

Université de Montréal

Structure et interactions de bulles d'espace-temps en relativité générale

par
Jonathan Belletête

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Avril, 2012

© Jonathan Belletête , 2012.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Structure et interactions de bulles d'espace-temps en relativité générale

présenté par:

Jonathan Belletête

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard Mackenzie, président-rapporteur
Manu B. Paranjape, directeur de recherche
Yvan Saint-Aubin, membre du jury

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ

Nous analysons des bulles d'espace-temps d'épaisseur finie en relativité générale. Les conditions d'énergie sont utilisées afin d'obtenir un ensemble de critères permettant de restreindre la structure du bord de la bulle. Dans le cas des bulles statiques et à symétrie sphérique, nous obtenons quatre inégalités différentielles équivalentes aux trois conditions d'énergie les plus communes. Nous montrons qu'elles sont équivalentes à un ensemble de deux inégalités différentielles simples lorsque le potentiel gravitationnel effectif a une forme particulière.

Nous paramétrons alors l'espace-temps de manière à rendre la vérification de ces inégalités plus simple lorsqu'il sera question de bulles d'espace-temps. Nous traitons en particulier quatre formes de bulles, toutes caractérisées par un extérieur de type Schwarzschild de Sitter. Nous montrons que notre méthode donne les bons résultats lorsque la limite où l'épaisseur de la bulle tend vers zéro est prise.

Nous terminons par un traitement succinct du problème d'une onde gravitationnelle se propageant dans un nuage de bulles d'espace-temps.

Mots clés: Condition d'énergie, Lanczos, trou noir, onde gravitationnelle.

ABSTRACT

We analyze space-time bubbles of finite thickness in general relativity. We use the energy conditions to restrict their structures. In the case of static, spherically symmetric bubbles, we get a set of four differential inequalities. If the effective gravitational potential is taken of a particular form, we show that they can be further reduced to a set of two differential inequalities.

We then parameterize the bubble's wall in a particular way, simplifying the inequalities, and easing the application of boundary conditions on our solutions. We then treat four different cases of bubbles that all have a Schwarzschild de Sitter exterior. We show that in the limit where the thickness of the bubble's wall goes to zero, we recover the standard results.

Lastly, we treat gravitational waves propagating in a dilute gas of non-interacting space-time bubbles.

Keywords: Energy conditions, Lanczos, black hole, gravitational wave.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES ANNEXES	xvii
LISTE DES SIGLES	xix
NOTATION	xxi
DÉDICACE	xxiii
REMERCIEMENTS	xxv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE	5
1.1 Variété différentiable	6
1.1.1 Espaces tangents	6
1.1.2 Espaces Cotangents	8
1.2 Métrique	9
1.2.1 La métrique sur un espace général	10
1.2.2 La métrique en géométrie différentielle	10
1.2.3 Liens en les deux définitions de métriques	11
1.2.4 Trace	12
1.3 Les dérivées	12
1.3.1 Dérivée de Lie	12
1.3.2 Dérivée covariante	14
1.4 Objets définis avec des dérivées	15

1.4.1	Vecteurs de Killing	16
1.4.2	Géodésique	16
1.4.3	Le tenseur de Riemann	17
1.4.4	Tenseur de Ricci	18
1.5	Systèmes de coordonnées	19
1.5.1	Coordonnée géodésique normale	19
1.5.2	Vierbein	20
1.6	Exemple : la 2-sphère	20
1.6.1	Est-ce une variété différentiable ?	21
1.6.2	Espaces tangents et co-tangents	21
1.6.3	La métrique	22
1.6.4	Vecteurs de Killing	23
1.6.5	Connexion affine et géodésiques	24
1.6.6	Tenseur de Riemann	24
1.7	Conclusion	25
CHAPITRE 2 : LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE		27
2.1	Géométrie Pseudo-Riemannienne	28
2.1.1	Produit scalaire et norme	28
2.1.2	L'identité et le déterminant	29
2.2	Équations d'Einstein	29
2.2.1	Quelques propriétés intéressantes de T	30
2.2.2	Approximation linéaire	31
2.3	Identités de Bianchi	32
2.4	Les conditions d'énergie	32
2.4.1	La condition d'énergie faible	33
2.4.2	La condition d'énergie nulle	33
2.4.3	La condition d'énergie dominante	33
2.4.4	La condition d'énergie forte	34
2.4.5	Un exemple : Le fluide parfait	34
2.4.6	Commentaires sur ces conditions	36
2.5	Sous-variétés	36
2.5.1	Structures induites	37
2.5.2	Continuité à une interface	37

2.6	Le trou noir statique	39
2.6.1	Géodésique radiale	40
2.6.2	Théorème de Birkhoff	42
2.7	Conclusion	43
CHAPITRE 3 : STRUCTURE D'UNE BULLE D'ESPACE-TEMPS . . .		45
3.1	Les conditions d'énergie	46
3.1.1	La condition d'énergie nulle	48
3.1.2	La condition d'énergie faible	49
3.1.3	La condition d'énergie dominante	50
3.2	Un cas particulier	52
3.3	Paramétrisation d'une solution	53
3.4	Le cas particulier d'une bulle sphérique	55
3.4.1	La signification physique de $J(r)$	56
3.4.2	Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter	57
3.4.3	Reissner-Nordström à Schwarzschild de Sitter	60
3.4.4	Potentiel parabolique à Schwarzschild de Sitter	64
3.4.5	Trou noir non-singulier à Schwarzschild de Sitter	66
3.5	Conclusion	70
CHAPITRE 4 : DISPERSION D'UNE ONDE GRAVITATIONNELLE .		73
4.1	Méthode générale	74
4.2	Fluide libre sans interaction	75
4.3	Conclusion	76
CHAPITRE 5 : CONCLUSION		77
5.1	Problèmes futurs	78
BIBLIOGRAPHIE		81
I.1	Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter	xxvii
I.2	Reissner-Nordström à Schwarzschild de Sitter	xxx
I.3	Trou noir non-singulier à Schwarzschild de Sitter	xxxiv
II.1	Analyse des conditions d'énergie	xxxix
II.2	Équations de Lanczos	xli
II.2.1	Exemple : Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter .	xlii

II.3	Étude numérique des conditions d'énergie	xliv
II.4	Dispersion	xlvi

LISTE DES TABLEAUX

I.I	Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$	xxvii
I.II	Borne sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$	xxviii
I.III	Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$	xxviii
I.IV	Borne sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$	xxviii
I.V	Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxviii
I.VI	Borne sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxix
I.VII	Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxix
I.VIII	Borne sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxix
I.IX	Valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$. . . xxx
I.X	Valeur de $\frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$. . . xxxi
I.XI	Borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$	xxxii
I.XII	Valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$. . . xxxi
I.XIII	Valeur de $\frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$. . . xxxi
I.XIV	Borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxxii
I.XV	Valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$ xxxii
I.XVI	Valeur de $\frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$ xxxii
I.XVII	Borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$	xxxii
I.XVIII	Valeur de $10^2 \frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$. . . xxxiii
I.XIX	Valeur de $10^3 \frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$. . . xxxiii
I.XX	Borne inférieure sur $10^3 \frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$	xxxiii
I.XXI	Valeur de $\frac{m}{M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$. . . xxxiv
I.XXII	Valeur de $\frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$. . . xxxv
I.XXIII	Borne de α pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$. . . xxxv
I.XXIV	Valeur de $\frac{m}{M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$. . . xxxv
I.XXV	Valeur de $10^3 \frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxxv
I.XXVI	Borne de $10^3 \alpha$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$	xxxvi
I.XXVII	Valeur de $10 \frac{m}{M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$ xxxvi
I.XXVIII	Valeur de $10 \frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$ xxxvi
I.XXIX	Borne de 10α pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$ xxxvi
I.XXX	Valeur maximale de $\frac{m}{M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$	xxxvii
I.XXXI	Valeur de $10 \frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$. . . xxxvii

I.XXXII Borne de 10α pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$ xxxvii

LISTE DES FIGURES

LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Résultats Numériquesxxvii
Annexe II :	Exemple de codexxxix

LISTE DES SIGLES

EI	Énergie-impulsion
FQRNT	Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies

NOTATION

\mathbb{R}	Nombres réels
\mathbb{C}	Nombres complexes
δ_j^i	Delta Kronecker
$\delta(x)$	Delta Dirac de x
$\Theta(x)$	Fonction Heaviside de x
η_{ij}	Métrie de Minkowski
g	Métrie
E	Tenseur d'Einstein
$T_x C$	Espace tangent à C au point x
$T_x^* C$	Espace cotangent à C au point x
A^μ	Composantes contravariantes du tenseur A
A_μ	Composantes covariantes du tenseur A
A^0	Composante temporelle du tenseur A
$A^{i_1 i_2 \dots \mu i_k i_{k+1} \dots} A_{j_1 j_2 \dots \mu j_k j_{k+1} \dots}$	$\sum_{\mu=1}^n A^{i_1 i_2 \dots \mu i_k i_{k+1} \dots} A_{j_1 j_2 \dots \mu j_k j_{k+1} \dots}$
$[A^{ij}]_\phi$	Représentation matricielle de A dans la carte ϕ
$[A^i]_\phi$	Représentation vectorielle de A dans la carte ϕ
$A \otimes B$	Produit tensoriel de A et B
$ A $	Norme de A
$Tr(A)$	Trace de A
$Det(A)$	Déterminant matriciel de $[A_{ij}]$
$\mathcal{L}_v A$	Dérivée de Lie de A par rapport à v
$A_{,i}$	Dérivée partielle de A par rapport à x^i
$A_{;i}$	Composante i de la dérivée covariante de A
$f^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}(x^1, x^2, \dots, x^n)$	$\left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)^{i_k} \right) f(x^1, x^2, \dots, x^n)$

(dédicace) À tous ceux qui ont cru en moi.

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier Manu de m'avoir donné une chance lors de mon stage, puis une autre lors de ma maîtrise. Ça m'a permis de découvrir une foule de chose fascinante, en plus de faire mes premiers pas en recherche. Merci également à Yvan, de me donner une chance pour mon doctorat.

J'aimerais également remercier ma petite soeur adorée, Corinne. Tu m'as donné le courage de passer à travers d'un bac rudement éprouvant en plus de mettre du soleil dans mes journées pendant bien longtemps. Merci Corinne, c'est grâce à toi que j'écris ça aujourd'hui.

