Université de Montréal

Systèmes superintégrables avec spin et intégrales du mouvement d'ordre deux

par
Jean-François Désilets

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

août, 2012

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Systèmes superintégrables avec spin et intégrales du mouvement d'ordre deux

présenté par:

Jean-François Désilets

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manu Paranjape,	président-rapporteur
Pavel Winternitz,	directeur de recherche
Yvan Saint-Aubin,	membre du jury

Mémoire accepté le: 25-10-2012

RÉSUMÉ

Ce mémoire est une partie d'un programme de recherche qui étudie la superintégrabilité des systèmes avec spin. Plus particulièrement, nous nous intéressons à un hamiltonien avec interaction spin-orbite en trois dimensions admettant une intégrale du mouvement qui est un polynôme matriciel d'ordre deux dans l'impulsion. Puisque nous considérons un hamiltonien invariant sous rotation et sous parité, nous classifions les intégrales du mouvement selon des multiplets irréductibles de $O(3)$. Nous calculons le commutateur entre l'hamiltonien et un opérateur général d'ordre deux dans l'impulsion scalaire, pseudoscalaire, vecteur et pseudovecteur. Nous donnons la classification complète des systèmes admettant des intégrales du mouvement scalaire et vectorielle. Nous trouvons une condition nécessaire à remplir pour le potentiel sous forme d'une équation différentielle pour les cas pseudo-scalaire et pseudo-vectoriel. Nous utilisons la réduction par symétrie pour obtenir des solutions particulières de ces équations.

Mots clés : superintégrabilité quantique,superintégrable, symétries, spin, spin-orbite

ABSTRACT

This thesis is part of a research program studying superintegrable systems with spin. In particular, we consider a Hamiltonian with a spin-orbital interaction in three dimensions admitting an integral of motion that is a matrix polynomial second order in the momenta. Since we are considering a Hamiltonian which is invariant under rotation and parity, we classify the integrals of motion into irreducible $O(3)$ multiplets. We obtain the commutator of the Hamiltonian with the scalar, pseudoscalar, vector and axial vector operators. We provide a complete classification for the scalar and vector cases. We find the necessary condition for superintegrability on the potential as a differential equation. We use symmetry reduction methods to obtain particular solutions of this equation.

Key Words : quantum superintegrability, superintegrable, symmetries, spin, spin-orbital

TABLE DES MATIÈRES

"Ne pas railler, ne pas déplorer ni maudire mais comprendre. "

BARUCH SPINOZA

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, monsieur Pavel Winternitz, pour m'avoir encadré pendant ces deux années. Je suis très reconnaissant d'avoir pu travailler sur un projet aussi intéressant et d'avoir eu la chance exceptionnelle de présenter notre recherche lors du QTS7 à Prague. Je suis également reconnaissant à Ismet Yurdusen pour la rigueur de son travail et tout le temps qu'il a investi dans cet article. Nous avons tous les trois formé une très belle équipe qui a su s'attaquer à différents problèmes avec nos forces respectives.

Je dois souligner l'esprit formidable qui reigne au département de physique de l'Université de Montréal. La complicité de mes camarades a été un élément essentiel à ma réussite. Que ce soit pour travailler ensemble sur des devoirs ou pour se décontracter en dehors des cours, je n'aurais pu choisir une meilleure cohorte. Merci à Corinne Simard pour avoir été ma partenaire de boxe et pour nous avoir tant fait rire avec ses répliques incroyables ! Merci à JF Pommier qui doit toujours voir l'arbre pour deviner la sorte de pomme, à Patrice Beaudoin qui aime tellement faire en trois pages un intégrale qui prend une seconde à faire à Mathematica ! Merci à Mychel Pineault et à ses incorruptibles convictions. Merci à Laura-Isabelle Dion-Bertrand, la femme au tact légendaire pour être immanquablement là quand on a besoin d'elle. Merci à la merveilleuse Delphine Bouilly, à Jonathan Belletête et ses t-shirts mémorables, à l'exceptionnel Nicolas Michaud et son sens de l'absurde, à Ivonne Carvajal pour être toujours un petit peu plus en retard que moi, à Amélie Simon pour les pique-niques au parc Laurier, à Jonathan Gagné et son franc-parler, au grand chef Amaury Kilistalan et à Jason Éthier pour des journées mémorables ! Merci à Gabrielle Simard pour ses si jolis dessins, à Sabrina Cardin, Sabrina Morel, Francis Larouche, Noé Aubin-Cadot, Catherine Brosseau et Thierry Bazier-Matte pour des discussions si intéressantes.

Je veux évidemment remercier ma famille pour m'avoir supporté sans relâche pendant mes nombreuses années d'étude. Vous m'avez enseigné tout ce dont j'avais besoin pour réussir et être heureux dans la vie.

Merci infiniment à Sophie Charbonneau-Saulnier, qui a toujours été la pour moi et dont l’amitié m’est très précieuse. Un merci spécial pour avoir corrigé le français de ce mémoire, je crois que monsieur Saint-Aubin aurait été consterné de le lire sans ces corrections !

Gardant toujours le meilleur pour la fin, je veux remercier du plus profond de mon cœur Chloé Bachand-Marleau. Tous mes accomplissements sont vains si je ne peux les partager avec toi.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les systèmes intégrables ont depuis longtemps occupé les chercheurs en physique théorique et en mathématiques. En mécanique classique, ces systèmes possèdent n intégrales du mouvement en involution, où n est le nombre de degrés de liberté. On croyait d'abord que tous les systèmes classiques étaient intégrables. Toutefois, avec la découverte des systèmes chaotiques, notre compréhension des systèmes intégrables a évolué et cette propriété est maintenant considérée comme très rare. L'intégrabilité s'est, en quelque sorte, installée comme étant l'inverse du chaos. Ainsi, ces systèmes sont très structurés et se comprennent plus facilement que leurs contreparties chaotiques.

Une recherche systématique des systèmes intégrables fut motivée par le théorème de Liouville, qui garantit que les équations du mouvement associées à ces systèmes peuvent être résolues par quadrature. Ceci évite, entre autres, les procédés numériques utilisés pour traiter les systèmes chaotiques et les solutions souvent peu intuitives au niveau physique qu'ils procurent.

On écrit habituellement les intégrales du mouvement en termes de polynômes dans l'impulsion. La classification de tous les systèmes intégrables dans l'espace euclidien à deux et trois dimensions ayant des intégrales du mouvement qui sont des polynômes d'ordre deux dans l'impulsion a été complétée [10]-[12]. En deux dimensions, l'intégrabilité quadratique entraîne la séparation des variables pour l'équation d'Hamilton-Jacobi en coordonnées cartésiennes, polaires, paraboliques ou elliptiques [10–12, 15, 16]. En trois dimensions, l'intégrabilité entraîne la séparation de l'équation d'Hamilton-Jacobi dans onze systèmes de coordonnées.

Dans les années 1970, plusieurs chercheurs se sont intéressés à une propriété encore plus rare que l'intégrabilité : la superintégrabilité [10]-[14]. Les systèmes superintégrables sont des systèmes qui, en plus de posséder n intégrales du mouvement en involution, en possèdent k supplémentaires avec $1 \leq k \leq n-1$. On ne demande pas de ces nouvelles intégrales qu'elles soient en involution avec les premières. Il a été montré que pour tous les systèmes maximalement superintégrables (avec $k = n - 1$), les orbites finies sont fermées [4].

Le champ d'étude des systèmes intégrables s'est agrandi avec l'arrivée de la mécanique quantique dans les années 1920. Un parallèle naturel fut établi entre l'intégrabilité classique et quantique en considérant les intégrales du mouvement comme opérateurs hermitiens et en substituant le commutateur aux crochets de Poisson. La correspondance entre les systèmes intégrables et superintégrables d'ordre deux dans l'espace euclidien à deux ou trois dimensions fut parfaite entre les systèmes classiques et quantiques. Par contre, les systèmes possédant des intégrales du mouvement d'ordre supérieur à deux sont aussi intéressants car ces symétries permettent d'expliquer, en mécanique quantique, des dégénérescences dites accidentelles. Le lien entre les systèmes classiques et quantiques possédant des intégrales du mouvement d'ordre supérieur à deux est plus difficile à établir, et il fallut conclure que la correspondance entre ces systèmes était loin d'être parfaite [52]-[54]. De plus, la notion d'indépendance des intégrales du mouvement en mécanique classique, déjà difficile à cerner, ne trouve pas d'équivalent naturel en mécanique quantique [54]. Plusieurs tentatives de définition systématique existent sans qu'une définition n'arrive à s'imposer comme incontestable.

Certains chercheurs se sont également intéressés aux systèmes qui sont plongés dans un champ magnétique externe, et dont le potentiel dépend des vitesses [48].

Ce mémoire se situe dans la lignée de plusieurs publications qui s'intéressent aux systèmes intégrables et superintégrables avec spin. Il s'agit d'une prolongation des travaux de Winternitz et Yurdusen, qui ont classifié les systèmes superintégrables admettant une symétrie sphérique avec interaction spin-orbite et intégrale du mouvement de premier ordre [1, 50]. Selon les mêmes prémisses, nous avons entamé une recherche systématique des potentiels possédant des intégrales du mouvement d'ordre deux.

CHAPITRE 2

REVUE DE LA THÉORIE

Nous présentons ici le formalisme hamiltonien de la mécanique classique et de la mécanique quantique. Nous concentrerons notre approche sur les crochets de Poisson et sur les commutateurs. Nous présenterons ensuite les définitions pertinentes aux systèmes intégrables et superintégrables.

2.1 Mécanique classique

Nous commençons par présenter les définitions utiles à l'étude des systèmes intégrables classiques.

2.1.1 Définitions et théorie

Nous associons l'hamiltonien suivant à une particule de masse m se déplaçant dans un potentiel $V(\mathbf{q})$ dépendant uniquement de sa position

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q})\,, \tag{2.1}$$

avec $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ et $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. S'il s'agit d'une particule de charge e se déplaçant dans un champ électromagnétique, nous généralisons l'hamiltonien et écrivons plutôt

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{q})\big)^2 + e\phi(\mathbf{q})\,. \tag{2.2}$$

Ici, ϕ et A sont respectivement les potentiels scalaire et vecteur des champs électrique et magnétique. Les hamiltoniens que nous considérons ne dépendent pas explicitement du temps et sont donc conservatifs. Sous le formalisme hamiltonien, les équations du mouvement prennent la forme

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i\,. \tag{2.3}$$

Une définition importante de la mécanique classique et centrale aux systèmes intégrables est celle des crochets de Poisson

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\,, \tag{2.4}$$

avec $f = f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ et $g = g(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. La raison pour laquelle nous nous intéressons aux crochets de Poisson est qu'ils nous permettent d'exprimer la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction comme étant

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}\,. \tag{2.5}$$

Un cas particulier de ce résultat veut que la dérivée totale du temps d'une fonction qui ne dépend pas explicitement du temps soit directement égale à son crochet de Poisson avec l'hamiltonien. Nous nous intéresserons uniquement à ce type de fonctions, par exemple l'hamiltonien lui-même

$$\frac{dH}{dt} = \{H,H\} = 0\,. \tag{2.6}$$

Les fonctions qui commutent avec l'hamiltonien et qui ne dépendent pas explicitement du temps sont des *intégrales du mouvement*. Ce sont des fonctions dont la valeur reste constante sur une trajectoire dans l'espace de phase. Elles sont associées à des quantités conservées. Dans le cas de l'hamiltonien, il s'agit de l'énergie.

2.1.2 Systèmes intégrables

Pour qu'un système soit intégrable, il doit avoir autant d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté. Ces intégrales doivent être des fonctions bien définies sur l'espace de phase, être en involution et être fonctionnellement indépendantes. Ainsi, pour un système décrit par (2.2) avec n degrés de liberté, nous avons

$$\{X_i, H\} = 0\,, \tag{2.7}$$

$$\{X_i, X_j\} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n\,, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(X_1, \ldots, X_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n, p_i, \ldots, p_n)} = n\,. \tag{2.9}$$

Les systèmes intégrables ont des propriétés remarquables. Le théorème de Liouville justifie la recherche de tels systèmes. Ce théorème nous permet de trouver une variété dans l'espace de phase qui est invariante sous le flot induit par l'hamiltonien. De plus, il stipule que les équations du mouvement d'un hamiltonien intégrable peuvent être résolues par quadrature. Les résultats qui nous sont les plus utiles s'énoncent comme suit

Théorème de Liouville. *Soit $X_1, \ldots, X_n$, n intégrales du mouvement dans un espace de phase M à $2n$ dimensions. Alors :*

(i) $M_a = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in M : X_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c_i\}$ *est une variété invariante sous le flot de l'hamiltonien,*

(ii) Le système d'équations (2.3) peut être résolu par quadrature.

Ces résultats sont très puissants puisqu'ils nous informent sur les trajectoires dans l'espace de phase en plus de nous garantir que les équations du mouvement peuvent être résolues par quadrature, donc sans faire appel à des procédés numériques. Nous avons déjà noté que la propriété d'être intégrable est très rare pour un système physique. De plus, cette propriété est très sensible, dans le sens qu'un système intégrable perdra généralement cette propriété suite à une légère perturbation. Pourtant, les systèmes intégrables sont intéressants non seulement par eux-mêmes, mais aussi parce qu'ils nous donnent une de laquelle nous pouvons attaquer à l'analyse des systèmes chaotiques. Par exemple, la théorie Kolmogorov-Arnold-Moser, développée dans les années 1950, s'intéresse à la persistance des mouvements quasi périodiques sous de petites perturbations autour d'un système intégrable.

2.1.3 Systèmes superintégrables

Certains systèmes ont plus d'intégrales du mouvement qu'ils n'ont de degrés de liberté ; on dit alors qu'ils sont *superintégrables*. En plus de posséder n intégrales du mouvement X_i en involution, un système superintégrable a k intégrales du mouvement Y_i telles que

$$\{Y_i, H\} = 0\,, \tag{2.10}$$
$$\text{rang}\frac{\partial(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)}{\partial(q_1,\dots,q_n,p_i,\dots,p_n)} = n+k\,, \tag{2.11}$$

où $1 \leq k \leq n-1$. On ne demande pas que les intégrales Y_i soient en involution avec les X_i, ni entre elles. On dit que le système est *maximalement superintégrable* si $k = n-1$. Cette propriété est encore plus rare que l'intégrabilité et est d'autant plus remarquable. Les systèmes maximalement superintégrables sont particulièrement intéressants puisque les trajectoires dans l'espace de phase à $2n$ dimensions peuvent être exprimées en termes de $2n-1$ constantes et sont donc entièrement déterminées. De plus, nous avons que, pour un potentiel central $V(r)$ dans l'espace euclidien à deux ou trois dimensions, toutes les trajectoires bornées d'un système superintégrable sont périodiques [4]. Le théorème de Bertrand garantit que les seuls potentiels à avoir cette propriété sont les potentiels de Hooke et de Coulomb, respectivement $V(r) = \omega r^2$ et $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ [3]. Ainsi, ce sont les seuls potentiels à symétrie sphérique qui soient maximalement superintégrables en deux et trois dimensions.

2.2 Mécanique quantique

Dans cette section, nous décrirons les éléments pertinents de la mécanique quantique aux systèmes intégrables et superintégrables.

2.2.1 Définitions et théorie

En mécanique quantique, la variable d'impulsion est remplacée par un opérateur différentiel. Les observables physiques, qui sont en général des fonctions de la position et de l'impulsion, sont aussi écrits comme des opérateurs différentiels. Nous avons donc

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla\,, \tag{2.12}$$

$$H \to -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\,. \tag{2.13}$$

L'équation que nous sommes intéressés à résoudre est l'équation de Schrödinger indépendante du temps, donnée par l'équation différentielle aux valeurs propres suivantes

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle\,. \tag{2.14}$$

Les opérateurs ne commutent pas nécessairement entre eux. Ainsi, nous définissons le commutateur

$$[A,B] = AB - BA\,. \tag{2.15}$$

Le commutateur remplace le crochet de Poisson de la mécanique classique. Le théorème d'Ehrenfest est l'équivalent du résultat (2.5) pour les opérateurs qui ne dépendent pas explicitement du temps (ce sont les seuls opérateurs que nous considérons)

$$\frac{d\langle f\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [f,H]\rangle\,. \tag{2.16}$$

2.2.2 Systèmes intégrables et superintégrables

Tout comme en mécanique classique, un système intégrable quantique avec n degrés de liberté doit admettre n intégrales qui commutent avec l'hamiltonien et qui sont en involution

$$[X_i,H] = 0\,, \tag{2.17}$$

$$[X_i,X_j] = 0\,, \tag{2.18}$$

avec $1 \le i,j \le n$. La notion d'indépendance des opérateurs est beaucoup plus difficile à définir en mécanique quantique qu'en mécanique classique. Dans ce mémoire, nous exigeons seulement que les opérateurs soient algébriquement indépendants. De façon similaire, les systèmes superintégrables possèdent k opérateurs supplémentaires Y_i qui commutent avec l'hamiltonien, où $1 \leq k \leq n-1$. La superintégrabilité maximale est atteinte lorsque $k = n-1$. Tout comme en mécanique classique, les systèmes intégrables sont très importants en mécanique quantique. Bien que nous n'ayons toujours pas de théorème aussi fort que celui de Liouville, il a été conjecturé que les systèmes superintégrables sont exactement solubles. Il est donc possible d'exprimer les niveaux d'énergie et les fonctions propres algébriquement, une propriété très rare dans les systèmes quantiques.

CHAPITRE 3

SYSTÈMES INTÉGRABLES ET SUPERINTÉGRABLES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

Nous présentons ici un aperçu de l'état des recherches sur les systèmes intégrables et superintégrables ainsi que les travaux précurseurs à notre article [12, 13]. Nous notons E_i l'espace euclidien à i dimensions.

3.1 Intégrabilité linéaire et quadratique dans E_2 et E_3

Comme mentionné plus haut, les systèmes intégrables dans E_3 avec intégrales du mouvement linéaires et quadratiques sont les mêmes en mécanique classique et quantique. Nous présenterons donc les résultats d'un point de vue classique en gardant en tête que les mêmes résultats s'appliquent aux systèmes quantiques correspondants.

3.1.1 Intégrale du mouvement linéaire dans E_2

Nous nous intéressons à un hamiltonien de la forme

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(x,y) \tag{3.1}$$

qui admet une intégrale linéaire dans l'impulsion, de la forme

$$X = f(x,y)p_x + g(x,y)p_y + h(x,y)\,. \tag{3.2}$$

Nous exigeons que l'intégrale du mouvement commute par rapport au crochet de Poisson avec l'hamiltonien. Le résultat du crochet de Poisson sera un polynôme de degré deux dans l'impulsion. En annulant le coefficient du terme de deuxième ordre, nous obtenons ainsi le système d'équations

$$f_x = 0\,, \qquad g_y = 0\,, \tag{3.3}$$

$$f_y + g_x = 0\,. \tag{3.4}$$

La solution générale de ce système est donnée par

$$f(x,y) = -ay + b\,, \qquad g(x,y) = ax + c\,. \tag{3.5}$$

Le reste du crochet de Poisson nous donne $h(x,y) = d$ et nous pouvons choisir sans perdre de généralité $d = 0$ puisqu'une constante commute trivialement avec l'hamiltonien. L'intégrale du mouvement prend maintenant la forme

$$X = aL_z + bp_x + cp_y\,, \tag{3.6}$$

avec $L_z = xp_y - yp_x$. Nous avons également une condition de compatibilité pour $V(x,y)$

$$\Big(a(x\partial_y - y\partial_x) + b\partial_x + c\partial_y\Big)V = 0\,. \tag{3.7}$$

Les rotations et les translations dans le plan ne changent pas la forme de l'énergie cinétique. Nous pouvons procéder à ces transformations pour simplifier l'expression de X et ainsi discerner deux cas. Si $a \neq 0$, nous utilisons les translations pour poser $b = c = 0$. Avec $a = 0$, il faut que $b^2 + c^2 \neq 0$ pour avoir un résultat non trivial ($X \neq 0$). Dans le premier cas,

$$X = L_z\,, \qquad V = V(r)\,, \tag{3.8}$$

ce qui correspond à une symétrie sous rotation autour de l'axe des z. Dans le deuxième cas, nous choisissons sans perdre de généralité

$$X = p_y\,, \qquad V = V(x)\,, \tag{3.9}$$

ce qui correspond à une symétrie sous translation dans la direction y. Ces résultats sont sans surprise puisque les intégrales du mouvement linéaires correspondent à des symétries géométriques.

