

Université de Montréal

Propriétés des valeurs propres de ballotement pour
contenants symétriques

par

Viktor Marushka

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

en en mathématiques

option mathématiques pures

Août 2012

© Viktor Marushka, 2012

Université de Montréal
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé :

Propriétés des valeurs propres de ballotement pour
contenants symétriques

Présenté par :

Viktor Marushka

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pavel Winternitz, président-rapporteur
Iosif Polterovich, directeur de recherche
Octavian Cornea, membre du jury

Résumé

Le problème d'oscillation de fluides dans un conteneur est un problème classique d'hydrodynamique qui est étudié par des mathématiciens et ingénieurs depuis plus de 150 ans. Le présent travail est lié à l'étude de l'alternance des fonctions propres paires et impaires du problème de Steklov-Neumann pour les domaines à deux dimensions ayant une forme symétrique. On obtient des résultats sur la parité de deuxième et troisième fonctions propres d'un tel problème pour les trois premiers modes, dans le cas de domaines symétriques arbitraires.

On étudie aussi la simplicité de deux premières valeurs propres non nulles d'un tel problème. Il existe nombre d'hypothèses voulant que pour le cas des domaines symétriques, toutes les valeurs propres sont simples. Il y a des résultats de Kozlov, Kuznetsov et Motygin [1] sur la simplicité de la première valeur propre non nulle obtenue pour les domaines satisfaisants la condition de John. Dans ce travail, il est montré que pour les domaines symétriques, la deuxième valeur propre non-nulle du problème de Steklov-Neumann est aussi simple.

Mots-clés : fonctions propres, valeurs propres, problème de Steklov-Neumann.

Abstract

The study of liquid sloshing in a container is a classical problem of hydrodynamics that has been actively investigated by mathematicians and engineers over the past 150 years. The present thesis is concerned with the properties of eigenfunctions of the two-dimensional sloshing problem on axially symmetric planar domains. Here the axis of symmetry is assumed to be orthogonal to the free surface of the fluid. In particular, we show that the second and the third eigenfunctions of such a problem are, respectively, odd and even with respect to the axial symmetry.

There is a well-known conjecture that all eigenvalues of the two-dimensional sloshing problem are simple. Kozlov, Kuznetsov and Motygin [1] proved the simplicity of the first non-zero eigenvalue for domains satisfying the John's condition. In the thesis we show that for axially symmetric planar domains, the first two non-zero eigenvalues of the sloshing problem are simple.

Keywords : eigenfunctions, eigenvalues, Steklov-Neumann problem.

Table des matières

1. Introduction	1
2. Résultats principaux	8
2.1. Lemmes préliminaires	8
2.2. Théorème de l'alternance des modes	14
2.3. Multiplicité des valeurs propres	18
3. Exemples	22
3.1. Problèmes de Steklov-Neumann et de Dirichlet pour le secteur	22
3.2. Problème de Steklov-Neumann pour le triangle de 90°	25
3.3. Problème de Steklov-Neumann pour le triangle de 120°	35
Conclusion	37
Références	38

Liste des figures

Figure 2.1. Domaine symétrique pour le problème de ballotement (1.1)-(1.3)	15
Figure 2.2. Changement de signe de la deuxième fonction propre $u_2(x, y)$	16
Figure 2.3. Domaines nodaux de la troisième fonction propre $u_3(x, y)$ pour le domaine symétrique Ω	17
Figure 3.1. Géométrie et coordonnées du secteur [36]	22

Remerciements

Je remercie beaucoup mon directeur de recherche Iosif Polterovich pour la suggestion du thème intéressant, pour ses conseils précieux et son appui constant durant la rédaction de ce mémoire. Je le remercie également pour son support financier pendant la réalisation du projet.

Je suis aussi reconnaissant à ma famille et à mes amis pour leur appui et compréhension.

Un grand merci à Guillaume Roy-Fortin pour ses remarques et conseils.

1. Introduction

L'histoire des oscillations d'un liquide à la surface libre d'un conteneur prend ses origines dans certains travaux classiques en mathématique physique et en hydrodynamique au XIX^e siècle. La source principale des travaux de l'époque était une monographie classique de Lamb [2]. Un grand apport a été fait au développement de ce chapitre par Euler [3] et Poisson [4, 5], Green [6, 7], Kelland [8], Airy [9], Stokes [10], Ostrogradsky [11], Rayleigh [12, 13], Kirchhoff [14], Greenhill [15], Macdonald [16, 17], Chrystal [18, 19], Poincare [20], Hadamard [21, 22] et d'autres.

Des recherches plus intensives dans le domaine des oscillations de liquides ont été faites au cours de soixante dernières années. Cela est dû à ce qu'en génie maritime, en construction aéronautique, en conception des bateaux-citernes, des satellites et vaisseaux spatiaux, on rencontre constamment des réservoirs de forme géométrique et orientation variées, remplis de carburant [23-26]. Dans de tels récipients, des vagues de transport peuvent subitement apparaître la surface libre, pouvant ainsi mettre en danger leur fonctionnement, leur stabilité et gestion. Dans plusieurs cas, par exemple dans les vaisseaux, les aéronefs ou les bateaux-citernes, on a découvert des oscillations de fluides. Parfois, ces oscillations ont causé de l'instabilité ayant même à la perte du moyen de transport et même à des catastrophes. Pour pouvoir déterminer l'importance du danger de telles oscillations de fluides, il faut d'abord déterminer les fréquences de ces systèmes.

Un intérêt particulier à l'étude du comportement de fluides dans les conteneurs est en lien avec la problématique des oscillations sismiques des réservoirs à carburant. L'augmentation du volume des aéronefs et un poids de carburant relativement grand par rapport au poids de toute la construction ont motivé l'étude de la problématique de fluides oscillants qui fait partie de la dynamique non seulement des vaisseaux spatiaux, mais aussi des avions, des bateaux-citernes et même des camions-citernes.

Il est bien connu que les conteneurs à surface ouverte libre remplis de liquides doivent être transportés avec une grande précaution pour éviter de les répandre [27]. Dans ces conteneurs, les liquides sont en grand danger d'être perturbés, même sous l'effet d'un impact externe minime. Ces grandes oscillations peuvent avoir lieu sous l'effet de certaines fréquences en fonction des dimensions et de la forme géométrique du conteneur. Par ailleurs, depuis plusieurs années, des géophysiciens et ingénieurs se sont intéressés du mouvement des eaux dans les lacs et les havres (du point de vue des mouvements périodiques) [28, 29], ainsi que dans les seiches et les havres (oscillation du niveau d'eau), causés par des tempêtes et des tremblements de terre [30-34]. L'examen détaillé des travaux (jusqu'à 1983) consacrés à la résolution précise ainsi qu'approximative du problème d'oscillation de liquides pour les conteneurs et canaux de différentes formes est présenté dans l'article de Fox et Kuttler [35].

Depuis les années quatre-vingt du dernier siècle sont apparus les travaux de Bauer [36, 37], consacrés aux conteneurs coniques ayant un petit angle au sommet et pour lesquels on avait réussi à construire de façon analytique des solutions rapprochées bien alignées avec les données du test. Il faut souligner,

pour cette période, les travaux de Rammerstofer, de Scharf et de Fischer [38], d'Ibrahim et coéquipiers [39-42], de Myshkis [43, 44], de Walter [45], de Monti [46] et d'autres. On peut trouver plus d'information sur les recherches jusqu'à 2005 dans une grande monographie d'Ibrahim [47].

Ces dernières années, la majorité des recherches sont orientées vers les méthodes variationnelles, telles que celle de Ritz-Treftz [48, 49], la méthode variationnelle de l'élément marginal (variational boundary element method) [50] ou la modélisation numérique [51-59].

Il convient par ailleurs d'étudier le comportement des lignes nodales. Dans l'ouvrage de Kuttler [60] a été prouvé un lemme selon lequel les lignes pour les régions symétriques doivent toujours débiter sur une surface libre et se terminer sur la paroi d'un conteneur, pourtant. Or ce résultat s'est avéré erroné, puisque Kozlov, Kuznetsov et Motygin [1] ont montré que les extrémités des lignes nodales peuvent reposer des deux côtés d'une surface libre.

Arrêtons-nous maintenant sur la formulation du problème. Étant donné que la résolution exacte du problème général de l'oscillation de liquide dans les conteneurs de différentes configurations en mouvement est extrêmement complexe, nous utiliserons certaines simplifications de la proposition qui, néanmoins, peuvent recevoir certains paramètres importants et nécessaires pour la construction des appareils terrestres, aériens et spatiaux et les systèmes de direction. C'est pourquoi nous allons étudier un liquide non gluant et non comprimable dans un conteneur dur dont les déplacements et les vitesses ne seront pas considérables pour éviter les équations non linéaires. Nous sous-

entendons aussi que le liquide est homogène et est en mouvement non rotationnel.