Merci également à mon pote Amaury. On en a passé du temps à oublier des semaines infernales... Et à oublier des soirées trop arrosées.

Merci à Mychel, mon colocataire d'appartement et de bureau. Passer des journées à m'arracher les cheveux dans ce bureau-là sans toi, ça aurait été pas mal plus décourageant. Merci de m'avoir donné courage pendant tout ce temps-là.

Merci à Jason, mon autre colocataire d'appartement. Ça n'aurait pas été pareil sans tes farces involontairement grivoises et ta candeur éprouvante.

Merci aux femmes de ma vie. Sophie, j'aurais pas pu passer à travers cette maîtrise-là sans toi. J'espère que tu va trouver ta voie. Amélie, tu m'as beaucoup aidé toi aussi. Tu m'as remonté le moral quand j'en avais le plus besoin, et tu m'as montré que finalement, une maîtrise, ça peut vraiment mal aller sans compromettre un avenir.

Merci aussi à mon père. Tu m'as toujours soutenu pendant mes études, et je t'en remercie. Tu m'as toujours poussé à être responsable puis à travailler pour avoir ce que je voulais. C'est grâce à toi que je me suis rendu ici.

Merci aussi à ma mère. Ça n'a pas toujours été facile, mais merci d'avoir été là pour moi tout ce temps.

Merci aussi à Kader Boualia, c'est vous qui m'avez donné le goût de faire de la physique. Merci également à M.Bourbonnais, c'est vous qui m'avez montré que les mathématiques pouvaient être le fun.

Finalement, merci au FQRNT pour le financement qui m'a permis de vivre correctement pendant ma maîtrise.

INTRODUCTION

Les bulles d'espace-temps sont un sujet très étudié en relativité générale. Elles représentent une classe générale de problème dans lesquels nous sommes intéressés à relier des solutions connues dans des sous-ensembles séparés d'un même espace. Ceci inclut des classiques, comme l'effondrement gravitationnel ou la structure des étoiles, ainsi que des cas plus exotiques, comme par exemple la désintégration du vide.

Traditionnellement, elles sont étudiées en utilisant le langage des distributions, utilisant souvent des solutions faibles aux équations d'Einstein. Les solutions sont alors représentées comme changeant brusquement à l'interface entre les domaines des différentes solutions. Cependant, le changement brusque, se manifestant par des discontinuités dans la courbure de l'espace-temps, est la plupart du temps vu comme une idéalisation d'un changement lisse, mais trop complexe et inconnu pour être étudié de façon acceptable.

Par contre, il existe certains cas où il est possible de montrer que ce changement lisse ne peut tout simplement pas exister. L'idéalisation masque alors une faille importante du problème.

Nous avons donc voulu étudier des bulles d'espace-temps où les interfaces entre les espaces sont d'une épaisseur finie. En particulier, comme il s'agit d'un problème très complexe, nous nous sommes concentrés sur des bulles statiques à symétrie sphérique. Le problème devient alors suffisamment concret pour être traité de façon analytique et d'en tirer des conclusions concrètes.

Il nous fallait ensuite une façon de reconnaître un espace-temps problématique. En effet, la relativité générale à ceci de particulier qu'elle admet un nombre incalculable de solutions n'ayant aucun sens physique. De telles solutions peuvent alors permettre à des observateurs de se déplacer plus vite que la lumière, contenir des densités négatives d'énergie ou encore permettre à un observateur de voyager dans le temps. Nous avons alors choisis d'utiliser les conditions d'énergie. Celles-ci nous donnent des inégalités algébriques relativement simples nous permettant de savoir si l'espace-temps contient des zones où la densité d'énergie est négative ou si un observateur pourrait mesurer des courants d'énergie se déplaçant plus vite que la lumière.

Nous allons commencer au chapitre 1 par une introduction à la géométrie différentielle. Celle-ci est la structure mathématique sur laquelle la relativité générale est

construite et une introduction sommaire y est pertinente. Par contre, ce sujet est extrêmement vaste, et nous nous concentrerons sur les aspects importants pour la compréhension du présent document.

Ensuite, le chapitre 2 présentera une introduction à la relativité générale elle-même. Encore une fois, nous nous concentrerons sur les aspects de la théorie qui sont utiles pour nos travaux. Nous traiterons également les conditions d'énergie d'un point de vue fondamental, puis avec un exemple concret, celui du gaz parfait. Nous terminerons le chapitre par un exemple physique concret, le trou noir de Schwarzschild.

C'est dans le chapitre 3 que seront présentés le gros de nos résultats. En particulier, nous réduisons les conditions d'énergie à un ensemble d'inégalités différentielles. Nous traitons alors plusieurs exemples de bulles d'espace-temps statiques et à symétrie sphérique, en prenant toujours soins de comparer nos résultats à ceux obtenus par la méthode traditionnelle.

Nous considérons des bulles dont l'extérieur est un espace de type Schwarzschild de Sitter de constante cosmologique plus grande que zéro. Pour ce qui est de l'intérieur, nous considérons différents types de solution, couvrant certains des cas les plus communs. Par exemple, nous analysons le cas où l'intérieur est un trou noir de type Schwarzschild de Sitter, un cas qui est largement utilisé pour modéliser certains types de désintégration du vide ([7]). Nous traitons également la solution de Reissner-Nordström, un trou noir chargé électriquement. Nous montrons alors que dans certains cas, ce type de bulle d'espace-temps peut avoir un paramètre de masse extérieur négatif sans contenir de densité négative d'énergie. Puis, nous voyons deux autres solutions plus exotiques : le potentiel parabolique et le trou noir émoussé. La solution à potentiel parabolique représente un espace dont la distribution d'énergie suit une parabole centrée en $r = 0$. Ce type de solution offre une analyse considérablement plus simple que les autres cas. La solution de type trou noir émoussé, elle, modélise un trou noir dont la singularité aurait été retiré. Ce modèle est utilisé dans l'étude des corrections quantiques à l'effondrement d'une distribution de masse à symétrie sphérique([18]).

Également, un des buts de notre recherche était de déterminer comment un ensemble de bulles d'espace-temps réagirait au passage d'une onde gravitationnelle. Par contre, il apparaît qu'en première approximation, ce problème est relativement simple et se réduit au cas d'une onde se propageant dans un nuage de poussière. Comme ce problème fut largement étudié dans la littérature, il semble inutile de s'étendre sur ce

sujet, mais certains résultats seront tout de même présentés dans le chapitre 4.

CHAPITRE 1

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

La géométrie différentielle est l'étude des propriétés géométriques des variétés¹ en utilisant les outils du calcul différentiel. Elle vise ainsi à généraliser certaines notions intuitives sur un espace euclidien², mais qui demandent quelques efforts pour être traitées sur une surface plus générale. Notons par exemple les dérivées ainsi que les champs vectoriels.

Nous allons donc commencer par donner une définition exacte et intuitive de ce qu'est une variété. Nous verrons ensuite comment nous pouvons généraliser la notion de champ vectoriel sur une variété générale. Nous pourrions alors introduire les tenseurs d'ordre arbitraire. Nous introduirons ensuite l'espace des champs duaux aux champs vectoriels, les champs de covecteurs.

Nous pourrions ensuite introduire la métrique, qui nous permettra de parler de distance sur notre variété. Nous commencerons par introduire la définition de métrique en tant que fonction "distance" sur un ensemble quelconque. Nous discuterons ensuite de la définition utilisée en géométrie différentielle de la métrique en tant que "produit scalaire". Nous verrons alors le lien entre ces deux définitions.

Les opérateurs différentiels seront ensuite introduits. Nous parlerons d'abord de la dérivée de Lie, qui nous permet de mesurer la déviation d'un champ tensoriel par rapport à un champ de vecteurs. Nous introduirons ensuite la dérivée covariante ainsi que la structure additionnelle qu'elle nécessite : la connexion.

Nous verrons ensuite une sélection d'objets très utiles définis à partir de nos opérateurs différentiels. Nous commencerons par les vecteurs de Killing, qui nous permettront de discuter des symétries de notre variété. Nous discuterons ensuite des géodésiques, qui représentent en quelque sorte les chemins les plus courts entre deux points. Nous pourrions ensuite introduire les tenseurs de Riemann et de Ricci, représentant respectivement la commutativité de la dérivée covariante et la déviation du volume d'une sphère infinitésimale par rapport à un espace plat.

¹Les variétés sont la généralisation du concept de surface en un nombre arbitraire de dimensions. Nous ne traiterons cependant que des variétés ayant un nombre de dimension fini. Également, bien qu'il soit aussi possible de traiter les variétés définies sur les nombres complexes, nous ne considérerons que celles définies sur les réels.

²Une surface euclidienne est une surface plane.

Nous verrons ensuite quelques systèmes de coordonnées particulièrement intéressants, soit les coordonnées géodésiques normales qui trivialisent à la fois la métrique et la connexion, ainsi que les vierbeins³, qui trivialisent seulement la métrique.

Nous terminerons alors cette section par un exemple concret, celui de la sphère à deux dimensions.

1.1 Variété différentiable

Les variétés différentiables sont les objets de base de la géométrie différentielle. Elles sont la généralisation de la notion de surface en géométrie traditionnelle. Officieusement, une variété différentiable est un sous-ensemble d'un espace euclidien qui a partout localement "l'air" plat, c'est-à-dire qu'en le regardant d'assez près, il aura l'air euclidien. L'exemple le mieux connu est la sphère, et le nombre de croyances selon lesquelles la terre est plate devrait suffire à nous convaincre qu'une sphère est bien localement euclidienne.

Nous allons maintenant mettre notre définition intuitive en des termes mathématiques concrets. S , un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , est une *variété topologique* de dimension m , si pour tout point $x \in S$, il existe U un sous-ensemble ouvert de S contenant x , tel qu'il existe un homéomorphisme⁴ $\phi : U \rightarrow V$ avec V un ouvert de \mathbb{R}^m . La paire (ϕ, U) est appelée une *carte* de U . Un ensemble de cartes dont l'union recouvre entièrement la variété est appelé *atlas* de S . De plus, les composantes de l'image $\phi(x)$ seront appelées coordonnées de x dans cette carte. Également, afin d'alléger la notation pour les fonctions sur une variété, nous écrirons souvent $f(x^i)$ plutôt que $f \circ \phi(x)$.

Si il existe un atlas tel que, pour toute paire de cartes (ϕ, U) et (ψ, V) avec $U \cap V \neq \emptyset$, la fonction $\phi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme⁵, alors S est une *variété différentiable*.

