était une fonction paire en y_i pour chaque i, alors on pourrait évaluer chaque intégrale sur $[0, \infty)$ car la fonction $1/(y_i^2+1)$ est paire. Or, dans plusieurs cas $m_k\left(P_a\right)$ ne dépend que de $|a|$. Lorsque c'est le cas, on obtient,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^n}{\pi^n} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} m_k \left(P_{i^n y_1 \cdots y_n} \right) \frac{\mathrm{d}y_1}{y_1^2+1} \cdots \frac{\mathrm{d}y_n}{y_n^2+1} \\
&= \frac{2^n}{\pi^n} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} m_k \left(P_{i^n x_n} \right) \frac{x_1 \mathrm{d}x_1}{x_1^2+1} \frac{x_2 \mathrm{d}x_2}{x_2^2+x_1^2} \cdots \frac{x_{n-1} \mathrm{d}x_{n-1}}{x_{n-1}^2+x_{n-2}^2} \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n^2+x_{n-1}^2}.
\end{aligned}
$$

Pour obtenir la dernière égalité, on pose $x_j = \prod_{i=1}^{j} y_i$. Ce changement de variable est naturel puisqu'on cherche à obtenir $m_k\left(P_{x_n}\right)$ dans le membre de droite. Encore une fois, considérant que $m_k\left(P_a\right)$ ne dépend que de $|a|$, on a $m_k\left(P_{i^n x_n}\right) = m_k\left(P_{x_n}\right)$. Si on choisit $P_a = z + a$, on obtient $\tilde{P} = R_n$. De plus, nous avons vu à la remarque 6 que $m_k(z+a)$ ne dépend que de $|a|$. Cela entraîne

$$
m_k(R_n) = \frac{2^n}{\pi^n} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} m_k(z + x_n) \frac{x_1 \mathrm{d}x_1}{x_1^2+1} \frac{x_2 \mathrm{d}x_2}{x_2^2+x_1^2} \cdots \frac{x_{n-1} \mathrm{d}x_{n-1}}{x_{n-1}^2+x_{n-2}^2} \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n^2+x_{n-1}^2}. \tag{2.3}
$$

2.2 Simplifications

Nous allons maintenant voir comment simplifier l'intégrale 2.3. Pour ce faire, nous devons d'abord définir certains polynômes et démontrer un lemme important.

Définition 4. *On définit les polynômes $A_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ pour $k \geq 0$ de la façon suivante :*

$$A_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{\substack{j>1 \\ \text{impair}}}^{k+1} (-1)^{\frac{j+1}{2}} \binom{k+1}{j} A_{k+1-j}(x). \tag{2.4}$$

Voici quelques exemples :

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= x \\
A_1(x) &= \frac{x^2}{2} \\
A_2(x) &= \frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \\
A_3(x) &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \\
A_4(x) &= \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x}{15} \\
A_5(x) &= \frac{x^6}{6} + \frac{5x^4}{6} + \frac{7x^2}{6}
\end{aligned}$$

Remarque 7. *L'observation suivante est due à Andrew Granville. En utilisant (2.4), on peut calculer la fonction génératrice des $A_k(x)$. On a*

$$R(T;x) = \sum_{k\geq 0} A_k(x) \frac{T^k}{k!} = \frac{e^{xT}-1}{\sin T}. \tag{2.5}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
TR(T;x) &= \sum_{k\geq 0} A_k(x)\frac{T^{k+1}}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}\frac{T^{k+1}}{k!} + \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k+1}\sum_{\substack{j>1 \\ impair}}^{k+1} (-1)^{\frac{j+1}{2}}\binom{k+1}{j} A_{k+1-j}(x)\frac{T^{k+1}}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{(xT)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{j>1 \\ impair}}^{k+1} \frac{(-1)^{\frac{j+1}{2}}T^j}{j!} A_{k+1-j}(x)\frac{T^{k+1-j}}{(k+1-j)!} \\
&= e^{xT} - 1 + \sum_{\substack{j>1 \\ impair}} \frac{(-1)^{\frac{j+1}{2}}T^j}{j!}\sum_{m\geq 0} A_m(x)\frac{T^m}{m!} \qquad (m = k+j-1) \\
&= e^{xT} - 1 + \left(T - \frac{e^{iT}-e^{-iT}}{2i}\right)R(T;x).
\end{aligned}$$

Plus de détails sur les $A_k(x)$ sont disponibles dans l'appendice de [10]. Entre autres, on a

$$A_k(x) = -\frac{2}{k+1}\sum_{h=0}^{k} B_h\binom{k+1}{h}(2^{h-1}-1)i^h x^{k+1-h}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli.

Lemme 2. *Pour $0<\beta<1$, on a l'intégrale suivante :*

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi(a^{\beta-1}-b^{\beta-1})}{2\cos\frac{\pi\beta}{2}(b^2-a^2)} \tag{2.6}$$

Démonstration. On utilise la décomposition en fractions partielles pour obtenir :

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+a^2} - \frac{1}{x+b^2}\right)\frac{x^\beta \mathrm{d}x}{(b^2-a^2)} \tag{2.7}$$

En intégrant sur un contour bien choisit (voir la section 5.3 du chapitre 4 de [2]), on obtient

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)} = \frac{1}{1-e^{2\pi i\beta}}2\pi i\sum_{x\neq 0}\mathrm{Res}\left\{\frac{x^\beta}{x^2+a^2}\right\} = \frac{\pi a^{\beta-1}}{2\cos\frac{\pi\beta}{2}} \tag{2.8}$$

Le résultat suit en remplaçant dans (2.7). $\square$

Nous sommes maintenant prêts à énoncer un résultat important :

Proposition 3. *Pour $k \geq 0$, on a l'équation suivante :*

$$\int_0^\infty \frac{x \log^k x \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1} \frac{A_k\left(\frac{2\log a}{\pi}\right) - A_k\left(\frac{2\log b}{\pi}\right)}{a^2-b^2} \tag{2.9}$$

Démonstration. Soit

$$f(\beta) := \int_0^\infty \frac{x^\beta \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Comme l'intégrale converge pour $0 < \beta < 3$, la fonction est bien définie sur cet intervalle. En dérivant k fois, on voit que

$$f^{(k)}(1) = \int_0^\infty \frac{x \log^k x \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

De plus, grâce au lemme 2, on sait que pour $0 < \beta < 1$,

$$f(\beta) = \frac{\pi(a^{\beta-1} - b^{\beta-1})}{2\cos\frac{\pi\beta}{2}(b^2-a^2)}.$$

On a donc

$$f(\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2} = \frac{\pi(a^{\beta-1} - b^{\beta-1})}{2(b^2-a^2)}$$

et en dérivant k fois on obtient

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(\beta)\left(\cos\frac{\pi\beta}{2}\right)^{(j)} = \frac{\pi}{2(b^2-a^2)}(a^{\beta-1}\log^k a - b^{\beta-1}\log^k b).$$

On peut maintenant évaluer en $\beta = 1$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ impair}}^{k} (-1)^{\frac{j+1}{2}} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^j = \frac{\pi(\log^k a - \log^k b)}{2(b^2-a^2)}$$

et en isolant, on obtient

$$f^{(k)}(1)=\frac{1}{k+1}\sum_{\substack{j>1\\ impair}}^{k+1}(-1)^{\frac{j+1}{2}}\binom{k+1}{j}f^{(k+1-j)}(1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{j-1}+\frac{\log^k a-\log^k b}{(k+1)(a^2-b^2)}.$$

Pour $k=0$ on a,

$$f^{(0)}(1)=f(1)=\frac{\log^k a-\log^k b}{a^2-b^2}=\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{A_0\left(\frac{2\log a}{\pi}\right)-A_0\left(\frac{2\log b}{\pi}\right)}{a^2-b^2}.$$

On procède ensuite par récurence en utilisant la définiton des A_k pour obtenir le résultat général. □

Grâce à ce résultat, nous pouvons écrire l'intégrale en (2.3) comme une somme d'intégrales plus simples. Par exemple, pour $n=2$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty m_k(z+x_2)\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{x_1^2+1}\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2^2+x_1^2}&=\int_0^\infty m_k(z+x_2)\left(\int_0^\infty\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+1)}\right)\mathrm{d}x_2\\&=\int_0^\infty m_k(z+x_2)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{A_0\left(\frac{2\log x_2}{\pi}\right)-A_0\left(\frac{2\log 1}{\pi}\right)}{x_2^2-1^2}\right)\mathrm{d}x_2\\&=\int_0^\infty m_k(z+x_2)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\frac{2\log x_2}{\pi}}{x_2^2-1}\right)\mathrm{d}x_2\\&=\int_0^\infty m_k(z+x)\log x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.\end{aligned}$$

