

Université de Montréal

**Reconstruction des structures magnéto-convectives solaires sous une région active,
par l'utilisation conjointe d'un modèle de convection anélastique et d'une méthode
d'assimilation de données.**

par
Dorian Pirot

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Astrophysique

Juin, 2012

© Dorian Pirot, 2012.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Reconstruction des structures magnéto-convectives solaires sous une région active,
par l'utilisation conjointe d'un modèle de convection anélastique et d'une méthode
d'assimilation de données.**

présenté par:

Dorian Pirot

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Georges Michaud,	président-rapporteur
Alain Vincent,	directeur de recherche
Paul Charbonneau,	codirecteur
Pierre Bergeron,	membre du jury

Mémoire accepté le: 07 août 2012

RÉSUMÉ

L'utilisation d'une méthode d'assimilation de données, associée à un modèle de convection anélastique, nous permet la reconstruction des structures physiques d'une partie de la zone convective située en dessous d'une région solaire active. Les résultats obtenus nous informent sur les processus d'émergence des tubes de champ magnétique au travers de la zone convective ainsi que sur les mécanismes de formation des régions actives.

Les données solaires utilisées proviennent de l'instrument MDI à bord de l'observatoire spatial SOHO et concernent principalement la région active AR9077 lors de l'évènement du "jour de la Bastille", le 14 juillet 2000. Cet évènement a conduit à l'avènement d'une éruption solaire, suivie par une importante éjection de masse coronale. Les données assimilées (magnétogrammes, cartes de températures et de vitesses verticales) couvrent une surface de 175 méga-mètres de coté acquises au niveau photosphérique.

La méthode d'assimilation de données employée est le "coup de coude direct et rétrograde", une méthode de relaxation Newtonienne similaire à la méthode "quasi-linéaire inverse 3D". Elle présente l'originalité de ne pas nécessiter le calcul des équations adjointes au modèle physique. Aussi, la simplicité de la méthode est un avantage numérique conséquent. Notre étude montre au travers d'un test simple l'applicabilité de cette méthode à un modèle de convection utilisé dans le cadre de l'approximation anélastique. Nous montrons ainsi l'efficacité de cette méthode et révélons son potentiel pour l'assimilation de données solaires. Afin d'assurer l'unicité mathématique de la solution obtenue nous imposons une régularisation dans tout le domaine simulé.

Nous montrons enfin que l'intérêt de la méthode employée ne se limite pas à la reconstruction des structures convectives, mais qu'elle permet également l'interpolation optimale des magnétogrammes photosphériques, voir même la prédiction de leur évolution temporelle.

Mots clés: zone convective solaire, couronne solaire, simulations numériques, convection, assimilation de données, coup de coude direct et rétrograde.

ABSTRACT

We use a data assimilation technique, together with an anelastic convection model, in order to reconstruct the convective patterns below a solar active region. Our results yield information about the magnetic field emergence through the convective zone and the mechanisms of active region formation.

The solar data we used are taken from the instrument MDI on board the spatial observatory SOHO on July 2000 the 14th for the event called "bastille day event". This specific event leads to a solar flare followed by a coronal mass ejection. Assimilated data (magnetograms, temperature maps and vertical velocity maps) cover an area of 175 Mm \times 175 Mm at photospheric level.

The data assimilation technique we used, the "Nudging Back and Forth", is a Newtonian relaxation technique similar to the "quasi linear inverse 3D". Such a technique does not require computation of the adjoint equations. Thus, simplicity of this method is a numerical advantage. Our study shows with a simple test case the applicability of this method to a convection model treated with the anelastic approximation.

We show the efficiency of the NBF technique and we detail its potential for solar data assimilation. In addition, to ensure mathematical unicity of the obtained solution, a regularization has been imposed in the whole simulation domain. This is a new approach.

Finally, we show that the interest of such a technique is not limited to the reconstruction of convective patterns but that it also allows optimal interpolation of photospheric magnetograms and predictions.

Key words solar convection zone, solar corona, numerical simulations, convection, data assimilation, Nudging Back and Forth.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES SIGLES	xvii
NOTATION	xix
DÉDICACE	xxiii
REMERCIEMENTS	xxv
AVANT-PROPOS	xxvii
CHAPITRE 1 :INTRODUCTION : LE SOLEIL, UNE ÉTOILE MAGNÉTIQUE.	1
1.1 La zone convective.	1
1.1.1 Instabilité convective en milieu compressible et critère de Schwarzschild. . .	2
1.1.2 Validité des lois polytropiques.	4
1.1.3 Théorie de la longueur de mélange.	6
1.1.4 Transport convectif de l'énergie.	7
1.1.5 La zone convective en quelques chiffres.	8
1.2 Les régions actives.	10
1.2.1 Taches solaires, facules et protubérances.	10
1.2.2 Mesure du champ magnétique solaire.	11
1.3 La photosphère, sommet de la zone convective.	12
CHAPITRE 2 :MAGNÉTOCONVECTION SOLAIRE.	15
2.1 État de la connaissance.	15
2.1.1 Les structures magnéto-convectives.	15
2.1.2 Deux approches physiques différentes pour la modélisation.	18
2.2 Les simulations numériques.	20
2.2.1 Émergence des tubes de champ magnétique.	20
2.3 Les données observationnelles.	22
2.3.1 Observatoires et instruments.	22

2.3.2	Ce que disent les observations.	22
CHAPITRE 3 : MODÈLE PHYSIQUE ET ASPECTS NUMÉRIQUES.		25
3.1	Équations de conservation pour un fluide magnétisé.	25
3.2	Modèle compressible.	26
3.3	L'approximation anélastique.	26
3.4	Le logiciel ANMHD.	29
3.5	L'algorithme DBFN.	30
3.6	Régularisation des fonctionnelles.	31
3.6.1	Principe du maximum d'entropie.	32
3.6.2	Régularisation Tykhonov : minimisation des gradients de champs magnétiques.	32
3.7	Filtrage spatial.	34
3.8	Paramètres physiques du code.	36
CHAPITRE 4 : L'ASSIMILATION DE DONNÉES.		39
4.1	Principe.	39
4.1.1	Notations.	39
4.2	Interpolation par moindres carrés.	40
4.3	La méthode 3D variationnelle.	41
4.4	La méthode 4D variationnelle.	42
4.5	Le filtrage de Kalman.	44
4.6	Quasi Linéaire Inverse 3D.	45
4.6.1	Inverse 3D-Var et approche par modèle adjoint.	45
4.6.2	Approche Quasi linéaire inverse.	45
4.7	Le coup de coude direct et rétrograde.	46
4.7.1	Approche standard : relaxation Newtonienne.	46
4.7.2	Approche diffusive.	46
4.7.3	Convergence.	47
4.7.4	Comparaison entre la méthode BFN et la méthode QIL.	48
CHAPITRE 5 : SIMULATIONS NUMÉRIQUES.		49
5.1	Cas test : émergence d'un tube de flux en forme de U.	49
5.2	Reconstruction de la zone convective située sous la région active AR9077-20000714 par la méthode du coup de coude direct et rétrograde.	51
5.2.1	Assimilation de cartes vectorielles du champ magnétique photosphérique.	53
5.2.2	Assimilation de cartes de température, de champ magnétique et de champ de vitesses photosphériques.	55
5.2.3	Structures convectives mises en évidence.	55
5.2.4	Un système d'arcades pour le réseau magnétique.	59

5.3	Reconstruction des champs magnétiques et des champs de vitesses de surface. . . .	60
5.4	Interpolation et prédiction des cartes de champ magnétique photosphérique. . . .	64
CHAPITRE 6 :CONCLUSION		69
BIBLIOGRAPHIE		71

LISTE DES TABLEAUX

1.I	Principaux paramètres physiques dans la zone convective	9
1.II	Paramètres généraux du Soleil.	10
1.III	Intensités moyennes du champ magnétique solaire et effet Zeeman mesuré. . .	11
2.I	Observatoires solaires et instruments d'intérêt.	22
3.I	Paramètres physiques que nous avons utilisés dans le logiciel ANMHD.	37

LISTE DES FIGURES

1.1	Structures granulaires observées au niveau de la photosphère solaire.	2
1.2	Grandeurs physiques mesurables par l'instrument SOHO/MDI.	12
2.1	Isocontours de température et de champ magnétique au niveau d'un pore magnétique. Image tirée de [Bercik, 2002].	17
2.2	Coupes horizontales d'entropie spécifique pour des simulations HD/MHD réalisées à l'aide du logiciel ANMHD.	19
2.3	Coupe verticale du champ de vitesses verticales et isocontours de champ magnétique pour une simulation MHD réalisée à l'aide du logiciel ANMHD. . .	20
2.4	Séquence temporelle de l'émergence d'un tube de champ magnétique. Image tirée de [Stein <i>et al.</i> , 2011].	21
3.1	Effet de la régularisation Tykhonov sur une simulation numérique d'une région solaire active.	34
3.2	Fonctions de lissage numérique du logiciel ANMHD.	34
3.3	Fonction de transfert du filtre passe-bas de Butterworth.	35
3.4	Filtrage spatial d'une carte de la composante verticale du champ magnétique mesuré au niveau de la photosphère.	36
3.5	Profils de référence pour la densité, pression, température et entropie pour le logiciel ANMHD [Pirot <i>et al.</i> , 2012] et pour un modèle standard solaire [Bahcall et Pinsonneault, 2004].	38
4.1	Schématisation de la variation de la fonction coût associée à l'état d'un système physique.	42
4.2	Schématisation de l'action d'une méthode 4D-Var.	43
5.1	Évolution temporelle de la corrélation entre les cartes observées et simulées de la composante verticale du champ magnétique au cours de l'assimilation de données, pour un cas test.	50
5.2	Évolution temporelle des profils énergétiques du système physique au cours de l'assimilation de données pour AR9077-20000714.	52
5.3	Cartes de la composante verticale du champ magnétique utilisées pour l'assimilation de données.	53
5.4	Cartes des composantes horizontales du champ magnétique au niveau de la photosphère reconstruites à partir de la composante verticale du champ magnétique en supposant l'hypothèse LFF.	53

5.5	Cartes de la température, des composantes verticales du champ magnétique et du champ de vitesses, au sommet du domaine de simulation, après assimilation de données.	54
5.6	Données solaires haute-résolution pour AR9077-20000714 à 09 :00.	55
5.7	Variation avec la profondeur de l'état d'analyse du champ magnétique, du champ de vitesses verticales, de la fluctuation locale de température ainsi que de la force de flottaison.	57
5.8	Structures magnétiques de la zone convective solaire située sous AR9077-20000714 à 09 :00.	58
5.9	Rendu volumique de quelques lignes de champ magnétique sous le voisinage d'une ligne neutre magnétique de AR9077-20000714 à 09 :00.	60
5.10	Comparaison entre les cartes des composantes horizontales du champ magnétique reconstruites avec l'hypothèse LFF et par assimilation de données.	61
5.11	Comparaison entre une carte du champ de vitesses horizontales reconstruites par minimisation de l'énergie au niveau de la photosphère [Vincent <i>et al.</i> , 2012] et par assimilation de données au sommet de la zone convective.	62
5.12	Superposition d'une carte du champ de vitesses horizontales, reconstruite par assimilation de données, au champ de vitesses verticales, au champ magnétique vertical, ainsi qu'à l'amplitude du champ magnétique au sommet du domaine simulé.	63
5.13	Rendu volumique de l'intensité du champ magnétique ainsi que de quelques lignes issues du champ de vitesse pour AR9077-20000714 à 09 :00.	64
5.14	Évolution temporelle de la corrélation entre les cartes observées et simulées de la composante verticale du champ magnétique après assimilation de données pour AR9077-20000714.	65
5.15	Évolution temporelle des profils énergétiques du système physique après assimilation de données pour AR9077-20000714.	66
5.16	Déploiement d'un tube de champ magnétique torsadé situé sous une région magnétiquement active après suppression des contraintes de surface.	66

LISTE DES SIGLES

'	Minute / minute d'arc
''	Seconde / seconde d'arc
3D-Var	Méthode tridimensionnelle variationnelle
4D-Var	Méthode quadridimensionnelle variationnelle
ANMHD	Anelastic magnetohydrodynamic solver : Solutionneur magnétohydrodynamique anélastique
AR	Active region : Région active
AR9077-20000714	Région active n° 9077, le 14 Juillet 2000
BFN	Back and forth nudging : Coup de coude direct et rétrograde
BLUE	Best linear unbiased estimator : Meilleur estimateur linéaire non biaisé
DBFN	Diffusive back and forth nudging : Coup de coude direct et rétrograde diffusif
FD	Full disc : Disque entier
GRPS	Groupe de recherche en physique solaire
HD	Hydrodynamique
HMI	Heliosismic and magnetic imager : Imageur magnétique et héliosismique
IVM	Imaging vector magnetograph : Imageur et magnétographe vectoriel
L1	Point de Lagrange L1
LFF	Linear force free : Linéaire à force magnétique nulle
MDI	Michelson doppler imager : Imageur Michelson Doppler
MHD	Magnétohydrodynamique
QIL	Quasi-inverse linear : Linéaire quasi-inverse
RQCHP	Réseau Québécois de calcul haute-performance
SDO	Solar digital observatory : Observatoire de la dynamique solaire
SOHO	Solar and heliospheric observatory : Observatoire solaire et héliosphérique

NOTATION

x	grandeur scalaire
\mathbf{x}	grandeur vectorielle
∇x	opérateur gradient
$\nabla \cdot \mathbf{x}$	opérateur divergence
$\nabla \times \mathbf{x}$	opérateur rotationnel
Δx	opérateur Laplacien
$\frac{dx}{dy}$	dérivée de X par rapport à Y
$\frac{\partial x}{\partial y}$	dérivée partielle de X par rapport à Y
$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$	dérivée de variables thermodynamiques
$\frac{Dx}{Dy}$	dérivée Lagrangienne de X par rapport à Y
\mathbf{v}	champ de vitesse du fluide
\mathbf{w}	champ de vorticité du fluide
μ	viscosité dynamique du milieu
$\vec{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
\mathbf{E}	champ électrique
\mathbf{B}	champ magnétique
μ_0	perméabilité magnétique du vide
η	diffusivité magnétique du milieu
s	entropie spécifique du fluide
ρ	masse volumique du fluide
c_p	capacité thermique massique du milieu
κ	conductivité thermique du milieu
\mathbf{g}	gravité du milieu
γ	indice adiabatique du milieu
m	indice polytropique du milieu
\mathcal{R}	constante des gaz parfaits
\mathcal{M}	masse moléculaire moyenne du milieu
P	variable d'état thermodynamique : pression
T	variable d'état thermodynamique : température
$T_{\text{effective}}$	Température effective du milieu
S	fonction d'état thermodynamique : entropie
U	fonction d'état thermodynamique : énergie interne
E_c	énergie cinétique du fluide
E_p	somme des énergies potentielles du fluide
δQ	échange de chaleur entre une particule de fluide et le milieu
δW	travail thermodynamique exercé sur le fluide

F_c	flux convectif d'énergie
l	longueur de mélange
$\Delta\nabla$	coefficient de super-adiabaticité
H_p	hauteur d'échelle de pression
α	paramètre de contrôle de l'efficacité de la convection
ϕ	latitude solaire
Ω	vitesse angulaire de rotation
μ_B	magnéton de Bohr
m_e	masse de l'électron
h	constante de Planck
c	vitesse de la lumière dans le vide
m_l	nombre quantique magnétique
\mathbf{j}	vecteur densité de courant électrique
π	surface arbitraire
σ	conductivité électrique du milieu
t	temps
x^*	valeur dimensionnelle de référence
\bar{x}	grandeur adimensionnelle d'ordre unité
x_0	développement de \bar{x} à l'ordre zéro en termes du carré du nombre de Mach
x_1	développement de \bar{x} au premier ordre en termes du carré du nombre de Mach
x_z	grandeur de référence constante à une profondeur z
Sr	nombre de Strouhal
Fr	nombre de Froude
Re	nombre de Reynolds
Rm	nombre de Reynolds magnétique
Ra	nombre de Rayleigh
Ri	nombre de Richardson
Ro	nombre de Rossby
Pe	nombre de Péclet
Pr	nombre de Prandtl
Pm	nombre de Prandtl magnétique
x^{obs}	carte bidimensionnelle d'une grandeur x observée
x^{cal}	carte bidimensionnelle d'une grandeur x calculée par le modèle
\mathbf{e}_z	vecteur unitaire selon l'axe z
$\delta(x)$	fonction de Dirac
t_{obs}	temps pour lesquels des observations sont disponibles
Ω_B	nombre de micro-états d'une configuration magnétique donnée
B_{los}	composante du champ magnétique mesuré le long de la ligne de visée

\mathbf{B}_{trans}	composante transversale du champ magnétique
$\mathbf{B}_{azimuth}$	composante azimuthale du champ magnétique
B_0	champ magnétique moyen initial
B_{eq}	champ magnétique d'équipartition
\mathbf{T}_B	tension magnétique
\mathbf{P}_B	pression magnétique
E_i	état d'énergie atomique
λ_0	longueur d'onde
L_z	résolution numérique verticale
dz	pas de maille vertical
dx, dy	pas de maille horizontaux
z	hauteur depuis le bas du domaine de simulation
λ	coefficient de régularisation
M	nombre de Mach
c_S	vitesse de propagation des ondes sonores dans le milieu
v_A	vitesse de propagation des ondes Alfvén dans le milieu
\mathbf{F}_l	force de Lorentz
\mathbf{F}_π	force de flottaison
\mathbf{F}_T	force de trainée
ε	quantité petite devant l'unité
r	altitude dans l'étoile
dr	déplacement infinitésimal vers l'extérieur de l'étoile
Δt	pas de temps numérique
τ_E	temps caractéristique de diffusion du champ électrique
τ_B	temps caractéristique de diffusion du champ magnétique
\mathbf{x}_t	état vrai du système physique
\mathbf{x}_b	l'état de référence du système physique
\mathbf{x}_a	l'état d'analyse du système physique
\mathbf{y}	vecteur des observations
H	opérateur observation.
\mathbf{K}	matrice de gain
\mathbf{B}	matrice covariante des erreurs de référence
\mathbf{R}	matrice covariante des erreurs d'observations
\mathbf{A}	matrice covariante des erreurs d'analyse
\mathbf{M}	opérateur non-linéaire de prédiction
\mathbf{F}	termes éventuellement non-linéaires
\mathbf{D}	termes diffusifs
$\mathbf{J}(x)$	fonction cout
L	propagateur linéaire

Dedicacé à Fanny,
qui m'assiste tous les jours dans mes autres travaux de recherche,
ceux portant sur le bonheur.

REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer ici mes remerciements de manière personnelle et imagée :

Le "petit prince" du roman de Saint-Exupéry demandait à son nouvel ami aviateur : "S'il vous plaît ? Dessine-moi un mouton!". Plusieurs fois l'aviateur s'exécuta sans jamais satisfaire l'enfant qui, toujours, trouvait quelque chose à redire. Finalement l'aviateur dessina une caisse et dit au petit prince : "Ça, c'est la caisse. Le mouton que tu veux est dedans", ce qui satisfit le petit prince. Derrière la question "Qu'est ce qu'un mouton?" se cache le problème de la représentation du réel. Ce concept est central en physique où la nature mystérieuse de l'Univers se révèle petit à petit sous la forme de modèles, toujours plus proches du vrai, mais imparfaits. "Qu'est ce que le Soleil?" est la question qui m'a mené jusqu'au département de Physique de l'Université de Montréal. Je tiens à remercier messieurs Alain Vincent et Paul Charbonneau auquel j'ai dit : "S'il vous plaît ? Dessine-moi un Soleil!". Ils m'ont alors proposé un sujet de recherche des plus intéressants : "Ça, c'est le modèle physique. Ton Soleil est dedans". Suite à ce travail de recherche, un Soleil miniature flotte dans ma tête. Bien qu'imparfait, il semble réaliste. C'est un privilège partagé par peu de personnes, je leur en suis reconnaissant.

- Je tiens à remercier Alain Vincent pour son extrême disponibilité, et la grande sollicitude dont il a fait preuve à mon égard. Merci de m'avoir orienté vers un sujet d'étude aussi stimulant, original et pertinent. Merci pour vos idées, conseils et remarques.
- Je tiens à remercier Paul Charbonneau pour les multiples opportunités qu'il m'a offert, que j'ai saisi et dont je tirerai des bénéfices tout au long de ma carrière professionnelle.
- Je tiens à remercier l'ensemble des membres du GRPS pour l'ambiance et l'esprit de groupe qu'ils ont su instaurer. Merci pour les différents conseils, discussions informelles et autres "coups de coude".
- Un grand merci à mes collègues et amis, Corinne Simard et Alexandre Lemerle, sans qui ces deux années auraient été moins plaisantes.
- La rédaction du présent mémoire a été supportée par les membres actifs du "club des blonds".

Le financement de cette maîtrise de recherche provient des fonds de recherche de messieurs Alain Vincent et Paul Charbonneau. Les graphiques ont été générés en utilisant les logiciels IDL et Vapor avec l'aide technique de Nicolas Lawson du GRPS. Les simulations numériques ont été menées à l'aide du supercalculateur Cottos au RQCHP (Montréal, Québec) ainsi que sur une grappe de calcul du GRPS. Merci à Jacques Richer pour son aide avec l'optimisation du code.

AVANT-PROPOS

Le Soleil est une étoile magnétisée de faible masse dont le transport de l'énergie vers les couches externes se produit de manière radiative et convective. La composante toroïdale du champ magnétique solaire, générée à l'interface entre les zones radiatives et convectives, la tachocline [Brun *et al.*, 2004], émerge par endroits jusqu'aux niveaux photosphériques par flottaison. En surface, le champ magnétique forme un réseau magnétique diffus, mais également des régions dites "actives" [de Wijn *et al.*, 2009] de la couronne solaire. Dans de telles régions, le champ magnétique se concentre sous la forme de tubes de champ. Ces tubes sont principalement orientés verticalement dans la basse couronne et prennent la forme de boucles. Les deux branches de chacune de ces boucles sont ancrées sur des régions de polarités magnétiques opposées [Foukal, 2004, 8.4.3]. La forte intensité du champ magnétique dans de telles régions (≈ 0.1 Tesla) provoque la diminution du transport convectif d'énergie par les couches inférieures, créant ainsi une baisse localisée de la température de surface et donnant naissance à une zone communément appelée tache solaire [Foukal, 2004, 8.2.2]. Les mécanismes expliquant la formation de tubes de champs magnétiques cohérents, ceux expliquant l'émergence des régions actives, ainsi que l'action d'une dynamo locale au sein des flots de matière ont été amplement étudiés et documentés [Fan, 2009]. Ceci a été rendu possible au travers de l'étude des données observationnelles de surface, ou sub-surfaciennes par l'utilisation des techniques récentes d'héliosismologie [Gizon et Birch, 2005], mais également au travers de simulations numériques [Miesch, 2005]. Ces simulations ont permis de répondre à différents problèmes posés par la communauté, comme celui de la calibration des procédures d'analyse et d'interprétation des paramètres de Stokes pour la détermination du champ magnétique solaire [Bello González *et al.*, 2009]. Celles-ci restent malheureusement, du fait du coût numérique important, limitées à la résolution de problèmes restreints [Stein, 2011]. Ainsi les modèles sont idéalisés, traités dans le cadre d'approximations, limités à une zone solaire particulière (zone convective, photosphère, couronne) et parfois simulés avec une résolution spatiale insuffisante [Stein, 2011]. Les meilleures simulations numériques atteignent une résolution spatiale de 24 km [Stein *et al.*, 2011]. Aussi la démarche actuelle consiste dans le raffinement des modèles [Stein, 2011]. Le but est de parvenir à investiguer des régions mal connues comme la tachocline ou la zone de transition, ou bien encore à mettre en évidence les mécanismes physiques responsables de la formation des pores, facules et points brillants [Vögler *et al.*, 2005]. Une autre question d'intérêt est la compréhension des processus de reconnexion magnétique [Stein, 2011] ayant lieu dans la couronne solaire et donnant naissance aux éruptions solaires ainsi qu'aux éjections de masses coronales. L'utilisation de modèles numériques traitants de l'interaction entre plusieurs zones solaires telles que la zone convective, la chromosphère ou la couronne permettrait une meilleure compréhension de l'ensemble des phénomènes physiques caractérisant le magnétisme de surface comme l'évolution des zones actives. C'est une des voies principalement suivies actuellement [Stein, 2011].

Une autre voie reflète le fait que la qualité des données solaires obtenues par les télescopes

terrestres et spatiaux s'améliore considérablement avec le temps [de Wijn *et al.*, 2009]. Aussi, avec une augmentation régulière de la résolution spatiale et temporelle des données photosphériques, l'assimilation de données solaires, utilisée conjointement avec les simulations numériques, pourrait avoir d'importantes implications pour la résolution de problèmes physiques comme celui de la prédiction des cycles d'activité solaire [Kitiashvili et Kosovichev, 2010] ou bien celui de l'existence de dynamos solaires locales et globales [de Wijn *et al.*, 2009].

Le propos de ce mémoire de maîtrise est de montrer l'intérêt, ainsi que la faisabilité, de l'emploi d'une méthode simple d'assimilation des données photosphériques solaires disponibles avec un modèle numérique de la zone convective utilisant l'approximation anélastique. Les données provenant de l'instrument MDI, à bord de l'observatoire spatial SOHO, sont assimilées par la technique dite du "coup de coude direct et rétrograde" [Auroux et Blum, 2008]. Les simulations numériques "conduites par les données" utilisées actuellement, confinent les données à un rôle de conditions aux limites. La méthode d'assimilation de données que nous avons employé permet aux données d'influencer l'ensemble de la simulation, ce qui est une avancée. L'emploi des données de température ainsi que des vitesses Doppler, en plus des magnétogrammes traditionnellement employés est également nécessaire pour reconstruire le champ magnétique et les champs de vitesse [Fisher *et al.*, 2012]. De plus, afin d'assurer l'unicité des résultats obtenus, une régularisation a été effectuée, ce qui n'avait jamais été réalisé dans ce contexte.

Nous avons pu valider l'ensemble de notre méthode en la testant dans un cas particulier, pour la reconstruction des structures physiques convectives du soleil, pour l'interpolation optimale des magnétogrammes photosphériques dans le temps, ainsi que pour la prédiction optimale des magnétogrammes avec un horizon de prévisibilité de 30 minutes.

L'ensemble de ce travail a conduit à une publication :

[Pirot *et al.*, 2012] Pirot, D., Gaudet, J., Vincent, A., 2011, " *On the reconstruction of the convection pattern below a solar active region* ", HPC in Medical Science "<http://2011.hpcs.ca>" Montreal, QC, Canada, 15-17 juin, 2011 paru dans Journal of Physics : Conference Series, (JPCS).

Ces travaux ont été présentés dans plusieurs conférences internationales :

Décembre 2011 : [Pirot *et al.*, 2011] Dorian Pirot, Alain P. Vincent, Paul Charbonneau ; 2011 " *Using data assimilation to reconstruct convection patterns below an active region of solar corona from observed magnetograms.* ". Résumé 1187091 présenté à la rencontre d'automne 2011 de l'AGU, San Francisco, Californie, 5-9 Décembre 2011.

Octobre 2011 : Dorian Pirot, Alain P. Vincent, Paul Charbonneau ; 2011 " *Using data assimilation to reconstruct convection patterns below an active region of the solar corona from magnetograms* " Huitième atelier solaire Canadien. La petite rouge, Québec, Canada, 14-17 Octobre 2011.

Juin 2011 : Dorian Pirot, Jonathan Gaudet, Alain P. Vincent ; 2011 *"On the reconstruction of the convection pattern below a solar active region"*, *HPC in Medical Science* <http://2011.hpcs.ca>. Montréal, Québec, Canada, 15-17 juin. 1^{er} ***prix de la meilleure affiche étudiante***.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION : LE SOLEIL, UNE ÉTOILE MAGNÉTIQUE.

1.1 La zone convective.

En observant la photosphère solaire à l'aide de télescopes solaires dont la résolution spatiale est supérieure à une seconde d'arc [Mullan, 2009, 6.4], on remarque la présence de structures granulaires (Fig. 1.1). Des observations plus détaillées ont révélé que la photosphère solaire n'est pas uniformément brillante, mais bien formée de "granules" dont le centre est brillant et dont les bords le sont un peu moins [Mullan, 2009, 6.2]. On utilise le terme "espace intergranulaire" pour désigner cette partie moins brillante des granules. Bien qu'elles ne possèdent pas, à première vue, de formes régulières, il semble que les bords des granules soient quasi rectilignes. Ceci suggère que les structures granulaires ont une forme polygonale. Une brillance non-uniforme, ainsi qu'un aspect polygonal des granules laisse penser qu'elles sont soumises à une instabilité convective de type Rayleigh-Bénard à frontière libre [Chandrasekhar, 1962]. Toutefois, chaque granule solaire ne semble persister qu'une dizaine de minutes à la surface du Soleil, tandis que les cellules convectives laminaires caractérisant l'expérience originale de Bénard et la théorie de Rayleigh ont tendance à persister dans un état stationnaire. Il semble que la nature des écoulements sous la surface solaire soit turbulente plutôt que laminaire, ce qui justifierait le temps de vie limité des granules [Mullan, 2009, 6.2].

L'excès de luminosité observé entre le centre des granules et l'espace intergranulaire implique une perte d'énergie par radiation au niveau de la photosphère. La différence relative de flux radiatif dans le visible est ainsi de l'ordre de 10% entre les granules et l'espace intergranulaire. Ceci conduit à des différences de température effective de l'ordre de 500 à 600 K [Mullan, 2009, 6.6] entre le centre et le bord des granules. On associe donc le centre des granules à un flux de masse chaud et ascendant, et les espaces intergranulaires à des flux de masse froids descendants. Les déplacements de matière se font à des vitesses au plus de 1 km.s^{-1} au niveau de la photosphère, tant verticalement qu'horizontalement [Title *et al.*, 1989]. Ces mouvements convectifs possèdent un temps de circulation caractéristique de l'ordre de 650 secondes [Mullan, 2009, 6.5].