1.1.1 Espaces tangents

Maintenant que nous savons ce qu'est exactement une variété différentiable, nous aimerions pouvoir utiliser le fait qu'elle soit localement plane pour pouvoir y définir des champs vectoriels, c'est-à-dire des fonctions associant un vecteur à chaque point

³Vierbein signifie quatre brins ou quatre jambes en allemand. En dimension autre que quatre, ils sont également appelés vielbein.

⁴Un homéomorphisme est une application continue et bijective telle que son inverse est aussi continu. Une application est dite continue si sa pré-image de tout ouvert est elle aussi un ouvert. Autrement dit, si U est ouvert, alors $f^{-1}(U)$ l'est aussi.

⁵Un difféomorphisme est un homéomorphisme différentiable dont l'inverse est aussi différentiable.

de la variété. Pour ce faire, nous aurons besoin de la notion d'espace tangent. L'espace tangent en un point d'une variété est l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes sur la variété passant par ce point.

Par exemple, si l'on pense à C , une courbe dans un espace à deux dimensions, l'espace tangent en un point est la droite tangente à la courbe, vue comme un espace vectoriel. Nous l'écrivons alors $(x, T_x C)$.

Mais comment représenter cet espace ? Ou plutôt, comment en construire une base ? Considérons donc une courbe C , que l'on décrit par des fonctions $x^i(s) = \phi(C(s))$. Naïvement, la tangente à cette courbe en un point est donc :

$$\frac{d}{ds} C(s) = \frac{\partial}{\partial x^j} (\phi^{-1}(x^i))_{x^i \rightarrow x^i(s)} \frac{d}{ds} x^j(s) \quad (1.1)$$

et nous pouvons donc voir que l'espace tangent sera engendré par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^j} (\phi^{-1}(x^i))$. Nous allons donc utiliser les dérivées de la carte comme base, mais que nous allons représenter de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\phi^{-1}(x^i)). \quad (1.2)$$

Pourquoi ? Par concision, d'une part, mais également parce que les dérivées partielles partagent une propriété très intéressante avec les dérivées de la carte. Supposons donc que nous avons une autre carte (ψ, V) et appelons les coordonnées selon cette carte y^i . Alors, la base de l'espace tangent sur $V \cap U$ est

$$\frac{\partial}{\partial y^j} (\psi^{-1}(y^i)) = \frac{\partial}{\partial y^j} (\phi^{-1}(\phi \circ \psi^{-1}(y^i))) \quad (1.3)$$

ou, sur application de la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{\partial}{\partial y^j} (\psi^{-1}(y^i)) = \frac{\partial}{\partial x^k} (\phi^{-1}(x^m))_{x^m \rightarrow x^m(y^i)} \frac{\partial x^k(y^m)}{\partial y^j} \quad (1.4)$$

où les $x^i(y^m)$ sont définies par :

$$(x^i(y^m)) = \phi \circ \psi^{-1}(y^m). \quad (1.5)$$

Or, si nous appliquons la règle de dérivation en chaîne directement sur les dérivées

partielles, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1.6)$$

ce qui correspond exactement au résultat obtenu en (1.4) ! Cette représentation est donc non seulement plus concise, mais elle permet de voir aisément la façon dont change la base lors d'un changement de carte.

Nous appellerons l'union disjointe de tout les espaces tangents à une variété S le *fibré tangent* de S . Nous pourrions donc décrire un champ vectoriel sur notre variété comme étant une fonction qui envoie chaque point de la variété vers un point dans son fibré tangent.

En prenant le produit tensoriel⁶ de l'espace tangent en un point avec lui même, nous pourrions également décrire des champs tensoriels d'ordre supérieur que nous appellerons généralement *tenseurs contravariants*, et que nous noterons avec des indices en haut, i.e. A^i, B^{ij}, \dots . Nous pourrions exprimer ces tenseurs dans une base locale, comme par exemple :

$$A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.7)$$

Puisqu'un tenseur existe indépendamment du système de coordonnées dans lequel il est représenté, nous pouvons déduire de (1.6) comment les composantes d'un tenseur devront se transformer d'une carte à l'autre :

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j. \quad (1.8)$$

De plus, il sera courant de représenter des tenseurs d'ordre deux par des matrices que nous noterons par exemple $[A^{ij}]_\phi$, ou simplement $[A^{ij}]$ lorsqu'il sera clair de quelle carte il s'agit.

Également, nous appellerons la base de l'espace tangent un *référentiel*.

1.1.2 Espaces Cotangents

Maintenant que nous avons une façon acceptable de décrire les champs vectoriels sur notre variété, nous aimerions pouvoir définir l'espace des fonctions linéaires qui prennent un vecteur et qui l'envoient vers un nombre réel. Cet espace est le dual vectoriel [14] de l'espace tangent, que nous appellerons simplement *espace cotangent* et

⁶Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels U et V engendrés respectivement par les bases u^i et v^j est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $u^i \otimes v^j$ et est noté $U \otimes V$.

que nous noterons (x, T_x^*S) .

Par exemple, si l'on considère l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes à quatre composantes, l'espace cotangent sera celui engendré par les vecteurs lignes à quatre composantes. Les vecteurs cotangents agissent alors sur les tangents par le produit matriciel usuel.

Généralement, nous définirons l'espace cotangent comme étant l'espace vectoriel engendré par les fonctions dx^i qui agissent sur les vecteurs de base de l'espace tangent comme suit⁷ :

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_j^i. \quad (1.9)$$

En poursuivant de la même façon qu'avec les espaces tangents, nous pourrions définir le *fibré cotangent* ainsi que les *tenseurs covariants* que nous noterons avec des indices en bas, c'est-à-dire A_i, B_{ij}, \dots . De plus, la définition (1.9) combinée avec la relation (1.6) permet d'obtenir la relation de transformation pour les vecteurs de base de l'espace cotangent ainsi que celle des vecteurs covariants :

$$dy^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) dx^j, \quad (1.10)$$

$$A'_i = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right) A_j. \quad (1.11)$$

Il est également possible de prendre le produit tensoriel entre un espace tangent et l'espace cotangent en un point. Nous appellerons les éléments de cet espace des *tenseurs mixtes*.

1.2 Métrique

Nous aimerions maintenant généraliser un autre concept fondamental, celui de produit scalaire. Pour ce faire, nous aurons besoin d'un objet supplémentaire appelé métrique. Cependant, les mathématiciens utilisent ce nom pour plusieurs objets différents. Nous allons donc commencer par la définition utilisée par les mathématiciens pour un espace général, et ensuite par celle utilisée en géométrie différentielle.

⁷Selon le théorème de représentation de Riesz[14], tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à son dual vectoriel et il suffit de connaître la valeur que prend une fonction linéaire sur les vecteurs de base de l'espace pour pouvoir la décrire entièrement.

1.2.1 La métrique sur un espace général

Dans un espace général[30], une métrique est une fonction qui associe à deux points d'un ensemble M , la distance entre les deux. Pour être une définition acceptable d'une distance, cette fonction, que nous appellerons d , doit satisfaire les conditions suivantes pour tout points $x, y, z \in M$:

$$d(x, y) \geq 0 \quad (1.12)$$

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (1.13)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (1.14)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) . \quad (1.15)$$

Si la fonction d respecte les deux dernières conditions mais pas les deux premières, alors nous l'appellerons *pseudométrique*. Il est facile de voir que si M est aussi doté d'un produit scalaire, que nous noterons σ , et d'une structure d'espace vectoriel, alors on peut définir une métrique par :

$$d(x, y) = \sqrt{\sigma(x - y, x - y)} . \quad (1.16)$$

1.2.2 La métrique en géométrie différentielle

En géométrie différentielle, une métrique est une famille de fonctions, appelée g_X ⁸, prenant deux vecteurs d'un même espace tangent et y associant un nombre réel. Elle généralise ainsi la notion de produit scalaire en géométrie euclidienne. En dimension finie, elle définit également un isomorphisme entre l'espace tangent et l'espace cotangent. Elle associe donc à chaque vecteur tangent A , un vecteur cotangent $g(A)$. Nous demanderons également que cet isomorphisme soit autoadjoint, au sens où $g(A)B = g(B)A$ pour toute paire A, B . Elle permettra alors de définir un produit scalaire, et donc une métrique au sens général, par la définition :

$$\sigma(A, B) = g(A)B . \quad (1.17)$$

⁸L'indice X représente le point de la variété où se trouve l'espace tangent. Il est souvent omis lorsqu'il n'y a pas risque de confusion.

De plus, nous qualifierons ces métriques de *Riemmaniennes* si pour tout champs vectoriels différentiables $X(x), Y(x)$, la fonction définie par $f = g(X(x))Y(x)$ est une fonction lisse⁹. Nous pourrions aussi attacher à g une représentation tensorielle

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = dx^\mu, \quad (1.18)$$

ainsi qu'à son inverse

$$g_{\mu\nu} dx^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.19)$$

Notons également que la métrique peut être utilisée pour changer tout, ou seulement une partie, d'un tenseur covariant en tenseur contravariant et vice versa, opération que nous appelons généralement monter/descendre un ou des indices. Par exemple, pour un tenseur A d'ordre deux, nous aurons

$$A = A^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} = A^{\mu\nu} g_{\mu\rho} dx^\rho \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} = A_\rho^\nu dx^\rho \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.20)$$

Ceci nous permettra de définir la norme d'un vecteur par

$$|B| = \sqrt{g_{\mu\nu} B^\mu B^\nu} = \sqrt{B^\mu B_\mu}. \quad (1.21)$$

Il est courant d'appeler "métrique" les représentations tensorielles définies plus haut. Si g n'engendre pas un produit scalaire défini positif¹⁰, alors nous l'appellerons plutôt *pseudo-métrique* et la qualifierons alors de *pseudo-Riemmanienne*.

1.2.3 Liens en les deux définitions de métriques

Nous pouvons maintenant voir le lien entre les deux visions de ce qu'est une métrique. En effet, la métrique en géométrie différentielle permet de définir une fonction distance mais seulement sur l'espace tangent/cotangent. Nous devons être un peu plus astucieux pour obtenir une véritable fonction distance sur notre variété S . Soient donc deux points $X, Y \in S$, une courbe différentiable Q telle que $Q(0) = X$ et $Q(1) = Y$ ainsi qu'une carte (ϕ, U) où U contient Q , nous définirons la distance entre X et Y selon Q

⁹Une fonction lisse est une fonction qui peut être dérivée un nombre infini de fois. Les dérivées doivent ici être prises suite à une composition judicieuse de f avec une carte de S au point x , car les dérivées sur S n'ont pas de sens !