De la même façon, pour $n=3$ on obtient

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty m_k(z+x_3)\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{x_1^2+1}\frac{x_2\mathrm{d}x_2}{x_2^2+x_1^2}\frac{\mathrm{d}x_3}{x_3^2+x_2^2}=\frac{\pi^2}{8}\int_0^\infty m_k(z+x)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_0^\infty m_k(z+x)\log^2 x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

On peut donc toujours réduire les calculs à une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h+1} x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} \qquad \text{pour } n \text{ impair}$$
$$\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h} x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \qquad \text{pour } n \text{ pair.}$$

2.3 Calcul des coéfficients

Définition 5. *On définit $a_{n,h} \in \mathbb{Q}$ pour $n \geq 1$ et $0 \leq h \leq n-1$ de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty m_k(z+x_1)\frac{x_{2n}\mathrm{d}x_{2n}}{x_{2n}^2+1}\frac{x_{2n-1}\mathrm{d}x_{2n-1}}{x_{2n-1}^2+x_{2n}^2}\cdots\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ &= \sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h-1} x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.\end{aligned}$$

On définit $b_{n,h} \in \mathbb{Q}$ pour $n \geq 0$ et $0 \leq h \leq n$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty m_k(z+x_1)\frac{x_{2n+1}\mathrm{d}x_{2n+1}}{x_{2n+1}^2+1}\frac{x_{2n}\mathrm{d}x_{2n}}{x_{2n}^2+x_{2n+1}^2}\cdots\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ &= \sum_{h=0}^{n} b_{n,h}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h} x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Lemme 3. *On a les identités suivantes :*

$$\sum_{h=0}^{n} b_{n,h}x^{2h} = \sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(A_{2h-1}(x)-A_{2h-1}(i)\right) \tag{2.10}$$
$$\sum_{h=1}^{n+1} a_{n+1,h-1}x^{2h-1} = \sum_{h=0}^{n} b_{n,h}A_{2h}(x). \tag{2.11}$$

De plus, les coefficients dans le membre de gauche de (2.10) et (2.11) sont uniques.

Démonstration. Remarquons d'abord que la définition 5 entraîne

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{n} b_{n,h}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h} x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \qquad (2.12)\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty m_k(z+x_1)\frac{x_{2n+1}\mathrm{d}x_{2n+1}}{x_{2n+1}^2+1}\frac{x_{2n}\mathrm{d}x_{2n}}{x_{2n}^2+x_{2n+1}^2}\cdots\frac{x_3\mathrm{d}x_3}{(x_3^2+x_4^2)(x_2^2+x_3^2)}\right)\frac{x_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1}{x_1^2+x_2^2}\\
&=\int_0^\infty\sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\int_0^\infty m_k(z+x_1)x_2\log^{2h-1}x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2^2-1}\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1^2+x_2^2}\\
&=\sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\int_0^\infty\int_0^\infty m_k(z+x)y\log^{2h-1}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3 avec $a=x$ et $b=i$, on obtient

$$\int_0^\infty\frac{y\log^{2h-1}y\mathrm{d}y}{(y^2+x^2)(y^2-1)}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2h}\frac{A_{2h-1}\left(\frac{2\log x}{\pi}\right)-A_{2h-1}(i)}{x^2+1}.$$

Ainsi, (2.13) devient

$$\sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\int_0^\infty m_k(z+x)\left(A_{2h-1}\left(\frac{2\log x}{\pi}\right)-A_{2h-1}(i)\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

et en comparant avec (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty m_k(z+x)\left(\sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\left(A_{2h-1}\left(\frac{2\log x}{\pi}\right)-A_{2h-1}(i)\right)\right.\\
&\left.-\sum_{h=0}^{n} b_{n,h}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\log^{2h}x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=0.
\end{aligned}$$

Notons que cette dernière équation est valide indépendamment du choix de $m_k(z+x)$. On déduit donc que

$$\sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\left(A_{2h-1}\left(\frac{2\log x}{\pi}\right)-A_{2h-1}(i)\right)-\sum_{h=0}^{n} b_{n,h}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h}\log^{2h}x=0$$

et on obtient (2.10) en prenant $\log x = \pi X/2$. D'autre part, on a

$$\sum_{h=1}^{n+1} a_{n+1,h-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2-2h} \int_0^\infty m_k(z+x) \log^{2h-1} x \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} \tag{2.14}$$

$$= \sum_{h=0}^{n} b_{n,h} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2h} \int_0^\infty \int_0^\infty m_k(z+x) y \log^{2h} y \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}. \tag{2.15}$$

En utilisant la proposition 3 avec $a = x$ et $b = 1$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{y \log^{2h} y \mathrm{d}y}{(y^2+x^2)(y^2+1)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2h+1} \frac{A_{2h}\left(\frac{2\log x}{\pi}\right) - A_{2h}(0)}{x^2-1}$$

et (2.15) devient donc

$$\sum_{h=0}^{n} b_{n,h} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \int_0^\infty m_k(z+x) A_{2h}\left(\frac{2\log x}{\pi}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$$

Il suffit de comparer avec (2.14) pour obtenir (2.11). Maintenant supposons qu'il existe des coefficients $c_{n,h-1} \neq b_{n,h-1}$ tels que

$$\sum_{h=0}^{n} c_{n,h} x^{2h} = \sum_{h=1}^{n} a_{n,h-1} \left(A_{2h-1}(x) - A_{2h-1}(i)\right).$$

On aurait alors

$$\sum_{h=0}^{n} b_{n,h} x^{2h} = \sum_{h=0}^{n} c_{n,h} x^{2h}$$
$$\Rightarrow \sum_{h=0}^{n} (b_{n,h} - c_{n,h}) x^{2h} = 0.$$

Ce polynôme ayant une infinité de racines, on déduit que $b_{n,h-1} - c_{n,h-1} = 0$ pour $0 \leq h \leq n$ et cela démontre l'unicité pour (2.10). On procède de la même façon pour (2.11). $\square$

Lemme 4. *On a les égalités suivantes,*

$$2n(-1)^l s_{n-l}(2^2,4^2,\cdots,(2n-2)^2) = \sum_{h=l}^{n}(-1)^h\binom{2h}{2l-1}s_{n-h}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2)$$

$$(2n+1)(-1)^l s_{n-l}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2) = \sum_{h=l}^{n}(-1)^h\binom{2h+1}{2l}s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n)^2).$$

Démonstration. Pour prouver la première égalité, on multiplie chaque côté par x^{2l} et on somme sur $l = 1,\cdots,n$:

$$2n\sum_{l=1}^{n} s_{n-l}(2^2,4^2,\cdots,(2n-2)^2)(-1)^l x^{2l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{h=l}^{n}(-1)^h\binom{2h}{2l-1}s_{n-h}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2)x^{2l}.$$

En utilisant la définition des polynômes symétriques à gauche et en inversant l'ordre de sommation à droite, on obtient

$$2n\prod_{j=0}^{n-1}((2j)^2-x^2) = \sum_{h=1}^{n}(-1)^h s_{n-h}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2)\sum_{l=1}^{h}\binom{2h}{2l-1}x^{2l}.$$

Le membre de droite devient alors,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^{n}(-1)^h s_{n-h}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2)\frac{x}{2}((x+1)^{2h}-(x-1)^{2h})\\
&= \frac{x}{2}\left(\prod_{j=1}^{n-1}((2j-1)^2-(x+1)^2)-\prod_{j=1}^{n-1}((2j-1)^2-(x-1)^2)\right)\\
&= \frac{x}{2}\left(\prod_{j=1}^{n-1}(2j+x)(2j-2-x)-\prod_{j=1}^{n-1}(2j+x-2)(2j-x)\right)\\
&= ((-x)(2n+x)-x(2n-x))\frac{x}{2}\prod_{j=1}^{n-1}((2j)^2-x^2)\\
&= 2n\prod_{j=0}^{n-1}((2j)^2-x^2)
\end{aligned}$$

et cela démontre la première équation. Pour la seconde, on mutiplie chaque côté par

x^{2l+1} et on somme sur $l = 1, \cdots, n$:

$$(2n+1)\sum_{l=1}^{n} s_{n-l}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)(-1)^l x^{2l+1} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{h=l}^{n}(-1)^h \binom{2h+1}{2l} x^{2l+1}.$$