3.1.2 Intégrale du mouvement quadratique dans E_2

Le procédé est le même, mais l'intégrale du mouvement prend maintenant la forme

$$X = f(x,y)p_x^2 + g(x,y)p_y^2 + h(x,y)p_x p_y + \alpha(x,y)p_x + \beta(x,y)p_y + \phi(x,y)\,. \tag{3.10}$$

Le crochet de Poisson entre l'hamiltonien et X nous donne un polynôme de degré trois dans l'impulsion. Les termes linéaires dans l'impulsion de X commutent indépendamment avec l'hamiltonien. Puisque la classification des intégrales du mouvement d'ordre un a déjà été complétée, nous pouvons choisir $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ sans perdre de généralité. En égalant les coefficients des termes d'ordre trois dans l'impulsion à zéro, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_x &= 0\,, \qquad g_y = 0\,, \\ f_y + h_x &= 0\,, \qquad g_x + h_y = 0\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ce système d'équations admet les solutions

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ay^2 - by + k + d\,, \qquad g(x,y) = ax^2 + cx + k - d\,, \\ h(x,y) &= bx - 2axy - cy + e\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

L'intégrale du mouvement X prend la forme

$$X = aL_z^2 + bL_z p_x + cL_z p_y + d(p_x^2 - p_y^2) + 2e p_x p_y + \phi(x,y)\,, \tag{3.13}$$

où le terme $k(p_x^2+p_y^2)$ a été éliminé en prenant une combinaison linéaire avec l'hamiltonien. Les termes d'ordre un dans le commutateur nous donnent

$$hV_y + 2fV_x = 2\phi_x\,, \qquad hV_x + 2gV_y = 2\phi_y\,, \tag{3.14}$$

avec la condition de compatibilité

$$h(V_{xx}-V_{yy}) + 2(g-f)V_{xy} + (h_x - 2f_y)V_x + (2g_x - h_y)V_y = 0\,. \tag{3.15}$$

Il est possible d'appliquer des rotations et des translations sans changer la forme de l'énergie cinétique. Nous pouvons ainsi appliquer ces transformations en gardant la même forme pour X. Cela nous permet d'isoler quatre systèmes intégrables indépendants

Cas 1

$$\begin{aligned} V_C &= f(x) + g(y)\,,\\ X_C &= -\frac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2) + f(x) - g(y)\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Cas 2

$$\begin{aligned} V_R &= f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta)\,,\\ X_R &= L_z^2 - 2g(\theta)\,,\\ x &= r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Cas 3

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{f(\xi)+g(\zeta)}{\xi^2+\zeta^2}\,,\\ X_P &= L_z p_y + \frac{g(\zeta)\xi^2 - f(\xi)\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}\,,\\ x &= \frac{1}{2}(\xi^2+\zeta^2)\,, \qquad y = \xi\zeta\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.19)

Cas 4

$$
\begin{aligned}
&V_E = \frac{f(\sigma)+g(\rho)}{\cos^2\sigma+\cosh^2\rho}\,,\\
&X_E = L_z^2+\frac{l^2}{2}(p_x^2-p_y^2)-l^2\frac{\cosh 2\rho f(\sigma)+\cos 2\sigma g(\rho)}{\cos^2\sigma-\cosh^2\rho}\,,\\
&x = l\cosh\rho\cos\sigma\,, \qquad y = l\sinh\rho\sin\sigma\,,\\
&l = \sqrt{(2ad-b^2+c^2)^2+4(ae-bc)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Ces quatre cas représentent respectivement les systèmes qui admettent la séparation des variables en coordonnées cartésiennes, polaires, paraboliques et elliptiques. Les cas quantiques sont identiques, à cela près qu'il faut symétriser l'opérateur $L_z p_i$ en le remplaçant par $L_z p_i + p_i L_z$.

3.1.3 Systèmes superintégrables dans E_2 et aperçu des systèmes dans E_3

Pour avoir un système superintégrable dans E_2, nous demandons qu'il possède deux intégrales du mouvement parmi celles trouvées dans (3.16) - (3.19). Il existe quatre familles de potentiels qui satisfont cette exigence :

$$
V_1 = \alpha(x^2+y^2)+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{y^2}\,, \tag{3.21}
$$

séparable en coordonnées cartésiennes, polaires et elliptiques,

$$
V_2 = \alpha(x^2+4y^2)+\frac{\beta}{x^2}+\gamma y\,, \tag{3.22}
$$

séparable en coordonnées cartésiennes et paraboliques,

$$
V_3 = \frac{\alpha}{r}+\frac{\beta+\gamma\cos\phi}{r^2\sin^2\phi}\,, \tag{3.23}
$$

séparable en coordonnées polaires, paraboliques et elliptiques,

$$
V_4 = \frac{\alpha}{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}\left(\beta\cos\frac{\phi}{2}+\gamma\sin\frac{\phi}{2}\right)\,, \tag{3.24}
$$

séparable dans deux systèmes de coordonnées paraboliques.

Ceci complète l'analyse des systèmes intégrables et superintégrables d'ordre deux dans l'espace euclidien à deux dimensions. Nous poursuivons avec les systèmes intégrables et superintégrables dans E_3 ainsi que les systèmes dans E_2 possédant une intégrale du mouvement d'ordre trois au chapitre quatre.

3.1.4 Systèmes intégrables et superintégrables d'ordre deux dans E_3

Dans ce cas encore, les résultats sont identiques en mécanique classique et quantique. Les calculs étant plus lourds, nous présenterons seulement un aperçu des résultats. Tout comme dans E_2, le calcul du crochet de Poisson entre X et H impose une certaine forme à l'intégrale du mouvement. Nous avons donc que X doit s'écrire

$$X = A^{ij} L_i L_j + B^{ij} L_i p_j + C^{ij} p_i p_j + \phi(x,y,z)\,, \tag{3.25}$$

avec $1 \leq i \leq 3$ et $i \leq j \leq 3$ et où A^{ij}, B^{ij} et C^{ij} sont des constantes. Les systèmes intégrables en trois dimensions doivent admettre trois intégrales du mouvement, $\{H, X_1, X_2\}$ qui Poisson-commutent deux à deux. Les solutions, en termes de potentiel, se séparent en onze classes d'équivalences qui correspondent aux onze systèmes de coordonnées dans lesquelles l'équation d'Hamilton-Jacobi libre se sépare. Dans le cas de la superintégrabilité, l'existence de quatre classes de systèmes superintégrables ainsi que de cinq classes de systèmes maximalement superintégrables a été établie [12, 13].

CHAPITRE 4

INTÉGRALES DU MOUVEMENT D'ORDRE TROIS ET SYSTÈMES AVEC SPIN

Maintenant qu'a été complétée la recherche sur l'intégrabilité quadratique dans E_2 et E_3, plusieurs généralisations peuvent encore être explorées. Dans le présent chapitre, nous présentons certains résultats obtenus pour les systèmes possédant une intégrale du mouvement d'ordre trois dans l'impulsion [1, 43, 44, 46, 48, 50]. Nous nous intéressons également aux systèmes avec spin [29–31, 56].

4.1 Intégrabilité cubique dans E_2

Les systèmes intégrables avec intégrales du mouvement d'ordre supérieur à deux dans l'impulsion sont beaucoup moins bien compris que leurs contreparties d'ordre inférieur. Il n'a pas été montré que l'intégrabilité cubique implique la séparation des variables de l'équation d'Hamilton-Jacobi ou de Schrödinger. De plus, les systèmes quantiques ne sont plus en parfaite correspondance avec les systèmes classiques. Les systèmes quantiques ont tendance à être beaucoup plus riches et à impliquer des fonctions elliptiques ou des transcendantes de Painlevé. Nous aborderons donc le formalisme de la mécanique quantique pour aborder l'intégrabilité cubique. L'intégrale du mouvement prend la forme

$$X = \sum_{i+j=0}^{3} \left\{ P_{ij}(x,y), p_x^i p_y^j \right\}, \tag{4.1}$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ est l'anticommutateur. Le procédé est le même que dans le cas quadratique : nous exigeons que le commutateur entre H et X est nul. Nous obtenons une forme pour X ainsi qu'un ensemble d'équations aux dérivées partielles auquel doivent satisfaire le potentiel V ainsi que les fonctions arbitraires restantes dans X. Une de ces équations est particulièrement intéressante

$$\begin{aligned} g_1V_x + g_2V_y &= \frac{\hbar^2}{4}\Big[f_1V_{xxx} + f_2V_{xxy} + f_3V_{xyy} + F_4V_{yyy} \\ &+ 8A_{300}(xV_y - yV_x) + 2(A_{210}V_x + A_{201}V_y)\Big], \end{aligned} \tag{4.2}$$

où g_i, f_j sont des fonctions arbitraires de x et y et les A_{ijk} sont des constantes. Puisque le côté droit de l'équation est multiplié par $\hbar^2$, il disparaît entièrement dans la limite classique $\hbar^2 \to 0$, simplifiant grandement l'équation. Ceci explique la différence entre les systèmes classiques et quantiques. Le système d'équations ainsi obtenu s'avère très difficile à résoudre. On s'intéresse donc aux systèmes superintégrables en demandant au système d'admettre une intégrale du mouvement supplémentaire. On discernera les cas où l'intégrale est d'ordre un ou deux dans l'impulsion.

4.1.1 Systèmes avec intégrales d'ordre un et trois

En demandant une intégrale d'ordre un à notre système, nous lui imposons une symétrie géométrique. En deux dimensions, cela implique que le potentiel soit invariant sous rotation ou sous translation en y. Pour le potentiel invariant sous rotation, les deux solutions sont $V = \omega r^2$ et $V = \frac{\alpha}{r}$, dans les cas classiques et quantiques. Nous avions déjà conclu que ces systèmes avaient une intégrale d'ordre deux. Ainsi, l'intégrale supplémentaire d'ordre trois n'est que le crochet et Poisson (ou le commutateur) entre les deux précédentes et aucune nouvelle information n'est obtenue. Nous disons d'un système qu'il est *irréductible* s'il admet une intégrale d'ordre trois qui n'est pas le crochet de Poisson de deux intégrales d'ordre inférieur. Dans le cas de l'invariance sous translation, le cas classique nous donne les potentiels $V = \alpha x$ et $V = \frac{\alpha}{x^2}$, qui sont tous deux réductibles. Le cas quantique est plus riche puisqu'il contient une solution irréductible qui satisfait l'équation

$$\hbar^2 V'^2 = 4(V - A_1)(V - A_2)(V - A_3), \tag{4.3}$$

où les A_i sont des constantes. Si les trois racines sont distinctes, V est donné en termes de fonctions elliptiques. Si au moins deux racines sont égales, V est donné en termes de fonctions élémentaires.

4.1.2 Systèmes avec intégrales d'ordre deux et trois

Ces systèmes sont beaucoup plus riches et complexes que les précédents. L'intégrale du mouvement d'ordre deux devra être une de celles décrites dans (3.16) - (3.19). Ceci détermine quatre cas à traiter. Le premier cas est celui où le potentiel est séparable en coordonnées cartésiennes. Nous obtenons quatre familles de potentiels irréductibles pour lesquelles les trajectoires peuvent être calculées algébriquement. Le cas quantique révèle 21 systèmes superintégrables dont 13 sont irréductibles [29, 56]. Parmi ces cas, six impliquent des fonctions élémentaires, deux impliquent des fonctions elliptiques et les cinq cas restants font intervenir les transcendantes de Painlevé P_I, P_{II} et P_{IV}.

Le cas d'un potentiel séparable en coordonnées polaires a été traité dans [30]. Quatre systèmes classiques ont été trouvés, mais seulement un de ces systèmes est irréductible. Notons que deux potentiels correspondant à des systèmes réductibles sont deux solutions particulières d'une équation différentielle qui n'a pas pu être résolue de façon générale. Il n'est donc pas exclu qu'il existe d'autres systèmes classiques superintégrables irréductibles. Dans le cas quantique, trois potentiels connus ainsi que deux nouveaux potentiels ont été trouvés. Les deux nouveaux potentiels impliquent, respectivement, la transcendante de Painlevé P_{VI} et les fonctions elliptiques de Weierstrass $\wp(\theta)$.

Récemment, un article traitant de la superintégrabilité pour un système possédant une intégrale du mouvement d'ordre trois et dont l'équation d'Hamilton-Jacobi est séparable en coordonnées parabolique a été publié [31]. Étonnamment, il a été montré qu'aucun de ces systèmes n'est irréductible, aucun nouveau système superintégrable n'a donc été découvert. Le cas d'un potentiel séparable en coordonnées elliptiques n'a toujours pas été traité.

4.2 Systèmes avec spin

Une autre généralisation possible est de considérer l'hamiltonien d'une particule avec spin. Un hamiltonien de la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda \frac{\sigma \cdot \mathbf{x}}{x^2} \tag{4.4}$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

est considéré dans [46]. Les hamiltoniens contenant $\vec{\sigma}$ sont associés à des particules de spin $\frac{1}{2}$ dont les fonctions d'ondes sont des spineurs de dimension deux. Notons que cet hamiltonien n'est pas invariant sous inversion de l'espace $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. La motivation derrière l'étude de ce cas est qu'il admet la même symétrie cachée (de Fock) que l'atome d'hydrogène par rapport au groupe $O(4)$ dont les générateurs sont le moment angulaire total ainsi que le vecteur de Runge-Lenz. L'hamiltonien peut être interprété comme celui d'une particule neutre de spin $\frac{1}{2}$ possédant un moment dipolaire non nul et interagissant avec un champ électrique extérieur. Le potentiel matriciel sera alors $V(\mathbf{x}) = \lambda \sigma \cdot \mathbf{E}$ avec $\mathbf{E} \sim \frac{\mathbf{x}}{x^2}$. Il est possible d'obtenir un tel champ expérimentalement sur un intervalle fini. Alors que l'atome d'hydrogène non relativiste ne considère pas le spin de l'électron, cet hamiltonien a l'avantage de décrire un système fermionique.

Le cas d'un système avec champ magnétique externe est traité dans [48]. L'hamiltonien y prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\lambda}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B}, \tag{4.6}$$

où $\vec{B}$ est le champ magnétique qui est déterminé par la condition de superintégrabilité. L'auteur classifie les systèmes possédant une intégrale du mouvement de premier ordre. Plusieurs systèmes superintégrables sont trouvés et tous admettent une solution analytique à l'équation de Schrödinger. Trois de ces systèmes sont résolus explicitement dans l'article. Une attention particulière est portée aux systèmes dont le potentiel effectif, représenté par le deuxième terme de l'hamiltonien, est périodique, car ils représentent l'interaction d'un neutron avec un réseau cristallin.

En 1977, Pronko et Stroganov ont également publié un article sur un système fermionique décrivant le dipôle magnétique du neutron dans un champ électrique rectiligne [44]. Le système superintégrable trouvé est décrit par l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} - k\frac{s_x y - s_y x}{r^2}\,, \tag{4.7}$$

où $\vec{s}$ est l'opérateur de spin, proportionel aux matrices de pauli dans le cas où le spin est de $\frac{1}{2}$. Il semblait impossible, malgré plusieurs tentatives, de généraliser ce système à un spin plus élevé tout en préservant les symétries dynamiques. Pronko explique, dans un article plus récent, ce manque de succès par le désir de préserver un type d'interaction avec le spin qui était intuitive. Dans ce même article, il considère une interaction arbitraire entre le spin et le champ externe, essayant ainsi de trouver un système superintégrable avec spin supérieur à $\frac{1}{2}$. L'hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{M(\mathbf{s},\mathbf{x})}{x^2}\,. \tag{4.8}$$

On lui demande d'admettre une intégrale du mouvement de la forme

$$A_i = \frac{1}{2}(p_i J_z + J_z p_i) + V_i(\mathbf{s},\mathbf{x})\,. \tag{4.9}$$

où $J_i = L_i + \frac{1}{2}\sigma_i$. Les matrices $M(\mathbf{s},\mathbf{x})$ et $V_i(\mathbf{s},\mathbf{x})$ devront être résolues conjointement. La tentative fut un succès, une généralisation des travaux de [43] fut atteinte. L'interaction dépend de $2s+1$ paramètres, ce qui laisse le champ libre à de nombreuses applications. De plus, il a été montré qu'il existe un autre système de spin $\frac{1}{2}$ présentant les mêmes symétries que celui déjà trouvé dans [43], qui prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + a\frac{s_x y - s_y x}{r^2} + b\frac{s_x x + s_y y}{r^2}\,. \tag{4.10}$$

4.3 Systèmes avec interaction spin-orbite

Les travaux présentés dans ce mémoire sont une continuation directe de deux articles écrits par Winternitz et Yurdusen [1, 50]. Le premier article classifie les systèmes intégrables et superintégrables avec interaction spin-orbite dans E_2. Nous porterons une attention particulière au deuxième article puisque, tout comme les travaux présentés dans ce mémoire, il s'intéresse à l'interaction spin-orbite dans E_3. L'hamiltonien considéré prend la forme

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V_0(\vec{x}) + \frac{1}{2}\left\{V_1(\vec{x}), \vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right\}. \tag{4.11}$$

Les auteurs montrent d'abord qu'il est possible de générer une interaction spin-orbite à partir d'un hamiltonien libre par transformation de jauge en utilisant une matrice de transformation dans $U(2)$. Cette matrice prend la forme

$$U = e^{i\beta_1}\begin{pmatrix} e^{i\beta_2}\cos(\beta_3) & e^{i\beta_4}\sin(\beta_3) \\ -e^{-i\beta_4}\sin(\beta_3) & e^{-i\beta_2}\cos(\beta_3) \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

où les β_j sont des fonctions réelles de (x,y,z). Pour avoir une interaction spin-orbite, il faut que

$$U^\dagger(\vec{\nabla}U)\cdot\vec{\nabla} = \Gamma\,(\vec{\sigma},\vec{L}), \tag{4.13}$$

où Γ est une fonction réelle de (x,y,z). La transformation finale est donnée par

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \varphi \pm (\pi - c_4), \quad \beta_3 = -\theta \pm \frac{\pi}{2}, \quad \beta_4 = c_4, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{4.14}$$

Sous cette transformation, l'hamiltonien devient

$$\tilde{H} = U^{-1}\left(-\frac{1}{2}\Delta + V_0(\vec{x})\right)U = -\frac{1}{2}\Delta + V_0(\vec{x}) + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}. \tag{4.15}$$

Le potentiel $V_1 = \frac{1}{r^2}$ est donc induit par une transformation de jauge. Les intégrales du mouvement sont donc les transformations de jauge des intégrales du mouvement de l'hamiltonien libre. Ainsi, à l'avenir, nous ignorerons le cas ou $V_1 = \frac{1}{r^2}$ puisqu'il n'amène pas de nouvelle information.