Soit v_x, v_y, v_z les projections de la vitesse du fluide $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sur les axes Ox, Oy, Oz au point avec les coordonnées (x, y, z) et au temps t ; soit ρ la densité du liquide. De l'équation de conservation [2, p. 5]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0$$

pour un fluide incompressible ($\rho = \text{const}$, $\partial \rho / \partial t = 0$) on déduit que

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Pour le liquide visqueux et qui est en mouvement non rotationnel les composantes de la vitesse v_x, v_y, v_z , à l'aide des relations

$$v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

peuvent être exprimés en termes d'une fonction unique $u = u(x, y, z, t)$, qui est appelée le potentiel de vitesse, par analogie avec la théorie de la gravitation, de l'électrostatique, etc. À l'aide des deux dernières expressions nous obtenons l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ pour la fonction u .

Étudions le mouvement du fluide dans un canal de longueur infinie et de section constante. Soit l'axe Oz en direction au long du canal, soit l'axe Ox dirigé en direction horizontal dans le plan de section du canal et soit l'axe Oy dirigé en direction vertical dans le plan de section du canal. Dans cette recherche nous étudions uniquement les vibrations transversales du liquide, et donc, le potentiel de vitesse est indépendant de z .

Du fait que la vitesse sur la paroi du canal (ou du conteneur, puisque notre fonction ne dépend pas de la longueur du canal) dans la direction perpendiculaire à la paroi devrait être égale à zéro, donc $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ , où Γ est la paroi du conteneur et n est le vecteur normal extérieur.

En négligeant le carré de la vitesse dans l'équation dynamique [2, pp. 363-364] et en considérant que la pression est constante ($p = \text{const}$) à la surface libre du liquide, après la différenciation par rapport à t et en considérant que le potentiel de la vitesse dépend du temps de façon harmonique $e^{i\omega t}$, nous obtenons la condition pour la fonction u à la surface libre du liquide :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u, \text{ où } \lambda = \omega^2/g, \omega \text{ est la fréquence propre des oscillations du liquide}$$

et g est l'accélération de la chute libre.

Ces hypothèses nous amènent à un problème principal mathématique défini par l'équation de Laplace avec conditions aux frontières de Steklov et Neumann (dans les sources anglophones : "sloshing problem"), qui prend la forme suivante :

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \quad \text{sur } F, \quad (1.3)$$

où u est le potentiel des vitesses; $\lambda = \omega^2/g$, ω est la fréquence propre des oscillations; g est l'accélération de la chute libre; Ω , dans le cas

bidimensionnel, est la zone de coupe de la surface (coupe du conteneur), que l'on suppose symétrique par rapport à l'axe Oy ; F est la surface libre du liquide; Γ est la paroi du conteneur; n est le vecteur normal extérieur.

Les résultats de l'étude d'un tel problème donnent des fréquences propres, des formes de modes (à l'aide de simples différentiations et intégrations) et la répartition de la vitesse, de la pression, du déplacement de la surface libre ainsi que des forces et des moments avec lesquels les liquides libres agissent sur le conteneur. Dans les cas d'effet forcé harmonique du conteneur ayant une fréquence et une amplitude imposées, des changements importants du point de vue des grandeurs, telles que pression, amplitude superficielle, force du liquide et moment peuvent se produire. Des solutions pour les mouvements arbitraires du conteneur peuvent être déterminées à partir des solutions harmoniques en utilisant la méthode des séries de Fourier ou l'intégral de Fourier.

Malgré la formulation simple du problème exposé, le procédé de résolution du problème aux limites (1.1)-(1.3) peut être assez complexe et laborieux à cause des particularités de la forme géométrique du réservoir. Ainsi, on ne connaît que quelques configurations pour lesquelles les solutions exactes sont explicites. En particulier, ces configurations sont les triangles isocèles aux angles de 90° et de 120° au sommet. Si, pour le triangle de 90° , des solutions symétriques et asymétriques [14, 15] sont obtenues de façon analytique, pour le triangle de 120° , on n'a réussi à concevoir que les solutions symétriques qui ont été obtenues par différents auteurs à l'aide de différentes méthodes (voir les ouvrages de Macdonald [16, 17] et un résultat erroné de Greenhill [15], qui

a été corrigé dans l'ouvrage de Haberman, de Jarski et de John [61] ainsi que, de façon indépendante [62], dans l'ouvrage de Packham).

La structure du travail est la suivante. Dans le chapitre deux sont cités les lemmes et les théorèmes préliminaires, le théorème de l'alternance des fonctions propres paires et impaires du problème de Steklov-Neumann (1.1)-(1.3) pour les trois premiers modes dans le cas du domaine symétrique arbitraire Ω . On y a montré que la première et la deuxième valeurs propres de tel problème sont simples. Dans le troisième chapitre sont examinés les exemples illustrant l'alternance non seulement des trois premiers, mais des modes pairs et impairs suivants. La solution du problème de Steklov-Neumann pour le secteur a été comparée aux résultats du problème de Dirichlet pour le même secteur et a été analysée en particulier. Dans la conclusion, on formule un bilan du travail effectué.

2. Les résultats principaux

2.1. Lemmes préliminaires

Étudions certains lemmes et théorèmes qui seront utilisés prochainement lors cours de l'étude du problème (1.1)-(1.3).

Lemme 2.1. *Le problème (1.1)-(1.3) a un nombre infini des valeurs propres $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ et les fonctions propres u_k correspondantes forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.*

Le présent lemme a été appliqué à plusieurs travaux (voir par exemple [63, le théorème 3.1, p. 97], [64, p. 170, 250], [65] et autres). Sa démonstration est présentée dans la monographie [66].

Théorème 2.1 (Courant [67]). **Si nous disposons les fonctions propres $u_1 = \text{const}, u_2, u_3, \dots$ dans l'ordre croissant des valeurs propres correspondantes $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, les lignes nodales de la n -ième fonction propre λ_n divisent le domaine Ω en nombre de domaines inférieur ou égale à n .**

Démonstration

La démonstration du théorème 2.1 est présentée dans le travail [60]. La preuve du théorème de Courant peut être aussi obtenue en utilisant le théorème de Herrmann [68, 69].

Théorème 2.2 (théorème de Herrmann). Supposons que $\Omega \subset R^n$. Soit $u \in C^2(\Omega)$ une certaine fonction. Si, sur Γ , la condition $\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial n} \leq t < \lambda_n$ est respectée, le nombre de domaines nodaux N de la fonction u est inférieur à n .

Démonstration

Utilisons le principe variationnel à la forme suivante [63, 70] :

$$\lambda_n = \min R[v], \quad (2.1)$$

où

$$R[v] = \frac{\int_{\Omega} (\vec{\nabla} v)^2 dV}{\int_{\partial\Omega} v^2 dS} \quad (2.2)$$

est un quotient de Rayleigh, $v \in H^1(\Omega)$, $\partial\Omega = F \cup \Gamma$, la fonction v est orthogonale aux $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, qui sont les fonctions propres du problème (1.1)-(1.3). Le minimum est atteint si et seulement si $v = \varphi_n$.

Posons que Ω_i ($i = 1, 2, \dots, N$) sont des domaines nodaux de u , et $N \geq n$.

Choisissons

$$u_i = \begin{cases} u, & x \in \Omega_i \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i \end{cases}, \quad i=1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Soit K une classe de carré intégrable définies dans Ω , continues avec les dérivés par morceaux de 1^{re} ordre. Soit K_n une sous-classe de la classe $K = K_1$, qui est déterminée par les conditions supplémentaires d'orthogonalité de ses éléments par rapport aux fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$.

Il existe des constantes a_1, \dots, a_n qui ne sont pas toutes nulles, telles que la fonction $F_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ appartient à la sous-classe K_n et étant donné que qu'elle n'est pas égale à zéro, son coefficient de Rayleigh $R[F_n] \geq \lambda_n$. Donc, on peut prendre la fonction F_n comme une fonction-test pour le quotient de Rayleigh.

D'un côté $R[F_n] \geq \lambda_n$, de l'autre, selon le théorème de Green :

$$\int_{\Omega} |\vec{\nabla} F_n|^2 dV = \sum_{i=1}^n a_i^2 \left(\int_{\Omega_i} u_i \Delta u_i dV + \int_{\partial\Omega_i} u_i \frac{\partial u_i}{\partial n} dS \right). \quad (2.4)$$

Conformément à (1.1), le premier terme de (2.4) est égal à zéro. En multipliant la condition du théorème $\frac{1}{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial n} \leq t$ par fonction positive u_i^2 , nous

obtenons $u_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \leq t u_i^2$. Alors,

$$\int_{\Omega} |\vec{\nabla} F_n|^2 dV = \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_{\partial\Omega_i} u_i \frac{\partial u_i}{\partial n} dS \leq t \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_{\partial\Omega_i} u_i^2 dS. \quad (2.5)$$

On pose alors la norme F_n^2 :

$$\int_{\partial\Omega} F_n^2 dS = \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_{\partial\Omega_i} u_i^2 dS. \quad (2.6)$$

Ayant divisé (2.5) par (2.6), obtenons $R[F_n] \leq t < \lambda_n$, une contradiction, parce que $R[F_n] \geq \lambda_n$. Le théorème est prouvé.

Le corollaire du théorème 2.2. Supposons que $\lambda_n = \lambda_{n+1} < \lambda_{n+2}$. Selon le théorème 2.2, le nombre de domaines nodaux est $N \leq n+1$, ce qui ne satisfait pas au théorème 2.1.

Soit $\lambda_n = \lambda_{n+1}$. Montrons que le nombre de domaines nodaux de la fonction φ_n n'excède pas n .