Il faut donc montrer que

$$(2n+1)x\prod_{j=1}^{n}((2j-1)-x^2) = \sum_{h=1}^{n}(-1)^h s_{n-h}(2^2, 4^2, \cdots, (2n)^2)\sum_{l=1}^{h}\binom{2h+1}{2l} x^{2l+1}.$$

Or, le membre de droite n'est rien d'autre que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=0}^{n}(-1)^h s_{n-h}(2^2, 4^2, \cdots, (2n)^2)\frac{x}{2}((x+1)^{2h+1}-(x-1)^{2h+1}) \\
&= \frac{x}{2}\left((x+1)\prod_{j=1}^{n}((2j)^2-(x+1)^2)-(x-1)\prod_{j=1}^{n}((2j)^2-(x-1)^2)\right) \\
&= \frac{x}{2}\left(\prod_{j=1}^{n}(2j+1+x)(2j-1-x)-\prod_{j=1}^{n}(2j-1+x)(2j+1-x)\right) \\
&= ((2n+1+x)-(2n-1-x))\frac{x}{2}\prod_{j=1}^{n}((2j-1)^2-x^2) \\
&= (2n+1)x\prod_{j=0}^{n}((2j-1)^2-x^2)
\end{aligned}$$

et cela montre la seconde équation. □

Remarque 8. *L'observation suivante est due à Mathew Rogers et est particulièrement utile pour évaluer numériquement les résultats. On peut montrer que*

$$s_{n-h}(2^2, 4^2, \cdots, (2n-2)^2) = 2^{2n-2h}\sum_{m=0}^{2h}(-1)^{h-m}S_n^{(m)}S_n^{(2h-m)}$$

où les $S_n^{(k)}$ sont les nombres de Stirling de première espèce donnés par

$$s_{n-h}(2^2, 4^2, \cdots, (2n-2)^2) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S_n^{(k)}x^k.$$

Remarquons qu'on peut utiliser le lemme 4 pour calculer le cas impair à partir du cas pair.

Théorème 4. *On a :*

$$\sum_{h=0}^{n-1} a_{n,h} x^{2h} = \frac{(x^2+2^2)\cdots(x^2+(2n-2)^2)}{(2n-1)!} \tag{2.16}$$

pour $n \geq 1$ et

$$\sum_{h=0}^{n} b_{n,h} x^{2h} = \frac{(x^2+1^2)(x^2+3^2)\cdots(x^2+(2n-1)^2)}{(2n)!} \tag{2.17}$$

pour $n \geq 0$. En d'autres mots,

$$a_{n,h} = \frac{s_{n-h-1}(2^2,4^2,\cdots,(2n-2)^2)}{(2n-1)!} \tag{2.18}$$

$$b_{n,h} = \frac{s_{n-h}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2)}{(2n)!}. \tag{2.19}$$

Démonstration. On procède par récurence sur la longueur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty m_k(z+x_1) \frac{x_j \mathrm{d}x_j}{x_j^2+1} \frac{x_{j-1}\mathrm{d}x_{j-1}}{x_{j-1}^2+x_j^2} \cdots \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1^2+x_2^2}.$$

Par définition, lorsque $j=1$, on a

$$\int_0^\infty m_k(z+x)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = b_{0,0}\int_0^\infty m_k(z+x)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

donc $b_{0,0}=1$.

De même, lorsque $j=2$, on a déjà vu que

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_0^\infty m_k(z+x)\frac{y\mathrm{d}y}{y^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ =&\int_0^\infty m_k(z+x)\frac{\log x\mathrm{d}x}{x^2-1}\\ =&a_{1,0}\int_0^\infty m_k(z+x)\frac{\log x\mathrm{d}x}{x^2-1}\end{aligned}$$

donc $a_{1,0} = 1$ et le théorème est vrai pour les deux premiers cas. Supposons que pour $n \geq 1$ et $0 \leq h \leq n-1$,

$$a_{n,h} = \frac{s_{n-h-1}(2^2, 4^2, \cdots, (2n-2)^2)}{(2n-1)!}.$$

Il faut montrer que

$$b_{n,h} = \frac{s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)}{(2n)!}.$$

Par le lemme 3, il suffit de montrer que

$$\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) x^{2h} = 2n \sum_{h=1}^{n} s_{n-h}(2^2, \cdots, (2n-2)^2) \left(A_{2h-1}(x) - A_{2h-1}(i)\right)$$

car les coefficients du membre de gauche sont uniques. Rappelons que,

$$A_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{\substack{j>1 \\ impair}}^{k+1} (-1)^{\frac{j+1}{2}} \binom{k+1}{j} A_{k+1-j}(x). \tag{2.20}$$

En prenant $k = 2h-1$ et en isolant x^{2h}, on obtient l'identité suivante

$$x^{2h} = \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{2h}{2j+1} A_{2h-2j-1}(x).$$

En multipliant par $s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)$ et en sommant sur h, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) x^{2h} \\ &= \sum_{h=1}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{2h}{2j+1} A_{2h-2j-1}(x) + s_n(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2). \end{aligned}$$

En évaluant cette équation en $x = i$, on obtient,

$$\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)(-1)^h$$
$$= \sum_{h=1}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{2h}{2j+1} A_{2h-2j-1}(i) + s_n(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2).$$

Puisque

$$\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)(-1)^h = (x+1^2) \cdots (x+(2n-1)^2)|_{x=-1} = 0,$$

on déduit que

$$\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) x^{2h}$$
$$= \sum_{h=1}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{2h}{2j+1} (A_{2h-2j-1}(x) - A_{2h-2j-1}(i)).$$

En posant $l = h - j$, le membre de droite devient

$$= \sum_{h=1}^{n} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) \sum_{l=1}^{h} (-1)^{h-l} \binom{2h}{2l-1} (A_{2l-1}(x) - A_{2l-1}(i))$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{h=l}^{n} (-1)^h \binom{2h}{2l-1} s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2) \right) (-1)^l (A_{2l-1}(x) - A_{2l-1}(i))$$

et (2.18) découle du lemme 4.

Maintenant supposons que pour $n \geq 1$ et $0 \leq h \leq n$,

$$b_{n,h} = \frac{s_{n-h}(1^2, 3^2, \cdots, (2n-1)^2)}{(2n)!}.$$

On veut montrer que

$$a_{n+1,h} = \frac{s_{n-h}(2^2, 4^2, \cdots, (2n)^2)}{(2n+1)!}.$$

Par le lemme 3, il suffit de montrer que

$$\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n)^2)x^{2h+1} = (2n+1)\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2)A_{2h}(x).$$

En posant $k = 2h$ dans (2.20), on obtient l'identité

$$x^{2h+1} = \sum_{j=0}^{h}(-1)^j\binom{2h+1}{2j+1}A_{2h-2j}(x)$$

et donc,

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n)^2)x^{2h+1}\\ =&\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n)^2)\sum_{j=0}^{h}(-1)^j\binom{2h+1}{2j+1}A_{2h-2j}(x).\end{aligned}$$

En posant $l = h - j$ on obtient

$$\begin{aligned}&=\sum_{h=0}^{n} s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n)^2)\sum_{l=0}^{h}(-1)^{h-l}\binom{2h+1}{2l}A_{2l}(x)\\ &=\sum_{l=0}^{h}\left(\sum_{h=l}^{n}(-1)^h\binom{2h+1}{2l}s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n)^2)\right)(-1)^lA_{2l}(x)\end{aligned}$$

et (2.19) découle du lemme 4. $\square$

CHAPITRE 3

RÉSULTAT PRINCIPAL

Il ne reste plus qu'à calculer les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty m_k(z+x)\log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \pm 1}$$

pour compléter la preuve du théorème 1. Nous aurons besoin de deux outils principaux.