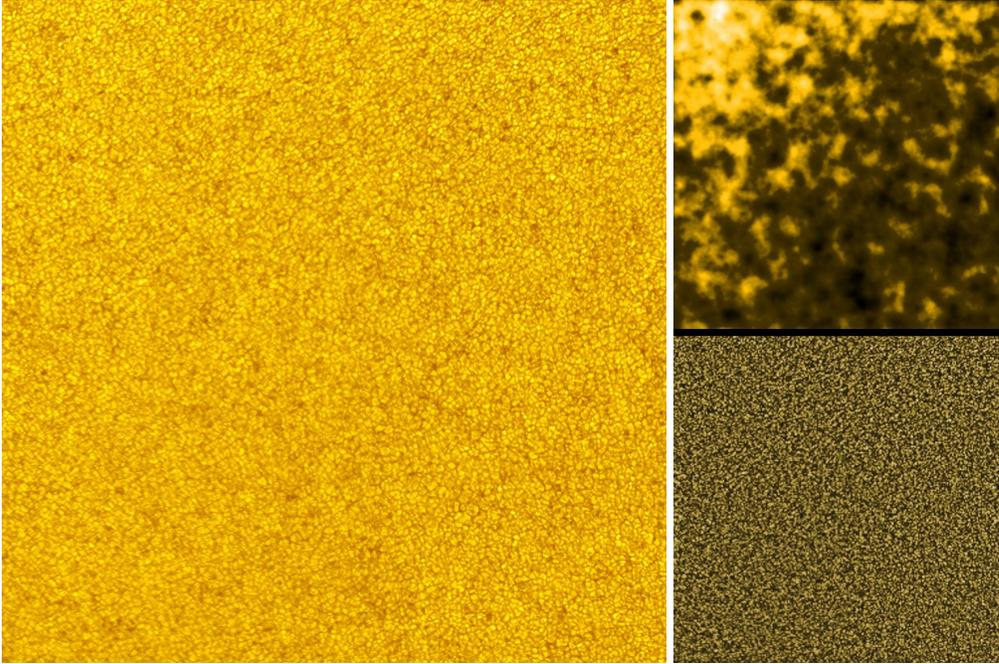


Figure 1.1 – Gauche : Photosphère du Soleil magnétiquement calme observée au pic du midi le 28 octobre 2006 par la lunette Jean Rösch par Sylvain Rondi et Thierry Roudier. L'image couvre un champ de 175 Mm par 175 Mm avec une résolution spatiale de 94km. <http://ljr.bagn.obs-mip.fr/calas/index.html>. Les variations de température dues à la granulation de la zone convective sont observables au delà du niveau pour lequel la profondeur optique $\tau_{0,5}$ est unitaire [Foukal, 2004, 7.3.5]. Les différences de flux radiatif entre les zones sombres et les zones claires sont de l'ordre de 10 %. Droite : Filtrage spatial de l'image pour de grands nombres d'ondes (haut), faisant apparaître l'échelle mésogranulaire, ainsi que pour de faibles nombres d'ondes (bas), représentant l'échelle granulaire.

1.1.1 Instabilité convective en milieu compressible et critère de Schwarzschild.¹

Afin de caractériser l'instabilité convective en jeu dans la zone convective, considérons une particule de fluide de masse volumique ρ , de température T à l'altitude r dans une atmosphère stellaire. En introduisant un petit déplacement dr de la particule vers l'extérieur de l'étoile (avec dr positif), on peut écrire le premier principe de la thermodynamique :

$$dU + dEc + dEp = \delta Q + \delta W , \quad (1.1)$$

Où dU est la variation de la fonction d'état énergie interne pour la particule, dEc la variation de son énergie cinétique, dEp la variation de son énergie potentielle gravitationnelle, δQ les transferts de chaleur reçus et δW la somme des travaux des forces reçus. Pour un déplacement infinitésimal, on considère dEc nul. On considère par ailleurs que l'équilibre de pression horizontal est maintenu en permanence pendant l'évolution de la particule car sa vitesse de déplacement est faible devant la vitesse de propagation des ondes sonores dans le milieu. Il y aura donc un travail a priori non nul de la part des forces de pression extérieures sur la particule de fluide. On considère de plus que

¹Les développements mathématiques du critère de stabilité convective de la présente section sont inspirés de ceux développés dans la section 6.8 de l'ouvrage "Physics of the Sun" [Mullan, 2009, 6.8].

le temps d'évolution de la particule est petit devant son temps de retour à l'équilibre thermique. On a ainsi $dU = 0$ car l'énergie interne n'a pas le temps de changer pendant le déplacement de la particule. Par ailleurs, on a $dEp = g dr$ car la particule s'élève, et $\delta Q = c_p dT$ l'échange de chaleur par radiation une fois qu'elle s'est déplacée. Il vient alors :

$$g dr = c_p dT + \delta W . \quad (1.2)$$

Le mouvement du fluide sera stable par rapport à la perturbation si le travail des forces de pression extérieures est positif, c'est-à-dire si la particule de fluide doit recevoir un travail de la part du milieu pour se déplacer vers l'extérieur de l'étoile, ce qui implique :

$$\delta W = g dr - c_p dT > 0 , \quad (1.3)$$

soit si :

$$g dr > c_p dT , \quad (1.4)$$

puis

$$\left(\frac{dT}{dr} \right) < \frac{g}{c_p} . \quad (1.5)$$

Par ailleurs, la particule évolue de manière réversible, il n'y a donc pas de création d'entropie. On peut alors récrire le premier principe de la manière suivante :

$$dU = TdS + \delta W , \quad (1.6)$$

avec dS la fluctuation d'entropie et $\delta Q = TdS$.

Si l'on considère le cas d'une évolution adiabatique de la particule, alors le déplacement est isentropique et $dS = \frac{\delta Q}{T} = 0$. Dans ce cas, le travail des forces extérieures est nul et on obtient :

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} = \frac{g}{c_p} , \quad (1.7)$$

avec $\left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad}$ le gradient thermique adiabatique, ce qui correspond au cas limite au delà duquel l'instabilité disparaît. Au final, Le critère d'instabilité apparaît donc sous la forme :

$$\frac{dT}{dr} < \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} . \quad (1.8)$$

Cette condition quand à la stabilité du milieu face à la convection à été introduite pour la première fois par Karl Schwarzschild en 1905 [Schwarzschild, 1906; Schwarzschild et Voigt, 1992]. En considérant que $\frac{dT}{dr}$ est une quantité négative, on se rend compte que la convection se déclenche pour un gradient thermique plus grand en valeur absolue que le gradient thermique adiabatique.

Il sera utile par la suite d'écrire l'expression du gradient thermique adiabatique sous une forme faisant apparaître l'indice adiabatique γ .

En considérant l'expression de la capacité calorifique massique :

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}, \quad (1.9)$$

on trouve :

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} = \frac{g}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g \mathcal{M}}{\mathcal{R}}. \quad (1.10)$$

Il apparait que le gradient thermique adiabatique dépend de la composition et de la gravité du milieu. Nous allons voir dans la section suivante quelles informations concernant la zone convective nous pouvons tirer de cette expression du gradient thermique adiabatique.

1.1.2 Validité des lois polytropiques.

Dans la zone convective, le coefficient de super-adiabaticité $\Delta\nabla = \left(\frac{dT}{dr} \right) - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad}$ est très faible ($\approx 10^{-5}$) et le gradient thermique est proche du gradient thermique adiabatique. Ainsi il peut être utile de lier la pression, la densité et la température entre elles afin d'obtenir les profils de variation de ces grandeurs dans la zone convective. En divisant l'équation (1.10) par la relation de l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dP}{dr} = \rho g, \quad (1.11)$$

on obtient :

$$\left(\frac{dT}{dP} \right) \approx \left(\frac{dT}{dP} \right)_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mathcal{M}}{\rho \mathcal{R}}. \quad (1.12)$$

Or, d'après la relation des gaz parfaits :

$$P = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mathcal{M}} \quad (1.13)$$

on a $\frac{\mathcal{M}}{\rho \mathcal{R}} = \frac{T}{P}$ d'où :

$$\left(\frac{d \ln(T)}{d \ln(P)} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma}. \quad (1.14)$$

Par ailleurs, en différenciant la relation des gaz parfaits (équ. 1.13) on obtient, en considérant \mathcal{M} constant :

$$dP = \frac{\mathcal{R} T}{\mathcal{M}} d\rho + \frac{\rho \mathcal{R}}{\mathcal{M}} dT, \quad (1.15)$$

qui devient :

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}T} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dP}, \quad (1.16)$$

puis :

$$\left(\frac{d \ln(\rho)}{d \ln(P)} \right) = 1 - \left(\frac{d \ln(\rho)}{d \ln(T)} \right) = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad (1.17)$$

soit :

$$\left(\frac{d \ln(\rho)}{d \ln(P)} \right) = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.18)$$

On obtient finalement des relations dites "polytropiques" liant la pression à la température : $P \propto T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ et à la densité : $P \propto \rho^\gamma$. On introduit l'indice polytropique $m = \frac{1}{\gamma-1}$. Pour un gaz monoatomique non ionisé ou complètement ionisé évoluant de manière adiabatique, ce qui est le cas dans la majeure partie de la zone convective solaire [Mullan, 2009, 7.7], γ prend pour valeur $\frac{5}{3}$ ce qui donne $m = \frac{3}{2}$. Il apparait alors qu'un indice polytropique supérieur à $m = 1.5$ pour un gaz monoatomique non ionisé implique un facteur γ inférieur à la valeur $\gamma = \frac{5}{3}$, et donc ultimement à un plus faible gradient thermique adiabatique. Pour un gradient thermique donné, une baisse du gradient thermique adiabatique rapproche le milieu du développement d'instabilités convectives. L'indice polytropique est donc un des indicateurs du caractère convectif du milieu. Ainsi, le milieu devient soumis à des instabilités convectives lorsque l'indice polytropique est inférieur à la valeur 1,5, pour gaz monoatomique ionisé.

Dans un cas plus général, pour un milieu partiellement ionisé par exemple, les relations polytropiques s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P &\propto T^{\Gamma/(\Gamma-1)}, \\ P &\propto \rho^\Gamma, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où Γ peut être différent de $\gamma = \frac{5}{3}$. Pour un gaz d'hydrogène ionisé à moitié on considère que $\Gamma \approx 1.13$ [Mullan, 2009, 6.7.3]. Pour un gaz constitué à 10% d'hélium neutre et à 90% d'hydrogène ionisé pour moitié, on obtient une valeur de $\Gamma = 1.19$ ($m \approx 5.2$) ce qui est bien en deçà de la valeur $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1.66$ pour un gaz monoatomique non ionisé [Mullan, 2009, 6.7.3]. Un résultat important est que l'on ne peut considérer une relation polytropique avec un indice polytropique constant dans des régions solaires où la composition chimique du milieu évolue avec la profondeur, ce qui est le cas de la zone convective [Mullan, 2009, 7.7]. Un modèle physique prenant en compte les effets de la radiation montre que ces relations polytropiques sont raisonnables dans près de 90% de la zone convective [Mullan, 2009, 7.7] bien qu'un traitement radiatif complet soit nécessaire [Stein et Nordlund, 1998]. Il convient de traiter avec attention la variation de l'indice polytropique dans les quelques mégamètres juste en dessous de la photosphère ainsi que dans le bas de la zone convective [Mullan, 2009, 7.7].

1.1.3 Théorie de la longueur de mélange.

Le développement d'une instabilité convective au sein d'un fluide provoque l'apparition de déplacements verticaux de grande amplitude. Pour un fluide très visqueux, la force de viscosité peut s'équilibrer avec la force de flottaison et conduire à un état stationnaire dans lequel les écoulements sont laminaires. C'est le cas dans les expériences historiques conduites par Henri Bénard vers 1900 et dont Lord Rayleigh développa la théorie. Un fluide incompressible, sujet à la dilatation thermique et contenu entre deux plaques soumises à un gradient thermique peut atteindre un équilibre pour lequel la solution de l'équation du transport de chaleur est stationnaire et s'exprime :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T . \quad (1.20)$$

Toutefois, dans l'intérieur solaire, la viscosité n'est pas assez élevée pour atteindre un tel régime et les écoulements deviennent turbulents. Nous avons vu que la structure granulaire au niveau de la photosphère est directement reliée à cette propriété des écoulements. La résolution d'un tel problème physique de manière analytique est difficile. Cependant, un concept simplifié de la convection, la "théorie de la longueur de mélange", est traditionnellement employée pour décrire le transport d'énergie par convection dans les intérieurs stellaires. Initiée par [Prandtl, 1925], puis appliquée au Soleil par [Biermann, 1938] et d'autres, elle permet de rendre compte de manière raisonnable de la plupart des observations.

On définit la longueur de mélange l comme étant la distance qu'une particule impliquée dans un processus convectif parcourt avant d'échanger son excès de chaleur interne avec le milieu ambiant. Considérons donc une particule cubique de côté l , de densité ρ , plongée dans une atmosphère stellaire à une température T effectuant un déplacement infinitésimal dr vers l'extérieur de l'étoile. Après s'être déplacée, la particule présente un excès de chaleur δQ par rapport au milieu ambiant que l'on peut relier au coefficient de superadiabaticité $\Delta \nabla$:

$$\delta Q = mc_p dT = (\rho l^3) c_p (\Delta \nabla dr) . \quad (1.21)$$

Le flux de chaleur à travers une unité de surface, et par unité de temps, vaut donc :

$$F_c = \frac{\delta Q}{l^2 dt} = \rho c_p v l \Delta \nabla , \quad (1.22)$$

où l'on définit $v = \frac{dr}{dt}$ comme la vitesse d'ascension de la particule de fluide. Dans une approche simplifiée, on peut évaluer cette vitesse lorsque la particule atteint un régime permanent. Dans ce cas, la force de flottaison F_π équilibre la force de trainée F_T . On a alors :

$$F_\pi + F_T = \Delta \rho g l^3 + \frac{\rho}{2} v^2 l^2 = 0 , \quad (1.23)$$

où $\Delta \rho$ représente la différence de densité entre la particule et le milieu ambiant. Il s'agit maintenant

de relier la variation de densité à une variable connue comme le coefficient de superadiabaticité. Pendant l'évolution de la particule, l'équilibre de pression avec le milieu est maintenu et l'on considère $dP = 0$. En différenciant l'équation des gaz parfaits (éq. 1.13) et en prenant \mathcal{M} constant, on trouve que $d\rho = -\rho \frac{dT}{T}$ ou $\Delta\rho = -\rho \frac{\Delta T}{T}$. L'équilibre des forces (éq. 1.23) s'écrit alors :

$$-\frac{\Delta T}{T} \rho g l^3 + \frac{\rho}{2} v^2 l^2 = 0 , \quad (1.24)$$

ce qui mène à l'expression suivante pour la vitesse d'ascension de la particule : $v = \sqrt{2 g l \frac{\Delta T}{T}}$. On estime la différence de température $\Delta T = \Delta \nabla l$, ce qui donne :

$$v^2 = 2 g l \frac{\Delta \nabla l}{T} . \quad (1.25)$$

Par ailleurs, on substitue l'expression de la vitesse d'ascension (éq. 1.25) dans l'expression du flux convectif d'énergie (éq. 1.22) :

$$v^3 = \frac{2 g l F_c}{\rho c_p T} . \quad (1.26)$$

On remarque que $v \propto l^{\frac{1}{3}}$. Une telle distribution de vitesse est compatible avec une loi de distribution de probabilité caractérisant un écoulement turbulent incompressible décrit par la théorie de la turbulence selon Kolmogorov [Kolmogorov, 1941]. En prenant les valeurs de la table 1.I, on obtient $t_{granule} = \frac{l}{v} \approx 10$ minutes , ce qui est compatible avec les observations.

En résumé, la théorie de la longueur de mélange est une méthode semi-empirique permettant d'évaluer l'efficacité du transport convectif de l'énergie. Elle permet de décrire correctement la convection dans une majorité de la zone convective. Dans le cadre d'un développement plus poussé de cette théorie, on relie la longueur de mélange à la hauteur d'échelle de pression H_P par la relation $l = \alpha H_P$ [Foukal, 2004, 7.3.3] α est un paramètre contrôlant l'efficacité de la convection qu'il convient de calibrer à l'aide d'observations. Un paramètre $\alpha = 1.5$ semble raisonnable [Mullan *et al.*, 2007]. Une telle relation indique que la taille des structures convectives varie avec la hauteur d'échelle de pression et donc avec la profondeur, ce qui est effectivement observé dans les simulations numériques de la zone convective [Nordlund *et al.*, 2009]. La longueur de mélange caractérisant la distance parcourue par une particule de fluide avant d'échanger de la chaleur avec le milieu environnant, il semble raisonnable de lier cette dernière à la hauteur d'échelle de pression qui est une distance caractérisant la stratification du milieu.

1.1.4 Transport convectif de l'énergie.

En réarrangeant les expressions des équations (1.25 et 1.26) issues de la théorie de la longueur de mélange, on obtient une expression du flux convectif d'énergie permettant une application numérique :

$$F_c = \rho c_p l^2 \sqrt{\frac{2 g}{T}} (\Delta \nabla)^{\frac{3}{2}} . \quad (1.27)$$

On peut estimer l'ordre de grandeur du flux convectif d'énergie au milieu de la zone convective en utilisant l'expression précédente. En prenant des valeurs approchées : $\rho \approx 100 \text{ kg m}^{-3}$, $l \approx 1 \text{ Mm}$, $g \approx 250 \text{ m s}^{-2}$, $T \approx 10^6 \text{ K}$ et $\Delta\nabla \approx 10^{-6}$, on trouve $F_c \approx 7 \times 10^7 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. A titre de comparaison, on peut estimer le flux total d'énergie sortant au niveau de la photosphère en faisant l'approximation que le flux est alors purement radiatif. On applique la relation de Stephan-Boltzmann :

$$F_{\odot \text{photosphère}} = \sigma T_{\text{effective}}^4 = 6.3 \times 10^7 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1}, \quad (1.28)$$

cette valeur devrait être plus élevée au milieu de la zone convective d'un facteur $\frac{1}{0.85^2} \approx 1.4$ par conservation du flux énergétique. On aura alors $F_{\odot \text{zone convective}} \approx 8.7 \times 10^7 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Cette valeur est très proche de celle calculée à partir de l'expression du flux convectif d'énergie déduite de la théorie de la longueur de mélange (éq. 1.27). Les modèles convectifs incluant la radiation confirment l'idée selon laquelle le transport de l'énergie se fait presque exclusivement par convection dans le milieu de la zone convective [Stix, 2002, 6.2.1]. Les mouvements convectifs sont donc suffisamment efficaces pour transporter l'énergie provenant du cœur solaire sur des distances de l'ordre de quelques centaines de mégamètres jusqu'en surface.

1.1.5 La zone convective en quelques chiffres.

Les mesures photosphériques, les mesures par héliosismologie, mais également les modèles physiques de la convection solaire, ainsi que les simulations numériques permettent l'estimation de nombreux paramètres physiques caractérisant les différentes variables physiques du fluide solaire (Table. 1.I et 1.II). La quantification, ou du moins, l'estimation de chacune de ces variables est important afin de jauger la contribution relative de chacun des phénomènes physiques en jeu. Afin de caractériser l'état des écoulements fluides, on définit plusieurs nombres adimensionnels représentant les rapports des contributions des différentes forces. Le nombre de Reynolds par exemple, introduit en 1883 par Osborne Reynolds, représente le rapport des forces d'advection agissant sur le fluide sur les forces de diffusion visqueuse. Une analyse dimensionnelle du rapport de force nous donne :

$$Re = \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})}{\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{v}}}} = \frac{v \frac{1}{l} v}{v \frac{1}{l^2} v} = \frac{vl}{v} \quad (1.29)$$

D'autres nombres adimensionnels sont utiles pour décrire les écoulements fluides dans la zone convective :

- Le nombre de Reynolds magnétique représente le rapport des forces d'advection sur les forces de diffusion magnétique. $Rm = \frac{vl}{\eta}$
- Le nombre de Péclet thermique représente le rapport des forces d'advection sur les forces de diffusion thermique. $Pe = \frac{vl}{\kappa}$
- Le nombre de Prandtl thermique représente le rapport des forces de diffusion visqueuses sur les forces de diffusion thermique. $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

- Le nombre de Prandtl magnétique représente le rapport des forces de diffusion visqueuses sur les forces de diffusion magnétique. $Pm = \frac{\nu}{\eta}$
 - Le nombre de Rossby représente le rapport des forces d'advection sur la force de Coriolis. $Ro = \frac{v}{2\Omega l \sin(\phi)}$
 - Le nombre de Rayleigh représente le rapport de la force de flottaison sur les forces de diffusion thermique. $Ra = \frac{gH_p^4}{c_p \kappa \nu} \left(\frac{\Delta s}{l} \right)$
- Ces nombres peuvent être estimés à partir de modèles physiques et d'observations puis utilisés dans des simulations numériques afin de reproduire le régime des écoulements fluides de manière adéquate.

μ viscosité dynamique [Stix, 2002]	$1.3 \times 10^{10} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
ν viscosité cinématique [Rieutord et Rincon, 2010]	$10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
η diffusivité magnétique [Rieutord et Rincon, 2010]	$10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
$Re = \frac{v l}{\nu}$ nombre de Reynolds [Rieutord et Rincon, 2010]	$\approx 10^{10}$ à 10^{13}
$Rm = \frac{v l}{\eta}$ nombre de Reynolds magnétique [Stix, 2002]	10^9 à 10^{10}
$Pe = \frac{v l}{\kappa}$ nombre de Péclet thermique [Rieutord et Rincon, 2010]	1
$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ nombre de Prandtl thermique [Rieutord et Rincon, 2010]	10^{-4} à 10^{-6}
$Pm = \frac{\nu}{\eta}$ nombre de Prandtl magnétique [Rieutord et Rincon, 2010]	10^{-5}
$Ro = \frac{v}{2 \Omega l \sin \phi}$ nombre de Rossby pour la granulation	200
α diffusivité thermique [Stix, 2002]	$1.3 \times 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
c_p capacité calorifique massique [Stix, 2002]	$3 \times 10^4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
κ opacité optique [Stix, 2002]	$10 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$
\mathbf{B}_{eq} intensité du champ magnétique à l'équipartition [Spruit et Zweibel, 1979]	0.135 T
\mathbf{F}_B flux de champ magnétique dans une région active [Fan, 2009]	10^{12} à 10^{14} wb
$\Delta \nabla$ coefficient de superadiabacité [Fan, 2009]	$\approx 10^{-5}$
δ gradient adiabatique [Stix, 2002]	0.4
β paramètre β du plasma [Fan, 2009]	10^5
$Ra_c = \frac{gH_p^4}{c_p \kappa \nu} \left(\frac{\Delta s}{l} \right)$ nombre Rayleigh critique [Fan <i>et al.</i> , 2003]	657.5

Tableau 1.I – Principaux paramètres physiques dans la zone convective.

M_{\odot} Masse solaire [Mullan, 2009]	1.9884×10^{30} kg
L_{\odot} Flux énergétique [Mullan, 2009]	3.8416×10^{26} W
R_{\odot} Rayon solaire [Mullan, 2009]	6.9568×10^8 m
g gravité de surface [Mullan, 2009]	$274,216 \text{ m.s}^{-2}$
T Température effective de surface [Mullan, 2009]	5777 K
Ω Vitesse de rotation angulaire à l'équateur [Stix, 2002, 7.4.1]	$2.8 \times 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$

Tableau 1.II – Paramètres généraux du Soleil.

1.2 Les régions actives.

1.2.1 Taches solaires, facules et protubérances.

Le réseau granulaire photosphérique est parfois perturbé par l'apparition de régions sombres parfois suffisamment larges pour être observées à l'œil nu. Ces "taches solaires" sont observées depuis des millénaires. On retrouve en effet des traces de leur observation en Chine il y a de cela deux mille ans². Ces taches, de tailles et de formes variées, apparaissent de manière imprévisible sous la forme de paires ou bien de groupes de taches. Leur centre est plus sombre, on lui donne le nom "d'ombre" tandis que leur périphérie est d'une luminosité intermédiaire à laquelle on donne le nom de "pénombre". Selon leur taille, les taches apparaissent et disparaissent en quelques heures ou bien en quelques semaines en se fragmentant, voir en s'érodant avec le temps à cause de la turbulence convective à leur périphérie. Les taches sont des régions associées à un déficit de transport convectif de l'énergie par les couches inférieures. La chaleur reste sous la surface à cause du blocage partiel du transport convectif, ce qui conduit à une baisse localisée du flux énergétique de surface. Les taches ne sont pas les seules à contribuer à la perturbation du flux énergétique. Des mesures photométriques à haute résolution au voisinage des taches révèlent la présence d'un grand nombre de petites structures brillantes appelées "facules" [Foukal, 2004, 8.3]. Ces "points brillants" compensent la perte de flux lumineux associée à la tache. Ils surcompensent même parfois la perte de ce flux lumineux [Foukal, 2004, 8.3.2]. Par ailleurs, des observations chromosphériques mentionnées dans la section suivante indiquent que les taches solaires observées au niveau de la photosphère sont en fait entourées par des structures particulières de la chromosphère -les "plages"- dans lesquelles l'activité chromosphérique est renforcée. Les facules correspondent également à la position des plages. L'ensemble tache solaire, plage et facule semble donc former un tout que l'on désigne par le terme général de "région active". Même si elles peuvent apparaître sur l'ensemble du disque solaire, les régions actives tendent à émerger à des latitudes inférieures à 35 degrés. Ces régions actives peuvent retenir de la matière chromosphérique, sous la forme de "rubans" sombres en forme de

²http://www.astro.umontreal.ca/~paulchar/grps/histoire/newsite/sp/great_moments_f.html#gm_800bc

filaments, à l'état de repos pendant des heures ou des jours. Ces "protubérances" peuvent ensuite être libérées dans l'atmosphère solaire à la suite d'une rapide éruption causée par un chauffage ou bien une expulsion. Ce qui lie entre elles ces structures aux propriétés physiques différentes est la présence d'un champ magnétique de grande intensité. Nous allons voir dans la section suivante comment mesurer l'amplitude de ce champ magnétique, et en quoi il relie les diverses quantités physiques formant les régions actives.

1.2.2 Mesure du champ magnétique solaire.

1.2.2.1 Effet Zeeman.

Les champs magnétiques sont par nature invisibles. Ils peuvent toutefois être mesurés par les modifications physiques qu'ils opèrent sur la matière solaire : un champ magnétique peut perturber les niveaux énergétiques d'un atome et les transitions électroniques qui y sont associées. Ainsi un état d'énergie atomique singulet peut se voir subdivisé en un multiplet d'états d'énergies sous l'influence d'un champ magnétique externe. Pressenti par Michael Faraday, qui ne put le démontrer expérimentalement [Zeeman, 1897], cet effet physique fut découvert par Pieter Zeeman et Hendrik Lorentz en 1896³. L'effet Zeeman consiste en la levée de dégénérescence des niveaux atomiques en un nombre impair de composantes (effet Zeeman "normal" sous l'effet d'un champ magnétique) ou en un nombre pair de composantes (effet Zeeman "anormal"). Le décalage en longueur d'onde $\Delta\lambda_0$ des transitions électroniques introduit par la levée de dégénérescence peut être lié à l'intensité du champ magnétique de la manière suivante :

$$\Delta\lambda_0 = \frac{m_l \lambda_0^2 \mu_B}{hc} B, \quad (1.30)$$

où m_l est le nombre quantique magnétique de l'atome, λ_0 la longueur d'onde de la transition électronique et $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr (\hbar la constante de Planck réduite, m_e la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière dans le vide). L'effet Zeeman au niveau de la surface solaire provoque un faible décalage en longueur d'onde (Table 1.III) toutefois détectable par les instruments modernes (Table 2.3.1).

type de région	intensité du champ magnétique	écart en longueur d'onde mesuré
Soleil calme	$2 \cdot 10^{-3}$ T	$4 \cdot 10^{-5}$ nm
région active solaire	0.5 T	0.01 nm

Tableau 1.III – Intensités moyennes du champ magnétique solaire et effet Zeeman mesuré pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 500\text{nm}$ dans le domaine optique.

Un spectrographe à très haute résolution comme l'instrument MDI à bord du télescope spatial SOHO permet d'effectuer une telle mesure.

³http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1902/zeeman-lecture.html

1.2.2.2 L'instrument MDI à bord de SOHO.

L'instrument MDI nous fournit des mesures de la vitesse, du champ magnétique ainsi que de la température au niveau photosphérique pour l'ensemble du disque avec une assez bonne résolution spatiale, un bruit faible : $\delta\mathbf{B} \approx 2\text{mT}$ et $\delta\mathbf{V} \approx 20\text{m.s}^{-1}$ [Scherrer *et al.*, 1995], ainsi qu'une cadence temporelle régulière mais assez longue de 96 minutes.

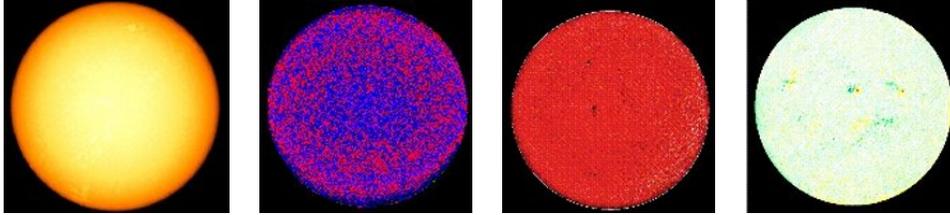


Figure 1.2 – De gauche à droite : Continuum photosphérique, dopplergramme, profondeur spectrale du nickel atomique, magnétogramme pour le disque solaire entier mesuré par l'instrument MDI à bord de SOHO. Depuis "http://soi.stanford.edu/science/obs_prog.html" "Courtesy of SOHO/MDI consortium. SOHO is a project of international cooperation between ESA and NASA".

La mesure des grandeurs physiques se fait à bord de l'instrument à partir de la combinaison de cinq intensités spectrales au voisinage immédiat d'une raie d'absorption atomique de l'élément nickel neutre centrée à une longueur d'onde $\lambda_{Ni} = 6767.8\text{\AA}$. L'instrument est capable d'effectuer des mesures sur quatre modes de polarisation différents correspondants aux oscillations s et p ainsi qu'aux états de polarisation circulaires droite et gauche [Scherrer *et al.*, 1995]. L'interférométrie Michelson, et le filtrage Lyot, permettent la mesure d'intensité avec une bande passante couvrant une longueur d'onde $\delta\lambda_0 = 94\text{ m\AA}$. L'instrument pouvant évoluer dans une gamme spectrale $\Delta\lambda_0 = 377\text{ m\AA}$, cinq mesures indépendantes sont possibles pour des longueurs égales ou proches à celle de l'élément nickel. Les intensités respectives du centre de la raie, de ses bords et de ses ailes permet l'estimation de l'intensité du continuum, de la profondeur de la raie, ainsi que du décalage Doppler⁴. La mesure de l'amplitude du champ magnétique le long de la ligne de visée se fait alors par la mesure de la levée de dégénérescence spectrale introduite par l'effet Zeeman normal. Cet effet est estimé par la comparaison du décalage Doppler sur les composantes circulaires droites et gauches de la lumière reçue par l'instrument.