¹⁰Rappelons que pour qu'un produit scalaire σ soit défini positif, il faut que pour tout vecteur X , $\sigma(X, X) \geq 0$, où l'égalité n'est possible que si $X = 0$

comme étant

$$L = \int_0^1 \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds}} ds \quad (1.22)$$

où $x(s) = \phi^{-1}(Q(s))$. Nous définirons également l'élément de longueur infinitésimal :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (1.23)$$

1.2.4 Trace

La trace d'une matrice est définie comme étant la somme de ses valeurs propres, et est aussi égale à la somme des éléments de sa diagonale. Cette notion se généralise aisément pour des tenseurs d'ordre deux quelconques. Nous définirons donc l'opérateur trace comme suit :

$$Tr(A) = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = A^\mu_\mu . \quad (1.24)$$

Nous pouvons de plus vérifier que la trace d'un tenseur est indépendante de la carte utilisée pour le représenter.

1.3 Les dérivées

Maintenant que nous savons ce qu'est une variété différentiable et que nous avons des champs tensoriels dessus, nous aimerions pouvoir dériver ces champs. Mais pour pouvoir dériver une fonction, il faut pouvoir comparer la valeur qu'elle prend en des points distincts. Or, sur une variété différentiable, les valeurs que prend un champ tensoriel en des points différents "vivent" dans des espaces tangents/cotangents distincts et ne peuvent donc pas être directement comparés. Nous introduirons deux types de dérivées distinctes, la dérivée de Lie, et la dérivée covariante.

Afin de fixer les choses, nous parlerons dans cette section d'un point $X \in S$, contenu dans une carte (ϕ, U) . Cette dernière nous donne une base de l'espace tangent en ce point donnée par $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

1.3.1 Dérivée de Lie

Nous commençons par introduire la dérivée de Lie. Elle permet de mesurer comment un champ de tenseur varie lorsque l'on se déplace en suivant les courbes inté-

grales¹¹ d'un champ de vecteurs contravariants. Soient une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un champ vectoriel contravariant et sa courbe intégrale $C(s)$ telle que $C(s_0) = X$. La *dérivée de Lie* de f par rapport à v est une fonction de S dans \mathbb{R} définie comme étant :

$$(\mathcal{L}_v f)(X) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(C(s_0 + \Delta s)) - f(C(s_0))}{\Delta s} \quad (1.25)$$

que nous pouvons écrire

$$(\mathcal{L}_v f)(X) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1}) \right)_{\phi(X)} \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi(C(s_0 + \Delta s)) - \phi(C(s_0))}{\Delta s} \right)^i \quad (1.26)$$

ou encore

$$(\mathcal{L}_v f)(X) = v^i(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1}) \right)_{\phi(X)}. \quad (1.27)$$

De façon analogue, si $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un champ vectoriel contravariant, alors la dérivée de Lie de u par rapport à v est aussi un champ vectoriel contravariant défini par :

$$(\mathcal{L}_v u)(X) = \left(v^i(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (u^j \circ \phi^{-1}) \right)_{\phi(X)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \left(u^i(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (v^j \circ \phi^{-1}) \right)_{\phi(X)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right). \quad (1.28)$$

Si nous avons maintenant $w = w_i dx^i$, un champ vectoriel covariant, alors la dérivée de Lie de w par rapport à v est un champ vectoriel covariant lui aussi donné par :

$$(\mathcal{L}_v w)(X) = v^i(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (w_j \circ \phi^{-1}) \right)_{\phi(X)} dx^j + w_i(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} (v^i \circ \phi^{-1}) \right)_{\phi(X)} dx^j. \quad (1.29)$$

Il est également facile de remarquer que la dérivée de lie est linéaire dans ses deux arguments, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}_{u+v}(w+z) = \mathcal{L}_u(w) + \mathcal{L}_u(z) + \mathcal{L}_v(w) + \mathcal{L}_v(z). \quad (1.30)$$

¹¹Une courbe intégrale d'un champ de vecteurs v est une courbe dans S dont le vecteur tangent au point X est $v(X)$.

De plus, la dérivée de Lie respecte la règle de Leibniz pour les produits tensoriels ainsi que pour les contractions, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{L}_v(w \otimes u) = (\mathcal{L}_v w) \otimes u + v \otimes (\mathcal{L}_v u) \quad (1.31)$$

et que

$$\mathcal{L}_v(w^i u_i) = (\mathcal{L}_v w)^i u_i + w^i (\mathcal{L}_v u)_i . \quad (1.32)$$

Combinées ensemble, ces expressions seront suffisantes pour pouvoir calculer la dérivée de Lie de n'importe quel tenseur. Cependant, notons que la dérivée de Lie fait non seulement intervenir des dérivées de la fonction que l'on dérive, mais également du champ de vecteurs par rapport auquel nous dérivons. Pour connaître la dérivée en un point, nous aurons donc besoin de savoir v , mais également de savoir comment il varie en ce point.

1.3.2 Dérivée covariante

Plutôt que d'utiliser les courbes intégrales d'un champ de vecteurs, la dérivée covariante utilise une structure additionnelle, la connexion. Nous aurons alors besoin de moins d'information à propos du vecteur par rapport auquel nous dérivons. La connexion n'est cependant pas unique. Il peut donc exister plusieurs dérivées covariantes sur une variété. Il n'existe cependant qu'une seule connexion symétrique qui soit compatible avec la métrique¹², que nous appellerons connexion de Levi-Civita. Nous commencerons par définir comment la dérivée covariante transforme les vecteurs de base sur l'espace tangent :

$$\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} dx^i \otimes dx^j = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} dx^i \otimes dx^j . \quad (1.33)$$

Nous avons ici défini Γ que l'on nomme symbole de Christoffel. Comme l'indique son nom¹³, la dérivée covariante respecte la règle de Leibniz :

$$\nabla(u \otimes v) = (\nabla u) \otimes v + u \otimes (\nabla v) . \quad (1.34)$$

¹²Une connexion est dite compatible avec la métrique si la dérivée covariante de la métrique selon cette connexion est nulle.

¹³Une opération est appelé "dérivée" si elle respecte la règle de Leibniz, ou parfois également si elle ne respecte que la règle de Leibniz graduée.

Également, la dérivée covariante d'un scalaire est définie comme étant sa dérivée directionnelle, c'est-à-dire :

$$\nabla f = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}(x^j)}{\partial x^i} dx^i . \quad (1.35)$$

Nous pouvons utiliser ces définitions pour calculer la dérivée covariante de n'importe quel tenseur. Par exemple, la dérivée covariante de la métrique est donnée par

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma} \right) dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho . \quad (1.36)$$

Si nous désirons que notre connexion soit symétrique sous l'échange de ses indices covariants et qu'elle soit aussi compatible avec la métrique, cette expression nous permettra d'obtenir une forme explicite pour les symboles de Christoffel, donnée par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) . \quad (1.37)$$

Notons en terminant que la dérivée covariante d'un tenseur est elle aussi un tenseur ayant un indice covariant de plus, mais que les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs. Aussi, lorsqu'elle est utilisée comme dérivée directionnelle, la dérivée covariante est parfois notée

$$\nabla_\nu u = v^i \nabla_i u = v^i u_{;i} \quad (1.38)$$

où l'on voit bien que nous n'avons pas besoin de connaître la dérivée de ν , ce qui confirme notre affirmation précédente selon laquelle la dérivée covariante nécessite moins d'information que la dérivée de Lie.

1.4 Objets définis avec des dérivées

Les deux types de dérivée introduits précédemment peuvent être utilisés afin de définir plusieurs objets géométriques utiles ; nous allons introduire ceux dont nous aurons besoin dans cette section. Nous commencerons par définir les vecteurs de Killing, qui nous permettront de parler des symétries d'une variété. Nous introduirons ensuite les géodésiques ainsi que les tenseurs de Riemann et de Ricci, qui seront des objets fondamentaux dans l'étude de la relativité générale.

1.4.1 Vecteurs de Killing

Il y a plusieurs façons de définir les vecteurs¹⁴ de Killing, mais dans tout les cas, ils définissent les isométries locales de la variété. Nous allons commencer par l'interprétation géométrique et nous introduirons ensuite leur interprétation en termes de groupe de Lie.

Soit donc un champ de vecteurs v sur notre variété S . Nous allons prendre chaque point $X \in S$ et lui appliquer un déplacement infinitésimal dans la direction $v(X)$. Nous dirons que v est un *vecteur de Killing* si cette opération est une isométrie, c'est-à-dire que les distances sur S n'ont pas été déformées. Utilisant nos définitions de dérivée et de distance, nous pouvons alors voir que v sera un vecteur de Killing si et seulement si :

$$\mathcal{L}_v g = 0 \quad (1.39)$$

où g est la métrique. Par exemple, si S est une sphère, nous pouvons vérifier que le champ de vecteurs exprimé selon les coordonnées sphériques standard par $\frac{\partial}{\partial \phi}$ est un vecteur de Killing. L'opération de déplacer tout les points de S selon v est donc ici une simple rotation autour de l'axe z . Ceci nous permet également de constater qu'un vecteur de la base de l'espace tangent sera un vecteur de Killing si il est possible d'exprimer la métrique sans utiliser la coordonnée qui lui est associée. Dans notre exemple, il s'agit de la coordonnée ϕ .

Nous pouvons déjà entrevoir la définition des vecteurs de Killing en termes de groupe de Lie¹⁵. En effet, soit $Diff\{S\}$, le groupe des difféomorphismes de S . Alors les vecteurs de Killing de S sont des vecteurs qui engendrent une représentation fidèle de l'algèbre de Lie de ce groupe, le crochet de Lie étant ici donné par la dérivée de Lie¹⁶.

1.4.2 Géodésique

Puisque la métrique nous permet de définir les distances sur notre variété, il est maintenant logique de se poser la question suivante : Étant donnés deux points $X, Y \in S$, quel est le chemin le plus court les reliant ? Nous appellerons géodésique une courbe

¹⁴Nous utilisons le terme vecteur de Killing, mais ce sont en réalité des champs de vecteurs.

¹⁵Nous étendre plus en détails sur ce point de vue demanderait une introduction des concepts reliés aux groupes de Lie, ce que nous ne ferons pas. Ce point de vue est seulement donné puisque les groupes de Lie sont généralement plus étudiés en physique que les transformations géométriques. Le lecteur intéressé pourra cependant consulter [11] ou [12].

