

**Université de Montréal**

**Quelques propriétés des sous-variétés  
lagrangiennes monotones : Rayon de Gromov et  
morphisme de Seidel**

par

**François Charette**

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en Mathématiques

septembre 2012



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Quelques propriétés des sous-variétés  
lagrangiennes monotones : Rayon de Gromov et  
morphisme de Seidel**

présentée par

**François Charette**

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*François Lalonde*

---

(président-rapporteur)

*Octavian Cornea*

---

(directeur de recherche)

*Iosif Polterovich*

---

(membre du jury)

*Alexandru Oancea*

---

(examineur externe)

*Jacques Ferland*

---

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

*23 août 2012*

---



## SOMMAIRE

---

Cette thèse présente quelques propriétés des sous-variétés lagrangiennes monotones. On résoud d'abord une conjecture de Barraud et Cornea dans le cadre monotone en montrant que le rayon de Gromov relatif à deux lagrangiennes dans la même classe d'isotopie hamiltonienne donne une borne inférieure à la distance de Hofer entre ces deux mêmes lagrangiennes. Le cas non-monotone de cette conjecture reste ouvert encore. On définit toutes les structures nécessaires à l'énoncé et à la preuve de cette conjecture.

Deuxièmement, on définit une nouvelle version d'un morphisme de Seidel relatif à l'aide des cobordismes lagrangiens de Biran et Cornea. On montre que cette version est chaîne-homotope aux différentes autres versions apparaissant dans la littérature. Que toutes ces définitions sont équivalentes fait partie du folklore mais n'apparaît pas dans la littérature.

On conclut par une conjecture qui identifie un triangle exact obtenu par chirurgie lagrangienne et un autre dû à Seidel et faisant intervenir le twist de Dehn symplectique.

Mots-clés : Sous-variétés lagrangiennes, Rayon de Gromov, Distance de Hofer, Morphisme de Seidel, Cobordisme lagrangien, Rigidité symplectique, Twist de Dehn, Chirurgie.



## SUMMARY

---

We present in this thesis a few properties of monotone Lagrangian submanifolds. We first solve a conjecture of Barraud and Cornea in the monotone setting by showing that the relative Gromov radius of two Hamiltonian-isotopic Lagrangians gives a lower bound on the Hofer distance between them. The general non-monotone case remains open to this day. We define all the structures relevant to state and prove the conjecture.

We then define a new version of a Lagrangian Seidel morphism through the recently introduced Lagrangian cobordisms of Biran and Cornea. We show that this new version is chain-homotopic to various other versions appearing in the literature. That all these previous versions are the same is folklore but did not appear in the literature.

We conclude with a conjecture claiming that an exact triangle obtained by Lagrangian surgery is isomorphic to an exact triangle of Seidel involving the symplectic Dehn twist.

Key-words : Lagrangian submanifolds, Gromov width, Hofer distance, Seidel morphism, Lagrangian cobordism, Symplectic rigidity, Dehn twist, Surgery.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xiii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
<b>Chapitre 1. Rayon de Gromov relatif</b> .....	7
1.1. Topologie symplectique .....	7
1.1.1. Formes symplectiques et structures complexes linéaires.....	7
1.1.2. Structures symplectiques et presque complexes.....	8
1.1.3. H-principe symplectique .....	10
1.2. Théorème de non plongement et rayon de Gromov .....	12
1.3. Sous-variétés lagrangiennes .....	12
1.4. Distance de Hofer et rayon de Gromov relatif.....	14
<b>Chapitre 2. Un raffinement géométrique d'un théorème de Chekanov</b> ..	17
2.1. Introduction .....	17
2.2. Structures algébriques.....	19
2.2.1. Conventions et définitions.....	19
2.2.1.1. Disques pseudo-holomorphes simples et absolument distincts	



4.1.2. Triangle exact associé à la chirurgie lagrangienne .....	67
4.2. Twist de Dehn, triangle exact de Seidel et chirurgie .....	69
<b>Bibliographie</b> .....	73



## LISTE DES FIGURES

---

2.1	Une perle ! .....	20
2.2	Un tripode .....	22
2.3	Demi-disque du PSS .....	25
2.4	Une perle convergeant vers une orbite .....	26
2.5	$x \star \gamma$ .....	29
2.6	Recoller $\text{PSS}(x \circ y)$ afin d'éliminer $z$ .....	31
2.7	Recoller $x \star \text{PSS}(y)$ dans $\mathcal{S}'$ et passer vers $\mathcal{S}$ .....	32
3.1	Projection de $V$ dans dans le plan .....	40
3.2	La courbe $\gamma$ .....	40
3.3	Projection de la suspension dans le plan .....	42
3.4	Sections parallèles et une perturbation hamiltonienne .....	43
3.5	À l'extérieur de la boîte $B$ , les cobordismes ne s'intersectent pas et sont cylindriques, de sorte que les bandes sont contenues dans $B$ . . .	49
3.6	Intersection de cobordismes élémentaires .....	50
3.7	Morphisme de Seidel relatif perlé .....	56
3.8	Variation du paramètre $R$ .....	57
4.1	La fonction $H$ .....	64
4.2	Chirurgie lagrangienne .....	66
4.3	Twists de Dehn .....	67
4.4	Intersection de la trace d'une chirurgie avec un cobordisme trivial..	69



## REMERCIEMENTS

---

En relisant cette thèse, je suis agréablement surpris du chemin parcouru depuis les quatre dernières années. J'ai beaucoup progressé dans l'étude des mathématiques et j'ai appris bien plus que je croyais possible. Ce dépassement, je le dois en grande partie à Octav, qui m'a ouvert au monde de la recherche, dans une branche des maths que je craignais au départ. Il a été très généreux de son temps et de ses idées, ce qui paraît certainement à la lecture de la thèse. Il a su me mettre de la pression quand il fallait et, surtout, a su la relâcher dans les moments difficiles. Les sept années - eh oui, déjà - à travailler avec lui en tant qu'étudiant ont toujours été très agréables. Les collaborations futures le seront aussi. Comme étudiant, on ne peut pas demander mieux.

Je remercie aussi Jean-François Barraud et Paul Biran pour les discussions mathématiques et les idées qu'ils ont partagées avec moi.

À tous les amis, ceux du DMS et les autres, ainsi qu'à la famille : je ne vous nommerai pas, vous êtes trop nombreux, mais vous dirai merci autour d'une bière ou d'un bon vin !

En ce qui concerne le financement, je remercie le FQRNT, qui m'a permis de faire un doctorat sans jamais avoir de souci financier. Pour la bourse de fin d'études doctorales qui offre un support dans la dernière ligne droite du doctorat, je remercie finalement la faculté des études supérieures.



# INTRODUCTION

---

Cette thèse a pour but de donner, comme son titre l'indique, quelques propriétés nouvelles des sous-variétés lagrangiennes monotones. La première propriété illustre un phénomène de rigidité propre aux lagrangiennes. Ces variétés ont une codimension assez grande, ce qui pourrait inciter à croire qu'elles ne prennent pas beaucoup d'espace symplectique. Étant données deux telles sous-variétés hamiltoniennes isotopes, il est légitime d'essayer de plonger symplectiquement une boule ouverte touchant à une seule d'entre elles et dont le rayon est arbitrairement grand. Il se trouve que c'est impossible ; en effet, le Théorème 2.1.1, page 17, montre que le rayon de cette boule est borné supérieurement par la distance de Hofer entre les deux lagrangiennes. Ce théorème peut aussi être utilisé pour prouver que cette distance est bien non-dégénérée, un résultat difficile démontré par Chekanov. En ce sens, les lagrangiennes d'une même classe d'isotopie hamiltonienne sont rigides ; bien qu'elles soient topologiquement petites, elles remplissent symplectiquement un espace non négligeable. Le rayon figurant dans le théorème est appelé rayon de Gromov relatif et sera défini clairement au Chapitre 1.

Il peut être assez difficile de montrer que deux lagrangiennes sont dans la même classe d'isotopie, et la deuxième partie de la thèse, qui commence au Chapitre 3, permet de définir une autre notion d'équivalence entre lagrangiennes. Les cobordismes lagrangiens ont été introduits par Arnol'd [Arn80] et plus récemment repris par Biran et Cornea [BC11], qui ont défini la catégorie des cobordismes lagrangiens et montré que cette définition est plus flexible que celle d'isotopie en donnant des exemples de lagrangiennes monotones cobordantes mais non isotopes, pas même topologiquement isotopes. Cette notion

reflète quand même la rigidité des lagrangiennes, e.g. deux lagrangiennes cobordantes ont la même cohomologie quantique, en fort contraste avec la notion usuelle de cobordisme.

On peut aussi retrouver l'information donnée par une isotopie hamiltonienne grâce aux cobordismes ; c'est le contenu du deuxième résultat original de la thèse, le Théorème 3.0.1, fruit d'une collaboration en cours avec Octav Cornea. On définit un isomorphisme de comparaison en homologie de Floer lagrangienne par un cobordisme appelé la suspension lagrangienne et on montre que celui-ci est chaîne-homotope au morphisme de Seidel relatif, qui a été étudié par exemple dans [HL10], [HLL11] et [AS01]. On donne aussi d'autres définitions déjà connues du morphisme de Seidel et on montre qu'elles sont toutes chaîne-homotopes.

Étant données ces deux notions d'équivalence de lagrangiennes, il serait intéressant de voir comment se comporte le rayon de Gromov relatif à l'intérieur d'une même classe de cobordismes. Bien qu'on ne traite pas cette question dans la thèse, elle relie ses deux parties distinctes et fera l'objet de recherches futures.

On procède maintenant à une description des différents chapitres de la thèse. L'introduction de chacun de ces chapitres servira aussi à décrire plus en détails leur contenu.

Au Chapitre 1, on définit d'abord les notions de base de la topologie symplectique utiles dans cette thèse et on donne une définition exacte du rayon de Gromov relatif. Ceci mène naturellement vers le Chapitre 2, où on énonce et démontre le Théorème 2.1.1. Afin d'arriver à la preuve, il faut d'abord définir plusieurs structures algébriques et vérifier certaines de leurs propriétés. Ce chapitre est une traduction presque littérale de l'article [Cha11].

Ensuite, on donne les définitions relatives aux cobordismes lagrangiens au début du Chapitre 3, ainsi que quelques exemples. La Section 3.4 contient les nouveaux résultats sur le morphisme de Seidel relatif ainsi que plusieurs définitions de ce dernier.

Au Chapitre 4, on détaille un exemple de cobordisme lagrangien donné par la trace d'une chirurgie lagrangienne, en suivant la présentation de [BC11]. Ensuite, on discute brièvement des fibrations de Lefschetz symplectiques, qui permettent de définir un autre type de morphisme de comparaison, appelé le twist de Dehn, grâce à un résultat de Seidel.

Enfin, la Conjecture 4.2.1, qui fait partie d'une collaboration en cours avec Paul Biran et Octav Cornea, relie le résultat de Seidel au triangle exact associé à la chirurgie lagrangienne de la Section 4.1.2 dans un cas simple, et permet de généraliser le résultat de Seidel aux lagrangiennes monotones.



# Chapitre 1

---

## RAYON DE GROMOV RELATIF

Dans ce chapitre, on introduit les notions de base de la topologie symplectique en se contentant de donner les définitions utiles dans les prochains chapitres ; le lecteur pourra consulter [MS95] pour une introduction beaucoup plus vaste.

On commence par définir les structures symplectiques et complexes sur des espaces vectoriels, pour ensuite munir le fibré tangent d'une variété de telles structures. La question de l'existence de ces structures est brièvement discutée via le h-principe symplectique de Gromov.

On énonce ensuite le fameux théorème de non plongement de Gromov, qui illustre un phénomène purement symplectique, et on en extrait la définition du rayon de Gromov.

Enfin, on définit les sous-variétés lagrangiennes (monotones), qui constituent l'objet principal de cette thèse. On adapte aussi le rayon de Gromov à ce contexte et on donne quelques résultats connus reliant ce rayon à la distance de Hofer entre deux lagrangiennes. Le Chapitre 2 sera consacré à l'étude de ce rayon.

### 1.1. TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

#### 1.1.1. Formes symplectiques et structures complexes linéaires

Une structure symplectique sur  $\mathbb{R}^{2n}$  est une forme bilinéaire anti-symétrique  $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})$  non-dégénérée. La structure symplectique standard sur

cet espace est

$$\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i,$$

où on a identifié  $\mathbb{R}^{2n}$  avec  $\mathbb{C}^n$ .

Le groupe d'automorphismes linéaires préservant  $\omega_0$  est le groupe symplectique, dénoté  $\text{Sp}(2n)$ . L'ensemble des structures symplectiques de  $\mathbb{R}^{2n}$  est

$$\mathcal{S} \cong \text{GL}(2n, \mathbb{R})/\text{Sp}(2n),$$

puisque les matrices inversibles agissent de façon transitive sur les structures symplectiques et que le stabilisateur de  $\omega_0$  est  $\text{Sp}(2n)$ .

De la même manière, l'espace des structures complexes sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , soit l'ensemble des endomorphismes  $J : T_*\mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_*\mathbb{R}^{2n}$  tels que  $J^2 = -I$ , est donné par

$$\mathcal{J} \cong \text{GL}(2n, \mathbb{R})/\text{GL}(n, \mathbb{C}),$$

car  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  est le stabilisateur de  $J_0$ , la structure complexe standard sur  $\mathbb{C}^n$ .

Finalement, on dénote  $\mathcal{H} \subset \mathcal{J} \times \mathcal{S}$ , l'ensemble des structures hermitiennes sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , c'est à dire les couples  $(J, \omega)$ , où  $J$  et  $\omega$  sont compatibles, ce qui signifie :

- $\omega(v, w) = \omega(Jv, Jw)$  ;
- $\omega(v, Jv) > 0, \forall v \neq 0$ .

Soient  $p_{\mathcal{J}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}$  et  $p_{\mathcal{S}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}$  les projections. Étant donnée  $\omega \in \mathcal{S}$  (resp.  $J \in \mathcal{J}$ ),  $\mathcal{J}_{\omega} := p_{\mathcal{S}}^{-1}(\omega)$  (resp.  $p_{\mathcal{J}}^{-1}(J)$ ) est l'ensemble des structures complexes (resp. symplectiques) compatibles avec  $\omega$  (resp.  $J$ ). Le résultat suivant est classique et remonte à Gromov :

**Proposition 1.1.1.** *Les deux projections sont des fibrations dont les fibres sont contractiles et non vides. De plus, ce sont des équivalences d'homotopie, ce qui implique qu'il y a une équivalence d'homotopie canonique  $\mathcal{J} \sim \mathcal{S}$ .*

### 1.1.2. Structures symplectiques et presque complexes

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel réel sur une variété  $M$ . On dit que  $E$  est un fibré symplectique, complexe ou hermitien si chaque fibre est munie de la structure appropriée et si cette structure varie de façon lisse en fonction du

point de base. En utilisant une partition de l'unité et la Proposition 1.1.1, on obtient une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{S}(E) \sim \mathcal{J}(E) \sim \mathcal{H}(E)$$

entre l'ensemble des structures symplectiques, complexes et hermitiennes sur  $E$ .

Une variété  $M$  est une variété presque complexe (resp. presque symplectique) si son fibré tangent admet une structure complexe (resp. symplectique). Comme on vient de le voir, ces structures sont en bijection, du moins à homotopie près.  $M$  est une variété complexe si la structure presque complexe est intégrable et est symplectique si la structure presque symplectique  $\omega$  est aussi fermée, i.e.  $d\omega = 0$ .

Comme on considèrera des variétés symplectiques pas nécessairement compactes, on doit supposer qu'elles ont un bon comportement «à l'infini», afin d'assurer la compacité des espaces de courbes holomorphes utilisés dans toute la thèse. On adoptera la définition de Gromov de variétés symplectiques convexes à l'infini, c'est à dire qu'on peut couvrir  $M$  par une suite d'ensembles emboîtés et relativement compacts  $V_1 \subset V_2 \subset \dots$  telles que chaque application holomorphe  $f : D^2 \rightarrow M$ , où  $f(\partial D^2) \subset V_k$  et  $D^2$  est le disque unité complexe fermé, vérifie  $f(D^2) \subset V_{k+1}$ .

On note que la condition de non-dégénérescence de  $\omega$  signifie que l'application

$$I_\omega : T_*M \rightarrow T^*M$$

$$X \mapsto \iota_X \omega := \omega(X, \cdot)$$

est un isomorphisme de fibrés. Un peu d'algèbre linéaire montre que la dimension d'une telle variété est nécessairement paire, dénotée par la suite  $2n$ . Ceci est équivalent à  $\omega^n \neq 0$  et définit une forme volume.

L'exemple type est celui de  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  muni de la forme  $\omega_0$ . Le théorème de Darboux affirme que cet exemple est le modèle local de toute variété symplectique, donc qu'autour de chaque point de  $M$ , on peut trouver un voisinage  $U$  difféomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  qui est tel que  $\omega|_U := \omega_0$ .

On utilisera les structures presque complexes de manière fondamentale dans cette thèse, afin de définir des invariants associés à une variété symplectique, en «comptant» certaines courbes vérifiant les équations de Cauchy-Riemann associées à  $J$ , dites courbes  $J$ -holomorphes. Ces méthodes remontent à Gromov [Gro85] et sont encore utilisées aujourd’hui.

Un difféomorphisme  $\phi : (M, \omega_1) \rightarrow (V, \omega_2)$  est appelé un symplectomorphisme si  $\phi^* \omega_2 = \omega_1$ . On remarque qu’une telle application préserve le volume, puisque  $\text{Vol } M = \omega_1^n = \phi^*(\omega_2^n) = \phi^*(\text{Vol } V)$ . On verra à la prochaine section que certaines applications préservent le volume sans préserver la forme (en dimension supérieure à 2) et mèneront naturellement vers la définition d’une capacité symplectique, le rayon de Gromov.

Soit  $\mathcal{H}(M) := \{H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{supp } H \text{ est compact}\}$  muni de la norme

$$\|H\| = \int_0^1 \max H_t - \min H_t dt.$$

Le gradient symplectique de  $H \in \mathcal{H}$  est l’unique famille à un paramètre de champs de vecteurs définie par

$$\iota_{X_H^t} \omega = -dH_t.$$

Ces champs de vecteurs engendrent un flot hamiltonien  $\Psi_t$  par l’équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \Psi_t = X_H^t \circ \Psi_t, \quad \Psi_0 = \text{Id}.$$

L’ensemble des flots hamiltoniens évalués au temps  $t = 1$  est appelé le groupe des difféomorphismes hamiltoniens et est dénoté  $\text{Ham}(M, \omega)$ . L’énergie d’un difféomorphisme hamiltonien  $\phi \in \text{Ham}(M)$  est le nombre

$$E(\phi) = \inf_{H \mid \Psi_1^H = \phi} \{\|H\|\}.$$

### 1.1.3. H-principe symplectique

Avant de discuter du rayon de Gromov, on se permet une brève digression sur l’existence de structures symplectiques sur des variétés ouvertes (i.e. soit

non compacte ou ayant une frontière) et le h-principe symplectique de Gromov. Bien que l'objet de cette thèse ne soit pas l'existence de structures symplectiques, mais plutôt la définition d'invariants associés à une variété symplectique, la question de l'existence la précède et a été étudié auparavant. Le résultat est assez surprenant et reflète une certaine souplesse de la topologie symplectique.

On établit d'abord quelques notations :

$$\mathcal{J} := \mathcal{J}(TM) = \{\text{structures presque complexes sur } M\}$$

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}(TM) = \{\text{structures presque symplectiques sur } M\}$$

$$\mathbb{S} := \{\text{structures symplectiques sur } M\}$$

$$\mathbb{S}^a := \{\text{structures symplectiques sur } M \text{ représentant } a \in H^2(M; \mathbb{R})\}.$$

On a maintenant le résultat suivant :

**Théorème 1.1.1** (Le h-principe symplectique, Gromov. Voir e.g. [EM02]). *Étant donnée une variété symplectique ouverte  $M$ , l'inclusion  $\mathbb{S}^a \hookrightarrow \mathcal{S}$  est une équivalence d'homotopie. En particulier :*

- *Toute structure presque symplectique  $\beta \in \mathcal{S}$  est homotope dans  $\mathcal{S}$  à une structure symplectique  $\omega \in \mathbb{S}^a$  ;*

- *Si  $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{S}^a$  sont homotopes dans  $\mathcal{S}$ , alors elles le sont aussi dans  $\mathbb{S}^a$ .*

D'après la Proposition 1.1.1, ce théorème implique qu'une variété presque complexe  $(M, J)$  admet une structure symplectique  $\omega$  représentant une classe de cohomologie  $a \in H^2(M)$  prédéterminée telle que  $J \in [p_S^{-1}(\omega)]$ , soit la classe d'homotopie des structures presque complexes compatibles avec  $\omega$ . Il suffit pour s'en convaincre de contempler le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{H} & & \\
 & \nearrow & \downarrow p_S & \searrow p_J & \\
 ([0, 1], \{0\}, \{1\}) & \longrightarrow & (\mathcal{S}, \{\beta\}, \{\omega\}) & \dashrightarrow & (\mathcal{J}, \{J\}, \{J_\omega\})
 \end{array}$$

## 1.2. THÉORÈME DE NON PLONGEMENT ET RAYON DE GROMOV

On considère le cylindre symplectique de rayon  $R$ , soit  $Z^{2n} = B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n}$ ,  $n > 1$ , où  $B^k(R)$  est la boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^k$ . On demande que ce plongement respecte le scindement  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ , i.e. la boule de rayon  $R$  est incluse dans le premier facteur  $\mathbb{C}$ . Le théorème suivant est classique et central en topologie symplectique :

**Théorème 1.2.1** (Théorème de non plongement, Gromov [Gro85]). *S'il y a un plongement symplectique  $B^{2n}(r) \rightarrow Z^{2n}(R)$ , alors  $r \leq R$ .*

Ce phénomène est purement symplectique. En effet, il existe des plongements différentiables préservant le volume peu importe la valeur de  $r$ , e.g.  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto (\frac{R}{r}x_1, \frac{R}{r}y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{r}{R}x_n, \frac{r}{R}y_n)$ .