1.3 La photosphère, sommet de la zone convective.

Au sommet de la zone convective, la pression et la température du milieu diminuent. Elles atteignent des valeurs critiques correspondant aux bandes d'ionisation de l'hydrogène neutre [Mullan, 2009, 4.3]. Les électrons libres commencent alors à se recombiner avec les atomes d'hydrogène ionisés. L'opacité radiative du milieu augmente considérablement, notamment à cause de la présence de l'ion hydrure H^- . Bien que d'abondance très faible par rapport à l'hydrogène neutre ($\frac{N_{\text{H}^-}}{N_{\text{H}}} \approx 10^{-8}$) l'opacité libre-lié de l'ion hydrure est la contribution dominante à l'absorption pho-

⁴http://soi.stanford.edu/science/obs_prog.html

tosphérique [Mullan, 2009, 3.4]. L'existence de l'ion hydrure est rendue possible à de tels niveaux car des éléments chimiques plus massifs tels que le sodium, le magnésium ou le fer sont partiellement ionisés et fournissent des électrons libres. L'hydrogène neutre peut alors se lier à un électron libre, ce qui provoque l'accroissement de l'opacité radiative du milieu. Par ailleurs, la capacité thermique du milieu diminue. En effet dans la zone convective, l'énergie interne d'un atome d'hydrogène est due à l'agitation thermique ainsi qu'à son énergie d'ionisation [Mullan, 2009, 6.7.3], ce qui n'est plus le cas lorsque le taux d'ionisation du milieu diminue. En conséquence, la contribution radiative au flux énergétique radial augmente au sommet de la zone convective, tandis que la contribution convective diminue. Pour une profondeur optique plus petite que $\tau_{500nm} = 0.9$, le gradient thermique devient plus faible que le gradient adiabatique et la convection cesse [Mullan, 2009, 5.6]. À une telle profondeur, le transport de l'énergie par convection ne représente que 15% du flux énergétique sortant [Mullan, 2009, 6.7.1]. L'intensité lumineuse mesurée au niveau de la Terre est atténuée d'un facteur d'échelle $e^1 \approx 2.7$ par rapport à l'intensité lumineuse émise à une profondeur optique unitaire. La majeure partie de l'énergie lumineuse reçue au niveau terrestre provient donc d'une mince couche correspondant à des profondeurs optiques inférieures à 1. Cette couche, la photosphère, possède une épaisseur inférieure au mégamètre [Mullan, 2009, 5.6]. La contribution convective au flux énergétique radial au sommet de la photosphère n'est que de quelques pourcents [Mullan, 2009, 6.7.2]. Ainsi, la granulation observée à la surface du Soleil caractérise les mouvements convectifs du sommet de la zone convective observée au travers de la photosphère.

Notre modèle de convection anélastique ne prend pas en compte les processus radiatifs. La faible résolution numérique verticale ne permet pas de rendre compte de manière fidèle des variations du profil de température dans la photosphère. L'assimilation de données solaires, obtenues à des niveaux photosphériques, au sommet du domaine de simulation semble la meilleure approche pour prendre en compte de manière artificielle les phénomènes physiques radiatifs. "Mimer" la photosphère à l'aide de l'algorithme d'assimilation de données du "coup de coude direct et rétrograde" semble pertinent et présente une originalité.

CHAPITRE 2

MAGNÉTOCONVECTION SOLAIRE.

2.1 État de la connaissance.¹

2.1.1 Les structures magnéto-convectives.

La force de Lorentz \mathbf{F}_1 (éq. 2.1) introduit, pour un fluide magnétisé, un couplage entre la vitesse du fluide et le champ magnétique ambiant. Ainsi, si \mathbf{v} est la vitesse d'une particule de fluide, et \mathbf{B} le champ magnétique local alors :

$$\mathbf{F}_1 = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (2.1)$$

Le théorème d'Alfvén est un résultat important, mettant en lumière le couplage entre champs magnétiques et écoulements. Afin d'en détailler l'origine physique, considérons tout d'abord l'équation de Maxwell-Faraday, où \mathbf{E} est le champ électrique local :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (2.2)$$

Projetons cette relation sur une surface π quelconque se déplaçant avec le fluide et reposant sur un contour Γ_c déformable. La dérivée partielle de l'équation (2.2) se transforme en dérivée Lagrangienne : $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$, et l'on obtient la relation suivante :

$$\iint_{\pi} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = -\iint_{\pi} \left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt}\right) \cdot d\mathbf{s} , \quad (2.3)$$

en permutant les dérivées et en utilisant le théorème de Stokes il vient :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{c} = -\frac{D}{Dt} \iint_{\pi} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} . \quad (2.4)$$

On note $\phi_{\mathbf{B}}$ le flux magnétique à travers la surface π . En exprimant la loi d'Ohm généralisée $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, et en rappelant que la surface π est co-mouvante au fluide ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) on obtient :

$$\frac{1}{\sigma} \oint_{\Gamma_c} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{c} = -\frac{D\phi_{\mathbf{B}}}{Dt} . \quad (2.5)$$

Ainsi, dans le cas idéal où la conductivité est infinie, on a $\frac{D\phi_{\mathbf{B}}}{Dt} = 0$. C'est le théorème d'Alfvén : le flux magnétique au travers d'une surface se déplaçant avec le fluide se conserve. Dans le cas d'une particule traversée par une seule ligne de champ magnétique, cette ligne de champ magnétique se déplacera et se déformera en même temps que la particule. On dit que le champ magnétique est

¹Cette section est inspirée en partie de l'article de revue de Robert, F. Stein [Stein, 2011] disponible à l'adresse suivante : http://steinr.pa.msu.edu/~bob/papers/magconvrev_ptrns.pdf.

”gelé” dans le fluide magnétisé. C’est le cas dans la zone convective solaire où le nombre de Reynolds magnétique est très grand (Table.1.I).

Une ligne de champ magnétique soumise à un cisaillement aura ainsi tendance à se déformer dans le sens du cisaillement. Ceci conduit ultimement à l’alignement des champs magnétiques faibles sur les écoulements. C’est généralement le cas dans l’intérieur solaire où l’advection est largement plus grande que la force de Lorentz. Toutefois, dans certains cas où l’énergie magnétique excède l’énergie cinétique du fluide, les forces de tension et de pression magnétiques provenant de la force de Lorentz peuvent s’opposer aux cisaillements et stopper les écoulements. Ceci se produit au sein des régions actives lorsque le champ magnétique dépasse l’équipartition : $B > B_{eq}$ avec $\frac{B_{eq}^2}{2\mu_0} = \frac{\rho v^2}{2}$. Dans la zone convective, on estime le champ magnétique d’équipartition à $B_{eq} = 0.135T$ [Spruit et Zweibel, 1979]. En conclusion, le mouvement du fluide peut modifier le champ magnétique local. Par ailleurs, la structure convective du plasma solaire peut également être modifiée par la présence d’un champ magnétique.

Les déplacements convectifs $|v| \approx 1 - 2 \text{ km.s}^{-1}$ se font à des vitesses largement inférieures à la vitesse des ondes magnétosonores du milieu $|c_S| \approx 9 \text{ km.s}^{-1}$ [Mullan, 2009, 7.1]. L’équilibre horizontal de pression est ainsi toujours maintenu. Ceci implique qu’une région du fluide pour laquelle le champ magnétique, et donc la pression magnétique, est importante sera sous pression réduite. La densité du fluide fortement magnétisé sera donc plus faible que celle du milieu environnant. Une force de flottaison permet alors au fluide de s’élever. Les tubes de champ magnétique sont donc advectés par les flux ascendants et montent lentement vers la surface. Ces tubes de champ sont toutefois rapidement balayés de l’intérieur des granules jusque dans l’espace intergranulaire sur un temps caractéristique de la granulation, de l’ordre de la minute, par les mouvements convectifs [Stein et Nordlund, 2006; Vögler *et al.*, 2005]. Une fois que les tubes de champ atteignent l’espace intergranulaire, ils sont cisillés par les flux descendants [Stein *et al.*, 2011]. Ces flux sont de nature turbulente et entraînent les tubes de champ magnétique vers le bas. L’ensemble du processus tend à donner une forme de boucle en Ω ou en U aux tubes de flux magnétique [Cheung *et al.*, 2007] aux grandes échelles, sur lesquelles peuvent se superposer de petites boucles en forme de serpent aux petites échelles [Cheung *et al.*, 2007; Stein *et al.*, 2011]. Le champ magnétique est alors tordu dans toutes les directions par le mouvement du fluide. De tels étirements, entortillages et éventuellement reconnections peuvent produire une dynamo locale [Cattaneo, 1999; Schüssler et Vögler, 2008] renforçant le champ magnétique.

La magnéto convection est également responsable de la formation des taches solaires et des facules via l’action de la force de Lorentz :

- Un tube de champ magnétique émergeant de manière quasi verticale au niveau de la photosphère et dont la largeur est plus grande que la dimension caractéristique de la granulation peut mener à la formation d’une tache solaire. Les mouvements de retournement donnant lieu au transport d’énergie sont inhibés là où le champ magnétique est de forte intensité [Parker, 1978]. Ainsi les pertes radiatives conduisent à un équilibre thermique local donnant lieu à des températures plus

faibles : 3800-4100 Kelvin au lieu de 5800 Kelvin dans "l'ombre" et un peu plus dans la "pénombre" [Foukal, 2004, 8.1.3]. Ce refroidissement induit une diminution locale de la hauteur d'échelle de pression, et ainsi une concentration du champ magnétique appelé "*effondrement convectif*" [Bushby *et al.*, 2008; Grossmann-Doerth *et al.*, 1998]. L'effondrement continue jusqu'à ce que la pression magnétique balance la pression extérieure, ce qui conduit à la formation d'une région où l'intensité du champ magnétique dépasse l'équipartition.

- Un tube émergeant au niveau de la photosphère et dont la largeur est plus petite que la dimension caractéristique de la granulation peut mener à la formation d'un pore. Comme dans le cas de la formation d'une tache solaire, l'effondrement convectif conduit à une intensification du champ magnétique (Fig. 2.1). Le pore ainsi créé se voit ballotté par la convection. Il prend place dans l'espace intergranulaire où il subit un chauffage radiatif très important de la part des flux de masse ascendants voisins. Le chauffage "par les murs" [Stein, 2011] est plus important qu'au sein d'une tache solaire car le rayon du pore magnétique est plus petit, ce qui exclue l'existence d'un gradient thermique stationnaire entre le centre et les bords du tube de champ magnétique. Afin de rétablir l'équilibre horizontal de pression, la densité et la température doivent baisser au sein du tube. Or l'équilibre radiatif horizontal ne permet pas une baisse de la température. Le pore se vide donc de sa matière. La densité diminuant, la profondeur optique diminue fortement, ce qui permet à un observateur de voir plus profondément dans l'étoile [Foukal, 2004, 8.3.3]. C'est pourquoi on donne le nom de "point brillant", ou facule, à ce type de régions de concentration magnétique. En effet, pour une profondeur optique correspondant au niveau photosphérique, la température effective d'une facule avoisine 6400 K [Foukal, 2004, Fig.8-11].

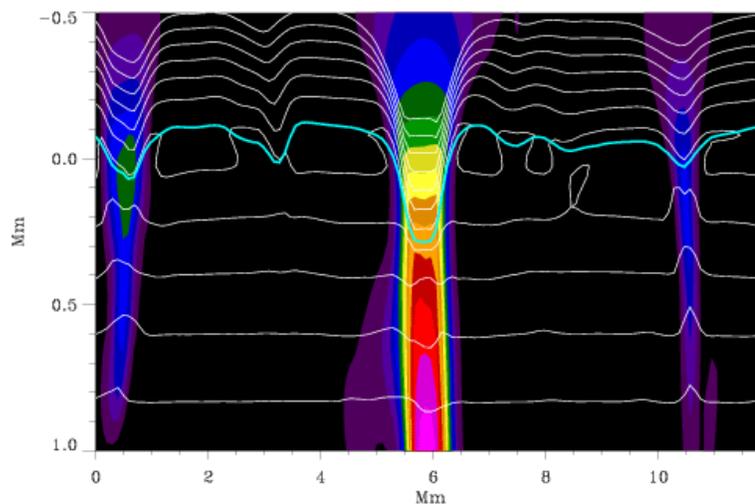


Figure 2.1 – Isocontours pour la température (de 4000K à 16000K) et intensité du champ magnétique en couleur, du bleu au violet (de 25mT à 0.35T). Les régions de concentration de flux magnétique, ou pores magnétiques, sont nettement plus froides que leur voisinage. Figure provenant originellement de la thèse de doctorat de David Bercik [Bercik, 2002] tirée de l'article [Nordlund *et al.*, 2009] sous licence *creative commons*.

2.1.2 Deux approches physiques différentes pour la modélisation.

De par sa nature hautement non-linéaire, la modélisation de la magnéto-convection se fait au travers de simulations numériques. La résolution des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'induction magnétique ainsi que l'utilisation de la loi d'Ohm généralisée et d'une équation d'état pour le gaz sont nécessaires à la simulation de la magnéto-convection. Deux types d'approches numériques ont été étudiées. Jusqu'alors, elles fournissent toutes deux des résultats valables mais portant sur des domaines de la magnéto-convection différents.

L'approche "réaliste" utilise une équation d'état tabulée pour le gaz incluant, entre autres, l'ionisation partielle d'éléments tels que l'hydrogène et l'hélium. Cette approche a été initiée par Nordlund [Nordlund, 1982] puis généralisée [Abbett, 2007; Carlsson *et al.*, 2010; Jacoutot *et al.*, 2008]. Dans l'approche réaliste, la résolution de l'équation du transfert radiatif est nécessaire car l'approximation du milieu optiquement mince n'est pas valide quand la profondeur optique approche la valeur unité au niveau photosphérique. Une physique du transfert radiatif est donc nécessaire à la comparaison quantitative des simulations avec les observations. Bien qu'aucune des simulations actuelles n'approche les paramètres solaires, elles parviennent à reproduire la plupart des caractéristiques observées [Stein, 2011].

L'approche "idéalisée" ne prend pas en compte la radiation comme mode de transfert de l'énergie. Elle suppose une équation d'état idéale pour le gaz. Elle a été initiée par Weiss [Weiss, 1966], puis approfondie par d'autres. Elle a permis d'obtenir un aperçu des phénomènes physiques caractérisant la convection, tels que l'émergence d'un tube de flux magnétique entortillé [Cattaneo, 1999], la production de champ magnétique aux petites échelles par une dynamo rapide de surface [Abbett *et al.*, 2000], l'existence d'un champ magnétique intermittent pour des échelles spatiales non-résolues optiquement [Emonet et Cattaneo, 2001] ou bien encore le fait que la convection est bloquée dans les tubes de flux magnétique générant des pores [Hurlburt et Rucklidge, 2000]. Elle a été transposée avec succès dans le cas de la modélisation de l'intérieur solaire [Fan, 2009; Miesch, 2005].

Les simulations numériques conduites dans le cadre de ce projet de maîtrise ont été traitées par une approche idéalisée. La figure 2.2 représente plusieurs coupes horizontales, au sommet et dans le bas de la zone convective simulée, illustrant les fluctuations d'entropie au sein du milieu. On y décèle la présence de structures de type granulaires à mettre en lien avec une observation du sommet de la zone convective (Fig.1.1). Toutefois, les limitations du modèle ne permettent pas de reproduire la structure des granules solaires dont la largeur caractéristique est de l'ordre du mégamètre (Fig.1.1 en bas, à droite). Le modèle reproduit cependant de manière réaliste les structures correspondant à l'échelle mésogranulaire avec les paramètres que nous avons utilisés (Fig.1.1 en haut, à droite). Ce type de structures regroupent plusieurs granules et possèdent une largeur caractéristique de l'ordre de quelques mégamètres.

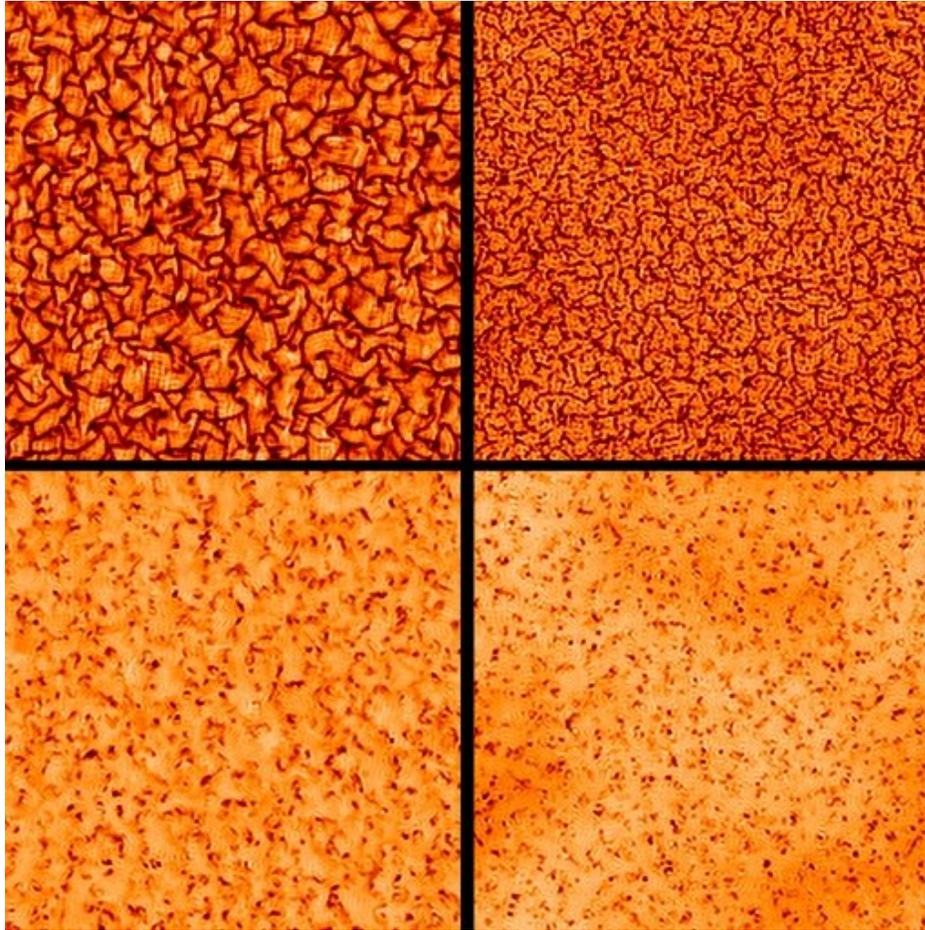


Figure 2.2 – Perturbations de l’entropie spécifique pour des couches horizontales dans le haut de la zone convective (haut), et 55 Mm en dessous (bas) pour une simulations HD (gauche) et MHD (droite). Paramètres utilisés : $Re=750$, $Pr=1$, $Ro=200$, $Rm=250$ et $B_0 = 10^{-2} \times B_{eq}$ pour la simulation MHD. La taille des granules convectives augmente avec la profondeur. La présence de champ magnétique modifie la taille et la forme des structures convectives. La résolution numérique est insuffisante pour reproduire entièrement la granulation observée (Fig. 1.1). Les simulations ont été réalisées à l’aide du logiciel ANMHD [Abbett *et al.*, 2001; Fan *et al.*, 1999]. Cette figure est à comparer avec une image du sommet de la zone convective observée à travers la photosphère de même largeur spatiale (Fig.1.1).

Les résultats des simulations que nous avons conduites avec le logiciel ANMHD permettent de reproduire certaines caractéristiques de la magnétoconvection précédemment observées à l’aide d’autres simulations numériques [Vögler *et al.*, 2005]. Une coupe verticale de l’une de nos simulations (Fig.2.3) illustre la concentration des tubes de champ magnétique au sein des flux de masses descendants. Par ailleurs, les vitesses sont plus grandes vers le sommet de la zone convective que vers le bas. Enfin, l’alternance entre les flux de masse ascendants et descendants reproduit de manière réaliste les structures liées à la mésogranulation.

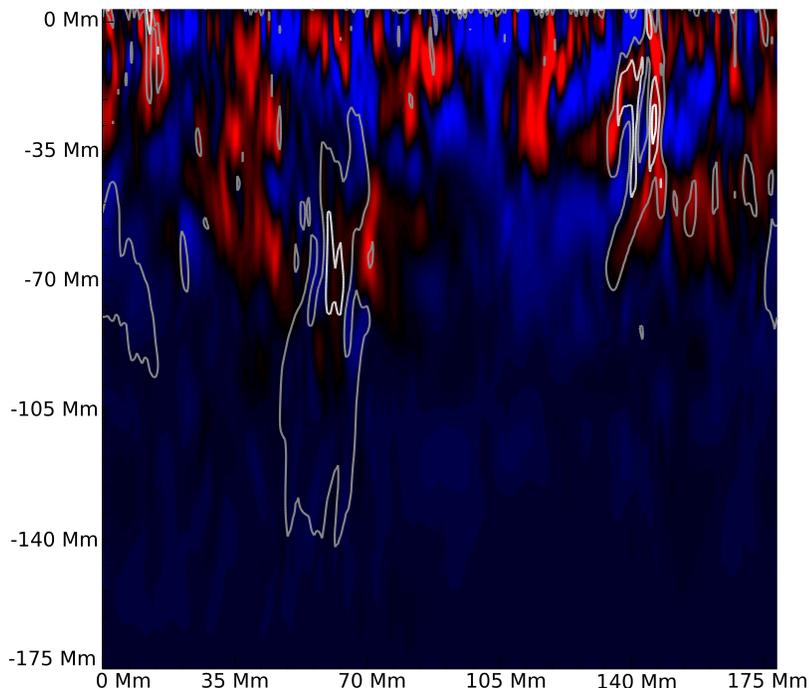


Figure 2.3 – Vitesse verticale du fluide. Les courants ascendants sont en bleu tandis que les courants descendants sont en rouge. Isocontours de l’intensité du champ magnétique, croissants du foncé au clair. Simulations MHD avec un faible champ magnétique initial $B_0 = 10^{-2} \times B_{eq}$ avec pour paramètres : $Re=750$, $Pr=1$, $Ro=200$ et $Rm=250$. Les régions de forte intensité magnétique coïncident avec des flux de masse descendants. Les vitesses sont plus grandes à proximité des 70 premiers mégamètres sous la surface. Les simulations ont été réalisées à l’aide du logiciel ANMHD [Abbett *et al.*, 2001; Fan *et al.*, 1999].

2.2 Les simulations numériques.

Plusieurs types de simulations magnéto-convectives ont déjà vu le jour. La première consiste à placer un tube de champ magnétique, éventuellement entortillé, dans le bas du domaine simulé et à en étudier l’émergence [Fan, 2009]. Une variante consiste à ”remplir” le domaine d’un champ magnétique vertical et uniforme et d’étudier la formation des tubes de champ magnétique [Emonet et Cattaneo, 2001]. Dans une toute autre approche, une faible quantité de flux magnétique peut être insérée dans une condition initiale convective afin d’étudier l’effet d’une dynamo locale [Cattaneo, 1999].

2.2.1 Émergence des tubes de champ magnétique.

Qu’elle soit étudiée à partir d’un tube de flux magnétique horizontal entortillé [Cheung *et al.*, 2010, 2007] ou bien à partir d’un champ magnétique uniforme non entortillé [Stein *et al.*, 2011, 2010], l’émergence des tubes de champ magnétique présente les mêmes caractéristiques principales. Ainsi le champ magnétique apparaît-il en surface sous la forme de dipôles aux petites échelles puis l’effet s’accroît (Fig. 2.4) tirée de [Stein *et al.*, 2011]. Les granules grandissent et s’obscurcissent à mesure que le champ émerge. Elles s’allongent dans le sens horizontal. Pendant l’émergence, les composantes verticales et horizontales du champ magnétique sont d’une intensité similaire, bien

que les champs magnétiques horizontaux soient plus présents [Stein, 2011]. Les points d’ancrage du dipôle se séparent progressivement et se rassemblent en régions unipolaires de plus grande surface [Stein *et al.*, 2011]. À l’occasion, le flux magnétique s’annule lorsque des régions de polarités opposées se rencontrent [Cheung *et al.*, 2008]. Pendant l’émergence, le champ magnétique s’étend. L’extension verticale se fait alors moins vite que l’extension horizontale [Stein, 2011]. Le moteur de l’émergence sont les flux convectifs ascendants ainsi que la force de flottaison. Les flux de masse descendants sont rapides et turbulents [Cattaneo, 1999]. Ils entraînent le champ magnétique vers le bas, ce qui conduit à la création d’une hiérarchie de boucles magnétiques en forme de U ou de Ω [Cheung *et al.*, 2008]. Ces boucles magnétiques se superposent avec une multitude de petites boucles en forme de serpentins [Cheung *et al.*, 2007; Kitiashvili *et al.*, 2011]. Afin de rendre possible l’émergence, les boucles de champ magnétique doivent être torsadées, ce qui empêche leur dislocation par les mouvements convectifs [Fan *et al.*, 1999]. Cependant, l’intensité du champ magnétique peut être un autre facteur déterminant [Abbett *et al.*, 2001]. L’émergence du champ magnétique dans la chromosphère, la zone de transition et la couronne à également été modélisé [Abbett, 2007; Hansteen *et al.*, 2007]

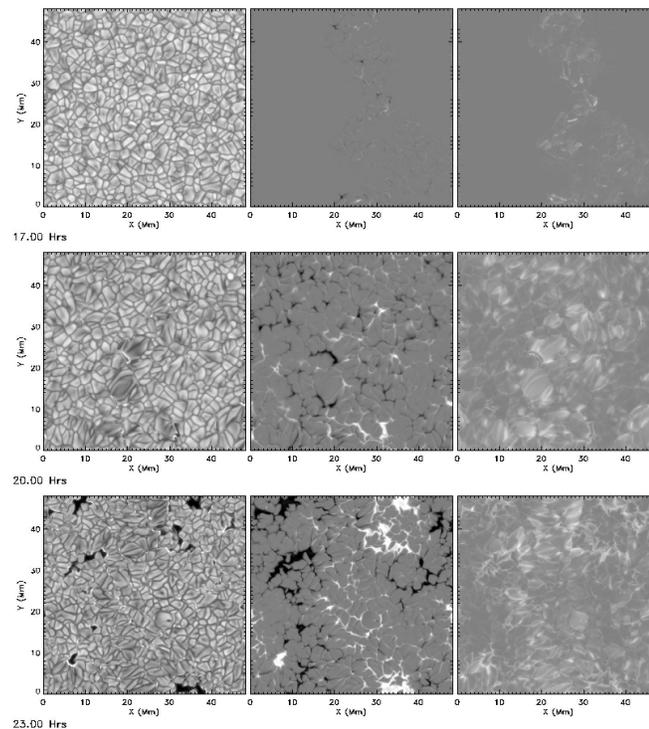


Figure 2.4 – Séquence temporelle de l’émergence d’un tube de champ magnétique au niveau de la photosphère solaire. Simulation numérique compressible prenant en compte les effets radiatifs. Carte de température (gauche), composante verticale du champ magnétique à un niveau photosphérique (centre) et composante horizontale (droite). Tiré de l’article ”Emerging Flux Simulations and Proto-Active Regions” de Stein financé par la NASA, [Stein *et al.*, 2011].

2.3 Les données observationnelles.

2.3.1 Observatoires et instruments.

Les observatoires au sol, ainsi que les observatoires spatiaux fournissent des données solaires à des résolutions spatiales et à des cadences temporelles différentes, dans le passé et le présent (table 2.3.1). Aussi diverses que complémentaires, ces données couvrent une période aussi longue qu'un cycle d'activité solaire et ont permis de cataloguer et d'étudier de nombreuses régions actives [Welsch *et al.*, 2009].

Observatoire	Localisation	Instrument	Observations	Résolution	Cadence
SOHO [Scherrer <i>et al.</i> , 1995] 1996 - 2010	point L1	MDI	Disque entier magnétogramme dopplergramme continuum \mathbf{B}_{los} \mathbf{V}_{los} \mathbf{T}	4" (FD) 1.2" (HR)	96' 1'
SDO [Wachter <i>et al.</i> , 2012] 2010 - présent	point L1	HMI	Disque entier magnétogramme dopplergramme continuum \mathbf{B}_{los} \mathbf{V}_{los} \mathbf{T}	1.5" (FD) 1" (HR)	90" 45"
MEES [LaBonte <i>et al.</i> , 1999] 1993 - présent	Haleakala	IVM	Régions actives magnétogramme vectoriel \mathbf{B}_{los} $\mathbf{B}_{\text{trans}}$ $\mathbf{B}_{\text{azimuth}}$	1"	8'

Tableau 2.I – Observatoires solaires et instruments d'intérêt.

Les données principalement utilisées dans le cadre de l'assimilation de données de ce projet de maîtrise proviennent de l'instrument MDI à bord de l'observatoire spatial SOHO (Fig. 1.2) pour la région AR9077-20000714.

2.3.2 Ce que disent les observations.

Les données observationnelles existantes mettent en évidence des structures magnétiques à la surface du Soleil (aux niveaux photosphériques) couvrant une large gamme d'échelle spatiale et s'étalant sur une importante diversité d'échelles temporelles. Ainsi les plus petites structures actuellement résolues par les instruments d'observation ont une taille de l'ordre de 70 km [Rimmele et Marino, 2011] mais les simulations numériques suggèrent que la taille minimale de ces structures peut être aussi petite que 10 mètres [de Wijn *et al.*, 2009]. Par ailleurs, les régions actives couvrent des surfaces larges d'une centaine de mégamètres de côté. Ces structures apparaissent puis disparaissent sur un temps caractéristique aussi court que l'heure ou bien aussi long que plusieurs mois pour les régions actives [Mullan, 2009, 16.1.4]. Des lois phénoménologiques définissent bien les propriétés des structures magnétiques aux larges échelles mettant en évidence l'existence d'une dynamo interne [Foukal, 2004, 8.4.4]. La loi de Hale d'abord, précise que la polarité des parties suiveurs/meneurs de régions actives successives d'un hémisphère est identique, que la polarité est

inversée entre les deux hémisphères, que les polarités s'inversent dans le temps sur une période de 11 ans, et enfin que les régions actives apparaissent à mi-latitude pour migrer vers l'équateur [Hathaway, 2010]. La loi de Joy nous informe, elle, que les régions actives s'inclinent vers l'équateur [Hathaway, 2010]. Aux petites échelles, les champs magnétiques de forte intensité (de l'ordre de 0.1 Tesla) ont tendance à être verticaux et localisés dans le réseau magnétique ou bien dans des régions de fortes concentrations entre les granules [de Wijn *et al.*, 2009]. Les champs magnétiques de faible intensité (de l'ordre de 10 milli-Tesla) ont tendance à être horizontaux et sont répartis sur tout le Soleil, à proximité du bord des granules. Ceci, même dans le Soleil calme ou bien dans les régions polaires [Ishikawa et Tsuneta, 2009]. Les champs magnétiques les plus faibles n'ont pas d'orientations privilégiées, tandis que les plus forts ont tendance à s'aligner avec le champ magnétique des régions actives [de Wijn *et al.*, 2009]. Ces champs magnétiques ne possèdent pas d'échelle de temps caractéristiques, mais une distribution exponentielle en temps comme en espace [Danilovic *et al.*, 2010].