On calcule le commutateur entre l'hamiltonien (4.11) et un opérateur général linéaire dans l'impulsion de la forme

$$\begin{aligned} X = (A_0 + \vec{A}\cdot\vec{\sigma})p_1 + (B_0 + \vec{B}\cdot\vec{\sigma})p_2 + (C_0 + \vec{C}\cdot\vec{\sigma})p_3 + \phi_0 + \vec{\phi}\cdot\vec{\sigma} \\ -\frac{i}{2}\left\{(A_0 + \vec{A}\cdot\vec{\sigma})_x + (B_0 + \vec{B}\cdot\vec{\sigma})_y + (C_0 + \vec{C}\cdot\vec{\sigma})_z\right\}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

où les A_i, B_i, C_i, ϕ_i sont des fonctions de (x,y,z). La solution générale n'est pas trouvée, mais la forme des équations incite à chercher du côté des hamiltoniens invariant sous rotation et parité. Le nouvel hamiltonien considéré prend donc la forme

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V_0(r) + V_1(r)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{L}. \tag{4.17}$$

Ceci permet de classifier les intégrales du mouvement selon des multiplets irréductibles de $O(3)$. Ainsi, une liste des scalaires, pseudoscalaires, vecteurs, pseudovecteurs, tenseurs et pseudotenseurs d'ordre un dans l'impulsion est dressée. On calcule ensuite ces six commutateurs indépendamment. Notons que les intégrales du mouvement J_i et $(\vec{\sigma},\vec{L})$ sont des intégrales du mouvement triviales de (4.17). Il est finalement montré que les deux seuls potentiels à posséder une intégrale du mouvement supplémentaire sont $V_1 = \frac{1}{2r^2}$ et $V_1 = \frac{1}{2r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$. L'intégrale du mouvement en question est pseudoscalaire.

Nos travaux reprennent donc où cet article s'est arrêté. Nous considérons l'hamiltonien (4.17) et cherchons les systèmes V_0 et V_1 qui possèdent une intégrale du mouvement d'ordre deux dans l'impulsion en utilisant les mêmes méthodes.

CHAPITRE 5

SUPERINTEGRABLE SYSTEMS WITH SPIN AND SECOND-ORDER INTEGRALS OF MOTION

Jean-Francois Désilets[1] , **Pavel Winternitz**[1,2] , and **İsmet Yurduşen**[3]

[1]Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal,
CP 6128, Succ. Centre-Ville, Montréal, Quebec H3C 3J7, Canada

[2]Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal,
CP 6128, Succ. Centre-Ville, Montréal, Quebec H3C 3J7, Canada

[3]Department of Mathematics, Hacettepe University,
06800 Beytepe, Ankara, Turkey

État de l'article L'article a été accepté par le *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*.

Contribution à l'article J'ai écrit l'algorithme permettant de symétriser les opérateurs ainsi que la section correspondante dans l'article (section 3). À des fins de vérification, j'ai fait les calculs des sections 4 et 5 indépendamment de Yurdusen. J'ai effectué tous les calculs de la section sur les pseudo-vecteurs (section 6) et ai rédigé cette section. J'ai composé un algorithme pour simplifier les intégrales du mouvement.

5.1 Abstract

We investigate a quantum nonrelativistic system describing the interaction of two particles with spin $\frac{1}{2}$ and spin 0, respectively. We assume that the Hamiltonian is rotationally invariant and parity conserving and identify all such systems which allow additional integrals of motion that are second order matrix polynomials in the momenta. These integrals are assumed to be scalars, pseudoscalars, vectors or axial vectors. Among the superintegrable systems obtained, we mention a deformation of the Coulomb potential with scalar potential $V_0 = \frac{\alpha}{r} + \frac{3\hbar^2}{8r^2}$ and spin orbital one $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$.

PACS numbers : 02.30.Ik, 03.65.-w, 11.30.-j, 25.80.Dj

5.2 Introduction

This article is part of a research program, the purpose of which is to study nonrelativistic integrable and superintegrable systems with spin in real three-dimensional Euclidean space. A recent article [1] was devoted to a system of two nonrelativistic particles with spin $s = \frac{1}{2}$ and $s = 0$, respectively. Physically, this can be interpreted *e.g.* as a nucleon-pion interaction or an electron - α particle one. An earlier article [2] was devoted to the same problem in two dimensions.

We recall that a Hamiltonian system with n degrees of freedom is called integrable if it allows n independent commuting integrals of motion (including the Hamiltonian) and superintegrable if more then n independent integrals exist.

In this paper, we will consider the Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V_0(r) + V_1(r)\,(\vec{\sigma},\vec{L}\,), \tag{5.1}$$

in real three-dimensional Euclidean space E_3. Here H is a matrix operator acting on a two-component spinor and we decompose it in terms of the 2×2 identity matrix I and Pauli matrices (we drop the matrix I whenever this does not cause confusion). We assume that the scalar potential $V_0(r)$ and the spin-orbital one $V_1(r)$ depend on the (scalar) distance r only. The same system was already considered in [1] and the search for superintegrable systems was restricted to those that allow integrals that are first-order polynomials in the momenta.

Here we will concentrate on the case when the integrals of motion are allowed to be second-order matrix polynomials in the momenta. Our notations are the same as in [1], *i.e.*

$$p_k = -i\hbar\partial_{x_k}\,, \qquad L_k = -i\hbar\varepsilon_{klm}x_l\partial_{x_m}\,, \tag{5.2}$$

are the linear and angular momentum respectively and

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

are the Pauli matrices.

In the case of a purely scalar potential

$$H = \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + V_0(\vec{x}), \tag{5.4}$$

the same assumption, namely that the potential is spherically symmetric, $V_0 = V(r)$ would lead only to two superintegrable systems, namely the Kepler-Coulomb one $V_0 = \frac{\alpha}{r}$ and the harmonic oscillator, $V_0 = \omega r^2$. Indeed, Bertrand's theorem [3, 4] tells us that the only two spherically symmetric potentials in which all bounded trajectories are closed are precisely these two. On the other hand, if a classical Hamiltonian (5.4) is maximally superintegrable ($2n-1$ functionally independent integrals of motion in E_n that are well defined functions on phase space) then all bounded trajectories must be closed [5].

The superintegrability of the hydrogen atom in quantum mechanics is due to the existence of the Laplace-Runge-Lenz integral of motion. This was implicitly used by Pauli [6] and explicitly by Fock [7] and Bargmann [8] to calculate the energy levels and wave functions of the hydrogen atom. Similarly, the superintegrability of the isotropic harmonic oscillator is due to the existence of the quadrupole tensor [9] (also known as the Fradkin tensor [10]).

If the potential $V_0(\vec{x})$ in (5.4) is not spherically symmetric, many new possibilities occur. The first one studied was the anisotropic harmonic oscillator with rational ratio of frequencies [9].

A systematic study of superintegrable systems in E_n with $n = 2, 3$ and n general was started more then 40 years ago [11]-[15]. Most of the earlier work was on second-order superintegrability, *i.e.* with integrals of motion that are second-order polynomials in the momenta. The existence of complete sets of commuting second-order integrals of motion is directly related to the separation of variables in the Hamilton-Jacobi or Schrödinger equation, respectively [11]-[17]. Superintegrability of the system (5.4) is thus related to multiseparability.

Second-order superintegrability has been studied in 2- and 3-dimensional spaces of constant and nonconstant curvature [11]-[20],[21]-[28] and also in n dimensions [29–

31]. For third-order superintegrability see [32]-[37].

Recently, infinite families of classical and quantum systems with integrals of arbitrary order have been discovered, shown to be superintegrable and solved [38]-[49].

Previous studies of superintegrable systems with spin have been of three types. One describes a particle with spin interacting with an external field, *e.g.* an electromagnetic one [50]-[56]. The second describes a spin $\frac{1}{2}$ particle interacting with a dyon [57] or with a self-dual monopoles [58]. The third one is our program to study superintegrability in a system of two particles of which at least one has nonzero spin [1, 2].

In this paper, we look for superintegrable systems of the form (5.1). The system is integrable by construction. Since $V_0(r)$ and $V_1(r)$ depend on the distance r alone and $(\vec{\sigma},\vec{L})$ is a scalar, the Hamiltonian H commutes with the total angular momentum $\vec{J}$. As a matter of fact, *trivial* integrals (present for arbitrary functions $V_0(r)$ and $V_1(r)$) are

$$H\,, \quad \vec{J}=\vec{L}+\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\,, \quad (\vec{\sigma},\vec{L})\,, \quad \vec{L}^2\,. \tag{5.5}$$

For some potentials $V_0(r)$ and $V_1(r)$ integrals of order 0 or 1 in the momenta exist [1]. They can be multiplied by one of the trivial integrals (5.5) (or by some function of them). This will provide further integrals which are nontrivial, but obvious. We will mention them whenever they occur and they may be useful for solving the corresponding superintegrable systems.

In view of the rotational and parity invariance of the Hamiltonian (5.1), we shall search for integrals of motion that have a well defined behavior under these transformations. Thus, we will separately look for systems that allow integrals that are scalars, pseudoscalars, vectors or axial vectors. Tensor integrals are left for a future study.

To obtain nontrivial results, we impose from the beginning that the spin-orbital interaction be present ($V_1 \neq 0$). We also recall a result from [1], namely for

$$V_1(r)=\frac{\hbar}{r^2}\,, \qquad V_0(r) \quad \text{arbitrary}\,, \tag{5.6}$$

the Hamiltonian (5.1) allows 2 first-order axial vector integrals of motion. They are $\vec{J}$

and

$$\vec{S} = -\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} + \hbar\frac{\vec{x}}{r^2}(\vec{x},\vec{\sigma})\,. \tag{5.7}$$

For

$$V_1(r) = \frac{\hbar}{r^2}\,, \qquad V_0(r) = \frac{\hbar^2}{r^2}\,, \tag{5.8}$$

it allows 2 first-order axial vector integrals and 1 first-order vector integral. They are $\vec{J}$, $\vec{S}$ and

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{\hbar}{r^2}(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,. \tag{5.9}$$

These two systems are first-order superintegrable and the term $V_1(r) = \frac{\hbar}{r^2}$ can be induced from a Hamiltonian with $V_1(r) = 0$ by a gauge transformation [1].

5.3 $O(3)$ multiplets of integrals of motion

Rotations and reflections in $E(3)$ leave the Hamiltonian (5.1) invariant but can transform the integrals of motion into new invariants. Thus instead of solving the whole set of determining equations we simplify the problem by classifying the integrals of motion into irreducible $O(3)$ multiplets.

At our disposal are two vectors $\vec{x}$ and $\vec{p}$ and one pseudovector $\vec{\sigma}$. The integrals we are considering can involve at most second-order powers of $\vec{p}$ and first-order powers of $\vec{\sigma}$, but arbitrary powers of $\vec{x}$.

We shall construct scalars, pseudo-scalars, vectors and axial vectors in the space

$$\left\{\{\vec{x}\}^n \times \vec{p} \times \vec{\sigma}\right\}. \tag{5.10}$$

The quantities $\vec{x}$, $\vec{p}$ and $\vec{\sigma}$ allow us to define 6 independent "directions" in the direct product of the Euclidean space and the spin one, namely

$$\left\{\vec{x},\,\vec{p},\,\vec{L} = \vec{x}\wedge\vec{p},\,\vec{\sigma},\,\vec{\sigma}\wedge\vec{x},\,\vec{\sigma}\wedge\vec{p}\right\}, \tag{5.11}$$

and any $O(3)$ tensor can be expressed in terms of these. The positive integer n in (5.10) is arbitrary and any scalar in $\vec{x}$ space will be written as $f(r)$ where f is an arbitrary function of $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Since $\vec{p}$ figures at most quadratically and $\vec{\sigma}$ at most linearly we can form exactly seven linearly independent scalars and seven pseudoscalars out of the quantities (5.11) :

Scalars :

$$S_1 = 1\,, \qquad S_2 = \vec{p}^{\,2}\,, \qquad S_3 = (\vec{x},\vec{p})\,, \qquad S_4 = (\vec{\sigma},\vec{L})\,,$$
$$S_5 = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{\sigma},\vec{L})\,, \qquad S_6 = \vec{L}^{\,2}\,, \qquad S_7 = (\vec{x},\vec{p})^2\,. \tag{5.12}$$

Pseudoscalars :

$$P_1 = (\vec{\sigma},\vec{p})\,, \qquad P_2 = (\vec{\sigma},\vec{x})\,, \qquad P_3 = \vec{p}^{\,2}\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,, \qquad P_4 = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,,$$
$$P_5 = (\vec{x},\vec{p})^2\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,, \qquad P_6 = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{p},\vec{\sigma})\,, \qquad P_7 = (\vec{x},\vec{\sigma})\,\vec{L}^{\,2}\,. \tag{5.13}$$

The independent vectors and axial vectors are as follows.

Vectors :

$$\vec{V}_1 = \vec{x}\,, \qquad \vec{V}_2 = \vec{p}\,, \qquad \vec{V}_3 = \vec{x}\wedge\vec{\sigma}\,, \qquad \vec{V}_4 = \vec{p}\wedge\vec{\sigma}\,, \qquad \vec{V}_5 = \vec{p}^{\,2}\,\vec{x}\,,$$
$$\vec{V}_6 = \vec{p}^{\,2}\,(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,, \qquad \vec{V}_7 = (\vec{x},\vec{p})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{V}_8 = (\vec{x},\vec{p})\,\vec{p}\,, \qquad \vec{V}_9 = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,,$$
$$\vec{V}_{10} = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{p}\wedge\vec{\sigma})\,, \qquad \vec{V}_{11} = (\vec{\sigma},\vec{L})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{V}_{12} = (\vec{\sigma},\vec{L})\,\vec{p}\,, \qquad \vec{V}_{13} = (\vec{x},\vec{p})^2\,\vec{x}\,,$$
$$\vec{V}_{14} = (\vec{x},\vec{p})^2\,(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,, \qquad \vec{V}_{15} = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{\sigma},\vec{L})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{V}_{16} = \vec{L}^{\,2}\,\vec{x}\,,$$
$$\vec{V}_{17} = \vec{L}^{\,2}\,(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,, \qquad \vec{V}_{18} = (\vec{\sigma},\vec{x})\,\vec{L}\,, \qquad \vec{V}_{19} = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,\vec{L}\,. \tag{5.14}$$

Axial vectors :

$$\vec{A}_1 = \vec{\sigma}\,, \qquad \vec{A}_2 = \vec{L}\,, \qquad \vec{A}_3 = \vec{p}^{\,2}\,\vec{\sigma}\,, \qquad \vec{A}_4 = (\vec{x},\vec{p})\,\vec{\sigma}\,, \qquad \vec{A}_5 = (\vec{x},\vec{p})\,\vec{L}\,,$$
$$\vec{A}_6 = (\vec{\sigma},\vec{L})\,\vec{L}\,, \qquad \vec{A}_7 = (\vec{x},\vec{p})^2\,\vec{\sigma}\,, \qquad \vec{A}_8 = (\vec{\sigma},\vec{p})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{A}_9 = (\vec{\sigma},\vec{p})\,\vec{p}\,,$$
$$\vec{A}_{10} = (\vec{\sigma},\vec{x})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{A}_{11} = (\vec{\sigma},\vec{x})\,\vec{p}\,, \qquad \vec{A}_{12} = \vec{p}^{\,2}\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{A}_{13} = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{\sigma},\vec{x})\,\vec{x}\,,$$
$$\vec{A}_{14} = (\vec{x},\vec{p})^2\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{A}_{15} = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{p},\vec{\sigma})\,\vec{x}\,, \qquad \vec{A}_{16} = \vec{L}^{\,2}\,\vec{\sigma}\,,$$
$$\vec{A}_{17} = (\vec{x},\vec{p})\,(\vec{x},\vec{\sigma})\,\vec{p}\,, \qquad \vec{A}_{18} = (\vec{x},\vec{\sigma})\,\vec{L}^{\,2}\,\vec{x}\,. \tag{5.15}$$

An arbitrary function $f(r)$ is also a scalar and each of the quantities in (5.12)-(5.15) can be multiplied by $f(r)$ without changing its properties under rotations or reflections.

Even though all the above expressions are linearly independent, higher order polynomial relations between them exist. More importantly, we shall use linear relations with coefficients depending on the distance r that exist, namely

$$\begin{aligned}
&S_7 = r^2 S_2 - S_6\,, \qquad P_7 = r^2 P_3 - P_5\,, \qquad V_{16} = r^2 V_5 - V_{13}\,,\\
&V_{17} = r^2 V_6 - V_{14}\,, \qquad V_{18} = -r^2 V_4 + V_9 + V_{11}\,, \qquad V_{19} = -r^2 V_{10} + V_{14} + V_{15}\,,\\
&A_{16} = r^2 A_3 - A_7\,, \qquad A_{17} = r^2 (A_9 - A_3) + A_6 + A_7 + A_{12} - A_{15}\,,\\
&A_{18} = r^2 A_{12} - A_{14}\,.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

We mention that the vector $(\vec{\sigma},\vec{p})\vec{L}$ was eliminated from the list (5.14) using the nontrivial linear relation $(\vec{\sigma},\vec{p})\vec{L} = V_6 - V_{10} + V_{12}$. We use the relations (5.16) to remove the left hand sides of (5.16) from the analysis completely.

The relations determining $S_7, P_7, V_{16}, V_{17}, A_{16}$ and A_{18} are all consequences of the simple vector relation $\vec{L}^2 = \vec{x}^2\,\vec{p}^{\,2} - (\vec{x},\vec{p})^2$. Those determining V_{18} and V_{19} follow from the identity $(\vec{\sigma},\vec{x})(\vec{x}\wedge\vec{p}) = -\vec{x}^2(\vec{p}\wedge\vec{\sigma}) + (\vec{x},\vec{p})(\vec{x}\wedge\vec{\sigma}) + (\vec{\sigma},\vec{x}\wedge\vec{p})\vec{x}$.

5.4 Symmetrization of the integrals of motion

In the rest of the article we separately take the linear combinations of all the scalars, pseudo-scalars, vectors and axial vectors with coefficients $f_i(r)$ that are real functions of r. However, instead of having the bare linear combinations of these tensors, the full symmetric forms are needed for the analysis of the commutation relations. Thus, in this section, we briefly describe how this symmetrization process carried out basically by working on the linear combination of the scalars chosen as a prototype.

In writing the most general scalar operator, one needs to symmetrize the linear combination of the scalars given in (5.12)

$$X_S = \sum_{j=1}^{6} f_j(r) S_j\,, \quad f_j(r) \in \mathbb{R}\,, \tag{5.17}$$

term by term. It is obvious that the terms, for example, $x_i p_i$ (here and throughout the whole article summation over the repeated indices through 1 to 3 is to be understood) and $p_i x_i$ are in fact different scalars and their symmetric form is $\frac{1}{2}(x_i p_i + p_i x_i)$. However, at this stage an immediate question arises : should we associate a single arbitrary function of r multiplying each term obtained from symmetrization or different weightings are necessary for each of them.