3.1 Polylogarithmes et hyperlogarithmes

Définition 6. *Les **polylogarithmes multiples** sont définis par les séries*

$$\mathrm{Li}_{n_1 \cdots n_m}(x_1, \cdots, x_m) := \sum_{0<k_1<\cdots<k_m} \frac{x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}}{k_1^{n_1} \cdots k_m^{n_m}}.$$

*On dit d'une telle série qu'elle est de **longueur** m et de **poid** $\omega = n_1 + \cdots + n_m$. Elles convergent absolument pour $|x_i| \leq 1$ lorsque $n_m > 1$.*

Exemple 5. *Les sommes qui apparaissent dans la proposition 2 sont*

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$
$$\mathrm{Li}_{1,2}(1,x) = \sum_{0<m<n} \frac{x^n}{mn^2}.$$

Définition 7. *Les **hyperlogarithmes** sont définis par les intégrales itérées :*

$$\mathrm{I}_{n_1 \cdots n_m}(a_1 : \cdots : a_{m+1}) := \int_0^{a_{m+1}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{t-a_1} \circ \frac{\mathrm{d}t}{t} \circ \cdots \circ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{n_1} \circ \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{t-a_2} \circ \frac{\mathrm{d}t}{t} \circ \cdots \circ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{n_2} \circ \cdots \circ \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{t-a_m} \circ \frac{\mathrm{d}t}{t} \circ \cdots \circ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{n_m}$$

où

$$\int_0^{b_{k+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t-b_1} \circ \cdots \circ \frac{\mathrm{d}t}{t-b_k} = \int_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le b_{k+1}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1 - b_1} \cdots \frac{\mathrm{d}t_k}{t_k - b_k}.$$

Ces deux objets sont reliés par le résultat suivant (voir [8] pour la preuve) :

Lemme 5.

$$\mathrm{I}_{n_1 \cdots n_m}(a_1 : \cdots : a_{m+1}) = (-1)^m \mathrm{Li}_{n_1 \cdots n_m}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2} \cdots, \frac{a_{m+1}}{a_m}\right)$$
$$\mathrm{Li}_{n_1 \cdots n_m}(x_1, \cdots, x_m) = (-1)^m \mathrm{I}_{n_1 \cdots n_m}((x_1 \cdots x_m)^{-1} : \cdots : x_m^{-1} : 1).$$

Voici un exemple qui sera utile plus loin.

Exemple 6. *La deuxième équation du lemme 5 nous permet d'obtenir directement,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2(x^2) &= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t - \frac{1}{x^2}} \circ \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= -\int_0^x \frac{2s\mathrm{d}s}{s^2-1} \circ \frac{2\mathrm{d}s}{s} && (s^2 = x^2 t) \\
&= -2\int_0^x \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \mathrm{d}s \circ \frac{\mathrm{d}s}{s}
\end{aligned}$$

et de la même façon,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{1,2}(1, x^2) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t - \frac{1}{x^2}} \circ \frac{\mathrm{d}t}{t - \frac{1}{x^2}} \circ \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^x \frac{2s\mathrm{d}s}{s^2-1} \circ \frac{2s\mathrm{d}s}{s^2-1} \circ \frac{2\mathrm{d}s}{s} && (s^2 = x^2 t) \\
&= 2\int_0^x \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \mathrm{d}s \circ \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \mathrm{d}s \circ \frac{\mathrm{d}s}{s}.
\end{aligned}$$

3.2 Calculs préliminaires

Pour simplifier la suite, nous utiliserons la notation suivante.

Définition 8. *On définie les **polylogarithmes multicolores** par*

$$\mathscr{L}_{n_1, \cdots, n_m}(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{(k_1, \cdots, k_m) \in \{0,1\}^m} (-1)^{k_m} \mathrm{Li}_{n_1, \cdots, n_m}((-1)^{k_1} x_1, \cdots, (-1)^{k_m} x_m).$$

On regroupe tous les outils dont nous aurons besoin dans le lemme suivant.

Lemme 6. *On a les identités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= (-1)^{j+1} j! \left(1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) \zeta(j+1) \\
\int_0^1 \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= (-1)^{j} j! \mathrm{L}(\chi_{-4}, j+1) \\
\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2) \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= (-1)^{j+1} j! \mathscr{L}_{2,j+1}(1,1) \\
\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2) \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= i(-1)^{j+1} j! \mathscr{L}_{2,j+1}(i,i) \\
\int_0^1 \mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2) \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= (-1)^{j+1} j! \mathscr{L}_{1,2,j+1}(1,1,1) \\
\int_0^1 \mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2) \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= i(-1)^{j+1} j! \mathscr{L}_{1,2,j+1}(1,i,i).
\end{aligned}$$

Preuve : Les deux premières identités sont prouvées dans [10]. Les quatre dernières sont démontrées de la même façon. On démontre la quatrième et la cinquième :

En utilisant l'exemple 6 et le fait que $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\log x$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2) \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
=&\int_0^1 \left(-2\int_0^x \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \mathrm{d}s \circ \frac{\mathrm{d}s}{s}\right) \log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
=&i(-1)^j j! \int_0^1 \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \mathrm{d}s \circ \frac{\mathrm{d}s}{s} \circ \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) \mathrm{d}x \circ \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{t} \circ \cdots \circ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{j fois}} \\
=&i(-1)^j j! (\mathrm{I}_{2,j+1}(1:i:1) - \mathrm{I}_{2,j+1}(1:-i:1) + \mathrm{I}_{2,j+1}(-1:i:1) - \mathrm{I}_{2,j+1}(-1:-i:1)) \\
=&i(-1)^j j! (\mathrm{Li}_{2,j+1}(i,-i) - \mathrm{Li}_{2,j+1}(-i,i) + \mathrm{Li}_{2,j+1}(-i,-i) - \mathrm{Li}_{2,j+1}(i,i)) \\
=&i(-1)^{j+1} j! \mathscr{L}_{2,j+1}(i,i)
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^j x \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\
=&\int_0^1 \left(2\int_0^x \left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s\circ\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s\circ\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)\log^j x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\
=&(-1)^j j!\int_0^1 \left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s\circ\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s\circ\frac{\mathrm{d}s}{s}\circ\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\circ\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{t}\circ\cdots\circ\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{j fois}}\\
=&(-1)^j j!\sum_{(r,s,t)\in\{0,1\}^3}(-1)^t \mathrm{I}_{1,2,j+1}((-1)^r:(-1)^s:(-1)^t:1)\\
=&(-1)^{j+1} j!\sum_{(r,s,t)\in\{0,1\}^3}(-1)^t \mathrm{Li}_{1,2,j+1}((-1)^{r+s},(-1)^{s+t},(-1)^t)\\
=&(-1)^{j+1} j!\mathscr{L}_{1,2,j+1}(1,1,1).
\end{aligned}
$$

□

3.3 Preuve du théorème 1

Nous avons vu au chapitre 2, avec (2.3), la définition 5 et le théorème 4, que

$$\pi^{2n}m_k(R_{2n}) = \sum_{h=1}^{n}\frac{s_{n-h}(2^2,4^2,\cdots,(2n-2)^2)}{(2n-1)!}2^{2h}\pi^{2n-2h}\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$

et

$$\pi^{2n+1}m_k(R_{2n+1}) = \sum_{h=0}^{n}\frac{s_{n-h}(1^2,\cdots,(2n-1)^2)}{(2n)!}2^{2h+1}\pi^{2n-2h}\int_0^\infty m_k(z+x)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer ces deux intégrales pour $k=2$ et $k=3$.