Ceci mène naturellement à la définition du *rayon de Gromov* d'une variété symplectique  $(M, \omega)$ . Il s'agit du nombre

$$w_G(M) = \sup\{\pi r^2 \mid B^{2n}(r) \text{ peut être plongée symplectiquement dans } M\}.$$

Ce nombre vérifie les axiomes d'une capacité symplectique (voir par exemple [MS95]) et permet de caractériser, à un signe près, les symplectomorphismes. Il se généralise facilement au cas lagrangien, comme on peut le voir à l'énoncé du Théorème 2.1.1.

On peut bien évidemment généraliser cette quantité et considérer des plongements de plusieurs boules disjointes de même rayon, ou encore de rayons différents ; ceci mène à l'étude du paquetage symplectique (voir e.g. [Gro85], [Bir97] de même que [BC09b] dans le cas relatif).

## 1.3. SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES

Une sous-variété  $L$  d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  est dite lagrangienne si  $\dim L = \frac{1}{2} \dim M = n$  et  $\omega|_{T^*L} = 0$ . L'exemple typique est  $\mathbb{R}^n \subset (\mathbb{C}^n, \omega_0)$  et le théorème de Darboux s'applique ici encore ; on peut toujours trouver une carte symplectique autour d'un point de  $L$  qui l'envoie sur la partie réelle de  $\mathbb{R}^{2n}$ . D'ailleurs, ce même théorème donne plusieurs exemples de lagrangiennes

dans  $M$  : il suffit de prendre une lagrangienne dans un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  et l'envoyer dans  $M$ . Il est donc important de d'abord parler de ces lagrangiennes locales. **À l'exception du Chapitre 3, toutes les lagrangiennes considérées seront fermées, i.e. compactes, connexes et sans bord.**

Même si la codimension des lagrangiennes est très grande, elles sont en fait plutôt rigides, comme on peut le voir dans le prochain

**Théorème 1.3.1** (Gromov [Gro85]). *Soit  $L$  une sous-variété lagrangienne fermée de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Alors  $\beta_1(L) := \text{rang } H_1(L; \mathbb{Z}) \geq 1$ .*

La preuve de ce théorème est très indirecte et consiste à montrer l'existence d'un disque holomorphe  $u$  non constant à bord sur  $L$ . Ensuite, un calcul simple donne

$$0 < \int_{D^2} u^* \omega_0 = \int_{D^2} u^* d\lambda = \int_{S^1} u^* \lambda,$$

où  $\lambda$  est une primitive de  $\omega_0$ , d'où on conclut que la boucle représentée par le bord du disque engendre un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$  en homologie. Ce résultat a ensuite été utilisé par Gromov afin de définir des structures symplectique dites exotiques sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . On remarque que l'hypothèse de fermeture ne peut être enlevée, telle qu'on le voit en considérant la lagrangienne  $\mathbb{R}^n$ . On mentionne que ce théorème s'obtient comme corollaire du Théorème 2.1.2, page 17, dans le cas monotone seulement.

Ce résultat contraste fortement avec les immersions lagrangiennes dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et même dans une variété symplectique quelconque. On ne mentionne en ce sens que le résultat suivant, dû, on ne s'en étonnera pas, à Gromov :

**Théorème 1.3.2.** *Une variété  $L$  admet une immersion lagrangienne dans  $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$  si et seulement si  $T_*L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  est un fibré complexe trivial.*

À titre d'exemples, on peut prendre n'importe quel groupe de Lie, puisque ceux-ci sont parallélisables. Aussi, l'Exemple 2 de la page 66 donne une immersion lagrangienne de la sphère  $S^n$  dans  $\mathbb{C}^n$ , pour n'importe quelle valeur de  $n$ .

Deux homomorphismes associés à une lagrangienne  $L$  seront importants dans toute cette thèse, notamment l'aire symplectique de disques à bord sur  $L$  :

$$\begin{aligned}\omega &: \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{D^2} u^* \omega\end{aligned}$$

et l'indice de Maslov :

$$\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

L'indice de Maslov envoie un disque sur la classe d'homotopie d'une boucle dans  $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ , soit l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels lagrangiens de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , en suivant le plan tangent à  $L$  le long de la frontière du disque ; on utilise ici le fait que  $u^*(TM, \omega) \cong (D^2 \times \mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Le lecteur pourra consulter [MS95] pour une définition plus précise. L'image de ce morphisme est alors  $N_L \mathbb{Z}$ , où  $N_L \geq 0$  est appelée la classe de Maslov minimale de  $L$ .

Dans cette thèse, **toutes les lagrangiennes sont monotones**, ce qui signifie que  $N_L \geq 2$  et qu'il y a une constante  $\tau > 0$ , appelée constante de monotonie, telle que

$$\omega(A) = \tau \mu(A) \quad \forall A \in \pi_2(M, L).$$

#### 1.4. DISTANCE DE HOFER ET RAYON DE GROMOV RELATIF

Étant donnée une lagrangienne  $L$ , soit  $\mathcal{L}(L) := \{\phi(L) \mid \phi \in \text{Ham}\}$  l'ensemble de toutes les lagrangiennes hamiltoniennes isotopes à cette dernière. Cet ensemble est muni de la pseudo-*distance de Hofer*

$$\nabla : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla(L, L') = \inf_{\phi \in \text{Ham}(M) \mid \phi(L) = L'} \{E(\phi)\}.$$

On dit que  $\phi \in \text{Ham}(M)$  est *non-dégénéré* (par rapport à  $L$ ) si  $\phi(L) \cap L$  s'intersectent transversalement ; cette définition est nécessaire en homologie de Floer lagrangienne (voir la Section 2.2.3).

La pseudo-distance de Hofer est en fait une vraie distance. Ce résultat, bien que simple à énoncer, s'avère difficile à démontrer. L'argument essentiel

montre que la distance est strictement positive dès que  $L' \neq L$ . Il a été montré en toute généralité (sans hypothèse de monotonie) par Chekanov [Che98].

La preuve de Chekanov repose sur des méthodes de courbes holomorphes et est très indirecte, comme la preuve du théorème de non plongement. Elle consiste à d'abord démontrer les inégalités de Morse dans le cadre lagrangien. Plus exactement, si l'énergie d'un difféomorphisme hamiltonien est plus petite que l'aire symplectique de toutes les sphères ou disques J-holomorphes à bord sur  $L$ , alors  $\#\{L \cap \phi(L)\} \geq \sum \beta_i(L)$ , en supposant que l'intersection est transverse. On en déduit que l'énergie de déplacement d'une lagrangienne, c'est à dire l'énergie minimale des hamiltoniens  $\phi$  tels que  $\phi(L) \cap L = \emptyset$ , est strictement positive, car  $L$  est compacte.

Maintenant, soient  $L \neq L' \in \mathcal{L}(M)$  deux lagrangiennes et  $\phi \in \text{Ham}(M)$  vérifiant  $\phi(L) = L'$ . Comme  $L \neq L'$ ,  $\phi$  doit déplacer une petite boule dans  $M$  (indépendante de  $\phi$ ) contenant un point de  $L \setminus L'$ . Cette boule contient un tore lagrangien qui sera déplacé par  $\phi$ , d'où on tire que l'énergie de  $\phi$  est bornée inférieurement par l'aire des sphères ou disques J-holomorphe minimaux, qui est strictement positive. Le résultat suit.

Barraud et Cornea [BC07a] ont défini le rayon de Gromov de  $L$  relatif à  $L'$  par

$$w_G(M \setminus L', L) := \sup \left\{ \frac{\pi}{2} r^2 \mid \begin{array}{l} \text{Il existe un plongement symplectique} \\ e : B^{2n}(r) \rightarrow M \setminus L', \\ e^{-1}(L) = B^{2n}(r) \cap \mathbb{R}^n \end{array} \right\}.$$

Le Théorème 2.1.1 du Chapitre 2 relie le rayon relatif à la distance de Hofer (dans le cadre monotone) et généralise des résultats de Barraud et Cornea. Dans ce chapitre, on discutera en détails de résultats utilisant cette capacité symplectique relative.

Finalement, le rayon relatif a été généralisé par Biran et Cornea dans le contexte du paquetage symplectique [BC09b].



# Chapitre 2

---

## UN RAFINEMENT GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE CHEKANOV

### 2.1. INTRODUCTION

Étant données  $L$  et  $L'$  deux lagrangiennes monotones et hamiltoniennes isotopes (pas nécessairement transverses) d'une variété symplectique  $(M^{2n}, \omega)$  convexe à l'infini, on considère une boule de rayon  $r$  plongée symplectiquement dans  $M \setminus L'$  et dont la partie réelle repose sur  $L$ . Le résultat principal de ce chapitre relie ce rayon à la distance de Hofer  $\nabla(L, L')$  entre les deux lagrangiennes :

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $r$  tel que défini ci-haut, alors  $\frac{\pi}{2}r^2 \leq \nabla(L, L')$ .*

On utilisera dans la preuve le résultat suivant.

**Théorème 2.1.2.** *Soient  $L$  et  $L'$  deux lagrangiennes monotones et hamiltoniennes de  $(M, \omega)$ . Alors pour chaque structure presque complexe  $J \in \mathcal{J}_\omega$  et pour chaque  $x \in L \setminus L'$ , il existe une fonction  $J$ -holomorphe  $u$  qui est soit une bande dont la frontière repose sur  $L$  et  $L'$ , soit un disque à bord sur  $L$ , soit une sphère, et qui est telle que  $x \in \text{Im}(u)$  et  $\int u^* \omega \leq \nabla(L, L')$ . De plus, si  $L$  et  $L'$  sont transverses, alors pour chaque  $J$  générique, on a  $\mu(u) \leq n$ .*

Ce théorème résout partiellement une conjecture de Barraud et Cornea, énoncée sans l'hypothèse de monotonie [BC06]. Il montre aussi que la distance de Hofer est non-dégénérée, résultat d'abord montré par Chekanov [Che00] sans la monotonie. En regardant attentivement la preuve du Théorème 2.3.1,

on peut éliminer la présence de sphères holomorphes pour un ensemble de deuxième catégorie dans  $L \setminus L'$ .

En appliquant le Théorème 2.1.2 à une lagrangienne déplaçable par une isotopie hamiltonienne, on retrouve un résultat connu disant que par chaque point générique de  $L$  passe un disque pseudo-holomorphe d'aire symplectique moindre que l'énergie de déplacement. Ceci implique un autre résultat de Chekanov [Che98], soit que l'énergie nécessaire pour déplacer une lagrangienne de façon hamiltonienne est plus grande que l'aire du plus petit disque ou de la plus petite sphère holomorphes.

Dans le même ordre d'idées, on peut aussi en déduire que lorsque la distance de Hofer entre deux lagrangiennes est plus petite que le seuil de bouillonnement (i.e. l'aire minimale d'une sphère ou d'un disque holomorphes), alors on peut trouver une bande holomorphe passant par un point quelconque de  $L$  dont l'indice de Maslov est borné supérieurement par  $n$  et dont l'aire symplectique est plus petite que  $\nabla(L, L')$ , reprouvant ainsi un résultat de Barraud et Cornea ([BC07a] et [BC06]).

Ces applications directes du Théorème 2.1.2 correspondent aux cas extrêmes où il n'y a soit aucune bande, soit aucun disque holomorphes. La nouveauté de ce résultat réside dans le cas intermédiaire, où il n'est pas clair a priori si une surface holomorphe existe. Le théorème dit alors qu'il en existe bien une et que son aire est assez petite.

Afin de montrer ce théorème, on ne peut pas seulement considérer l'homologie de Floer lagrangienne ou encore l'homologie quantique lagrangienne, puisqu'elles peuvent être nulles. Cependant, on détecte la présence de bandes ou de disques en travaillant directement au niveau des complexes de chaînes. Les principaux outils utilisés sont une action du complexe de perles sur le complexe de Floer (voir §2.2.5) combinée à une homotopie de chaînes entre l'identité et la composition  $\text{PSS}^{-1} \circ \text{PSS}$  (voir §2.2.4).

On définit toutes les structures nécessaires aux preuves des théorèmes à la prochaine section et on procède ensuite aux preuves elles-mêmes. Enfin, on

donne aussi certaines estimations d'énergie nécessaires aux théorèmes, mais déjà classiques.

## 2.2. STRUCTURES ALGÈBRIQUES

### 2.2.1. Conventions et définitions

On réfère le lecteur au Chapitre 1 pour les définitions de base.

#### 2.2.1.1. *Disques pseudo-holomorphes simples et absolument distincts*

Afin de définir diverses structures algébriques, on considèrera des espaces de disques pseudo-holomorphes à bord sur une lagrangienne satisfaisant certaines relations d'incidence, e.g. la frontière intersecte une variété instable d'un flot gradient transversalement, etc. La procédure ira généralement comme suit. D'abord, on définit un espace impliquant des disques, des bandes de Floer et d'autres objets et on calcule la dimension virtuelle de cet espace.

Ensuite, on montre que lorsque la dimension virtuelle est au plus 1, alors cet espace est une variété différentiable dont la dimension coïncide avec la dimension virtuelle. L'argument clé pour montrer la structure de variétés reviendra souvent à montrer que les disques utilisés pour définir cet espace sont simples et absolument distincts, ce qui est fait par une récurrence sur la classe de Maslov totale et repose sur un résultat technique de Lazarrini (voir [BC07b] et [Laz00]).

Puisque ces détails techniques ont été étudiés minutieusement par Biran et Cornea, on n'insistera pas sur ces conditions de simplicité, cependant le lecteur devrait les garder à l'esprit en considérant les innombrables espaces de modules utilisés dans cette thèse.

#### 2.2.1.2. *Théorie de Morse*

Étant données une fonction Morse-Smale  $f$  et  $\rho$  une métrique riemannienne, on dénote par  $\text{Crit}(f)$  l'ensemble des points critiques de  $f$ ,  $\phi_t$  son flot gradient

négatif et  $W^u(x)$  (resp.  $W^s(x)$ ) la variété instable (resp. stable) d'un point critique  $x$ . L'indice de Morse d'un point critique  $x$  est défini par  $|x| = \dim W^u(x)$  et il induit une graduation sur  $\text{Crit}(f)$ .

## 2.2.2. Homologie quantique lagrangienne

### 2.2.2.1. Complexe de perles

On rappelle brièvement la construction du complexe de perles, d'abord suggéré par Oh [Oh96] d'après une idée de Fukaya et développé ensuite par Biran et Cornea, dont l'homologie est appelée homologie lagrangienne quantique et est dénotée  $QH(L)$ . Le lecteur est invité à lire les articles [BC09b], [BC09a] ainsi que le plus technique [BC07b] pour une exposition plus détaillée et de nombreuses applications de ces structures à la topologie des sous-variété lagrangiennes.

Soit  $\Lambda = \mathbb{Z}_2[t, t^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent muni de la graduation  $\deg t = -N_L$ .

Soit  $f : L \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Morse-Smale et  $J \in \mathcal{J}_\omega$ , ainsi que  $\rho$  la métrique riemannienne associée à  $J$ . Le *complexe de perles* associé à  $f$  est l'anneau gradué

$$\mathcal{C}_*(f, \rho, J) = (\mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda)_*$$

où le degré d'un point critique est son indice de Morse.

La différentielle  $d$  est définie en comptant (modulo 2) les lignes du flot de Morse (i.e. le gradient négatif) ainsi que les trajectoires perlées, où on suit des lignes de flot de Morse connectant ensemble des disques  $J$ -holomorphes à bord sur  $L$ , dont les points de départ et d'arrivée sont des points critiques (voir la figure 2.1). Cette différentielle se scinde en une somme  $d = \sum_k d_k$ , où  $d_k$  compte le nombre (modulo 2) de trajectoires perlées dont la classe de Maslov totale des disques  $y$  figurant est  $kN_L$ ,  $k \geq 0$ .



FIG. 2.1: Une perle !

Afin de pouvoir compter le nombre de trajectoires perlées, il faut d’abord montrer qu’elles forment une variété différentiable de dimension 0 (en restreignant les indices de façon appropriée). Ce résultat est démontré dans [BC07b] et fait grand usage de la monotonie. Il y est ensuite montré que  $d^2 = 0$  en utilisant un argument de recollement (de l’anglais «gluing») pour les produits d’espaces de perles en dimension zéro. Finalement, en adaptant des arguments standards en théorie de Morse, ils montrent que l’homologie de ce complexe est indépendante des choix de  $J$  et de  $f$  génériques.

Sans l’hypothèse de monotonie, il serait alors nécessaire d’élargir le complexe de perles et de considérer plutôt le complexe des amas (voir [CL05]), ou encore les structures  $A_\infty$  de [FOOO09].

### 2.2.2.2. *Produit quantique lagrangien*

Dans cette section, on rappelle comment donner à l’homologie quantique la structure d’un anneau unitaire, qui correspond au produit d’intersection en théorie de Morse lorsqu’il n’y a pas de disque pseudo-holomorphe. Des exemples montrent que cet anneau n’est pas commutatif, pas même au sens gradué (voir e.g. [BC09b]).

On fixe  $f, g$  deux fonctions Morse-Smale. Soient  $x \in \text{Crit}(f)$  et  $y, z \in \text{Crit}(g)$ . On considère l’espace des tripodes de classe de Maslov totale  $kN_L$ , dénoté  $\mathcal{P}_z^{x,y}(k)$ , tel qu’indiqué à la figure 2.2. La perle du coin supérieur gauche quitte  $y$  et relie des disques pseudo-holomorphes par des lignes du flot  $-\nabla g$  jusqu’à ce qu’elle atteigne un disque pseudo-holomorphe  $v$ , qui peut être constant.

La perle du coin inférieur gauche suit des lignes du flot  $-\nabla f$  jusqu’à atteindre le même disque  $v$ . Quant à la perle de droite, elle quitte le disque  $v$  et atteint éventuellement le point  $z$ . Lorsqu’aucun disque n’est présent, on retrouve le produit d’intersection classique.

Le produit qu’on voit à la figure 2.2 est dénoté  $x \circ y = z \otimes t^k$ , où  $kN_L$  est la somme des classes de Maslov des disques.

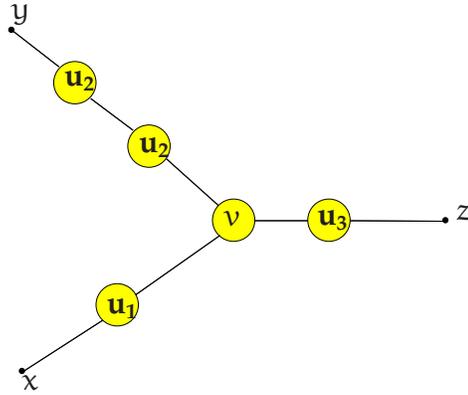


FIG. 2.2: Un tripode

Les considérations techniques mentionnées dans la définition du complexe de perles permettent de compter (modulo 2) le nombre de tripodes de dimension 0. Ces derniers sont ensuite utilisés pour définir le *produit quantique*

$$\circ : (\mathcal{C}(f) \otimes_{\wedge} \mathcal{C}(g))_* \rightarrow \mathcal{C}(g)_{* - n}.$$

En regardant une compactification appropriée des espaces unidimensionnels de tripodes et en utilisant un argument de recollement (voir [BC07b]), on montre que cette opération induit un produit en homologie, aussi appelé produit quantique. Des arguments standards montrent que le produit est indépendant des choix génériques impliqués dans sa construction.

On vérifie directement, en arguant sur la dimension, que  $M_f$  est l'unité de ce produit, au niveau même des chaînes, où  $f$  est une fonction Morse-Smale possédant un unique maximum  $M_f$ . Autrement dit,  $M_f \circ y = y \forall y \in \text{Crit}(g)$ . Cependant,  $M_g$  ne serait une unité qu'en homologie seulement.