Let us consider the scalar S_3, for example. The most general possible form of it is achieved by giving an arbitrary function of r to each permutation

$$S_3 = f_a(r)x_i p_i + f_b(r)p_i x_i + x_i f_c(r)p_i + x_i p_i f_d(r) + p_i f_e(r)x_i + p_i x_i f_f(r)\,. \tag{5.18}$$

Requiring that the operator be hermitian, that is $S_3 = S_3^\dagger$, we get

$$\begin{aligned} &f_a(r)x_i p_i + f_b(r)p_i x_i + x_i f_c(r)p_i + x_i p_i f_d(r) + p_i f_e(r)x_i + p_i x_i f_f(r) \\ &= p_i x_i f_a(r) + x_i p_i f_b(r) + p_i f_c(r)x_i + f_d(r)p_i x_i + x_i f_e(r)p_i + f_f(r)x_i p_i\,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Hence self-adjointness reduces the half of the arbitrary functions

$$f_a(r) = f_f(r)\,, \qquad f_b(r) = f_d(r)\,, \qquad f_c(r) = f_e(r)\,. \tag{5.20}$$

Thus, S_3 can now be rewritten as

$$S_3 = (f_a(r) + f_c(r))x_i p_i + p_i x_i(f_a(r) + f_c(r)) + f_b(r)p_i x_i + x_i p_i f_b(r)\,. \tag{5.21}$$

Furthermore it is always possible to move the derivative terms to the right

$$\begin{aligned} S_3 = 2(f_a(r) + f_b(r) + f_c(r))x_i p_i - 3\hbar i(f_a(r) + f_b(r) + f_c(r)) \\ - i\hbar r(f_a'(r) + f_b'(r) + f_c'(r))\,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Defining

$$f_3(r) = f_a(r) + f_b(r) + f_c(r) \tag{5.23}$$

we write

$$S_3 = 2f_3(r)x_i p_i - 3i\hbar f_3(r) - i\hbar r f_3'(r)\,. \tag{5.24}$$

Thus for the scalar S_3 it is explicitly shown that a single arbitrary function of r is enough to make the symmetric form as general as can be.

However, it is easy to see how difficult this process would become even for the scalars such as S_5, for which we would have to start by writing $5! = 120$ arbitrary functions of r. We have already shown that a single arbitrary function of r is enough to give the symmetric form of the operators that are first-order in the momentum [1].

To investigate the operators that are second-order in the momentum, we wrote a computer program code working under Mathematica. The code organizes the permutations of a given operator into Hermitian couples, which does the equivalent steps given in the previous example (5.19-5.21). Hence for an operator made of n terms, we are left with $\frac{n!}{2}$ Hermitian couples. Moving the derivative terms to the extreme right for each couple, we see that all of the Hermitian couples for a given operator have the same form (as in (5.22)) although some of them give a few extra terms. These extra terms can always be absorbed into already existing terms (of lower order in $\vec{p}$). Hence a redefinition of the arbitrary functions associated with a given operator (as done in (5.23)) assures that it is enough to have only one arbitrary function of r for each scalar.

For example, let us consider the symmetrization of the scalar S_2. There are two distinct Hermitian couples associated with S_2, namely :

$$p_i f_2(r) p_i + p_i f_2(r) p_i \tag{5.25}$$

$$p_i p_i f_2(r) + f_2(r) p_i p_i\,. \tag{5.26}$$

Moving the derivatives to the right in the first couple, we obtain :

$$p_i f_2(r) p_i + p_i f_2(r) p_i = 2(f_2(r) p_i^2 - i\hbar f_2'(r) \frac{x_i}{r} p_i)\,. \tag{5.27}$$

The same process with the second couple gives :

$$p_i p_i f_2(r) + f_2(r) p_i p_i = 2(f_2(r) p_i^2 - i\hbar f_2'(r) \frac{x_i}{r} p_i) - \hbar^2 f_2''(r)\,. \tag{5.28}$$

Here, we have an extra term in the second derivative of $f_2(r)$. However, this is just another arbitrary function of r and it is already associated with the scalar S_1. Hence we could eliminate it by redefining the function associated with S_1 as ; $f_1(r) = f_1(r) - \hbar^2 f_2''(r)$ and the sum (5.17) would remain unchanged. The Mathematica computer program code makes it clear that the extra terms coming from choosing one Hermitian couple over another for a given operator could always be eliminated in this way.

When writing the operators using tensor notation, one understands that the number of free indices is irrelevant to the symmetrization of a given operator, assuring the validity of the above method for any class of operators (pseudoscalar, vector and axial vector). In its final version, the computer program is able to take a list of operators and symmetrize all of them in an optimal manner keeping no unnecessary terms.

5.5 Commutativity conditions for scalars and pseudoscalars

5.5.1 Scalars

Let us take a linear combination of the independent scalars given in (5.12)

$$\widetilde{X}_S = \sum_{j=1}^{6} f_j(r) S_j\,, \tag{5.29}$$

and fully symmetrize it as described in Section 5.4. The symmetric form of (5.29) is written as

$$
\begin{aligned}
X_S &= f_1 - 3i\hbar f_3 - i\hbar r f_3' + 2f_2\,(\vec{p},\vec{p}) + 2f_5\left(\vec{x},(\vec{\sigma},\vec{L})\,\vec{p}\right) + f_6\,(\vec{L},\vec{L}) \\
&+ \left(f_4 - 5i\hbar f_5 - i\hbar r f_5'\right)(\vec{\sigma},\vec{L}) + \left(2f_3 - \frac{2i\hbar}{r} f_2'\right)(\vec{x},\vec{p})\,. \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

The requirement that $[H,X_S]=0$, gives us the determining equations for this case. The determining equations, obtained by equating the coefficients of the third-order terms to zero in the commutativity equation, become

$$
f_5 = 0\,, \qquad f_2' = 0\,, \qquad f_6' = 0\,. \qquad (5.31)
$$

The determining equations, obtained by equating the coefficients of the second-order and first-order terms to zero in the commutativity equation, read respectively

$$
f_3 = 0\,, \qquad f_4' = 4f_2\,V_1'\,, \qquad (5.32)
$$

and

$$
f_1' = 4f_2\,V_0'\,. \qquad (5.33)
$$

The rest of the determining equations are then satisfied identically. It is immediately seen that the only solutions for equations (5.31) - (5.33) are

$$
f_1 = 4c_1V_0 + c_3\,, \qquad f_2 = c_1\,, \qquad f_4 = 4c_1V_1 + c_4\,, \qquad f_6 = c_2\,, \qquad (5.34)
$$

where c_i, $i = 1,\ldots,4$ are real constants.

Thus the corresponding four integrals of motion are those given in 5.5, *i.e.* there are no nontrivial scalar integrals of motion.

5.5.2 Pseudoscalars

As an integral of motion we take a linear combination of the independent pseudoscalars given in (5.13)

$$\widetilde{X}_P = \sum_{j=1}^{6} f_j(r) P_j\,, \tag{5.35}$$

which has the following fully symmetric form

$$\begin{aligned} X_P &= (\vec{\sigma},\vec{x})\left(f_2 - i\hbar(\frac{1}{r}f_1' + 4f_4 + rf_4')\right) + \left(2f_1 - i\hbar\big(2f_3 + 4f_6 + rf_6'\big)\right)(\vec{\sigma},\vec{p}) \\ &+ (\vec{\sigma},\vec{x})\left(2f_4 - i\hbar(\frac{2}{r}f_3' + 10f_5 + 2rf_5' + \frac{1}{r}f_6')\right)(\vec{x},\vec{p}) + 2f_6\,(\vec{x},\vec{p})\,(\vec{\sigma},\vec{p}) \\ &+ (\vec{\sigma},\vec{x})\left(2f_3\,(\vec{p},\vec{p}) + 2f_5\big(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p}\big)\right). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Requiring that the commutator $[H,X_P]=0$, we obtain the determining equations for this case. Those, obtained by equating the coefficients of the third-order terms to zero in the commutativity equation, read

$$2rf_5V_1 + \hbar f_5' = 0\,, \tag{5.37}$$

$$\hbar f_3' + 2r\left(\hbar f_5 + \big(f_3 + f_6\big)V_1\right) = 0\,, \tag{5.38}$$

$$\big(\hbar r + 4r^3V_1\big)f_5 + \hbar f_6' - r\left(2f_6V_1 - 3\hbar r f_5'\right) = 0\,, \tag{5.39}$$

$$\big(4r^2V_1 - \hbar\big)r\hbar f_5 - \hbar f_3' + \hbar f_6' - r\left(2\big(f_3 + 2f_6\big)V_1 - 3\hbar r f_5'\right) = 0\,, \tag{5.40}$$

$$\hbar f_3 + \hbar f_6 + r\left(\hbar f_3' + 2r\left(\hbar f_5 + f_6V_1\right)\right) = 0\,, \tag{5.41}$$

$$\hbar f_3' + 2\hbar f_6' + r\left(2\big(f_3 - f_6\big)V_1 + 2f_5\left(2\hbar + r^2V_1\right) + 3\hbar r f_5'\right) = 0\,, \tag{5.42}$$

$$\hbar f_3' + \hbar f_6' + r\left(2f_3V_1 + f_5\left(3\hbar + 2r^2V_1\right) + 2\hbar r f_5'\right) = 0\,, \tag{5.43}$$

$$f_3 + f_6 + r\left(3rf_5 + f_3' + r^2f_5' + f_6'\right) = 0\,, \tag{5.44}$$

$$\hbar f_6 + f_3\left(\hbar - 2r^2V_1\right) = 0\,, \tag{5.45}$$

$$\left(2r^2V_1 - \hbar\right)\left(f_3 + r^2f_5 + f_6\right) - r\hbar f_6' = 0\,. \tag{5.46}$$

Equation (5.44) can immediately be integrated to give

$$f_5 = \frac{c_1 - r\,(f_3 + f_6)}{r^3}\,, \tag{5.47}$$

where c_1 is a real constant. If we introduce (5.47) into (5.46) we obtain

$$f_6' = c_1\left(2V_1 - \frac{\hbar}{r^2}\right). \tag{5.48}$$

Then writing f_6 from (5.45) and using the rest of the equations (5.37)-(5.43), as a compatibility condition we obtain a nonlinear second-order equation for V_1

$$\begin{aligned} &3\hbar^4 r\big(\hbar - 2r^2V_1\big)\,V_1'' + 4\hbar^2\left(3\hbar^3 + r^2V_1\left(9\hbar^2 + 5r^2V_1\left(2r^2V_1 - 3\hbar\right)\right)\right)V_1' + 10\hbar^4 r^3 V_1'^2 \\ &+2rV_1^2\left(45\hbar^4 - 4r^2V_1\left(15\hbar^3 + 4r^4V_1^2\left(r^2V_1 - 3\hbar\right)\right)\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Performing a standard symmetry analysis [59] for the equation (5.49), we find that the symmetry algebra is spanned by two vector fields

$$\vec{v}_1 = r\partial_r - 2V_1\partial_{V_1}\,, \qquad \vec{v}_2 = r^3\partial_r + \left(\frac{\hbar}{2} - 3r^2V_1\right)\partial_{V_1}\,, \tag{5.50}$$

with $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = 2\vec{v}_2$. It is now possible to lower the order of the equation (by two) using the standard method of symmetry reduction for ordinary differential equations [59]. In the case of equation (5.49), this leads to an implicit (general) solution which we do not find useful.

An alternative is to use the symmetry algebra to find particular solutions of (5.49), invariant under the subgroup generated by $\vec{v}_1$, or that generated by $\vec{v}_2$. The corresponding subgroup invariants are the potentials

$$V_1 = \frac{C_1}{r^2} \qquad \text{and} \qquad V_1^* = \frac{C_2}{r^3} + \frac{\hbar}{2r^2}\,, \tag{5.51}$$

respectively. Substituting (5.51) into (5.49), we see that V_1 is a solution for

$$C_1 = \left\{ -\frac{\hbar}{2}, 0, \frac{\hbar}{2}, \hbar, \frac{3\hbar}{2} \right\}. \tag{5.52}$$

The invariant V_1^* is a solution only for $C_2 = 0$ and that solution is already included in (5.52) ($C_1 = \frac{\hbar}{2}$). The solutions V_1 for C_1 as in (5.52) (with $C_1 \neq \frac{\hbar}{2}$) can be extended to one-parameter classes of solutions by acting on them with the symmetry group generated by $\vec{v}_2$:

$$\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{1-2\lambda r^2}}, \quad \widetilde{V}_1 = \left(V_1 - \frac{\hbar}{2r^2}\right)(1-2\lambda r^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\hbar}{2r^2}(1-2\lambda r^2), \, |\lambda| < \frac{1}{2r^2}. \tag{5.53}$$

Substituting $V_1(r) = \frac{C_1}{r^2}$ into (5.53) and expressing $\widetilde{V}_1$ in terms of $\tilde{r}$, we obtain

$$\widetilde{V}_1(\tilde{r}) = \frac{1}{2\tilde{r}^2}\left(\hbar + \frac{2C_1 - \hbar}{\sqrt{1+2\lambda \tilde{r}^2}}\right). \tag{5.54}$$

The 4 values of $C_1 \neq \frac{\hbar}{2}$ in (5.52) lead to 4 new potentials

$$V_1(r) = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+2\lambda r^2}}\right), \qquad V_1(r) = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+2\lambda r^2}}\right), \tag{5.55}$$

with $\varepsilon^2 = 1$. Thus we have 7 potentials to consider : those in (5.55) and the original $V_1 = \frac{C_1}{r^2}$ with $C_1 = -\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}$ ($C_1 = 0$ is trivial and $C_1 = \hbar$ is gauge induced and was considered in [1]). Taking $\lambda = 0$ in (5.55) we recover the original cases with $C_1 = -\frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}$ (and $C_1 = 0, \hbar$), but we prefer to treat them separately.

Case I : $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$

For this type of potential, (5.45) and (5.47) immediately imply

$$f_6 = 0, \qquad \text{and} \qquad f_5 = \frac{c_1}{r^3} - \frac{f_3}{r^2}, \tag{5.56}$$

where c_1 is an integration constant. Also the set of determining equations given in (5.37)-

(5.46) together with (5.47) give us

$$f_5 = -\frac{c_2}{r}, \tag{5.57}$$

where c_2 is an integration constant. Then the determining equations, obtained from lower order terms, provide us with

$$f_1 = -r\,c_3\,, \qquad f_2 = \frac{4\,c_1 V_0 + c_4}{r}\,, \qquad f_4 = \frac{c_3}{r}\,, \tag{5.58}$$

where c_3 and c_4 are integration constants. For these values of f_j (for $j = 1, \ldots, 6$) all the determining equations, obtained from the requirement that the commutator $[H, X_P] = 0$, are satisfied for any $V_0 = V_0(r)$. Since we have four arbitrary constants and none of them appear in the Hamiltonian, we have four different integrals of motion. Two of them are first-order operators and correspond to the ones that were found in [1], while the other two are second-order operators. They are given as,

$$X_P^1 = \frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{r}\,, \tag{5.59}$$

$$X_P^2 = -r(\vec{\sigma},\vec{p}) + \frac{1}{r}\,(\vec{\sigma},\vec{x})\,(\vec{x},\vec{p}) - \frac{i\hbar}{r}\,(\vec{\sigma},\vec{x})\,, \tag{5.60}$$

$$X_P^3 = 4\,\frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{r}\left(\frac{1}{2}(\vec{p},\vec{p}) + V_0\right) + \frac{2i\hbar}{r^3}(\vec{\sigma},\vec{x})\,(\vec{x},\vec{p}) - \frac{2i\hbar}{r}(\vec{\sigma},\vec{p})\,, \tag{5.61}$$

$$X_P^4 = \frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{r}\Big(6i\hbar\,(\vec{x},\vec{p}) - 2\left(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p}\right) + 2r^2(\vec{p},\vec{p})\Big) - 2i\hbar r\,(\vec{\sigma},\vec{p})\,. \tag{5.62}$$

However, the only really independent pseudoscalar integral is X_P^1 since we have

$$X_P^2 = -iX_P^1\Big((\vec{\sigma},\vec{L}) + \hbar\Big)\,, \tag{5.63}$$

$$X_P^3 = 4\,X_P^1 H\,, \tag{5.64}$$

$$X_P^4 = 2\,X_P^1\left((X_P^2)^2 - \hbar^2\right). \tag{5.65}$$

Case II : $V_1 = -\frac{\hbar}{2r^2}$

For this type of potential, (5.48) implies

$$f_6 = \frac{2c_1}{r} + c_2\,, \tag{5.66}$$

where c_1 and c_2 are integration constants. Then the set of determining equations given in (5.37)-(5.46) gives

$$f_1 = 0\,, \qquad f_3 = -\frac{c_1}{r}\,, \qquad f_4 = 0\,, \qquad f_5 = 0\,, \qquad c_2 = 0\,. \tag{5.67}$$

Introducing (5.66) and (5.67) into the determining equations obtained from lower order terms, we find the following equations

$$2r\big(f_2 - r f_2'\big) - \frac{12\hbar^2 c_1}{r^2} = 0\,, \qquad 4c_1 r V_0' - \frac{\hbar^2 c_1 + 2c_3 r^4}{r^2} = 0\,. \tag{5.68}$$

Their solutions are

$$f_2 = \frac{3\hbar^2 c_1}{2r^3} + r c_3\,, \qquad V_0 = -\frac{\hbar^2}{8r^2} + \alpha r^2\,, \qquad \alpha = \frac{c_3}{4c_1}\,, \tag{5.69}$$

where c_3 is an integration constant. Hence the integral of motion X_P depends on two constants c_1 and c_3. However, V_0 also depends on $\alpha = \frac{c_3}{4c_1}$. Thus, we can choose $c_3 = 4\alpha c_1$ and set $c_1 = 1$. The integral of motion for this case can be written as

$$X_P = \frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{r}\left(\frac{3\hbar^2}{2r^2} + 4\alpha r^2 - 2(\vec{p},\vec{p})\right) + \frac{4}{r}\big((\vec{x},\vec{p}) - i\hbar\big)(\vec{\sigma},\vec{p})\,. \tag{5.70}$$

Since X_P is a pseudoscalar operator it also commutes with the components of the total angular momentum J_i $(i = 1,2,3)$: $[H, X_P] = 0$, and $[J_i, X_P] = 0$, as do all the pseudoscalars obtained below.