¹⁶C'est à dire $[u, v] = \mathcal{L}_u v$.

qui est un extrémum de la distance entre chacun de ses points. Notons qu'une géodésique ne répond pas nécessairement à la question précédente, cela pourrait n'être qu'un minimum local, ou même un maximum de la distance ! Ainsi par exemple, pour toute paire de points distincts sur un cercle, il existe deux géodésiques distinctes les reliant, mais généralement, seulement l'une d'elles minimisera la distance entre les deux.

Soient donc deux points $X, Y \in S$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ une courbe partout localement différentiable telle que $\gamma(a) = X$ et $\gamma(b) = Y$. Supposons de plus que S soit munie d'une connexion de Levi-Civita Γ , alors la distance entre X et Y selon γ est donc :

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g \left(\frac{d\gamma(s)}{ds}, \frac{d\gamma(s)}{ds} \right)} ds. \quad (1.40)$$

Utilisant le calcul des variations et exprimant le résultat dans une base de coordonnées locales, il vient que γ sera une géodésique si :

$$\left(\frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} \right)^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \left(\frac{d\gamma(s)}{ds} \right)^\alpha \left(\frac{d\gamma(s)}{ds} \right)^\beta = 0. \quad (1.41)$$

De plus, étant donné un point X et une vitesse initiale v , cette équation possède toujours une solution dans un voisinage du point où sont données les conditions initiales¹⁷. Il n'est par contre pas toujours possible d'étendre ce voisinage à toute la variété il n'est donc pas possible de conclure qu'il existe une géodésique entre toute paire de points de S ¹⁸.

1.4.3 Le tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann généralise la notion de courbure sur une surface. Soient donc deux géodésiques C_1 et C_2 passant toutes deux à une distance infinitésimale d'un point $X \in S$ et parallèles dans ce voisinage¹⁹. Le tenseur de Riemann permet de mesurer à quel point ces géodésiques vont s'éloigner l'une de l'autre à l'extérieur du voisinage. Nous le définissons comme un opérateur qui prend trois vecteurs tangents et qui les

¹⁷Ceci est une conséquence directe du théorème de Picard-Lindelöf, aussi appelé théorème de Cauchy-Lipschitz.

¹⁸Si l'on considère par exemple les nombres réels différents de zéro, ils forment une variété différentiable euclidienne, mais il n'existe pas de chemin sur cette variété reliant un nombre négatif et un nombre positif.

¹⁹Deux courbes sont parallèles en un point si leur vecteur tangent y sont proportionnels

envoi vers un autre vecteur tangent selon la formule suivante :

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w + \nabla_{\mathcal{L}_{u^v} w} \quad (1.42)$$

où nous avons utilisé la dérivée covariante ∇ et la dérivée de Lie \mathcal{L} . Exprimé dans une base de coordonnées, le tenseur de Riemann prend la forme :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\beta\mu}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\alpha - \Gamma_{\beta\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\alpha. \quad (1.43)$$

Alors, si u est le vecteur tangent à C_1 et que v est le vecteur séparation²⁰ entre C_1 et C_2 , nous aurons :

$$\frac{d^2 v}{ds^2} = R(v, u)u. \quad (1.44)$$

Nous pouvons également voir grâce à (1.42) que le tenseur de Riemann mesure à quel point les dérivées covariantes peuvent commuter entre elles.

1.4.4 Tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci sert à mesurer à quel point le volume d'une sphère géodésique²¹ est différent de celui d'une sphère euclidienne. Le volume d'un sous-ensemble fermé $\mathcal{V} \in S$ recouvert d'une carte ϕ est donné par

$$V(\mathcal{V}) = \int_{\phi(\mathcal{V})} \sqrt{\text{Det}(g)} d\tau \quad (1.45)$$

où $\text{Det}(g)$ est le déterminant de la métrique vue comme une matrice de composantes $g_{\mu\nu}$. Si de plus la carte donne lieu à des coordonnées géodésiques normales²², alors un développement en série de l'élément de volume infinitésimal donne :

$$\sqrt{\text{Det}(g)} d\tau = \left(1 - \frac{R_{ij} x^i x^j}{6} + \dots\right) dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad (1.46)$$

²⁰Pour être plus rigoureux, soit $\gamma(s)$ une famille différentiable de géodésiques avec $\gamma_0(s) = C_1(s)$. Le vecteur séparation est $v = \left(\frac{d}{dt} \gamma(s)\right)_{s \rightarrow 0}$.

²¹Une sphère géodésique de rayon r en un point X est l'ensemble des points pouvant être atteints à partir de X avec des géodésiques de longueur plus petite ou égale à r

²²Que nous devons malheureusement voir dans la prochaine section.

où R_{ij} est le tenseur de Ricci, défini à partir du tenseur de Riemann selon l'équation :

$$Ric = R_{ij}dx^i \otimes dx^j = R_{ikj}^k dx^i \otimes dx^j . \quad (1.47)$$

1.5 Systèmes de coordonnées

Il est possible de faire de la géométrie différentielle sans jamais utiliser de système de coordonnées, c'est-à-dire sans munir les espaces tangents et cotangents de bases explicites. Cependant, il existe certains choix de cartes produisant des systèmes de coordonnées ayant des propriétés très intéressantes qu'il serait agréable de pouvoir utiliser. Nous introduirons donc ici deux choix de base particulièrement intéressants, les coordonnées géodésiques normales ainsi que ce que l'on appelle les Vierbeins.

1.5.1 Coordonnée géodésique normale

Les coordonnées géodésiques normales sont générées à partir d'une base de l'espace tangent en un point de la variété à l'aide de la fonction exponentielle. Cette dernière est une fonction qui prend un point $X \in S$ ainsi qu'un vecteur $v \in T_x S$ et y associe un point $exp_X v \in S$. Ce point est défini comme suit : soit γ la géodésique telle que $\gamma(0) = X$ et $\left(\frac{d\gamma(s)}{ds}\right)_{s \rightarrow 0} = v$, alors $exp_X v = \gamma(1)$. Notons que le domaine de définition de exp peut ne pas inclure tout les vecteurs de $v \in T_x S$ puisque, bien que le théorème d'existence des géodésiques nous garantissons qu'une géodésique ayant ce vecteur tangent existe, il ne garantit pas que son domaine contienne tout l'intervalle $[0, 1]$. Donc en général, le domaine de cette fonction ne contiendra pas tous les vecteurs de l'espace tangent, et son image ne sera pas toute la variété.

Nous appellerons voisinage normal, un ouvert de S tel que cette fonction agit comme un difféomorphisme.

Soit donc B_X une base de $T_X S$, c'est-à-dire une fonction qui prend un vecteur de \mathcal{R}^n et qui l'envoie vers un vecteur dans $T_X S$. La carte géodésique normale est définie dans un voisinage normal de X comme étant :

$$\phi = B_X^{-1} \circ exp_X^{-1} . \quad (1.48)$$

La base géodésique normale associée à ce point est la base de coordonnées engendrée par cette carte. Cette base est particulièrement intéressante pour plusieurs raisons. En particulier, il est toujours possible de choisir une base initiale telle que la métrique agisse comme l'identité²³. Si c'est le cas, nous appellerons la base étendue à tout le voisinage normal de X , base Riemannienne géodésique normale.

De plus, les symboles de Christoffel sont toujours identiquement nuls dans ce système de coordonnées. Nous pouvons alors aisément voir que les géodésiques dans cette base sont de simples fonctions linéaires. Il est effectivement facile de se convaincre que pour toute géodésique γ , alors $\phi(\gamma(t)) = t \left(\frac{d\gamma(s)}{ds} \right)_{s \rightarrow 0}$.

1.5.2 Vierbein

Un *Vierbein*, aussi appelé référentiel de Lorentz lorsque utilisé dans le cadre de la relativité générale, n'est pas réellement un choix de coordonnées, mais il semble logique de l'introduire ici. Un Vierbein est le choix d'une base locale sur l'espace tangent fait de façon à ce que la métrique soit triviale, c'est-à-dire $g_{ij} = g^{ij} = \delta^{ij}$. Il est en effet facile de voir qu'il existe toujours une matrice telle que :

$$g_{ij} e_k^i e_l^j = \delta_{kl} \quad (1.49)$$

puisque la métrique est symétrique et inversible, et donc que sa représentation matricielle est diagonalisable. Par contre, cette matrice dépendra de l'endroit où l'on se trouve sur la variété. Notons que la matrice de transformation e_k^i est parfois appelée Vierbein par abus de langage.

1.6 Exemple : la 2-sphère

Puisque cette longue liste de définitions peut sembler légèrement aride, nous allons présenter un exemple très familier afin de permettre une meilleure assimilation des résultats. Nous allons donc traiter un cas très populaire chez les physiciens, la 2-sphère²⁴ de rayon r . Nous allons d'abord vérifier qu'il s'agit bien d'une variété différentiable et nous allons ensuite calculer diverses quantités introduites précédemment.

²³C'est-à-dire que $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

²⁴Une n -sphère de rayon r centrée en $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ est l'ensemble des points situés à une distance r du point x . Une 0-sphère est donc une paire de points, une 1-sphère est un cercle, etc.

1.6.1 Est-ce une variété différentiable ?

Pour répondre à cette question, il nous faudra trouver un atlas donc la composition des cartes est différentiable sur l'intersection de leur domaine. Cependant, avant de faire cela, il nous faut trouver une description exacte de notre 2-sphère. Nous utiliserons la définition suivante²⁵ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} . \quad (1.50)$$

Les cartes que nous utiliserons sont sans doute les plus communes, celles-ci associent respectivement à chaque point (x, y, z) les coordonnées

$$\psi_1(x, y, z) = (\theta_1, \phi_1) = \left(\arccos\left(\frac{z}{r}\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) \quad (1.51)$$

$$\psi_2(x, y, z) = (\theta_2, \phi_2) = \left(\arccos\left(\frac{x}{r}\right), \arctan\left(\frac{-y}{z}\right) \right) \quad (1.52)$$

et leur inverse est

$$\psi_1^{-1}(\theta_1, \phi_1) = (r \sin(\theta_1) \cos(\phi_1), r \sin(\theta_1) \sin(\phi_1), r \cos(\theta_1)) \quad (1.53)$$

$$\psi_2^{-1}(\theta_2, \phi_2) = (r \cos(\theta_2), -r \sin(\theta_2) \sin(\phi_2), r \sin(\theta_2) \cos(\phi_2)) . \quad (1.54)$$

Notons que, pour que ces inverses existent, nous devons exclure un morceau de notre sphère du domaine de chacune d'elles. Pour la première carte, nous excluons la section avec $x = 0$ et $y \leq 0$, et pour la deuxième, la section $z = 0$ et $y \geq 0$. De toute évidence, puisque les fonctions dans (1.51) et (1.52) sont analytiques et inversibles, ces cartes sont bel et bien des homéomorphismes et leurs compositions des difféomorphismes. Pour la suite, nous ferons les calculs dans la première carte, la deuxième étant laissée aux soins du lecteur.