Le flux magnétique émergeant aux petites échelles sous la forme de boucles, sur toute la surface du Soleil calme, est quatre ordres de grandeurs plus important que celui émergeant des régions actives. Ce flux magnétique prend la forme d'un champ horizontal (polarisation linéaire du spectre de Stokes) au dessus des granules puis d'un champ vertical au bord de ceux-ci (polarisation circulaire du spectre de Stokes) [Centeno *et al.*, 2007; Ishikawa *et al.*, 2010; Martínez González et Bellot Rubio, 2009]. Les points d'ancrage de ces boucles en Ω sont rapidement balayés dans l'espace intergranulaire tandis que le champ horizontal se retrouve sur le bord des granules. Ces champs horizontaux peuvent également apparaître de manière transitoire lorsqu'un nouveau flux de masse descendant se forme [Danilovic *et al.*, 2010]. Bien que le flux magnétique de ces dipôles émergents soit faible (de l'ordre de $10^{17}Mx$) alors que le flux magnétique total du Soleil de l'ordre de $10^{21}Mx$ [de Wijn *et al.*, 2009] leur taux d'apparition est important (à peu près $10^{-10}km^{-2}s^{-1}$) ce qui en fait la principale contribution au flux de champ magnétique émergent du Soleil [Ishikawa et Tsuneta, 2009; Ishikawa *et al.*, 2010]. La plupart de ces boucles restent à proximité de la photosphère, un quart d'entre elles atteignant des hauteurs chromosphériques [Martínez González et Bellot Rubio, 2009]. La reconstruction des structures magnétiques de la zone convective solaire permettrait d'étudier les mécanismes pouvant conduire à ces observations.

CHAPITRE 3

MODÈLE PHYSIQUE ET ASPECTS NUMÉRIQUES.

3.1 Équations de conservation pour un fluide magnétisé.

Le plasma solaire peut être décrit par l'approximation fluide. Il existe ainsi une séparation nette d'échelles entre la longueur d'interaction microscopique des particules constituant le plasma et l'échelle macroscopique sur laquelle les variables physiques caractérisant l'état du plasma évoluent. Par ailleurs, le plasma solaire est ionisé. En conséquence, il existe une séparation de charge entre les noyaux atomiques et les électrons. Pour une longueur caractéristique plus petite que la longueur d'interaction de Debye, le plasma solaire peut-être décrit comme un ensemble d'ions chargés positivement se déplaçant lentement par rapport à un gaz d'électrons chargés négativement dans lequel ils baignent. Au delà de cette longueur de Debye, le champ électrostatique est écranté et le plasma est globalement neutre ou presque [Foukal, 2004, 4.4.7].

D'un coté, sous l'action d'un champ électrique à grande échelle, le plasma solaire subit une séparation de charges conduisant à la création d'un nouveau champ électrique qui s'oppose au champ source. Cette relaxation s'effectue sur un temps caractéristique τ_E très court tel que $\tau_E = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ avec ϵ_0 la permittivité du vide et $\sigma \approx 10^4 \Omega^{-1} m^{-1}$ la résistivité électrique dans l'intérieur solaire. On trouve $\tau_e \approx 10^{-18} s$. Le second champ électrique s'établit en effet à une vitesse proche de celle de la lumière une fois que les charges sont séparées [Davidson, 2001, 2.2]. D'un autre coté, sous l'action d'un champ magnétique à grande échelle, le plasma va être le siège de courants électriques ayant tendance à faire disparaître le champ magnétique par diffusion Ohmique. Le temps d'amortissement associé à cette diffusion Ohmique est toutefois généralement très long par rapport au temps caractéristique d'évolution des variables d'états du plasma. Si l'on considère l'expression du temps d'amortissement magnétique : $\tau_B = \frac{\rho}{\sigma B^2}$ [Davidson, 2001, 5.4.4] on trouve $\tau_B = 1000 s$ ce qui assure $\tau_E \ll \tau_B$. Ceci étant, on considère que le plasma solaire est un fluide magnétisé régi simultanément par les lois de l'hydrodynamique et par les lois de l'électromagnétisme. Ces lois sont couplées par l'action de la force de Lorentz. Dans le cadre de l'approximation MHD, on considère que la contribution de la composante liée au champ électrique de la force de Lorentz est négligeable devant la contribution liée au champ magnétique ce qui est intimement lié au fait que le temps de relaxation électrique est largement inférieur au temps de relaxation magnétique.

Les équations de conservation pour un fluide magnétisé s'écrivent sous leur forme Eulérienne comme suit :

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p - 2 \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (3.2)$$

Équation de conservation de l'énergie :

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right] = \nabla \cdot (\kappa \rho T \nabla s) + \frac{\eta}{\mu_0} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + ((\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}) \quad (3.3)$$

Équation de conservation d'induction magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.4)$$

avec pour condition l'absence de monopôles magnétiques :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.5)$$

3.2 Modèle compressible.

Un fluide magnétisé est soumis à la propagation de différents types d'ondes. Ces ondes mettent en jeu différentes forces de rappel. Premièrement, le gradient de pression ∇p permet la propagation des ondes sonores à une vitesse $c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mathcal{M}}} \approx 9 km s^{-1}$ [Mullan, 2009, 7.1]. En réécrivant l'expression de la force de Lorentz (éq. 3.6) à partir de l'expression (éq. 2.1), on fait apparaître la tension magnétique \mathbf{T}_B et la pression magnétique \mathbf{P}_B :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{T}_B + \mathbf{P}_B = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla (\mathbf{B})^2, \quad (3.6)$$

ces forces agissent comme force de rappel pour les ondes magnéto-soniques. Ces dernières se propagent à la vitesse d'Alfvén $v_A = \frac{B}{\sqrt{\rho \mu_0}} \approx 10 km s^{-1}$ au niveau de la photosphère, pour une région active. De plus, la gravité peut agir sur la force de flottaison pour créer des ondes de surface. La force de Coriolis peut enfin mener à la création d'ondes dites "de Rossby". Toutes ces ondes se propagent dans le Soleil et à sa surface. Dans une approche dite "compressible" il est utile de résoudre les équations de conservation physiques afin de déterminer l'ensemble des mouvements du fluide ainsi que la propagation des ondes en question. Dans la mesure où la modélisation numérique des ondes acoustiques est un inconvénient pour le problème traité dans cette maîtrise, il est intéressant de s'en affranchir en les filtrant [Lantz et Fan, 1999]. C'est le sens que l'on peut donner au traitement des équations physiques dans le cadre de l'approximation anélastique.

3.3 L'approximation anélastique.

On peut tirer parti du fait que les ondes acoustiques se propageant dans la zone convective solaire se déplacent plus vite que le fluide afin de les filtrer, considérant ainsi qu'elles se déplacent de manière instantanée dans le milieu. Dans le cas des ondes sonores, la fluctuation de pression liée au passage d'une onde introduit un couplage entre la pression, la vitesse et la densité du fluide à travers les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, ainsi que de

la relation des gaz parfaits (éq. 3.1, 3.2, 1.13). Un moyen efficace pour filtrer ces ondes sonores est de supprimer le couplage associé à la force de rappel liée au gradient de pression. Ceci est rendu possible grâce à l'approximation anélastique [Batchelor, 1953; Ogura et Phillips, 1962]. Dans le cadre de cette approximation, on utilise le fait que les ondes sonores se propagent rapidement par rapport au fluide afin de développer les principales variables physiques en terme du carré du nombre de Mach. Puis, on utilise le fait que la zone convective Soleil est fortement stratifiée en densité pour associer aux variables d'états un profil de référence [Gough, 1969]. Ces profils sont constants en temps à une altitude donnée, mais peuvent varier avec la profondeur. Ceci permet le filtrage des ondes sonores se déplaçant rapidement. Les ondes magnéto-soniques d'Alfvén ne sont pas filtrées [Lantz et Fan, 1999]. Un exemple d'une telle procédure est donnée ici pour l'équation de la conservation de la quantité de mouvement.

Dans une première étape, les équations physiques sont adimensionnalisées de la manière suivante :

$$\rho = \rho^* \bar{\rho} , \quad (3.7)$$

où les variables étoilées correspondent à une valeur dimensionnelle de référence non précisée explicitement ici. Les variables barrées sont la contrepartie adimensionnelle d'ordre unité. Une notation similaire est introduite pour les variables vectorielles :

$$\mathbf{v} = v^* \bar{\mathbf{v}} . \quad (3.8)$$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement devient alors :

$$\begin{aligned} \rho^* \bar{\rho} \left[\frac{v^*}{t^*} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + \frac{v^{*2}}{l^*} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{v}} \right] &= \rho^* g^* \bar{\rho} \bar{\mathbf{g}} - \frac{p^*}{l^*} \bar{\nabla} p - 2 \rho^* \Omega^* v^* \bar{\rho} (\bar{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}) \\ &+ \frac{B^{*2}}{\mu_0 l^*} (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{\mu^* v^*}{l^{*2}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

En divisant l'équation précédente par le terme $\frac{\rho^* v^{*2}}{l^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{l^*}{v^* t^*} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\rho} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{v}} &= \frac{g^* l^*}{v^* 2} \bar{\rho} \bar{\mathbf{g}} - \frac{p^*}{\rho^* v^* 2} \bar{\nabla} p - \frac{2 \Omega^* l^*}{v^*} \bar{\rho} (\bar{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}) \\ &+ \frac{B^{*2}}{\mu_0 \rho^* v^* 2} (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{\mu^*}{\rho^* v^* l^*} \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

En introduisant le nombre de Strouhal $Sr = \frac{v^* t^*}{l^*}$, le nombre de Froude $Fr = \sqrt{\frac{v^{*2}}{g^* l^*}}$, le nombre de Rossby $Ro = \frac{v^*}{2\Omega^* l^*}$, celui d'Alfvén $A = \frac{v^* \sqrt{\mu_0 \rho^*}}{B^*}$ ainsi que celui de Reynolds $Re = \frac{\rho^* v^* l^*}{\mu^*}$, on obtient :

$$\frac{\bar{\rho}}{Sr} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\rho} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{v}} = \frac{\bar{\rho} \bar{\mathbf{g}}}{Fr} - \frac{\bar{\nabla} p}{\gamma M^2} - \frac{\bar{\rho}}{Ro} (\bar{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}) + \frac{1}{A^2} (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{Re} \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} . \quad (3.11)$$

Il s'agit maintenant d'estimer ces différents nombres adimensionnels. On peut considérer que tout changement dans le fluide se propagera avec une vitesse caractéristique v^* de l'ordre de la grandeur de $\frac{l^*}{t^*}$. Ceci est assuré tant que l'on n'impose pas de conditions aux limites instationnaires évoluant plus vite que le temps caractéristique t^* [Fröhlich, 1990], on a donc $Sr = 1$. On considère ensuite que la vitesse des ondes se propageant dans le milieu est faible devant la vitesse de déplacement du fluide, soit $\gamma M^2 = \varepsilon \ll 1$. Par ailleurs, le carré du nombre de Froude est égale à l'inverse du nombre de Richardson $Ri = \frac{1}{Fr}$. Ce dernier représente le rapport de l'énergie potentielle d'une particule du fluide sur son énergie cinétique. Dire que cette quantité est grande revient à dire que la particule n'est pas dans un état de chute libre, ce qui semble raisonnable dans la zone convective solaire puisque $v^* = \varepsilon^{\frac{1}{2}} g^* l^*$ [Lantz et Fan, 1999]. Finalement, on considère que la vitesse d'Alfvén est de l'ordre de la vitesse du son : $c_S \approx v_A$, ce qui conduit à $\frac{\gamma M^2}{A^2} = O(1)$. On peut résumer nos suppositions :

$$\boxed{Sr = 1 \quad \gamma M^2 \ll 1 \quad \frac{\gamma M^2}{Fr^2} = O(1) \quad \frac{\gamma M^2}{A^2} = O(1)} \quad (3.12)$$

En développant les variables au second ordre en terme du carré du nombre de Mach, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho_0 + \gamma M^2 \rho_1 , \\ \bar{T} &= T_0 + \gamma M^2 T_1 , \\ \bar{s} &= s_0 + \gamma M^2 s_1 , \\ \bar{p} &= p_0 + \gamma M^2 p_1 . \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (éq. 3.2) nous donne, au premier ordre, l'équilibre hydrostatique :

$$\rho_0 \mathbf{g} - \nabla p_0 = \mathbf{0} . \quad (3.14)$$

Il s'ensuit que les quantités ρ_0, T_0, s_0, p_0 restent constantes dans le temps et ne peuvent varier qu'avec la profondeur z . On leur attribue l'indice z . On peut alors écrire l'équation (3.11) développée au premier ordre en termes du carré du nombre de Mach dans le cadre des suppositions faites en (3.12). Par un raisonnement similaire, on trouve l'ensemble des équations anélastiques :

Équation anélastique de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot (\rho_z \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.15)$$

Équation anélastique de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_z \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} \right] = \rho_1 \mathbf{g} - \nabla p_1 - \frac{\rho_z}{Ro} (\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}) + (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (3.16)$$

Équation anélastique de conservation de l'énergie :

$$\rho_z T_z \left[\frac{\partial s_1}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) (s_z + s_1) \right] = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\kappa \rho_z T_z \nabla s_1) + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{1}{Rm} |\nabla \times \bar{\mathbf{B}}|^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma Re} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (3.17)$$

Équation anélastique de conservation de l'induction magnétique :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \frac{1}{Rm} \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (3.18)$$

Avec pour condition :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.19)$$

Relation des gaz parfaits anélastique :

$$\frac{\rho_1}{\rho_z} = \frac{p_1}{p_z} - \frac{T_1}{T_z} \quad (3.20)$$

Premier principe de la thermodynamique anélastique :

$$\frac{s_1}{c_p} = \frac{T_1}{T_z} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_1}{P_z} \quad (3.21)$$

Le résultat principal du développement de l'approximation anélastique a été de lever le couplage entre l'équation de conservation de la masse (éq. 3.15) et la relation des gaz parfaits (éq. 3.20), ce qui a pour effet de filtrer les ondes acoustiques [Fröhlich, 1990].

3.4 Le logiciel ANMHD.

Nous utilisons le logiciel ANMHD afin de résoudre les équations MHD anélastiques. Ce logiciel a été développé pour une application solaire [Fan *et al.*, 1999], puis a été modifié [Abbett *et al.*, 2001]¹. Le logiciel ANMHD permet la simulation de l'écoulement de fluides magnétisés dans un domaine Cartésien uniforme. Outre la résolution numérique et les rapports d'aspect verticaux, l'utilisateur peut paramétrer la rapport de stratification, les nombres de Reynolds et de Reynolds magnétique ainsi que le nombre de Prandtl. Le domaine simulé est à frontières périodiques sur les bords verticaux. Le flux magnétique aux frontières inférieures et supérieures est nul. Les surfaces supérieures et inférieures sont "sans contraintes tangentielles" (libre glissement) et "non pénétrantes". Le logiciel tire partie de la stratification de la zone convective solaire pour utiliser horizontalement une méthode pseudo-spectrale. Cette méthode est combinée à un schéma aux différences finies centrées d'ordre 4 verticalement. La discrétisation en temps utilise une méthode semi implicite de type "prédicteur-correcteur" horizontalement : les termes advectifs non-linéaires sont traités par un schéma de type Adams-Bashforth d'ordre 2 tandis que les termes diffusifs sont calculés par un schéma de type Cranck-Nicolson d'ordre deux en résolvant un système d'équations penta-diagonales [Fan *et al.*, 1999]. Ce logiciel a été parallélisé par OPEN-MP. Le taux d'accélération avoisine 3,5 sur huit processeurs. Nous utilisons les ressources des supercalculateurs du RQCHP ainsi qu'une grappe de calcul du GRPS.

¹Il s'agit d'un logiciel libre disponible en téléchargement à l'adresse suivante : <http://solarmuri.ssl.berkeley.edu/public/software/Anmhd/README>.

3.5 L'algorithme DBFN.

L'algorithme DBFN, dont l'origine et le principe sont détaillés dans le chapitre 4, est une méthode d'assimilation de données. Dans le cadre de ce projet de maîtrise, l'algorithme a été implanté dans le logiciel ANMHD afin d'effectuer l'assimilation de données solaires en vue de la reconstruction de la zone convective solaire sous une région active particulière : AR9077-20000714. Les signes des différents termes ont été imprimés en couleur afin de souligner les changements entre les équations correspondantes aux intégrations directes ($t^* = t$) et rétrogrades ($t^* = -t$). Les équations de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'induction magnétique ont été modifiées pour intégrer l'algorithme DBFN (éq. 3.22, 3.23, 3.24).

Équation anélastique de conservation de la quantité de mouvement modifiée par l'implantation de l'algorithme DBFN :

$$\begin{aligned}
\text{Direct} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} &= -(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \frac{\rho_1 \mathbf{g}}{\rho_z} - \frac{\nabla p_1}{\rho_z} - \frac{1}{Ro} (\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\rho_z} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B} \\
&\quad + \frac{1}{\rho_z Re} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \\
&\quad + K \delta(t - t_{obs}) \delta(z - z(L_z - 2dz)) (v_z^{obs} - v_z^{cal}) \mathbf{e}_z, \\
\text{Rétrograde} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t'} &= +(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} - \frac{\rho_1 \mathbf{g}}{\rho_z} + \frac{\nabla p_1}{\rho_z} + \frac{1}{Ro} (\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}) - \frac{1}{\rho_z} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B} \\
&\quad + \frac{1}{\rho_z Re} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \\
&\quad + K \delta(t' - t_{obs}) \delta(z - z(L_z - 2dz)) (v_z^{obs} - v_z^{cal}) \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Équation anélastique de conservation de l'énergie modifiée par l'implantation de l'algorithme DBFN :

$$\begin{aligned}
\text{Direct} \quad \frac{\partial s_1}{\partial t} &= -(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) (s_z + s_1) + \frac{\nabla \cdot (\kappa \rho_z T_z \nabla s_1)}{\rho_z T_z Pe} \\
&\quad + \frac{(\gamma - 1) (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2}{\gamma \rho_z T_z Rm} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\rho_z T_z Re} \\
&\quad + K \delta(t - t_{obs}) \delta(z - z(L_z - 2dz)) (s_1^{obs} - s_1^{cal}), \\
\text{Rétrograde} \quad \frac{\partial s_1}{\partial t'} &= +(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) (s_z + s_1) + \frac{\nabla \cdot (\kappa \rho_z T_z \nabla s_1)}{\rho_z T_z Pe} \\
&\quad - \frac{(\gamma - 1) |\nabla \times \bar{\mathbf{B}}|^2}{\gamma \rho_z T_z Rm} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\rho_z T_z Re} \\
&\quad + K \delta(t' - t_{obs}) \delta(z - z(L_z - 2dz)) (s_1^{obs} - s_1^{cal}).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Équation anélastique de conservation de l'induction magnétique modifiée par l'implantation de l'algorithme DBFN :

$$\begin{aligned}
\text{Direct} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} &= +\nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \frac{1}{Rm} \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \\
&\quad + K \delta(t - t_{obs}) \delta(z - z(L_z - 2dz)) (B_z^{obs} - B_z^{cal}) \mathbf{e}_z, \\
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\text{Rétrograde} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t'} &= -\nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \frac{1}{Rm} \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \\
&\quad + K \delta(t' - t_{obs}) \delta(z - z(L_z - 2dz)) (B_z^{obs} - B_z^{cal}) \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Les termes $K\delta(t - t_{obs})$ indiquent que l'amplitude du multiplicateur de Lagrange est plus faible lorsque le système est temporellement éloigné des observations disponibles. Ils permettent ainsi d'accorder une plus grande fiabilité aux observations disponibles, et une plus faible fiabilité aux données interpolées temporellement à partir de ces dernières. Les termes du type $\delta(z - z(L_z - 2\delta z))$ indiquent que le terme de relaxation Newtonienne est principalement appliqué au sommet du domaine $z(L_z)$, et ce sur deux points de maille verticaux (5.5 Mm), ce qui est compatible à la fois avec le filtrage spatial du logiciel ANMHD (Fig.3.2) ainsi qu'avec la profondeur de la photosphère solaire étendue calculée selon des modèles numériques [Mullan, 2009, 5.5].

3.6 Régularisation des fonctionnelles.

L'implantation de l'algorithme DBFN au sein du logiciel ANMHD implique que des contraintes soient imposées au sommet du domaine simulé. Une telle contrainte limite la taille maximale du pas de temps numérique utilisé dans la simulation car le système doit répondre au critère de Courant-Friedrichs-Lewy : $dt < C \frac{dx_{min}}{v_{max}}$ où C est le nombre de Courant. Le problème numérique tel que nous tentons de résoudre est donc un problème dit "raide"².

Par ailleurs, la reconstruction de la zone convective à partir de données de surface est un problème sous-déterminé. Plusieurs solutions à ce problème sont possibles, ce qui en fait un problème "mal posé"³. Une contrainte supplémentaire en permet la résolution. Dans cette approche, on cherche à résoudre un problème du type $Ax = b$ où A est un opérateur éventuellement non-linéaire, x et b des vecteurs regroupant des variables physiques $x, b = [B_x, B_y, B_z, v_y, \dots, T]$. Le vecteur x peut par exemple représenter l'état d'un système, et le vecteur b des observations de ce même système. On peut sélectionner un type de solutions étant pertinentes en tentant de minimiser une fonctionnelle ϕ telle que :

$$\phi(x) = \|Ax - b\|^2 + \|\Gamma x\|^2. \tag{3.25}$$

Γ est une matrice, souvent assimilée à la matrice identité. La forme de Γ permettra de sélection-

²D'après J.D. Lambert, la raideur apparaît dans un système lorsque les exigences de stabilité, et non les exigences de précision, contraignent la longueur du pas de temps. Lambert, J. D. (1992), *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, New York : Wiley, ISBN 978-0-471-92990-1.

³D'après Jacques Hadamard, un problème est bien posé lorsque sa solution existe de manière unique et qu'elle dépend des données de manière continue. Hadamard, Jacques (1902). *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. pp. 49-52.

ner les solutions présentant un intérêt particulier [Press *et al.*, 1992]. Plusieurs types d’approches s’offrent alors à nous.

3.6.1 Principe du maximum d’entropie.

La première méthode de régularisation est basée sur le principe du maximum d’entropie. Parmi la famille de solutions numériques possibles au problème ”mal-posé” que l’on tente de résoudre, il s’agit de sélectionner celle requérant le minimum d’information [Skilling et Bryan, 1984]. Dans l’approche Bayésienne, une solution nécessitant le minimum d’informations ”a priori” correspond à la solution la plus vraisemblable. En théorie de l’information, la solution numérique contenant le minimum d’information est celle maximisant l’entropie dite de Shannon. Une telle condition peut être atteinte en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$\Psi(\mathbf{B}_{3D}) = \lambda \frac{\int_{3D} \sum_i P_{B_x^{cal}} \ln(P_{B_x^{cal}}) + \sum_i P_{B_y^{cal}} \ln(P_{B_y^{cal}}) + \sum_i P_{B_z^{cal}} \ln(P_{B_z^{cal}}) dV}{\int_{3D} dV} . \quad (3.26)$$

En minimisant le logarithme de la probabilité associé à chacun des micro-états du champ magnétique $P_{B_x^{cal}}$, nous les rendons équiprobables. Ceci correspond à un état macroscopique du champ magnétique pour lequel le nombre de micro-états Ω_B est maximal. L’entropie de Shannon $S = k \ln(\Omega_B)$ du système est alors maximale. Cette approche est valide. Toutefois, dans le problème qui nous intéresse, on ne cherche pas à minimiser la corrélation entre les points de maille voisins mais on cherche plutôt les solutions pour lesquelles le gradient du champ magnétique est minimisé en tout point. Cette situation correspond à un cas où le champ magnétique évolue de manière lisse dans le domaine de simulation. Nous n’utiliserons donc pas le principe du maximum d’entropie.

3.6.2 Régularisation Tykhonov : minimisation des gradients de champs magnétiques.

La seconde approche consiste à minimiser le gradient de champ magnétique. Ceci est pertinent car nous tentons de reconstruire l’allure des lignes de champ magnétique aux grandes échelles et non les fluctuations observables aux petites échelles. L’action combinée de la résolution de notre problème par l’utilisation de l’algorithme DBFN et de la régularisation Tykhonov est donc de minimiser la fonctionnelle $\Phi(\mathbf{B}_{3D})$ suivante :

$$\Phi(\mathbf{B}_{3D}) = K \frac{\int_{2D} \|\mathbf{B}^{obs} - \mathbf{B}^{cal}\|^2 dS}{\int_{2D} dS} + \lambda \frac{\int_{3D} \|\nabla B_x^{cal} + \nabla B_y^{cal} + \nabla B_z^{cal}\|^2 dV}{\int_{3D} dV} . \quad (3.27)$$

Le terme de gauche représente la minimisation des résidus $\mathbf{B}^{obs} - \mathbf{B}^{cal}$ entre l’état observé et l’état d’analyse pour le champ magnétique. La norme utilisée est la norme L_2 car elle permet d’exprimer la convergence de l’algorithme d’assimilation de données en termes d’écarts quadratiques moyens. En toute rigueur, l’action du coup de coude direct et rétrograde est d’assurer cette convergence au niveau de la norme L_1 . Il minimise ainsi $\|\mathbf{B}^{obs} - \mathbf{B}^{cal}\|$. Toutefois, dans un espace de dimension R^n , les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^2$ sont équivalentes. La convergence de l’une assure ainsi

la convergence de l'autre. La minimisation de la fonctionnelle de droite correspond à la régularisation de Tykhonov, elle est rendue possible en ajoutant le terme suivant à l'équation 3.24 :

$$(éq.3.24) - \lambda \{ \Delta B_x^{cal} \mathbf{e}_x + \Delta B_y^{cal} \mathbf{e}_y + \Delta B_z^{cal} \mathbf{e}_z \} . \quad (3.28)$$

Le terme λ positif est un paramètre de la régularisation assimilé à un multiplicateur de Lagrange. Une valeur $\lambda = 10^{-6}$ semble raisonnable dans nos simulations. L'utilisation de l'équation 3.28 peut se justifier de la manière suivante. Considérons une fonction continue $B(x, t)$ variable dans le temps et dans un espace unidimensionnel. Alors si l'on ne considère que la régularisation, sans traiter le modèle physique, on peut écrire l'équation 3.28 sous la forme d'une équation de Fourier :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} . \quad (3.29)$$

En effectuant une séparation de variables : $B(x, t) = X(x)T(t)$, l'équation précédente devient :

$$X \frac{dT}{dt} = -\lambda \frac{d^2 X}{dx^2} T , \quad (3.30)$$

puis

$$\frac{1}{-\lambda T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = A , \quad (3.31)$$

où A est une constante positive car les termes de gauche et de droite sont égaux mais indépendants. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -A \lambda T , \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= A X , \end{aligned} \quad (3.32)$$

ce qui mène pour la fonction B et pour sa dérivée par rapport à la variable d'espace aux relations suivantes, avec C et D des constantes :

$$\begin{aligned} B(x, t) &= e^{-A \lambda t} \left\{ C \cos(\sqrt{\lambda} x) + D \sin(\sqrt{\lambda} x) \right\} , \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= -A \lambda e^{-A \lambda t} \left\{ C \cos(\sqrt{\lambda} x) + D \sin(\sqrt{\lambda} x) \right\} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

On s'aperçoit alors que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ si la relation $\lambda > 0$ est assurée, ce qui a pour effet de réduire le gradient de champ magnétique. Ce résultat se généralise aux trois dimensions d'espace, ce qui justifie l'utilisation de l'équation (3.28).

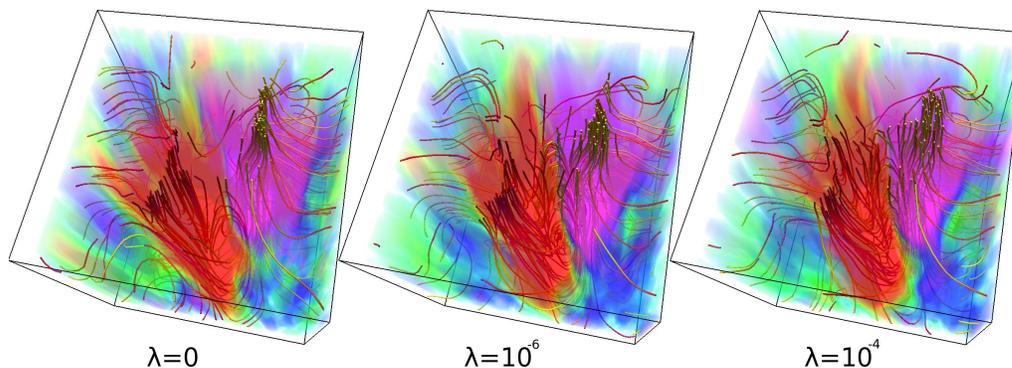


Figure 3.1 – Effet de la régularisation Tykhonov sur une simulation numérique d’une région solaire active en fonction du multiplicateur de Lagrange λ . Les lignes représentent les tubes de champ magnétique sous la surface. Centre : La régularisation lisse les tubes de champ magnétique. Un paramètre $\lambda = 10^{-4}$ trop grand entraîne une déformation excessive des structures magnétiques [Pirot *et al.*, 2012].

3.7 Filtrage spatial.

A chaque itération temporelle, le logiciel ANMHD effectue un filtrage de toutes les grandeurs physiques d’intérêt dans l’ensemble du domaine simulé. Les transformées de Fourier sont lissées verticalement et horizontalement par des filtres Gaussiens. Ceci à pour effet de limiter les nombres d’ondes les plus petits, ce qui correspond aux plus grandes fréquences spatiales. Avec un pas horizontal correspondant à $dx = dy = \frac{175Mm}{256} \approx 0.7 Mm$ et un lissage sur deux pas (Fig. 3.2) on s’aperçoit que le logiciel, tel que configuré, ne peut résoudre des structures horizontales d’une taille inférieure à 1.4 Mm, ce qui est supérieur à la taille d’une granule solaire. Verticalement, on a $dz = \frac{175Mm}{64} \approx 2.7Mm$. Le filtre de ANMHD s’étale sur 4 pas verticaux. Tel que configuré, le logiciel ne peut résoudre de structures verticales d’une taille inférieure à 11 Mm.

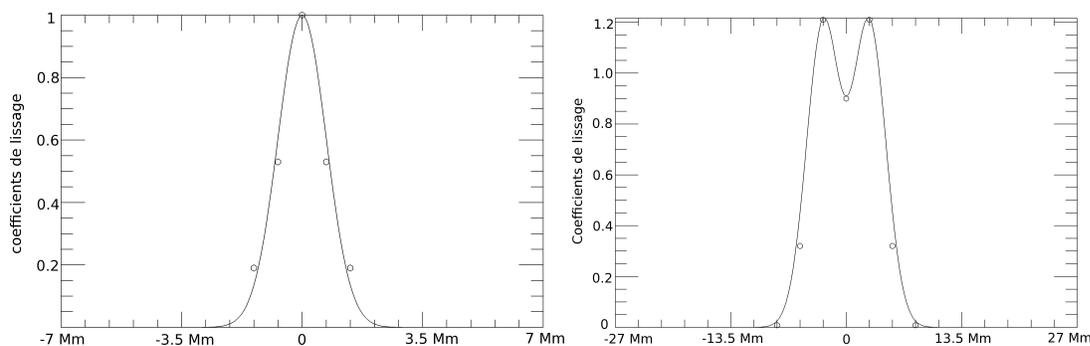


Figure 3.2 – Gauche : Coefficients de la fonction de lissage horizontale. Droite : Coefficients de la fonction de lissage verticale. Le lissage vertical et horizontal dans l’espace de Fourier permet un filtrage des structures numériques de nombres d’ondes trop élevés par le logiciel ANMHD.