k=2

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty m_2(z+x)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\
=&\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(x^2)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}+\int_1^\infty\left(\log^2 x+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} && \text{(proposition 2)}\\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}+\int_0^1(\log^2 y+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(y^2))\log^{2h-1}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} && \left(y=\frac{1}{x}\right)\\
=&\int_0^1 \log^{2h+1}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}+\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\
=&(2h+1)!\left(1-\frac{1}{2^{2h+2}}\right)\zeta(2h+2)+(2h-1)!\mathscr{L}_{2,2h}(1,1) && \text{(lemme 6)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty m_2(z+x)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\
=&\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(x^2)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^\infty\left(\log^2 x+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} && \text{(proposition 2)}\\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_0^1(\log^2 y+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(y^2))\log^{2h}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} && \left(y=\frac{1}{x}\right)\\
=&\int_0^1 \log^{2h+2}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}+\int_0^1 \mathrm{Li}_2(x^2)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\
=&(2h+2)!\mathrm{L}(\chi_{-4},2h+3)-i(2h)!\mathscr{L}_{2,2h+1}(i,i) && \text{(lemme 6)}
\end{aligned}$$

k=3

On procède de la même façon,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty m_3(z+x)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\
=&-\int_0^1 \frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}+\int_1^\infty\left(\log^3 x+\frac{3}{2}\log x\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\
=&-\int_0^1 \frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}-\int_0^1\left(\log^3 y+\frac{3}{2}\log y\mathrm{Li}_2(y^2)+\frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}(y^2)\right)\log^{2h-1}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}\\
=&-3\int_0^1 \mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^{2h-1}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}-\frac{3}{2}\int_0^1\mathrm{Li}_2(y^2)\log^{2h}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}-\int_0^1\log^{2h+2}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}\\
=&-3(2h-1)!\mathscr{L}_{1,2,2h}(1,1,1)+\frac{3}{2}(2h)!\mathscr{L}_{2,2h+1}(1,1)+(2h+2)!\left(1-\frac{1}{2^{2h+3}}\right)\zeta(2h+3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty m_3(z+x)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\
=&-\int_0^1 \frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^\infty\left(\log^3 x+\frac{3}{2}\log x\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\
=&-\int_0^1 \frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int_0^1\left(\log^3 y+\frac{3}{2}\log y\mathrm{Li}_2(y^2)+\frac{3}{2}\mathrm{Li}_{1,2}(y^2)\right)\log^{2h}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}\\
=&-3\int_0^1 \mathrm{Li}_{1,2}(1,x^2)\log^{2h}x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{3}{2}\int_0^1\mathrm{Li}_2(y^2)\log^{2h+1}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}-\int_0^1\log^{2h+3}y\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}\\
=&3i(2h)!\mathscr{L}_{1,2,2h+1}(1,i,i)-\frac{3}{2}i(2h+1)!\mathscr{L}_{2,2h+2}(i,i)+(2h+3)!\mathrm{L}(\chi_{-4},2h+4)
\end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du théorème 1.

CHAPITRE 4

RÉDUCTIONS

Dans le chapitre précédent, on a exprimé $m_2(R_n)$ et $m_3(R_n)$ en terme de valeurs spéciales de la fonction zêta, de fonctions L et de polylogarithmes multiples. Voici un résumé des polylogarithmes qui apparaissent pour $m_2(R_n)$,

$$\mathcal{L}_{2,2h}(1,1)$$

$$\mathcal{L}_{2,2h+1}(i,i)$$

et pour $m_3(R_n)$,

$$\mathcal{L}_{2,2h+1}(1,1)$$

$$\mathcal{L}_{1,2,2h}(1,1,1)$$

$$\mathcal{L}_{2,2h+2}(i,i)$$

$$\mathcal{L}_{1,2,2h+1}(1,i,i).$$

Dépendamment du poid et de la longueur, il est parfois possible de réduire un polylogarithme multiple en terme de sommes plus simples. Selon [6], il est plus facile de réduire les sommes évalués en 1 et -1 lorsque leur longueur et leur poids sont de parité opposée. Voici un exemple fort utile provenant du même article :

Théorème 5. *Pour $\rho, \sigma = \pm 1$ et $r+s$ impair, on a*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}_{r,s}(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}(-\mathrm{Li}_{r+s}(\rho\sigma) + (1+(-1)^s)\mathrm{Li}_r(\rho)\mathrm{Li}_s(\sigma)) \\
&+ \frac{(-1)^s}{2}\left(\binom{r+s-1}{r-1}\mathrm{Li}_{r+s}(\rho) + \binom{r+s-1}{s-1}\mathrm{Li}_{r+s}(\sigma)\right) \\
&- \sum_{0<j<\frac{r+s}{2}} \mathrm{Li}_{2j}(\rho\sigma)(-1)^s\left(\binom{r+s-2j-1}{r-1}\mathrm{Li}_{r+s-2j}(\rho) + \binom{r+s-2j-1}{s-1}\mathrm{Li}_{r+s-2j}(\sigma)\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 2. *L'expression*

$$\mathscr{L}_{2,2h+1}(1,1)$$

peut être réduite en terme de valeurs spéciales de la fonction zêta pour tout h.

Remarque 9. *Le cas* $\rho = \sigma = 1$ *du théorème 5 a été démontré par Euler.*

Les autres polylogarithmes de longueur 2 qui interviennent dans nos calculs sont soit évalués en i, de poids pair ou les deux à la fois. Les deux premiers cas semblent difficiles à calculer en général. Pour ce qui est du troisième, remarquons que pour k pair,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{2,k}(i,i) &= \mathrm{Li}_{2,k}(i,i) - \mathrm{Li}_{2,k}(i,-i) + \mathrm{Li}_{2,k}(-i,i) - \mathrm{Li}_{2,k}(-i,-i)\\
&= \sum_{0<n<m} \frac{(i)^n(i)^m - (i)^n(-i)^m + (-i)^n(i)^m - (-i)^n(-i)^m}{n^2m^k}\\
&= \sum_{0<n<m} \frac{i^{n+m}(1+(-1)^{m+1}+(-1)^n+(-1)^{m+n+1})}{n^2m^k}\\
&= \sum_{\substack{0<n<m\\ n \text{ pair}\\ m \text{ impair}}} \frac{4i^{n+m}}{n^2m^k}\\
&= \sum_{0<2n<2m+1} \frac{4i^{2n+2m+1}}{(2n)^2(2m+1)^k}\\
&= i\sum_{0<n\leq m} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m+1)^k}.
\end{aligned}$$

Nous avons mentionné dans l'introduction (proposition 1) que pour k pair, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{0<n\leq m} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m+1)^k} =& \zeta(2)\mathrm{L}(\chi_{-4},k) - k(k+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k+2)\\
&- \sum_{h=1}^{k/2} \frac{(-1)^h\pi^{2h}(2^{2h}-1)}{(2h)!} B_{2h}(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k-2h+2)
\end{aligned}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli. Nous allons maintenant démontrer ce résultat.

4.1 Idée de la preuve

Une somme semblable est calculée dans [11]. Bien que les calculs soient plus lourds, on peut utiliser la même méthode avec quelques modifications mineures. On pose

$$S = \sum_{0<n\leq m} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m+1)^k} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m+1)^k},$$

et on fait le changement de variable $m \to m-1$. On obtient alors,

$$S = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+m-1}}{n^2(2m-1)^k}$$

et cela entraîne

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m+1)^k} - \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2(2m-1)^k} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2(2m+1)^k} + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+m}}{n^2}\left(\frac{1}{(2m+1)^k} - \frac{1}{(2m-1)^k}\right). \end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier ces deux sommes avec la formule du binôme de Newton généralisée :

$$\frac{1}{(n+x)^s} = \frac{1}{n^s}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r. \tag{4.1}$$

Pour la première, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2(2m+1)^k} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\frac{1}{(2m)^k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\left(\frac{1}{2m}\right)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\frac{1}{(2m)^k}\left(\frac{1}{2m}\right)^r \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\zeta(2+k+r)\left(\frac{1}{2}\right)^r \end{aligned}$$

et pour la deuxième,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n+m}}{n^2}\left(\frac{1}{(2m+1)^k}-\frac{1}{(2m-1)^k}\right)\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n+m}}{n^2}\left(\frac{1}{(2m)^k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1-(-1)^r}{(2m)^r}\right)\\
&=\sum_{\substack{r=1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1}{2^{k+r-1}}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n+m}}{n^2m^{k+r}}\\
&=\sum_{\substack{r=1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1}{2^{k+r-1}}\mathrm{Li}_{2,k+r}(-1,-1).
\end{aligned}$$

Comme $2+k+r$ est impair, nous pouvons utiliser le théorème 5 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{2,k+r}(-1,-1)=&-\frac{1}{2^{k+r+2}}\zeta(2+k+r)-\left(1-\frac{1}{2^{k+r-1}}\right)\zeta(2)\zeta(k+r)\\
&+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{k+r+1}}\right)\zeta(2+k+r)[(r+k+1)(r+k)+2(k+r)]\\
&-\sum_{j=1}^{\frac{k+r-1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{k+r+1-2j}}\right)\zeta(2j)\zeta(2+k+r-2j)(k+r+1-2j).
\end{aligned}$$

Après substitution, on obtient

$$\begin{aligned}
2S=&\frac{1}{2^k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\zeta(2+k+r)\left(\frac{1}{2}\right)^r\\
&+\sum_{\substack{r=1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1}{2^{k+r-1}}\left[-\frac{1}{2^{k+r+2}}\zeta(2+k+r)-\left(1-\frac{1}{2^{k+r-1}}\right)\zeta(2)\zeta(k+r)\right.\\
&+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{k+r+1}}\right)\zeta(2+k+r)[(r+k+1)(r+k)+2(k+r)]\\
&\left.-\sum_{j=1}^{\frac{k+r-1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{k+r+1-2j}}\right)\zeta(2j)\zeta(2+k+r-2j)(k+r+1-2j)\right].
\end{aligned}\tag{4.2}$$

4.2 Quelques outils importants

Voici un résumé des résultats que nous utiliserons pour calculer les sommes de l'équation 4.2 . Ils proviennent tous directement de [11], sauf la proposition 5 qui a dû être modifiée pour nos besoins.