### 2.2.3. Homologie de Floer lagrangienne

On rappelle maintenant la construction d'une version de l'homologie de Floer lagrangienne (voir aussi [Oh93]).

Soit  $H \in \mathcal{H}$  un hamiltonien non-dégénéré ainsi que son flot hamiltonien  $\Psi_t$ . On s'intéresse à l'ensemble des orbites contractiles du flot hamiltonien débutant et terminant sur  $L$ . Soit d'abord l'ensemble des chemins relatifs contractiles

$\mathcal{P}_0(L) = \{\gamma \in C^\infty([0, 1], M) \mid \gamma(0) \in L, \gamma(1) \in L, [\gamma] = 1 \in \pi_1(M, L)\}$  et le sous-ensemble des orbites hamiltoniennes contractiles  $\mathcal{O}_H = \{\gamma \in \mathcal{P}_0(L) \mid \gamma'(t) = X_H^t(\gamma(t))\}$ . Comme  $H$  est non-dégénéré, il n'y a qu'une quantité finie de telles orbites, qui correspondent à un sous-ensemble des points d'intersection de  $L \cap \Psi_1(L)$

On définit  $D_-^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  la partie gauche du disque unité complexe. On sépare sa frontière en deux chemins paramétrés par  $[0, 1]$ , soient  $\gamma_1 = D_-^2 \cap S^1$  et  $\gamma_2 = D_-^2 \cap i\mathbb{R}$ , orientés de telle sorte que  $\gamma_1 \# \gamma_2$  parcourt le bord du disque dans le sens anti-horaire.

Soient maintenant  $\gamma \in \mathcal{O}_H$  et un disque  $u : (D_-^2, \gamma_1, \gamma_2) \rightarrow (M, L, \gamma)$  vérifiant  $u(\gamma_2(t)) = \gamma(t)$ , c'est donc un demi-disque qui «bouche» l'orbite  $\gamma$  (puisque  $\gamma \in \mathcal{P}_0(L)$ , un tel demi-disque existe). À l'aide d'une trivialisaton du fibré symplectique  $u^*TM$ , on obtient un chemin de sous-espaces linéaires lagrangiens de  $\mathbb{R}^{2n}$ , en suivant le chemin de lagrangiennes  $T_{\gamma_1(t)}L \# (\Psi_t)_*(T_{\gamma_1(1)}L)$ . Il est possible d'associer un indice de Maslov à un tel chemin (voir [RS93]), en fixant d'abord  $T_{\gamma_2(0)}L$  comme lagrangienne de référence. Avec ce choix, l'indice de Maslov d'un couple  $(u, \gamma)$  vérifie  $\mu(u, \gamma) + n/2 \in \mathbb{Z}$  ([RS93], Théorème 2.4). C'est un demi-entier tel que  $\mu(u, \gamma) + \mu(-v, \gamma) = \mu(u \# (-v)) \in \mathbb{N}_L \mathbb{Z}$ ; Il généralise ainsi l'indice de Maslov d'une boucle de lagrangiennes.

On définit une relation d'équivalence sur ces couples par  $(u, \gamma_1) \sim (v, \gamma_2) \iff \gamma_1 = \gamma_2$  et  $\mu((u, \gamma_1)) = \mu((v, \gamma_2))$ . L'espace quotient est dénoté par  $\tilde{\mathcal{O}}_H$ . On remarque que  $\tilde{\mathcal{O}}_H$  est en bijection avec  $\mathcal{O}_H \times \Lambda$ , car il est muni d'une action transitive de  $\pi_2(M, L)$  (donnée par la somme connexe) dont le stabilisateur est  $\ker \mu$ , et  $\pi_2(M, L) / \ker \mu \cong \Lambda$ . Pour chaque  $\gamma \in \mathcal{O}_H$ , on fixe alors un représentant de la classe d'équivalence  $\tilde{\gamma} := [u_\gamma, \gamma] \in \tilde{\mathcal{O}}_H$ .

Le complexe de Floer est alors donné par

$$\operatorname{CF}(L, H, J) = \mathbb{Z}_2 \langle \tilde{\gamma} \mid \gamma \in \mathcal{O}_H \rangle \otimes \Lambda,$$

et la graduation est  $|\tilde{\gamma}| := n/2 - \mu(\tilde{\gamma})$ . Avec ce choix, les morphismes PSS et  $\operatorname{PSS}^{-1}$  de la Section 2.2.4 préservent le degré (ce choix n'est certainement pas nécessaire, mais rend les notations plus faciles à suivre).

La différentielle est donnée en comptant (modulo 2, comme toujours) les bandes  $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M$  telles que  $u(t, i) \in L$ ,  $i = 0, 1$  et satisfaisant à l'équation de Floer

$$\partial_s u + J(u)\partial_t u + \nabla H_t(u) = 0 \quad (2.2.1)$$

ainsi qu'aux conditions asymptotiques

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s, t) = \gamma^\pm(t) \in \mathcal{O}_H. \quad (2.2.2)$$

On pose

$$\mathcal{M}(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, k) = \left\{ u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M \left| \begin{array}{l} u \text{ vérifie (2.2.1) et (2.2.2)} \\ \mu(u_{\tilde{\gamma}^-} \# u \# -u_{\tilde{\gamma}^+}) = kN_L \end{array} \right. \right\}.$$

Étant donnés des choix génériques d'hamiltonien  $H$  et de structure presque complexe  $J \in \mathcal{J}_\omega$ ,  $\mathcal{M}(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, k)$  est une variété différentielle de dimension  $|\tilde{\gamma}^-| - |\tilde{\gamma}^+| + kN_L$ . On remarque aussi l'action par translation de  $\mathbb{R}$  sur chaque bande, donnée par  $u(s, t) \mapsto u(s_0 + s, t)$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}$ . L'espace quotient est dénoté par  $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, k)$ .

La différentielle de Floer est définie par

$$\begin{aligned} \partial : CF_*(L, H, J) &\rightarrow CF_{*-1}(L, H, J) \\ \tilde{\gamma}^- &\mapsto \sum_{\substack{\tilde{\gamma}^+, k \\ |\tilde{\gamma}^-| + kN_L - |\tilde{\gamma}^+| - 1 = 0}} \#_2 \tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, k) \tilde{\gamma}^+ \otimes t^k \end{aligned}$$

qu'on étend ensuite par linéarité. C'est bien une différentielle et l'homologie de Floer lagrangienne résultante est indépendante des choix de  $H$  et  $J$  réguliers (voir par exemple [Oh93]).

#### 2.2.4. Morphismes PSS et PSS<sup>-1</sup> lagrangiens

Ayant défini deux homologies associées à une sous-variété lagrangienne, il est maintenant naturel de vouloir les comparer. Il n'est pas surprenant que ces homologies soient isomorphes et on rappelle comment le montrer, en utilisant les morphismes PSS et PSS<sup>-1</sup>.

Ces morphismes ont d'abord été introduits en homologie de Floer hamiltonienne par Piunikhin, Salamon et Schwarz [PSS96] et ont ensuite été étudié de

manière indépendante par Albers ([Alb08], [Alb10]) dans le cadre lagrangien monotone ainsi que par Katić et Milinković ([KM05]) dans le cas de la section nulle du fibré cotangent. Barraud et Cornea ont obtenu certains résultats dans [BC06] en les considérant sous le seuil de bouillonnement du cadre lagrangien non-monotone. Ils ont été défini en toute généralité dans [CL05].

Comme toujours, des espaces de modules seront nécessaires. Comme on veut comparer le complexe de perles avec le complexe de Floer, l'idée géométrique appropriée consiste à considérer un espace de perles telles que le dernier disque de la perle est un demi-disque satisfaisant à une équation de Floer perturbée et convergeant vers une orbite hamiltonienne. Ces demi-disques peuvent être vus comme des bandes  $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M$  satisfaisant à l'équation PSS

$$u_s + Ju_t + \beta(s)\nabla H = 0, \quad (2.2.3)$$

où  $\beta(s)$  est 0 si  $s \leq 0$ , vaut 1 si  $s \geq 1$  et  $\beta' \geq 0$ . Ainsi,  $u$  interpole entre les équations de Cauchy-Riemann  $\bar{\partial}_J u = 0$  et l'équation de Floer (2.2.1). On exige aussi les conditions asymptotiques et aux bords suivantes (voir figure 2.3) :

$$\begin{cases} u(s, i) \in L, s \in \mathbb{R}, i = 0, 1; \\ u(-\infty, t) = l_0 \text{ pour un certain } l_0 \in L; \\ u(\infty, \cdot) \in \mathcal{O}_H. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

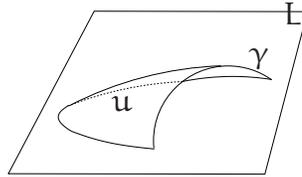


FIG. 2.3: Demi-disque du PSS

Sous ces conditions,  $u$  peut être vu comme une fonction  $u : (D^2_-, \gamma_1, \gamma_2) \rightarrow (M, L, \gamma)$ .

On dénote par  $\mathcal{M}(x, \tilde{\gamma}, m)$  l'espace des perles partant de  $x$  où le dernier disque est un demi-disque convergeant vers  $\gamma$  et vérifiant (2.2.3) ainsi que (2.2.4). L'entier  $mN_{\mathbb{L}}$  est la classe de Maslov totale des disques plus la classe de Maslov de  $-u_{\gamma}$  (voir figure 2.4). Comme auparavant, la dimension virtuelle de cet espace est  $v := |x| + mN_{\mathbb{L}} - |\tilde{\gamma}|$  (voir [BC07b] et [Alb08]). Lorsque  $v \leq 1$ , alors  $\mathcal{M}(x, \tilde{\gamma}, m)$  est une variété de dimension  $v$ .

Le morphisme PSS est donné par

$$\text{PSS} : \mathcal{C}_*(f) \rightarrow \text{CF}_*(L; H)$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{\tilde{\gamma}, m \\ |x| + mN_{\mathbb{L}} - |\tilde{\gamma}| = 0}} \#_2 \mathcal{M}(x, \tilde{\gamma}, m) \tilde{\gamma} \otimes t^m.$$

Par des arguments de compacité et de recollement, on montre qu'il s'agit d'un morphisme de chaînes.



FIG. 2.4: Une perle convergeant vers une orbite

Le morphisme inverse est défini de façon similaire : on débute avec une orbite  $\gamma$  et on utilise un demi-disque suivi de perles jusqu'à un point critique  $x$ . Ce demi-disque satisfait à l'équation PSS inverse

$$u_s + Ju_t + \beta(-s)\nabla H = 0. \quad (2.2.5)$$

L'ensemble des perles de  $\gamma$  à  $x$  avec un tel demi-disque  $\text{PSS}^{-1}$  est dénoté  $\mathcal{M}(\tilde{\gamma}, x, m)$  et sa dimension (virtuelle) est  $|\tilde{\gamma}| + mN_{\mathbb{L}} - |x|$ , où  $mN_{\mathbb{L}}$  est la classe de Maslov totale des disques plus la classe de Maslov de  $u_{\gamma}$ . Le morphisme inverse est défini au niveau des chaînes par

$$\text{PSS}^{-1} : \text{CF}_*(L, H) \rightarrow \mathcal{C}_*(f)$$

$$\tilde{\gamma} \mapsto \sum_{\substack{\tilde{\gamma}, m \\ |\tilde{\gamma}| + mN_{\mathbb{L}} - |x| = 0}} \#_2 \mathcal{M}(\tilde{\gamma}, x, m) x \otimes t^m.$$

Il reste à montrer qu'il y a une homotopie de chaînes  $\psi : \mathcal{C}_*(f) \rightarrow \mathcal{C}_{*+1}(f)$  vérifiant

$$\text{id} - \text{PSS}^{-1}\text{PSS} = (d\psi - \psi d). \quad (2.2.6)$$

La forme de cette homotopie de chaînes est la même que celle dans [Alb08], elle-même adaptée du cas hamiltonien [PSS96], la seule différence est la présence de disques holomorphes non constants. On rappelle quand même sa construction, car certains espaces de modules y figurant seront utilisés pour prouver le Théorème 2.1.2. On n'aura cependant pas besoin du fait que  $\text{PSS}^{-1}$  est l'inverse à droite de PSS, on ne le montre donc pas.

En recollant ensemble deux disques vérifiant respectivement les équations PSS et PSS inverse le long de leur orbite commune, on obtient un élément de  $\pi_2(M, L)$  vérifiant une équation de Cauchy-Riemann perturbée. Ce disque devrait alors être utilisé dans une famille à un paramètre pour interpoler entre l'identité et  $\text{PSS}^{-1} \circ \text{PSS}$ . Plus formellement, soit  $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M$  vérifiant  $u(s, i) \in L$ ,  $i = 0, 1$ , et satisfaisant à l'équation

$$u_s + J(t, u)u_t + \alpha_R(s)\nabla H = 0, \quad E(u) := \int \omega(u_s, Ju_s) < \infty, \quad (2.2.7)$$

où  $R \geq 1$ ,  $\alpha_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse et est telle que  $\alpha_R(s) \begin{cases} = 1 \text{ si } |s| \leq R \\ = 0 \text{ si } |s| \geq R + 1 \\ -1 \leq \alpha'_R(s) \leq 1. \end{cases}$

On pose aussi  $\alpha_R = R\alpha_1$  lorsque  $R \in (0, 1)$ . Comme  $E(u) < \infty$ , on peut montrer que  $u$  induit une autre fonction  $u : (D^2, S^1) \rightarrow (M, L)$ . À l'instar des disques holomorphes, la classe de Maslov de ces disques peut être négative.

Soient ensuite  $x, y \in \text{Crit}(f)$  et une perle allant de  $x$  à  $y$ , où tous les disques sont J-holomorphe, à l'exception d'un seul, qui lui satisfait à l'équation (2.2.7) pour un certain  $R$  dépendant du disque. On quotiente par un groupe d'automorphismes de perles et on dénote l'ensemble de ces nouvelles perles par  $\mathcal{M}(x, y, m)$ , où  $mN_L$  est la classe de Maslov totale (encore une fois,  $m$  peut être négatif).

La dimension virtuelle de cet espace est  $v := |x| + mN_L - |y| + 1$  et, lorsque  $v \leq 1$ , il s'agit d'une variété de dimension  $v$ . Le paramètre  $R$  augmente la dimension par 1, d'où le terme «+1» dans la dimension virtuelle.

L'homotopie de chaînes cherchée est alors donnée par

$$\psi : \mathcal{C}_*(f) \rightarrow \mathcal{C}_{*+1}(f)$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{y, m \\ |x| + mN_L - |y| + 1 = 0}} \#_2 \mathcal{M}(x, y, m) y \otimes t^m.$$

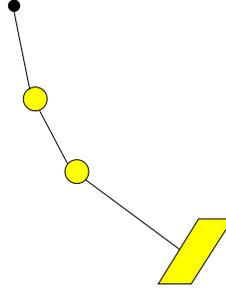
Pour montrer qu'il s'agit bien d'une homotopie de chaînes, on compactifie les espaces  $\mathcal{M}(x, y, m)$  de dimension 1 et on regarde leur bord. On obtient  $\text{PSS}^{-1} \circ \text{PSS}$  en faisant tendre  $R$  vers l'infini et l'identité en le faisant tendre vers zéro.

### 2.2.5. Structures de $\text{QH}(L)$ -module

Dans cette section, on munit  $\text{HF}(L)$  d'une structure de  $\text{QH}(L)$ -module. Cette structure a été utilisé par Schwarz [Sch00] en homologie de Floer hamiltonienne lorsque  $M$  est symplectiquement asphérique et par Leclercq en homologie de Floer lagrangienne dans le cas faiblement exact, afin de définir des invariants spectraux.

La forme géométrique de cette structure consiste à «brancher» une perle à une bande telle qu'à la figure 2.5. Soient donc  $x \in \text{Crit}(f)$  et  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{O}}_H$ . On dénote ensuite  $\mathcal{M}(x, \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, k)$  l'ensemble de toutes les perles partant de  $x$  et telles que la dernière ligne de flot entre dans une bande de Floer  $v$  connectant  $\gamma$  à  $\alpha$  au point  $v(0, 0)$ , où  $kN_L$  est la classe de Maslov totale des disques pseudo-holomorphes plus celle de  $u_\gamma \# v \# -u_\alpha$ .

Sous des hypothèses de généricité et lorsque la dimension virtuelle de cet espace est au plus égale à 1, il s'agit d'une variété lisse de dimension  $|x| + |\tilde{\gamma}| + kN_L - |\tilde{\alpha}| - n$ . On donne ici les lignes directrices nécessaires pour montrer qu'il s'agit bien d'une variété, puisque, contrairement à la plupart des autres structures présentées dans ce chapitre, la structure de module n'a pas été traitée directement par Biran et Cornea. On indique seulement des articles de référence,

FIG. 2.5:  $x \star \gamma$ 

puisque les détails apparaissent dans des endroits variés dans la littérature, dans des contextes différents.

Les principaux problèmes concernent deux arguments de transversalité. Le premier montre que les variétés instables du flot gradient intersectent les bandes de Floer transversalement en  $(0, 0)$ . Pour montrer ceci, on doit permettre à la structure complexe de varier et considérer l'espace de module universel des bandes de Floer (voir e.g. [FHS95]). Cet argument était implicite dans [Lec08].

Le deuxième argument montre que l'évaluation d'un disque pseudo-holomorphe au point 1 intersecte les bandes de Floer transversalement en  $(0, 0)$ . Encore ici, on doit permettre à la structure presque complexe de varier et adapter la preuve de [MS04], Proposition 3.4.2. On choisit ensuite une structure presque complexe commune près du point d'intersection, qu'on utilise afin de recoller ensemble un disque et une bande en une bande d'un côté, et en une ligne de flot reliant ce disque et cette bande de l'autre côté.

Une fois ces deux vérifications terminées, en raisonnant par récurrence, comme à la Proposition 3.1.3 de [BC07b], on montre que lorsque la dimension virtuelle est au plus 1, les disques présents sont tous simples et absolument distincts, ainsi  $\mathcal{M}(x, \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, k)$  est une variété ayant la dimension désirée.

L'action du complexe de perles sur le complexe de Floer est définie par

$$\star : (\mathcal{C}(f) \otimes_{\wedge} CF(L, H))_{\star} \rightarrow CF(L, H)_{\star-n}$$

$$x \otimes \tilde{\gamma} \mapsto \sum_{\substack{\tilde{\alpha}, k \\ |x|+|\tilde{\gamma}|+kN_L-|\tilde{\alpha}|-n=0}} \#_2 \mathcal{M}(x, \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, k) \tilde{\alpha} \otimes t^k.$$

C'est un morphisme de chaînes, par les mêmes arguments de recollement utilisés auparavant. On peut aussi montrer de façon similaire que cette action induit, en homologie, une structure de  $\text{QH}(L)$ -module à gauche sur  $\text{HF}(L)$ . La preuve que  $(x \circ y) \star \gamma = x \star (y \star \gamma)$  n'est pas complètement standard, cependant elle est très similaire à la preuve de (2.2.8) présentée plus bas.

On a montré précédemment que l'homologie quantique lagrangienne est isomorphe, via le morphisme PSS, à l'homologie de Floer lagrangienne. De plus, l'homologie quantique admet une structure de  $\text{QH}(L)$ -module évidente, définie par le produit quantique. Il est donc naturel de se demander si le PSS préserve ces structures de modules. On montre à la prochaine section que c'est bien le cas.

### 2.2.6. Le PSS est un isomorphisme de $\text{QH}(L)$ -module

Cette propriété du PSS a déjà été montré par Leclercq [Lec08] lorsqu'il n'y a pas de disque holomorphe. La preuve qu'on donne ici est une généralisation. On montre qu'étant données deux fonctions Morse-Smale  $f$  et  $g$ , il y a une homotopie de chaînes

$$\eta : (\mathcal{C}(f) \otimes \mathcal{C}(g))_* \rightarrow \text{CF}(L)_{*-n+1}$$

vérifiant

$$\text{PSS}(x \circ y) = x \star \text{PSS}(y) + (\partial\eta - \eta\partial)(x \otimes y). \quad (2.2.8)$$

On remarque d'abord que  $\text{PSS}(x \circ y)$  compte le nombre de points (modulo 2) dans  $\bigcup_z \mathcal{P}_z^{x,y}(k_1) \times \mathcal{M}(z, \tilde{\gamma}, k_2)$ . On peut recoller une telle configuration le long des deux lignes de flot qui entre et sorte de  $z$ , obtenant de la sorte une famille à un paramètre d'espaces qui peuvent se briser et engendrer le terme  $\text{PSS}(x \circ y)$ . On dénote pour l'instant ce nouvel espace par  $\mathcal{S}$  (voir figure 2.6).