A des fins d’analyse nous prétraitons les résultats de nos simulations par un filtre passe-bas de type Butterworth⁴. Ceci nous permet de nous débarrasser des petites fluctuations spatiales dans

⁴http://idlastro.gsfc.nasa.gov/id1_html_help/BUTTERWORTH.html

les structures magnéto-convectives reconstruites. Nous nous assurons ainsi que notre analyse porte sur les structures n'ayant pas été filtrées par le logiciel ANMHD. Le filtre utilisé est d'ordre 2. Il est réglé de manière à soustraire les structures horizontales dont la longueur d'onde spatiale est inférieure à 10 pixels, soit dont la taille est inférieure à 7Mm. On a donc $f_c = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} \text{ pixels}^{-1}$. La fonction de transfert du filtre de type Butterworth est $H = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_c})^{2N}}}$ où N est l'ordre du filtre. Pour $N = 2$ et avec $\lambda_{max} \times f_c = 256 \text{ pixels} * 0.1 \text{ pixels}^{-1}$ on obtient la fonction de transfert (Fig.3.3).

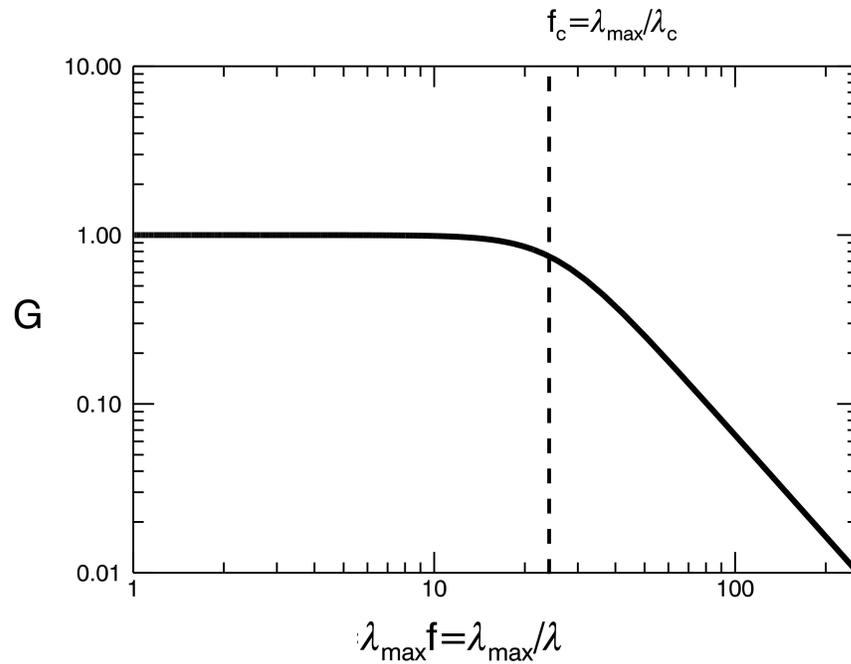


Figure 3.3 – Fonction de transfert du filtre passe-bas de Butterworth, Diagramme log-log. G représente le gain. La fréquence de coupure f_c correspond à une longueur d'onde équivalente à 10 pixels, soit 7Mm.

Les données assimilées (Fig.3.4, gauche haut) sont également prétraitées. Les grands nombres d'ondes sont supprimés des cartes de champ (Fig.3.4, droit). Les cartes obtenues après filtrage (Fig.3.4, gauche bas) ne contiennent ainsi que les informations non filtrées par le code, et étant préférentiellement assimilées.

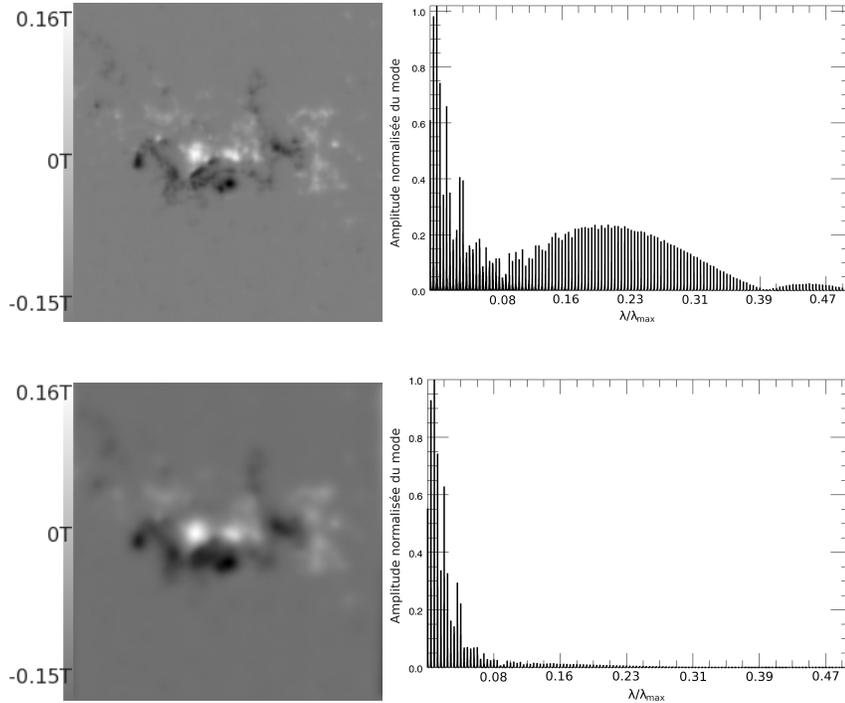


Figure 3.4 – Gauche : Carte de la composante verticale du champ magnétique. Droite : Spectre des fréquences spatiales pour l’image. Haut : image créée à partir de données provenant de l’instrument MDI à bord de SOHO. Bas : carte de champ magnétique après filtrage par un filtre passe-bas de type Butterworth.

3.8 Paramètres physiques du code.

Nous souhaitons simuler une région active d’une largeur de 175 Mm de côté tout en étant en mesure de résoudre les structures granulaires dont la taille caractéristique est supérieure à $l = 1$ Mm. Nous avons ainsi choisi une résolution numérique horizontale de 256 par 256 pixels. La zone convective s’étend jusqu’à 210 Mm sous la photosphère solaire. Nous avons choisi d’en simuler une partie seulement correspondant à une profondeur de 175 Mm afin d’éviter le traitement des effets physiques en jeu au niveau de l’interface entre les zones radiatives et convectives. La zone convective étant stratifiée, nous pouvons réduire la résolution verticale afin d’économiser du temps de calcul. Nous avons choisi une résolution verticale de 64 pixels correspondant à un rapport d’aspect de 1 pour 4. Notre résolution horizontale correspond à 0.7 Mm tandis que la résolution verticale équivaut à 2.7 Mm. Nous tentons d’approcher des valeurs tabulées (table. 1.I) des nombres de Reynolds, Reynolds magnétique, Prandtl et Rossby sans toutefois pouvoir les atteindre. L’utilisation de valeurs trop grandes pour les nombres de Reynolds ou bien trop petites pour le nombre de Prandtl demanderait des pas d’espace et de temps d’intégration trop petits, ce qui conduirait à un plus grand temps de calcul ainsi que possiblement à des instabilités numériques. Les paramètres utilisés sont synthétisés dans le tableau 3.I.

Re nombre de Reynolds	750
Rm nombre de Reynolds magnétique	1000
Ro nombre de Rossby	200
Pr nombre de Prandtl	1
n_1, n_2 résolution numérique horizontale	256
n_3 résolution numérique verticale	64
rapport d'aspect	1 : 4

Tableau 3.I – Paramètres physiques que nous avons utilisés dans le logiciel ANMHD. Le lissage numérique effectué par le logiciel ANMHD réduit les nombres de Reynolds et de Reynolds magnétique effectifs.

Dans l'approximation anélastique, les variables thermodynamiques peuvent fluctuer autour de profils moyens de référence. Ces profils indiquent l'évolution des variables avec l'altitude z depuis le bas du domaine de simulation. Nous utilisons les profils polytropiques suivants pour la pression, la densité, la température et l'entropie [Fan *et al.*, 1999] :

$$T_z(z) = T_z(0) \left[1 - \frac{z}{(m+1)H_p} \right], \quad (3.34)$$

$$\rho_z(z) = \rho_z(0) \left[1 - \frac{z}{(m+1)H_p} \right]^m, \quad (3.35)$$

$$P_z(z) = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \rho_z(z) T_z(z). \quad (3.36)$$

Nous prenons un indice polytropique $m=1.5$, ce qui correspond au cas d'un gaz monoatomique non ionisé. Cette hypothèse n'est pas exacte mais permet d'obtenir des résultats acceptables. On peut comparer les profils de référence obtenus avec les profils provenant du meilleur modèle d'atmosphère solaire actuel à une dimension [Bahcall et Pinsonneault, 2004]. Dans tous les cas, la différence entre les profils n'excède pas 10% (figure 3.5). Un indice polytropique $m=2$ permettrait un meilleur accord entre profils simulés et profils de référence mais la valeur $m=1.5$ a été privilégiée afin d'assurer l'instabilité de l'état convectif.

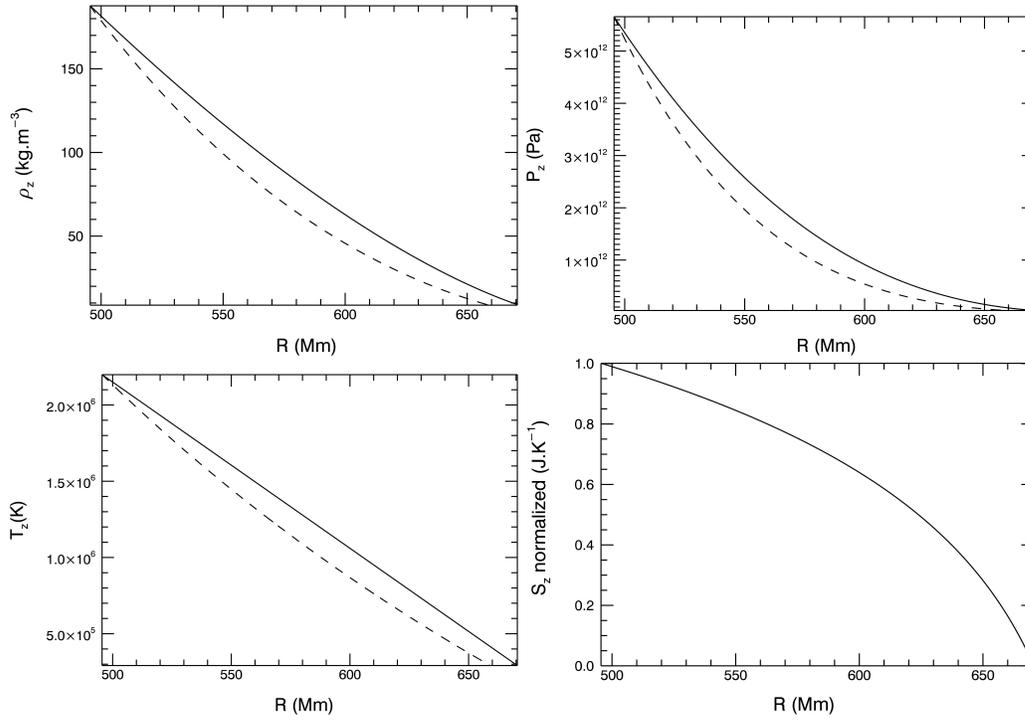


Figure 3.5 – Profils de référence pour la densité, pression, température et entropie dans nos simulations (en trait plein) [Piro *et al.*, 2012] et pour un modèle standard solaire (en trait pointillé) [Bahcall et Pinsonneault, 2004]. Les profils utilisés dans la simulation sont moins raides que ceux provenant du modèle. Un indice polytropique $m=2$ permettrait un meilleur accord entre profils simulés et profils de référence. Un indice polytropique $m=1.5$ à été utilisé afin de conserver l’instabilité convective.

CHAPITRE 4

L'ASSIMILATION DE DONNÉES¹.

4.1 Principe.

Qu'il s'agisse de sciences atmosphériques, océaniques, ou bien dans le cadre de ce mémoire de sciences héliosphériques, il est utile de pouvoir estimer à un temps donné l'état "vrai" d'un système physique. Cet état vrai correspond à l'ensemble des grandeurs physiques observables du modèle. On suppose que ces grandeurs sont non-biaisées et que les incertitudes qui leurs sont associées sont nulles. L'action consistant à estimer l'état d'un système physique correspondant à l'état vrai est appelé "analyse" et est au cœur des méthodes d'assimilation de données. L'analyse de l'état du système physique est en effet utile afin de :

- effectuer un diagnostic de l'état du système.
- fournir une référence pour estimer la qualité des données d'origine observationnelle.
- interpoler l'état du système entre deux états observés.
- permettre la prédictibilité de l'état du système dans le futur.

Dans le cas d'un système physique surdéterminé par les observations, l'analyse se résume à l'interpolation de celles-ci. Au contraire, lorsque le système est sous-déterminé, il est nécessaire d'utiliser des informations "de références" telles que des données antérieures, diverses hypothèses telles que la stationnarité du système physique, ou bien encore la corrélation entre grandeurs physiques afin d'estimer l'état du système de manière non biaisée. Les systèmes physiques sont souvent sous-déterminés car les observations sont, à cause des contraintes techniques, espacées dans le temps et dans l'espace. Par ailleurs, toutes les grandeurs physiques observables ne sont pas directement mesurables, ce à cause de contraintes physiques. La sous-détermination d'un problème physique peut le rendre "mal posé". Cette difficulté peut être levée en imposant une contrainte physique telle qu'une régularisation lors de l'analyse. Dans un système physique traité de manière adéquate, on s'attend à ce que les informations de références ainsi que les observations s'accumulent dans le temps dans l'état du système. On s'attend également à ce que ces informations se propagent à toutes les variables du modèle, même celles qui n'auraient pas été contraintes de manière directe par des observations.

4.1.1 Notations.

L'état d'un modèle physique peut-être décrit par un vecteur de dimension n regroupant les différentes grandeurs physiques observables. Les erreurs associées à ces vecteurs d'états sont des matrices de taille $n \times n$ caractérisant le fait que les erreurs affectant les différentes grandeurs

¹Cette section est inspirée en partie de l'article de revue de F. Bouttier et P. Courtier [Bouttier et Courtier, 1999] disponible à l'adresse suivante : http://www.ecmwf.int/newsevents/training/rcourse_notes/DATA_ASSIMILATION/ASSIM_CONCEPTS/Assim_concepts.html.

physiques peuvent être corrélées entre elles. On introduit ainsi les notations suivantes :

- \mathbf{x}_t est l'état vrai du système physique de dimension n .
- \mathbf{x}_b est l'état de référence du système physique de dimension n .
- \mathbf{x}_a est l'état d'analyse du système physique de dimension n .
- \mathbf{y} est le vecteur des observations de dimension p . Si le système est sous déterminé, alors $p < n$.
- H est l'opérateur observation de dimension $n \times p$.
- \mathbf{B} est la matrice covariante des erreurs de référence, de dimension $p \times p$.
- \mathbf{R} est la matrice covariante des erreurs d'observations, de dimension $p \times p$.
- \mathbf{A} est la matrice covariante des erreurs d'analyse, de dimension $p \times p$.

4.2 Interpolation par moindres carrés.

Lors de l'analyse d'un système physique, l'état vrai du système n'est pas connu, exception faite des cas de tests numériques. Il s'agit alors d'estimer l'état du système à l'aide d'un opérateur mathématique. Les deux qualités principales que l'on recherche chez un opérateur de ce type sont l'absence de biais systématique ainsi qu'un caractère optimal. En ce sens, on cherche à minimiser selon une norme quelconque l'écart entre l'état d'analyse et l'état vrai. Dans la méthode d'interpolation par moindres carrés, cet opérateur est l'opérateur BLUE, pour "meilleur estimateur linéaire sans biais". L'opérateur BLUE assure la minimisation selon la norme L_2 de l'écart entre l'état d'analyse et l'état vrai. Il consiste en une interpolation linéaire entre l'état de référence et l'image du vecteur observations par la matrice d'observation et se définit par les deux équations d'interpolation linéaires suivantes :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - H[\mathbf{x}_t]) , \quad (4.1)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} . \quad (4.2)$$

La matrice \mathbf{K} est appelée "gain" ou bien matrice de poids. Elle représente les poids attribués dans l'interpolation linéaire aux valeurs de références, ainsi qu'aux observations, en fonction des incertitudes respectives. Si \mathbf{K} est optimale au sens des moindres carrés alors la matrice covariante des erreurs d'analyse s'écrit :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B} . \quad (4.3)$$

Minimiser l'écart entre l'état d'analyse et l'état vrai revient à minimiser la Trace de \mathbf{A} . D'une manière équivalente, on peut définir une "fonction de coût" J telle que $\mathbf{x}_a = \mathbf{Arg}(\mathbf{min}(J))$. Dans le cas présent, la fonction coût s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + (\mathbf{y} - H[\mathbf{x}])^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - H[\mathbf{x}]) \\
&= J_b(\mathbf{x}) + J_o(\mathbf{x}) .
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

Le terme $J_b(\mathbf{x})$ représente le terme lié aux informations de référence tandis que le terme $J_o(\mathbf{x})$ correspond aux observations.

Une analyse par moindres carrés permet donc d’obtenir l’état du système optimal quand aux connaissances à priori, les informations de références, ainsi qu’aux observations. Toutefois le coût numérique associé à la résolution d’un tel problème peut devenir problématique dans le cas de systèmes physiques contenant un grand nombre d’observables. C’est souvent le cas dans le traitement de modèles d’atmosphères ou bien d’océans, où la dimension du vecteur état du système peut atteindre $n \approx 10^7$. Le problème est sous déterminé généralement et $p \approx 10^5$ [Bouttier et Courtier, 1999]. Il faut estimer les matrices de covariances \mathbf{B} et \mathbf{R} . Pour ce faire, il faut un nombre d’itérations de l’ordre de $\sqrt{\frac{n^2}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{p^2}{2}}$ [Bouttier et Courtier, 1999]. La détermination de la matrice \mathbf{K} de manière explicite requiert l’inversion d’une matrice $p \times p$ dont le coût numérique s’élève jusque $p^2 \log(p)$. Il faut enfin au maximum $n + 1$ évaluations afin de minimiser la fonction de coût J [Bouttier et Courtier, 1999]. En conclusion, l’analyse par moindres carrés est une méthode non biaisée optimale dont le coût numérique peut être grand. Ceci est un inconvénient pour une utilisation dans le cadre de sciences prédictives telle que la météorologie terrestre, océanographique ou bien spatiale. Le coût numérique peut être sensiblement réduit par l’utilisation de méthodes d’assimilations de données traitées dans le cadre d’approximations.

4.3 La méthode 3D variationnelle.

Il est possible d’éviter le calcul explicite de la matrice de gain \mathbf{K} en cherchant une solution approchée au problème de minimisation de la fonction de coût J (equation 4.4). La méthode 3D variationnelle permet ainsi l’estimation itérative de la fonction de coût dans différents points de l’espace tridimensionnel [Courtier *et al.*, 1998]. Le gradient de la fonction coût est également estimé en chaque point :

$$\nabla J(\mathbf{x}) = 2\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) - 2H^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H[\mathbf{x}]) .
\tag{4.5}$$

Un algorithme de descente permet de minimiser la fonction de coût ce qui mène au résultat approché. Le nombre d’itérations est limité par l’utilisateur afin de maîtriser le coût numérique. En pratique, l’état de référence est pris comme condition initiale. Il s’agit généralement de l’état d’analyse résultant de l’itération précédente. Un algorithme de descente du type gradient conjugué ou bien quasi-Newton permet ensuite de déterminer l’état d’analyse qui peut-être physiquement proche, ou non, de l’état de référence ce qui est schématisé par la figure (4.1).

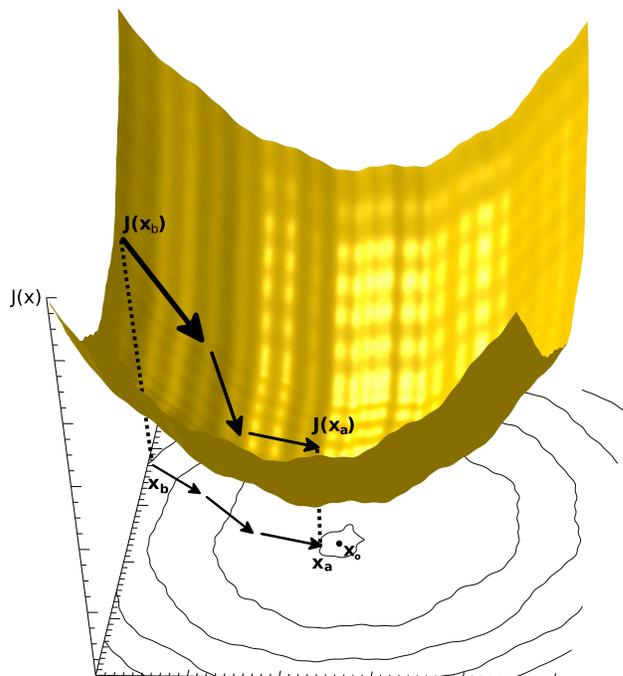


Figure 4.1 – Schématisation de la variation de la fonction coût associée à l'état d'un système physique $J(\mathbf{x})$ dans l'espace des paramètres (ici à deux dimensions). Projections des isocontours pour la fonction coût. L'état initial est pris comme l'état de référence \mathbf{x}_b . La fonction coût est ensuite minimisée en plusieurs itérations à l'aide d'un algorithme de minimisation. L'état d'analyse final est très proche de l'état optimal \mathbf{x}_o

Les méthodes d'assimilation de type 3D-Var connaissent un fort succès car elles sont relativement faciles à concevoir et mettre en œuvre. Des contraintes physiques supplémentaires peuvent être ajoutées en additionnant des termes à la fonction de coût J , ce qui présente un fort intérêt. Cependant, ceci peut rendre le pré-conditionnement du problème de minimisation difficile.

4.4 La méthode 4D variationnelle.

Il est possible d'étendre les méthodes du type 3D-Var à la dimension temporelle pour former la famille de méthode 4D variationnelles [Daley, 1993]. Il est nécessaire de disposer d'un échantillon contenant m observations y_k espacées dans le temps. Ces observations couvrent une fenêtre dite d'assimilation bornée par un temps initial t_i et un temps final t_f . Elles sont assimilées de manière à effectuer une prédiction à l'issue de la fenêtre d'assimilation. Dans le cas d'un système "en temps réel", il faut attendre la fin de l'acquisition des observations sur toute la longueur de la fenêtre d'assimilation, ce qui peut représenter plusieurs heures, avant de pouvoir effectuer une prédiction. Toutefois les méthodes d'assimilation 4D-Var sont optimales et permettent de fournir analyses et prédictions de l'état de systèmes physiques avec un coût plus faible qu'une méthode équivalente comme le filtrage de Kalman [Kalnay *et al.*, 2007]. Elles connaissent un fort succès. La forme

générale de la fonction coût associée à une méthode 4D-Var s'écrit :

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \sum_{i=0}^m (\mathbf{y}_i - H_i[\mathbf{x}_i])^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - H_i[\mathbf{x}_i]) \\
 &= J_b(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^m J_\theta(\mathbf{x}_i) .
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Le premier terme représente l'écart entre l'état d'analyse et l'état de référence. Il est identique au cas 3D-Var. La somme de termes représente l'écart entre les états d'analyse à des temps t_i et les observations correspondantes. La méthode 4D-Var permet ainsi de choisir l'état d'analyse optimal au temps $t_i = t_0$ par la méthode 3D-Var puis de minimiser l'écart quadratique moyen entre le modèle physique produisant l'analyse est les observations afin de produire une prédiction. L'ensemble du processus est schématisé dans la figure 4.2.

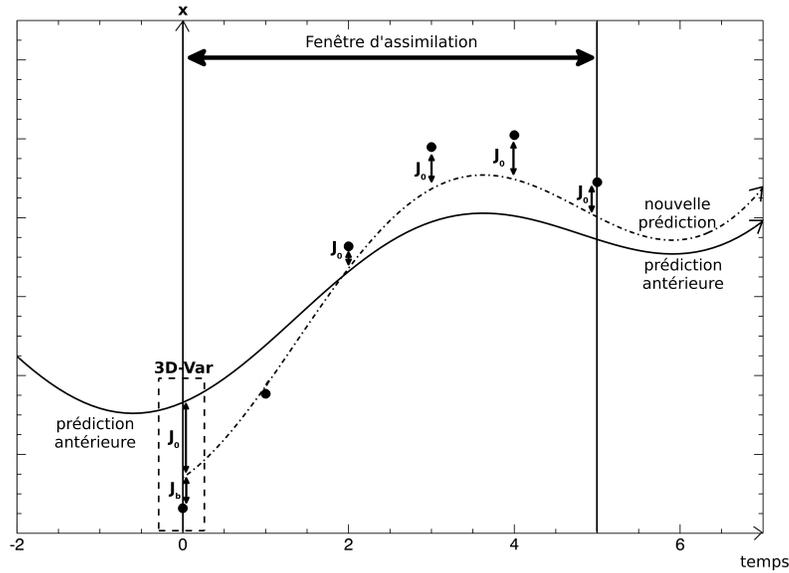


Figure 4.2 – Schématisation de l'action d'une méthode 4D-Var. Le résultat de la prédiction antérieure est prise comme état de référence et permet à l'aide de la méthode 3D-Var la détermination de l'état optimal du système physique à l'entrée de la fenêtre d'assimilation. Un minimiseur permet ensuite d'établir la trajectoire optimale vis-à-vis des observations et d'effectuer une nouvelle prédiction.

Une intégration temporelle directe du modèle entre le temps initial et chacun des temps t_i représenterait un coût numérique important car il impliquerait n évaluations de la fonction coût et encore plus pour l'évaluation du gradient. Après avoir linéarisé le modèle physique, on peut tirer parti du principe de causalité des prédictions pour séparer la prédiction à l'issue de la fenêtre d'assimilation en un produit de prédictions intermédiaires. Le modèle est ainsi intégré de manière directe dans le temps de t_0 à t_f puis intégré de manière rétrograde à l'aide du modèle physique adjoint. Les variables adjointes du modèle représentant en fait le gradient de la fonction coût, on peut utiliser une technique de minimisation (voir plus loin, paragraphe 4.6). Cette opération permet de réduire

considérablement le temps de calcul car il est plus avantageux d'intégrer de manière rétrograde, ce qui fait de 4D-Var une méthode adaptée aux problèmes de prévision numériques. Il faut pourtant garder en tête que la modélisation du système adjoint peut être délicate à entreprendre.

4.5 Le filtrage de Kalman.

Les méthodes 3D-Var et 4D-Var assimilent des données provenant du présent ainsi que du passé. Ces méthodes sont adaptées à des systèmes n'étant pas "temps-réel". On les qualifie de méthodes de "lissage". La méthode de filtrage de Kalman [Kalman, 1960] n'emploie que des données provenant du passé. On attribue l'adjectif "filtrage" à ce type de méthodes plus adapté à des problèmes d'assimilation de données en temps réel.

Dans cette méthode, on utilise un opérateur de prédiction $M_{(i-1) \rightarrow i}$ pour prédire l'état $\mathbf{x}_f(i)$ à partir de l'état d'analyse $\mathbf{x}_a(i-1)$:

$$\text{État prédit} \quad \mathbf{x}_f(i) = M\mathbf{x}_a(i-1) . \quad (4.7)$$

Connaissant la matrice de covariance des erreurs de modélisation au temps t_i : $\mathbf{Q}(i-1)$, on peut évaluer la matrice de covariance des erreurs de prédiction $\mathbf{P}_f(i)$ en fonction de la matrice de covariance des erreurs de prédiction précédente $\mathbf{P}_a(i)$:

$$\text{Erreurs de prédiction} \quad \mathbf{P}_f(i) = M\mathbf{P}_a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}(i-1) . \quad (4.8)$$

Les trois étapes suivantes sont identiques aux étapes (éq.4.2, 4.1, 4.5) respectivement de la méthode d'interpolation par moindres carrés. Ces dernières étapes sont optimales et non biaisées comme il a déjà été précisé. La matrice de gain $\mathbf{K}(i)$ est tout d'abord évaluée à l'aide de la prédiction précédente, prise comme référence, à la manière de ce qui est fait dans les méthodes de type variationnelles :

$$\text{Matrice de gain} \quad \mathbf{K}(i) = \mathbf{P}_f(i)\mathbf{H}^T(i) [\mathbf{H}(i)\mathbf{P}_f(i)\mathbf{H}^T(i) + R(i)]^{-1} . \quad (4.9)$$

Le nouvel état d'analyse est ensuite déterminé :

$$\text{État d'analyse} \quad \mathbf{x}_a(i) = \mathbf{x}_f(i) + \mathbf{K}(i)[\mathbf{y}(i) - H(i)\mathbf{x}_f(i)] . \quad (4.10)$$

Finalement, la matrice de covariance des erreurs d'analyses est évaluée :

$$\text{Erreurs d'analyse} \quad \mathbf{P}_a(i) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(i)\mathbf{H}(i)]\mathbf{B}(i) . \quad (4.11)$$

L'ensemble de l'algorithme est défini par récurrence et pourra être itéré en boucle de manière à produire une prédiction en temps-réel.

4.6 Quasi Linéaire Inverse 3D.

Les méthodes de type 4D-Var peuvent présenter un coût numérique prohibitif. Il est possible de diminuer ce coût en utilisant des méthodes quasi inverses. Dans les modélisations faisant usage de ce type de méthode, le modèle non-linéaire est intégré de manière rétrograde. Afin de diminuer encore plus le coût numérique, l'intégration peut se faire selon le modèle de la tangente linéaire. Ces méthodes quasi-linéaires inverses (QIL) ont été testées avec succès [Kalnay *et al.*, 2000].

4.6.1 Inverse 3D-Var et approche par modèle adjoint.

Les modèles de prédiction sont très sensibles aux changements se produisant dans les conditions initiales. Les méthodes "inverse 3D-Var" visent à trouver le changement dans les conditions initiales $\delta \mathbf{x}_0$ d'un modèle permettant de corriger de manière optimale l'erreur de prédiction perçue \mathbf{E} . Si \mathbf{M} est un opérateur non linéaire de prédiction, \mathbf{A} la matrice de covariance des erreurs de l'état d'analyse et \mathbf{L} un propagateur linéaire associé au modèle tangent linéaire alors :

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{A} \approx \mathbf{L} \delta \mathbf{x}_0 . \quad (4.12)$$

On peut montrer que le gradient de la fonction coût s'écrit [Kalnay *et al.*, 2000] :

$$\nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}^* \mathbf{E} , \quad (4.13)$$

où \mathbf{L}^* représente le modèle adjoint au modèle physique. Ce qui montre que le gradient de la fonction coût peut être calculé en intégrant de manière rétrograde le modèle adjoint à partir de l'erreur perçue. Une fois le gradient optimal déterminé, il est possible de calculer un nouveau changement dans les conditions initiales tel que :

$$\delta \mathbf{x}_0 = \alpha \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) , \quad (4.14)$$

avec α une amplitude à paramétrer. Une fois que $\delta \mathbf{x}_0$ est obtenu, le modèle peut être intégré directement et l'ensemble de la procédure peut être réitérée.