Rappelons la formule du binôme de Newton généralisée,

$$\frac{1}{(n+x)^s} = \frac{1}{n^s}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r.$$

En sommant sur n et en inversant ensuite l'ordre de sommation, on obtient le résultat suivant de Murty et Sinha [14],

Théorème 6. *Pour* $0 < x < 1$,

$$-\frac{1}{x^s} + \zeta(s;x) = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\zeta(s+r)x^r, \tag{4.3}$$

où $\zeta(s;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^s}$ *est la fonction zêta de Hurwitz.*

Nous aurons aussi besoin d'une extension de ce résultat,

Proposition 4. *Pour* $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ *et* s,t *des entiers positifs,*

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\zeta(r+s+t)x^r = &\sum_{h=2}^{t}\frac{(-1)^{t-h}}{x^{s+t-h}}\binom{s+t-h-1}{t-h}\zeta(h)\\ &+\frac{(-1)^{t-1}}{x^{s+t-1}}\binom{s+t-2}{t-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\\ &+(-1)^t\sum_{h=2}^{s}\frac{1}{x^{s+t-h}}\binom{s+t-h-1}{t-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^h}.\end{aligned}$$

Démonstration. On change l'ordre de sommation et on utilise le binôme de Newton généralisé pour obtenir,

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\zeta(s+t+r)x^r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{t+s}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^t(n+x)^s}.$$

On peut montrer par récurence sur t que

$$\frac{1}{n^t(n+x)^s} = \sum_{h=1}^{t} \frac{(-1)^{t-h}}{n^h x^{s+t-h}} \binom{s+t-h-1}{t-h} + (-1)^t \sum_{h=1}^{s} \frac{x^{h-s-t}}{(n+x)^h} \binom{s+t-h-1}{t-1}. \quad (4.4)$$

L'équation est valide pour $t = 1$ puisque

$$\frac{1}{n(n+x)^s} = \frac{1}{nx^s} - \sum_{h=1}^{s} \frac{x^{h-s-1}}{(n+x)^h}.$$

Supposons qu'elle est valide pour t. On a alors

$$\frac{1}{n^{t+1}(n+x)^s} = \sum_{h=1}^{t} \frac{(-1)^{t-h}}{n^{h+1} x^{s+t-h}} \binom{s+t-h-1}{t-h} + (-1)^t \sum_{h=1}^{s} \frac{x^{h-s-t}}{n(n+x)^h} \binom{s+t-h-1}{t-1}$$

$$= \sum_{h=2}^{t+1} \frac{(-1)^{t+1-h}}{n^h x^{s+t+1-h}} \binom{s+t-h}{t+1-h} + (-1)^t \sum_{h=1}^{s} x^{h-s-t} \left(\frac{1}{nx^h} - \sum_{l=1}^{h} \frac{x^{l-h-1}}{(n+x)^l} \right) \binom{s+t-h-1}{t-1}$$

$$= \sum_{h=1}^{t+1} \frac{(-1)^{t+1-h}}{n^h x^{s+t+1-h}} \binom{s+t-h}{t+1-h} + (-1)^{t+1} \sum_{l=1}^{s} \frac{x^{l-s-t-1}}{(n+x)^l} \sum_{h=l}^{s} \binom{s+t-h-1}{t-1}.$$

Cela montre l'équation 4.4 et il suffit de sommer sur n pour obtenir la proposition.

□

Les deux derniers résultats serviront à calculer le dernier terme de l'équation 4.2.

Proposition 5. *Pour* $2k \geq s$*,*

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{-s}{r+2k-s} (r+1)\zeta(r+2)x^r$$
$$=(-1)^{s+1} \binom{2k-3}{s-1} x^{-2} + \sum_{h=0}^{s-1} (-1)^{h+1} \binom{2k-1}{h} (s-h)\zeta(s-h+1;x)x^{s-h-1}.$$

Démonstration. On prend $s = 2$ dans l'identité 4.3 et on multiplie par x^{2k-1} pour obtenir

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{-2}{r} \zeta(r+2)x^{r+2k-1} = -x^{2k-3} + x^{2k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On dérive $s-1$ fois,

$$(-1)^s(s-1)!\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r+2k-s}(r+1)\zeta(r+2)x^{r+2k-s}$$
$$=-(s-1)!\binom{2k-3}{s-1}x^{2k-s-2}+(s-1)!\sum_{h=0}^{s-1}(-1)^{s-h-1}\binom{2k-1}{h}(s-h)\zeta(s-h+1;x)x^{2k-h-1},$$

et on obtient le résultat en divisant par x^{2k-s} et $(-1)^s(s-1)!$. □

Lemme 7. *Pour $h>0$, on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}}\binom{2k-1}{h}=-\frac{(i\pi)^{h+1}(2^{h+1}-1)}{(h+1)!}B_{h+1}+(-1)^h. \tag{4.5}$$

Si $h=0$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}}=1. \tag{4.6}$$

Démonstration. Rappelons d'abord que

$$\zeta(2k)=\frac{(-1)^{k-1}B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

Nous voulons calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}}\binom{2k-1}{h}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}(i\pi)^{2k}}{(2k)!}\binom{2k-1}{h}. \tag{4.7}$$

Si $h > 0$, nous pouvons poursuivre de la façon suivante,

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{n=h+1}^{\infty} \frac{B_n(\pi)^n}{n!}\binom{n-1}{h} \\
&= -\frac{(i\pi)^{h+1}}{h!}\sum_{n=h+1}^{\infty} \frac{B_n(i\pi)^{n-h-1}}{n!}(n-1)\dots(n-h) \\
&= -\frac{(i\pi)^{h+1}}{h!}\frac{\partial^h}{\partial t^h}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)\bigg|_{t=i\pi} \\
&= -\frac{(i\pi)^{h+1}}{h!}\frac{\partial^h}{\partial t^h}\left(\frac{1}{e^{t+i\pi}-1}\right)\bigg|_{t=0} + (-1)^h \\
&= \frac{(i\pi)^{h+1}}{h!}\frac{\partial^h}{\partial t^h}\left(\frac{1}{e^t+1}\right)\bigg|_{t=0} + (-1)^h \\
&= \frac{(i\pi)^{h+1}}{h!2}E_h(0) + (-1)^h
\end{aligned}
$$

où les $E_n(x)$ sont les polynômes d'Euler donnés par $\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(x)t^n}{n!}$. Puisque

$$E_n(0) = -\frac{2(2^{n+1}-1)B_{n+1}}{n+1}$$

(voir la page 805 de [1]), l'équation 4.7 devient

$$= -\frac{(i\pi)^{h+1}(2^{h+1}-1)}{(h+1)!}B_{h+1} + (-1)^h.$$

Pour le cas où $h = 0$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(i\pi)^n}{n!} + B_0 + B_1 i\pi = -\frac{i\pi}{e^{i\pi}-1} + 1 - \frac{i\pi}{2} = 1.$$

□

4.3 Calculs principaux

Nous pouvons maintenant calculer chaque somme de l'équation 4.2.