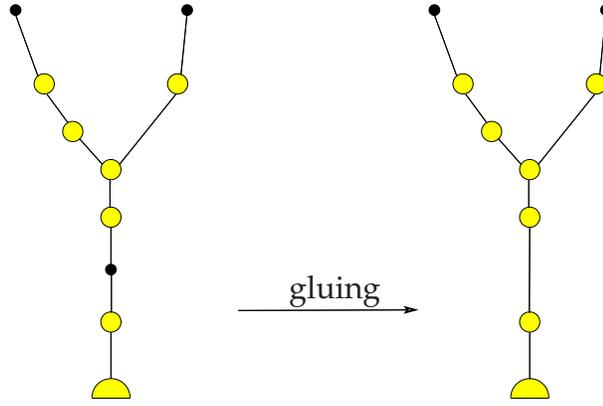


FIG. 2.6: Recoller  $\text{PSS}(x \circ y)$  afin d'éliminer  $z$

En ce qui a trait au terme  $x \star \text{PSS}(y)$ , on peut recoller la bande et le demi-disque le long de l'orbite  $\gamma$  et obtenir ainsi un demi-disque perturbé satisfaisant à (2.2.5). On dénote pour l'instant  $\mathcal{S}'$  l'ensemble de telles configurations.

On veut maintenant utiliser ces deux nouveaux espaces afin de définir l'homotopie de chaînes  $\eta$ . Avant de procéder, on remarque qu'ils définissent en fait le même espace. En effet, on considère une famille à un paramètre d'éléments de  $\mathcal{S}'$ , où un disque avec deux points marqués est expulsé de  $\mathcal{M}(H, \tilde{\alpha}, k)$  à la limite. Par des arguments de recollement standards, on peut recoller ce disque de manière à obtenir un élément de  $\mathcal{S}$  (voir la figure 2.7). Ceci mène à la définition suivante :

$$\eta : (\mathcal{C}(f) \otimes \mathcal{C}(g))_* \rightarrow \text{CF}(L)_{*-n+1}$$

$$x \otimes y \mapsto \sum_{\substack{\tilde{\alpha}, k \\ |x|+|y|+k-|\tilde{\alpha}|-n=0}} \#_2 \mathcal{P}_{\tilde{\alpha}}^{x,y}(k) \tilde{\alpha} \otimes t^k$$

L'espace  $\mathcal{P}_{\tilde{\alpha}}^{x,y}(k)$  est défini comme le produit quantique, excepté que le dernier (demi)-disque  $u$  satisfait à l'équation PSS (2.2.3) et converge vers  $\alpha$  (voir les coins supérieur droit et inférieur gauche de la figure 2.7). De plus,  $kN_L$  est la classe de Maslov totale des disques plus celle de  $-u_\alpha$ .

En considérant les espaces  $\mathcal{P}_{\tilde{\alpha}}^{x,y}(k)$  de dimension 1 et leur frontière, on montre que  $\eta$  est bien une homotopie de chaînes entre  $\text{PSS}(x \circ y)$  et  $x \star \text{PSS}(y)$ .

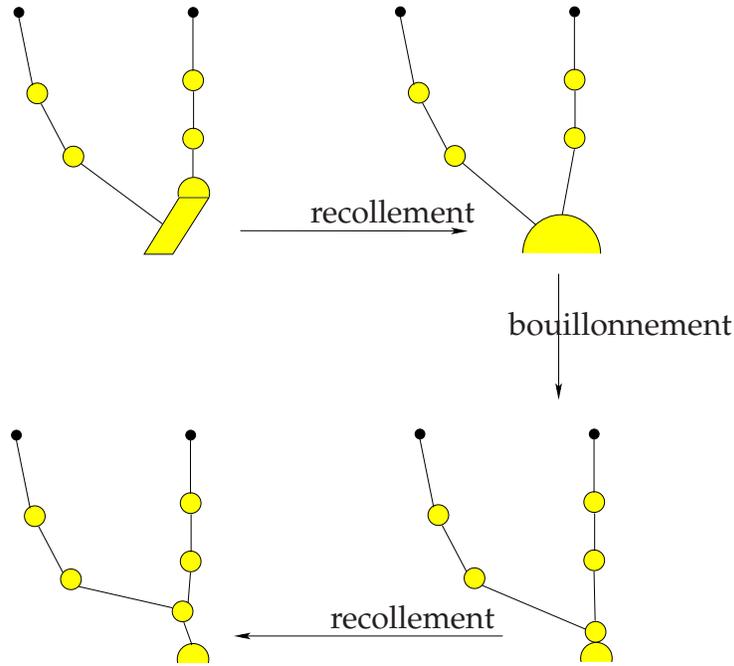


FIG. 2.7: Recoller  $x \star \text{PSS}(y)$  dans  $\mathcal{S}'$  et passer vers  $\mathcal{S}$

### 2.3. PREUVE DES THÉORÈMES 2.1.1 ET 2.1.2

On a maintenant tous les outils nécessaires pour montrer le Théorème 2.1.2.

Il suit directement du prochain

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $L \subset (M^{2n}, \omega)$  une sous-variété lagrangienne monotone et  $H \in \mathcal{H}$  un hamiltonien non-constant. Alors pour chaque  $J \in \mathcal{J}_\omega$ ,  $x_0 \in L$ , il y a une application  $u$  qui est soit une bande de Floer satisfaisant à (2.2.1) et à bords sur  $L$ , soit un disque  $J$ -holomorphe à bord sur  $L$  ou encore une sphère  $J$ -holomorphe, telle que  $x_0$  est dans l'image de  $u$  et  $E(u) \leq \|H\|$ . Si  $L$  et  $\Psi_1^H(L)$  s'intersectent transversalement, alors pour un choix générique de  $J$ , on a  $0 \leq \mu(u) \leq n$ .*

Pour en déduire le Théorème 2.1.2, il suffit d'appliquer le flot hamiltonien  $\Psi_t^H$  de  $H$  sur la fonction  $u$ , dans le cas où c'est une bande de Floer. L'action est donnée par  $\Psi_t^H(u(s, t))$  (comparer avec la Section 3.2.0.2) et donne une bande de Floer  $\Psi_1^\sharp J$ -holomorphe à bords sur  $L$  et  $\Psi_1(L)$ , d'énergie bornée par  $\|H\|$ .

DÉMONSTRATION. *Premier cas* :  $\Psi_1^H(L)$  intersecte  $L$  transversalement. Soient  $f, g$  deux fonctions Morse-Smale génériques, ayant chacune un unique minimum (resp. maximum)  $m_f$  et  $m_g$  (resp.  $M_f$  et  $M_g$ ). L'idée est de choisir  $m_f = x_0$ , le point par lequel on voudrait qu'une bande ou un disque passe. Il n'est pas toujours possible de procéder ainsi, la raison étant que  $W^u(x_0)$  pourrait ne pas intersecter l'espace des disques ou des bandes de Floer transversalement (i.e.  $x_0$  n'est peut-être pas générique). Cependant, par des arguments de généricité, on peut prendre  $m_f$  aussi près que voulu de  $x_0$  et ensuite utiliser une suite de bandes/disques convergent vers  $x_0$  pour obtenir le résultat. On remarque qu'à la limite, une sphère peut bouillonner hors de ces disques/bandes au point  $x_0$ . Il en est de même pour l'indice de Maslov, qui pour un point générique vaudra  $n$ , mais à la limite vaudra au plus  $n$ , puisque le bouillonnement fait diminuer l'indice de Maslov (on utilise ici le fait que  $J$  est générique). On suppose donc que  $m_f = x_0$ .

En combinant les équations (2.2.6) et (2.2.8), on obtient

$$x \circ y = \text{PSS}^{-1}(x \star \text{PSS}(y)) + \text{PSS}^{-1}(\partial\eta - \eta\partial)(x \otimes y) + (d\psi - \psi d)(x \circ y).$$

On pose  $x = m_f$  et  $y = M_g$ , donnant ainsi

$$\begin{aligned} m_g \otimes t^0 + \text{h.o.t} &= \text{PSS}^{-1}(m_f \star \text{PSS}(M_g)) \\ &\quad + \text{PSS}^{-1}(\partial\eta - \eta\partial)(m_f \otimes M_g) \\ &\quad + (d\psi - \psi d)(m_f \circ M_g) \\ &:= (1) + (2) + (3). \end{aligned}$$

L'abréviation t.o.s. signifie «termes d'ordre supérieur» et représente des monômes où une puissance de  $t$  positive apparaît. On note qu'il pourrait n'y avoir aucun terme de la sorte, mais que  $m_g \otimes t^0$  apparaît certainement dans le membre de gauche, par des arguments standards en homologie de Morse. Donc il apparaît aussi dans le membre de droite et une des trois expressions données par (1), (2) et (3) doit le contenir. On conclut qu'un des espaces de modules utilisés pour définir ces expressions doit être non-vide. On montre

maintenant que peu importe le cas, on obtient une application  $u$  avec les propriétés désirées.

Cas (1) : Comme  $m_f$  est le minimum,  $W^u(m_f)$  contient seulement le point  $m_f$ , donc  $m_f$  touche soit à un disque holomorphe ou à une bande de Floer partant de  $PSS(M_g)$  et se terminant à une orbite qui est envoyée vers  $m_g \otimes t^0$  via  $PSS^{-1}$ . On dénote  $u_1$  le disque holomorphe ou la bande de Floer touchant à  $m_f$ ,  $u_i$  les autres disques holomorphes ou demi-disques du  $PSS$  et  $PSS^{-1}$  apparaissant dans l'espace de modules. Par les estimations d'énergie (2.4.2), (2.4.1) et (2.4.3) de la Section 2.4, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_1^k E(u_i) \\ &\leq \sum \omega(u_i) + \|H\| \\ &= \|H\|, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que la classe de Maslov totale (et ainsi l'aire symplectique totale, par monotonie) est nulle, car on considère l'espace de modules représentant le terme  $m_g \otimes t^0$ .

Cas (2) : D'abord, on note que  $m_g \otimes t^0$  ne peut pas être dans l'image de  $d$ , puisque c'est l'unique minimum, on peut ainsi ignorer le terme  $\partial\eta$  de (2) et considérer seulement  $\eta\partial(m_f \otimes M_g)$ . De plus,  $M_g$  étant un cycle par des arguments de théorie de Morse et pour des raisons de degré, on peut simplifier encore et ne considérer que le terme  $\eta(dm_f) \otimes M_g$ , qui doit être non-nul. Finalement,  $m_f$  est le minimum et  $dm_f \neq 0$ , donc un disque holomorphe passe par  $m_f$ . Les mêmes estimations d'énergie qu'au cas (1) donne la borne d'énergie désirée.

Cas (3) : La preuve utilise l'estimation d'énergie (2.4.4) et est identique au cas (2).

*Deuxième cas :  $\Psi_1^H(L)$  n'intersecte pas  $L$  transversalement.*

On règle ce cas en considérant une suite d'isotopies hamiltoniennes  $\Psi_1^{H^k}$  convergeant vers  $\Psi_1^H$ , de norme de Hofer comprise dans l'intervalle  $[\|H\|, \|H\| + \epsilon]$

et telle que l'intersection  $\Psi_1^{\text{H}^k}(L) \cap L$  est transverse. On utilise ensuite le premier cas prouvé ci-haut pour obtenir une suite de fonctions J-holomorphes et on regarde l'application limite. Dans le cas de disques ou de sphères, le théorème de convergence de Gromov s'applique et on obtient le résultat. Le cas restant, soit celui d'une suite de bandes holomorphes  $\{u_k\}$  dont le bord est  $u_k(s, 1) \in \Psi_1^{\text{H}^k}(L)$ , a déjà été étudié par Hofer (voir [Hof88], Proposition 2), où il est montré que le manque de compacité est dû à un bouillonnement de sphère ou de disque.

On obtient ainsi la même borne qu'auparavant sur l'énergie de l'application  $u$ , sauf qu'il est impossible de prédire son indice de Maslov, car il n'y a pas de contrôle sur la dimension de  $L \cap \Psi_1^{\text{H}^k}(L)$  (dans la définition de l'indice de Maslov en §2.2.3, il fallait choisir une lagrangienne de référence et utiliser la dimension de l'intersection).  $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.1. Cet argument est standard et remonte à Gromov. On suppose d'abord que l'application  $u$  du Théorème 2.1.2 est soit une bande de Floer, soit un disque. Soit maintenant un plongement symplectique  $e : (B(r), \omega_0, J_0) \rightarrow (M \setminus L', \omega, e^*J_0)$  qui envoie la partie réelle de la boule sur  $L$ . Alors  $e^{-1} \circ u$  est une courbe  $J_0$ -holomorphe passant par le centre de la boule dont l'aire, par le théorème de réflexion de Schwarz et par la théorie des courbes holomorphes classique, est au moins  $\frac{\pi}{2}r^2$ . Par choix de  $u$ , cette aire est aussi bornée supérieurement par  $\nabla(L, L')$ .

Si  $u$  est une sphère, le même argument donne  $\pi r^2 \leq \nabla(L, L')$ .  $\square$

## 2.4. ESTIMATIONS D'ÉNERGIE

Ces estimations sont maintenant standards et on peut les trouver en annexe de [Alb08] (en faisant attention aux conventions de signes, etc.); on ne donne donc que celles nécessaires à la preuve du Théorème 2.3.1. On rappelle la définition de l'énergie d'une fonction de deux variables :

$$E(u) := \int \omega(u_s(s, t), J u_t(s, t)) ds dt.$$

**Proposition 2.4.1.** *Étant donnée une bande de Floer  $u \in \mathcal{M}(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, k)$ , on a*

$$E(u) = \omega(u) - \int H_t(\gamma^+(t)) dt + \int H_t(\gamma^-(t)) dt. \quad (2.4.1)$$

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $u$  un demi-disque satisfaisant à l'équation (2.4) et convergent vers une orbite  $\gamma$ , alors*

$$E(u) \leq \omega(u) - \int H_t(\gamma(t)) + \int \sup_M H_t(\cdot) dt. \quad (2.4.2)$$

De façon analogue, on borne supérieurement l'énergie d'un demi-disque  $u$  satisfaisant à l'équation (2.2.5) :

$$E(u) \leq \omega(u) + \int H_t(\gamma(t)) - \int \inf_M H_t(\cdot) dt. \quad (2.4.3)$$

**Proposition 2.4.3.** *Soit  $u$  un disque vérifiant l'équation (2.2.7), alors*

$$E(u) \leq \omega(u) + \|H\|. \quad (2.4.4)$$

# Chapitre 3

---

## COBORDISMES LAGRANGIENS ET MORPHISMES DE SEIDEL RELATIFS

Dans un article récent, Biran et Cornea [BC11] ont défini, à l'aide d'un cobordisme lagrangien monotone  $V : (L) \rightsquigarrow (L_1, \dots, L_k)$ , un morphisme de chaînes  $\Phi_V : CF(L, N) \rightarrow CF(L_1, N)$  entre deux complexes de Floer lagrangiens, où  $N \subset (M, \omega)$  est une lagrangienne (monotone) quelconque. Ils ont ensuite défini un foncteur de la catégorie des cobordismes monotones vers la catégorie de Fukaya de  $M$ . Dans ce chapitre, on étudie la valeur de ce foncteur sur les cobordismes  $V_\Psi$  définis par la suspension lagrangienne associée à une isotopie hamiltonienne  $\Psi_t$ .

Seidel a associé à une isotopie hamiltonienne un isomorphisme de l'homologie quantique  $QH(M)$  vers elle-même [Sei97]. La variante lagrangienne de ce morphisme a été défini dans [HL10] et [HLL11], est appelée morphisme de Seidel relatif géométrique et est notée  $S_s(\Psi)$  (l'indice «s» veut dire «sections», car le morphisme est défini à l'aide de sections holomorphes).

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 3.0.1.** *Le morphisme de Seidel relatif géométrique associé à une isotopie hamiltonienne  $\Psi_t$  est chaîne-homotope au morphisme  $\Phi_{V_\Psi}$ .*

La preuve est divisée en plusieurs étapes, chacune d'intérêt indépendant, et consiste à définir différentes versions du morphisme de Seidel relatif et à montrer qu'elles sont toutes chaîne-homotopes. Premièrement, on montre que

le morphisme  $\Phi_{\Psi_t}$  défini par la suspension lagrangienne associée à l'isotopie hamiltonienne  $\Psi_t$  est chaîne-homotopé à un morphisme de comparaison à bords variables  $S_\delta(\Psi)$  associé à cette même isotopie, qui compte des bandes holomorphes dont le bord varie en fonction de  $\Psi_t$ ; c'est le contenu de la Proposition 3.4.1.

Deuxièmement, on définit un morphisme de Seidel relatif «perlé», noté  $S_{\mathcal{P}}(\Psi)$ , en faisant agir l'isotopie sur le bord d'un disque holomorphe dans une perle. On montre à la Proposition 3.4.3 que ce morphisme est chaîne-homotopé au morphisme de comparaison à bords variables  $S_\delta(\Psi)$ .

On montre finalement à la Proposition 3.4.4 que le morphisme de Seidel relatif perlé est chaîne-homotopé au morphisme de Seidel relatif géométrique, terminant ainsi la démonstration du Théorème 3.0.1.

La Proposition 3.4.1 est nouvelle et est le fruit d'une collaboration en cours avec Octav Cornea. Les deux autres sont certainement connus des experts, cependant aucune preuve n'apparaît dans la littérature. De plus, la définition du morphisme à l'aide des cobordismes est très récente et son identification avec le morphisme de Seidel relatif était mentionnée sans preuve dans [BC11].

À la prochaine section, on introduit la notion de cobordismes lagrangiens, due à Arnol'd et ramener récemment à l'ordre du jour par Biran et Cornea [BC11], et on donne quelques exemples simples.

Afin de définir les différents morphismes de Seidel relatifs, on aura besoin d'une version de l'homologie de Floer lagrangienne plus riche que celle utilisée au chapitre précédent. À la Section 3.2, on élargit d'abord le cadre homologique pour tenir compte de paires de lagrangiennes qui ne sont pas nécessairement dans la même classe d'isotopie hamiltonienne. Ensuite, on définit les morphismes de comparaison à bords variables introduits par Oh [Oh93], qui permettent de montrer l'invariance de l'homologie de Floer lagrangienne sous l'action d'une isotopie hamiltonienne.

On adapte ensuite l'homologie de Floer lagrangienne aux cobordismes lagrangiens, en suivant la présentation de Biran et Cornea. Ce passage n'est pas

direct, puisque les cobordismes lagrangiens sont des variétés à bord, ou encore, dans notre contexte, des variétés non compactes. Il faut donc donner les arguments qui permettent de garantir la compacité des espaces de bandes de Floer, ce qu'on fera à la Section 3.3. On donne aussi quelques exemples de calcul d'homologie pour certains cobordismes.

La Section 3.4 contient les résultats nouveaux de ce chapitre. On y définit toutes les versions du morphisme de Seidel relatif mentionnées ci-haut et on montre qu'elles sont chaîne-homotopes entre elles.

### 3.1. COBORDISMES LAGRANGIENS

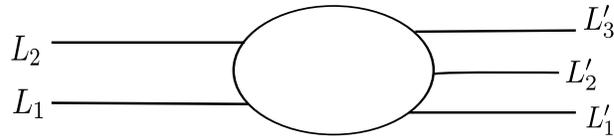
Dans la catégorie des variétés différentiables, il est naturel, depuis les travaux de Thom, de considérer comme équivalentes deux variétés  $M_0$  et  $M_1$  (pas nécessairement connexes) s'il y a une autre variété  $V$  vérifiant  $\partial V = M_0 \amalg M_1$ . On dénote un tel cobordisme lisse par  $(V; M_0, M_1)$ . Lorsqu'on considère deux sous-variétés lagrangiennes  $L_0$  et  $L_1$  d'une variété symplectique  $(M, \omega)$ , un cobordisme  $(V; L_0, L_1)$  inclus dans  $M$  ne peut pas être une sous-variété lagrangienne de  $M$ , puisque sa dimension est trop grande. Pour remédier à ce problème, on introduit la notion de cobordisme lagrangien, qui remonte à Arnol'd. On suit de près la présentation de Biran-Cornea [BC11] et on invite le lecteur à consulter leur article pour plus de détails et d'applications.

Un cobordisme lagrangien  $V$  entre deux familles de sous-variétés lagrangiennes connexes  $(L_i)_{1 \leq i \leq k}$  et  $(L'_j)_{1 \leq j \leq r}$  est un cobordisme lisse  $(V; \amalg_i L_i, \amalg_j L'_j)$  ainsi qu'un plongement lagrangien  $V \subset ([0, 1] \times \mathbb{R}) \times M \cong (T^*[0, 1] \times M, \omega_0 \oplus \omega)$  vérifiant, pour un petit  $\epsilon > 0$ ,

$$V|_{[0, \epsilon] \times \mathbb{R} \times M} = \amalg_i ([0, \epsilon] \times \{i\}) \times L_i$$

$$V|_{(1-\epsilon, 1] \times \mathbb{R} \times M} = \amalg_j ((1-\epsilon, 1] \times \{j\}) \times L'_j$$

On dénote un tel cobordisme par  $V : (L'_j) \rightsquigarrow (L_i)$ . Les  $L'_j$  sont appelés les extrémités positives de  $V$  et les  $L_i$  les extrémités négatives. On dit aussi de ces extrémités qu'elles sont cylindriques.