4.6.2 Approche Quasi linéaire inverse.

Il est possible de résoudre directement l'équation (4.12) à l'aide d'un propagateur linéaire inverse \mathbf{L}^{-1} [Kalnay *et al.*, 2000]. Dans le cadre de l'approximation quasi-linéaire inverse, \mathbf{L}^{-1} est pris comme l'inverse du modèle affine, ce qui mène à :

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} . \quad (4.15)$$

Bien que cette solution ne soit pas optimale, elle est considérée comme parfaite car elle permet de réaliser la condition $\nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) \approx 0$ en seulement une itération. Résultat qui serait obtenu en

plusieurs itérations à l'aide de l'approche selon le modèle adjoint. Toutefois, la longueur de la fenêtre d'assimilation ($t_f - t_i$) doit être assez courte devant un temps caractéristique du système pour que le modèle linéaire soit une approximation valide du modèle non-linéaire.

4.7 Le coup de coude direct et rétrograde.

4.7.1 Approche standard : relaxation Newtonienne.

La méthode du coup de coude direct et rétrograde (BFN) consiste à ajouter aux équations d'un modèle physique un terme de rappel Newtonien empêchant le modèle physique de diverger des observations lorsque celles-ci sont disponibles [Auroux et Blum, 2008]. L'atout majeur de cette méthode est sa simplicité conceptuelle, ainsi que la facilité avec laquelle elle peut être mise en œuvre. Il n'est en effet pas nécessaire de calculer la fonction de coût associée à un modèle, ni son gradient. La dérivation du modèle physique adjoint n'est également pas nécessaire. Enfin, elle est facile à implémenter dans un modèle physique car elle ne nécessite que l'ajout de termes linéaires. Le calcul de l'état d'analyse $\mathbf{x}_a(i)$ se fait d'une manière semblable à ce qui est effectué dans la méthode du filtrage de Kalman (éq. 4.7, 4.10) à ceci près que la matrice de gain \mathbf{K} n'est, a priori, pas optimale :

$$(t^* = t) \quad \mathbf{x}_a(i) = \mathbf{M}\mathbf{x}_a(i-1) + \mathbf{K}(i)[\mathbf{y}(i) - H(i)\mathbf{x}_a(i)] . \quad (4.16)$$

La méthode BFN tire parti de la forte dépendance des modèles physiques aux conditions initiales. En effet, après une intégration directe sur toute la longueur de la fenêtre d'assimilation, le signe du pas de temps Δt est inversé. L'intégration rétrograde du modèle s'effectue jusqu'au retour au début de la fenêtre d'assimilation, la condition initiale étant ainsi modifiée. Cette intégration rétrograde n'est pas sans rappeler les méthodes de type QIL. Ces méthodes utilisent toutefois un modèle affine pour l'intégration rétrograde tandis que la méthode du coup de coude prend en compte les non-linéarités du modèle :

$$(t^* = -t) \quad \mathbf{x}_a(i) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_a(i+1) + \mathbf{K}(i)[\mathbf{y}(i) - H(i)\mathbf{x}_a(i)] . \quad (4.17)$$

La présence de termes diffusifs dans le modèle rétrograde \mathbf{M}^{-1} peut rendre le problème de l'intégration rétrograde mal posé. L'unicité de l'intégration peut être assurée par une matrice de gain \mathbf{K} dont les coefficients sont grands, ainsi que par de nombreuses observations [Auroux *et al.*, 2008]. Ceci aura toutefois un impact négatif sur la stabilité de la méthode en imposant un pas de temps faible.

4.7.2 Approche diffusive.

Les termes diffusifs \mathbf{D} étant généralement faibles devant les autres termes contenus dans les équations physiques éventuellement non-linéaires \mathbf{F} car les nombres adimensionnels tels que le

nombre de Reynold : $Re = \frac{\text{ADVECTION}}{\text{DIFFUSION VISQUEUSE}}$ sont grands (Table 1.I), il est possible de les séparer des autres termes de manière formelle : $\mathbf{M} = \mathbf{F} + \mathbf{D}$ [Auroux *et al.*, 2011]. Les termes diffusifs en question peuvent provenir de termes diffusifs physiques tels que la viscosité, de la modélisation de phénomènes sous-maîles ainsi que des erreurs de troncature. L'algorithme du coup de coude direct et rétrograde diffusif s'exprime alors de la manière suivante [Auroux *et al.*, 2011] :

$$(t^* = t) \quad \mathbf{x}_a(i) = \mathbf{F}\mathbf{x}_a(i-1) + \mathbf{D}\mathbf{x}_a(i-1) + \mathbf{K}(i)[\mathbf{y}(i) - H(i)\mathbf{x}_a(i)] , \quad (4.18)$$

$$(t^* = -t) \quad \mathbf{x}_a(i) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}_a(i+1) + \mathbf{D}\mathbf{x}_a(i+1) + \mathbf{K}(i)[\mathbf{y}(i) - H(i)\mathbf{x}_a(i)] . \quad (4.19)$$

Outre le fait qu'il n'est plus nécessaire de calculer l'opérateur inverse \mathbf{D}^{-1} , cette nouvelle version de l'algorithme du coup de coude permet une intégration rétrograde plus stable numériquement [Auroux *et al.*, 2011].

4.7.3 Convergence.

On peut vérifier la convergence de la méthode BFN sur un modèle simplifié où le modèle \mathbf{M} ainsi que l'opérateur d'observation \mathbf{H} sont linéaires et où le problème est bien posé. En considérant une itération du coup de coude direct et rétrograde du modèle décrit par les équations (4.16, 4.17), on s'intéresse aux applications Ψ et $\tilde{\Psi}$ telle que l'état d'analyse initial $\mathbf{x}_1(0)$ du système est modifié :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E}, & (\mathbf{x}_1(0), \mathbf{y}(0)) &\rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_1(0) , \\ \tilde{\Psi} : \mathbf{E} \times \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E}, & (\tilde{\mathbf{x}}_1(0), \mathbf{y}(0)) &\rightarrow \mathbf{x}_2(0) . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Comme les applications Ψ et $\tilde{\Psi}$ sont linéaires, alors il existe C et D des opérateurs linéaires de E dans E tels que :

$$\mathbf{x}_2(0) = C \mathbf{x}_1(0) + D \mathbf{y}(0) . \quad (4.21)$$

Le schéma numérique étant défini par récurrence, on peut tirer la relation suivante au bout de k itérations du coup de coude direct et rétrograde :

$$\mathbf{x}_{k+1}(0) = C^k \mathbf{x}_1(0) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} C^i \right) D \mathbf{y}(0) . \quad (4.22)$$

Ainsi, C^i tend vers 0 et $\sum_{i=0}^{k-1} C^i$ tend vers $(I-C)^{-1}$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Dans ce cas, l'état d'analyse initial $\mathbf{x}_1(0)$ tend vers :

$$\mathbf{x}_\infty(0) = (I - C)^{-1} D \mathbf{y}(0) , \quad (4.23)$$

ce qui assure que le modèle ne s'éloignera pas "trop" des observations. Ce type de démonstration se généralise à des équations de transport non-diffusives, à des équations de transport linéaires diffusives sous des hypothèses fortes (\mathbf{K} grand) [Auroux et Nodet, 2011]. Toutefois, pour des équations de transport non-linéaires diffusives le problème est mal posé [Auroux et Nodet, 2011]. La convergence de l'algorithme du coup de coude n'est alors pas assurée automatiquement [Auroux et Nodet, 2011]. Le problème physique que nous tentons de résoudre est diffusif et mal-posé. Un test numérique est nécessaire pour valider la méthode.

4.7.4 Comparaison entre la méthode BFN et la méthode QIL.

La méthode BFN, au même titre que les méthodes QIL, cherche à trouver une modification dans les conditions initiales du système physique menant à une erreur de prédiction perçue minimale. Les méthodes QIL effectuent cette étape en effectuant une prédiction, puis en intégrant de manière rétrograde, en une itération, par un modèle tangent linéaire. Ces méthodes ne sont pas optimales, toutefois elles ne nécessitent pas le calcul d'un modèle adjoint ni la mise en place d'une méthode variationnelle. Le défaut des méthodes QIL réside dans la linéarité de l'intégration rétrograde. En effet, si la fenêtre d'assimilation est trop grande, les non-linéarités du modèle physique ne permettent pas de minimiser l'erreur de prédiction de manière satisfaisante [Auroux *et al.*, 2008]. La méthode BFN permet, elle, l'intégration rétrograde en tenant compte des non-linéarités du modèle physique puisque tous les termes physiques sont calculés de manière explicite. La méthode BFN est ainsi plus efficace que les méthodes QIL lorsque la fenêtre d'assimilation est grande [Auroux *et al.*, 2008].

CHAPITRE 5

SIMULATIONS NUMÉRIQUES.

5.1 Cas test : émergence d'un tube de flux en forme de U.

Afin de valider le modèle physique, nous comparons après convergence de la méthode DBFN, l'état d'analyse et l'état vrai d'un système physique issu d'un cas test. Une simulation numérique directe permet de générer un système physique dont l'état vrai est connu. Nous en extrayons une partie et l'utilisons comme vecteur d'observation. Ce vecteur d'observation est assimilé par le modèle physique à des fins de comparaison. Pour réaliser le cas test, nous avons placé un tube de champ magnétique vertical en forme de U au centre de notre domaine de simulation. Ce tube émerge en surface à ses deux extrémités et reproduit de manière simpliste l'alternance de polarités magnétiques constituant une région active solaire. Le tube de champ magnétique synthétique n'est toutefois pas, a priori, compatible avec le modèle de convection anélastique utilisé. Nous effectuons une intégration directe sur plusieurs temps de retournements convectifs, soit plusieurs dizaines de minutes, jusqu'à ce que le tube de champ magnétique soit fortement déformé et que les composantes énergétiques du système soient stationnaires. Une séquence temporelle de cartes des champs magnétiques verticaux et horizontaux est ensuite extraite du sommet du domaine simulé à des pas de temps réguliers. Une interpolation linéaire permet, à chaque pas de temps, de générer des vecteurs d'observations intermédiaires à partir des observations régulières. Ces données sont assimilées par notre modèle numérique jusqu'à convergence. Afin d'estimer l'efficacité du modèle physique, nous calculons à chaque pas de temps le coefficient de corrélation linéaire de Pearson (éq.5.1) entre l'état d'analyse de la composante verticale du champ magnétique au sommet du domaine de simulation B_z^{cal} et son état vrai, correspondant aux observations B_z^{obs} .

$$C(B_z^{cal}, B_z^{obs}) = \frac{\sigma^{(cal.obs)}}{\sigma^{(cal)}\sigma^{(obs)}} = \frac{\sum_{x,y} (B_z^{cal} - B_z^{cal}) \cdot (B_z^{obs} - B_z^{obs})}{\sqrt{\sum_{x,y} (B_z^{cal} - B_z^{cal})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (B_z^{obs} - B_z^{obs})^2}} \quad (5.1)$$

Un coefficient de corrélation proche des valeurs 1 ou -1 indique une corrélation ou une anti-corrélation parfaite, tandis qu'une valeur proche de zéro indique une absence totale de corrélation. Après une très courte intégration directe, le coefficient de corrélation entre les deux états passe d'une valeur nulle à 0,4. Ce changement est trop rapide pour être visible sur la figure (Fig. 5.1, gauche).

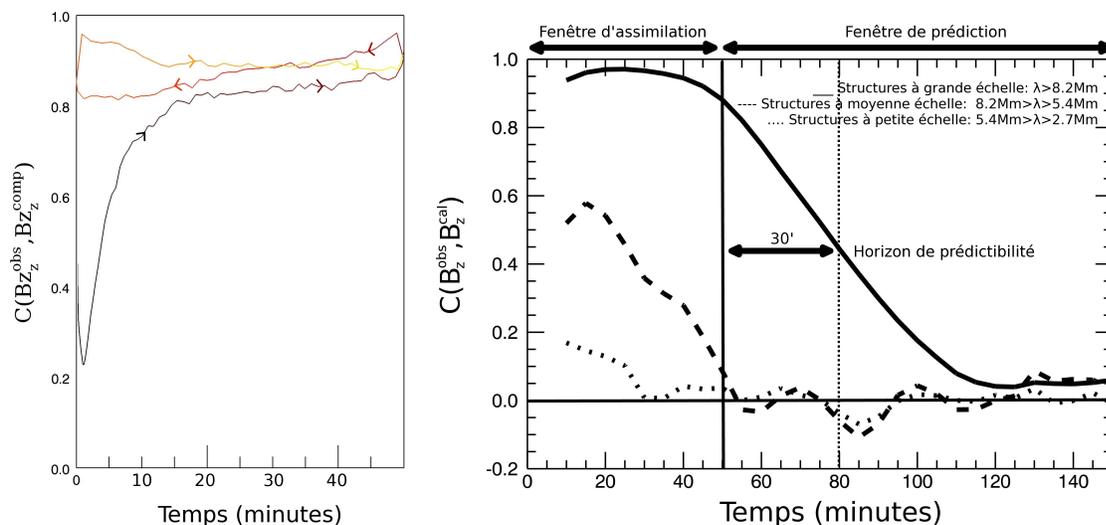


Figure 5.1 – Gauche : Coefficient de corrélation entre le magnétogramme simulé B_z^{cal} et le magnétogramme vrai B_z^{obs} , pour une itération du "coup de coude". L'état initial et l'état vrai sont peu corrélés. La corrélation entre l'état d'analyse et l'état vrai croît à mesure que la méthode DBFN agit, ce qui est représenté par les portions courbe noire, orangée et jaune. La corrélation optimale à la fin de la fenêtre d'assimilation atteint 0.9 après une itération. Droite : Coefficient de corrélation entre le magnétogramme simulé B_z^{cal} et le magnétogramme vrai B_z^{obs} pour une simulation directe, après convergence de l'algorithme du coup de coude. En traits pointillés, la corrélation entre les petites échelles des magnétogrammes ($4pix < \lambda < 8pix$) est perdue au bout de 30 minutes. En traits tirés, la corrélation entre les moyennes échelles des magnétogrammes ($8pix < \lambda < 12pix$) est perdue au bout de 50 minutes. En traits pleins, la corrélation entre les grandes échelles des magnétogrammes ($12pix < \lambda$) est perdue au bout de 120 minutes. Le modèle physique employé permet seulement de conserver la corrélation aux grandes échelles pour les magnétogrammes en dehors de la fenêtre d'assimilation avec un horizon de prédictibilité de 30 minutes (corrélation inférieure à 0.4). Il ne semble pas possible d'effectuer une prédiction qui garderait tous les détails du magnétogramme.

Après une intégration directe sur l'ensemble de la fenêtre d'assimilation, visible sur la portion noire de la courbe, le coefficient de corrélation atteint une valeur proche de 0.9, ce qui représente une très bonne corrélation entre l'état d'analyse et l'état vrai. Lors de l'intégration rétrograde nécessaire à la méthode DBFN, visible sur la portion orangée de la courbe, le coefficient de corrélation baisse de manière linéaire jusqu'à une valeur proche de 0.8. L'état de référence de départ a ainsi été modifié, après une itération du coup de coude, et une importante corrélation a été introduite entre les deux états. Au cours de l'intégration directe suivante, visible sur la portion jaune de la courbe, le coefficient de corrélation s'établit à une valeur proche de 0.9, ce qui semble être la valeur optimale. La valeur du coefficient de corrélation optimal n'est pas unitaire car le modèle physique ne peut reproduire les fluctuations de l'état vrai aux petites échelles. Ces fluctuations sont en effet fortement dépendantes des conditions initiales. Le modèle physique ne peut reproduire de telles fluctuations dont la nature est stochastique.

Après quelques itérations du coup de coude, l'état d'analyse converge vers l'état vrai. Une intégration numérique directe sans contraintes de surface ni régularisation est alors réalisée, ce qui permet de suivre l'évolution dans le temps du coefficient de corrélation entre les deux états. Un filtrage spatial permet de suivre l'évolution de la corrélation pour différentes échelles spatiales (Fig.5.1, droite). Ainsi, les structures de petites échelles spatiales, en traits pointillés, commencent

à perdre leur corrélation dès le début de la simulation numérique directe. Elles sont totalement non corrélées au bout de 30 minutes. Les structures d'échelles spatiales de taille moyenne, en traits tirés, voient leur corrélation diminuer au bout de 15 minutes. Elles ne sont totalement non corrélées qu'à la fin de la fenêtre d'assimilation (50 minutes). Enfin, les structures des grandes échelles spatiales sont représentées en trait plein. La décorrélation commence au bout de 40 minutes. Ces structures restent corrélées pendant près de deux heures. On estime que la prédiction n'est plus satisfaisante lorsque le coefficient de corrélation est inférieur à la valeur 0.4, aussi le modèle physique utilisé semble permettre une prédiction en dehors de la fenêtre d'assimilation des structures magnétiques aux grandes échelles avec un horizon de prédictibilité de l'ordre de 30 minutes [Pirot *et al.*, 2012]. Ces disparités entre les différentes échelles spatiales étudiées peuvent être expliquées par la suppression de la régularisation lors de la simulation directe. Les structures ne sont ainsi plus lissées que par le logiciel ANMHD (Fig. 3.2) et plus par la régularisation (Fig. 3.1). Le lissage dû à la régularisation étant plus fin que celui imposé par le logiciel ANMHD, ceci entraîne une décorrélation rapide des structures de petites échelles, tandis que les structures de grandes échelles gardent leur corrélation plus longtemps. Cependant, ces structures décrivent la forme générale des régions de surface magnétiquement actives. Prédire leur évolution temporelle permettrait éventuellement de fournir une estimation de l'évolution de la topologie du champ magnétique au niveau de la photosphère solaire ainsi que dans la couronne solaire.

5.2 Reconstruction de la zone convective située sous la région active AR9077-20000714 par la méthode du coup de coude direct et rétrograde.

Nous appliquons le modèle à la reconstruction d'une région magnétiquement active particulière : AR9077-20000714. Cette région est connue pour avoir donné lieu à une puissante éruption solaire le 14 juillet 2000, connue sous le nom "d'évènement du jour de la Bastille". Afin de reconstruire la région active, nous générons tout d'abord une condition initiale représentant le Soleil "magnétiquement calme". La condition initiale est générée à partir d'un champ magnétique B_0 , et d'une perturbation locale d'entropie aléatoire. Elle est ensuite intégrée directement par le modèle de convection anélastique sans effectuer l'assimilation de données, ni la régularisation. Après une centaine de retournements convectifs, le système atteint un équilibre énergétique. Cet état est utilisé comme condition initiale de la phase d'assimilation de données. Les remarques suivantes peuvent être faites à l'issue de l'assimilation de données :

- Les différentes contributions énergétiques du système changent fortement pendant une période transitoire s'étalant sur un temps de retournement convectif de l'ordre de dix minutes (Fig.5.2).

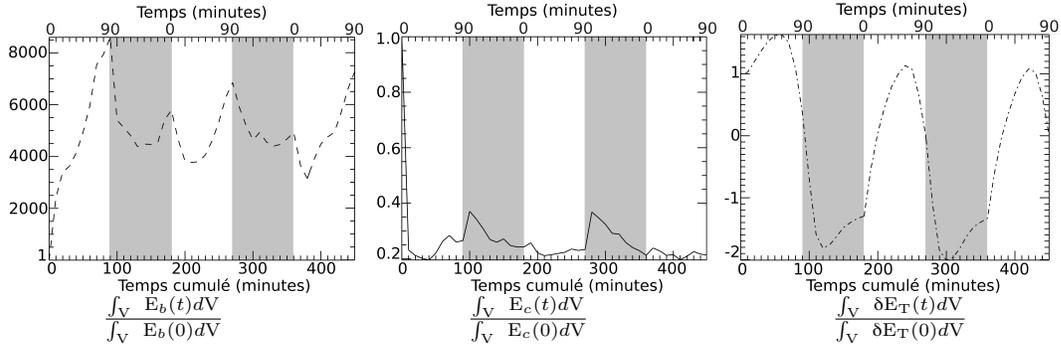


Figure 5.2 – Évolution temporelle des profils énergétiques de l’ensemble du domaine simulé normalisés par rapport aux valeurs énergétiques de l’état initial du système. Les parties grisées représentent les périodes pendant lesquelles le modèle physique est intégré de manière rétrograde par rapport au temps. Gauche : énergie magnétique du système $E_B = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV$. L’énergie magnétique du système est multipliée par un facteur de l’ordre du millier, ce qui caractérise le fait qu’une région solaire active est fortement plus magnétisée qu’une région calme du Soleil. Centre : Énergie cinétique du système $E_c = \int \frac{1}{2}\rho v^2 dV$. L’énergie cinétique du système diminue d’un facteur cinq, ce qui s’explique par le fait que d’importants champs magnétiques s’opposent aux mouvements du fluide via la force de Lorentz. Droite : Fluctuation d’énergie thermique du système par rapport à une énergie de référence $\Delta E_T = \int c_p T_1 dV$. L’énergie thermique du système oscille autour de la valeur initiale de manière dissymétrique.

- L’énergie magnétique croit d’un facteur mille. Elle est apportée de manière artificielle par le terme d’assimilation de données en surface. Cette augmentation est attendue.
- L’énergie cinétique diminue d’un facteur cinq. On s’attend à ce que la présence de champs magnétiques intenses freine les mouvements convectifs, ce que suggère le théorème d’Alfvén (éq.2.5).
- Après la phase transitoire, un certain motif énergétique semble se dessiner entre les phases d’intégration directes et rétrogrades (en blanc et gris, respectivement). L’existence de ce motif montre que le modèle physique suit des trajectoires différentes mais proches lorsqu’il effectue des aller-retour le long de la fenêtre d’assimilation.
- Aux temps $t=180$ minutes et $t=360$ minutes (Fig.5.2, gauche et centre) le système physique correspond à l’état de la condition initiale mais modifiée par, respectivement une et deux itérations du coup de coude. Ceci suggère que le système converge lentement, itérations après itérations vers son état optimal. Il eut été intéressant d’étudier l’évolution énergétique du système sur plus de deux itérations de la méthode BFN, ce qui n’a pas été fait à cause du coût numérique prohibitif d’une telle simulation numérique.
- D’un point de vue thermique, les périodes d’intégrations rétrogrades correspondent à un refroidissement global car les termes de diffusion visqueuse et Ohmique, ainsi que le transport de chaleur par advection jouent un rôle opposé à celui joué lors de l’intégration directe. La dissymétrie observée (Fig.5.2, droit) peut s’expliquer par le fait que les termes diffusifs de transfert de chaleur jouent le même rôle dans les intégrations directes et rétrogrades, conformément à la méthode DBFN [Auroux *et al.*, 2011].

5.2.1 Assimilation de cartes vectorielles du champ magnétique photosphérique.

Il est possible de reconstituer les cartes des composantes horizontales du champ magnétique pour une région solaire active à partir des cartes de la composante verticale du champ magnétique. Ces cartes, acquises par l'instrument MDI à bord de SOHO ont été saturées en intensité (Fig.5.3, gauche) car nous nous intéressons, dans une première approche, à la reconstruction des structures magnéto-convectives aux grandes échelles spatiales. Notre cas test a en effet souligné la capacité du modèle physique à assimiler ce type de structures de manière préférentielle.

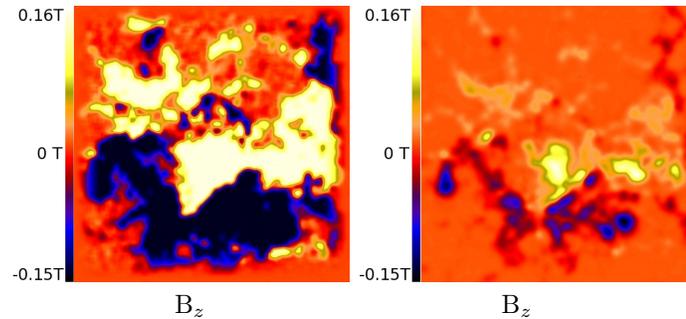


Figure 5.3 – Cartes de la composante verticale du champ magnétique B_z assimilées dans nos simulations. La carte de gauche est saturée par rapport à la carte de droite, ce qui permet de s'intéresser spécifiquement à la reconstruction des structures magnéto-convectives dont la largeur caractéristique correspond à l'échelle mésogranulaire. La carte de droite est ensuite utilisée dans les simulations afin de reconstruire une plus grande diversité d'échelles spatiales.

Les composantes horizontales ont été reconstruites en utilisant l'hypothèse "linéaire à force magnétique nulle" (LFF) (Fig.5.4, droite). Tous les magnétogrammes vectoriels ainsi constitués (B_x, B_y, B_z à 01 :39 et à 03 :15 le 14 juillet 2000) sont interpolés temporellement de manière linéaire, puis assimilés par notre modèle physique au sommet du domaine de simulation. Il s'agit d'une première tentative permettant de "mimer" la photosphère à l'aide du modèle physique anélastique régularisé.

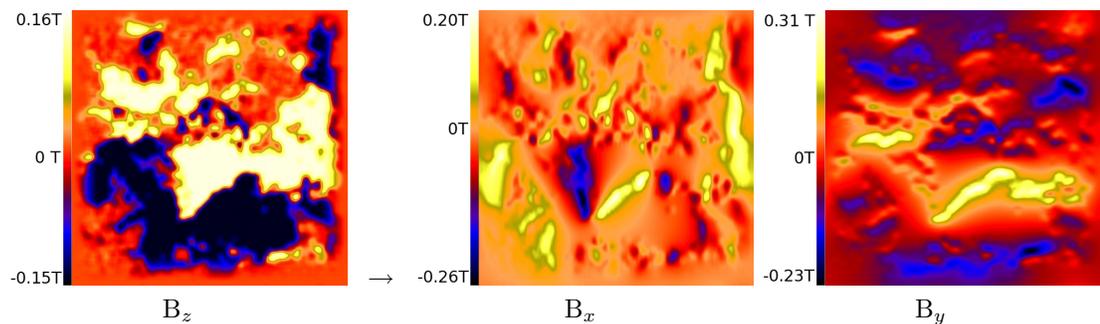


Figure 5.4 – Gauche : Carte radiale du champ magnétique, supposée verticale, obtenue au niveau de la photosphère solaire par SOHO/MDI pour la région active AR9077-20000714 à 01 :39. Droite : Cartes des composantes horizontales du champ magnétique au niveau de la photosphère solaire reconstruite d'après la carte radiale du champ magnétique en utilisant l'hypothèse "linéaire à force magnétique nulle".

Après convergence, l'état d'analyse du champ magnétique au sommet du domaine simulé

(Fig.5.5, gauche) ressemble au vecteur d'observation (Fig.5.4, gauche).

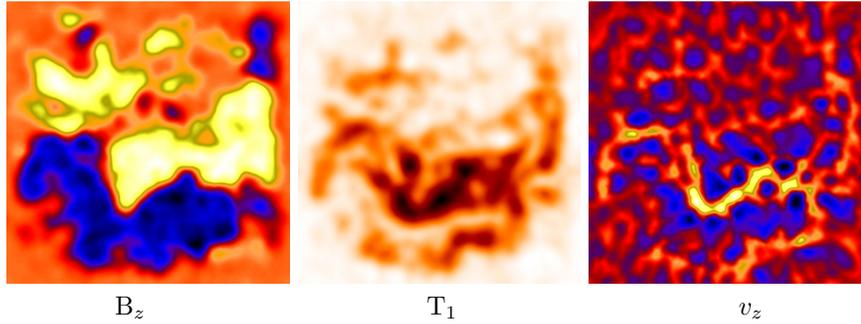


Figure 5.5 – Gauche : Carte de la composante verticale du champ magnétique B_z^{cal} à 01 :39, au sommet du domaine de simulation, après convergence de la méthode DBFN. La composante verticale du champ magnétique est fortement corrélée avec le magnétogramme assimilé (Fig.5.4). Centre : Carte de la perturbation locale d'entropie au sommet du domaine de simulation. On peut assimiler la fluctuation locale d'entropie à la fluctuation locale de température [Lantz et Fan, 1999]. Les régions plus sombres correspondent à un refroidissement local près de la ligne neutre magnétique, là où les gradients de champ magnétique sont maximaux [Pirot *et al.*, 2012]. Droite : Carte de la composante verticale du champ de vitesse au sommet du domaine de simulation. La ligne neutre magnétique coïncide avec un flux de masse ascendant tandis que les régions fortement magnétisées autour de celles-ci prennent place sur des flux de masses descendants [Pirot *et al.*, 2012]. L'alternance des flux de masse ascendants et descendants dans les régions peu magnétisées caractérise la mésogranulation. La topologie des flux de masses verticaux à proximité de la ligne neutre évoque une "granulation anormale".

Bien que notre modèle physique ne prenne pas en compte les phénomènes radiatifs en jeu au sommet de la zone convective ainsi qu'au niveau photosphérique, la carte des fluctuations locales de température au sommet de notre domaine de simulation (Fig.5.5, centre) met en évidence des zones soumises à un refroidissement local. Ce comportement est lié à la présence de forts gradients de champ magnétique à proximité de la ligne neutre magnétique [Pirot *et al.*, 2012]. Ces derniers bloquent partiellement le transfert de chaleur depuis les couches inférieures, ce qui crée un refroidissement. Les régions fortement magnétisées coïncident avec les flux de masse descendants [Spruit, 1979]. Ces observations font penser à un "effondrement convectif", communément observé dans les simulations numériques de la magnéto-convexion [Stein, 2011]. La composante verticale du champ de vitesse au sommet du domaine de simulation (Fig.5.5, droite) évoque, elle, une "granulation anormale" [Vögler *et al.*, 2005] introduite par la présence de régions fortement magnétisées.

De plus, l'analyse des structures magnétiques reconstruites par le modèle dans la zone convective nous permet d'effectuer les observations suivantes [Pirot *et al.*, 2012] :

- Le champ magnétique se concentre localement sous la région active, et ce jusqu'au bas de la zone convective.
- Les lignes de champ magnétique émanant des régions de polarités magnétiques différentes se connectent dans la zone convective.
- La connexion des lignes de champ magnétique se fait sous la forme de boucles en Ω/U .

Bien que les observations précédentes présentent un certain réalisme physique, nous n'apportons pas la preuve que les boucles de champ magnétique reconstruites par notre modèle soient réelles.

Ce qui nous mène à nous intéresser au problème suivant :

Dans la zone convective, quelle est la topologie du champ magnétique soutenant une région magnétiquement active de la photosphère solaire ?