1.6.2 Espaces tangents et co-tangents

Puisque notre surface est ici immergée dans \mathbb{R}^3 , les cartes héritent de sa structure différentielle. En nous rappelant la formule définissant la base de l'espace tangent, nous

²⁵Ceci est un exemple de définition par plongement, c'est-à-dire que l'on définit d'abord la variété en la plongeant dans un espace vectoriel plus grand. Bien que ce soit une façon simple de définir une variété, ce n'est pas toujours la plus simple et ce n'est pas non plus toujours la plus appropriée.

pouvons donc voir que, exprimées dans la base standard $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, les vecteurs de base de l'espace tangent prennent la forme :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi_1^{-1}(\theta, \phi)) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \right] = \frac{\partial}{\partial \phi} (\psi_1^{-1}(\theta, \phi)) = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Également, si l'on se rappelle que la base de l'espace cotangent est définie telle que $dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_j^{i26}$, alors nous pouvons directement voir que

$$[d\theta] = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

$$[d\phi] = \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

où les vecteurs cotangents agissent sur les vecteurs tangents par simple produit matriciel.

1.6.3 La métrique

Maintenant que nous avons une base pour l'espace tangent et une pour l'espace cotangent, nous pouvons déterminer la métrique de la 2-sphère dans cette carte. En nous rappelant que $dx^i = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$, nous pouvons directement voir :

$$[g^{ij}]_{\theta\phi} = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & r^{-2} \sin^{-2}(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

ainsi que son inverse

$$[g_{ij}]_{\theta\phi} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

²⁶Nous avons également utilisé le fait qu'il doit existé une matrice g telle que $dx^i = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$.

1.6.4 Vecteurs de Killing

Nous allons maintenant trouver les vecteurs de Killing de la 2-sphère. Rappelons qu'un champ vectoriel contravariant ξ est un vecteur de Killing si et seulement si $\mathcal{L}_\xi g = 0$. Se rappelant que les isométries d'une sphère sont les rotations autour de son centre, nous commençons par essayer le champ $\frac{\partial}{\partial\phi}$:

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial\phi}} g = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial\phi} + g_{ik} \frac{\partial \delta_2^k}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \delta_2^k}{\partial x^i} \right) dx^i \otimes dx^j \quad (1.61)$$

et en se rappelant que g ne dépend pas de ϕ , nous pouvons voir directement que $\frac{\partial}{\partial\phi}$ est bel et bien un vecteur de Killing. Pour trouver les autres, il faudra travailler un peu plus fort. Insérant un vecteur général $\xi = a(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial\theta} + b(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial\phi}$ nous trouvons

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{11} = 2r^2 a^{(1,0)}(\theta, \phi) \quad (1.62)$$

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{12} = (\mathcal{L}_\xi g)_{21} = r^2 \left(a^{(0,1)}(\theta, \phi) + \sin^2(\theta) b^{(1,0)}(\theta, \phi) \right) \quad (1.63)$$

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{22} = 2r^2 \sin(\theta) \left(\cos(\theta) a(\theta, \phi) + \sin(\theta) b^{(0,1)}(\theta, \phi) \right) \quad (1.64)$$

où nous pouvons directement voir que $a^{(1,0)}(\theta, \phi) = 0$, c'est-à-dire que a ne dépend pas de θ . Le reste se réduit aux deux équations différentielles suivantes :

$$b^{(1,0)}(\theta, \phi) = -\csc^2(\theta) a'(\phi) \quad (1.65)$$

$$b^{(0,1)}(\theta, \phi) = \cot(\theta) (-a(\theta, \phi)) . \quad (1.66)$$

Et en résolvant ces équations, nous trouvons deux autres vecteurs de Killing :

$$\xi_1 = \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} \quad (1.67)$$

$$\xi_2 = \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} . \quad (1.68)$$

Puisque la dérivée de Lie est linéaire, il suit que toute les combinaisons linéaires avec des coefficients constants des trois vecteurs de Killing que nous avons trouvés seront aussi des vecteurs de Killing.

1.6.5 Connexion affine et géodésiques

Puisque nous avons trouvé la métrique, la connexion de Levi-Civita peut être déterminée sans grandes difficultés. Les symboles de Christoffel sont donc dans notre base

$$\Gamma_{22}^1 = -\cos(\theta)\sin(\theta) \quad (1.69)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot(\theta) . \quad (1.70)$$

les autres composantes étant nulles. Les équations pour une géodésique sont donc :

$$\theta''(s) = \sin(\theta(s))\cos(\theta(s))\phi'(s)^2 \quad (1.71)$$

$$\phi''(s) = -2\theta'(s)\cot(\theta(s))\phi'(s) . \quad (1.72)$$

Nous pouvons immédiatement voir que si $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ alors $\theta(s) = \frac{\pi}{2}$, $\phi(s) = \phi'(0)s + \phi(0)$ sera une solution. Si $\theta(0) \neq \frac{\pi}{2}$, alors la deuxième équation peut s'intégrer directement et les équations deviennent

$$\phi'(s) = \phi'(0) \left(\frac{\sin(\theta(0))}{\sin(\theta(s))} \right)^2 \quad (1.73)$$

$$\theta''(s) = (\phi'(0))^2 \sin^4(\theta(0)) \frac{\cos(\theta(s))}{\sin^3(\theta(s))} \quad (1.74)$$

et nous pouvons voir que $\phi'(0) = \theta''(s) = 0$ est aussi une solution.

1.6.6 Tenseur de Riemann

Nous avons maintenant tout ce dont nous avons besoin pour calculer le tenseur de Riemann de notre sphère. Ses composantes non-nulles sont :

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = \sin^2(\theta) \quad (1.75)$$

$$R_{112}^2 = -R_{121}^2 = -1 . \quad (1.76)$$

Nous pouvons donc en déduire le tenseur de Ricci :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} g_{ij} \quad (1.77)$$

et sa trace est :

$$R_i^i = \frac{2}{r^2}. \quad (1.78)$$

1.7 Conclusion

Nous avons d'abord vu comment le concept de variété généralise la notion de surface à un nombre arbitraire de dimensions. Nous avons ensuite introduit les espaces tangents et cotangents qui nous ont permis de développer la généralisation des champs vectoriels ainsi que les champs de covecteurs.

Nous avons ensuite introduit la métrique, en premier comme une fonction distance sur un ensemble, puis comme un produit scalaire sur l'espace tangent d'une variété. Le lien entre ces deux définitions fut alors introduit.

Les opérateurs différentiels furent ensuite introduits, en commençant par la dérivée de Lie, qui mesure la variation d'un champ tensoriel selon une courbe intégrale, puis nous avons vu la dérivée covariante qui utilise une connexion pour pouvoir comparer des vecteurs appartenant à des espaces vectoriels distincts.

Ceci nous a permis d'introduire les vecteurs de Killing, généralisant la notion de symétrie ainsi que les géodésiques et les tenseurs de Riemann et de Ricci.

Nous avons ensuite discuté des coordonnées géodésiques normales, qui diagonalisent la métrique et qui annulent la connexion, puis des Vierbeins, ou référentiels de Lorentz, qui ne font que diagonaliser la métrique.

Nous avons ensuite conclu par un traitement de la sphère en trois dimensions afin de voir un exemple concret d'application de tous ces concepts.

Ceci conclut donc notre introduction à la géométrie différentielle. Nous avons à présent entre les mains la plupart des concepts mathématiques qui seront nécessaires pour comprendre la relativité générale. Nous ne pouvons malheureusement pas introduire tout les concepts intéressants, faute d'espace, et nous ne pouvons qu'entrevoir tout ce que cette science peut faire pour nous. Le lecteur intéressé peut consulter [11], [12], [13].

CHAPITRE 2

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

La relativité générale est une théorie classique de la gravitation. Elle décrit comment l'énergie et l'impulsion déforment l'espace-temps et à l'opposé, la façon dont l'espace-temps affecte l'énergie et l'impulsion. Elle est une théorie entièrement géométrique, qui nécessite les outils de la géométrie différentielle pour être décrite de façon efficace. Ces outils permettent entre autres de la formuler de façon très élégante, ce qui a poussé bien des physiciens à vouloir rechercher des théories géométriques pour les autres formes d'interactions, sans grand succès.

Cette élégance ne se reflète malheureusement pas dans le comportement de la théorie, qui est hautement non-linéaire, et dans laquelle certains problèmes d'apparences très simples n'offrent aucune solution analytique. Par exemple, notons le problème à deux corps [15] [3] [5], qui en gravitation Newtonienne admet une solution analytique exacte, n'en possède pas ici, et il est nécessaire d'utiliser des approximations.

Par contre, toute cette complexité permet de nombreux phénomènes complexes, comme les trous noirs [20], les lentilles gravitationnelles [4], les ondes gravitationnelles [10], les bulles d'Alcubierres [16], les "trous de vers" [17], etc. Nous allons présenter ici les grandes lignes de cette théorie. Le sujet étant cependant très vaste, nous nous concentrerons sur les résultats pertinents à la recherche qui est présentée ici.

Premièrement, bien que la relativité générale s'exprime en termes géométriques, elle s'exprime en termes de géométries pseudo-Riemanniennes. Nous commencerons donc par exposer les légers changements à apporter aux concepts du chapitre précédent.

Nous présenterons ensuite les équations d'Einstein elles-mêmes, qui relient le tenseur d'Einstein et le tenseur énergie-impulsion, aussi appelé tenseur stress-énergie¹. Nous verrons ensuite la signification physique de ce tenseur ainsi que ses propriétés de conservations. Nous terminerons par une présentation des équations d'Einstein linéarisées dont les solutions représentent des ondes gravitationnelles.