Pour ne pas obtenir une contradiction, il est nécessaire que $R[F_n] = \lambda_n$, il s'en suit que F_n est une fonction propre qui correspond à λ_n . Rappelons que

$$F_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i, \text{ où}$$

$$u_i = \begin{cases} \varphi_n, x \in \Omega_i \\ 0, x \notin \Omega_i \end{cases}.$$

Supposons que $N > n$, c'est-à-dire qu'il existe un domaine Ω_{n+1} tel que $F_n|_{\Omega_{n+1}} = 0$. Selon le théorème de continuation unique, il résulte que $F_n \equiv 0$ est partout dans Ω . Nous avons reçu une contradiction. Par conséquent $N \leq n$, ce qu'affirme le théorème de Courant.

Lemme 2.2. *Si le domaine Ω est symétrique par rapport à l'axe Oy , alors la base des fonctions propres est décomposable en fonctions paires et impaires (remarquons que cette décomposition est multiforme et dépend du choix de base).*

Démonstration

Soit $u_n(x, y)$ est une fonction propre du problème (1.1)-(1.3), et λ_n est une valeur propre qui lui correspond. Étudions la fonction $u_n(-x, y)$ obtenue de

$u_n(x, y)$ par une transformation isométrique par rapport à l'axe de symétrie Oy. Dans la mesure où la transformation $x \rightarrow -x$ ne change ni l'équation de Laplace (1.1) ni les conditions limites (1.2), (1.3), alors $u_n(-x, y)$ est aussi une fonction propre du problème et ayant le même domaine que $u_n(x, y)$. Composons, à partir de ces deux fonctions, les combinaisons linéaires paire et impaire

$$f(x, y) = u_n(x, y) + u_n(-x, y), \quad (2.7)$$

$$g(x, y) = u_n(x, y) - u_n(-x, y). \quad (2.8)$$

Chacune des fonctions (2.7), (2.8) séparément peut s'avérer égale à zéro (ce qui signifie que nous avons à titre de base soit une fonction propre paire, soit une fonction propre impaire). Les deux fonctions ne peuvent pas être égales à zéro, parce que dans ce cas, la fonction propre serait égale à zéro aussi, ce qui est impossible.

Si les deux fonctions ne sont pas égales à zéro, nous avons les deux fonctions propres linéairement indépendantes $f(x, y)$ et $g(x, y)$ correspondant à une seule valeur propre λ_n , c'est-à-dire, cette valeur est multiple. Ainsi, s'il y a une fonction propre, qui n'est ni paire ni impaire, cela signifie que la valeur propre qui lui correspond est multiple. Le lemme est prouvé.

Lemme 2.3. *Si une fonction analytique est égale à zéro dans un certain sous-domaine, alors elle est égale à zéro dans tout le domaine d'analyticité.*

Démonstration

Comme on le sait, la fonction analytique $f(x, y)$ possède des dérivées de tous les ordres et est décomposable en série de puissance. Admettons qu'elle est égale à zéro à un certain point (x_0, y_0) . Étudions le point $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ et à ce point, décomposons la fonction $f(x, y)$ en série de Taylor sur Δx et Δy . Les dérivés partielles seront les coefficients d'une telle série sur x et y , calculés au point (x_0, y_0) et seront égales à zéro, parce que $f(x_0, y_0) = 0$. Ainsi $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) = 0$, ce qu'il fallait prouver.

La démonstration alternative de ce lemme est présentée dans [71, p. 259-260].

Lemme 2.4. *Les lignes nodales ne peuvent pas être fermées à l'intérieur du domaine de Ω .*

Démonstration

La démonstration du lemme 2.4 est présentée dans le travail [72].

Notons que si le premier et le dernier points de la ligne nodale sont les mêmes, alors cette ligne est appelée fermée.

Posons qu'il existe une ligne nodale fermée. Alors nous avons un problème intérieur de Dirichlet avec le condition limite $u_n(x, y) = 0$. Nous avons une fonction harmonique qui est analytique à l'intérieur du domaine Ω . Par définition, la fonction propre n'est pas identiquement égale à zéro. Du théorème d'unicité de la résolution du problème Dirichlet (voir par exemple [73]), il découle que si $u_n(x, y) = 0$ est à la frontière du domaine Ω , la même valeur de la fonction doit être à l'intérieur du domaine fermé. Alors, conformément au lemme 2.3, la fonction harmonique $u_n(x, y)$ est égale à zéro

non seulement dans le domaine fermé, mais dans tout le domaine du contenant Ω , ce qui est impossible.

Lemme 2.5. *La fonction propre $u_2(x,y)$ ne possède qu'une seule ligne nodale liant la surface libre F à la paroi Γ .*

La démonstration du lemme 2.5 est présentée dans le travail [1]. Conformément au théorème 3.1 de [1], la fonction propre $u_2(x,y)$ correspondant à la valeur propre fondamentale, n'a qu'une seule ligne nodale liant une surface libre F à la paroi Γ .

Conformément au lemme 2.4, la ligne nodale ne peut pas s'intersecter elle-même.

Lemme 2.6. *Les lignes nodales pour la fonction propre $u_3(x,y)$ ne peuvent pas intersecter l'une l'autre à l'intérieur du domaine Ω .*

Démonstration

À l'intersection des lignes nodales pour la fonction propre $u_3(x,y)$, le nombre de domaines nodaux est supérieur à 3, ce qui est impossible en raison du théorème 2.1. Ainsi le lemme est prouvé.

2.2. Théorème sur l'alternance des modes

Formulons et prouvons le théorème suivant pour un domaine symétrique :

Théorème 2.3. **Supposons que nous avons un segment de $-a$ à a et une courbe symétrique par rapport à l'axe Oy , ce qui nous donne un certain**

domaine symétrique Ω avec une frontière Γ et une surface libre F (voir fig.2.1).

Étudions un problème spectral (1.1)-(1.3) pour un tel domaine, avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ et les fonctions propres $u_1 = \text{const}, u_2, u_3, \dots$ correspondantes. Sous de telles conditions, la fonction u_2 est impaire et la fonction u_3 est paire.

Démonstration

La première fonction propre $u_1 = \text{const}$ correspond à la valeur propre nulle $\lambda_1 = 0$. Elle a un seul domaine nodal et est **paire**.

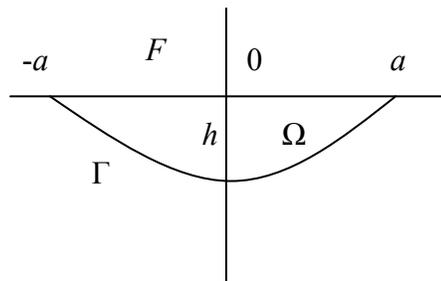


Figure 2.1. Domaine symétrique pour le problème de ballotement (1.1)-(1.3).

La fonction propre suivante $u_2(x, y)$ correspond à la valeur propre fondamentale $\lambda_2 > 0$ et, conformément au lemme 2.5 elle n'a qu'une seule ligne nodale $u_2(x, y) = 0$ liant la surface libre à la paroi du réservoir [1]. Étant donné que le domaine est symétrique par rapport à l'axe Oy, la ligne nodale doit coïncider avec elle (s'il y a un point dans lequel $u_2(x, y) = 0$ à gauche de

l'axe de symétrie, un tel point doit exister à droite aussi). Ainsi, pour chaque $y_0 \in [-h, 0]$ (h est l'hauteur du domaine Ω) il existe un seul point nodal $x = 0$ pour lequel la fonction harmonique $u_2(x, y_0) = 0$ et change son signe. En effet, si elle avait eu le même signe à gauche et à droite de l'axe $x = 0$, la condition d'orthogonalité ne serait pas remplie entre les fonctions $u_1 = \text{const}$ et u_2 :

$$\int_{-x_0}^{x_0} u_1(x, y_0) u_2(x, y_0) dx = \text{const} \int_{-x_0}^{x_0} u_2(x, y_0) dx = 0, \text{ pour } \forall y_0 \in [-h, 0], \quad (2.9)$$

où x_0 est une solution de l'équation $f(x_0, y_0) = 0$, car les apports des parties gauche et droite du domaine d'intégration auraient le même signe et ne seraient pas compensés. Ainsi, la fonction $u_2(x, y)$ à gauche et à droite de l'axe Oy a différents signes (voir fig. 2.2) et, en conséquence, est **impair**.

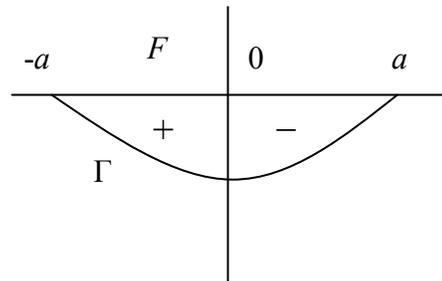


Figure 2.2. Changement de signe de la deuxième fonction propre $u_2(x, y)$.