FIG. 3.1: Projection de  $V$  dans le plan

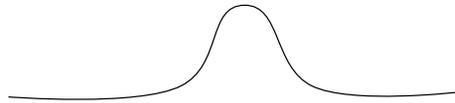
Un cobordisme est monotone si  $V \subset ([0, 1] \times \mathbb{R}) \times M$  est une sous-variété lagrangienne monotone. Il est élémentaire si son bord contient au plus deux composantes connexes et il est trivial si  $V \cong L \times [0, 1]$ .

En pratique, on considèrera souvent  $V$  comme une sous variété de  $\mathbb{R}^2 \times M$  et on étendra trivialement les extrémités négatives et positives vers  $-\infty$  et  $+\infty$ . Si on doit distinguer entre  $V$  et son extension réelle, on dénotera cette dernière  $\bar{V}$ .

### 3.1.1. Exemples

On présente ici quelques exemples de cobordismes lagrangiens qui apparaîtront souvent dans ce chapitre.

- (1) Étant données une courbe  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  dont les extrémités sont sur la droite réelle et  $L$  une sous-variété lagrangienne dans  $M$ ,  $\bar{L} := \gamma \times L$  est un cobordisme lagrangien entre  $L$  et  $L$ . De plus,  $\bar{L}$  est monotone si et seulement si  $L$  l'est aussi, avec la même constante de monotonie.

FIG. 3.2: La courbe  $\gamma$ 

- (2) (Suspension lagrangienne)

**Proposition 3.1.1.** Soit  $\Psi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , une isotopie hamiltonienne engendrée par l'hamiltonien  $H_t$ , alors le plongement suivant est lagrangien et est appelé

la suspension lagrangienne :

$$\Phi : L \times [0, 1] \rightarrow T^*[0, 1] \times M$$

$$(p, t) \mapsto (t, H_t(\Psi_t(p)), \Psi_t(p)).$$

DÉMONSTRATION. Même si cette preuve apparaît déjà dans [Pol01], §3.1.E, on la reproduit ici, car les calculs seront utiles pour comparer différents morphismes de Seidel relatifs (voir Section 3.4).

Des calculs simples donnent

$$\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) = dH_t(\Psi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right))\frac{\partial}{\partial y} + \Psi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

$$\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H_t}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + X_H^t$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées sur  $T^*[0, 1]$ . On en tire

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega_0 \oplus \omega)\left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}\right) &= \omega\left(\Psi_{t*}\frac{\partial}{\partial p_1}, \Psi_{t*}\frac{\partial}{\partial p_2}\right) \\ &= \Psi_t^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\Psi_t^*$  préserve  $\omega$  et  $L$  est lagrangienne. Finalement, on a

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega_0 \oplus \omega)\left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial t}\right) &= -\omega_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, dH_t(\Psi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right))\frac{\partial}{\partial y}\right) - \omega(X_H^t, \Psi_{t*}\frac{\partial}{\partial p}) \\ &= -dH_t(\Psi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)) + dH_t(\Psi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)) = 0. \end{aligned}$$

□

L'image de ce plongement est presque un cobordisme lagrangien entre  $L$  et  $\Psi_t(L)$ . Il faut encore rendre le cobordisme cylindrique aux extrémités. Pour ce faire, il suffit de remarquer qu'on peut reparamétriser le flot hamiltonien par  $\Psi_{\alpha(t)}$  où  $\alpha(t) = 0, t \in [0, \epsilon)$  et  $\alpha(t) = 1, t \in (1 - \epsilon, 1]$  et considérer la suspension lagrangienne associée au flot reparamétrisé. L'hamiltonien de ce nouveau flot est donné par  $\alpha'(t)H(\alpha(t), x)$ , le cobordisme est donc cylindrique aux bouts. De plus, vus comme chemins à

bouts fixés dans  $\text{Ham}(M)$ , les deux isotopies hamiltoniennes  $\Psi_t$  et  $\Psi_{a(t)}$  sont homotopes.

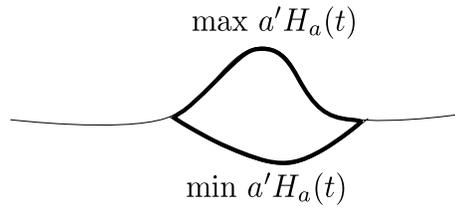


FIG. 3.3: Projection de la suspension dans le plan

- (3) Comme on le verra à la Section 4.1, la trace d'une chirurgie lagrangienne engendre aussi un cobordisme lagrangien.

### 3.2. RETOUR SUR L'HOMOLOGIE DE FLOER LAGRANGIENNE

Avant de procéder à la définition de l'homologie de Floer dans le contexte des cobordismes, il est nécessaire d'élargir le contexte qu'on a d'abord étudié à la Section 2.2.3, puisqu'on considère maintenant des paires de lagrangiennes monotones qui ne sont pas nécessairement hamiltoniennes isotopes.

Soit  $H_2^D = H_2^D(M, L)$  l'image de l'homomorphisme d'Hurewicz  $\pi_2(M, L) \rightarrow H_2(M, L)$  et  $B \in H_2^D$ . Étant donné  $J \in \mathcal{J}_\omega$ , on pose  $\tilde{\mathcal{M}}(B, J)$  l'espace des disques  $J$ -holomorphes représentant la classe  $B$  et on note  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  le groupe des biholomorphismes du disque unité. Tel que mentionné au Chapitre 2 (voir aussi [BC09b]), lorsque  $J$  est générique et que  $\mu(B) = 2$ , alors  $(\tilde{\mathcal{M}}(B, J) \times \partial D^2)/G$  est une variété lisse, compacte et sans bord de dimension  $n$ . On a aussi l'application d'évaluation au bord suivante :

$$\begin{aligned} \text{ev} : (\tilde{\mathcal{M}}(B, J) \times \partial D^2)/G &\rightarrow L \\ (\mathbf{u}, z) &\mapsto \mathbf{u}(z). \end{aligned}$$

Le degré de cette application (modulo 2) est dénoté  $\nu(B)$ . La quantité algébrique de  $J$ -disques de classe 2 est alors donnée par le nombre

$$d_L := \sum_{B \in H_2^D, \mu B=2} \nu(B) \pmod{2}$$

et est indépendante de  $J$ , par le théorème de compacité de Gromov pour les disques holomorphes. On note au passage que lorsque  $N_L \geq 3$ , alors  $d_L = 0$ .

Si on considère deux lagrangiennes  $L_0$  et  $L_1$  uniformément monotones, c'est-à-dire que  $d_{L_0} = d_{L_1}$  et de même constante de monotonie, alors l'homologie de Floer lagrangienne  $HF(L_0, L_1)$  est bien définie. Cependant, cette homologie ne sera pas invariante par l'action d'une isotopie hamiltonienne à support compact sur un des facteurs, comme on peut le voir en considérant l'exemple ci-dessous.

**Exemple**(Sections parallèles dans  $T^*S^1$ ). Deux sections parallèles dans  $T^*S^1$  et délimitant un cylindre d'aire  $A$  sont lagrangiennes. Leur homologie de Floer est nulle, puisqu'elles ne s'intersectent pas, mais en considérant une isotopie hamiltonienne qui les fait s'intersecter transversalement en deux points, leur homologie devient alors  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Dans ce cas, les deux bandes de Floer apparaissant dans la différentielle ont des aires différentes (ce qui n'est pas le cas si on prend une section ainsi qu'une isotopie hamiltonienne de celle-ci), valant respectivement  $\epsilon$  et  $A - \epsilon$ .  $\square$

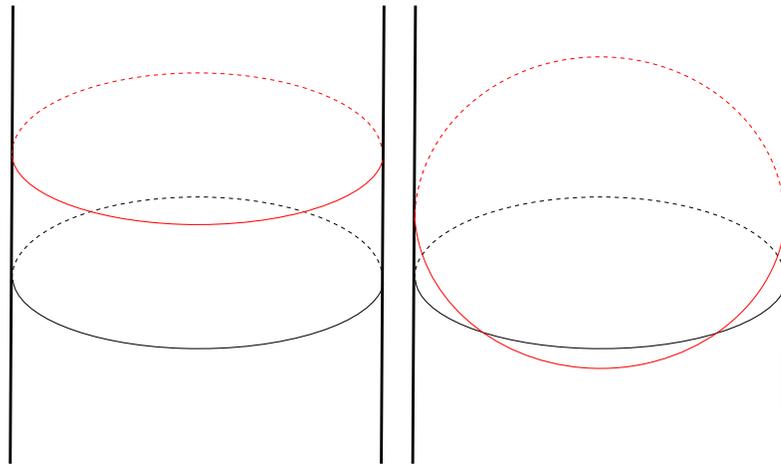


FIG. 3.4: Sections parallèles et une perturbation hamiltonienne

Afin d'assurer l'invariance de l'homologie de Floer par l'action d'une isotopie hamiltonienne, on peut imposer deux conditions. La première a été proposée par Oh [Oh93] et consiste à imposer la condition que l'image de l'homomorphisme  $i_* : \pi_1(L; \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(M; \mathbb{Z})$  induit par l'inclusion est un sous-groupe de type torsion. Dans ce cas, la théorie ne s'applique pas à l'exemple donné ci-haut et l'homologie de Floer est à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$ . Dans ce chapitre, on choisit d'imposer cette condition à toutes nos lagrangiennes, qui est un peu plus restrictive que la deuxième condition mentionnée ci-bas. On dira qu'une lagrangienne vérifiant cette condition est une lagrangienne de type torsion.

Autrement, on peut aussi tenir compte de l'aire des bandes de Floer dans la définition de la différentielle, auquel cas l'homologie de Floer est à coefficients dans l'anneau de Novikov universel  $\mathcal{A}$ . Le prix à payer en imposant cette condition est une légère modification de chaque morphisme défini, afin de tenir compte des aires. Voir e.g. [BC11].

On définit maintenant l'homologie de Floer lagrangienne dans ce contexte plus large qu'au Chapitre 2. Soit  $(L_0, L_1)$  un couple de lagrangiennes uniformément monotones de type torsion. On dénote par  $\mathcal{P}(L_0, L_1) := \{\gamma \in C^0([0, 1], M) \mid \gamma(0) \in L_0, \gamma(1) \in L_1\}$  l'espace des lacets de  $M$  allant de  $L_0$  à  $L_1$  et par  $\mathcal{P}_\eta(L_0, L_1)$  la composante connexe par arcs de ces chemins contenant  $\eta$ , pour chaque classe d'homotopie  $\eta \in \pi_0(\mathcal{P}(L_0, L_1))$ .

On fixe ensuite  $\eta \in \pi_0(\mathcal{P}(L_0, L_1))$  et on considère un hamiltonien  $H \in \mathcal{H}(M)$  (voir le Chapitre 2, §2.2.1 et 2.2.3 pour les notations) ainsi que son flot hamiltonien  $\Psi_t^H$ . On suppose que  $\Psi$  est non-dégénéré, i.e. que  $\Psi_1^H(L_0)$  intersecte  $L_1$  transversalement. On dénote  $\mathcal{O}_\eta(H)$  l'ensemble des orbites de  $\Psi_t$  qui sont aussi dans  $\mathcal{P}_\eta(L_0, L_1)$ . Finalement, on choisit une famille générique à un paramètre de structures presque complexes compatibles avec  $\omega$ , notée  $\mathbf{J} = \{J_t\}_{t \in [0, 1]}$ .

On définit le complexe de Floer (non gradué)  $CF(L_0, L_1; \eta, H, \mathbf{J})$  comme l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}_2$  engendré par les éléments de  $\mathcal{O}_\eta(H)$ . La différentielle est définie par la formule

$$\partial(\gamma_-) = \sum_{\gamma_+ \in \mathcal{O}_\eta(H)} \#_2 \tilde{\mathcal{M}}_0(\gamma_-, \gamma_+; H, \mathbf{J}) \gamma_+.$$

où  $\tilde{\mathcal{M}}_0(\gamma_-, \gamma_+; H, J)$  représente la composante de dimension 0 de l'espace des bandes de Floer (voir l'équation (2.2.1), page 24) à bord sur  $L_0$  et  $L_1$  et connectant  $\gamma_-$  à  $\gamma_+$ , modulo l'action de  $\mathbb{R}$  par translation. On note au passage que la dimension de ces espaces se calcule à l'aide de l'indice de Maslov-Viterbo [Vit87]. Cependant, comme on considère les complexes de Floer sans graduation, on n'insiste pas sur la définition de cet indice.

Comme  $L_0$  et  $L_1$  sont uniformément monotones, on a  $\partial^2 = 0$  et on dénote l'homologie du complexe de Floer par

$$\mathrm{HF}(L_0, L_1; \eta, H, J).$$

Les bandes de Floer donnent une homotopie entre  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  vues comme élément de  $\mathcal{P}_\eta(L_0, L_1)$ , on peut ainsi considérer un complexe de Floer élargi, qui tient compte de chaque composante connexe,

$$\mathrm{CF}(L_0, L_1; H, J) = \bigoplus_{\eta} \mathrm{CF}(L_0, L_1; \eta, H, J)$$

ainsi que son homologie  $\mathrm{HF}(L_0, L_1, H, J)$ , dans laquelle s'injecte chaque facteur  $\mathrm{HF}(L_0, L_1; \eta, H, J)$ . Des résultats standards montrent que ces homologies sont indépendantes des choix génériques de  $H$  et de  $J$ .

Lorsque  $H = 0$ , les bandes de Floer sont des bandes J-holomorphes et on dénotera alors le complexe de Floer par  $\mathrm{CF}(L_0, L_1)$ . Dans ce cas, on supposera que  $L_0$  et  $L_1$  s'intersectent transversalement.

Si  $L_0 = L_1$ , on retrouve l'homologie de Floer telle que définie au Chapitre 2, en considérant  $\mathrm{HF}(L_0, L_0; \eta_0, H)$ , où  $\eta_0$  est la classe d'homotopie d'un chemin constant.

### 3.2.0.1. Morphisme de comparaison à bords variables

Dans cette section, on rappelle la définition des morphismes de comparaison à bords variables en homologie de Floer lagrangienne, due à Oh [Oh93]. On les utilisera notamment à la Section 3.4 pour comparer et définir différents morphismes de Seidel relatifs.

Comme ces morphismes et leurs propriétés sont très connus, on rappelle seulement les éléments de la construction qui seront importants par la suite, sans toutefois fournir de preuve.

Soit  $\Psi_t$  une isotopie hamiltonienne telle que  $\Psi_0 = \text{Id}$ . Le morphisme de comparaison à bords variables associé à cette isotopie est

$$S_\delta(\Psi) : \text{CF}(L_0, L_1; H) \rightarrow \text{CF}(L_0, \Psi_1(L_1); H)$$

$$\gamma^- \mapsto \sum_{\alpha} \#_2 \mathcal{M}_\epsilon^0(\gamma^-, \gamma^+) \gamma^+,$$

où  $\mathcal{M}_\epsilon^0(\gamma^-, \gamma^+)$  est la composante de dimension 0 de  $\mathcal{M}_\epsilon(\gamma^-, \gamma^+)$ , soit l'espace des bandes de Floer à bords variables. Ce sont des bandes  $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M$  satisfaisant à l'équation de Floer (2.2.1) et vérifiant  $u(-\infty, t) = \gamma^-(t)$ ,  $u(\infty, t) = \gamma^+(t)$  ainsi que les conditions aux bords variables

$$\begin{cases} u(s, 0) \in L_0 \\ u(s, 1) \in \Psi_{\alpha(s)}(L_1), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où

$$\begin{cases} \alpha(s) = 0 \text{ si } s \in (-\infty, 0], \\ \alpha'(s) > 0 \text{ si } s \in (0, 1), \\ \alpha(s) = 1 \text{ si } s \in (1, \infty). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

L'énergie des éléments de ces espaces est bornée uniformément (voir e.g. [Oh93]), de sorte que le théorème de compacité de Gromov s'applique pour montrer que  $S_\delta(\Psi)$  est un morphisme de chaînes. L'application induite en homologie est aussi dénotée  $S_\delta(\Psi)$  et est un isomorphisme qui ne dépend que de la classe d'homotopie à bouts fixes de l'isotopie.

On note d'abord que les éléments de  $\mathcal{M}_\epsilon(\gamma^-, \gamma^+)$  ne sont pas invariants par l'action de translation des réels sur un des facteurs, contrairement aux bandes de Floer, à cause des conditions aux bords variables. Cependant, lorsque  $\Psi_t = \text{Id}$ , les bandes sont invariantes par translation et, pour cette raison,  $\mathcal{M}_\epsilon(\gamma^-, \gamma^+)$  est dégénéré sauf lorsque  $\gamma^- = \gamma^+$ , auquel cas il n'y a que la bande constante, ainsi  $S_\delta(\Psi) = S_\delta(\text{Id}) = \text{Id}$  au niveau des complexes.

Finalement, si on considère  $L_0 := L = L_1$  et  $\Psi_1(L) = L$ , alors on peut calculer l'indice de Maslov des bandes de Floer à bords variables, comme on l'a fait au Chapitre 2. Plus exactement, en suivant les mêmes notations, soient  $u \in \mathcal{M}_\epsilon(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+)$ . Alors les plans tangents à  $L$  et à  $\Psi_{\alpha(s)}(L)$  le long du bord du disque  $u_\gamma \# u \# -u_\alpha$  engendrent une boucle de lagrangiennes ; on peut donc calculer son indice de Maslov. Ce dernier n'est pas un multiple de  $N_L$ , mais l'indice de la différence de deux telles boucles l'est (voir e.g. [Oh93] ou [AS01] ; à comparer aussi avec le morphisme  $S_s(\Psi)$  de la Section 3.4.3).

On fixe donc un disque à bords variables de référence  $u_0$ . Le morphisme de comparaison à bords variables est alors donné par

$$S_\delta(\Psi) : CF_*(L; H) \rightarrow CF_{*+\mu(u_0)}(L; H)$$

$$\tilde{\gamma}^- \mapsto \sum_{\substack{\tilde{\gamma}^+, B \in \pi_2(M, L) \\ |\tilde{\gamma}^-| - |\tilde{\gamma}^+| + \mu(B) + \mu(u_0) = 0}} \#_2 \mathcal{M}_\epsilon(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, B) \tilde{\gamma}^+ \otimes \mathbf{t}^{\mu(B)}$$

où les éléments  $u \in \mathcal{M}_\epsilon(\tilde{\gamma}^-, \tilde{\gamma}^+, B)$  satisfont à la propriété supplémentaire  $[u_\gamma \# u \# -u_\alpha \# (-u_0)] = B$ . Avec les conditions imposées dans la sommation, cet espace est de dimension nulle.

### 3.2.0.2. Variation de l'hamiltonien $H$ , morphismes de naturalité et morphismes de comparaison à bords variables

On considère le morphisme de naturalité de Floer  $b_H$  associé à un hamiltonien  $H$  et à son flot hamiltonien  $\phi_t$  (voir aussi [BC06] et [Lec08]) :

$$b_H : CF(L_0, \phi_1^{-1}(L_1); 0; J) \rightarrow CF(L_0, L_1; H; \phi^\# J)$$

$$x \mapsto \phi_t(x).$$

où  $\phi^\#$  représente la structure presque complexe  $J$  conjuguée par  $\phi_*$ . Une simple vérification montre que  $b_H$  est bien défini et est un isomorphisme de complexes de chaînes. Le but de ce morphisme est de transformer l'équation  $J$ -holomorphe en l'équation de Floer (2.2.1) associée à  $H$  et  $\phi^\# J$ .

Il est montré dans [HLL11] que le morphisme de naturalité est chaîne-homotopé au morphisme de Seidel relatif géométrique de la Section 3.4.3.

On prend maintenant une isotopie hamiltonienne  $\Psi_t$  vérifiant  $\Psi_1(\phi_1^{-1}(L_1)) = \phi_1^{-1}(L_1)$ . Alors  $\phi_1 \circ \Psi_1(\phi_1^{-1}(L_1)) = L_1$  et, en utilisant l'action de  $b_H$  sur les bandes de Floer, on montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CF}(L_0, \phi_1^{-1}(L_1); 0; J) & \xrightarrow{S_\delta(\Psi)} & \mathrm{CF}(L_0, \phi_1^{-1}(L_1); 0; J) \\ \downarrow b_H & & \downarrow b_H \\ \mathrm{CF}(L_0, L_1; H; \phi^\sharp J) & \xrightarrow{S_\delta(\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_1^{-1})} & \mathrm{CF}(L_0, L_1; H; \phi^\sharp J) \end{array}$$

Ici, le morphisme  $S_\delta(\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_1^{-1})$  est associé à l'isotopie  $\phi_1 \circ \Psi_t \circ \phi_1^{-1}$ . Le diagramme ci-haut permet de conclure que les deux versions du morphisme de comparaison à bords variables sont conjuguées par  $b_H$ , au niveau des complexes de chaînes.