Case III : $V_1 = \frac{3\hbar}{2r^2}$

For this type of potential, the set of determining equations given in (5.37)-(5.46) together with (5.48) give us

$$\begin{aligned} f_1 &= 0\,, \qquad f_3 = -\frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{2}\,, \qquad f_4 = 0\,, \\ f_5 &= \frac{4\,c_1}{r^3} - \frac{3c_2}{2r^2}\,, \qquad f_6 = -\frac{2c_1}{r} + c_2\,, \end{aligned} \tag{5.71}$$

where c_1 and c_2 are integration constants. If we introduce these integrals of motion into the set of determining equations we get $c_2 = 0$. Using the determining equations, obtained from lower order terms, we get

$$f_2 = \frac{5\hbar^2\,c_1 + 2\,c_1\,r^3\,V_0'}{r^3}\,, \tag{5.72}$$

and upon introducing (5.72) back into the determining equations we obtain a second-order differential equation for V_0

$$r^3\left(V_0' - r\,V_0''\right) + 15\hbar^2 = 0\,. \tag{5.73}$$

Its solution is

$$V_0 = \frac{15\hbar^2}{8\,r^2} + \alpha r^2\,, \tag{5.74}$$

where α is an integration constant. Using (5.74) we obtain f_2 from (5.72)

$$f_2 = c_1\left(4\,\alpha\,r - \frac{5\hbar^2}{2\,r^3}\right)\,. \tag{5.75}$$

Since there is only one arbitrary constant for this case (α appears in the Hamiltonian) we only have one second-order integral of motion, namely

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{r}\left(-\frac{5\hbar^2}{2\,r^2} + 4\,\alpha\,r^2 - \frac{20i\hbar}{r^2}\,(\vec{x},\vec{p}) - 2(\vec{p},\vec{p}) + \frac{8}{r^2}\big(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p}\big)\right) \\ &- \frac{4}{r}\,\big((\vec{x},\vec{p}) - 2i\hbar\big)\,(\vec{\sigma},\vec{p})\,. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Case IV : $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta\, r^2}}\right)$, $\beta \equiv 2\lambda$

For this type of potential the set of determining equations given in (5.37)-(5.46) together with (5.48) give us

$$f_6 = -\frac{\varepsilon\, c_1\sqrt{1+\beta r^2}}{r} + c_2\,, \qquad f_3 = -\frac{c_1}{r} - c_1\, r\,\beta + \varepsilon\, c_2\sqrt{1+\beta\, r^2}\,,$$
$$f_5 = \frac{c_1\left(2+r^2\beta+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right) - c_2\, r\left(1+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)}{r^3}\,, \tag{5.77}$$

where c_1 and c_2 are integration constants. Introducing (5.77) back into the determining equations we get $c_1 = 0$ and then rest of the determining equations give us

$$f_1 = -\frac{c_3}{\beta}\sqrt{1+\beta\, r^2}\,, \qquad f_2 = \frac{2\hbar^2\, c_2\left(1+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)}{r^2}\,,$$
$$f_4 = \frac{c_3}{-\varepsilon+\sqrt{1+\beta\, r^2}}\,, \qquad V_0 = \hbar V_1\,. \tag{5.78}$$

Finally, for this case, we have two arbitrary constants and hence two integrals of motion. One of them is a first-order operator and corresponds to the one already found in [1] and the other is a new second-order operator. They are given as

$$X_P^1 = -\frac{1}{\beta}\sqrt{1+\beta r^2}\,(\vec{\sigma},\vec{p}) + \frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{-\varepsilon+\sqrt{1+\beta r^2}}\Big((\vec{x},\vec{p}) - i\hbar\Big)\,, \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned} X_P^2 \;&=\; \frac{2}{r^2}\left(1+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)(\vec{\sigma},\vec{x})\Big(\hbar^2 + 3i\hbar\,(\vec{x},\vec{p}) - \big(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p}\big)\Big) \\ &-\; 2i\hbar\Big(2+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\Big)(\vec{\sigma},\vec{p}) + 2\,(\vec{x},\vec{p})\,(\vec{\sigma},\vec{p}) \\ &+\; 2\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\,(\vec{\sigma},\vec{x})\,(\vec{p},\vec{p})\,. \end{aligned} \tag{5.80}$$

Also note that we obtain an obvious integral by multiplying X_P^1 by $(\vec{\sigma},\vec{L})$, however, not functionally independent of X_P^1 and X_P^2.

Case V : $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+\beta\, r^2}}\right)$, $\beta \equiv 2\lambda$

For this type of potential the set of determining equations given in (5.37)-(5.46) together with (5.48) give us

$$f_6 = -\frac{2\varepsilon\, c_1\sqrt{1+\beta r^2}}{r} + c_2\,, \qquad f_3 = -\frac{c_1}{r} - c_1\, r\,\beta + \frac{\varepsilon}{2}\, c_2\sqrt{1+\beta\, r^2}\,,$$
$$f_5 = \frac{2\, c_1\left(2 + r^2\beta + 2\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right) - c_2\, r\left(2+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)}{2\, r^3}\,, \tag{5.81}$$

where c_1 and c_2 are integration constants. Introducing (5.81) back into the determining equations we get $c_2 = 0$ and then rest of the determining equations imply

$$f_1 = 0\,, \qquad f_4 = 0\,,$$
$$f_2 = \frac{-\hbar^2 c_1\left(1+2\, r^2\beta\right)\left(1+4\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2} + 4r^2\beta\left(1+\varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\right)\right)}{2\, r^3\,(1+\beta\, r^2)^2}\,,$$
$$+\frac{r\, c_3}{1+\beta\, r^2}$$
$$V_0 = \frac{\hbar^2}{8r^2\left(1+\beta r^2\right)^2}\left(7 + 10 r^2\beta + 8\varepsilon\left(1+\beta r^2\right)^{3/2}\right) - \frac{\alpha}{4\beta(1+\beta\, r^2)}\,. \tag{5.82}$$

Finally, for this case, we have only one arbitrary constant ($c_3 = \alpha\, c_1$) and hence only one second-order operator given as

$$\begin{aligned} X_P \;=\; & \frac{-\hbar^2(1+2\beta\, r^2)\left(1+4\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2} + 4r^2\beta\left(1+\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)\right)}{2\, r^3\,(1+\beta\, r^2)^2}(\vec{\sigma},\vec{x}) \\ + \; & \frac{\alpha r}{(1+\beta\, r^2)}(\vec{\sigma},\vec{x}) \\ - \; & \frac{2i\hbar}{r^3}\left(5 + 3\beta\, r^2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta\, r^2}} + 6\,\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)(\vec{\sigma},\vec{x})\,(\vec{x},\vec{p}) \\ + \; & \frac{2i\hbar}{r}\left(1+\beta\, r^2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta\, r^2}} + 4\,\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)(\vec{\sigma},\vec{p}) \\ - \; & \frac{2}{r}(1+\beta\, r^2)\,(\vec{\sigma},\vec{x})\,(\vec{p},\vec{p}) + \frac{2}{r^3}\left(2+\beta\, r^2 + 2\,\varepsilon\sqrt{1+\beta\, r^2}\right)(\vec{\sigma},\vec{x})\left(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p}\right) \\ - \; & \frac{4\varepsilon}{r}\sqrt{1+\beta\, r^2}\,(\vec{x},\vec{p})\,(\vec{\sigma},\vec{p})\,. \end{aligned} \tag{5.83}$$

5.6 Vector integrals of motion

Let us take a linear combination of the independent vectors given in (5.14)

$$\widetilde{\vec{X}}_V = \sum_{j=1}^{15} f_j(r)\vec{V}_j\,, \tag{5.84}$$

and fully symmetrize it as described in Section 5.4. The symmetric form of (5.84) is written as

$$\begin{aligned}
\vec{X}_V \;=\; & \vec{x}\Big(2f_1 - i\hbar\,(4f_7 + \frac{f_2'}{r} + rf_7') + \big(2f_{11} - i\hbar\,(4f_{15} + \frac{f_{12}'}{r} + rf_{15}')\big)(\vec{\sigma},\vec{L})\\
+\; & \big(2f_7 - i\hbar\,(\frac{2f_5'}{r} + \frac{f_8'}{r} + 10f_{13} + 2rf_{13}')\big)(\vec{x},\vec{p})\\
+\; & 2\,\big(f_{15}\,(\vec{x},\vec{p})(\vec{\sigma},\vec{L}) + f_5\vec{p}^{\,2} + f_{13}(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p})\big)\Big)\\
+\; & \Big(2\,\big(f_2 - i\hbar\,(f_5 + 2f_8 + \frac{rf_8'}{2}) + f_{12}\,(\vec{\sigma},\vec{L}) + f_8\,(\vec{x},\vec{p})\big)\Big)\vec{p}\\
+\; & (\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,\Big(2f_3 + i\hbar\,(f_{11} - 4f_9 - \frac{f_4'}{r} - rf_9') + 2f_6\,\vec{p}^{\,2}\\
+\; & 2f_{14}\,(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p}) + \big(2f_9 - i\hbar\,(\frac{f_{10}' + 2f_6'}{r} + 2rf_{14}')\big)\,(\vec{x},\vec{p})\Big)\\
-\; & \Big(2f_4 - i\hbar\,\big(2f_6 + 4f_{10} + f_{12} + rf_{10}'\big) + 2f_{10}\,(\vec{x},\vec{p})\Big)\,(\vec{\sigma}\wedge\vec{p})\,.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

The requirement $[H,\vec{X}_V]=0$ gives us the determining equations for the vectors. The determining equations, obtained by equating the coefficients of the third-order terms to zero in the commutativity equation, are

$$\begin{aligned}
&f_5 + f_8 = 0\,, \qquad f_8' = 0\,, \qquad f_{13} = 0\,, \qquad f_{14} - f_{15} = 0\,,\\
&f_{10} + r^2 f_{14} + f_6 = 0\,, \qquad f_6' - f_{12}' = 0\,, \qquad \hbar f_{15} + 2f_6V_1 = 0\,,
\end{aligned} \tag{5.86}$$

together with the following two differential equations

$$\begin{aligned}
&\hbar\Big(f_6V_1\Big)' + 2rf_6V_1^2 = 0\,,\\
&\hbar f_6' - 2r^2\,\Big(f_6V_1\Big)' - 4rV_1\,f_6 = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.87}$$

It is obvious that $f_6 = 0$ is a solution of the system given in (5.87). For $f_6 \neq 0$, (5.87) implies a compatibility condition for V_1 which reads as

$$6\hbar r V_1^2 - 4r^3 V_1^3 + \hbar^2 V_1' = 0\,. \tag{5.88}$$

The above differential equation for V_1 had already been considered in [1]. Depending on the solutions of this equation we have several cases. The general solution is given by

$$V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right), \tag{5.89}$$

where $\varepsilon^2 = 1$. Note that $V_1 = \frac{\hbar}{r^2}$ and $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$ are special solutions with $(\varepsilon, \beta) = (1,0)$ and $(1,\infty)$, respectively. The case $V_1 = \frac{\hbar}{r^2}$ is induced by a gauge transformation had already been considered thoroughly in [1].

If we introduce the solutions (5.89) back into the system (5.87), we obtain differential equations for f_6 which can be solved. Hence, bearing in mind that $f_6 = 0$ is also a solution of the system (5.87), we have several cases to be considered separately.

5.6.1 V_1 is a solution of (5.88)

Subcase I : $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$

For this type of potential (5.87) implies $f_6 = c_1 r$. Thus, introducing this together with the relations given in (5.86) into the determining equations obtained by equating the coefficients of the second-order terms to zero in the commutativity equation we get

$$\begin{aligned} &f_2 = c_3 - r^2 f_7\,, \qquad f_4 = c_4 - r^2 f_9\,, \qquad f_7 = -\frac{c_1}{2r} + \frac{c_5}{2r^2}\,, \qquad f_8 = -c_6\,, \\ &f_9 = \frac{c_7}{r}\,, \qquad f_{11} = \frac{c_6}{2r^2} + f_9\,, \qquad f_{12} = \frac{c_1 r}{2} + r^3 f_7'\,, \qquad c_6 = 2c_4\,, \end{aligned} \tag{5.90}$$

where c_i $(i = 3, \ldots, 7)$ are integration constants.

The determining equations obtained by equating the coefficients of the first- and zeroth-order terms to zero in the commutativity equation, give us

$$c_4\Big(3\hbar^2 - 4r^3\big(2V_0' + rV_0''\big)\Big) = 0\,. \tag{5.91}$$

Hence we have two possibilities : Either $c_4 = 0$, or $3\hbar^2 - 4r^3\big(2V_0' + rV_0''\big) = 0$, which has the following solution

$$V_0 = \frac{3\hbar^2}{8r^2} - \frac{\alpha}{r}\,, \tag{5.92}$$

where α is an integration constant and we have set an irrelevant additive constant equal to zero.

$\mathbf{I}_1$: V_0 is given as in (5.92)

Upon introducing V_0 back into the determining equations coming from first- and zeroth-order terms we have

$$f_1 = \frac{c_4(2\hbar^2 - 4\alpha r) + c_7 r}{2r^2}\,, \qquad f_3 = -\frac{\hbar^2 c_3 - 2\hbar^2 c_1 r - 4c_3\alpha r}{4r^2}\,, \qquad c_5 = -c_3\,. \tag{5.93}$$

Then all the determining equations are satisfied. We have 4 arbitrary constants (c_1, c_3, c_4, c_7). Thus, we have 4 integrals of motion which read

$$\begin{aligned}
\vec{X}_V^1 &= -\big((\vec{x}\wedge\vec{\sigma}),\vec{p}\big)\,\vec{p} + \frac{3\hbar}{2}\vec{p} - \frac{\hbar\vec{x}}{2r^2}(\vec{x},\vec{p}) + \frac{i\hbar}{2}(\vec{\sigma}\wedge\vec{p}) + i\hbar^2\frac{\vec{x}}{2r^2} \\
&\quad + \frac{4\alpha r - \hbar^2}{4r^2}(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\,, &(5.94)\\
\vec{X}_V^2 &= 2\vec{x}\vec{p}^{\,2} - 2(\vec{x},\vec{p})\,\vec{p} - \frac{\hbar\vec{x}}{r^2}\big((\vec{x}\wedge\vec{\sigma}),\vec{p}\big) + 2i\hbar\vec{p} - \hbar(\vec{\sigma}\wedge\vec{p}) + i\hbar^2\frac{(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})}{2r^2} \\
&\quad + \frac{\vec{x}}{r^2}(\hbar^2 - 2\alpha r)\,, &(5.95)\\
\vec{X}_V^3 &= \frac{(\vec{x},\vec{\sigma})}{r}\vec{L} + \frac{\hbar}{2r}\big(\vec{x} - i(\vec{x}\wedge\vec{\sigma})\big)\,, &(5.96)\\
\vec{X}_V^4 &= r\vec{L}(\vec{\sigma},\vec{p}) + \frac{\hbar r}{2}\vec{p} - \frac{i\hbar r}{2}(\vec{\sigma}\wedge\vec{p}) + \vec{X}_V^3\Big(i\hbar - (\vec{x},\vec{p})\Big)\,. &(5.97)
\end{aligned}$$

However, the vector integrals of motion (5.96) and (5.97) can be written as anticommutators of the pseudoscalar integrals of motion given in (5.59) and (5.60), respectively, *i.e.*,

$$\{\vec{J}, X_P^1\} = 2\vec{X}_V^3\,, \quad \text{and} \quad \{\vec{J}, X_P^2\} = -2\vec{X}_V^4\,. \tag{5.98}$$

$\mathbf{I}_2$: V_0 unspecified, $c_4 = 0$

From the determining equations obtained by equating the coefficients of the first- and zeroth-order terms to zero in the commutativity equation, we get

$$c_5 = -c_3\,, \qquad f_1 = \frac{c_7}{2r}\,, \qquad c_3\Big(3\hbar^2 - 4r^3\big(2V_0' + rV_0''\big)\Big) = 0\,. \tag{5.99}$$

Thus, we must have $c_3 = 0$, because the other possibility gives us the previous potential for V_0. Upon introducing back all information into the determining equations we obtain

$$f_3 = \frac{c_1}{2r}\,, \tag{5.100}$$

and then all the determining equations are satisfied for arbitrary values of $V_0(r)$. We have two integrals of motion for this case which are given as in (5.96) and (5.97). It is worth noting that the commutativity condition is satisfied for arbitrary scalar potentials $V_0(r)$.

Subcase II : $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$

For this type of potential (5.87) implies $f_6 = c_2\sqrt{1+\beta r^2}$. Thus, introducing this together with the relations given in (5.86) into the determining equations obtained by equating the coefficients of the second-order terms to zero in the commutativity equation we get

$$\begin{aligned}
& f_2 = c_3 - r^2 f_7\,, \qquad f_4 = c_4 - r^2 f_{11}\,, \qquad f_8 = 0\,, \qquad f_9 = f_{11}\,, \\
& f_{11} = \frac{c_4 + \varepsilon\, c_4\sqrt{1+\beta r^2}}{r^2}\,, \\
& f_{12} = \frac{\varepsilon\, r^2(1+\beta r^2)\big(c_2\beta - 2\varepsilon(1+\beta r^2)f_7\big)}{1 + \varepsilon\sqrt{1+\beta r^2} + \beta r^2\Big(2 + \beta r^2 + 2\varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\Big)}\,,
\end{aligned} \tag{5.101}$$

where c_3 and c_4 are integration constants.

Upon introducing the relations given in (5.101) into the remaining determining equations, we have

$$f_1 = 0\,, \tag{5.102}$$

together with $c_2 = 0$ and $c_4 = 0$. However, $c_2 = 0$ reduces f_6 to zero which will be analyzed below.

5.6.2 V_1 unspecified, $f_6 = 0$

For this case let us continue to analyze the determining equations obtained by equating the coefficients of the second-order terms to zero in the commutativity equation. Introducing $f_6 = 0$ together with the relations given in (5.86) into the determining equations we obtain

$$\begin{aligned} &f_2 = c_3 - r^2 f_7\,, \qquad f_4 = c_4 - r^2 f_9\,, \qquad f_7 = f_{12}\,(V_1 + rV_1')\,, \\ &f_9 = \frac{2\hbar c_4 + \hbar f_8}{2r^2 V_1 - \hbar}\,, \qquad f_{11} = f_9 + f_8\,(V_1 + rV_1')\,, \end{aligned} \tag{5.103}$$

together with the relations

$$\begin{aligned} &2r(2c_4 + f_8)\,(2r^2V_1 - 3\hbar)\,V_1^2 + 2\Big(f_8\big(\hbar^2 + 6r^2V_1\,(r^2V_1 - \hbar)\big) - \hbar^2 c_4\Big)\,V_1' \\ &+ r f_8(\hbar - 2r^2V_1)^2\,V_1'' = 0\,, \\ &2r(2c_4 + f_8)\,(2r^2V_1 - 3\hbar)\,V_1^2 - 2\Big(f_8\big(2\hbar^2 + 6r^2V_1\,(r^2V_1 - \hbar)\big) + \hbar^2 c_4\Big)\,V_1' \\ &- r f_8(\hbar - 2r^2V_1)^2\,V_1'' = 0\,, \\ &(2c_4 + f_8)\,(-6\hbar r V_1^2 + 4r^3V_1^3 - \hbar^2 V_1') = 0\,, \\ &f_{12}\,(3V_1' + rV_1'') + f_{12}'\,(V_1 + rV_1') = 0\,, \\ &f_8\,(3V_1' + rV_1'') = 0\,. \end{aligned} \tag{5.104}$$

Here c_3 and c_4 are arbitrary constants of integration. From the system (5.104) we have 4 subcases.

Subcase I : $f_8 = -2c_4\,, \quad f_{12} = c_7\,, \quad 3V_1' + rV_1'' = 0$, which implies

$$V_1 = \frac{\alpha}{2r^2} + \beta\,. \tag{5.105}$$

This is a new spin-orbital potential.