Étudions la fonction propre $u_3(x, y)$. Conformément aux lemmes 2.4 et 2.6, elle ne peut avoir de lignes nodales fermées et intersectées à l'intérieur du domaine. Supposons que la fonction $u_3(x, y)$ est impaire. Alors, comme la fonction précédente, $u_3(x, y)$ doit avoir des points nodaux sur l'axe de

symétrie. S'il n'y a pas d'autres lignes nodales, nous avons deux domaines nodaux. Alors de la condition d'orthogonalité des fonctions u_1 et u_3 , découle que u_3 , comme la fonction u_2 , doit avoir des signes différents à gauche et à droite de l'axe (voir fig. 2.2.). Pourtant, dans ce cas, la condition d'orthogonalité des fonctions u_2 et u_3 ne serait pas respectée :

$$\int_{-x_0}^{x_0} u_2(x, y_0) u_3(x, y_0) dx = 0, \text{ pour } \forall y_0 \in [-h, 0], \quad (2.10)$$

car les apports à l'intégrale des parties gauche et droite du domaine d'intégration auraient le même signe et ne seraient pas compensés.

Ainsi, le nombre de zones nodales et par conséquent de lignes nodales doit être plus grand. Ici, il est possible d'avoir le comportement suivant des lignes nodales : soit la ligne nodale va de la surface à la surface, et nous aurons quatre domaines nodaux (voir le dessin 2.3) soit la ligne nodale va de la surface libre sur la paroi (ou d'une paroi vers l'autre paroi), mais du fait que de l'autre côté de l'axe doit se trouver une ligne symétrique à celle-ci, nous nous aurons de nouveau quatre domaines.

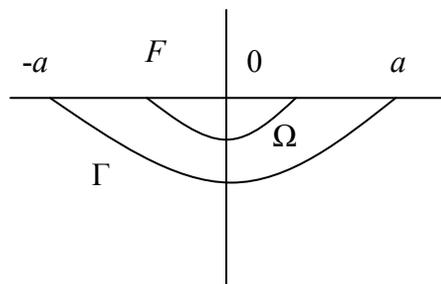


Figure 2.3. Domaines nodaux de la troisième fonction propre $u_3(x, y)$ pour le domaine symétrique Ω .

Conformément au théorème 2.1, la fonction u_3 ne peut pas avoir plus de trois domaines nodaux et, par conséquent, notre hypothèse qu'elle est impaire est erronée. Donc la fonction u_3 est **paire**. Le théorème est prouvé.

2.3. La multiplicité des valeurs propres

Lemme 2.7. *Si la fonction propre u_n est impaire, nous obtenons alors les problèmes de Dirichlet-Neumann-Steklov du côté gauche et du droit du domaine Ω , par rapport à l'axe de symétrie.*

Démonstration

Si la fonction u_n est impaire, alors sur l'axe de symétrie Oy nous avons la condition de Dirichlet $u_n = 0$ et pour les parties gauche et droite du domaine Ω , nous aurons des problèmes de Dirichlet-Neumann-Steklov.

Lemme 2.8. *Si la fonction propre u_n est paire, dans la partie gauche et droite de Ω par rapport à l'axe de symétrie, nous avons les problèmes de Steklov-Neumann.*

Démonstration

Si la fonction u_n est paire, alors sur l'axe de symétrie Oy elle a un minimum ou un maximum, c'est-à-dire $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0$, et pour la partie gauche de même que pour la partie droite par rapport à l'axe de symétrie du domaine Ω nous avons un problème de Steklov-Neumann.

Lemme 2.9. *La deuxième valeur propre λ_2 du problème spectral (1.1)-(1.3) est simple.*

Démonstration

Pour le domaine symétrique Ω , la fonction propre u_2 étant impaire (par le théorème 2.3), elle satisfait au lemme 2.7, c'est-à-dire au problème de Dirichlet sur chacune des moitiés de Ω et, comme on a déjà dit, elle a une ligne nodale qui coïncide avec l'axe de symétrie. Admettons que λ_2 est multiple, c'est-à-dire il existe deux solutions linéairement indépendantes u_2 et v_2 , et correspondant à une valeur propre λ_2 . Alors la condition d'orthogonalité doit être remplie

$$\int_{-x_0}^{x_0} u_2(x, y_0) v_2(x, y_0) dx = 0, \text{ pour } \forall y_0 \in [-h, 0], \quad (2.11)$$

Sur chacune des moitiés du domaine Ω , les fonctions u_2 et v_2 peuvent avoir soit le même signe et dans ce cas $u_2 v_2 > 0$ et l'intégral (2.11) sera strictement positif soit les signes différents, et dans ce cas $u_2 v_2 < 0$ et l'intégral sera négatif. Dans ces deux cas, nous obtenons une contradiction à la condition d'orthogonalité. Ainsi λ_2 est simple. Le lemme est prouvé.

Ce résultat a été démontré dans [1] pour tous les domaines satisfaisant la condition de John. Notons qu'il existe des domaines symétriques qui ne satisfont pas cette condition.

Lemme 2.10. *La troisième valeur propre λ_3 du problème spectral (1.1)-(1.3) est simple.*

Démonstration

Par le lemme 2.8, pour chacune des moitiés du domaine symétrique Ω , nous avons un problème Steklov-Neumann. Notons les fonctions propres de ce problème par v_i et les valeurs propres par $\mu_1 = \text{const} < \mu_2 < \mu_3 \leq \mu_4 \leq \dots$. Étudions la valeur propre fondamentale μ_2 et la fonction propre fondamentale v_2 , qui lui correspond, sur la moitié de Ω et prolongeons cette fonction de façon symétrique dans le domaine de l'autre moitié. Démontrons que la fonction propre obtenue de cette façon correspond à la valeur propre λ_3 du problème (1.1)-(1.3) dans tout le domaine Ω , c'est-à-dire que cette fonction coïncidera avec u_3 du problème (1.1)-(1.3).

Supposons le contraire. La valeur propre fondamentale μ_2 sur la moitié de Ω ne correspond pas à la fonction u_3 , mais à une autre fonction u_n , $n \neq 3$. Le nombre n ne peut pas être plus grand que 3, parce que dans ce cas, à la fonction propre u_3 doit correspondre la fonction propre v_1 du problème sur la moitié de Ω , ce qui est impossible parce que la fonction v_1 correspond à la fonction u_1 . Si $n < 3$, à la fonction v_2 doit correspondre soit la fonction u_2 soit la fonction u_1 . La correspondance de v_2 à la fonction u_2 est impossible, puisque selon le théorème 2.3, la fonction u_2 est impaire et, par le lemme 2.7, elle correspond à un autre problème sur la moitié du domaine Ω – elle correspond au problème Dirichlet-Neumann-Steklov. La fonction v_2 ne peut pas correspondre à u_1 , puisqu'à la fonction u_1 correspond la fonction v_1 . Ainsi, nous sommes arrivés à une contradiction qui signifie que la fonction propre v_2 correspond à la fonction propre u_3 et la valeur propre λ_3 correspond à la valeur propre fondamentale μ_2 , qui selon le théorème montré dans [1], est simple. Par conséquent, λ_3 est aussi simple. Le lemme est prouvé.

Dans le chapitre suivant, nous démontrons l'alternance des fonctions propres paires et impaires par des exemples.

3. Exemples

3.1. Problèmes de Steklov-Neumann et de Dirichlet pour le secteur.

Étudions le problème (1.1)-(1.3) pour le secteur de rayon 1 et un angle central α (voir fig. 3.1).

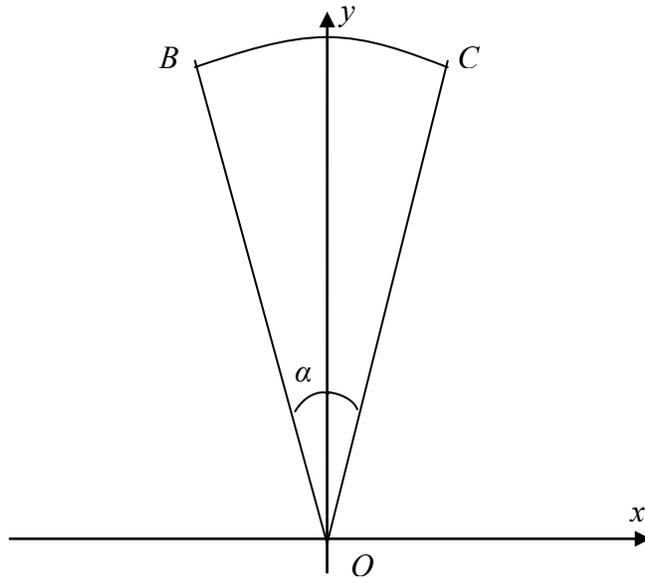


Figure 3.1. Géométrie et coordonnées du secteur [36].

Alors, nous avons :

$$\Delta u = 0, \quad \text{dans le domaine de } BOC, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur les bords } OB \text{ et } OC, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u, \quad \text{sur l'arc } BC. \quad (3.3)$$

Lemme 3.1. *Les fonctions propres et les valeurs propres du problème (3.1)-(3.3) sont suivantes [36] :*

$$u_n(r, \varphi) = a_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\left(\frac{\pi n}{\alpha} \varphi\right). \quad (3.4)$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{\alpha}, \quad (3.5)$$

r, φ sont les coordonnées sphériques.