Nous verrons ensuite les identités de Bianchi, qui sont des identités algébriques toujours respectées par le tenseur de Riemann, et qui nous permettent de voir que les équations d'Einstein ne sont pas toutes linéairement indépendantes.

¹Cette appellation est un anglicisme venant du nom anglais "stress-energy tensor".

Nous discuterons ensuite des conditions d'énergie, qui sont des inégalités algébriques relativement simples que le tenseur énergie-impulsion doit respecter pour avoir certaines caractéristiques dites "physiques", telle que ne pas contenir d'énergie négative et de ne pas représenter d'énergie se déplaçant plus vite que la lumière.

Nous traiterons ensuite les sous-variétés, et nous verrons comment l'espace-temps induit des structures sur ses sous-variétés. Nous nous concentrerons sur les sous-variétés de type temporel ou spatial mais nous ne discuterons pas des sous-variétés de type lumière. Nous verrons les équations de Lanczos ainsi que la façon dont une discontinuité dans la dérivée de la métrique introduit une singularité dans le tenseur d'Einstein.

Nous terminerons le tout par un exemple : Le trou noir statique. Nous introduirons également le théorème de Birkhoff, qui montre toute l'importance de cet exemple.

2.1 Géométrie Pseudo-Riemannienne

Dans le chapitre précédent, nous avons toujours supposé être dans une géométrie Riemannienne, c'est à dire munie d'une métrique qui est en tout point représentée par une matrice diagonalisable et dont les valeurs propres sont toutes égales à un. Or, dans une géométrie pseudo-Riemannienne, les valeurs propres ne sont pas toutes positives. Dans notre cas particulier, l'une d'elles est égale à un, alors que les autres² sont tous moins un.

Nous aurions également pu choisir d'avoir une valeur propre égale à moins un, et toutes les autres égales à un, mais nous garderons notre premier choix pour des raisons qui seront apparentes dans ce qui suivra. Cette différence, d'apparence anodine, aura des conséquences assez majeures sur certains concepts, que nous allons maintenant introduire.

2.1.1 Produit scalaire et norme

Maintenant que la métrique possède des valeurs propres de signes différents, elle n'engendre plus de produit scalaire. En effet, pour qu'une opération bilinéaire soit un produit scalaire, il faut, entre autres, qu'elle soit définie positivement, c'est à dire que lorsque ses deux arguments sont identiques, il faut que le résultat soit plus grand ou égal à zéro. L'égalité n'étant valable que lorsque les arguments sont nuls.

²Puisque la relativité générale est exprimée dans un espace à quatre dimensions, nous nous concentrerons sur le cas où il y a trois valeurs propres égales à un.

Ici, puisque les valeurs propres de la métrique ont des signes différents, il est facile de voir que cette condition n'est plus respectée. La métrique génère donc maintenant un pseudo-produit scalaire qui lui engendre une pseudo-norme³. Nous pourrions alors classer les vecteurs selon que leur norme est plus grande, plus petite, ou égale à zéro. Nous qualifierons un vecteur de norme plus grande que zéro de vecteur temporel, un de norme plus petite que zéro de vecteur spatial et un de norme égale à zéro de vecteur lumière.

Nous utiliserons aussi les mêmes dénominations pour les géodésiques dont la longueur est positive, négative ou nulle, ainsi que pour les sous-variétés qui ne contiennent que des géodésiques temporelles, spatiales ou lumières.

2.1.2 L'identité et le déterminant

Maintenant que les valeurs propres de la métrique ne sont plus égales à un, un système de coordonnées ne peut plus la ramener à l'identité. Le rôle de l'identité sera alors plutôt jouer par la métrique de Minkowski, qui est définie comme étant⁴ $\eta_{\mu\nu} = \delta_{0\mu}\delta_{0\nu} - \delta_{1\mu}\delta_{1\nu} - \delta_{2\mu}\delta_{2\nu} - \delta_{3\mu}\delta_{3\nu}$. En particulier, dans le système de coordonnées Riemannien géodésique normal, la métrique sera égale à $\eta_{\mu\nu}$.

De plus, nous pouvons facilement voir que le déterminant de la métrique sera toujours plus petit que zéro, de sorte qu'il faudra changer le signe à l'intérieur de la racine carré dans l'expression pour le volume d'un sous-ensemble.

2.2 Équations d'Einstein

Nous pouvons maintenant attaquer la base de la relativité générale : Les équations d'Einstein. Celles-ci forment un système de dix équations aux dérivées partielles non-linéaires qui s'écrit :

$$E = Ric - \frac{1}{2}Tr(Ric)g = \frac{4\pi G}{c^4}T \quad (2.1)$$

où G est la constante gravitationnelle de Newton [21] et c est la vitesse de la lumière dans le vide [22]. Ric est le tenseur de Ricci de l'espace-temps, une variété pseudo-

³Nous ferons généralement abstraction du préfixe "pseudo" et écrirons seulement "norme" lorsque le contexte indiquera clairement de quel type de géométrie l'on parle.

⁴Le signe de cette métrique est arbitraire, et certains auteurs la définissent plutôt comme étant le négatif de celle que nous avons définies. Hors, nous avons choisi ce signe puisque les géodésiques temporelles, qui représenteront des observateurs en mouvement, auront une longueur positive, alors que l'autre choix de convention donne une longueur négative

Riemannienne de dimension quatre. Nous avons également défini E , le tenseur d'Einstein. T est le tenseur énergie-impulsion, il décrit la densité et le flux d'énergie et d'impulsion. Il est donné⁵ en termes de dérivées fonctionnelles par la formule

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.2)$$

où \mathcal{L} est la densité lagrangienne[19] de ce qui se trouve dans l'espace temps.

2.2.1 Quelques propriétés intéressantes de T

Nous allons maintenant voir quelques caractéristiques intéressantes du tenseur énergie-impulsion[24] qui nous seront utiles par la suite. Premièrement, les équations d'Einstein impliquent une forme de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Plus précisément, un calcul somme toute fastidieux montre que la divergence covariante du côté gauche de l'équation s'annule identiquement et donc que la divergence covariante du côté droit doit s'annuler aussi. Ceci signifie :

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.3)$$

En insérant la densité lagrangienne d'une particule ponctuelle test⁶ libre dans la définition de T , nous pouvons voir que cette équation implique :

$$\frac{dU^{\mu}}{ds} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} U^{\nu} U^{\rho} = 0 \quad (2.4)$$

où U est la vitesse propre de la particule et s est son temps propre. Nous pouvons reconnaître ici l'équation pour une géodésique trouvée précédemment, ce qui nous permet de conclure : Une particule test libre se déplace toujours sur une géodésique de l'espace-temps.

Aussi, le tenseur T nous permet de connaître le courant d'énergie impulsion ressentie par une particule test. En particulier, si U est la vitesse propre d'une particule

⁵Notons que ce choix n'est pas unique, il existe également le tenseur d'énergie impulsion canonique [19], qui n'est par contre pas symétrique et ne peut donc pas servir ici. Aussi, le tenseur de Belinfante-Rosanfeld peut-être utilisé [23], mais l'on peut montrer qu'il est toujours égal à celui que nous allons utiliser.

⁶Une particule test est une particule qui ne fait que ressentir la métrique sans la modifier.

test, alors la particule "ressent" une densité d'énergie donnée par :

$$\rho = T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \quad (2.5)$$

ainsi qu'un courant d'énergie donné par :

$$J_\mu = T_{\mu\nu}U^\nu . \quad (2.6)$$

2.2.2 Approximation linéaire

Nous allons maintenant voir comment se comportent les équations d'Einstein lorsque l'on considère la métrique comme étant proche de celle de Minkowski. Autrement dit, nous dirons que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O^2(h_{\mu\nu}) , \quad (2.7)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O^2(h^{\mu\nu}) . \quad (2.8)$$

Les indices de h seront montés/descendus avec la métrique de Minkowski. Pour que ceci ait du sens, nous devons avoir $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Par une transformation de coordonnées astucieusement choisie, nous pouvons exiger de h la condition suivante :

$$\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^\mu{}_\mu \right)_{, \nu} = 0 \quad (2.9)$$

ce qui est analogue à faire un choix de jauge en électromagnétisme. Un calcul fastidieux mais élémentaire montre alors que les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\mu{}_\mu \right)_{, \alpha}{}^{, \alpha} = -2\frac{4\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (2.10)$$

Nous reconnaissons immédiatement la forme de l'équation d'onde. Les solutions de ces équations représentent donc des ondes gravitationnelles.

2.3 Identités de Bianchi

Nous avons déjà mentionné qu'il y a en réalité dix équations d'Einstein. La métrique ayant dix composantes indépendantes⁷, tout semble cohérent. Or, il est possible de montrer que la métrique ne possède pas dix composantes indépendantes, mais bien six. En effet, le choix d'un système de coordonnées particulier permet de choisir librement quatre des composantes de la métrique⁸. Les équations d'Einstein semblent donc former un système sur-déterminé et qui ne possède donc pas nécessairement de solution. C'est ici qu'interviennent les identités de Bianchi. Pour tout tenseurs d'ordre un contravariants a, b et c , ces identités prennent la forme suivante :

$$R(a, b)c + R(b, c)a + R(c, a)b = 0 \quad (2.11)$$

$$(\nabla_a R)(b, c) + (\nabla_b R)(c, a) + (\nabla_c R)(a, b) = 0. \quad (2.12)$$

Celles-ci montrent que les dix composantes linéairement indépendantes du tenseur de Ricci ne le sont pas complètement. Ces équations sont donc couplées, et l'on peut montrer qu'elles se réduisent à un système de six équations, soit juste assez pour définir correctement le tenseur métrique[24].

2.4 Les conditions d'énergie

Pour tout choix de métrique, les équations d'Einstein nous donnent le tenseur énergie-impulsion qui la produit. Cependant, il peut être difficile de voir la matière que représente physiquement ce tenseur. Il se peut en particulier que ce tenseur de puisse pas représenter une distribution de matière physiquement réaliste, par exemple si il décrit de la matière se déplaçant plus vite que la lumière. Nous devons donc avoir des critères pour dire si un tenseur T est physiquement réaliste, et c'est ce que sont les conditions d'énergie.

Ces conditions [9], au nombre de quatre, nous permettent de vérifier différentes

⁷Un tenseur d'ordre deux complètement symétrique de dimension n possède toujours $\frac{n(n+1)}{2}$ composantes linéairement indépendantes.