When we introduce all the information we have found up to now into the remaining determining equations, we get

$$c_4\left(\alpha^2 - \left(4\beta\, r^2(\beta\, r^2 - \hbar)\right)\right) + r^2\left(2\hbar^2 f_1 + 4\, c_4 r V_0'\right) = 0\,, \tag{5.106}$$

$$c_7 = c_3\,, \qquad c_4\left(4\, r V_0'' + 8V_0' - 12\,\beta^2 r - \frac{\alpha(\alpha + 2\hbar)}{r^3}\right) = 0\,. \tag{5.107}$$

From equation (5.107) it is immediately seen that

$$4\, r V_0'' + 8V_0' - 12\,\beta^2 r - \frac{\alpha(\alpha + 2\hbar)}{r^3} = 0\,, \tag{5.108}$$

because the other possibility $c_4 = 0$, either gives us the known potentials ($V_1 = \frac{\hbar}{r^2}$ and $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$) or reduces the number of the integral of motions. The solution of (5.108) is given as

$$V_0 = \frac{\alpha(\alpha + 2\hbar) + 4\beta^2\, r^4 - 8r\gamma}{8\, r^2}\,, \tag{5.109}$$

where γ is an integration constant. Then, introducing back the solution given in (5.109) into the remaining determining equations, we obtain

$$f_1 = \frac{2\, c_4\left(\hbar\alpha - 2\, r\,(\gamma + \hbar\beta r)\right)}{2r^2}\,, \qquad f_3 = \frac{c_3\left(4r(\gamma + \beta^2 r^3) - \alpha^2\right)}{4\, r^2\,(\alpha + 2\beta r^2)}\,, \quad \gamma = 0\,. \tag{5.110}$$

For these values of f_j, $(j = 1, \ldots, 15)$ all the determining equations are satisfied for the potentials (5.105) and (5.109). We have two arbitrary constants, and hence we have two different integrals of motion. They are given as

$$\vec{X}_V^1 = \vec{x}\left(2\vec{p}^2 - \left(\frac{2\beta r^2-\alpha}{r^2}\right)\left((\vec{\sigma},\vec{L})+\hbar\right)\right) + 2\left(i\hbar - (\vec{x},\vec{p})\right)\vec{p} - \hbar(\vec{\sigma}\wedge\vec{p})$$
$$+i\hbar\left(\frac{2\beta r^2-\alpha}{2r^2}\right)(\vec{\sigma}\wedge\vec{x}), \tag{5.111}$$
$$\vec{X}_V^2 = \left(\frac{1}{2}(2\hbar+\alpha-2\beta r^2) + \left(\vec{\sigma},\vec{L}\right)\right)\vec{p} + \frac{\vec{x}}{2}\left(\frac{2\beta r^2-\alpha}{r^2}\right)\left((\vec{x},\vec{p})-i\hbar\right) + \frac{i\hbar}{2}(\vec{\sigma}\wedge\vec{p})$$
$$-\frac{\hbar}{4}\left(\frac{2\beta r^2-\alpha}{r^2}\right)(\vec{\sigma}\wedge\vec{x}). \tag{5.112}$$

Subcase II : $f_8 = 0\,, \quad f_{12} = 0\,, \quad 6\hbar r V_1^2 - 4r^3V_1^3 + \hbar^2 V_1' = 0\,.$

In this subcase depending on the solutions of (5.88) we have two possibilities.

$\mathbf{II}_1$ **:** $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$

Since for this type of potential f_9 in (5.103) becomes undefined, we need to analyze this case from the beginning. Analysis of the determining equations obtained by equating the coefficients of the second-order terms to zero in the commutativity equation gives

$$f_2 = c_3\,, \qquad f_4 = -r^2 f_9\,, \qquad f_7 = 0\,, \qquad f_{11} = f_9\,, \qquad f_9 = \frac{c_4}{r}\,, \tag{5.113}$$

where c_3 and c_4 are integration constants. For this case we already have $f_8 = 0$ and $f_{12} = 0$. From the other determining equations, we have

$$f_1 = \frac{c_4}{2r}\,, \qquad f_3 = 0\,, \qquad c_3 = 0\,. \tag{5.114}$$

All the determining equations are satisfied for arbitrary potentials $V_0(r)$ and since we have only one arbitrary constant, namely c_4, there is only one integral of motion for this case. It is given by the equation (5.96) and is first-order in the momenta.

$\mathbf{II}_2$ **:** $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$

Upon introducing all the information we have gathered so far into the determining equations obtained from equating the first- and zeroth-order terms to zero in the commutativity equation we find

$$f_1 = \frac{c_4}{2r^2}\left(2+\varepsilon\frac{2+\beta r^2(4+\beta r^2)}{(1+\beta r^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \qquad f_3 = -\frac{c_3\left(1+\varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\right)}{2r^2}. \quad (5.115)$$

If we introduce the above values of f_1 and f_3 back into the determining equations we see that we must have $c_3 = 0$ and $c_4 = 0$. Then all the determining equations are satisfied. Hence, we do not have any integral of motion for this case except the obvious one which is the anticommutator of the pseudoscalar integral of motion (5.79) with $\vec{J}$, namely ;

$$\vec{X}_V = \{X_P^1, \vec{J}\}. \quad (5.116)$$

Subcase III :

In this subcase we have $f_8 = 0$, $c_4 = 0$ and $f_{12} = 0$. Upon introducing this information into the determining equations obtained from the first- and zeroth-order terms in the commutativity equation we have

$$f_1 = 0, \qquad f_3 = \frac{c_3 V_1'}{2rV_1}, \qquad V_1 = \frac{\hbar+\varepsilon\hbar\sqrt{1+4Cr^2}}{2r^2}, \quad (5.117)$$

where C is an integration constant. Now if we introduce these back into the determining equations we see that we either have $c_3 = 0$ or $C = 0$. If $c_3 = 0$ we have no integral of motion since c_4 is already zero. If $C = 0$ then we have $V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}$ which has been investigated thoroughly. Hence, we conclude that no new information is obtained from this case.

Subcase IV :

$$f_{12}\,(3V_1' + rV_1'') + f_{12}'\,(V_1 + rV_1') = 0 \quad (5.118)$$

If we solve the above equation for f_{12} and introduce back into the determining equations obtained from first- and zeroth-order terms in the commutativity equation we have

$$V_1(V_1 + rV_1')(3V_1' + rV_1'')\,f_{12}'' = 0. \quad (5.119)$$

Thus we either have $V_1 + rV_1' = 0$ or $f_{12}'' = 0$. The other choice $3V_1' + rV_1'' = 0$ has already been investigated.

$V_1 + rV_1' = 0$ implies $V_1 = \frac{C}{r}$, where C is an integration constant. Then (5.118) becomes

$$C\frac{f_{12}}{r^2} = 0\,. \tag{5.120}$$

Hence, we either have $C = 0$ but then $V_1 = 0$ or $f_{12} = 0$ which has been investigated in the previous case.

The condition $f_{12}'' = 0$ implies

$$f_{12} = c_{10}r + c_{11}\,, \tag{5.121}$$

where c_{10} and c_{11} are integration constants. Introducing this back into the determining equations we see that we have $c_{10} = 0$ and then (5.118) becomes

$$c_{11}(3V_1' + rV_1'') = 0\,. \tag{5.122}$$

The two cases $c_{11} = 0$ and $3V_1' + rV_1'' = 0$ have been previously investigated.

Hence, we conclude that no new information is obtained from this case.

5.7 Axial vector integrals of motion

Let us take a linear combination of the axial vectors given in (5.15)

$$\widetilde{\vec{X}}_A = \sum_{j=1}^{15} f_j(r)\vec{A}_j\,, \tag{5.123}$$

and fully symmetrize it as described in Section 5.4. The symmetric form of (5.123) is

$$
\begin{aligned}
\vec{X}_A \;=\;& \Big((\vec{\sigma},\vec{x})\big(2f_{11} - i\hbar(2f_{12} + f_6 + \frac{1}{r}f_9')\big) + 2f_9(\vec{\sigma},\vec{p})\Big)\vec{p} \\
+\;& \Big(2f_2 - i\hbar(5f_5 + rf_5') + 2f_5(\vec{x},\vec{p}) + 2f_6(\vec{L},\vec{\sigma})\Big)\vec{L} \\
+\;& \vec{\sigma}\Big(2f_1 - i\hbar\big(f_{11} + 3f_4 + f_8 + rf_4'\big) \\
+\;& \big(2f_4 - i\hbar\big(f_{15} - 2f_6 + 8f_7 + \frac{2}{r}f_3' + 2rf_7'\big)\big)(\vec{x},\vec{p}) + 2f_7(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p}) + 2f_3\vec{p}^{\,2}\Big) \\
+\;& \vec{x}\Big((\vec{\sigma},\vec{x})\big(2f_{10} - i\hbar\big(5f_{13} + \frac{1}{r}(f_8' + f_{11}') + rf_{13}'\big) + 2f_{12}\vec{p}^{\,2} + 2f_{14}(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p})\big) \\
+\;& \big(2f_8 - i\hbar\big(2f_{12} + 5f_{15} + f_6 + \frac{1}{r}f_9' + rf_{15}'\big)\big)(\vec{\sigma},\vec{p}) \\
+\;& \big(2f_{13} - i\hbar\big(12f_{14} + \frac{1}{r}(2f_{12}' + f_{15}') + 2rf_{14}'\big)\big)(\vec{\sigma},\vec{x})(\vec{x},\vec{p}) \\
+\;& 2f_{15}(\vec{x},\vec{p})(\vec{\sigma},\vec{p})\Big)\,.
\end{aligned} \tag{5.124}
$$

The determining equations obtained by equating the coefficients of the third-order terms to zero in the commutativity equation are

$$f_5 = 0\,, \tag{5.125}$$

$$2rf_7 + f_3' + r^2 f_7' = 0\,, \tag{5.126}$$

$$2rf_7 + f_3' + r^2 f_6' = 0\,, \tag{5.127}$$

$$\hbar f_{12} + 2(f_9 + f_3)V_1 = 0\,, \tag{5.128}$$

$$2f_3V_1 + 2r^2 f_7 V_1 - (f_{15} + f_{12} + r^2 f_{14})(\hbar - 2r^2V_1) - \hbar r(f_{15}' + f_6') = 0\,, \tag{5.129}$$

$$2rf_{14}V_1 + \hbar f_{14}' = 0\,, \tag{5.130}$$

$$\hbar f_{12}' + r(3\hbar f_{14} + 2(f_{12} + f_{15} + f_7)V_1) = 0\,, \tag{5.131}$$

$$\hbar f_9' + r(\hbar f_{12} + \hbar f_{15} + 2f_3V_1 - \hbar r f_6') = 0\,, \tag{5.132}$$

$$\hbar f_{12} + 2(f_9 + f_3)V_1 + r(\hbar r f_{14} + 2rf_7V_1 + \hbar f_6') = 0\,, \tag{5.133}$$

$$2r(f_{15} + r^2 f_{14} + 2f_7)V_1 - \hbar f_{15}' = 0\,. \tag{5.134}$$

Equation (5.126) can be integrated to give

$$f_3 = -r^2 f_7 - c_1 \,, \tag{5.135}$$

where c_1 is a real constant. Introducing (5.135) into equation (5.127) and integrating, we get

$$f_7 = f_6 + c_2 \,, \tag{5.136}$$

where c_2 is an integration constant. We also solve (5.128) for f_{12}

$$\hbar f_{12} = 2(c_1 - f_9 + c_2 r^2 + f_6 r^2) V_1 \,. \tag{5.137}$$

With the obtained knowledge in equations (5.135)-(5.137) we solve algebraically for derivatives of the functions. Equations (5.126)-(5.134) are then satisfied for arbitrary values of $V_1(r)$.

Satisfying the determining equations, obtained by equating the coefficients of the third-order terms to zero in the commutativity equation, for arbitrary values of $V_1(r)$ we continue with the determining equations, obtained by equating the coefficients of the second-order terms to zero in the commutativity equation. We note that four of the second-order determining equations involve only the functions f_4, f_8, f_{11} and f_{13} :

$$\begin{aligned} &f_4 = 0 \,, \quad (f_{11} - f_8) V_1 = 0 \,, \quad \hbar(f_{11} + f_4 + f_8) - 2r^2 V_1 f_{11} = 0 \,, \\ &\hbar f_{11}' + \hbar r f_{13} + 2r V_1 (f_{11} + f_4) = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.138}$$

They immediately imply that

$$f_4 = 0 \,, \quad f_8 = 0 \,, \quad f_{11} = 0 \,, \quad f_{13} = 0 \,, \tag{5.139}$$

which greatly simplifies the rest of the analysis.

The complete set of determining equations is too long to present here. Instead, we present a nonlinear equation for V_1 which is obtained as a compatibility condition for f_6 in the analysis. Different solutions of this condition will form the different cases to be analyzed separately in which the full set of determining equations are fully investigated. The compatibility condition reads as

$$c_1 \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_3} = 0\,, \tag{5.140}$$

where

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= -20\hbar^2 r^4 V_1' V_1^3 - 60\hbar^2 r^3 V_1^4 + 16 r^7 V_1^6 - 5\hbar^4 r V_1'^2 - 3\hbar^4 V_1 (V_1' - r V_1'')\,,\\
\Gamma_2 &= 3\hbar^5 V_1' + r\Big(-3\hbar^4 V_1''(\hbar - r^2 V_1) + \hbar^2 r \big(V_1 V_1' (-\hbar^2 63 + 20 r^2 V_1 (3\hbar - r^2 V_1))\\
&\quad - \ 5\hbar^4 r V_1'^2 + 4 r V_1^3 (-30\hbar^3 + r^2 V_1 (45\hbar^2 - 4 r^2 V_1 (6\hbar - r^2 V_1))))\Big)\,,\\
\Gamma_3 &= -3\hbar^4 r^2 V_1'' \big(2V_1 (3\hbar^2 - 6\hbar r^2 V_1 + 4 r^4 V_1^2) + \hbar^2 r V_1'\big) + 6r\Big(\hbar^2 V_1 V_1' \big(3\hbar^4\\
&\quad + \ 4 r^2 V_1 (-9\hbar^3 + 2 r^2 V_1 (3\hbar^2 + r^2 V_1 (5\hbar - 2 r^2 V_1)))\big) + 2 r^3 V_1^4 \big(-15\hbar^4\\
&\quad + \ 8 r^4 V_1^2 (9\hbar^2 - 2 r^2 V_1 (4\hbar - r^2 V_1))\big)\\
&\quad + \ \hbar^4 r V_1'^2 \big(3\hbar^2 - 20 r^2 V_1 (\hbar - r^2 V_1)\big)\Big)\,.
\end{aligned} \tag{5.141}$$

The compatibility condition (5.140) is satisfied if $c_1 = 0$ or $\Gamma_1 = 0$ or $\Gamma_2 = 0$. For $\Gamma_1 = 0$ or $\Gamma_2 = 0$ a standard symmetry analysis is performed in a similar fashion as for equation (5.49) and we find invariant solutions for V_1.

The symmetry algebra for $\Gamma_1 = 0$ is spanned by two vector fields

$$\vec{v}_1 = r\partial_r - 2V_1 \partial_{V_1}\,, \qquad \vec{v}_2 = r^3 \partial_r - 3r^2 V_1 \partial_{V_1}\,, \tag{5.142}$$

with $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = 2\vec{v}_2$. The invariant spin-orbit potentials are respectively

$$V_1 = \frac{C_1}{r^2} \qquad \text{and} \qquad V_1 = \frac{C_2}{r^3}\,, \tag{5.143}$$

where C_1 and C_2 are integration constants and only for the following values

$$C_1 = \Big\{ -\hbar, -\frac{\hbar}{2}, 0, \frac{\hbar}{2}, \hbar \Big\}\,, \qquad \text{and} \qquad C_2 = \big\{0\big\}\,, \tag{5.144}$$

these two invariants are also solutions of $\Gamma_1 = 0$. Thus these values of the constants C_1 and C_2 give us the special solutions. The group transformations generated by $\vec{v}_2$ are

$$\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{1-2\lambda r^2}}\,, \qquad \widetilde{V}_1 = V_1(1-2\lambda r^2)^{\frac{3}{2}}\,, \qquad |\lambda| < \frac{1}{2r^2}\,. \tag{5.145}$$

Upon introducing the value of V_1 in the equation (5.145), $\widetilde{V}_1$ becomes

$$\widetilde{V}_1 = \frac{C_1}{\tilde{r}^2}\Big(\frac{1}{1+2\lambda\tilde{r}^2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.146}$$

New special solutions of $\Gamma_1 = 0$ can be obtained from its known solutions, say $V_1 = \frac{C_1}{r^2}$ with the constant C_1 taking values from the set given in (5.144), since $\widetilde{V}_1(\tilde{r})$ is also a solution if $V_1(r)$ is. Hence, we have the following solutions

$$C_1 = -\hbar \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = -\frac{\hbar}{\tilde{r}^2}\Big(\frac{1}{1+2\lambda\tilde{r}^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{5.147}$$

$$C_1 = -\frac{\hbar}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = -\frac{\hbar}{2\tilde{r}^2}\Big(\frac{1}{1+2\lambda\tilde{r}^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{5.148}$$

$$C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = 0\,, \tag{5.149}$$

$$C_1 = \frac{\hbar}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{2\tilde{r}^2}\Big(\frac{1}{1+2\lambda\tilde{r}^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{5.150}$$

$$C_1 = \hbar \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{\tilde{r}^2}\Big(\frac{1}{1+2\lambda\tilde{r}^2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.151}$$

Together with the four solutions obtained from $V_1 = \frac{C_1}{r^2}$ with the constant C_1 taking values from the set given in (5.144), we have eight different type of potentials V_1 for $\Gamma_1 = 0$.

The symmetry algebra for $\Gamma_2 = 0$ is spanned by two vector fields

$$\vec{v}_1 = r\partial_r - 2V_1\partial_{V_1}\,, \qquad \vec{v}_2 = r^3\partial_r + (\hbar - 3r^2V_1)\partial_{V_1}\,, \tag{5.152}$$

with $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = 2\vec{v}_2$. The invariants are

$$V_1 = \frac{C_1}{r^2} \qquad \text{and} \qquad V_1 = \frac{C_2}{r^3} + \frac{\hbar}{r^2}\,, \tag{5.153}$$

where C_1 and C_2 are integration constants and only for the following values

$$C_1 = \left\{0, \frac{\hbar}{2}, \hbar, \frac{3\hbar}{2}, 2\hbar\right\}, \qquad \text{and} \qquad C_2 = \left\{0\right\}, \tag{5.154}$$

these two invariants are also solutions of $\Gamma_2 = 0$. Thus these values of the constants C_1 and C_2 give us the special solutions. The group transformations induced by $\vec{v}_2$ are

$$\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{1-2\lambda r^2}}, \quad \widetilde{V}_1 = \frac{1-2\lambda r^2}{r^2}\Big(\hbar + (\hbar - r^2 V_1)\sqrt{1-2\lambda r^2}\Big), \quad |\lambda| < \frac{1}{2r^2}. \tag{5.155}$$

Upon introducing the value of V_1 in the equation (5.155), $\widetilde{V}_1$ becomes

$$\widetilde{V}_1 = \frac{1}{\tilde{r}^2}\left(\hbar + (\hbar - C_1)\sqrt{\frac{1}{1+2\lambda\tilde{r}^2}}\right). \tag{5.156}$$

New special solutions of $\Gamma_2 = 0$ can be obtained from its known solutions, say $V_1 = \frac{C_1}{r^2}$ with the constant C_1 taking values from the set given in (5.154), since $\widetilde{V}_1(\tilde{r})$ is also a solution if $V_1(r)$ is. Hence, we have the following solutions

$$C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{\tilde{r}^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda\tilde{r}^2}}\right), \tag{5.157}$$

$$C_1 = \frac{\hbar}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{2\tilde{r}^2}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda\tilde{r}^2}}\right), \tag{5.158}$$

$$C_1 = \hbar \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{\tilde{r}^2}, \tag{5.159}$$

$$C_1 = \frac{3\hbar}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{2\tilde{r}^2}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda\tilde{r}^2}}\right), \tag{5.160}$$

$$C_1 = 2\hbar \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{V}_1 = \frac{\hbar}{\tilde{r}^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda\tilde{r}^2}}\right). \tag{5.161}$$

Together with the two new solutions of the form $V_1 = \frac{C_1}{r^2}$, we have six different type of potentials V_1 for this case.

Finally, if we consider the simultaneous solutions of $\Gamma_1 = 0$ and $\Gamma_2 = 0$ by substituting V_1'' from $\Gamma_1 = 0$ in $\Gamma_2 = 0$, we obtain

$$6\hbar r V_1^2 - 4r^3 V_1^3 + \hbar^2 V_1' = 0. \tag{5.162}$$

Solving this equation provides us with two new potentials

$$V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right), \qquad \varepsilon^2 = 1\,, \tag{5.163}$$

where β is a constant of integration.