### 3.3. HOMOLOGIE DE FLOER LAGRANGIENNE DES COBORDISMES

On considère dans cette section l'extension réelle des cobordismes lagrangiens, de sorte que les cobordismes sont des sous-variétés lagrangiennes non-compactes à bouts cylindriques de  $\mathbb{R}^2 \times M$ . Étant donnés deux tels cobordismes  $V_0, V_1$  s'intersectant transversalement, on peut considérer l'espace des bandes de Floer à bords sur  $V_0$  et  $V_1$  et définir le complexe de Floer tel qu'on l'a fait à la dernière section, en adoptant les mêmes notations. Dans tous les cas considérés plus bas, la différentielle de Floer compte les bandes holomorphes, i.e. l'hamiltonien  $H$  est nul et les orbites de Floer sont les points d'intersection des cobordismes.

Afin d'appliquer la théorie telle qu'énoncée à la dernière section, on doit d'abord régler certains problèmes liés au fait que les lagrangiennes ne sont pas compactes. Tous les arguments qu'on utilise ont été traités en détails dans [BC11], on les rappelle brièvement ici, puisqu'ils ne font pas encore partie du folklore symplectique. De plus, on n'essaiera pas d'être le plus général possible, on se contentera de présenter la théorie minimale nécessaire aux applications qui suivront.

Premièrement, il faut s'assurer que la projection dans le plan des bandes holomorphes d'énergie finie est contenue dans un sous-ensemble compact assez grand  $B \subset \mathbb{R}^2$ , telle qu'indiquée à la Figure 3.5, afin que les théorèmes de compacité de Gromov s'appliquent dans ce cadre non-compact.

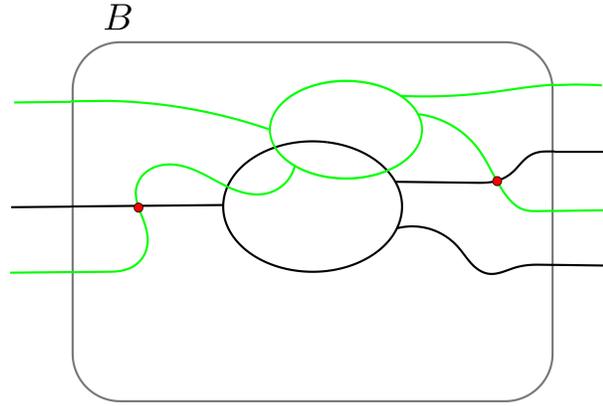


FIG. 3.5: À l'extérieur de la boîte  $B$ , les cobordismes ne s'intersectent pas et sont cylindriques, de sorte que les bandes sont contenues dans  $B$ .

Soit donc  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2 \times M$ , où  $\Sigma$  est soit une sphère holomorphe, un disque holomorphe à bord dans  $V_0$  ou  $V_1$ , ou encore une bande holomorphe  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  reliant deux points d'intersection de  $V_0 \cap V_1$  et telle que  $u(s, 0) \in V_0$ ,  $u(s, 1) \in V_1$ . Un résultat qui remonte à Chekanov [Che97] nous permet alors de garantir la compacité au sens de Gromov de l'espaces des bandes de Floer :

**Lemme 3.3.1** ([BC11], Lemme 4.2.1). *Si l'aire symplectique de  $u$  est finie, alors soit  $\pi \circ u$  est constante, soit  $\pi \circ u \subset B$ .*

Finalement, afin de s'assurer que la différentielle des complexes de Floer des exemples ci-bas a bien la forme voulue, on doit pouvoir garantir que certaines bandes n'apparaissent pas. On considère par exemple la Figure 3.6, où on prend la structure complexe standard de  $\mathbb{R}^2$  près des extrémités. Une bande holomorphe non constante d'aire symplectique finie dont (la projection de) l'extrémité négative est sur le point  $P$  peut être, autour de  $P$ , dans le deuxième et quatrième cadrans définis par les deux courbes s'intersectant, à cause des conditions aux bords imposées à cette bande. De plus, le lemme précédent garantit qu'elle ne se trouve pas dans le quatrième quadrant, puisque cette région

du plan délimitée par les deux cobordismes est non bornée. La seule possibilité est qu'elle se dirige vers le point  $Q$ , ou encore qu'elle soit incluse dans la fibre  $M$  au-dessus de  $P$ . Des arguments similaires s'appliquent si l'extrémité négative se trouve en  $Q$  et garantissent entre autre la forme triangulaire de la différentielle du premier exemple ci-bas.

### Exemples

- (1) (Cobordismes élémentaires. Voir aussi [BC11], Corollaire 4.1.2) Soient trois lagrangiennes  $N, L, L' \subset M$  s'intersectant deux à deux transversalement. On considère aussi un cobordisme élémentaire  $V : L \rightsquigarrow L'$  et un trivial  $\overline{N} : N \rightsquigarrow N$  donné par le produit d'une courbe dans  $\mathbb{C}$  avec  $N$ . De plus, on suppose que ces deux cobordismes s'intersectent seulement aux extrémités (voir la Figure 3.6). On a alors une identification de complexes de Floer

$$(CF(\overline{N}, V), \partial) = (CF(N, L) \oplus CF(N, L'), D).$$

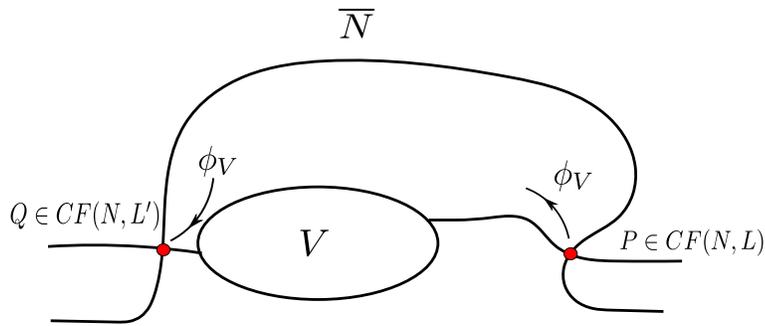


FIG. 3.6: Intersection de cobordismes élémentaires

En prenant une structure presque complexe générique qui coïncide avec la structure produit près des extrémités, la différentielle est donnée par une matrice  $D$  ayant la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ \phi_V & \partial_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

où  $\partial_1$  est la différentielle de Floer de  $CF(N, L)$  et  $\partial_2$  celle de  $CF(N, L')$ . De plus, on a

$$D^2 = \begin{pmatrix} \partial_1^2 & 0 \\ \partial_1 \circ \phi_V + \phi_V \circ \partial_2 & \partial_2^2 \end{pmatrix}.$$

On conclut que  $\phi_V$  est un morphisme de chaînes si et seulement si  $D^2 = 0$ .

On regarde plus attentivement deux cas particuliers où on peut calculer  $\phi_V$ .

- (a) Soient deux courbes  $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{C}$  s'intersectant en deux points, disons  $p_i$ , et les cobordismes  $\bar{N} := \gamma_1 \times N$ ,  $V := \gamma_2 \times L$ . On dénote  $x_r$  les points d'intersection de  $N$  et  $L$ . Alors  $\phi_V = \text{Id}$ .

En effet,  $\tilde{\mathcal{M}}((p_i, x_r), (p_j, x_s)) \cong (\mathcal{M}(p_i, p_j) \times \mathcal{M}(x_r, x_s))/\mathbb{R}$ , en prenant la structure presque complexe produit. Cet espace n'est de dimension 0 que si  $p_i = p_j$ , auquel cas  $D$  est identifié avec la différentielle de Floer de  $CF(N, L)$  (donnant les termes  $\partial_1$  et  $\partial_2$ ), ou encore que si  $x_r = x_s$ , et  $\Phi_V$  est alors l'identité.

L'homologie de ce complexe est nulle, comme on peut le montrer en considérant le triangle exact de la Section 4.1.2 ou encore en la calculant directement.

- (b) Soit  $\Psi_t$  une isotopie hamiltonienne et  $V$  le cobordisme donné par la suspension lagrangienne associée à  $\Psi_{1-t}$  (voir la Proposition 3.1.1 à la page 40). En prenant  $1-t$ , l'extrémité positive du cobordisme est  $L$ ; ce choix est purement technique. On montrera à la Section 3.4 que  $\phi_V$  est chaîne-homotope au morphisme de comparaison à bords variables  $S_\delta(\Psi)$ , c'est donc un isomorphisme et le triangle exact de la Section 4.1.2 montre que l'homologie de Floer de ces deux cobordismes est nulle.

- (2) En intersectant la trace d'une chirurgie avec un cobordisme trivial, on peut relier  $L_1, L_2$  et leur chirurgie  $L_1 \# L_2$  par un triangle exact. On expliquera cette construction à la Section 4.1.2.

### 3.4. MORPHISMES DE SEIDEL RELATIFS

Dans cette section, on donne la preuve du Théorème 3.0.1, qui est divisée en plusieurs étapes. On définit différentes versions du morphisme de Seidel relatif et on montre qu'elles sont chaîne-homotopes.

#### 3.4.1. Suspension lagrangienne

On considère le cobordisme  $V_\Psi$  donné par la suspension lagrangienne associée à une isotopie hamiltonienne  $\Psi_t$  ainsi que le morphisme  $\Phi_{V_\Psi}$  de l'équation 3.3.1 associé à ce cobordisme. Dans cette section, on va montrer la

**Proposition 3.4.1.**  $\Phi_{V_\Psi}$  est chaîne homotope à  $S_\delta(\Psi)$ .

On va se servir dans la preuve du résultat suivant :

**Proposition 3.4.2** (Voir aussi [Pol01], Théorème 6.1.B). *Soit  $\Psi_t$  une isotopie hamiltonienne telle que  $\Psi_0 = \text{Id}$ . La suspension lagrangienne associée à  $\Psi_{1-t}$  est hamiltonienne isotope à celle associée à l'identité.*

DÉMONSTRATION. On dénote  $h_{t,s}$  une famille à un paramètre de chemins dans  $\text{Ham}(M)$  reliant l'identité à  $\Psi_{1-t}$ , i.e. une famille telle que  $h_{t,0} = \text{Id}$ ,  $h_{t,1} = \Psi_{1-t}$  et  $h_{1,s} = \text{Id}$ . Il est toujours possible de trouver une telle homotopie entre deux chemins, puisque l'espace des chemins d'un espace connexe par arcs est contractile. Pour chaque  $s_0$  fixé, on dénote  $H_{t,s_0}(x)$  l'hamiltonien correspondant ainsi que  $\frac{d}{dt}h_{t,s_0} = X_{t,s_0}$  son gradient symplectique. On a aussi, pour un  $t_0$  fixé, l'hamiltonien  $F_{t_0,s}(x)$  et son gradient symplectique  $\frac{d}{ds}h_{t_0,s} = Y_{t_0,s}$ .

On a donc une isotopie de plongements lagrangiens induite par cette famille, soit

$$\begin{aligned} \Phi : (L \times [0, 1]) \times [0, 1] &\rightarrow T^*[0, 1] \times M \\ (p, t, s) &\mapsto (t, H_{t,s}(h_{t,s}(p)), h_{t,s}(p)). \end{aligned}$$

On remarque que pour chaque  $s$  fixé,  $\Phi$  est un plongement lagrangien, ainsi  $\Phi^*((dx \wedge dy) \oplus \omega) = \alpha_s \wedge ds$ , où  $\alpha_s \in \Omega^1(L \times [0, 1])$  dépend de  $s$ . Un calcul simple montre que  $d\alpha_s = 0$ . Il est connu qu'on peut étendre  $\Phi$  à une isotopie hamiltonienne de  $T^*[0, 1] \times M$ , aussi dénotée  $\Phi$ , si et seulement si  $\alpha_s$  est

exacte pour chaque  $s$  ([Pol01], Exercice 6.1.A). On montre maintenant que  $\alpha_s$  est exacte.

Mais  $\alpha_s$  est exacte si et seulement si  $[\alpha_s] = 0 \in H^1(L \times [0, 1]) \cong H^1(L \times \{1\})$ . Aussi, on a  $H^1(L \times \{1\}; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(H_1(L \times \{1\}; \mathbb{R}))$ . Il suffit donc de montrer que sur chaque cycle  $\sigma \in H_1(L \times \{1\})$ , on a  $0 = \int_\sigma \alpha_s = \int_0^1 \alpha_s(\sigma_*(\frac{\partial}{\partial t})) dt$ .

Soit donc  $\xi \in T_*L$  (en particulier  $\sigma_*(\frac{\partial}{\partial t})$ ). Des calculs simples donnent (comparer avec la Proposition 3.1.1)

$$\begin{aligned} \alpha_s(\xi) &= \alpha_s \wedge ds(\xi, \frac{\partial}{\partial s}) \\ &= (dx \wedge dy) \oplus \omega(\Phi_*\xi, \Phi_*\frac{\partial}{\partial s}) \\ &= \dots \\ &= -\omega(Y_{t,s}, h_{t,s,*}(\xi)) \end{aligned}$$

Finalement, sur  $L \times \{1\}$ , on a  $h_{1,s} = \text{Id}$ , donc  $Y_{1,s} = 0$ ,  $\alpha_s(\xi) = 0$  et l'intégrale est nulle aussi.  $\square$

On considère maintenant la famille de cobordismes associés à cette isotopie hamiltonienne  $\Phi$  (on peut utiliser la même reparamétrisation du flot pour chaque valeur de  $s$ , les bouts sont donc cylindriques à chaque  $s$ ). On choisit aussi  $h_{t,s}$  de sorte que  $h_{0,s} = \Psi_s$ ; ce dernier choix est crucial dans l'équation (3.4.1) ci-bas. Cette famille de cobordismes satisfait aux propriétés suivantes :

- (1)  $\Phi|_{s=0} = L \times [0, 1] =: \bar{L}$  est le cobordisme trivial ;
- (2)  $\Phi|_{s=1} = V_\Psi$  est la suspension lagrangienne associée à  $\Psi_{1-t}$  ;
- (3)  $\Phi_s|_{\{(1,0)\} \times M}$  est l'identité ;
- (4)  $\Phi_s|_{\{(0,0)\} \times M} = h_{0,s} = \Psi_s$ .

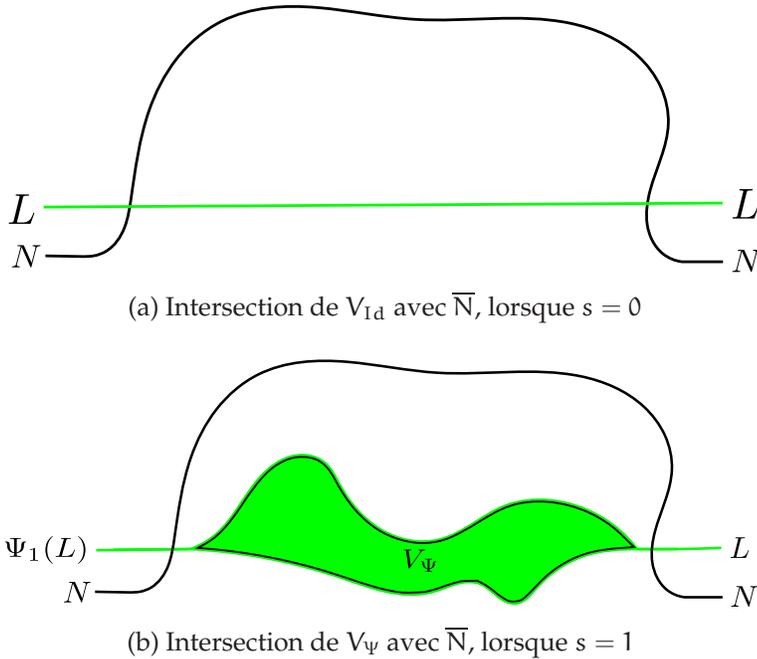
Dans les deux dernières propriétés, on a considéré  $\Phi_s$  comme une isotopie hamiltonienne sur  $T^*[0, 1] \times M$ . À l'aide de cette famille, on peut passer à la

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4.1. On utilise le morphisme de comparaison à bords variables associé à  $\Phi$  dans le contexte des cobordismes, soit

$$S_\delta(\Phi) : (CF(\bar{N}, \bar{L}), D_1) \rightarrow (CF(\bar{N}, V_\Psi), D_2).$$

Comme les cobordismes ne sont pas des variétés fermées, il faut s'assurer de bien pouvoir utiliser le morphisme  $S_\delta\Phi$ . On doit d'abord vérifier que la projection dans le plan d'une suite de bandes à bords variables reste dans une boîte compacte. Pour ce faire, on remarque qu'en  $t \in [0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1]$ , on a  $\Phi(x, t, s) = (t, 0, h_{t,s}(p))$ , puisque les flots de  $X_{t,s}$  sont constants pour ces valeurs de  $t$  (voir Figure 3.3). Ainsi  $\Phi_s(\bar{L})$  est constant pour ces valeurs de  $t, \forall s$ , et le Lemme 3.3.1 garantit alors que la projection des bandes reste dans une boîte compacte (voir Figure 3.5).

Les bornes d'énergie de bandes à bords variable de [Oh93] sont encore variables, ainsi on peut appliquer la compacité de Gromov et vérifier que  $S_\delta\Phi$  est bien un morphisme de chaînes.



En utilisant les propriétés de  $\Phi$  énumérées ci-haut et le fait, démontré à la Section 3.2.0.1, que  $S_\delta(\text{Id}) = \text{Id}$ , on trouve

$$S_\delta(\Phi) = \begin{pmatrix} S_\delta(\text{Id}) & 0 \\ \eta & S_\delta(\Psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \eta & S_\delta(\Psi) \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

où  $\eta : (\text{CF}(N, L), \partial_1) \rightarrow (\text{CF}(N, \Psi_1(L)), \partial_2)$  est l'homotopie de chaîne recherchée. En effet, comme  $S_\delta(\Phi)$  est un morphisme de chaînes, on a  $S_\delta(\Phi) \circ D_1 =$

$D_2 \circ S_\delta(\Phi)$ . En utilisant les définitions de  $D_1$  et  $D_2$  données par l'équation 3.3.1, ainsi que la matrice  $S_\delta(\Phi)$ , on obtient

$$S_\delta(\Phi) \circ D_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ \eta \circ \partial_1 + S_\delta(\Psi) & S_\delta(\Psi) \circ \partial_1 \end{pmatrix}$$

et

$$D_2 \circ S_\delta(\Phi) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ \phi_V + \partial_2 \circ \eta & \partial_2 S_\delta(\Psi) \end{pmatrix},$$

d'où on tire  $\eta \circ \partial_1 + S_\delta(\Psi) = \phi_V + \partial_2 \circ \eta$  (les signes n'importent pas, puisqu'on compte modulo 2).  $\square$

On voudra appliquer cette proposition au cas où  $N = L$  et  $\Psi_1(L) = L$  dans les prochaines sections. Cependant, la proposition ne s'applique pas directement à ce cas, puisque les intersections ne sont pas transverses.

On fixe  $N = L$  et on considère une perturbation hamiltonienne de  $L$  donnée par  $\phi_1(L)$ , engendrée par  $H$ , ainsi que le cobordisme  $\tilde{V}$  associé à l'isotopie  $\phi_1^{-1} \circ \Psi_{1-t} \circ \phi_1$ . La proposition s'applique alors et montre que  $\Phi_{\tilde{V}} : CF(L, \phi_1^{-1}(L); 0) \rightarrow CF(L, \phi_1^{-1}(L); 0)$  est chaîne-homotope à  $S_\delta(\phi_1^{-1} \circ \Psi \circ \phi_1)$ , et ce dernier morphisme est égal à  $b_H \circ S_\delta(\Psi) \circ b_H^{-1}$ , comme on l'a montré à la Section 3.2.0.2.

### 3.4.2. Morphisme de Seidel relatif perlé

On considère maintenant une isotopie hamiltonienne  $\Psi \in \text{Ham}_L(M)$ , i.e. telle que  $\Psi_1(L) = L$ , afin de définir le morphisme de Seidel relatif perlé :

$$S_{\mathcal{P}}(\Psi) : \mathcal{C}_*(f) \rightarrow \mathcal{C}_{*+\mu(u_0)}(f)$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{y, B \in \pi_2(M, L) \\ |x| - |y| + \mu(B) + \mu(u_0) = 0}} \#_2 \mathcal{P}(x, y, \Psi, B) \otimes t^{\mu(B)/N_L}$$

où  $\mathcal{P}(x, y, \Psi, B)$  est l'espace des perles reliant  $x$  à  $y$ , telles qu'un seul des disques  $J$ -holomorphes  $u_i$  est identifié avec une bande  $J$ -holomorphe d'énergie finie  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  et vérifie les conditions aux bords variables (3.2.1).