Premier terme :

En utilisant la proposition 4 avec $t=2$ et $x=1/2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\zeta(2+k+r)\left(\frac{1}{2}\right)^r\\
=&\frac{1}{2^k}\left(2^k\zeta(2)-k2^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1/2}\right)+\sum_{j=2}^{k}2^{k+2-j}(k+1-j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^j}\right)\\
=&\zeta(2)-2k\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n}-\frac{2}{2n+1}\right)+\sum_{j=2}^{k}2^{2-j}(k+1-j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^j}{(2n+1)^j}\\
=&\zeta(2)-4k\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{j=2}^{k}4(k+1-j)\left(\left(1-\frac{1}{2^j}\right)\zeta(j)-1\right)\\
=&\zeta(2)-4k(1-\log 2)+\sum_{j=2}^{k}\frac{(2^j-1)(k+1-j)}{2^{j-2}}\zeta(j)-4\sum_{j=2}^{k}(k+1-j)\\
=&-2k(k+1)+\zeta(2)+4k\log 2+\sum_{j=2}^{k}\frac{(2^j-1)(k+1-j)}{2^{j-2}}\zeta(j).
\end{aligned}
$$

Deuxième terme :

$$
\sum_{\substack{r=1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1}{2^{k+r-1}}\left(-\frac{1}{2^{k+r+2}}\zeta(2+k+r)\right)=-\frac{1}{2^{2k+2}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\zeta(2+k+r)\frac{1-(-1)^r}{4^r}.
$$

On utilise la proposition 4 avec $t = 2$ et $x = 1/4$,

$$
\begin{aligned}
=& -\frac{1}{2^{2k+2}}\left(4^k\zeta(2) - k4^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/4}\right) + \sum_{j=2}^{k} 4^{k+2-j}(k+1-j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/4)^j}\right)\\
&+\frac{1}{2^{2k+2}}\left(4^k\zeta(2) + k4^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1/4}\right) + \sum_{j=2}^{k}(-4)^{k+2-j}(k+1-j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1/4)^j}\right)\\
=&k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/4}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1/4}\right)\right)\\
&-\sum_{j=2}^{k}4(k+1-j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^j} + \sum_{j=2}^{k}(-1)^j4(k+1-j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)^j}\\
=&k(4-6\log 2) - 4\sum_{j=2}^{k}(k+1-j)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^j} - (-1)^j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)^j} - 1\right)\\
=&k(4-6\log 2) - 4\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k+1-2j)\mathrm{L}(\chi_{-4},2j) - 4\sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}}(k-2j)\left(1-\frac{1}{2^{2j+1}}\right)\zeta(2j+1)\\
&+4\sum_{j=2}^{k}(k+1-j)\\
=&2k^2+2k-6k\log 2 - 4\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}}(k+1-2j)\mathrm{L}(\chi_{-4},2j) - 4\sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}}(k-2j)\left(1-\frac{1}{2^{2j+1}}\right)\zeta(2j+1).
\end{aligned}
$$

Troisième terme :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{r=1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1}{2^{k+r-1}}\left(-\left(1-\frac{1}{2^{k+r-1}}\right)\zeta(2)\zeta(k+r)\right)\\
&=-\frac{\zeta(2)}{2^k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\zeta(k+r)\frac{1-(-1)^r}{2^r} + \frac{\zeta(2)}{2^{2k-1}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\zeta(k+r)\frac{1-(-1)^r}{4^r}.
\end{aligned}
$$

On utilise le théorème 6 avec $x = 1/2$ et $x = 1/4$,

$$
\begin{aligned}
&=\zeta(2) + 2\zeta(2)\left(\mathrm{L}(\chi_{-4},k) - 1\right)\\
&=-\zeta(2) + 2\zeta(2)\mathrm{L}(\chi_{-4},k).
\end{aligned}
$$

Quatrième terme :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{r=1\\ r \text{ impair}}}^{\infty} \binom{-k}{r} \frac{1}{2^{k+r-1}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{k+r+3}}\right) \zeta(2+k+r)(r+k+1)(r+k) \\
=&k(k+1) \sum_{\substack{r=1\\ r \text{ impair}}}^{\infty} \binom{-(k+2)}{r} \frac{1}{2^{k+r-1}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{k+r+3}}\right) \zeta(2+k+r) \\
=&\frac{k(k+1)}{2^{k+2}} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-(k+2)}{r} \zeta(2+k+r) \frac{1-(-1)^r}{2^r} \\
&- \frac{k(k+1)}{2^{2k+3}} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-(k+2)}{r} \zeta(2+k+r) \frac{1-(-1)^r}{4^r}.
\end{aligned}$$

On utilise le théorème 6 avec $s = k+2$,

$$\begin{aligned}
=&-k(k+1) - 2k(k+1)(\mathrm{L}(\chi_{-4}, k+2) - 1) \\
=&k(k+1) - 2k(k+1)\mathrm{L}(\chi_{-4}, k+2).
\end{aligned}$$

Cinquième terme :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{r=1\\ r \text{ impair}}}^{\infty} \binom{-k}{r} \frac{1}{2^{k+r-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+r+2}}\right) \zeta(2+k+r)(r+k) \\
=&k \sum_{\substack{r=1\\ r \text{ impair}}}^{\infty} \binom{-(k+1)}{r} \frac{1}{2^{k+r-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+r+2}}\right) \zeta(2+k+r) \\
=&\frac{k}{2^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-(k+1)}{r} \zeta(2+k+r) \frac{1-(-1)^r}{2^r} \\
&- \frac{k}{2^{2k+2}} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-(k+1)}{r} \zeta(2+k+r) \frac{1-(-1)^r}{4^r}.
\end{aligned}$$

On utilise la proposition 4 avec $s = k+1$ et $t = 1$ pour obtenir,

$$
\begin{aligned}
=&k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1/2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1/2}\right)\right)-2k\sum_{h=2}^{k+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^h}-(-1)^h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^h}\right)\\
&-k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1/4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1/4}\right)\right)+4k\sum_{h=2}^{k+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^h}-(-1)^h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)^h}\right)\\
=&\left(2k^2+2k-4k\log 2-4k\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{2h+1}}\right)\zeta(2h+1)\right)\\
&-\left(4k^2+4k-6k\log 2-4k\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{2h+1}}\right)\zeta(2h+1)-4k\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\mathrm{L}(\chi_{-4},2h)\right)\\
=&-2k^2-2k+2k\log 2+4k\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\mathrm{L}(\chi_{-4},2h).
\end{aligned}
$$

Dernier terme :

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\substack{r=1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\frac{1}{2^{k+r-1}}\sum_{j=1}^{\frac{k+r-1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{k+r+1-2j}}\right)\zeta(2j)\zeta(2+k+r-2j)(k+r+1-2j)\\
=&-\sum_{j=k/2}^{\infty}\zeta(2j)\sum_{\substack{r=2j-k+1\\ r\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{r}\left(\frac{1}{2^{k+r-1}}-\frac{1}{2^{2k+2r-2j}}\right)\zeta(2+k+r-2j)(k+r+1-2j).
\end{aligned}
$$

En prenant $t = r+k-2j$, l'intérieur devient

$$
\begin{aligned}
&\zeta(2j)\sum_{\substack{t=1\\ t\text{ impair}}}^{\infty}\binom{-k}{t-k+2j}\left(\frac{1}{2^{t+2j-1}}-\frac{1}{2^{2t+2j}}\right)(t+1)\zeta(t+2)\\
=&\frac{\zeta(2j)}{2^{2j}}\sum_{t=0}^{\infty}\binom{-k}{t-k+2j}(t+1)\zeta(t+2)\frac{1-(-1)^t}{2^t}\\
-&\frac{\zeta(2j)}{2^{2j+1}}\sum_{t=0}^{\infty}\binom{-k}{t-k+2j}(t+1)\zeta(t+2)\frac{1-(-1)^t}{2^{2t}}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la proposition 5, on obtient

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\zeta(2j)}{2^{2j}}\left(-8\sum_{h=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{2j-1}{2h}(k-2h)\left(1-\frac{1}{2^{k-2h+1}}\right)\zeta(k-2h+1)-4\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^{h+1}\binom{2j-1}{h}(k-h)\right)\\
-&\frac{\zeta(2j)}{2^{2j+1}}\left(-16\sum_{h=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{2j-1}{2h}(k-2h)\left(1-\frac{1}{2^{k-2h+1}}\right)\zeta(k-2h+1)\right.\\
&\left.+16\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\binom{2j-1}{2h-1}(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k-2h+2)-16\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^{h+1}\binom{2j-1}{h}(k-h)\right)\\
=&-\frac{\zeta(2j)}{2^{2j-1}}\left(4\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\binom{2j-1}{2h-1}(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k-2h+2)-2\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^{h+1}\binom{2j-1}{h}(k-h)\right).
\end{aligned}
$$

On peut maintenant sommer sur j avec le lemme 7. On obtient

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta(2j)}{2^{2j-1}}\binom{2j-1}{2h-1}\right)(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k-2h+2)\\
&+2k\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta(2j)}{2^{2j-1}}-2\sum_{h=1}^{k-1}(-1)^{h+1}(k-h)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta(2j)}{2^{2j-1}}\binom{2j-1}{h}\\
=&4\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\left(\frac{-(i\pi)^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h}}{(2h)!}-1\right)(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k-2h+2)\\
&-4\sum_{h=1}^{\frac{k}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{2h}}\right)\zeta(2h)(k-2h+1)+k^2+k.
\end{aligned}
$$

En combinant le tout, on obtient

$$
\begin{aligned}
2S=&2\zeta(2)\mathrm{L}(\chi_{-4},k)-2k(k+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k+2)\\
&-4\sum_{h=1}^{k/2}\frac{(-1)^h\pi^{2h}(2^{2h}-1)}{(2h)!}B_{2h}(k-2h+1)\mathrm{L}(\chi_{-4},k-2h+2)
\end{aligned}
$$

et cela montre la proposition 1.