Lemme 3.2. *Les fonctions propres de (3.4) forment une base complète .*

Démonstration

N'importe quelle fonction $f(\varphi)$ définie sur le segment $\varphi \in [0, \alpha]$, à l'aide de la substitution de la variable $x = \frac{\pi\varphi}{\alpha}$ peut être transférée au segment $x \in [0, \pi]$, puis étendue sur $[-\pi, 0]$, de telle façon qu'elle soit paire sur $[-\pi, \pi]$. Comme on le sait [74], on peut toujours décomposer la fonction paire en série de Fourier de cosinus ($\cos nx$). Ainsi, les fonctions $\cos nx$, $n = 0, 1, 2, \dots$, et donc les fonctions (3.4) forment une base complète dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ [74, 75].

Lemme 3.3. *Les valeurs propres du problème (3.1)-(3.3), qui correspondent aux modes pairs et impairs, alternent.*

Démonstration

En présentant les solutions (3.4) modifiées par réflexions par rapport à l'axe Oy ($x \rightarrow -x$ et alors $\varphi \rightarrow 2\pi\alpha - \varphi$), nous aurons $u_n(r, \varphi) \rightarrow (-1)^n u_n(r, \varphi)$,

c'est-à-dire pour les modes pairs n , les fonction $u_n(r, \varphi)$ sont paires par rapport à x , et pour les modes impairs, les fonctions $u_n(r, \varphi)$ sont impaires par rapport à x . Ainsi, les fonctions propres paires et impaires de ce problème alternent. Ainsi, le lemme est prouvé.

Il serait intéressant de comparer ce résultat au problème de Dirichlet pour le même secteur.

Remarque 3.1. Étudions le problème spectral avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{sur le segment } BOC, \quad (3.6)$$

$$u = 0 \quad \text{aux limites du segment } BOC. \quad (3.7)$$

Lemme 3.4. *Les fonctions propres et valeurs propres du problème (3.6)-(3.7) sont les suivantes [76] :*

$$u_{n,k}(r, \varphi) = J_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}} r) \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha} \varphi\right), \quad (3.8)$$

$$\lambda_{n,k} = j_k^2\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right), \quad (3.9)$$

où $j_k(x)$ est k -ième zéro de la fonction de Bessel $J_{\frac{\pi n}{\alpha}}(x)$.

Comme les calculs analytiques le démontrent [76], pour des angles α assez grands, la deuxième fonction propre est impaire par rapport à l'axe de symétrie (du bissecteur du secteur), qui est considéré ici comme une ligne nodale. Avec la valeur critique de l'angle $\alpha_0 \approx 1.112531$, la deuxième valeur

propre est égale à $\lambda_2 = 90.8402$ et est multiple. Donc, contrairement au problème précédent de Steklov-Neumann, les fonctions paires et impaires correspondent à la même valeur propre, c'est-à-dire, ici nous avons la présence de la multiplicité.

3.2. Problème de Steklov-Neumann pour le triangle de 90° .

Étudions le problème (1.1)-(1.3) pour le triangle de 90° .

Lemme 3.5. *La solution symétrique du problème de Steklov-Neumann du triangle de 90° est la suivante [14, 15] :*

$$u_s(x, y) = A(\cosh mx \cos my + \cos mx \cosh my), \quad (3.10)$$

où A est une constante arbitraire.

À cette solution-là correspond la valeur propre suivante :

$$\lambda = m \tanh hm, \quad (3.11)$$

où la valeur hm satisfait à l'équation transcendante

$$\tan hm = -\tanh hm, \quad (3.12)$$

et la solution $hm = 0$ de l'équation (3.12) correspond au mode le plus bas $\lambda_1 = 0$, $u_1 = \text{const.}$

La résolution du problème (3.12) donne les résultats suivants :

$$hm \approx 0, 2.36502, 5.49780, 8.63938, 11.78097, 14.92257, \dots \quad (3.13)$$

Conformément à cela, les valeurs propres $\lambda = m \tanh hm$ du problème peuvent être trouvées de façon numérique :

$$\lambda h = hm \tanh hm \approx 0, 2.32364, 5.49762, 8.63938, 11.78097, \dots \quad (3.14)$$

Lemme 3.6. *La solution asymétrique (impaire) du problème de Steklov-Neumann de triangle de 90° est suivante [14, 15] :*

$$u_a(x, y) = A(\sinh mx \sin my + \sin mx \sinh my), \quad (3.15)$$

où A est une constante arbitraire.

À cette solution-là correspond la valeur propre suivante :

$$\lambda = m \coth hm, \quad (3.16)$$

où la valeur hm satisfait à l'équation transcendante

$$\tan hm = \tanh hm. \quad (3.17)$$

La résolution du problème (3.17) donne les résultats suivants :

$$hm = 0, 3.92660, 7.06858, 10.21018, 13.35176, 16.49336, \dots \quad (3.18)$$

Les valeurs propres correspondantes peuvent être obtenues par la série suivante :

$$\lambda h = hm \coth hm \approx 1, 3.92965, 7.06859, 10.21018, 13.35176, 16.49336, \dots \quad (3.19)$$

Lemme 3.7. *L'asymptote des valeurs propres pour les modes symétriques est la suivante :*

$$\lambda = \frac{\pi}{h} \left(n - \frac{1}{4} \right) + O(e^{-2\lambda h}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.20)$$

Démonstration

De l'équation (3.12) suit que :

$$hm = -\arctan \frac{1 - e^{-2hm}}{1 + e^{-2hm}} + \pi n = \pi n - \frac{\pi}{4} + R_1(e^{-2hm}), \quad (3.21)$$

où $R_1(e^{-2hm})$ est un terme résiduel de la décomposition de Taylor. Sa valeur peut être évaluée à l'aide de la formule de Lagrange [77] :

$$\left| R_1(e^{-2hm}) \right| = \frac{e^{-2hm}}{1 + \theta^2 e^{-4hm}} < e^{-2hm}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.22)$$

Comme on le voit dans (3.21), pour $hm = 2.36502$ la valeur de $R_1(e^{-2hm})$ peut être évaluée comme $\left| R_1(e^{-2hm}) \right| < 0.00883$ et avec l'augmentation de hm , la fonction $R_1(e^{-2hm})$ diminue fortement. Pour $n = \overline{1,5}$, la formule asymptotique (3.21), donne les valeurs suivantes :

$$hm \approx 2.35619, 5.49779, 8.63938, 11.78097, 14.92257, \dots, \quad (3.23)$$

qui sont très proches des résultats (3.13).

À l'aide de (3.12) transformons la formule (3.11) de la façon suivante :

$$\lambda h = \left(-\arctan \frac{1 - e^{-2hm}}{1 + e^{-2hm}} + \pi n \right) \frac{1 - e^{-2hm}}{1 + e^{-2hm}} = \pi \left(n - \frac{1}{4} \right) + \tilde{R}_1(e^{-2hm}), \quad (3.24)$$

$$\left| \tilde{R}_1(e^{-2hm}) \right| = \frac{2e^{-2hm}}{(1 + \theta e^{-2hm})^2} \left[\pi n - \arctan \frac{1 - \theta e^{-2hm}}{1 + \theta e^{-2hm}} - \frac{1 - \theta^2 e^{-4hm}}{2(1 + \theta^2 e^{-4hm})} \right], \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.25)$$

Puisque pour $n \geq 1$, la valeur $hm \geq 2.36502$ et la fonction θe^{-2hm} satisfait la condition $\theta e^{-2hm} < 1$, alors

$$\left| \tilde{R}_1(e^{-2hm}) \right| < \frac{2\pi e^{-2hm}}{(1 + \theta e^{-2hm})^2} < 2\pi e^{-2hm}. \quad (3.26)$$

Ayant obtenue les deux premiers termes de la formule (3.21), notons que

$$\left| \tilde{R}_1 \right| < 2\pi e^{-2\pi(n-1/4)}. \quad (3.27)$$

La dérivée de la partie droite de (3.27) a la forme suivante $2\pi e^{-2\pi(n-1/4)}(1-2\pi n)$ et est égale à zéro au point $n=1/2\pi \approx 0.16$ qui correspond au maximum et est négatif si $n > 1/2\pi$. Donc, si $n \geq 1$ la partie droite de l'inégalité (3.27) diminue de façon monotone et

$$|\tilde{R}_1| < 2\pi e^{-3\pi/2} = 0.05644. \quad (3.28)$$

Pour $n = \overline{1,5}$, le terme principal de la formule (3.24) donne les valeurs suivantes :

$$\lambda h = 2.35619, 5.49779, 8.63938, 11.78097, 14.92257, \dots \quad (3.29)$$

En comparant les résultats (3.14) et (3.29), on peut voir que la formule asymptotique (3.24) assure une bonne précision même pour $n=1$, et la précision augmente fortement avec l'augmentation de n . Le lemme est prouvé.

Lemme 3.8. *L'asymptote des valeurs propres pour les modes asymétriques (impaires) est suivante :*

$$\lambda = \frac{\pi}{h} \left(n + \frac{1}{4} \right) + O(e^{-2\lambda h}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

Démonstration

Il suit de l'équation (3.17) que

$$hm = \arctan \frac{1 - e^{-2hm}}{1 + e^{-2hm}} + \pi n = \pi n + \frac{\pi}{4} + Q_1(e^{-2hm}), \quad (3.31)$$

où $Q_1(x)$ est un terme résiduel de la décomposition de Taylor dont le module est égal à :

$$|Q_1(e^{-2hm})| = \frac{e^{-2hm}}{1 + \theta^2 e^{-4hm}} < e^{-2hm}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.32)$$

Comme on le voit dans (3.32), pour $n=1$ la valeur hm est égale à $hm=3.92965$ et la valeur de $Q_1(e^{-2hm})$ peut être évaluée comme $|Q_1(e^{-2hm})| < 0.00039$. Avec l'augmentation de hm , la fonction $Q_1(e^{-2hm})$ diminue fortement.