Afin de tenter de répondre à cette question, nous tentons de reconstruire les structures magnétiques situées sous une région magnétiquement active de la photosphère solaire selon une seconde approche.

5.2.2 Assimilation de cartes de température, de champ magnétique et de champ de vitesses photosphériques.

Nous utilisons des cartes de champ magnétique non saturé et de résolution spatiale la plus élevée possible (Fig.5.6, gauche), mais filtré (Fig.3.4), avec pour but de tenter la reconstruction des structures magnéto-convectives avec plus de détails (Fig.5.3). Notre modèle physique semble compatible avec les cartes de température et les cartes de la composante verticale des champs de vitesses observées (Fig.5.6, centre et droit). L'utilisation de ces données est nécessaire à la reconstruction optimale du champ magnétique car elles permettent de lever les sous-déterminations qui touchent le problème physique comme l'a montré [Fisher *et al.*, 2012]. Nous avons tenté d'assimiler ce type de données [Pirot *et al.*, 2011].

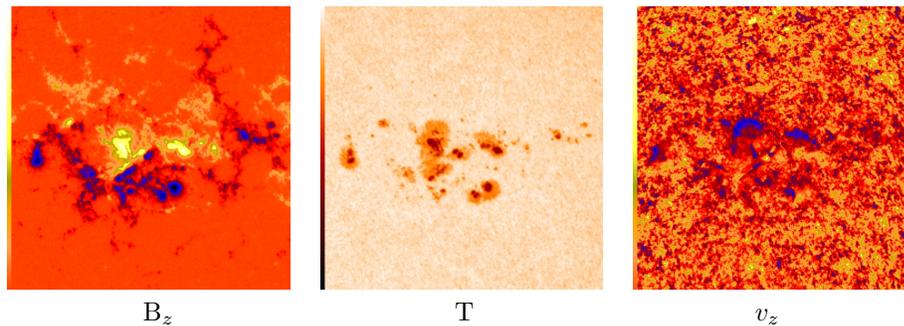


Figure 5.6 – Cartes acquises par SOHO/MDI à la résolution spatiale maximale (table 2.3.1) le 14 juillet 2000 à 09 :00 pour la région active AR9077. La largeur des cartes représente 175 Mm. Gauche : Carte de la composante verticale du champ magnétique B_z mesurée par effet Zeeman. Centre : Carte de température T . Droite : Carte de vitesses verticales v_z mesurée par décalage Doppler au centre du disque solaire et corrigée du profil de rotation moyen.

5.2.3 Structures convectives mises en évidence.

L'assimilation de données solaires concernant la température, le champ magnétique et le champ de vitesses de surface (Fig.5.7, en haut) permet d'effectuer les mêmes observations faites lors de l'assimilation seule de cartes du champ magnétique. Elle permet cependant d'en préciser la teneur, ainsi que d'en effectuer de nouvelles. L'analyse des cartes du champ magnétique, des champs de vitesses, des fluctuations locales de température ainsi que de la force de flottaison moyenne dans l'ensemble du domaine simulé à des profondeurs différentes (Fig.5.7), couvrant la quasi-totalité de la zone convective, permet de rendre compte des observations suivantes :

- D'intenses tubes de champs magnétiques essentiellement verticaux s'étendent jusque dans le bas de la zone convective.
- Ils émergent en surface en formant les régions de polarités magnétiques différentes constituant la région active (Fig.5.7, au centre à gauche).
- Ces tubes de champ magnétique prennent position dans les flux de masse descendants, en bordure directe des flux de masse ascendants (Fig.5.7, au centre à droite).
- Leur pression interne est plus faible et ils subissent une force de flottaison positive plus importante que celle appliquée au fluide environnant (Fig.5.7, à droite).
- Leur présence provoque une diminution du transport convectif d'énergie par les couches inférieures vers les couches supérieures ce qui se traduit par un refroidissement local (Fig.5.7, au centre).
- Ces tubes de champ magnétique subissent une force de flottaison dirigée vers l'extérieur de l'étoile.

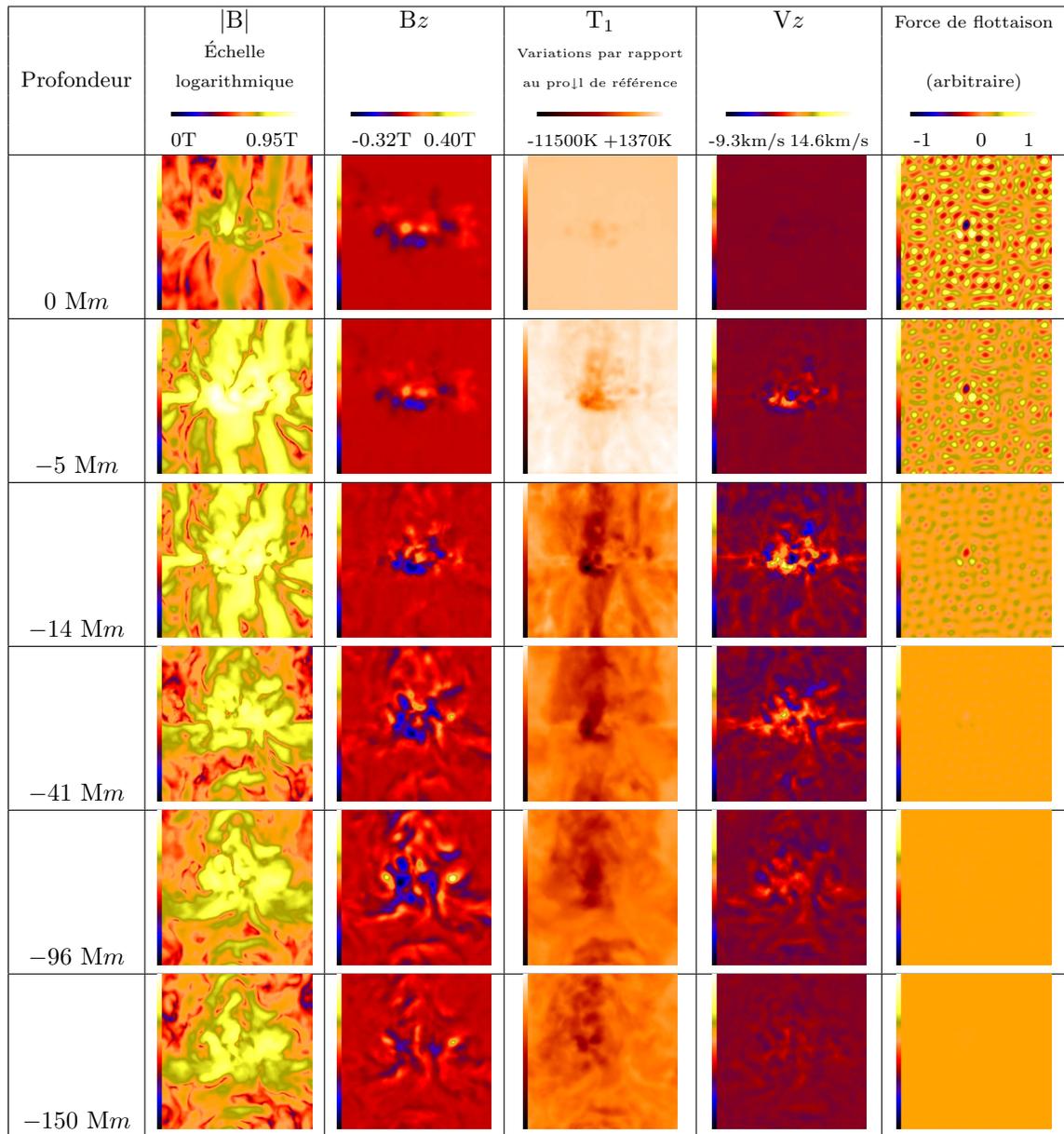


Figure 5.7 – Variation de l'état d'analyse avec la profondeur pour, de gauche à droite, le logarithme de l'amplitude du champ magnétique, la composante verticale du champ magnétique, la fluctuation locale de température, la composante verticale du champ de vitesse et la force de flottaison moyenne du fluide pour la région active AR9077, le 14 juillet 2000 à 09 :00. Ces résultats correspondent à une simulation pour laquelle les cartes de la composante verticale du champ magnétique, les cartes de fluctuations locales de température ainsi que les cartes de la composante verticale des champs de vitesse ont été assimilées au niveau $z = 0$ Mm. Les structures magnétiques composant le groupe de polarités magnétiques de surface s'étendent en profondeur jusque dans le bas de la zone convective non représentée ici. Les valeurs physiques des échelles sont calibrées à partir d'observations de surface.

La littérature nous informe sur la manière dont s'organisent les structures magnéto-convectives sous la surface solaire. Ainsi, les lignes de champs magnétiques émergent de la photosphère et se reconnectent dans la couronne solaire [Foukal, 2004]. La présence de flux de masse descendants sous les régions actives, détectés par héliosismologie [Duvall *et al.*, 1996], montrent que les régions

magnétiquement actives de la photosphère solaire sont soutenues par plusieurs tubes de champs magnétiques verticaux et non par un seul tube "monolithique" [Duvall *et al.*, 1996]. Ces tubes peuvent être ancrés dans le fond de la zone convective car les taches solaires se fixent à la surface solaire seulement quelques jours après leur émergence, ce qui correspond au temps d'Alfvén entre la surface et le bas de la zone convective [Moradi *et al.*, 2010]. Ils peuvent toutefois être ancrés ailleurs dans la zone convective bien que cela paraisse peu probable [Moradi *et al.*, 2010]. Des simulations de la formation de régions solaires actives au niveau photosphérique font état de la présence de boucles de champs magnétiques de forme Ω/U sous les régions de polarités magnétiques différentes [Cheung *et al.*, 2010].

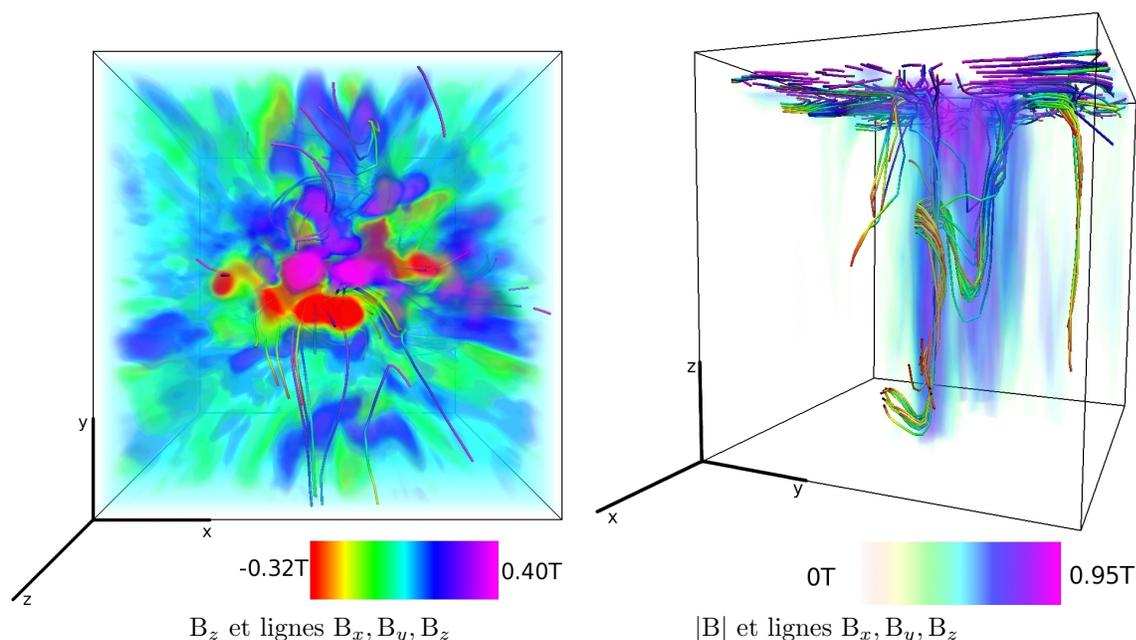


Figure 5.8 – Structures magnétiques de la zone convective solaire située sous la région active AR9077 le 14 juillet 2000 à 09 :00. La topologie du champ magnétique a été reconstruite par assimilation de cartes du champ magnétique vertical, du champ de vitesses verticales et de la température par l'algorithme du coup de coude direct et rétrograde régularisé. Gauche : Rendu volumique de l'intensité de la composante verticale du champ magnétique ainsi que de quelques lignes de champ magnétique à l'issue d'une simulation pour laquelle les composantes verticales du champ magnétique et du champ de vitesse, ainsi que les cartes de température de surface ont été assimilées. Vue de dessus. Les lignes de champ magnétique connectent les régions de polarités magnétiques différentes sous la surface de manière complexe. Droite : Rendu volumique de l'intensité du champ magnétique ainsi que de quelques lignes de champ magnétique pour la même simulation. Vue du coté droit. La connexion entre les régions de polarités magnétiques différentes se fait sous la forme de boucles en forme de U et s'étendent profondément dans la zone convective.

Le résultat de la reconstruction des structures magnéto-convectives sous une région magnétiquement active de la photosphère solaire par notre modèle est compatible avec les considérations précédentes. En effet, la reconstruction des structures magnétiques de la zone convective (Fig.5.8) nous permet d'effectuer les observations suivantes :

- Les lignes de champs magnétiques se connectent sous la surface solaire de manière complexe.
- Plusieurs tubes verticaux de champ magnétique soutiennent la région active en surface.

- Certains tubes verticaux de champ magnétique sont torsadés.
- Les tubes de champ magnétique coïncident avec des flux de masse descendants.
- Certains tubes de champ magnétique atteignent le bas de la zone convective et y sont éventuellement ancrés.
- Certains tubes de champs magnétiques forment des boucles en Ω/U en connectant les régions de polarités magnétiques différentes sous la surface.

Une simulation numérique directe de la zone convective solaire sans assimilation de données photosphériques ne permet pas de faire les observations précédentes. Ces dernières ont donc bien été introduites par la reconstruction effectuée par notre modèle.

5.2.4 Un système d'arcades pour le réseau magnétique.

Le champ magnétique présent dans la couronne solaire située juste au dessus de la région active AR9077 prend la forme d'un ressort [Fletcher et Hudson, 2001]. Ce système composé d'arches est visible dans l'ultraviolet extrême. Il repose sur les régions de polarités magnétiques différentes au niveau de la photosphère solaire [Fletcher et Hudson, 2001]. L'existence de boucles de champ magnétique en forme de U dans la zone convective en connexion avec la surface suggère que ce système pourrait trouver ses origines dans la zone convective (Fig.5.8).

Par ailleurs, l'étude détaillée des boucles de champ magnétique dans la zone convective indique que celles-ci sont torsadées (Fig.5.9, gauche). Les lignes de champs magnétiques torsadées se concentrent dans les zones fortement magnétisées (Fig.5.9, centre) et dans les flux de masses descendants, à l'interface des flux de masse ascendants (Fig.5.9, droit).

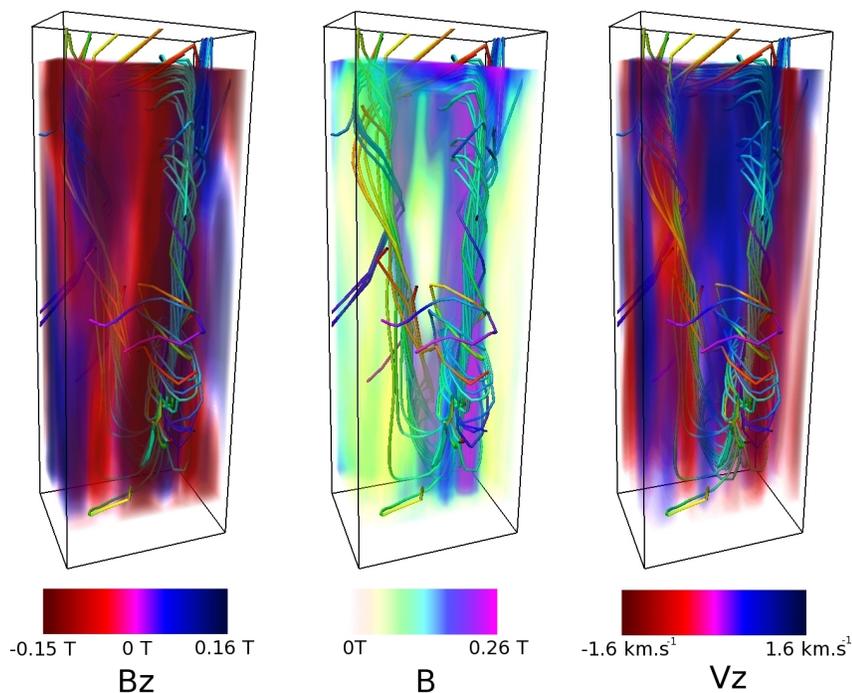


Figure 5.9 – Rendu volumique de quelques lignes de champ magnétique sous le voisinage d’une ligne neutre magnétique de la région active AR9077-20000714 à 09 :00. Gauche : Intensité de la composante verticale du champ magnétique. Les lignes de champ magnétique se rassemblent sous la forme d’un tube. Le tube de champ magnétique plonge jusque dans le bas de la zone convective (à gauche, en rouge) puis remonte vers la surface en formant une boucle (à droite, en bleu). Centre : Amplitude du champ magnétique. Les tubes de champ magnétique sont fortement torsadés. Droite : Intensité de la composante verticale du champ de vitesses. Les tubes de champ magnétique prennent place sur les bords des flux de masse descendants, en rouge, à proximité directe des flux de masse ascendants, en bleu.

La torsion des tubes de champ magnétique sur eux-mêmes permet d’éviter leur dislocation par les mouvements convectifs pendant l’émergence du bas de la zone convective jusqu’à la photosphère [Longcope *et al.*, 1996]. L’intensité du champ magnétique au sein du tube en est un autre facteur [Abbett *et al.*, 2001]. Les tubes de champ magnétique reconstruits dans la zone convective solaire se sont développés de manière spontanée. Ils ont développé une torsion sur eux-mêmes correspondant à d’importants gradients de champ magnétique, ce alors même que la régularisation Tykhonov imposée dans l’ensemble du domaine avait précisément pour but de diminuer les gradients du champ magnétique. Aucune contrainte tangentielle n’a été imposée en surface. Il semble que la torsion des tubes de champs magnétiques sur eux-mêmes ait joué un rôle dans le maintien de la cohérence des tubes par le modèle physique ce qui est intéressant du point de vue du problème physique de l’émergence des tubes de champs magnétiques.

5.3 Reconstruction des champs magnétiques et des champs de vitesses de surface.

Nous avons évalué, en surface, la compatibilité des cartes horizontales du champ magnétique, reconstruites en supposant l’hypothèse LFF, à celles reconstruites par notre modèle. Après assimi-

tion des composantes verticales du champ magnétique et des vitesses, ainsi que des températures de surface, nous comparons les cartes reconstruites à celles tirées de notre modèle physique (Fig.5.10).

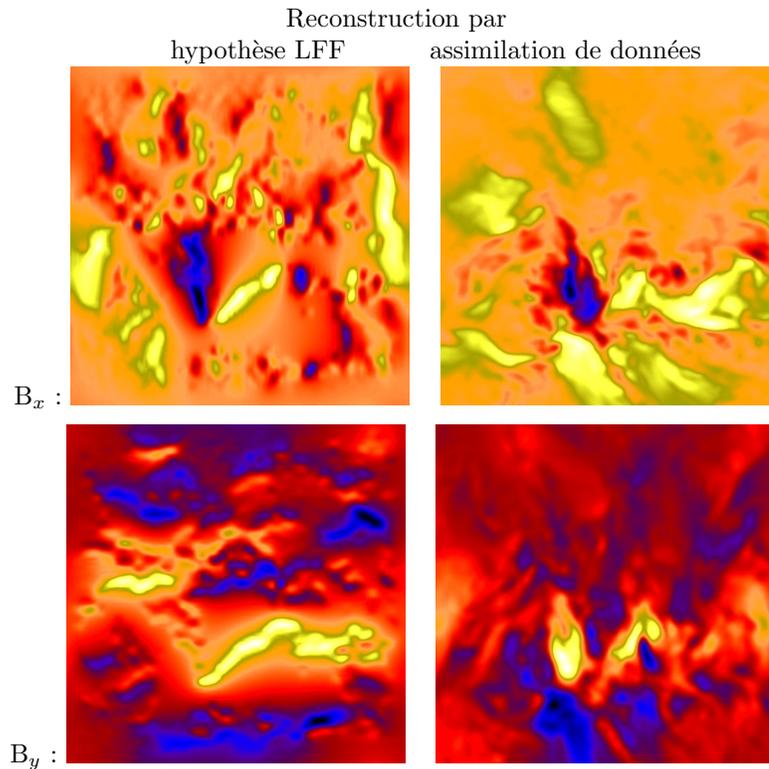


Figure 5.10 – Composantes horizontales du champ magnétique. Gauche : Cartes de champs magnétique B_x , B_y reconstruites à partir de la composante verticale du champ magnétique B_z (Fig. 5.4) en utilisant l’hypothèse LFF. Droite : Cartes de champ magnétique extraites au sommet du domaine de simulation dans laquelle les cartes des composantes horizontales du champ magnétique n’ont pas été assimilées. Les cartes présentent certaines similarités, ce qui suggère que l’hypothèse LFF est acceptable à des niveaux proches de la photosphère dans le cadre d’un traitement par un modèle de convection anélastique.

L’hypothèse LFF est utile car elle permet, dans des cas simples, la reconstruction du champ magnétique coronal à partir d’observations photosphériques [Sakurai, 1981]. Une variante plus sophistiquée : ”non-linéaire à force magnétique nulle” permet une reconstruction partielle des champs magnétiques dans la basse couronne solaire [De Rosa *et al.*, 2009]. Nos résultats semblent suggérer que l’hypothèse ”sans forces linéaire” est compatible avec un modèle de convection anélastique, sous régularisation, dans le sommet de la zone convective, en l’absence de radiation. Nous avons également vérifié la compatibilité des champs de vitesse horizontaux de surface de notre modèle physique (Fig.5.11, bas) avec des champs de vitesse horizontaux reconstruits d’après des observations (Fig.5.11, haut).

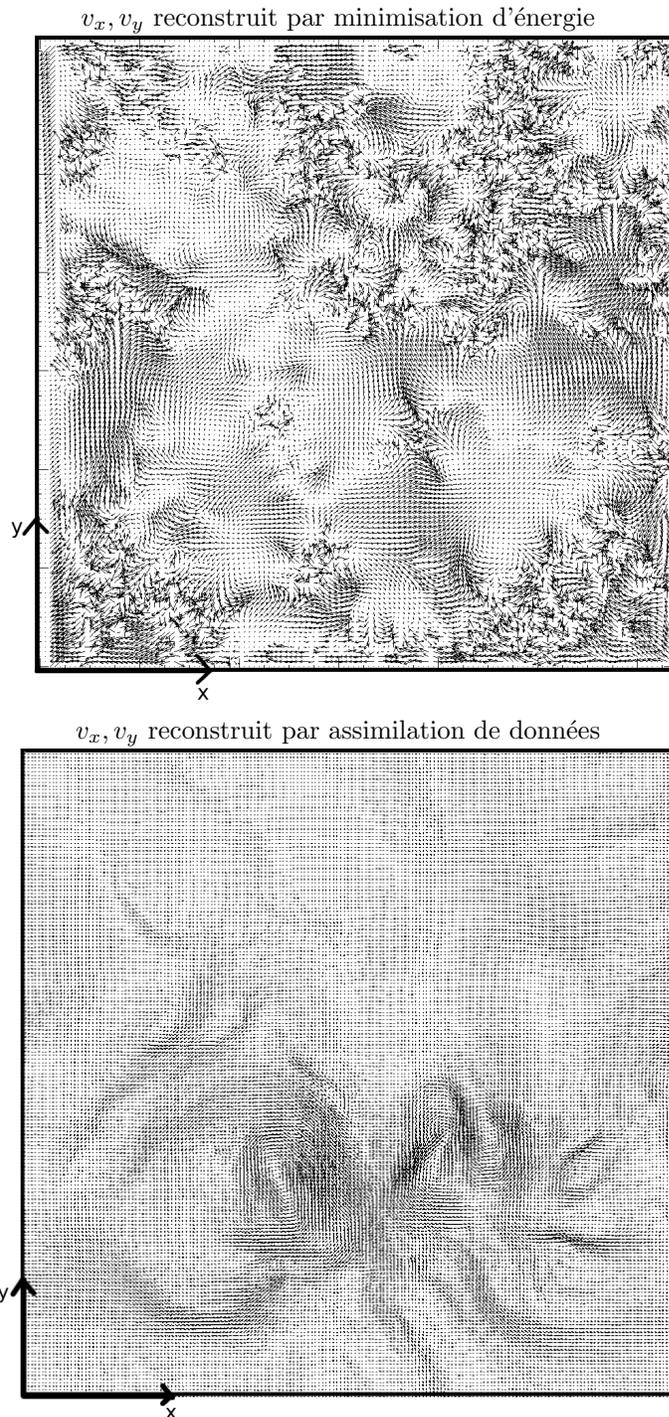


Figure 5.11 – Haut : Champs des vitesses horizontales au niveau de la photosphère solaire pour la région active AR9077-20000714 reconstruite à partir de cartes du champ magnétique vectoriel par une méthode minimisation de l'énergie [Vincent *et al.*, 2012]. Bas : Champ de vitesses pour la même région issus de nos simulations. La carte du haut illustre un flux de masse horizontal divergent par rapport à la ligne neutre magnétique. La carte du bas ne présente pas une telle structure mais fait apparaître une succession de lignes de vorticité le long de la ligne neutre magnétique. Ces différences sont attendues car chaque carte correspond à une profondeur différente : au niveau photosphérique, en haut, et au sommet de la zone convective, en bas.

Ces champs ont été obtenus par une technique de minimisation de l'énergie [Longcope, 2004] pour la même région active solaire : AR9077-20000714 [Vincent *et al.*, 2012]. La carte des champs de vitesses horizontales extraites de nos simulations présente des différences importantes avec la carte reconstruite par la technique de minimisation de l'énergie comme la présence d'un flux de masse ascendant et divergeant au niveau de la ligne neutre magnétique tandis que la carte générée à l'aide du modèle de convection anélastique indique la présence d'importants tourbillons le long de cette même ligne. Les deux cartes présentent également des similarités : la présence de mouvements d'ensemble dans les régions magnétisées, ainsi que l'absence de mouvements d'ensemble dans les régions moins magnétisées. Les différences observées peuvent s'expliquer par le fait que la carte générée par minimisation de l'énergie représente le champ des vitesses horizontales au niveau de la photosphère tandis que l'autre carte représente cette même grandeur au niveau du sommet de la zone convective. Ceci montre que notre modèle n'est pas idéal et qu'il ne permet pas de reproduire la photosphère solaire avec fidélité, ce qui était attendu. Les tourbillons observables sur la figure (Fig.5.11, bas) sont en fait des lignes verticales de vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$, où $\boldsymbol{\omega}$ est la vorticité. Ces lignes de vorticité co cident avec les régions fortement magn tis es (Fig.5.12, centre), le long de la ligne neutre magnétique (Fig.5.12, gauche).

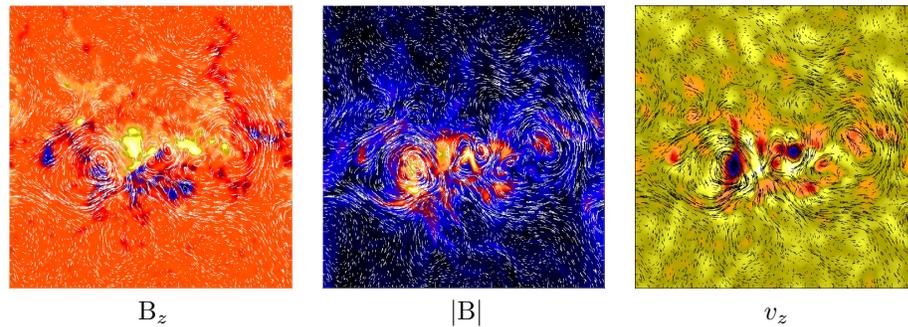


Figure 5.12 – Cartes des champs de vitesse horizontaux au sommet du domaine de simulation. Gauche : carte de la composante verticale du champ magnétique. Les lignes de vorticité sont situ es le long de la ligne neutre magnétique. Centre : Carte de l'amplitude du champ magnétique. Les lignes de vorticité ont tendance à s'aligner avec les régions plus fortement magn tis es. Les écoulements horizontaux ont tendance à contourner les tubes de champs magnétiques présents en surface. Droite : carte de la composante verticale du champ de vitesses. Le fluide magnétisé s'écoule sous la forme de plusieurs vortex le long de la ligne neutre magnétique. Ces vortex pourraient être liés au processus "d'effondrement convectif".

A cause de la force de Lorentz, les écoulements fluides horizontaux doivent contourner les tubes de champ magnétique. L'effondrement convectif associé à la présence de champs magnétiques intenses conduit à la présence de flux de masse descendants de grande amplitude (Fig.5.12, droit). La présence d'une ligne de vorticité et d'un flux de masse descendant indique l'existence d'un écoulement en forme de siphon (Fig.5.13).

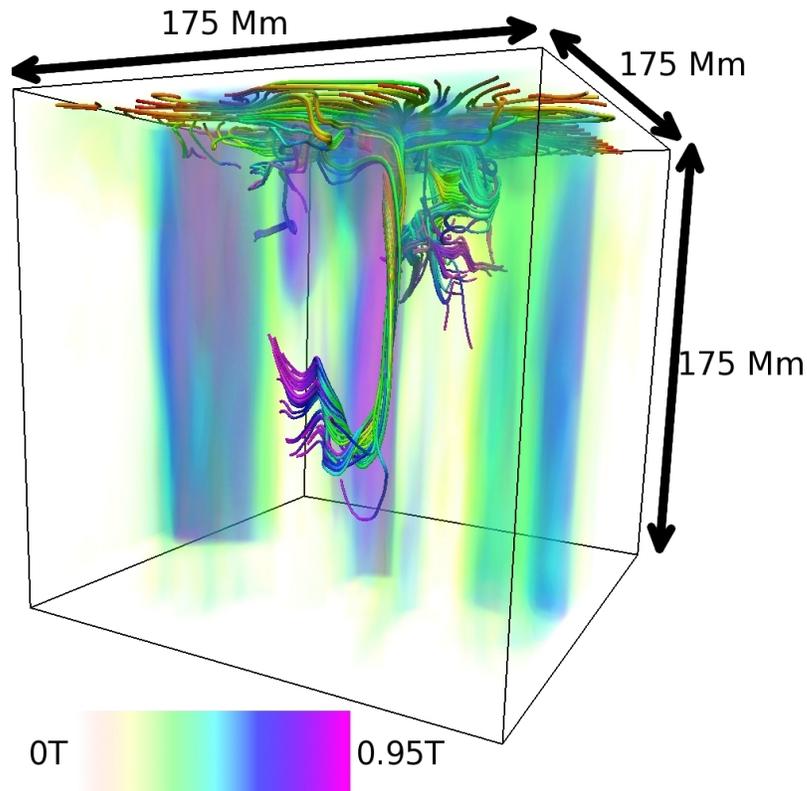


Figure 5.13 – Rendu volumique de l'intensité du champ magnétique ainsi que de quelques lignes issues du champ de vitesse. Les lignes du champ de vitesse ont été intégrées à partir de points régulièrement espacés au sommet du domaine de simulation. Au centre du domaine, une ligne de vorticité coincide avec un tube de champ magnétique intense. Cet écoulement pourrait induire une torsion du tube de champ magnétique avec lequel il est aligné (Fig.5.9).