Exemple 7. *Rappelons que*

$$R_n := z + \frac{(1-x_1)}{(1+x_1)} \cdots \frac{(1-x_n)}{(1+x_n)}.$$

Par le théorème 1, on a

$$m_3(R_1) = \frac{6i}{\pi}\mathscr{L}_{1,2,1}(1,i,i) - \frac{3i}{\pi}\mathscr{L}_{2,2}(i,i) + \frac{12}{\pi}\mathrm{L}(\chi_{-4},4)$$
$$m_3(R_2) = -\frac{12}{\pi^2}\mathscr{L}_{1,2,2}(1,1,1) + \frac{12}{\pi^2}\mathscr{L}_{2,3}(1,1) + \frac{93}{\pi^2}\zeta(5).$$

En applicant la proposition 1 pour la première équation et le corrolaire 2 pour la seconde, on obtient

$$m_3(R_1) = \frac{6i}{\pi}\mathscr{L}_{1,2,1}(1,i,i) + \frac{5\pi}{4}\mathrm{L}(\chi_{-4},2) - \frac{6}{\pi}\mathrm{L}(\chi_{-4},4)$$
$$m_3(R_2) = -\frac{12}{\pi^2}\mathscr{L}_{1,2,2}(1,1,1) + \frac{49}{4}\zeta(3) - \frac{93}{2\pi^2}\zeta(5).$$

CHAPITRE 5

CONCLUSION

En bout de ligne, nous avons réussit à généraliser la méthode utilisée dans [10]. Cela a permit d'exprimer la mesure de Mahler 2-supérieure et 3-supérieure des fonctions rationnelles R_n en termes de valeurs spéciales de polylogarithmes multiples. Certaines de ces sommes ont pu être réduites en termes de valeurs spéciales de la fonction zêta et de fonctions L. Toutefois, les quatre cas généraux contiennent des sommes que nous n'arrivons pas à réduire.

Il existe tout de même un cas particulier pour lequel on obtient une bonne réduction. Par le théorème 1, on sait que

$$m_2(R_2) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2}\mathscr{L}_{2,2}(1,1).$$

On peut trouver dans [4] une liste des réductions pour les polylogarithmes multiples de poids inférieur à 5 évalués en 1 ou -1. Entre autres, on a les réductions suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{2,2}(1,1) &= \frac{3}{10}\zeta(2)^2 \\
\mathrm{Li}_{2,2}(1,-1) &= \frac{1}{8}\zeta(2)^2 - 2\mathrm{Li}_{1,3}(1,-1) \\
\mathrm{Li}_{2,2}(-1,1) &= \frac{-11}{40}\zeta(2)^2 + 2\mathrm{Li}_{1,3}(1,-1) \\
\mathrm{Li}_{2,2}(-1,-1) &= \frac{-3}{40}\zeta(2)^2.
\end{aligned}$$

Cela permet de réduire $\mathscr{L}_{2,2}(1,1)$ pour obtenir

$$m_2(R_2) = \frac{89\pi^2}{360} + \frac{16}{\pi^2}\mathrm{Li}_{1,3}(1,-1).$$

On peut maintenant combiner l'identité suivante de [4]

$$\mathrm{Li}_{1,3}(-1,-1) = -\frac{11}{20}\zeta(2)^2 + \frac{7}{4}\log 2\zeta(3) - \mathrm{Li}_{1,3}(1,-1)$$

et le résultat suivant de [5]

$$\mathrm{Li}_{1,3}(-1,-1) = \frac{\zeta(4)}{2} - 2\left(\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}\log^2 2(\log^2 2 - \pi^2)\right)$$

pour obtenir

$$m_2(R_2) = -\frac{31\pi^2}{360} + \frac{28}{\pi^2}\log 2\zeta(3) + \frac{32}{\pi^2}\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3\pi^2}\log^2 2(\log^2 2 - \pi^2).$$

Remarque 10. *On peut voir à quel point $m_2(R_2)$ est plus complexe que $m(R_2)$ en prenant $n = 1$ dans l'équation 1.1 du chapitre 1. On obtient*

$$m(R_2) = \frac{7}{\pi^2}\zeta(3).$$

Cette réduction est complète dans le sens qu'elle ne fait intervenir que des sommes de longueur 1. Pour obtenir plus de réductions semblables, une meilleure compréhension des polylogarithmes multiples sera nécessaire. En particulier, la proposition 1, utilisée pour réduire $\mathscr{L}_{2,2h}(i,i)$, semble pouvoir être améliorée pour permettre de réduire des sommes de poids plus élevé. Par exemple, passer de l'exposant 2 à 3 permetterait de réduire le résultat suivant[1] de [10]

$$\begin{aligned}
&\pi^{2n+3} m\left(1 + x + \left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\right)\cdots\left(\frac{1-x_{2n+1}}{1+x_{2n+1}}\right)(1+y)z\right) \\
&= \sum_{h=0}^{n} \frac{s_{n-h}(1^2,\cdots,(2n-1)^2)}{(2n)!} 2^{2h+1}\pi^{2n-2h}\left(i(2h)!\mathscr{L}_{3,2h+1}(i,i) + (2h+1)!\mathrm{L}(\chi_{-4},2h+2)\right).
\end{aligned}$$

[1] On utilise ici la notation de [10] pour $\mathscr{L}_{3,2h+1}(i,i)$. Elle diffère légèrement de celle utilisée dans le présent ouvrage, mais il s'agit du même type de sommes et elle peuvent être réduites de la même façon.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,*. Dover Publications, 1972.

[2] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.

[3] H. Akatsuka. Zeta Mahler measures. *Journal of Number Theory*, 129:2713–2734, 2009.

[4] M. Bigotte, G. Jacob, N. E. Oussous et M. Petitot. Lyndon words and shuffle algebras for generating the coloured mutltiple zeta values relations tables. *Theoretical Computer Science*, 273:271–282, 2002.

[5] D. Borwein, J. M. Borwein et R. Girgensohn. Explicit evaluation of euler sums. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 38(2):277–294, 1995.

[6] J. M. Borwein, D. M Bradley et D. J. Broadhurst. Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums : a compendium of results for arbitrary k. *Electronic J. Combin.*, 4 (2), 1997.

[7] C. Deninger. Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbf{Z}^n$-actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(2):259–281, 1997.

[8] A. B. Goncharov. Multiple polylogarithms and mixed Tate motives (preprint, march 2001). math.AG/0103059.

[9] M. Kontsevich et D. Zagier. Periods. *Mathematics unlimited 2001 and beyond*, pages 771–808, 2001.

[10] M. N. Lalín. Mahler mesure of some n-variable polynomial famillies. *J. Number Theory*, 116(1):102–139, 2006.

[11] M. N. Lalín. On certain combination of coloured multizeta values. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 20(1):115–127, 2006.

[12] D. H Lehmer. Factorization of certain cyclotomic functions. *Ann. of Math.*, 34(2): 461–479, 1933.

[13] K. Mahler. On some inequalities for polynomials in several variables. *J. London Math. Soc.*, 37:341–344, 1962.

[14] M. R. Murty et K. Sinha. Multiple Hurwitz Zeta Functions. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 75:135–156, 2006.

[15] C. J. Smyth. On measures of polynomials in several variables. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 23:49–63, 1981.

[16] C. J. Smyth. The Mahler measure of algebraic numbers : a survey. *Number theory and polynomials, London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 352:322–349, 2008.