Pour $n = \overline{1,5}$ la formule asymptotique (3.31) donne les valeurs suivantes :

$$hm = 3.92699, 7.06858, 10.21018, 13.35176, 16.49336, \dots \quad (3.33)$$

qui sont très proches des résultats (3.18).

À l'aide de l'équation (3.17) transformons la formule (3.16) de la façon suivante :

$$\lambda h = \left(\arctan \frac{1 - e^{-2hm}}{1 + e^{-2hm}} + \pi n \right) \frac{1 + e^{-2hm}}{1 - e^{-2hm}} = \pi \left(n + \frac{1}{4} \right) + \tilde{Q}_1(e^{-2hm}), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_1(e^{-2hm})| &= \frac{2e^{-2hm}}{(1 - \theta e^{-2hm})^2} \left[\pi n + \arctan \frac{1 - \theta e^{-2hm}}{1 + \theta e^{-2hm}} - \frac{1 - \theta^2 e^{-4hm}}{2(1 + \theta^2 e^{-4hm})} \right] < \\ &< \frac{2\pi e^{-2hm}}{(1 - \theta e^{-2hm})^2} \left(n + \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Puisque $0 < \theta < 1$ et la partie droite de l'inégalité (3.35) est une fonction augmentant de façon monotone sur θ et la conséquence est que

$$|\tilde{Q}_1(e^{-2hm})| < \frac{2\pi e^{-2hm}}{(1 - e^{-2hm})^2} \left(n + \frac{1}{4} \right). \quad (3.36)$$

En utilisant les deux premiers termes de la formule (3.31), notons que

$$|\tilde{Q}_1(e^{-2hm})| < \frac{2\pi e^{-2\pi(n+1/4)}}{(1 - e^{-2\pi(n+1/4)})^2} \left(n + \frac{1}{4} \right). \quad (3.37)$$

Pour tous les $n \geq 1$ l'inégalité $(1 - e^{-2\pi(n+1/4)})^{-2} \leq (1 - e^{-5\pi/2})^{-2}$ est réalisée et

$$\left| \tilde{Q}_1(e^{-2hm}) \right| < \frac{2\pi e^{-2\pi(n+1/4)}}{(1-e^{-5\pi/2})^2} \left(n + \frac{1}{4} \right). \quad (3.38)$$

La dérivée de la partie droite (3.38) est suivante :

$$-\frac{4\pi e^{-2\pi(n+1/4)}}{(1-e^{-5\pi/2})^2} \left[\pi \left(n + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (3.39)$$

et est égale à zéro au point $n = 1/2\pi - 1/4 \approx -0.09$, qui correspond au maximum et est négatif si $n > 1/2\pi - 1/4$. Donc, avec $n \geq 1$, la partie droite de l'inégalité (3.38) décroît de façon monotone et

$$\left| \tilde{Q}_1 \right| < \frac{5\pi e^{-5\pi/2}}{2(1-e^{-5\pi/2})^2} = 0.00305. \quad (3.40)$$

La formule asymptotique (3.34) donne pour $n = \overline{1,5}$ les valeurs suivantes :

$$\lambda h = hm \tanh hm \approx 3.92699, 7.06858, 10.21018, 13.35176, 16.49336, \dots \quad (3.41)$$

En comparant les résultats (3.19) et (3.41), on voit que la formule asymptotique assure une bonne précision pour tous les n en commençant par $n = 1$, croissant rapidement avec l'augmentation du nombre n . Le lemme est prouvé.

Comme on déduit de l'analyse numérique des premiers modes (voir (3.14) et (3.19)), les valeurs propres, qui correspondent aux solutions symétriques et asymétriques, alternent. Prouvons maintenant que cette propriété est aussi applicable aux modes supérieurs.

Lemme 3.9. *Les valeurs propres correspondant aux solutions symétriques et asymétriques pour un triangle rectangulaire alternent.*

Démonstration

Notons que les valeurs propres correspondant aux fonctions propres symétriques et asymétriques pour les indices impairs $M = 1, 3, 5, \dots$ et pour les indices pairs $M = 2, 4, 6, \dots$ respectivement. Conformément aux équations (3.20) et (3.30), leur asymptotique pour $M = 3, 4, \dots$ est suivante :

$$\lambda_M = \frac{\pi}{2h} \left(M - \frac{3}{2} \right) + O\left(e^{-\pi M}\right). \quad (3.42)$$

Étudions maintenant la différence entre les valeurs propres adjacentes en série $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Des formules (3.24), (3.34) et (3.42), il suit que

$$\lambda_{M+1}h - \lambda_M h = \frac{\pi}{2} + R\left(e^{-2hm}\right), \quad (3.43)$$

où pour $M = 3, 4, \dots$ la valeur absolue du terme résiduel est la suivante :

$$\left| R\left(e^{-2hm}\right) \right| < \left| \tilde{R}_1\left(e^{-2hm}\right) \right| + \left| \tilde{Q}_1\left(e^{-2hm}\right) \right| < 0.05949 \ll \pi/2,$$

et avec la croissance de M cette valeur diminue fortement. C'est pourquoi $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, cet-à-dire les modes pairs et impairs alternent toujours. Le lemme est prouvé.

À partir de la formule (3.27), on peut obtenir l'asymptote binominale de la fonction de distribution des valeurs propres (ou la fonction de Weyl)

$$N(\lambda) = \left[\frac{2\lambda h}{\pi} + \frac{3}{2} + O\left(e^{-2\lambda h}\right) \right], \quad (3.44)$$

où les crochets désignent une partie entière.

Lemme 3.10. *L'ensemble des valeurs propres et des fonctions propres du problème du triangle rectangulaire forme une base complète.*

Démonstration

Considérons le problème [78] :

$$\tilde{u}^{(4)} - \tilde{\lambda}\tilde{u} = 0 \quad (3.45a)$$

$$\tilde{u}''(0) = \tilde{u}'''(0) = \tilde{u}''(L) = \tilde{u}'''(L) = 0. \quad (3.45b)$$

Ici, les fonctions propres et les valeurs propres du problème sont désignées respectivement \tilde{u} et $\tilde{\lambda}$ pour ne pas les mélanger avec les fonctions propres u et les valeurs propres λ du problème du triangle.

L'équation (3.45a) est une équation différentielle linéaire homogène de 4^e ordre. Recherchons la solution sous la forme suivante : $\tilde{u} = e^{kx}$. En le mettant dans l'équation, nous obtenons une équation caractéristique $k^4 = \tilde{\lambda}$, qui a quatre solutions : $k_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}$, $k_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}$. Ainsi, nous pouvons noter quatre solutions particulières linéairement indépendantes de (3.45a) :

$$\tilde{u}_1 = e^{\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x}, \tilde{u}_2 = e^{-\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x}, \tilde{u}_3 = e^{i\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x}, \tilde{u}_4 = e^{-i\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x},$$

qui à l'aide des formules connues

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}, \sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

peuvent être remplacées par des solutions particulières linéairement indépendantes :

$$\cos\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x, \sin\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x, \cosh\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x, \sinh\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x.$$

Alors, la solution générale de l'équation (3.45a) est la suivante :

$$\tilde{u}(x) = C_1 \cos\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x + C_2 \sin\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x + C_3 \cosh\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x + C_4 \sinh\sqrt[4]{\tilde{\lambda}}x. \quad (3.46)$$

Ayant appliqué les conditions limites (3.45b), nous obtiendrons un système des équations homogènes, relativement aux constantes C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\left. \begin{aligned} -C_1 + C_3 &= 0; \\ -C_1 \cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L - C_2 \sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L + C_3 \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L + C_4 \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L &= 0; \\ -C_2 + C_4 &= 0; \\ C_1 \sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L - C_2 \cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L + C_3 \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L + C_4 \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Ce système a des solutions non triviales seulement si le déterminant de la matrice composée des coefficients est égale à zéro, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L & -\sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L & \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L & \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L & -\cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L & \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L & \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L \end{vmatrix} = 0. \quad (3.48)$$

De (3.48), nous recevons une équation

$$\cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} L = 1, \quad (3.49)$$

et ses solutions numériques sont :

$$\sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L = 0, 4.73004, 7.8532, 10.9956, 14.1372, \dots$$

En respectant les conditions (3.49), on peut enlever l'une des équations du système (3.47), et, pour les autres équations, intégrer trois constantes dans une seule. Si on enlève par exemple du système (3.47) la 4^e équation et on laisse la constante C_4 , alors

$$C_2 = C_4, \quad C_1 = C_3 = C_4 \frac{\sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L - \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L}{-\cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L + \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L},$$

et la solution du problème, à une constante arbitraire près, est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(x) = & \left(\sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L - \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L \right) \left(\cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} x + \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} x \right) - \\ & - \left(\cos \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L - \cosh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} L \right) \left(\sin \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} x + \sinh \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} x \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Montrons maintenant que le problème (3.45) est auto-adjoint. Nous écrivons l'équation (3.45a) sous la forme :

$$\hat{L}\tilde{u} = \tilde{\lambda}\tilde{u}, \quad \hat{L} = \frac{d^4}{dx^4} \quad (3.51)$$

On introduit un produit scalaire dans l'espace $C[0, L]$:

$$(f, g) = \int_0^L f(x) \bar{g}(x) dx, \quad (3.52)$$

où \bar{g} est la fonction conjuguée complexe de $g(x)$.