Although we have 16 different type of potentials which satisfy the compatibility condition (5.140), we note that for the following potentials

$$\begin{gathered} V_1 = \frac{\varepsilon\hbar}{2r^2}\,, \qquad V_1 = \frac{3\hbar}{2r^2}\,, \qquad V_1 = \frac{\varepsilon\hbar}{2r^2\sqrt{1+2\lambda r^2}}\,, \\ V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+2\lambda r^2}}\right), \qquad V_1 = \frac{\hbar}{2r^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right), \end{gathered} \tag{5.164}$$

Γ_3 becomes identically zero. Hence we do not consider these potentials in the rest of the analysis. Indeed if we consider them and start the investigation of the determining equations from the very beginning the analysis gives $c_1 = 0$. This possibility will be analyzed separately. Thus, excluding the potentials given in (5.164) as well as the potential $V_1 = \frac{\hbar}{r^2}$, which is a gauge induced one and was completely investigated in [1], we now investigate the following five cases separately.

Case I : $c_1 = 0$

For $c_1 = 0$ the third-order determining equations (5.126)-(5.134) are satisfied by

$$f_7 = 0\,, \quad f_9 = 0\,, \quad f_{12} = 0\,, \quad f_{14} = 0\,, \quad f_{15} = 0\,, \tag{5.165}$$

together with equations (5.135) and (5.136). Then the determining equations, obtained from lower order terms, provide us with

$$f_1 = c_3\,, \qquad f_2 = c_4\,, \qquad f_{10} = 0\,, \qquad c_4 = 2c_3 - \frac{c_2}{2}\,, \tag{5.166}$$

where c_3 and c_4 are integration constants. For these values of f_j, all the determining equations, obtained from the requirement that the commutator $[H,\vec{X}_A]=0$, are satisfied for any $V_0=V_0(r)$ and $V_1=V_1(r)$. Since we have two arbitrary constants and none of them are appeared in the Hamiltonian we have the following integrals of motion

$$\begin{aligned}
\vec{X}_A^1 &= i\hbar\Big((\vec{\sigma},\vec{x})\,\vec{p}+\vec{x}\,(\vec{\sigma},\vec{p})\Big)-\hbar\vec{L}-2(\vec{\sigma},\vec{L})\vec{L}-2i\hbar\vec{\sigma}\,(\vec{x},\vec{p}) \\
&= \{(\vec{\sigma},\vec{L}),\vec{J}\}\,, \qquad (5.167)\\
\vec{X}_A^2 &= 4\vec{L}+2\hbar\vec{\sigma}=4\vec{J}. \qquad (5.168)
\end{aligned}$$

They are however both trivial since $\vec{J}$ and $(\vec{\sigma},\vec{L})$ are in the set (5.5). From here on, we shall list only nontrivial integrals.

Case II : $V_1=-\frac{\hbar}{r^2}$

For this type of potential, the set of determining equations given in (5.126)-(5.134), is satisfied by

$$f_6=-c_2\,,\qquad f_9=2c_1\,,\qquad f_{14}=0\,,\qquad f_{15}=-\frac{4c_1}{r^2}\,, \qquad (5.169)$$

together with the equations given in (5.135)-(5.137). Here, c_1 and c_2 are integration constants. If we introduce these integrals of motion into the set of all determining equations, we get

$$f_2=c_3\,,\qquad f_{10}=0\,,\qquad f_1=\frac{c_2}{4}+\frac{c_3}{2}+c_4r^2\,, \qquad (5.170)$$

where c_3 and c_4 are integration constants. Upon introducing all the information obtained so far back into the determining equations we find

$$V_0=\alpha r^2\,, \qquad (5.171)$$

with $\alpha=-\frac{c_4}{2c_1}$. Hence, the integral of motion $\vec{X}_A$ depends on three constants c_1, c_2 and

c_3. The nontrivial integral of motion for this case can be written

$$\begin{aligned}\vec{X}_A &= -\big(2\alpha r^2+\vec{p}^{\,2}\big)\vec{\sigma}+2(\vec{\sigma},\vec{p})\vec{p} \\ &+ \frac{2}{r^2}\Bigg(\vec{x}\Big((\vec{\sigma},\vec{x})\,\vec{p}^{\,2}+2i\hbar(\vec{\sigma},\vec{p})-2(\vec{x},\vec{p})(\vec{\sigma},\vec{p})\Big)+i\hbar\big(\vec{\sigma}(\vec{x},\vec{p}) \\ &- (\vec{\sigma},\vec{x})\vec{p}\big)\Bigg).\end{aligned} \tag{5.172}$$

Case III : $V_1=\frac{2\hbar}{r^2}$

For this type of potential, the set of determining equations given in (5.126)-(5.134), is satisfied by

$$f_6=-\frac{4c_1}{r^2}-c_2\,,\qquad f_9=-2c_1\,,\qquad f_{14}=\frac{8c_1}{r^4}\,,\qquad f_{15}=0\,, \tag{5.173}$$

together with the equations given in (5.135)-(5.137). Here, c_1 and c_2 are integration constants. If we introduce these integrals of motion into the set of determining equations, obtained from lower order terms, we get

$$f_2=-\frac{4c_1}{r^2}+c_3\,,\qquad f_{10}=-\frac{6c_1}{r^4}+c_4\,,\qquad f_1=\frac{c_2}{4}+\frac{c_3}{2}-\frac{c_4}{2}r^2\,, \tag{5.174}$$

where c_3 and c_4 are integration constants. Upon introducing all the information obtained so far back into the determining equations we find

$$V_0=\frac{3\hbar^2}{r^2}+\alpha r^2\,, \tag{5.175}$$

with $\alpha=\frac{c_4}{4c_1}$. Hence, again the integral of motion $\vec{X}_A$ depends on three constants c_1, c_2

and c_3. Two of the integrals of motion are trivial and the third one is

$$\begin{aligned}\vec{X}_A &= \left(3\vec{p}^{\,2} - 2\alpha r^2 + \frac{4}{r^2}\left(i\hbar(\vec{x},\vec{p}) - (\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p})\right)\right)\vec{\sigma} - \frac{2}{r^2}\left(\hbar + (\vec{L},\vec{\sigma})\right)\vec{L} \\ &- 2\left((\vec{\sigma},\vec{p}) - \frac{3i\hbar(\vec{\sigma},\vec{x})}{r^2}\right)\vec{p} + \frac{2\vec{x}}{r^4}\left(3i\hbar r^2(\vec{\sigma},\vec{p})\right. \\ &- \left.(\vec{\sigma},\vec{x})\left(3h^2 - 2r^4\alpha + 2r^2\vec{p}^{\,2} + 12i\hbar(\vec{x},\vec{p})\right) - 4(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p})\right). \end{aligned} \tag{5.176}$$

Case IV : $V_1 = \frac{\varepsilon\hbar}{r^2\sqrt{1+\beta r^2}}$, $\beta \equiv 2\lambda$, $\varepsilon^2 = 1$

For this type of potential, the set of determining equations given in (5.126)-(5.134), is satisfied by

$$\begin{aligned} &f_6 = -c_2 - \frac{2c_1}{r^2}\left(1 + \frac{\beta}{2}r^2 + \varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\right), \quad f_9 = -2\varepsilon c_1\sqrt{1+\beta r^2}, \\ &f_{14} = 0, \quad f_{15} = \frac{4\varepsilon c_1\sqrt{1+\beta r^2}}{r^2}, \end{aligned} \tag{5.177}$$

together with the equations given in (5.135)-(5.137). Here, c_1 and c_2 are integration constants. If we introduce these integrals of motion into the set of determining equations, obtained from lower order terms, we get

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{4r^2}\left(1 + \frac{3}{(1+\beta r^2)^2} - \frac{8\left(1+\alpha r^2\right)}{1+\beta r^2} - \frac{4\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right), \\ f_2 &= c_3 - \frac{2c_1}{r^2}\left(1 + 2\alpha r^2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right), \qquad f_{10} = 0, \end{aligned} \tag{5.178}$$

where c_3 and α are integration constants. Upon introducing all the information obtained so far back into the determining equations we find

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{8r^2\left(1+\beta r^2\right)^2}\left(4 + 6\beta r^2 - r^4\beta^2 + 4\varepsilon\left(1+\beta r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{\alpha}{1+\beta r^2}, \tag{5.179}$$

Hence, again the integral of motion $\vec{X}_A$ depends on three constants c_1, c_2 and c_3. The only nontrivial integral of motion is

$$\begin{aligned}
\vec{X}_A &= \left(2i\hbar\frac{(\vec{\sigma},\vec{x})}{r^2}Q_+ - 4\varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\,(\vec{\sigma},\vec{p})\right)\vec{p} \\
&- \frac{4}{r^2}\left(\hbar + 2\alpha r^2 + \frac{\varepsilon\hbar}{\sqrt{1+\beta r^2}} + q(\vec{\sigma},\vec{L})\right)\vec{L} \\
&+ \frac{\vec{\sigma}}{2r^2}\left(Y + 8i\hbar\left(1+\frac{\beta}{2}r^2\right)(\vec{x},\vec{p}) - 8q(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p}) + 4r^2\,(2q-1)\,\vec{p}^{\,2}\right) \\
&+ \frac{2\vec{x}}{r^2}\left(\left(i\hbar Q_- + 4\varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}(\vec{x},\vec{p})\right)(\vec{\sigma},\vec{p}) - 2\varepsilon(\vec{\sigma},\vec{x})\sqrt{1+\beta r^2}\vec{p}^{\,2}\right) \qquad (5.180)
\end{aligned}$$

where $Q_\pm$, q and Y are given by the following relations

$$Q_\pm = 1+\frac{\beta}{2}r^2 \pm \varepsilon\frac{3+4\beta r^2}{\sqrt{1+\beta r^2}}\,, \qquad q = 1+\frac{\beta}{2}r^2 + \varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\,, \qquad (5.181)$$

$$Y = \frac{-4\hbar^2 - 8r^2\alpha - 6\hbar^2 r^2\beta - 8r^4\alpha\beta + \hbar^2 r^4\beta^2}{(1+\beta r^2)^2} - \frac{4\varepsilon\hbar^2}{\sqrt{1+\beta r^2}}\,. \qquad (5.182)$$

Case V : $V_1 = \frac{\hbar}{r^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$, $\beta \equiv 2\lambda$, $\varepsilon^2 = 1$

For this type of potential, the set of determining equations given in (5.126)-(5.134), is satisfied by

$$\begin{aligned}
f_6 &= -c_2 - \frac{2c_1}{r^4}\left(1+\frac{\beta}{2}r^2 + \varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\right), \qquad f_9 = -2\varepsilon\, c_1\sqrt{1+\beta r^2}\,, \\
f_{14} &= \frac{4c_1}{r^4}\left(1+\frac{\beta}{2}r^2 + \varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\right), \qquad f_{15} = 0\,, \qquad (5.183)
\end{aligned}$$

together with the equations given in (5.135)-(5.137). Here, c_1 and c_2 are integration constants. If we introduce these integrals of motion into the set of determining equations, obtained from lower order terms, we get

$$f_1 = \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{2} - c_1 \left(\frac{r^2 \left(4\alpha - 6\beta^2\right) + r^4 \left(3\beta^3 + 4\beta\alpha\right) - 6\beta}{4\left(1+\beta r^2\right)^2} - \frac{2\varepsilon\beta}{\sqrt{1+\beta r^2}} \right),$$
$$f_2 = c_3 - \frac{2c_1}{r^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}} \right),$$
$$f_{10} = -\frac{c_1}{r^4} \left(9 + \frac{3}{2\left(1+\beta r^2\right)^2} - \frac{15 + 4r^4\alpha}{2\left(1+\beta r^2\right)} + \frac{3\varepsilon\left(1+2\beta r^2\right)}{\sqrt{1+\beta r^2}} \right), \tag{5.184}$$

where c_3 and α are integration constants. Upon introducing all the information obtained so far back into the determining equations we find

$$V_0 = \frac{3\hbar^2 \left(4 + 5\beta r^2 + 4\varepsilon\left(1+\beta r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right)}{8r^2\left(1+\beta r^2\right)^2} - \frac{\alpha}{2\beta\left(1+\beta r^2\right)}. \tag{5.185}$$

Hence, again the integral of motion $\vec{X}_A$ depends on three constants c_1, c_2 and c_3. The only nontrivial integral of motion is

$$\begin{aligned}
\vec{X}_A \;\; = \;\; & \left(\frac{2i\hbar^2(\vec{\sigma},\vec{x})}{r^2} \widetilde{Q} - 4\varepsilon\sqrt{1+\beta r^2}\,(\vec{\sigma},\vec{p}) \right) \vec{p} - \frac{4}{r^2} \left(\hbar + \frac{\varepsilon\hbar}{\sqrt{1+\beta r^2}} + q(\vec{\sigma},\vec{L}) \right) \vec{L} \\
+ \;\; & \frac{2\vec{\sigma}}{r^2} \left(2i\hbar q(\vec{x},\vec{p}) - \widetilde{Y} - 2q(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p}) + r^2\left(2q-1\right)\vec{p}^{\,2} \right) \\
+ \;\; & \frac{2\vec{x}}{r^4} \Bigg((\vec{\sigma},\vec{x}) \Big(4q(\vec{x},(\vec{x},\vec{p})\vec{p}) - 2r^2 \left(2q - 1 - \varepsilon\sqrt{1+\beta r^2} \right) \vec{p}^{\,2} \\
- \;\; & Z - 4i\hbar W(\vec{x},\vec{p}) \Big) + i\hbar\widetilde{Q}(\vec{\sigma},\vec{p}) \Bigg),
\end{aligned} \tag{5.186}$$

where q is given in (5.181) and $\widetilde{Q}$, $\widetilde{Y}$, Z and W are given by the following relations

$$\widetilde{Q} = 3 + \frac{5\beta}{2} r^2 + \varepsilon \frac{3 + 4\beta r^2}{\sqrt{1+\beta r^2}}, \qquad W = 3 + 2\beta r^2 + \varepsilon \frac{6 + 7\beta r^2}{2\sqrt{1+\beta r^2}}, \tag{5.187}$$

$$\widetilde{Y} = \frac{\hbar^2 r^4(4\alpha - 6\beta^2) + \hbar^2 r^6(3\beta^3 + 4\beta\alpha) - 6\hbar^2\beta r^2}{4(1+\beta r^2)^2} + \frac{2\varepsilon\hbar^2\beta r^2}{\sqrt{1+\beta r^2}}, \tag{5.188}$$

$$Z = \frac{-4r^4\alpha(1+\beta r^2) + 3\hbar^2\left(2 + \beta r^2(7 + 6\beta r^2)\right)}{2(1+\beta r^2)^2} + \varepsilon \frac{3\hbar^2(1+2\beta r^2)}{\sqrt{1+\beta r^2}}. \tag{5.189}$$

5.8 Conclusions

The main results of this article are summed up in Table 1. We list all potentials $V_0(r)$ and $V_1(r)$ that have at least one integral of motion in addition to the "trivial" ones, *i.e.* those that exist for all $V_0(r)$ and $V_1(r)$ (see equation (5.5)). We have included the obvious integrals obtained by multiplying a lower-order integral by the trivial ones.

The results are ordered according to the value of $V_1(r)$ (in column 2). In column 3, $V_0(r)$ denotes an arbitrary function. Throughout, α and β are real arbitrary constants, and we have $\varepsilon = \pm 1$. The nontrivial pseudoscalar, vector and axial vector integrals are listed in columns 4,5 and 6. We have included integrals of order 0 and 1 (in the momenta) already found in [1]. Indeed, the potentials in row 1 are first order superintegrable.

We mention that the nonlinear ordinary differential equations (5.49) and $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$ with Γ_1 and Γ_2 defined in (5.141), are compatibility conditions for the existence of pseudoscalar and axial vector integrals, respectively. We have obtained the general solutions of these equations in implicit form. Since a potential must be explicit in order to be useful, we only used the particular explicit solutions obtained by requiring that they be invariant under a subgroup of the symmetry groups of these equations. Whenever possible, we enlarged the class of solutions by acting on the subgroup invariant solution with the entire symmetry group of the auxiliary equations.

We consider the most interesting cases to be those with vector or axial vector integrals, specially those that can be viewed as a Coulomb atom or harmonic oscillator with a spin orbital interaction.

A study of the algebras of integrals of motion and of the corresponding solutions of the Pauli-Schrödinger equation is in progress, as is a systematic search for integrals that are two index tensors or pseudotensors.

5.9 Acknowledgments

P.W. thanks Professor A.G.Nikitin for an interesting discussion about superintegrability in systems with spin. The research of P.W. was partly supported by a research grant from NSERC of Canada. The work of İ.Y. is partially supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TÜBİTAK).