On demande aussi que la somme des classes de Maslov totale moins la classe de Maslov d'une bande de référence  $u_0$  (voir la Section 3.2.0.1) soit égale

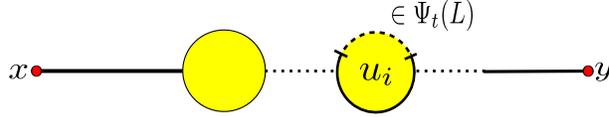


FIG. 3.7: Morphisme de Seidel relatif perlé

à  $\mu(B)$ . Sous ces conditions, l'énergie des éléments de  $\mathcal{P}(x, y, \Psi, B)$  est uniformément bornée, comme on l'a vu à la Section 3.2.0.1.

On considère aussi le morphisme de comparaison à bords variables associé à cette isotopie

$$S_\delta(\Psi) : CF_*(L, L; H) \rightarrow CF_{*+\mu(u_0)}(L, L; H),$$

tel que défini à la Section 3.2.0.1. La prochaine étape de la démonstration du Théorème 3.0.1 consiste à montrer la

**Proposition 3.4.3.** *Le morphisme de Seidel relatif perlé est chaîne-homotope au morphisme de comparaison à bords variables. Plus précisément,  $PSS^{-1} \circ S_\delta(\Psi) \circ PSS$  est chaîne-homotope à  $S_{\mathcal{P}}(\Psi)$ .*

DÉMONSTRATION. On utilise les notations de la Section 2.2.4, page 24, et les idées utilisées pour prouver que  $PSS^{-1} \circ PSS$  est chaîne-homotope à l'identité. On pourra aussi comparer avec la Proposition 4.1 de [HLL11].

L'homotopie de chaînes est définie comme suit :

$$\eta : \mathcal{C}_*(f) \rightarrow \mathcal{C}_{*+\mu(u_0)+1}(f)$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{y, B \in \pi_2(M, L) \\ |x|-|y|+\mu(B)+\mu(u_0)+1=0}} \#_2 \mathcal{M}(x, y, B, \Psi, R) y \otimes t^{\mu(B)/N_L}.$$

où  $\mathcal{M}(x, y, B, \Psi, R)$  est l'espace des perles allant de  $x$  à  $y$  telles qu'un seul des disques  $u_i$  est une bande satisfaisant à l'équation (2.2.7), soit

$$\partial_s u_i + J \partial_t u_i + \alpha_R(s) \nabla H = 0,$$

pour un certain  $R \in (0, \infty)$  et vérifiant les conditions aux bords variables (3.2.1). La condition sur la classe de Maslov est la même qu'à la définition du

morphisme  $S_{\mathcal{P}}(\Psi)$ . On rappelle que le but du paramètre  $R$  est d'interpoler entre l'équation de Floer et l'équation J-holomorphe.

Pour démontrer qu'il s'agit bien d'une homotopie de chaînes, on regarde le bord de la compactification des espaces  $\mathcal{M}(x, y, B, \Psi, R)$  de dimension 1 (voir Figure 3.8). La présence de l'espace de modules définissant  $S_{\mathcal{P}}(\Psi)$  dans le bord est due au paramètre  $R$  de l'équation (2.2.7) qui tend vers 0. Lorsqu'il tend vers  $\infty$ , l'espace de modules de  $PSS^{-1} \circ S_{\delta}(\Psi) \circ PSS$  apparaît. Les autres composantes du bord donnent les termes  $\eta \circ d + d \circ \eta$  et correspondent géométriquement à des lignes de flot brisées.

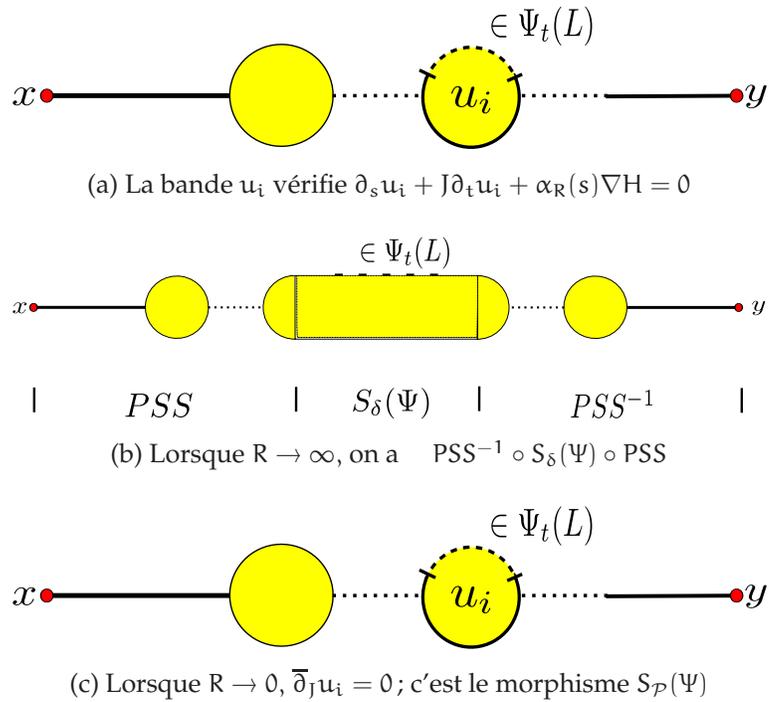


FIG. 3.8: Variation du paramètre  $R$

□

### 3.4.3. Morphisme de Seidel relatif géométrique et sections holomorphes

Dans cette section, on rappelle la construction du morphisme de Seidel relatif géométrique de Hu-Lalonde [HL10] et Hu-Lalonde-Leclercq [HLL11], noté  $S_s(\Psi)$  et associé à une isotopie  $\Psi \in \text{Ham}_1(M)$ . On montre ensuite la

**Proposition 3.4.4.** *Le morphisme de Seidel relatif perlé  $S_{\mathcal{P}}(\Psi)$  est chaîne-homotope au morphisme de Seidel relatif géométrique  $S_s(\Psi)$ .*

La construction du morphisme de Seidel relatif géométrique se base sur plusieurs calculs qu'on retrouve dans [AS01] et dans [MS04], on se contentera de les rappeler, sans toutefois les redémontrer.

Étant donnée  $\Psi \in H_L(M)$  une isotopie hamiltonienne qui fixe  $L$ , l'application tore de  $\Psi_1$  est définie topologiquement comme un quotient  $N \cong [0, 1] \times L / (0, p) \sim (1, \Psi_1(p))$ . On a aussi un plongement

$$\begin{aligned} \rho : N &\rightarrow D^2 \times M \\ (t, p) &\mapsto (e^{2i\pi t}, \Psi_t(p)) \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que ce plongement n'est pas lagrangien pour la structure symplectique produit. Cependant, pour un certain choix de forme de connexion  $\tau$  associée à l'hamiltonien  $H_t$  qui engendre  $\Psi_t$ , on peut définir une structure symplectique sur le fibré trivial  $D^2 \times M$ , qui se restreint à  $\omega$  sur chaque fibre, et qui est telle que ce plongement est lagrangien.

Étant donné  $H_t$ , on considère des fonctions  $F, G : D^2 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  et une forme de connexion

$$\tau = \omega - d'F \wedge ds - d'G \wedge dt + (\partial_t F - \partial_s G) ds \wedge dt,$$

où  $s, t$  sont les coordonnées sur le disque et  $d'$  est la dérivée extérieure par rapport aux coordonnées sur  $M$ . Pour un choix approprié de  $F$  et  $G$ , qui dépend de  $H$ , le transport parallèle associé à cette forme de connexion préserve  $N$ . Alors,

$$\tilde{\omega} = \tau + c(s, t)\pi^*(ds \wedge dt), \quad c(s, t) \gg 0$$

définit une forme symplectique sur  $D^2 \times M$  pour laquelle  $N$  est une lagrangienne (voir [MS04], Exercice 8.1.3, ainsi que [AS01], Sections 2 et 3). Ici,  $\pi : D^2 \times M \rightarrow D^2$  est la projection. De même, on peut aussi définir des structures presque complexes compatibles avec  $\tilde{\omega}$  qui se restreignent à des structures

compatibles avec  $\omega$  sur chaque fibre. De telles structures sont dites compatibles avec la fibration. On munit  $D^2 \times M$  d'une telle structure, donnée par

$$J_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -JX_F + X_G & -X_F - JX_G & J \end{pmatrix}.$$

On dit que  $u \in \pi_2(D^2 \times M, N)$  représente une classe de section si  $\pi_*(u)$  est le générateur de  $\pi_2(D^2, S^1)$ . C'est une classe de fibre si elle est dans l'image de  $\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_2(D^2 \times M, N)$ . Il est montré dans [HLL11], par une poursuite de diagramme commutatif («diagram chasing»), que la différence de deux classes de section est une classe de fibre. On dénote  $\mu(u)$  l'indice de Maslov de la composition  $\pi_M \circ u : D^2 \rightarrow D^2 \times M \rightarrow M$ , calculé dans  $M$  par rapport à  $\omega$  (ceci correspond à l'indice de Maslov vertical dans [HLL11]; comparer aussi avec la Section 3.2.0.1).

Soient maintenant  $f : L \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Morse-Smale et  $\sigma_0$  une classe de section fixée, appelée classe de référence (dans la Section 3.2.0.1, le graphe de  $u_0$  représente une telle classe de référence). Alors  $\sigma - \sigma_0$  est une classe de fibre,  $\forall \sigma$  classe de section. Le morphisme de Seidel relatif géométrique est défini sur le complexe de perles associé à  $f$  :

$$S_s(\Psi) : \mathcal{C}_*(f) \rightarrow \mathcal{C}_{*+\mu(\sigma_0)}(f)$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f), B \in \pi_2(M, L) \\ |x| - |y| + \mu(B) + \mu(\sigma_0) = 0}} \#_2 \mathcal{M}_y^x(N, B, J_N) y \otimes t^{\mu(B)/N_L}$$

L'espace  $\mathcal{M}_y^x(N, B, J_N)$  consiste en la famille des perles (de dimension 0) allant de  $x$  à  $y$ , où un seul des disques  $u$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $u : D^2 \rightarrow D^2 \times M$ ;
- (2)  $\text{Im}(u|_{\partial D^2}) \subset N$ ;
- (3)  $\pi \circ u = \text{Id}_{D^2}$ ;
- (4)  $\bar{\partial}_{J_N} u = 0$ .

On fixe aussi la somme totale des classes de Maslov moins la classe de Maslov de  $u_0$  égale à  $\mu(B)$ .

Des méthodes standards montrent que  $S_s(\Psi)$  est bien un morphisme de chaînes. L'argument essentiel est que les disques représentant une classe de section sont nécessairement simples et que des bulles holomorphes ne peuvent apparaître que dans les fibres, faisant ainsi baisser la dimension de l'espace par au moins 2 - car  $L$  est monotone - et est donc impossible.

Ayant défini cette autre version du morphisme de Seidel relatif, on peut maintenant passer à la

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4.4. La preuve se base sur un résultat de Gromov ([Gro85] et [MS04]), qui identifie l'espace des sections  $J_N$ -holomorphes  $u : D^2 \rightarrow D^2 \times M$  à bord sur  $N$  avec les disques  $u : D^2 \rightarrow M$  satisfaisant à

$$\partial_s u(s, t) - X_F(s, t, u(s, t)) + J(\partial_t u(s, t) - X_G(s, t, u(s, t))) = 0 \quad (3.4.2)$$

$$u(e^{2\pi i t}) \in \Psi_t(L)$$

où  $X_F(s, t, \cdot)$  est le champ de vecteurs hamiltonien associé à  $F(x, y, \cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}$  et les fonctions  $F$  et  $G$  ont été utilisées plus haut afin de définir  $\tau$  et  $\tilde{\omega}$ . Dans la définition du morphisme de Seidel géométrique, on peut donc utiliser un tel disque  $u$  plutôt que d'utiliser des sections.

On prend ensuite une fonction générique  $h(r)$  telle  $h(r) = 1$  lorsque  $r \in [0, \epsilon)$  et  $h(r) = 0$  lorsque  $r \in (1 - \epsilon, 1]$ , ainsi qu'une famille régulière de structures presque complexes  $J(r)$ , de sorte que les équations

$$\partial_s u - h(r)X_F(u) + J(r)(\partial_t u - h(r)X_G(u)) = 0,$$

$$u(e^{2\pi i t}) \in \Psi_t(L),$$

interpolent entre les disques utilisés dans la définition de  $S_s(\Psi)$  (en  $r = 0$ ) et ceux de  $S_{\mathcal{P}}(\Psi)$  (en  $r = 1$ ). La compacité est garantie par la borne d'énergie suivante, qu'on retrouve dans [AS01], Lemme 5.2, ainsi que [MS04], Remarque 8.1.10 :

$$E(u) \leq \int_{D^2} u^* \omega + \|R_H\| + \max_{\Psi_t(L)} H,$$

où  $R_H$  est la courbure de la connexion  $\tau$ ; ces quantités sont bornées, puisque les supports de  $H$ ,  $F$  et  $G$  sont compacts. Par les résultats de [Oh93] mentionnés dans la Section 3.2.0.1, l'aire symplectique de  $u$  est aussi bornée uniformément. Ceci permet de définir l'homotopie de chaînes recherchée.  $\square$



# Chapitre 4

---

## PERSPECTIVES

Ce chapitre a pour but de donner les directions que prendra la recherche à la suite des résultats introduits au chapitre précédent.

Le but est d'arriver à la Conjecture 4.2.1 qui relie le triangle exact associé à la chirurgie lagrangienne de la Section 4.1.2 à un triangle exact obtenu par Seidel et faisant intervenir le twist de Dehn. Le twist de Dehn est une opération topologique obtenue en considérant des fibrations de Lefschetz, qu'on définit brièvement. Cette conjecture est le fruit d'une collaboration en cours avec Paul Biran et Octav Cornea.

### 4.1. CHIRURGIE LAGRANGIENNE

On présente dans cette section un exemple de cobordisme non élémentaire, la trace d'une chirurgie lagrangienne. On introduit ensuite la notion de triangle exact qui permet de calculer l'homologie de Floer lagrangienne de cobordismes élémentaires et aussi celui obtenu par chirurgie. On suit la présentation de Biran et Cornea [BC11].

#### 4.1.1. Cobordisme lagrangien engendré par la trace d'une chirurgie

La chirurgie est une opération locale effectuée autour de chaque point d'intersection qui consiste à remplacer l'union des axes réel et imaginaire par leur somme connexe de façon lagrangienne, pour ainsi obtenir une seule sous-variété lagrangienne plongée. Elle a été définie par Polterovich [Pol91]. On donne ici la version, un peu différente, de Biran et Cornea [BC11].

On commence d'abord avec le modèle local, soit  $L_1 = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  et  $L_2 = i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ . On considère ensuite la courbe  $H(t) = a(t) + ib(t) \subset \mathbb{C}$  satisfaisant aux propriétés suivantes

- (1)  $H$  est lisse ;
- (2)  $(a(t), b(t)) = (t, 0), \forall t \in (-\infty, -1]$  ;
- (3)  $(a(t), b(t)) = (0, t), \forall t \in [1, \infty)$  ;
- (4)  $a'(t), b'(t) > 0, \forall t \in (-1, 1)$ .

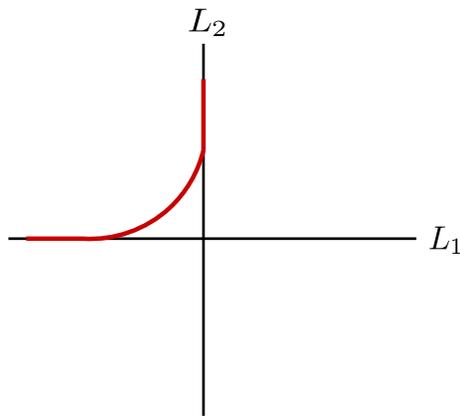


FIG. 4.1: La fonction  $H$

À l'aide de  $H$ , on définit la chirurgie lagrangienne entre  $L_1$  et  $L_2$  par  $L = H \cdot S^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ , plus exactement, on a un plongement :

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto ((a(t) + ib(t))x_1, \dots, (a(t) + ib(t))x_n),$$

et  $L$  est l'image de  $\Phi(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ , dénotée  $L = L_1 \# L_2$ . Il est à noter que la classe d'isotopie hamiltonienne de  $L$  dépend du choix de  $H$ , mais pas la classe d'isotopie lagrangienne. En effet, une isotopie entre deux choix de  $H$  engendre une isotopie lagrangienne.

**Lemme 4.1.1.**  *$L$  est une sous-variété lagrangienne de  $\mathbb{C}^n$  et il y a un cobordisme lagrangien  $L \rightsquigarrow (L_1, L_2)$ .*

DÉMONSTRATION. Un calcul simple mène à  $\Phi^*\omega = (a'(t)b(t) - a(t)b'(t))dt \wedge (\sum_{k=1}^n x_k dx_k)$ .  $L$  est donc lagrangienne, puisque  $\sum_{k=1}^n x_k dx_k = 0$  sur  $S^{n-1}$ . Aussi,  $\Phi$  est bien un plongement, par les propriétés de  $H$ .

Afin d'obtenir le cobordisme, on utilise le même procédé. Soit  $\hat{H} = H \cdot S^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ , i.e.

$$\hat{H} = \{(a(t) + ib(t))x_1, \dots, (a(t) + ib(t))x_{n+1}\}.$$

Comme précédemment,  $\hat{H}$  est une sous-variété lagrangienne, appelée anse lagrangienne. On considère aussi la projection sur le dernier facteur  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  et sa restriction à  $\hat{H}$  (voir Figure 4.2)

$$\hat{\pi} := \pi|_{\hat{H}} : ((a(t) + ib(t))x_1, \dots, (a(t) + ib(t))x_{n+1}) \mapsto (a(t) + ib(t))x_{n+1}$$

Posons  $W_0 = \hat{H} \cap \hat{\pi}^{-1}([-2, 0] \times [0, 2])$ . On remarque d'abord que  $\hat{\pi}^{-1}(\{( -2, 0\}) = L_1 \times \{( -2, 0\}$ ,  $\hat{\pi}^{-1}(\{(0, 2\}) = L_2 \times \{(0, 2\}$  et  $\hat{\pi}^{-1}(\{(0, 0\}) = L \times \{(0, 0\}$ , d'où on déduit  $\partial W_0 = L_1 \amalg L_2 \amalg L$ . Ce cobordisme n'est cependant pas cylindrique au bord  $L$ . On va "allonger" ce bord pour le rendre cylindrique.

Afin de rendre le bout cylindrique, on considère un voisinage de  $L^0 := L \times \{(0, 0\}$  dans  $\hat{H}$ , qu'on appelle  $U$  et  $\mathcal{N} \cong T^*U$  un voisinage de Weinstein de  $U$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On remarque ensuite que  $\{L \times (-y, y) \mid y \in [0, \epsilon]\}$  peut s'écrire comme le graphe d'une 1-forme  $\sigma : U \rightarrow T^*U$  s'annulant sur  $L_0$ . Cette forme est fermée puisque  $U$  est une lagrangienne et elle est exacte puisque  $H^1(U, L_0) = 0$ . On prend finalement l'isotopie hamiltonienne engendrée par une primitive de  $\sigma$ , qu'on fait agir sur  $W_0 \cup U$ , pour obtenir un cobordisme à bouts cylindriques  $W_0 \cup \{L \times (-y, y) \mid y \in [0, \epsilon]\}$ , donnant ainsi  $L \rightsquigarrow (L_1, L_2)$ .

□

On revient maintenant à deux sous-variétés lagrangiennes  $L_1$  et  $L_2$  s'intersectant transversalement en un nombre fini de points (par compacité). La chirurgie lagrangienne entre les deux, notée  $L_1 \# L_2$ , s'obtient en appliquant l'opération de chirurgie locale ci-dessus dans une carte autour de chaque point d'intersection pour laquelle  $L_1$  est envoyée sur  $\mathbb{R}^n$  et  $L_2$  sur  $i\mathbb{R}^n$  (une telle carte

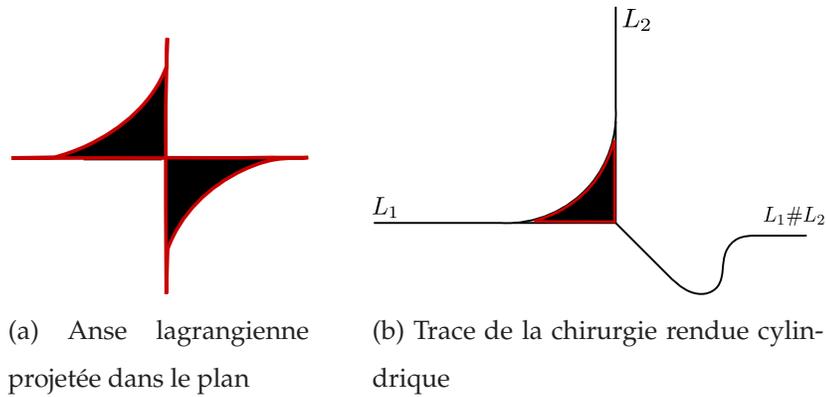


FIG. 4.2: Chirurgie lagrangienne

existe, par une version lagrangienne du théorème de Darboux). On remplacera donc un voisinage de chaque point d'intersection par la trace de la chirurgie. Lorsqu'il n'y a qu'un point d'intersection,  $L_1 \# L_2$  est la somme connexe des deux lagrangiennes.