5.4 Interpolation et prédiction des cartes de champ magnétique photosphérique.

Dès que les contraintes de surface li es à l'utilisation de la méthode DBFN cessent, l'état prédit et l'état vrai du système physique se mettent à diverger (Fig.5.14). Ceci peut s'expliquer par la forte dépendance du système à ses conditions initiales. Le modèle physique étant à la fois turbulent et non linéaire, un écart même minime entre l'état prédit et l'état vrai croit rapidement dans le temps, ce qui cause la divergence.

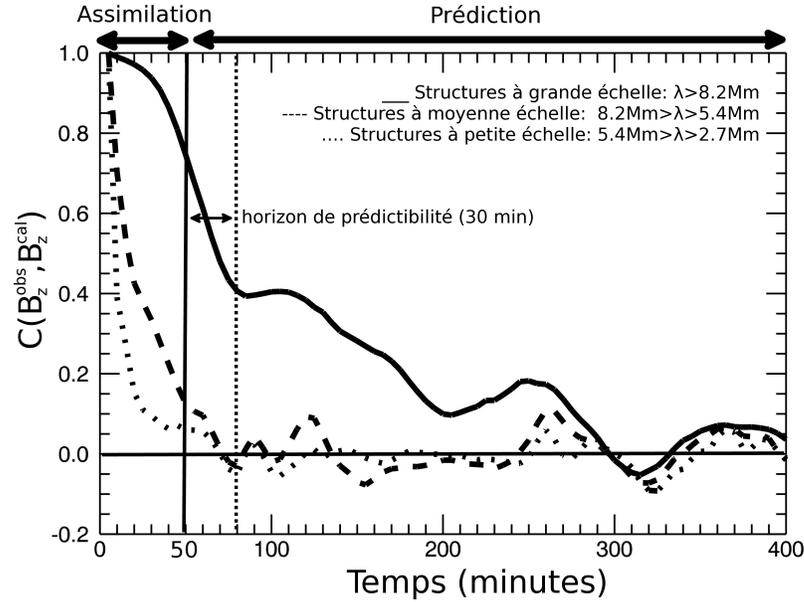


Figure 5.14 – Coefficient de corrélation entre le magnétogramme simulé B_z^{cal} et le magnétogramme vrai B_z^{obs} pour une simulation directe, après convergence de la méthode DBFN. Le modèle physique permet l’interpolation temporelle pour les structures magnétiques de grande échelle, en trait plein, dans la fenêtre d’assimilation. L’interpolation des structures d’échelle moyenne, en trait tirés, et de petite échelle, en trait pointillé ne semble pas possible dans la fenêtre d’assimilation. Une prédiction semble possible pour les structures magnétiques de grande échelle. L’horizon de prédictibilité est estimé à 30 minutes.

D’un point de vue énergétique, le système "relaxe" dès que les contraintes sont supprimées (Fig.5.15). Il tend à retourner vers l’état énergétique qu’il possédait au départ, avant la phase d’assimilation de données (Fig.5.15). Le champ magnétique soutenant la région active diffuse rapidement car les nombres de Reynolds et de Reynolds magnétique ne sont pas assez élevés. Mais surtout, les tubes de champs magnétiques de polarités opposées sont advectés par la granulation, ce qui occasionne des annulations de flux. Peut-être une simulation sur un temps plus long aurait permis d’introduire suffisamment d’énergie magnétique pour que les tubes de champ magnétique verticaux dépassent l’équipartition. Ceci aurait permis un blocage partiel de la convection à proximité de la surface et aurait potentiellement limité la désagrégation de la région active.

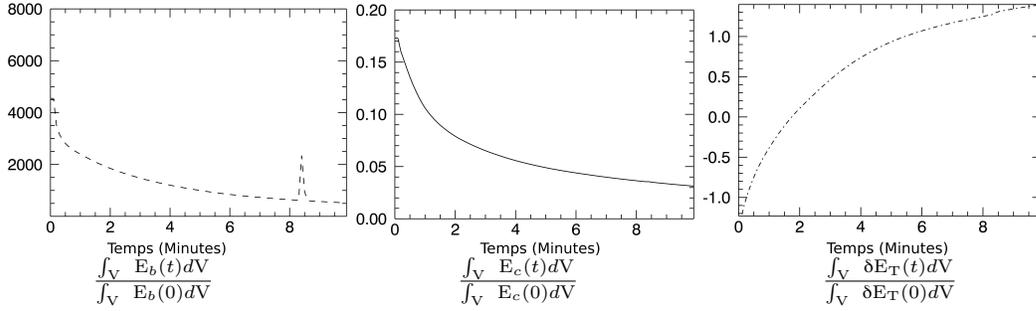


Figure 5.15 – Gauche : Évolution de l'énergie magnétique du système au cours d'une simulation numérique directe prenant comme condition initiale l'état d'analyse obtenu après assimilation de données. le système tend à relaxer vers son état de départ. Centre : Évolution de l'énergie cinétique du système. La dissipation du champ magnétique dans le domaine semble ralentir le fluide. Droite : Évolution de la variation d'énergie thermique. le système prélève de l'énergie magnétique et cinétique via les termes de dissipation Ohmique et visqueuse afin de s'échauffer et atteindre son état d'équilibre thermique.

Par ailleurs, les tubes de champs magnétiques torsadés apparus dans les simulations numériques commencent à se déployer dès que cessent les contraintes de surface (Fig.5.16) comme s'ils étaient "tenus" en surface par des contraintes tangentielles.

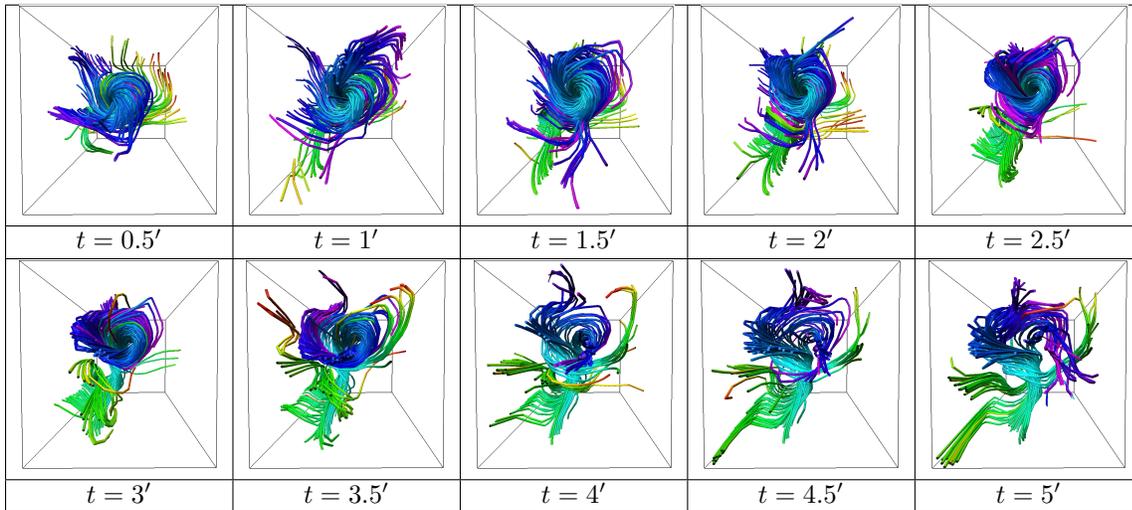


Figure 5.16 – Déploiement d'un tube de champ magnétique torsadé situé sous une région magnétiquement active après suppression des contraintes de surface. Le tube de champ magnétique se déploie en quelques minutes seulement. L'énergie magnétique associée à la torsion du tube se dissipe rapidement dans le milieu ambiant.

Les contraintes sur les champs magnétiques et sur les champs de vitesses imposées en surface par la méthode DBFN sont uniquement verticales. Nous avons toutefois montré que notre modèle physique induisait une contrainte tangentielle pour le champ magnétique proche d'une contrainte LFF (Fig.5.10). La suppression des contraintes de surface pourrait mener au déploiement des tubes de champs magnétiques soutenant la région active de surface. Les tubes perdraient ainsi leur cohérence, ce qui conduirait à la désagrégation de la région active.

La présence de phénomènes physiques caractérisant le comportement de la photosphère solaire

tels que la radiation, la présence de contraintes tangentielles magnétiques voir l'existence d'une dynamo locale de surface ou bien d'une compressibilité semble nécessaire à la reconstruction optimale des structures magnéto-convectives soutenant une région magnétiquement active. Sans ces considérations physiques, le modèle utilisé ne semble pas être en mesure d'effectuer une prédiction des magnétogrammes de surface sur le long terme. Il permet toutefois, dans une certaine mesure, l'interpolation optimale temporelle des structures magnétiques à grande échelle (Fig.5.14).

CHAPITRE 6

CONCLUSION

L'algorithme du coup de coude direct et rétrograde est une méthode d'assimilation de données très simple à mettre en œuvre qui ne nécessite pas l'inversion du problème physique que l'on tente de résoudre. À ce titre elle présente un certain intérêt vis à vis de la résolution de problèmes non-linéaires. Nous avons tenté de l'appliquer au problème de la reconstruction de la zone convective solaire. Il s'agit d'un problème peu contraint car il n'existe que peu de grandeurs physiques observables en dessous de la photosphère solaire. Afin de lever les sous-déterminations liées au manque d'informations sub-surfaciques, nous avons tenté d'évaluer l'effet de la mise en place d'une régularisation de Tykhonov dans l'ensemble du domaine. Les données observationnelles dont nous disposons étant cadencées dans le temps, nous souhaitons étudier la possibilité d'une interpolation en temps optimale d'une séquence de cartes de champs magnétiques photosphériques. Nous souhaitons également savoir si le modèle physique employé permettait ou non d'effectuer une prédiction, notre objectif étant la prédiction avec un horizon de prédictibilité de trois heures. Finalement, nous souhaitons déterminer si le modèle anélastique permettait l'assimilation de données solaires et s'il permettait ou non la reconstruction des grandeurs physiques n'ayant pas été assimilées, en surface comme dans l'intégralité de la zone convective.

Un test numérique simple nous a permis d'évaluer l'efficacité de l'algorithme du coup de coude ainsi que de la régularisation de Tykhonov quand à la reconstruction de l'intérieur solaire à partir d'observations de surface. Nous avons ainsi testé la compatibilité d'un modèle de convection anélastique avec la méthode d'assimilation du coup de coude. Le modèle permet l'interpolation optimale, ainsi que la prédiction des structures magnétiques de grandes échelles avec un horizon de prédictibilité de 30 minutes, mais ne permet pas la prédiction des structures magnétiques de petite échelle. Le lissage effectué par le logiciel ANMHD pourrait être responsable de la destruction des structures de moyennes échelles spatiales reconstruites. L'assimilation de données par l'algorithme du coup de coude a permis la reconstruction de grandeurs physiques non assimilées en surface telles que les champs magnétiques et les champs de vitesses horizontaux, la force de flottaison, ou bien les perturbations de pression, dans toute la zone convective ainsi qu'en surface. Elle a également permis de faire apparaître des structures magnéto-convectives soutenant une région magnétiquement active de la photosphère solaire. Même si nous n'apportons pas la preuve que ces structures soient réelles, elles rassemblent de nombreuses caractéristiques de la magnéto-convection solaire observées dans des simulations numériques réalistes. Ces structures magnétiques prennent la forme de boucles de champ magnétique en U connectant sous la surface les régions de polarités magnétiques différentes. Ces boucles de champ magnétique ont développé sur elles-mêmes une torsion qui n'a pas été introduite de manière explicite dans le modèle, ce qui est un résultat surprenant mais

compatible avec les modèles d'émergence des tubes de champ magnétique dans la zone convective solaire.

L'algorithme du coup de coude direct et rétrograde semble permettre la reconstruction de la zone convective solaire. La convergence de la méthode est lente, elle nécessite plusieurs intégrations directes / rétrogrades successives, ainsi qu'une régularisation, mais sa simplicité d'implantation est un atout indéniable pour la résolution d'un tel problème.

Il serait intéressant, dans un travail futur, de tenter la reconstruction de la zone convective par une méthode optimale comme celle de la famille des 4D-Var. La topologie des structures magnéto-convectives reconstruites pourrait alors être comparée à celles reconstruites par la méthode du coup de coude, afin d'estimer la qualité de la reconstruction. Enfin, il pourrait être utile de faire se propager des ondes acoustiques au travers des structures reconstruites du bas de la zone convective jusqu'au sommet, dans un modèle entièrement compressible, afin de comparer les dopplergrammes obtenus à ceux observés. Ce test permettrait de valider la topologie des structures reconstruites et donc la méthode employée. Dernièrement, l'utilisation de la méthode du coup de coude de manière conjointe à un modèle physique compressible incluant le sommet de la zone convective ainsi que la photosphère solaire faciliterait peut-être l'assimilation des données solaires. Ceci permettrait éventuellement de reconstruire avec plus de finesse la topologie des structures magnéto-convectives soutenant une région active juste en-dessous de la photosphère solaire. Une augmentation de la résolution numérique permettrait de limiter les effets de lissage introduits par le logiciel ANMHD. L'horizon de prédictibilité des cartes de champ magnétique au niveau photosphérique pourrait ainsi être repoussé.

BIBLIOGRAPHIE

- W. P. Abbett. The Magnetic Connection between the Convection Zone and Corona in the Quiet Sun. *ApJ*, 665:1469–1488, août 2007.
- W. P. Abbett, G. H. Fisher et Y. Fan. The Three-dimensional Evolution of Rising, Twisted Magnetic Flux Tubes in a Gravitationally Stratified Model Convection Zone. *ApJ*, 540:548–562, septembre 2000.
- W. P. Abbett, G. H. Fisher et Y. Fan. The Effects of Rotation on the Evolution of Rising Omega Loops in a Stratified Model Convection Zone. *ApJ*, 546:1194–1203, janvier 2001.
- D. Auroux, P. Bansart et J. Blum. An easy-to-implement and efficient data assimilation method for the identification of the initial condition : the back and forth nudging (bfm) algorithm. Dans *Proc. Int. Conf. Inverse Problems in Engineering*, volume 135. J. Phys. : Conf. Ser., 2008.
- D. Auroux et J. Blum. A nudging-based data assimilation method : the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15:305–319, mars 2008.
- D. Auroux, J. Blum et M. Nodet. Diffusive Back and Forth Nudging algorithm for data assimilation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 349(15-16):849–854, 2011.
- D. Auroux et M. Nodet. The back and forth nudging algorithm for data assimilation problems : theoretical results on transport equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2011. Published online.
- J. N. Bahcall et M. H. Pinsonneault. What Do We (Not) Know Theoretically about Solar Neutrino Fluxes? *Physical Review Letters*, 92(12):121301, mars 2004.
- G. K. Batchelor. The conditions for dynamical similarity of motions of a frictionless perfect-gas atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 79:224–235, avril 1953.
- N. Bello González, L. Yelles Chaouche, O. Okunev et F. Kneer. Dynamics of small-scale magnetic fields on the Sun : observations and numerical simulations. *A&A*, 494:1091–1106, février 2009.
- D. J. Bercik. *A numerical investigation of the interaction between convection and magnetic field in a solar surface layer*. Thèse de doctorat, MICHIGAN STATE UNIVERSITY, 2002.
- L. Biermann. Konvektion im Innern der Sterne (II). *Astronomische Nachrichten*, 264:361, janvier 1938.
- F. Bouttier et P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. *Meteorological Training Course Lecture Series of ECMWF*, 1999.
- A. S. Brun, M. S. Miesch et J. Toomre. Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope. *ApJ*, 614:1073–1098, octobre 2004.

- P. J. Bushby, S. M. Houghton, M. R. E. Proctor et N. O. Weiss. Convective intensification of magnetic fields in the quiet Sun. *MNRAS*, 387:698–706, juin 2008.
- M. Carlsson, V. H. Hansteen et B. V. Gudiksen. Chromospheric heating and structure as determined from high resolution 3D simulations. *Mem. Soc. Astron. Italiana*, 81:582, 2010.
- F. Cattaneo. On the Origin of Magnetic Fields in the Quiet Photosphere. *ApJ*, 515:L39–L42, avril 1999.
- R. Centeno, H. Socas-Navarro, B. Lites, M. Kubo, Z. Frank, R. Shine, T. Tarbell, A. Title, K. Ichimoto, S. Tsuneta, Y. Katsukawa, Y. Suematsu, T. Shimizu et S. Nagata. Emergence of Small-Scale Magnetic Loops in the Quiet-Sun Internetwork. *ApJ*, 666:L137–L140, septembre 2007.
- S. Chandrasekhar. The Stability of Spiral Flow Between Rotating Cylinders. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 265:188–197, janvier 1962.
- M. C. M. Cheung, M. Rempel, A. M. Title et M. Schüssler. Simulation of the Formation of a Solar Active Region. *ApJ*, 720:233–244, septembre 2010.
- M. C. M. Cheung, M. Schüssler et F. Moreno-Insertis. Magnetic flux emergence in granular convection : radiative MHD simulations and observational signatures. *A&A*, 467:703–719, mai 2007.
- M. C. M. Cheung, M. Schüssler, T. D. Tarbell et A. M. Title. Solar Surface Emerging Flux Regions : A Comparative Study of Radiative MHD Modeling and Hinode SOT Observations. *ApJ*, 687:1373–1387, novembre 2008.
- P. Courtier, E. Andersson, W. Heckley, J. Pailleux, D. Vasiljevic, M. Hamrud, A. Hollingsworth, F. Rabier et M. Fisher. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). I : Formulation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 124:1783–1807, juillet 1998.
- R. Daley. *Atmospheric Data Analysis*. novembre 1993.
- S. Danilovic, B. Beeck, A. Pietarila, M. Schüssler, S. K. Solanki, V. Martínez Pillet, J. A. Bonnet, J. C. del Toro Iniesta, V. Domingo, P. Barthol, T. Berkefeld, A. Gandorfer, M. Knölker, W. Schmidt et A. M. Title. Transverse Component of the Magnetic Field in the Solar Photosphere Observed by SUNRISE. *ApJ*, 723:L149–L153, novembre 2010.
- P. A. Davidson. *An introduction to magnetohydrodynamics*. 2001.
- M. L. De Rosa, C. J. Schrijver, G. Barnes, K. D. Leka, B. W. Lites, M. J. Aschwanden, T. Amari, A. Canou, J. M. McTiernan, S. Régnier, J. K. Thalmann, G. Valori, M. S. Wheatland, T. Wiegelmann, M. C. M. Cheung, P. A. Conlon, M. Fuhrmann, B. Inhester et T. Tadesse. A Critical Assessment of Nonlinear Force-Free Field Modeling of the Solar Corona for Active Region 10953. *ApJ*, 696:1780–1791, mai 2009.

- A. G. de Wijn, J. O. Stenflo, S. K. Solanki et S. Tsuneta. Small-Scale Solar Magnetic Fields. *Space Sci. Rev.*, 144:275–315, avril 2009.
- T. L. Duvall, S. D’Silva, S. M. Jefferies, J. W. Harvey et J. Schou. Downflows under sunspots detected by helioseismic tomography. *Nature*, 379:235–237, janvier 1996.
- T. Emonet et F. Cattaneo. Small-Scale Photospheric Fields : Observational Evidence and Numerical Simulations. *ApJ*, 560:L197–L200, octobre 2001.
- Y. Fan. Magnetic Fields in the Solar Convection Zone. *Living Reviews in Solar Physics*, 6:4, décembre 2009.
- Y. Fan, W. P. Abbett et G. H. Fisher. The Dynamic Evolution of Twisted Magnetic Flux Tubes in a Three-dimensional Convecting Flow. I. Uniformly Buoyant Horizontal Tubes. *ApJ*, 582:1206–1219, janvier 2003.
- Y. Fan, E. G. Zweibel, M. G. Linton et G. H. Fisher. The Rise of Kink-unstable Magnetic Flux Tubes and the Origin of delta-Configuration Sunspots. *ApJ*, 521:460–477, août 1999.
- G. H. Fisher, B. T. Welsch et W. P. Abbett. Can We Determine Electric Fields and Poynting Fluxes from Vector Magnetograms and Doppler Measurements? *Sol. Phys.*, 277:153–163, mars 2012.
- L. Fletcher et H. Hudson. The Magnetic Structure and Generation of EUV Flare Ribbons. *Sol. Phys.*, 204:69–89, décembre 2001.
- P. V. Foukal. *Solar Astrophysics, 2nd, Revised Edition*. 2004.
- J. Fröhlich. *Résolution Numérique des Equations de Navier-Stokes à Faible Nombre de Mach par Méthode Spectrale*. Thèse de doctorat, Département de Mathématiques, Université de Nice, Sophia-Antipolis, 1990.
- L. Gizon et A. C. Birch. Local Helioseismology. *Living Reviews in Solar Physics*, 2:6, novembre 2005.
- D. O. Gough. The Anelastic Approximation for Thermal Convection. *Journal of Atmospheric Sciences*, 26:448–456, mai 1969.
- U. Grossmann-Doerth, M. Schuessler et O. Steiner. Convective intensification of solar surface magnetic fields : results of numerical experiments. *A&A*, 337:928–939, septembre 1998.
- V. H. Hansteen, M. Carlsson et B. Gudiksen. 3D Numerical Models of the Chromosphere, Transition Region, and Corona. Dans P. Heinzel, I. Dorotovic, & R. J. Rutten, éditeur, *The Physics of Chromospheric Plasmas*, volume 368 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 107, mai 2007.

- D. H. Hathaway. The Solar Cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, 7:1, mars 2010.
- N. E. Hurlburt et A. M. Rucklidge. Development of structure in pores and sunspots : flows around axisymmetric magnetic flux tubes. *MNRAS*, 314:793–806, juin 2000.
- R. Ishikawa et S. Tsuneta. Comparison of transient horizontal magnetic fields in a plage region and in the quiet Sun. *A&A*, 495:607–612, février 2009.
- R. Ishikawa, S. Tsuneta et J. Jurčák. Three-Dimensional View of Transient Horizontal Magnetic Fields in the Photosphere. *ApJ*, 713:1310–1321, avril 2010.
- L. Jacoutot, A. G. Kosovichev, A. Wray et N. N. Mansour. Realistic Numerical Simulations of Solar Convection and Oscillations in Magnetic Regions. *ApJ*, 684:L51–L54, septembre 2008.
- Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, 1960.
- E. Kalnay, H. Li, T. Miyoshi, S.-C. Yang et J. Ballabrera-Poy. 4-D-Var or ensemble Kalman filter ? *Tellus Series A*, 59:758–773, octobre 2007.
- E. Kalnay, S. K. Park, Z.-X. Pu et J. Gao. Application of the Quasi-Inverse Method to Data Assimilation. *Monthly Weather Review*, 128:864, 2000.
- I. N. Kitiashvili et A. G. Kosovichev. Prediction of solar activity cycles by assimilating sunspot data into a dynamo model. Dans A. G. Kosovichev, A. H. Andrei, & J.-P. Roelot, éditeur, *IAU Symposium*, volume 264 de *IAU Symposium*, pages 202–209, février 2010.
- I. N. Kitiashvili, A. G. Kosovichev, N. N. Mansour et A. A. Wray. Numerical MHD Simulations of Solar Magnetoconvection and Oscillations in Inclined Magnetic Field Regions. *Sol. Phys.*, 268: 283–291, février 2011.
- A. N. Kolmogorov. Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 434:15–17, juillet 1941.
- B. J. LaBonte, D. L. Mickey et K. D. Leka. The Imaging Vector Magnetograph at Haleakalā - II. Reconstruction of Stokes Spectra. *Sol. Phys.*, 189:1–24, octobre 1999.
- S. R. Lantz et Y. Fan. Anelastic Magnetohydrodynamic Equations for Modeling Solar and Stellar Convection Zones. *ApJS*, 121:247–264, mars 1999.
- D. W. Longcope. Inferring a Photospheric Velocity Field from a Sequence of Vector Magnetograms : The Minimum Energy Fit. *ApJ*, 612:1181–1192, septembre 2004.
- D. W. Longcope, G. H. Fisher et S. Arendt. The Evolution and Fragmentation of Rising Magnetic Flux Tubes. *ApJ*, 464:999, juin 1996.

- M. J. Martínez González et L. R. Bellot Rubio. Emergence of Small-scale Magnetic Loops Through the Quiet Solar Atmosphere. *ApJ*, 700:1391–1403, août 2009.
- M. S. Miesch. Large-Scale Dynamics of the Convection Zone and Tachocline. *Living Reviews in Solar Physics*, 2:1, avril 2005.
- H. Moradi, C. Baldner, A. C. Birch, D. C. Braun, R. H. Cameron, T. L. Duvall, L. Gizon, D. Haber, S. M. Hanasoge, B. W. Hindman, J. Jackiewicz, E. Khomenko, R. Komm, P. Rajaguru, M. Rempel, M. Roth, R. Schlichenmaier, H. Schunker, H. C. Spruit, K. G. Strassmeier, M. J. Thompson et S. Zharkov. Modeling the Subsurface Structure of Sunspots. *Sol. Phys.*, 267:1–62, novembre 2010.
- D. J. Mullan. *Physics of the Sun : A First Course*. Taylor and Francis. ISBN 978-142-008-307-1. 2009.
- D. J. Mullan, J. MacDonald et R. H. D. Townsend. Magnetic Cycles in the Sun : Modeling the Changes in Radius, Luminosity, and p-Mode Frequencies. *ApJ*, 670:1420–1433, décembre 2007.
- Å. Nordlund, R. F. Stein et M. Asplund. Solar Surface Convection. *Living Reviews in Solar Physics*, 6:2, avril 2009.
- Å. Nordlund. Numerical simulations of the solar granulation. I - Basic equations and methods. *A&A*, 107:1–10, mars 1982.
- Y. Ogura et N. A. Phillips. Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, 19:173–179, mars 1962.
- E. N. Parker. Hydraulic concentration of magnetic fields in the solar photosphere. VI - Adiabatic cooling and concentration in downdrafts. *ApJ*, 221:368–377, avril 1978.
- D. Pirot, J. Gaudet et A. Vincent. On the Reconstruction of the Convection Pattern Below an Active Region of Solar Corona. *Journal of Physics Conference Series*, 341(1):012005, février 2012.
- D. Pirot, A. P. Vincent, P. Charbonneau et Solar Physics Research Group of University of Montreal. Using data assimilation to reconstruct convection patterns below an active region of solar corona from observed magnetograms. *AGU Fall Meeting Abstracts*, page A7, décembre 2011.
- L. Prandtl. *Z. angew. Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 5:136–139, 1925.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery. *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. 1992.
- M. Rieutord et F. Rincon. The Sun's Supergranulation. *Living Reviews in Solar Physics*, 7:2, juin 2010.

- T. R. Rimmele et J. Marino. Solar Adaptive Optics. *Living Reviews in Solar Physics*, 8:2, juin 2011.
- T. Sakurai. Calculation of force-free magnetic field with non-constant α . *Sol. Phys.*, 69:343–359, février 1981.
- P. H. Scherrer, R. S. Bogart, R. I. Bush, J. T. Hoeksema, A. G. Kosovichev, J. Schou, W. Rosenberg, L. Springer, T. D. Tarbell, A. Title, C. J. Wolfson, I. Zayer et MDI Engineering Team. The Solar Oscillations Investigation - Michelson Doppler Imager. *Sol. Phys.*, 162:129–188, décembre 1995.
- M. Schüssler et A. Vögler. Strong horizontal photospheric magnetic field in a surface dynamo simulation. *A&A*, 481:L5–L8, avril 2008.
- K. Schwarzschild. On the equilibrium of the Sun's atmosphere. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse*, 195, p. 41-53, 195:41–53, 1906.
- K. Schwarzschild et H.-H. Voigt. *Gesammelte Werke / Collected Works*. 1992.
- J. Skilling et R. K. Bryan. Maximum Entropy Image Reconstruction - General Algorithm. *MNRAS*, 211:111, novembre 1984.
- H. C. Spruit. Convective collapse of flux tubes. *Sol. Phys.*, 61:363–378, mars 1979.
- H. C. Spruit et E. G. Zweibel. Convective instability of thin flux tubes. *Sol. Phys.*, 62:15–22, mai 1979.
- R. F. Stein. Magneto-convection. *Article submitted to Royal Society*, 2011.
- R. F. Stein, A. Lagerfjärd, Å. Nordlund et D. Georgobiani. Emerging Flux Simulations and Proto-Active Regions. *ArXiv e-prints*, février 2011.
- R. F. Stein, A. Lagerfjärd, Å. Nordlund et D. Georgobiani. Supergranule Scale Flux Emergence Simulations. Dans *American Astronomical Society Meeting Abstracts #216*, volume 216 de *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 211.03, mai 2010.
- R. F. Stein et Å. Nordlund. Solar Small-Scale Magnetoconvection. *ApJ*, 642:1246–1255, mai 2006.
- R. F. Stein et Å. Nordlund. Simulations of Solar Granulation. I. General Properties. *ApJ*, 499: 914, mai 1998.
- M. Stix. *The sun : an introduction*. 2002.
- A. M. Title, T. D. Tarbell, K. P. Topka, S. H. Ferguson, R. A. Shine et SOUP Team. Statistical properties of solar granulation derived from the SOUP instrument on Spacelab 2. *ApJ*, 336: 475–494, janvier 1989.

- A. Vincent, P. Charbonneau et C. Dubé. Numerical Simulation of a Solar Active Region. I : Bastille Day Flare. *Sol. Phys.*, page 52, mars 2012.
- A. Vögler, S. Shelyag, M. Schüssler, F. Cattaneo, T. Emonet et T. Linde. Simulations of magnetoconvection in the solar photosphere. Equations, methods, and results of the MURaM code. *A&A*, 429:335–351, janvier 2005.
- R. Wachter, J. Schou, M. C. Rabello-Soares, J. W. Miles, T. L. Duvall et R. I. Bush. Image Quality of the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) Onboard the Solar Dynamics Observatory (SDO). *Sol. Phys.*, 275:261–284, janvier 2012.
- N. O. Weiss. The Expulsion of Magnetic Flux by Eddies. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 293:310–328, août 1966.
- B. T. Welsch, Y. Li, P. W. Schuck et G. H. Fisher. What is the Relationship Between Photospheric Flow Fields and Solar Flares? *ApJ*, 705:821–843, novembre 2009.
- P. Zeeman. The Effect of Magnetisation on the Nature of Light Emitted by a Substance. *Nature*, 55:347, février 1897.