Tableau 5.I – Superintegrable potentials and their integrals of motion

No	V_1	V_0	Pseudoscalars	Vectors	Axial Vectors
1	$\frac{\hbar}{r^2}$	$V_0(r)$	-	-	(5.7)
		$\frac{\hbar^2}{r^2}$	-	(5.9)	(5.7)
2	$\frac{\hbar}{2r^2}$	$V_0(r)$	(5.59),(5.60)	(5.96),(5.97)	-
		$\frac{3\hbar^2}{8r^2} - \frac{\alpha}{r}$	(5.59),(5.60)	(5.94)-(5.97)	-
3	$-\frac{\hbar}{2r^2}$	$-\frac{\hbar^2}{8r^2} + \alpha r^2$	(5.70)	-	-
4	$\frac{3\hbar}{2r^2}$	$\frac{15\hbar^2}{8r^2} + \alpha r^2$	(5.76)	-	-
5	$-\frac{\hbar}{r^2}$	αr^2	-	-	(5.172)
6	$\frac{2\hbar}{r^2}$	$\frac{3\hbar^2}{r^2} + \alpha r^2$	-	-	(5.176)
7	$\frac{\alpha}{2r^2} + \beta$	$\frac{\alpha(\alpha+2\hbar)+4\beta r^4}{8r^2}$	-	(5.111),(5.112)	-
8	$\frac{\hbar}{2r^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$	$\frac{\hbar^2}{2r^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$	(5.79), (5.80)	(5.116)	-
9	$\frac{\hbar}{2r^2}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$	(5.82)	(5.83)	-	-
10	$\frac{\varepsilon\hbar}{r^2\sqrt{1+\beta r^2}}$	(5.179)	-	-	(5.180)
11	$\frac{\hbar}{r^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\beta r^2}}\right)$	(5.185)	-	-	(5.186)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Winternitz P and Yurduşen İ 2009 Integrable and superintegrable systems with spin in three-dimensional Euclidean space *J. Phys. A : Math. Theor.* **42** 385203 (23pp)

[2] Winternitz P and Yurduşen İ 2006 Integrable and superintegrable systems with spin *J. Math. Phys.* **47** 103509 (10pp)

[3] Bertrand J 1873 Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe *C. R. Acad. Sci.* **17** 849–853

[4] Goldstein H, Poole C P and Safko J L 2001 *Classical Mechanics* (Addison Wesley)

[5] Nekhoroshev N N 1972 Action-angle variables and their generalizations *Trans. Moscow Math. Soc.* **26** 180–198

[6] Pauli W 1926 Über das Wasserstoffspektrum von Standpunkt der neuen Quantenmechanik *Zeits. f. Physik* **36** 336–363

[7] Fock V A 1935 Zur Theorie des Wasserstoffatoms *Zeits. f. Physik* 98–145

[8] Bargmann V 1936 Zur Theorie des Wasserstoffatoms *Zeits. f. Physik* 576–582

[9] Jauch J and Hill E 1940 On the problem of degeneracy in quantum mechanics *Phys. Rev.* **57** 641–5

[10] Fradkin D M 1965 Three-dimensional Isotropic Harmonic Oscillator and $SU(3)$ *Am. J. Phys.* **33** 207–211

[11] Friš I, Mandrosov V, Smorodinsky J, Uhlı̃r M and Winternitz P 1965 On higher-order symmetries in quantum mechanics *Phys. Lett.* **16** 354–6

[12] Winternitz P, Smorodinsky Ya. A, Uhlı̃r M and Friš I 1967 Symmetry groups in classical and quantum mechanics *Sov. J. Nucl. Phys.* **4** 444–450

[13] Makarov A, Smorodinsky J, Valiev Kh and Winternitz P 1967 A systematic search for non-relativistic systems with dynamical symmetries *Nuovo Cim.* A **52** 1061–84

[14] Evans N W 1990 Superintegrability in classical mechanics *Phys. Rev.* A **41** 5666–76

[15] Evans N W 1990 Superintegrability of the Winternitz system *Phys. Lett.* A **147** 483–6

[16] Miller Jr W 1977 *Symmetry and Separation of Variables* (Massachusetts : Addison-Wesley)

[17] Kalnins E G 1986 *Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature* (Essex : Longman Scientific and Technical)

[18] Grosche C, Pogosyan G S and Sissakian A N 1995 Path Integral discussion for Smorodinsky - Winternitz Potentials : II. Two - and Three Dimensional Sphere *Fortschritte der Physik* **43(6)** 523-563

[19] Grosche C, Pogosyan G S and Sissakian A N 1996 Path Integral Approach to Superintegrable Potentials. Two-Dimensional Hyperboloid *Phys. Part. Nucl.* **27(3)** 244-278 (*Fiz. Elem. Chastits At Yadra* **27** 593-674)

[20] Grosche C, Pogosyan G S and Sissakian A N 1997 Path Integral discussion for Superintegrable Potentials : IV. Three Dimensional Pseudosphere *Phys. Part. Nucl.* **28** 486-519 [in Russian Fizika Elementarnikh Chastiz i Atomnogo Yadra **5** 1230-1294, 1997]

[21] Miller Jr W 2005 Second order superintegrable systems in three dimensions *SIGMA* **1** 015 (17pp)

[22] Kalnins E G, Kress J M, Miller Jr W and Post S 2009 Structure and theory for second-order 2*D* superintegrable systems with 1 parameter potentials *SIGMA* **5** 008 (24pp)

[23] Kalnins E G, Kress J M and Miller Jr W 2007 Nondegenerate 2*D* complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties *J. Phys. A. Math. Theor.* **40** 5875–92

[24] Kalnins E G, Kress J M and Miller Jr W 2006 Second order superintegrable systems in conformally flat spaces V. Two and three dimensional quantum systems *J. Math. Phys.* **47** 093501 (25pp)

[25] Kalnins E G, Kress J M, Miller Jr W and Winternitz P 2003 Superintegrable systems in Darboux spaces *J. Math. Phys.* **44** 5811–48

[26] Kalnins E G, Kress J M and Winternitz P 2002 Superintegrability in a two-dimensional space of nonconstant curvature *J. Math. Phys.* **43 (2)** 970–83

[27] Sheftel M B, Tempesta P and Winternitz P 2001 Superintegrable systems in quantum mechanics and classical Lie theory *J. Math. Phys.* **42 (2)** 659–73

[28] Tempesta P, Turbiner A V and Winternitz P 2001 Exact solvability of superintegrable systems *J. Math. Phys.* **42** 4248–57

[29] Rodriguez M A and Winternitz P 2002 Quantum superintegrability and exact solvability in n dimensions *J. Math. Phys.* **43** 1309–22

[30] Kalnins E G, Williams G C, Miller Jr W and Pogosyan G S 2002 On superintegrable symmetry-breaking potentials in N-dimensional Euclidean space *J. Phys. A : Math. Gen.* **35** 4755–73

[31] Kalnins E G, Kress J M, and Miller W Jr 2007 Nondegenerate superintegrable systems in n-dimensional spaces of constant curvature *Phys. Atomic Nuclei* **70** no.3 545–53

[32] Drach J 1935 Sur l'intégration logique des équations de la dynamique à deux variables : Forces conservatives. Intégrales cubiques. Mouvements dans le plan. *C.R. Acad. Sci.* **200** 22-26

[33] Gravel S and Winternitz P 2003 Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics *J. Math. Phys.* **43** 5902–12

[34] Gravel S 2004 Hamiltonians separable in Cartesian coordinates and third-order integrals of motion *J. Math. Phys.* **45** 1003–19

[35] Tremblay F and Winternitz P 2010 Third order superintegrable systems separating in polar coordinates *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 175206 (23pp)

[36] Popper I, Post S and Winternitz P 2012 Third-order superintegrable systems separating in parabolic coordinates *J. Math. Phys.* **53** 062105 (20pp)

[37] Marquette I and Winternitz P 2007 Polynomial Poisson algebras for classical superintegrable systems with a third-order integral of motion *J. Math. Phys.* **48** 012902 (31pp)

[38] Tremblay F, Turbiner A V and Winternitz P 2009 An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane *J. Phys. A. Math. Theor.* **42** 242001

[39] Tremblay F, Turbiner A V and Winternitz P 2010 Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 015202 (16pp)

[40] Levesque D, Post S and Winternitz P 2012 Infinite families of superintegrable systems separable in subgroup coordinates *Preprint arXiv* 1207.6976 (19pp)

[41] Marquette I 2009 Superintegrability with third-order integrals of motion, cubic algebras, and supersymmetric quantum mechanics II : Painlevé transcendent potentials *J. Math. Phys.* **50** 095202 (18pp)

[42] Post S and Winternitz P 2010 An infinite family of superintegrable deformations of the Coulomb potential *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 222001 (11pp)

[43] Kalnins E G, Kress J M and Miller W Jr 2010 Superintegrability and higher order constants for quantum systems *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 265205 (25pp)

[44] Kalnins E G, Kess J M and Miller W Jr 2010 A recurrence relation approach to higher order quantum superintegrability *SIGMA* **7** 031 (24pp)

[45] Kalnins E G, Miller W Jr and Post S 2010 Coupling constant metamorphosis and N-th order symmetries in classical and quantum mechanics *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 035202 (20pp)

[46] Quesne C 2010 Superintegrability of the Tremblay-Turbiner-Winternitz quantum Hamiltonians on a plane for odd k *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 082001 (14pp)

[47] Calzada J A,Celeghini E, del Olmo M A and Velasco M A 2010 Algebraic aspects of Tremblay-Turbiner-Winternitz Hamiltonian systems *J. Phys. : Conf. Ser.* **343** 12029

[48] Chanu C, Degiovanni L and Rastelli G 2011 Polynomial constants of motion for Calogero-type systems in three dimensions *J. Math. Phys.* **52** 032903 (8pp)

[49] Marquette I 2011 An infinite family of superintegrable systems from higher order ladder operators and supersymmetry *J. Phys. : Conf. Ser.* **284** 012047 (8pp)

[50] Pronko G P and Stroganov Y G 1977 New example of quantum mechanical problem with hidden symmetry *Sov. Phys. JETP* **45** 1075–77

[51] Pronko G P 2007 Quantum superintegrable systems for arbitrary spin *J. Phys. A. Math. Theor.* **40** 1333–36

[52] Nikitin A G and Karadzhov Y 2011 Matrix superpotentials *J. Phys. A. Math. Theor.* **44** 305204 (21pp)

[53] Nikitin A G 2012 New exactly solvable system with Fock symmetry *Preprint arXiv* 1205.3094 (9pp)

[54] Nikitin A G and Karadzhov Y 2011 Enhanced classification of matrix superpotentials *J. Phys. A. Math. Theor.* **44** 445202 (24pp)

[55] Nikitin A G 2012 Superintegrability and supersymmetry of Schrödinger-Pauli equations for neutral particles *Preprint arXiv* 1204.5902 (18pp)

[56] Nikitin A G 2012 Matrix superpotentials and superintegrable systems for arbitrary spin *Preprint arXiv* 1201.4929 (15pp)

[57] D'Hoker E and Vinet L 1985 Constants of motion for a spin-$\frac{1}{2}$ particle in the field of a Dyon *Phys. Rev. Lett.* **55** no.10

[58] Feher L and Horvathy P A 1988 Non-relativistic scattering of a spin-$\frac{1}{2}$ particle off a self-dual monopole *Mod. Phys. Lett.* **A3** 1451–60

[59] Olver P 2000 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York : Springer)

CHAPITRE 6

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était de poursuivre l'effort de classification des systèmes superintégrables avec spin. Nous avons considéré un hamiltonien en trois dimensions, invariant sous rotation et sous la parité avec interaction spin-orbite. Nous nous sommes intéréssés des intégrales du mouvement qui sont des polynômes matriciels de degré deux dans l'impulsion. Nous avons classifié ces intégrales selon des multiplets irréductibles de $O(3)$. Nous avons montré que la symétrisation d'un opérateur différentiel était atteinte sans perdre de généralité en faisant la somme de l'opérateur et de son conjugué hermitien. Nous avons ensuite calculé les commutateurs entre l'hamiltonien et un opérateur scalaire, pseudo-scalaire, vectoriel et pseudo-vectoriel.

Dans le cas scalaire, nous n'avons trouvé que les intégrales triviales du mouvement. Nous n'y avons donc découvert aucun système superintégrable. Dans le cas pseudo-scalaire, nous avons obtenu une équation différentielle pour le potentiel nécessaire à la superintégrabilité. Nous avons utilisé la réduction par symétrie afin de trouver des solutions particulières à cette équation, mais nous n'avons pu la résoudre de façon générale. Nous avons trouvé un système maximalement superintégrable ainsi que trois systèmes minimalement superintégrables.

Le cas d'un opérateur vectoriel a été complètement résolu. Nous avons trouvé deux systèmes maximalement superintégrables. Le dernier cas, celui d'un opérateur pseudo-vecteur est semblable à celui d'un opérateur pseudo-scalaire : nous obtenons une équation différentielle pour le potentiel et nous utilisons la réduction par symétrie pour obtenir des solutions particulières, sans toutefois pouvoir la résoudre de façon générale. Nous trouvons quatre systèmes minimalement superintégrables.

Il reste encore beaucoup de voies à explorer concernant les systèmes superintégrables avec interaction spin-orbite. Nous avons deux équations différentielles dont nous n'avons pu trouver de solution générale. Une continuation directe de nos travaux serait de faire le même type d'analyse pour des opérateurs tensoriels et pseudo-tensoriels. Il est également possible de chercher des intégrales du mouvement d'ordre trois, ou d'ordre général. Nous avons considéré l'interaction d'un pion avec un nucléon, donc un cas où une seule particule a un spin. Il serait intéressant de considérer l'interaction de deux pions, ce qui ferait apparaître plus de termes dans l'hamiltonien. Les systèmes intégrables sont manifestement très intéressants et il reste beaucoup de travail à faire pour étendre nos connaissances dans ce domaine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Winternitz P and Yurduşen İ 2009 Integrable and superintegrable systems with spin in three-dimensional Euclidean space *J. Phys. A : Math. Theor.* **42** 385203 (23pp)

[2] Bertrand J 1873 Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe *C. R. Acad. Sci.* **17** 849–853

[3] Goldstein H, Poole C P and Safko J L 2001 *Classical Mechanics* (Addison Wesley)

[4] Nekhoroshev N N 1972 Action-angle variables and their generalizations *Trans. Moscow Math. Soc.* **26** 180–198

[5] Pauli W 1926 Über das Wasserstoffspektrum von Standpunkt der neuen Quantenmechanik *Zeits. f. Physik* **36** 336–363

[6] Fock V A 1935 Zur Theorie des Wasserstoffatoms *Zeits. f. Physik* 98–145

[7] Bargmann V 1936 Zur Theorie des Wasserstoffatoms *Zeits. f. Physik* 576–582

[8] Jauch J and Hill E 1940 On the problem of degeneracy in quantum mechanics *Phys. Rev.* **57** 641–5

[9] Fradkin D M 1965 Three-dimensional Isotropic Harmonic Oscillator and $SU(3)$ *Am. J. Phys.* **33** 207–211

[10] Friš I, Mandrosov V, Smorodinsky J, Uhlıř M and Winternitz P 1965 On higher-order symmetries in quantum mechanics *Phys. Lett.* **16** 354–6

[11] Winternitz P, Smorodinsky Ya. A, Uhlıř M and Friš I 1967 Symmetry groups in classical and quantum mechanics *Sov. J. Nucl. Phys.* **4** 444–450

[12] Makarov A, Smorodinsky J, Valiev Kh and Winternitz P 1967 A systematic search for non-relativistic systems with dynamical symmetries *Nuovo Cim.* A **52** 1061–84

[13] Evans N W 1990 Superintegrability in classical mechanics *Phys. Rev.* A **41** 5666–76

[14] Evans N W 1990 Superintegrability of the Winternitz system *Phys. Lett.* A **147** 483–6

[15] Miller Jr W 1977 *Symmetry and Separation of Variables* (Massachusetts : Addison-Wesley)

[16] Kalnins E G 1986 *Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature* (Essex : Longman Scientific and Technical)

[17] Miller Jr W 2005 Second order superintegrable systems in three dimensions *SIGMA* **1** 015 (17pp)

[18] Kalnins E G, Kress J M, Miller Jr W and Post S 2009 Structure and theory for second-order 2*D* superintegrable systems with 1 parameter potentials *SIGMA* **5** 008 (24pp)

[19] Kalnins E G, Kress J M and Miller Jr W 2007 Nondegenerate 2*D* complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties *J. Phys. A. Math. Theor.* **40** 5875–92

[20] Kalnins E G, Kress J M and Miller Jr W 2006 Second order superintegrable systems in conformally flat spaces V. Two and three dimensional quantum systems *J. Math. Phys.* **47** 093501 (25pp)

[21] Kalnins E G, Kress J M, Miller Jr W and Winternitz P 2003 Superintegrable systems in Darboux spaces *J. Math. Phys.* **44** 5811–48

[22] Kalnins E G, Kress J M and Winternitz P 2002 Superintegrability in a two-dimensional space of nonconstant curvature *J. Math. Phys.* **43 (2)** 970–83

[23] Sheftel M B, Tempesta P and Winternitz P 2001 Superintegrable systems in quantum mechanics and classical Lie theory *J. Math. Phys.* **42 (2)** 659–73

[24] Tempesta P, Turbiner A V and Winternitz P 2001 Exact solvability of superintegrable systems *J. Math. Phys.* **42** 4248–57

[25] Rodriguez M A and Winternitz P 2002 Quantum superintegrability and exact solvability in n dimensions *J. Math. Phys.* **43** 1309–22

[26] Kalnins E G, Williams G C, Miller Jr W and Pogosyan G S 2002 On superintetrable summetry-breaking potentials in N-dimensional Euclidien space *J. Phys. A : Math. Gen.* **35** 4755–73

[27] Kalnins E G, Kress J M, and Miller W Jr 2007 Nondegenerate superintegrable systems in n-dimensional spaces of constant curvature *Phys. Atomic Nuclei* **70** no.3 545–53

[28] Gravel S and Winternitz P 2003 Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics *J. Math. Phys.* **43** 5902–12

[29] Gravel S 2004 Hamiltonians separable in Cartesian coordinates and third-order integrals of motion *J. Math. Phys.* **45** 1003–19

[30] Tremblay F and Winternitz P 2010 Third order superintegrable systems separating in polar coordinates *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 175206 (23pp)

[31] Popper I, Post S and Winternitz P 2012 Third-order superintegrable systems separating in parabolic coordinates *J. Math. Phys.* **53** 062105 (20pp)

[32] Marquette I and Winternitz P 2007 Polynomial Poisson algebras for classical superintegrable systems with a third-order integral of motion *J. Math. Phys.* **48** 012902 (31pp)

[33] Levesque D, Post S and Winternitz P 2012 Infinite families of superintegrable systems separable in subgroup coordinates *Preprint archives*

[34] Marquette I 2009 Superintegrability with third-order integrals of motion, cubic algebras, and supersymmetric quantum mechanics II : Painlevé transcendent potentials *J. Math. Phys.* **50** 095202 (18pp)

[35] Tremblay F, Turbiner A V and Winternitz P 2009 An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane *J. Phys. A. Math. Theor.* **42** 242001

[36] Tremblay F, Turbiner A V and Winternitz P 2010 Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 015202 (16pp)

[37] Post S and Winternitz P 2010 An infinite family of superintegrable deformations of the Coulomb potential *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 222001 (11pp)

[38] Kalnins E G 2010 Superintegrability and higher order constants for quantum systems *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 265205 (25pp)

[39] Quesne C 2010 Superintegrability of the Tremblay-Turbiner-Winternitz quantum Hamiltonians on a plane for odd k *J. Phys. A. Math. Theor.* **43** 082001 (14pp)

[40] Calzada J A,Celeghini E, del Olmo M A and Velasco M A 2010 Algebraic aspects of Tremblay-Turbiner-Winternitz Hamiltonian systems *J. Phys. : Conf. Ser.* **343** 12029

[41] Chanu C, Degiovanni L and Rastelli G 2011 Polynomial constants of motion for Calogero-type systems in three dimensions *J. Math. Phys.* **52** 032903 (8pp)

[42] Marquette I 2011 An infinite family of superintegrable systems from higher order ladder operators and supersymmetry *J. Phys. : Conf. Ser.* **284** 012047 (8pp)

[43] Pronko G P and Stroganov Y G 1977 New example of quantum mechanical problem with hidden symmetry *Sov. Phys. JETP* **45** 1075–77

[44] Pronko G P 2007 Quantum superintegrable systems for arbitrary spin *J. Phys. A. Math. Theor.* **40** 1333–36

[45] Nikitin A G and Karadzhov Y 2011 Matrix superpotentials *J. Phys. A. Math. Theor.* **44** 305204 (21pp)

[46] Nikitin A G 2012 New exactly solvable system with Fock symmetry *Preprint arXiv* 1205.3094 (9pp)

[47] Nikitin A G and Karadzhov Y 2011 Enhanced classification of matrix superpotentials *J. Phys. A. Math. Theor.* **44** 445202 (24pp)

[48] Nikitin A G 2012 Superintegrability and supersymmetry of Schrödinger-Pauli equations for neutral particles *Preprint arXiv* 1204.5902 (18pp)

[49] Nikitin A G 2012 Matrix superpotentials and superintegrable systems for arbitrary spin *Preprint arXiv* 1201.4929 (15pp)

[50] Winternitz P and Yurduşen İ 2006 Integrable and superintegrable systems with spin *J. Math. Phys.* **47** 103509 (10pp)

[51] Olver P 2000 Applications of Lie Groups to Differential Equations Springer NY

[52] Hietarinta J and Grammaticos B 1989 On the $\hbar^2$ correction terms in quantum integrability J. Phys. A : Math. Gen. **22** 1315–22

[53] Hietarinta J 1989 Solvability in quantum mechanics and classically superflous invariants J. Phys. A : Math. Gen. **22** L143-L147

[54] Hietarinta J 1998 Pure quantum integrability Phys. Lett. A **246** 97-104

[55] Hietarinta J 1989 New integrable Hamiltonians with transcendental invariants Phys. Rev. Lett. **52** 1057–60

[56] Marquette I and Winternitz P 2008 Superintegrable systems with a third order integral of motion J. Phys. A : Math. Gen. **41** 304031 (15pp)