Avant de donner quelques exemples de chirurgie lagrangienne, on mentionne que même si  $L_1$  et  $L_2$  sont monotones, on ne peut pas s'assurer a priori que  $L_1 \# L_2$  le soit encore.

### Exemples.

- (1) On pose  $M = S^1 \times S^1$ , et  $L_i$  les générateurs de  $\pi_1(M)$ , plongée dans  $M$  (voir la Figure 4.3). Alors la chirurgie transforme leur union en un twist de Dehn, qui, selon l'ordre des facteurs  $L_i$ , sera positif ou négatif.
- (2) On considère l'immersion lagrangienne  $\iota : S^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$\iota(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_0 x_1, \dots, x_n, x_0 x_n).$$

Les points  $N := (1, 0, \dots, 0)$  et  $S = (-1, 0, \dots, 0)$  sont identifiés et s'intersectent transversalement. On peut donc choisir une carte symplectique autour de l'image du point d'intersection double, telle que  $\iota(U \cup V) \cong \mathbb{R}^n \cup i\mathbb{R}^n$ , où  $U, V$  sont des voisinages de  $N$  et  $S$ .

On effectue alors la chirurgie sur  $L_1 := U$  et  $L_2 := V$ , afin d'obtenir un plongement lagrangien d'un tore.

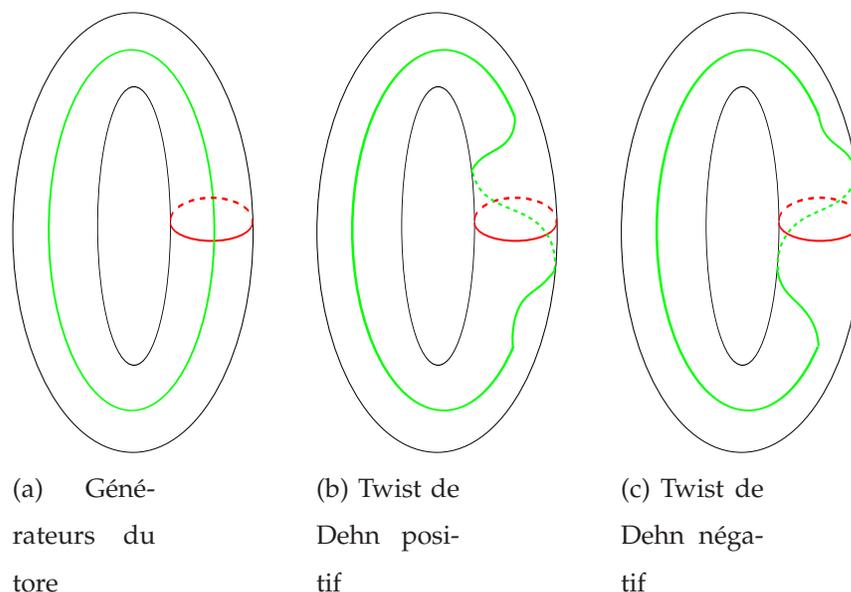


FIG. 4.3: Twists de Dehn

On peut appliquer cette procédure à n'importe quelle immersion lagrangienne où les points d'auto-intersection sont doubles et transverses. Pour des résultats utilisant ces méthodes, voir par exemple [Pol91].

- (3) Biran et Cornea ([BC11], §6.3) donnent des exemples, obtenus par chirurgie, de lagrangiennes cobordantes (non monotones) qui ne sont pas isotopes au sens classique. Ces exemples sont intéressants dans le contexte de [BC11], Théorème 5.2.1.

#### 4.1.2. Triangle exact associé à la chirurgie lagrangienne

Les calculs qu'on donne dans cette section apparaissent déjà dans [BC11] et serviront surtout à introduire la Conjecture 4.2.1.

On suppose implicitement que toutes les lagrangiennes satisfont aux hypothèses nécessaires à la construction de l'homologie de Floer. En pratique, il faut vérifier que ces conditions sont satisfaites.

La matrice  $D$  de la Section 3.3 apparaît dans une construction classique en topologie algébrique, soit l'application cône (de l'anglais «mapping cone»)

induite par un morphisme de chaînes, qu'on explique à l'instant (voir aussi [Wei94]).

On considère deux complexes de chaînes  $(X, \partial_X)$  et  $(Y, \partial_Y)$ , pas nécessairement gradués, ainsi qu'un morphisme de chaînes  $\phi : X \rightarrow Y$ . Le cône associé à  $\phi$  est le complexe de chaînes  $(\text{Cone}(\phi), D) := X \oplus Y$  muni de la différentielle

$$D = \begin{pmatrix} \partial_X & 0 \\ \phi & \partial_Y \end{pmatrix}.$$

On a bien  $D^2 = 0$ , et une simple vérification montre qu'il y a une suite courte exacte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} \text{Cone}(\phi) \xrightarrow{j} X \longrightarrow 0$$

donnée par l'inclusion et la projection. Le connectant  $\partial$  induit en homologie par cette suite courte exacte n'est nul autre que  $\phi_*$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \partial[x] &:= [i^{-1} \circ D \circ j^{-1}(x)] \\ &= [i^{-1} \circ D(x, 0)] \\ &= [i^{-1}(\partial_X x, \phi(x))] \\ &= [\phi(x)] \\ &= \phi_*([x]). \end{aligned}$$

On écrit la suite longue exacte induite comme un triangle exact

$$\begin{array}{ccc} H(Y) & \xrightarrow{i_*} & H(\text{Cone}(\phi)) \\ \phi_* \uparrow & \swarrow j_* & \\ H(X) & & \end{array}$$

Soient maintenant le cobordisme engendré par la trace de la chirurgie de deux lagrangiennes,  $V : L_1 \# L_2 \rightsquigarrow (L_1, L_2)$  ainsi que le cobordisme trivial  $\overline{N} := \gamma \times N$ , où  $N$  est une troisième lagrangienne quelconque et  $\gamma$  est identifiée à la Figure 4.4.

Le complexe de Floer  $CF(\overline{N}, V)$  est le cône associé au morphisme de chaînes  $\phi : CF(N, L_2) \rightarrow CF(N, L_1)$ , défini en comptant les bandes de Floer reliant  $P$  à

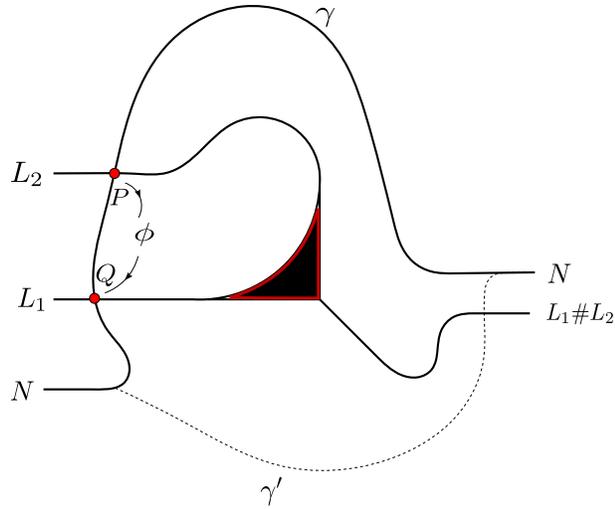


FIG. 4.4: Intersection de la trace d'une chirurgie avec un cobordisme trivial

$Q$ . De plus, comme la courbe  $\gamma$  est hamiltonienne isotope à la courbe  $\gamma'$ , il y a un isomorphisme  $H(\text{Cone}(\phi)) \cong \text{HF}(N, L_1 \# L_2)$  induit par le morphisme de comparaison à bords variables associé à cette isotopie. Le triangle exact associé au cône est donc

$$\begin{array}{ccc}
 \text{HF}(N, L_1) & \xrightarrow{i_*} & \text{HF}(N, L_1 \# L_2) \\
 \uparrow \phi_* & & \swarrow j_* \\
 \text{HF}(N, L_2) & & 
 \end{array} \tag{4.1.1}$$

Pour une généralisation à des cobordismes dont les extrémités négatives sont plus nombreuses, le lecteur pourra consulter [BC11], Corollaire 4.1.5.

## 4.2. TWIST DE DEHN, TRIANGLE EXACT DE SEIDEL ET CHIRURGIE

Étant donnée une sphère lagrangienne  $L$  dans  $(M, \omega)$ , on considère un voisinage de Weinstein  $T^*L$  de  $L$  dans  $M$ . Le flot géodésique  $\phi_t$  est une isotopie hamiltonienne définie sur  $T^*L \setminus L_0$ , où  $L_0$  est la section nulle. Des calculs simples montrent que pour  $t = \pi$ , il s'étend à un symplectomorphisme de  $T^*L$  et, lorsque restreint à  $L_0$ , il coïncide avec l'application antipodale.

Ensuite, on ne considère que les covecteurs de norme au plus 1 et on étend ce symplectomorphisme de façon triviale au reste de  $M$ . On obtient ainsi un symplectomorphisme de  $M$  appelé le *twist de Dehn* selon  $L$ , dénoté  $\tau_L$ . Appliqué par exemple à un méridien du tore, il coïncide avec la notion classique de twist de Dehn positif.

La question est maintenant de savoir quel est son effet sur l'homologie de Floer lagrangienne. Un difféomorphisme hamiltonien laisse cette dernière invariante, et Seidel a montré, dans le cas exact, quel est l'effet du twist de Dehn sur l'homologie.

**Théorème 4.2.1** ([Sei03], Théorème 1). *Soit  $L$  une sphère lagrangienne exacte d'une variété symplectique exacte  $(M, \omega)$  munie d'un difféomorphisme fixé  $f : S^n \rightarrow L$ . On peut lui associer un automorphisme symplectique exact de  $M$ , le twist de Dehn  $\tau_L = \tau_{(L, [f])}$ . Étant données deux lagrangiennes exactes  $L_0, N$  de  $M$ , il y a un triangle exact en cohomologie de Floer lagrangienne*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HF}(\tau_L(L_0), N) & \xrightarrow{\mathrm{tw}} & \mathrm{HF}(L_0, N) \\ \circ \uparrow & \swarrow \delta & \\ \mathrm{HF}(L, N) \otimes \mathrm{HF}(L_0, L) & & \end{array}$$

Le morphisme  $\circ$  est le produit classique en cohomologie de Floer et  $\delta$  est défini indirectement comme le connectant d'une suite courte exacte. Le morphisme intéressant dans le contexte de cette thèse est  $\mathrm{tw}$ , qu'on voudra obtenir grâce aux cobordismes lagrangiens.

Il est classique, en théorie de Picard-Lefschetz, de relier le twist de Dehn et les fibrations de Lefschetz. Il se trouve qu'on peut faire la même chose en topologie symplectique. On donne quelques détails à ce sujet. Pour une présentation très détaillée dans le cas exact, voir [Sei03].

Les fibrations de Lefschetz auxquelles on va s'intéresser sont ce qui s'approche le plus d'une fibration triviale  $M \times D^2$  sans l'être, où  $(M, \omega)$  est une variété symplectique. Plus exactement, on va considérer un espace

$$M \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} D^2$$

qui est une fibration symplectique lorsque restreint à  $E \setminus E_0 \xrightarrow{\pi} D^2 \setminus \{0\}$ . On demande aussi que la fibre singulière au-dessus de 0,  $M_0$ , ne contienne qu'un seul point singulier et que la projection dans une carte autour de ce point soit donnée par  $\pi(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \sum z_i^2$  et soit holomorphe, où les coordonnées locales sur  $E$  correspondent à  $\mathbb{C}^{n+1}$ . La projection est donc une fonction de Morse complexe et le point singulier un point critique. Pour plus de détails sur la topologie de telles fibrations, le lecteur peut consulter l'excellent [GS99]. On mentionne au passage qu'une fibration de Lefschetz, malgré son nom, n'est pas une fibration.

En considérant la partie réelle de  $\pi^{-1}(1)$ , on obtient une sphère lagrangienne  $L$  de  $M$ . Le lien entre les fibrations de Lefschetz et le twist de Dehn est que la trace du transport parallèle appliqué à  $L$  le long de  $\partial D^2$  correspond à l'application tore du twist de Dehn selon  $L$ .

On peut aussi appliquer la procédure inverse, c'est à dire commencer avec une sphère lagrangienne  $L \subset M$  et construire une fibration de Lefschetz avec une seule fibre singulière dont la monodromie autour du cercle est le twist de Dehn.

Le morphisme  $tw$  du triangle exact ci-haut est alors défini en considérant une fibration de Lefschetz au-dessus d'une bande  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  et en étudiant les sections holomorphes de cette fibration à bords sur certaines lagrangiennes bien choisies. La difficulté du résultat de Seidel est de montrer l'existence d'une suite courte exacte, et non de définir chaque morphisme.

Maintenant, en appliquant le Théorème 4.2.1 à une lagrangienne  $L_0$  telle que  $\#\{L_0 \cap L\} = 1$ , on peut remplacer le produit tensoriel par  $HF(L, N)$ , puisque  $HF(L_0, L) = \mathbb{Z}_2$ . Dans ce cas, on a aussi le résultat suivant, qui s'obtient en adaptant la preuve de [Sei99], Proposition 8.6 :

**Proposition 4.2.1.** *Étant données  $L$  une sphère lagrangienne et  $L_0$  une lagrangienne intersectant  $L$  transversalement en un seul point, la chirurgie lagrangienne  $L_0 \# L$  est hamiltonienne isotope au twist de Dehn  $\tau_L(L_0)$ , pour un choix approprié d'anse lagrangienne.*

On peut donc remplacer le terme  $\tau_L(L_0)$  par  $L_0\#L$  dans le triangle exact ci-dessus. La ressemblance avec le triangle exact 4.1.1, page 69, est frappante. On émet donc la

**Conjecture 4.2.1** (Biran, C., Cornea, travaux en cours). *Lorsque  $\#\{L_0 \cap L\} = 1$ , le triangle exact de Seidel et celui associé à la chirurgie lagrangienne sont isomorphes.*

La méthode d'approche pour prouver une telle conjecture dans le contexte de cette thèse est claire : il faut étudier les cobordismes dans une fibration de Lefschetz et remplacer les sections holomorphes de Seidel par l'intersection de cobordismes bien choisis, comme on l'a fait à la Section 3.4.

On remarque que cette conjecture généralise le résultat de Seidel au cadre non-exact. De plus, il s'agit d'un premier pas à faire dans l'étude de la catégorie de Fukaya d'une fibration de Lefschetz (comparer avec les résultats fonctoriels de Biran et Cornea [BC11]).

La prochaine étape consiste à comparer ces deux triangles dans le cas où il y a plusieurs points d'intersection. Un argument simple montre que dans ce cas général le twist de Dehn ne peut pas être difféomorphe à la chirurgie. Il reste à voir ce qu'on pourra dire à ce sujet.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Alb08] Peter Albers. A Lagrangian Piunikhin-Salamon-Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4) :Art. ID rnm134, 56, 2008.
- [Alb10] Peter Albers. Erratum for "On the extrinsic topology of Lagrangian submanifolds" [mr2180810]. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7) :1363–1369, 2010.
- [Arn80] V. I. Arnol'd. Lagrange and Legendre cobordisms. I. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(3) :1–13, 96, 1980.
- [AS01] M. Akveld and D. Salamon. Loops of Lagrangian submanifolds and pseudoholomorphic discs. *Geom. Funct. Anal.*, 11(4) :609–650, 2001.
- [BC06] Jean-François Barraud and Octav Cornea. Homotopic dynamics in symplectic topology. In *Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology*, volume 217 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 109–148. Springer, Dordrecht, 2006.
- [BC07a] Jean-François Barraud and Octav Cornea. Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence. *Ann. of Math. (2)*, 166(3) :657–722, 2007.
- [BC07b] Paul Biran and Octav Cornea. Quantum structures for Lagrangian submanifolds. Preprint, <http://arxiv.org/abs/0708.4221v1>, 2007.
- [BC09a] Paul Biran and Octav Cornea. A Lagrangian quantum homology. In *New perspectives and challenges in symplectic field theory*, volume 49 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 1–44. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [BC09b] Paul Biran and Octav Cornea. Rigidity and uniruling for Lagrangian submanifolds. *Geom. Topol.*, 13(5) :2881–2989, 2009.
- [BC11] Paul Biran and Octav Cornea. Lagrangian cobordism. Preprint, <http://arxiv.org/pdf/1109.4984v1>, 2011.

- [Bir97] P. Biran. Symplectic packing in dimension 4. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3) :420–437, 1997.
- [Cha11] François Charette. A geometric refinement of a theorem of Chekanov. To appear in *Journal of Symplectic Geometry*, 2011.
- [Che97] Yu. V. Chekanov. Lagrangian embeddings and Lagrangian cobordism. In *Topics in singularity theory*, volume 180 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 13–23. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [Che98] Yu. V. Chekanov. Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves. *Duke Math. J.*, 95(1) :213–226, 1998.
- [Che00] Yu. V. Chekanov. Invariant Finsler metrics on the space of Lagrangian embeddings. *Math. Z.*, 234(3) :605–619, 2000.
- [CL05] Octav Cornea and François Lalonde. Cluster homology. Preprint, 2005.
- [EM02] Y. Eliashberg and N. Mishachev. *Introduction to the h-principle*, volume 48 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [FHS95] Andreas Floer, Helmut Hofer, and Dietmar Salamon. Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action. *Duke Math. J.*, 80(1) :251–292, 1995.
- [FOOO09] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part I*, volume 46 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [Gro85] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.
- [GS99] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz. *4-manifolds and Kirby calculus*, volume 20 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [HL10] Shengda Hu and François Lalonde. A relative Seidel morphism and the Albers map. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(3) :1135–1168, 2010.
- [HLL11] Shengda Hu, François Lalonde, and Rémi Leclercq. Homological Lagrangian monodromy. *Geom. Topol.*, 15(3) :1617–1650, 2011.

- [Hof88] H. Hofer. Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 5(5) :465–499, 1988.
- [KM05] Jelena Katić and Darko Milinković. Piunikhin-Salamon-Schwarz isomorphisms for Lagrangian intersections. *Differential Geom. Appl.*, 22(2) :215–227, 2005.
- [Laz00] L. Lazzarini. Existence of a somewhere injective pseudo-holomorphic disc. *Geom. Funct. Anal.*, 10(4) :829–862, 2000.
- [Lec08] Rémi Leclercq. Spectral invariants in Lagrangian Floer theory. *J. Mod. Dyn.*, 2(2) :249–286, 2008.
- [MS95] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Oxford Science Publications.
- [MS04] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Oh93] Yong-Geun Oh. Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(7) :949–993, 1993.
- [Oh96] Yong-Geun Oh. Relative Floer and quantum cohomology and the symplectic topology of Lagrangian submanifolds. In *Contact and symplectic geometry (Cambridge, 1994)*, volume 8 of *Publ. Newton Inst.*, pages 201–267. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [Pol91] Leonid Polterovich. The surgery of Lagrange submanifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 1(2) :198–210, 1991.
- [Pol01] Leonid Polterovich. *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [PSS96] S. Piunikhin, D. Salamon, and M. Schwarz. Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology. In *Contact and symplectic geometry (Cambridge, 1994)*, volume 8 of *Publ. Newton Inst.*, pages 171–200. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [RS93] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The Maslov index for paths. *Topology*, 32(4) :827–844, 1993.

- [Sch00] Matthias Schwarz. On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds. *Pacific J. Math.*, 193(2) :419–461, 2000.
- [Sei97] P. Seidel.  $\pi_1$  of symplectic automorphism groups and invertibles in quantum homology rings. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6) :1046–1095, 1997.
- [Sei99] Paul Seidel. Lagrangian two-spheres can be symplectically knotted. *J. Differential Geom.*, 52(1) :145–171, 1999.
- [Sei03] Paul Seidel. A long exact sequence for symplectic Floer cohomology. *Topology*, 42(5) :1003–1063, 2003.
- [Vit87] Claude Viterbo. Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d’action et indice des systèmes hamiltoniens. *Bull. Soc. Math. France*, 115(3) :361–390, 1987.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.