Calculons l'expression :

$$\begin{aligned} (\hat{L}\tilde{u}_j, \tilde{u}_k) - (\tilde{u}_j, \hat{L}\tilde{u}_k) = & \int_0^L \left(\tilde{u}_j^{(4)} \tilde{u}_k - \tilde{u}_j \tilde{u}_k^{(4)} \right) dx = \int_0^L \left(\tilde{u}_j^{(4)} \tilde{u}_k + \tilde{u}_j''' \tilde{u}_k' - \tilde{u}_j'' \tilde{u}_k'' - \tilde{u}_j' \tilde{u}_k''' + \tilde{u}_j \tilde{u}_k'''' \right. \\ & \left. + \tilde{u}_j' \tilde{u}_k'''' - \tilde{u}_j'' \tilde{u}_k'''' - \tilde{u}_j \tilde{u}_k^{(4)} \right) dx = \left(\tilde{u}_j'' \tilde{u}_k' - \tilde{u}_j' \tilde{u}_k'' + \tilde{u}_j \tilde{u}_k'''' - \tilde{u}_j \tilde{u}_k'''' \right) \Big|_0^L = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ainsi, le problème (3.45) est auto-adjoint [79]. Il est connu [79, chap. II] que les fonctions propres d'un problème auto-adjoint aux limites forment toujours une base orthonormée complète dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur le domaine du problème. Puisque nous avons montré que l'équation aux valeurs du problème de Steklov-Neumann pour un triangle rectangle coïncide avec l'équation aux valeurs propres du problème sur les fluctuations du pivot avec les extrémités libres (ou fixées) [80, pp. 273, 275], dont les fonctions propres forment une base [79], cela signifie [78] que les fonctions propres d'un triangle rectangle forment également une base complète. Le lemme est prouvé.

3.3. Le problème de Steklov-Neumann pour un triangle de 120°.

Étudions le problème (1.1)-(1.3) pour un triangle de 120°.

Lemme 3.11. *La solution symétrique du problème de triangle de 120° est la suivante [15, 61, 62] :*

$$\begin{aligned}
 u_s^{(1)}(x, y) = & \sinh m(y - a) \cos mx + \\
 & + \sinh m \left(-\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x - a \right) \cos m \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right) + \\
 & + \sinh m \left(-\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - a \right) \cos m \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \right). \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_s^{(2)}(x, y) = & \cosh m(y - a) \cos mx + \\
 & + \cosh m \left(-\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x - a \right) \cos m \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right) + \\
 & \cosh m \left(-\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - a \right) \cos m \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \right). \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

où hm est une solution de l'équation transcendante

$$\cosh 3hm = 2 \sec \sqrt{3}hm - \cos \sqrt{3}hm, \quad (3.56)$$

et la constante a satisfait l'équation :

$$\sinh m(2a + h) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}hm \quad (3.57a)$$

pour la solution (3.51) et l'équation

$$\sinh m(2a + h) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}hm \quad (3.57b)$$

pour la solution (3.52).

Les valeurs propres du problème de Steklov-Neumann sont décrites par la formule

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{\sqrt{3} \cot \sqrt{3}hm + \sqrt{4 + 3 \cot^2 \sqrt{3}hm}}{2}. \quad (3.58)$$

La résolution numérique donnent les valeurs exactes λh pour les six premiers modes symétriques :

$$\lambda h = 1, 2.71867, 4.53451, 6.34830, 8.16210, 9.97590. \dots \quad (3.59)$$

Remarque 3.2. Étant donné qu'il n'y a aucune information sur l'ensemble des fonctions propres du présent problème, nous ne ferons que l'hypothèse que les solutions reçues (3.54) et (3.55) imposent toutes les solutions symétriques.

Remarque 3.3. Dans [61], sont obtenues les solutions pour les quatre premiers modes asymétriques $M = 2,4,6,8$ par méthode variationnelle. Ses valeurs sont suivantes :

$$\lambda h = 0.4099, 1.8418, 3.6246, 5.4889. \quad (3.60)$$

Comme on le voit, ils alternent avec les cinq modes symétriques (voir les résultats (3.60)) pour $M = 1,3,5,7,9$:

$$\lambda h = 0, 1, 2.71867, 4.53451, 6.34830.$$

Cela illustre l'alternance non seulement des trois premiers, mais des modes pairs et impairs suivants pour le triangle de 120° .

Conclusion

Dans ce travail, nous avons démontré l'alternance des fonctions propres paires et impaires pour les trois premiers modes dans le cas d'un domaine symétrique arbitraire. En prouvant ce théorème, nous avons utilisé les faits qu'il n'existe pas de lignes nodales fermées, et le nombre des secteurs nodaux n'excède pas le nombre de modes. Il est à noter que la question sur l'alternance des solutions des problèmes pairs et impairs de Steklov-Neumann, qui correspond aux modes d'ordre supérieur reste ouverte.

L'alternance des modes est montrée explicitement avec l'exemple du problème Steklov-Neumann pour le secteur. À la différence du problème de Steklov-Neumann, dans les problèmes avec les conditions limites de Dirichlet, avec un certain angle du secteur, il est possible d'avoir une multiplicité des valeurs propres et la présence simultanée de solutions paires et impaires.

On a aussi étudié l'alternance des fonctions propres pour les triangles de 90° et 120° , les asymptotiques des valeurs propres pour les triangles de 90° . Il est démontré que les modes pairs et impairs alternent dans le cas de triangle de 90° .

Les hypothèses qui considèrent que les valeurs propres de Steklov-Neumann sont simples sont prouvées pour les deux premières valeurs propres non-nulles.

Bibliographie

1. V. Kozlov, N. Kuznetsov, O. Motygin, "On the two-dimensional sloshing problem", *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 460, 2004, pp. 2587-2603; Erratum, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 467, 2011, pp. 2427-2430.
2. H. Lamb. *Hydrodynamics*, 6th ed., London: Cambridge University Press, 1975, 738 p.
3. L. Euler, "Principia motus fluidorum", *Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, vol. 6, 1761, pp. 271-311.
4. S. D. Poisson, "Memoire sur la theorie des ondes", *Mem. Acad. Roy. Sci. Inst. France*, vol. 1, no. 2, 1816, pp. 71-186.
5. S. D. Poisson, "Hydrodynamique. Memoire sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre", *Annales de Gergonne*, vol. 19, no 8, 1828-1829, pp. 225-240.
6. G. Green, "On the motion of waves in a variable canal of small depth and width", *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 6, 1838, pp. 457-462.
7. G. Green, "Note on the motion of waves in canals", *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 7, 1842, pp. 87-92.
8. P. Kelland, "On the theory of waves I, II", *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 14, 1840, pp. 497-545; vol. 15, 1844, pp. 101-144.
9. G. B. Airy, "Tides and waves", in *Encyclopedia Metropolitana*, London: B. Fellowes, vol. 5, article 192, 1845, pp. 241-396.

10. G. G. Stokes, "Report on recent researches in hydrodynamics", *Report of the Sixteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, Southampton, 1846, pp. 1-20.
11. M. A. Ostrogradsky, "Memoire sur la propagation des ondes dans une bassin cylindrique", *Mem. des Sav. Etrang*, vol. 3, 1862, pp. 573-574.
12. J. W. Strutt, Lord Rayleigh, "On waves", *Philos. Mag.*, vol. 1, no 5, 1876, pp. 257-259.
13. J. W. Strutt, Lord Rayleigh, "On the calculation of the frequency of vibration of a system in its gravest mode, with an example from hydrodynamics", *Philos. Mag.*, vol. 47, no 5, 1899, pp. 556-572.
14. G. Kirchhoff, "Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit", *Ann. Phys.*, vol. 246, no 5, 1880, pp. 34-46.
15. A. G. Greenhill, "Wave motion in hydrodynamics", *Amer. J. Math.*, vol. 9, no 1, 1887, pp. 62-112.
16. H. M. Macdonald, "Waves in canals", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 25, 1894, pp. 101-111.
17. H. M. Macdonald, "Waves in canals and on a sloping bank", *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 27, 1896, pp. 622-632.
18. G. Chrystal, "Some further results in the mathematical theory of seiches", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 27, 1905, pp. 637-647.
19. G. Chrystal, "On the hydrodynamical theory of seiches, with bibliographic sketch", *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 41, 1906, pp. 599-649.
20. H. Poincare, *Lecons de Mechanique Celeste*, vol. 3, Paris: Gauthier-Villars, 1907, 176 p.

21. J. Hadamard, "Sur les ondes liquides", *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 150, 1910, pp. 609-611, 772-774.
22. J. Hadamard, "Sur les ondes liquides", *Rend. Acad. Lincei*, vol. 5, no 25, 1916, pp. 716-719.
23. H. N. Abramson, "Dynamic behavior of liquid in moving container", *Appl. Mech. Rev.*, vol. 16, no 7, 1963, pp. 501-506.
24. H. N. Abramson, ed., *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*, NASA Sp-106, Washington: NASA, 1966, 467 p.
25. N. N. Moiseev, "Introduction to the theory of oscillations of liquid-containing bodies", *Advances in Appl. Mech.*, vol. 8, 1964, pp. 233-289.
26. N. N. Moiseev, A. A. Petrov, "The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container", *Advances in Appl. Mech.*, vol. 9, 1968, pp. 91-154.
27. J. J. Stoker, *Water Waves*, New York: Interscience Publishers Inc., 1957, 567 p.
28. G. H. Goldsborough, "The tidal oscillations in an elliptic basin of variable depth", *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 130, 1930, pp.157-167.
29. V. A. Varoni, J. H. Carr, "Harbor surging", *Proc. First Conf. Coastal Engineering*, Long Beach, Calif., 1951, pp. 60-68.
30. H. M. Westergaard, "Water pressure on dams during earthquakes", *Trans. Am. Soc. Civil Engineers*, vol. 98, 1933, pp. 418-472.
31. L. S. Jacobsen, "Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier", *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol. 39, 1949, pp. 189-204.

32. P. W. Werner, K. J. Sundquist, "On hydrodynamic earthquake effects", *Trans. Am. Geophysical Union*, vol. 30, 1949, pp. 636-657.
33. G. W. Housner, "Dynamic pressures on accelerated fluid containers", *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol. 47, 1957, pp. 15-32.
34. L. S. Jacobsen, R. S. Ayre, "Hydrodynamic experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions", *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol. 41, 1951, pp. 313-346.
35. D. W. Fox, J. R. Kuttler, "Sloshing frequencies", *J. App. Math. Phys.*, vol. 34, 1983, pp. 668-696.
36. H. F. Bauer, *Oscillations of Non-viscous Liquid in Various Container Geometries*, München: Forschungsbericht der Universität der Bundeswehr, 1999, 323 p.
37. H. F. Bauer, "Flüssigkeitsschwingungen mit freier Oberfläche in keilförmigen Behältern", *Acta Mechanica*, vol. 38, no 3, 1981, pp. 31-5Π3.
38. F. G. Rammerstofer, K. Scharf, and F. D. Fischer, "Storage tanks under earthquake loading", *ASME Appl. Mech. Rev.*, vol. 43, no 11, 1990, pp. 261–283.
39. R. A. Ibrahim, A. Soundararajan, "Nonlinear liquid sloshing under random vertical excitation", *J. Sound Vib.*, vol. 93, no 1, 1983, pp. 119–134.
40. R. A. Ibrahim, A. Soundararajan, "An improved approach for random parametric response of dynamic systems with nonlinear inertia", *Int. J. Nonlinear Mech.*, vol. 20, no 4, 1985, pp. 309–323.
41. R. A. Ibrahim, A. Soundararajan, and H. Heo, "Stochastic response of nonlinear dynamic systems based on a non-Gaussian closure", *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 52, no 4, 1985, pp. 965–970.

42. R. A. Ibrahim, V. N. Pilipchuk, and T. Ikeda, "Recent advances in liquid sloshing dynamics", *ASME Appl. Mech. Rev.*, vol. 54, no 2, 2001, pp. 133–199.
43. A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevskii, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena*, New York: Springer-Verlag, 1987, 583 p.
44. A. D. Myshkis, V.G.Babsky, M. Yu. Zhukov, N. D. Kopachevskii, L. D. Slobozhanin and A.D. Typsov, *Methods for Solving Hydromechanic Problems in Zero-Gravity*, Kyiv: Naukova dumka, 1992, 592 c.
45. H. U. Walter, ed., *Fluid Sciences and Materials Sciences in Space*, New York: Springer-Verlag, 1987, 237 p.
46. R. Monti, *Physics of Fluids in Microgravity*, London: Taylor & Francis, 2002, 624 p.
47. R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications*, Cambridge: Cambridge University Press, 2005, 948 p.
48. I. Lukovsky, A. Solodun. A. Timokha, "Natural Sloshing of a Liquid in a Truncated Conic Tanks", *Accoustis Bulletin*, V. 9, no, 2006, pp. 42-61.
49. O. M. Faltinsen, A. N. Timokha, "On sloshing modes in a circular tank", *J. Fluid Mech.*, vol. 695, 2012, pp. 467–477.
50. A. Gedikli, M. E. Ergüven, "Evaluation of sloshing problem by variational boundary element method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 27, no 9, 2003, pp. 935-943.
51. T. J. Bridges, "A numerical simulation of large amplitude sloshing", *Proc. of the 3rd International Numerical Ship Hydrodynamics*, 1982, pp. 269-281.

52. O. M. Faltinsen, "A numerical non-linear method of sloshing in tanks with two dimensional flow", *Journal of Ship Research*, vol.22, no 3, 1978, pp. 193-202.
53. N. E. Mikelis, J. K. Miller, K. V. Taylor, "Sloshing in partially filled liquid tanks and its effect on ship motions: numerical simulations and experimental verification", *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, vol. 126, 1984, pp. 267-282.
54. Y. Kim, "Numerical analysis of sloshing problem", *Proc. 15th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Dan Caesarea, Israel, 2002, pp. 1-4.
55. A. E. P. Veldman et al. "The numerical simulation of liquid sloshing on-board spacecraft", *J. Comp. Phys.*, vol. 224, no 1, 2007, pp. 82-99.
56. M. Rudman, P. W. Cleary, "Modelling sloshing in LNG tanks", *Proc. 7th International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO*, Melbourne, Australia, 9-11 December 2009, pp. 1-6.
57. P. Pal, "Slosh dynamics of liquid-filled rigid containers: two-dimensional meshless local Petrov-Galerkin approach", *J. Eng. Mech.*, vol. 138, no. 6, 2012, pp. 567–581.
58. B. Godderidge, M.Y. Tan, C. Earl, and S.R. Turnock, "Grid resolution for the simulation of sloshing using CFD", *Proc. 10th Numerical Towing Tank Symposium (NuTTS'07)*, Hamburg, Germany, 23-25 Sep 2007, pp. 42-47.
59. K. P. Thiagarajan, D. Rakshit, N. Repalle, "The air–water sloshing problem: Fundamental analysis and parametric studies on excitation and fill levels", *Ocean Engineering*, vol. 38, no 2-3, 2011, pp. 498-508.

60. J. R. Kuttler, "A nodal line theorem for the sloshing problem", *SIAM J. Math. Analysis*, vol. 15, no 6, 1984, pp. 1234–1237.
61. W. L. Haberman, E. J. Jarski, and J. E. A. John, "A note on the sloshing motion in a triangular tank", *Z. angew. Math. Phys.*, vol. 25, no 2, 1974, pp. 292-293.
62. B. A. Packham, "Small-amplitude waves in a straight channel of uniform triangular cross-section", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 33, no 2, 1980, pp. 179-187.
63. C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, London: Pitman, 1980, 228 p.
64. N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics*, vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid, Basel: Birkhäuser, 2001, 384 p.
65. G. Auchmuty, "Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems", *Num. Funct. Anal. Opt.*, vol. 25, no 3-4, 2005, pp. 321-348.
66. R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman, London, 1977, 212 p.
67. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, New York: Wiley, 1989, 598 p.
68. Herrmann, H., "Beziehungen zwischen den Eigenweyten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme", *Math. Z.*, vol. 40, 1936, pp. 221-241.

69. A. Pleijel, "Remarks on Courant's nodal line theorem", *Communications on pure and applied mathematics*, vol. IX, 1956, pp. 543-550.
70. J. R. Kuttler, V. G. Sigillito, "Inequalities for Membrane and Stekloff Eigenvalues", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 23, 1968, pp. 148-160.
71. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, New York: Dover, 1954, 384 p.
72. J. R. Kuttler, V. G. Sigillito, "An inequality for a Stekloff eigenvalue by the method of defect", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 20, no 2, 1969, pp. 357–360.
73. A. N. Tikhonov, A.A. Samarsky, *The equations of mathematical physics*, Moskow: Science, 1977, 735 p.
74. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Volume 1, Cambridge : Cambridge University Press, 2003, 784 p.
75. V.I.Bogachov, O.G.Smolyanov, *Real and Functional Analysis: a University Course*, Moskow-Izhevsk : Regular&Chaotic Dynamics, 2009, 724 p.
76. C. Gravel. *Géométrie spectrale sur le disque: loi de Weyl et ensembles nodaux*, mémoire de M.Sc., Montréal: Université de Montréal, 2007, 103 p.
77. V. I. Smirnov, *A course of higher mathematics*, Volume 1, 23^d ed., Moskow: Science, 1974, 480 p.
78. A. Girouard, I.Polterovich, Communication privée.
79. E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, New York : McGraw-Hill, 1955, 429 p.

80. J. W. Strutt, B. Rayleigh, *Theory of Sound*, 2nd ed., vol. I, London: Macmillan & Co., 1894, 984 p.