⁸Par abus de langage, nous appellerons "choix de jauge" le procédé par lequel l'on fixe ces quatre composantes arbitraires. Il faut également noter que ces composantes ne peuvent jamais être choisies de façon à rendre la métrique non-inversible ou de façon à changer le nombre de valeurs propres positives/négatives.

propriétés que toute distribution d'énergie-impulsion réaliste devrait satisfaire⁹. Dans ce qui suit, u sera un vecteur de type lumière et v un vecteur de type temporel.

2.4.1 La condition d'énergie faible

La condition d'énergie faible stipule qu'un observateur inertiel ne doit jamais pouvoir "ressentir" une densité d'énergie négative en un point de l'espace-temps. C'est donc dire que pour toute géodésique de type temporel de vecteur tangent v nous devons avoir

$$\rho = T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (2.13)$$

Or, puisque nous avons vu que pour tout vecteur v et pour tout point X d'une variété il existe une géodésique passant par ce point et ayant ce vecteur tangent, ceci est équivalent à dire que l'inégalité (2.13) doit tenir en tout point pour tout vecteur de type temporel.

2.4.2 La condition d'énergie nulle

La condition d'énergie faible stipule qu'un photon ne devrait jamais "ressentir" de densité négative d'énergie. C'est donc équivalent à dire que la condition d'énergie faible tient aussi lorsque l'on prend la limite où la vitesse de l'observateur tend vers c . Elle s'écrit donc de façon très similaire :

$$\rho = T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0. \quad (2.14)$$

Nous pouvons également voir qu'à moins que $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ ne soit pas une fonction continue de v , la condition d'énergie faible impliquera la condition d'énergie nulle.

2.4.3 La condition d'énergie dominante

La condition d'énergie dominante stipule qu'un observateur inertiel ou encore un photon ne doivent jamais mesurer un courant d'énergie se déplaçant à l'envers dans le temps ou se déplaçant plus vite que la lumière. En utilisant le même argument que pour

⁹Nous verrons cependant qu'il existe des distributions d'énergie que l'on sait physique et qui violent ces conditions [26].

la condition d'énergie faible, ceci se résume donc à :

$$J^0 = T_{\nu}^0 v^{\nu} \geq 0 \quad (2.15)$$

et

$$J^{\mu} J_{\mu} = T_{\nu}^{\mu} v^{\nu} T_{\mu\xi} v^{\xi} \geq 0 \quad (2.16)$$

pour tout vecteur v de type temporel. Encore une fois, si $T_{\mu\xi} v^{\xi}$ est une fonction continue de v , il suit que si c'est vrai pour un observateur inertiel, ce sera aussi vrai pour un photon.

2.4.4 La condition d'énergie forte

La condition d'énergie forte stipule que la gravité doit, en moyenne, être attractive. La signification exacte de ceci est un peu floue, et nous citerons son expression mathématique sans plus d'explication :

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha} g_{\mu\nu} \right) v^{\mu} v^{\nu} \geq 0. \quad (2.17)$$

Nous ne nous attarderons pas à cette condition, puisqu'il existe de nombreux systèmes physiques qui la viole.

2.4.5 Un exemple : Le fluide parfait

Afin d'avoir une idée concrète de l'application de ces conditions, nous allons maintenant voir un exemple plutôt simple : Un fluide parfait. Le tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait est donné par :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

où ρ est la densité du fluide, p est sa pression et u est la vitesse propre des éléments du fluide, que nous supposerons normalisée¹⁰. Si nous choisissons un observateur avec une vitesse v , que nous prendrons de norme un sans perte de généralité, alors la condition d'énergie faible se résume à

$$(\rho + p)(u_{\mu} v^{\mu})^2 - p \geq 0. \quad (2.19)$$

¹⁰i.e. $u^{\mu} u_{\mu} = 1$

Supposons maintenant que nous sommes dans un référentiel où le fluide est au repos. Dans ce référentiel, nous aurons alors $u_\mu = \delta_{0\mu}$ et $[v^\mu] = \gamma(1, a, b, c)$ avec $\gamma^{-2} = 1 - a^2 - b^2 - c^2 \geq 0$. La condition d'énergie faible devient donc

$$(\rho + p)\gamma^2 - p \geq 0 \quad (2.20)$$

et comme γ peut prendre n'importe quelle valeur entre un et l'infini, ceci est équivalent à

$$\rho \geq 0 \quad (2.21)$$

et

$$\rho + p \geq 0. \quad (2.22)$$

La condition d'énergie dominante quant à elle s'écrit :

$$T_\nu^0 v^\nu = (\rho + p)u^0(u_\nu v^\nu) - p v^0 \geq 0 \quad (2.23)$$

et

$$T_\nu^\mu v^\nu T_{\mu\xi} v^\xi = ((\rho + p)u^\mu(u_\nu v^\nu) - p v^\mu) ((\rho + p)u_\mu(u_\nu v^\nu) - p v_\mu) \geq 0 \quad (2.24)$$

ou encore :

$$(\rho^2 - p^2)(u_\nu v^\nu)^2 + p^2 \geq 0. \quad (2.25)$$

En utilisant le même référentiel que pour la condition d'énergie faible, nous trouvons que ces conditions sont équivalentes à

$$\rho \geq 0 \quad (2.26)$$

et

$$(\rho^2 - p^2)(\gamma)^2 + p^2 \geq 0 \quad (2.27)$$

cette dernière inégalité étant toujours vérifiée si et seulement si

$$\rho \geq |p| \quad (2.28)$$

et

$$\rho^2 \geq 0 \quad (2.29)$$

où la deuxième condition est de toute évidence toujours vérifiée. La condition d'énergie forte, elle, s'écrit

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha} g_{\mu\nu} \right) v^{\mu} v^{\nu} = (\rho + p)(u_{\mu} v^{\mu})^2 - \frac{1}{2}(\rho - p) \geq 0 \quad (2.30)$$

où l'utilisation de notre référentiel savamment choisi nous permet de réduire cette condition aux deux inégalités suivantes :

$$\rho + 3p \geq 0 \quad (2.31)$$

$$\rho + p \geq 0. \quad (2.32)$$

2.4.6 Commentaires sur ces conditions

Ces conditions, bien que raisonnables, ne sont pas respectées par toutes les configurations physiques connues. Par exemple, entre deux plaques conductrices infinies séparées d'une distance d , l'effet Casimir[25] engendre une densité d'énergie de $\rho = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar}{c^4}$ et viole donc de toute évidence la condition d'énergie faible. Ces conditions ne sont donc pas nécessaires pour qu'une configuration représente bien un phénomène physique. Notons également qu'elles ne sont pas non plus suffisantes. En effet, elles ne concernent que la structure locale de la distribution d'énergie, et ne peut donc pas identifier de problèmes globaux, comme par exemple la présence de géodésiques temporelles closes, comme dans un trou noir en rotation[27], qui représentent de la matière voyageant dans le temps pour revenir à son point de départ.

2.5 Sous-variétés

En relativité générale, nous sommes souvent amenés à considérer des sous-variétés de notre espace-temps. Pensons en particulier à des surfaces à temps constant, qui décrivent de quoi à l'air l'univers à un instant donné. Or la structure de ces surfaces

peut-être déduite¹¹ de celle de l'espace-temps, et c'est ce que nous allons voir ici. Nous allons commencer par traiter la façon générale d'induire une structure. Nous présenterons alors certains résultats [9] sur les sous-variétés de type spatial, ainsi que les conditions pour avoir un espace-temps exempt de singularité. Dans cette section, nous appellerons l'espace-temps complet \mathbb{V} et la sous-variété Σ .

2.5.1 Structures induites

Supposons que nous avons une carte de l'espace-temps (U, ϕ) de coordonnées x^α ainsi que V un sous-ensemble ouvert de la sous-variété¹² avec $V \in U$. Nous pouvons voir qu'il doit y avoir un sous-ensemble de $W \in \phi(U)$ tel que que $\phi^{-1}(W) = V$. Décrivons ce sous-ensemble par des fonctions $x^\alpha(y^a)$ que nous supposons différentiables. Nous pouvons alors voir que $(V, \phi \circ x^\alpha)$ est une carte de Σ , de coordonnées y^a . Elle induit en particulier une base sur l'espace tangent de Σ donnée par

$$\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.33)$$

et induit donc une métrique par

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} . \quad (2.34)$$

Les autres structures seront induites de la même façon. Il convient cependant de mentionner que $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$ n'est en général pas une matrice inversible, et nous ne pourrions pas directement induire de tenseurs contravariants sur la sous-variété. Nous devons d'abord transformer le tenseur contravariant en tenseur covariant à l'aide de la métrique avant de l'induire et ensuite de le transformer en tenseur contravariant à l'aide de la métrique induite.

2.5.2 Continuité à une interface

Nous considérons maintenant une surface Σ orientable, telle que la métrique est décrite d'un côté par $g_{\mu\nu}^+$ et de l'autre par $g_{\mu\nu}^-$. Nous supposons également que la normale n_α de Σ pointe du côté $+$. Nous supposons de plus que nous avons une

¹¹Nous parlerons alors de structure induite sur la sous-variété.

¹²Notons que nous utilisons des indices latins pour parler des tenseurs définis sur la sous-variété, et des indices grecs pour parler des tenseurs définis sur l'espace-temps complet.

coordonnée l telle que $l < 0$ du côté $-$, $l = 0$ sur Σ et $l > 0$ du côté $+$. La métrique de l'espace-temps est donc décrite par¹³ :

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(-l)g_{\alpha\beta}^- + \Theta(l)g_{\alpha\beta}^+ \quad (2.35)$$

et nous voulons qu'elle soit une solution valide des équations d'Einstein au sens des distributions. Un calcul simple montre d'abord que

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + n^\alpha n_\alpha \delta(l) n_\gamma (g_{\alpha\beta}^+ - g_{\alpha\beta}^-) \quad (2.36)$$

et nous pouvons voir que le terme devant le delta de Dirac posera problème lorsque l'on calculera les symboles de Christoffel à moins qu'il ne s'annule identiquement. Nous devons donc avoir $g_{\alpha\beta}^+ = g_{\alpha\beta}^-$ aux points où $l = 0$. Cependant, cette condition semble dépendre du système de coordonnées utilisé, nous transformons donc cette affirmation de façon à ce qu'elle ne dépende pas du système de coordonnées, et nous obtenons :

$$g_{ab}^+ = g_{ab}^- \quad (2.37)$$

qui revient à dire que les métriques des deux côtés de notre surface induisent la même métrique sur Σ .

Ensuite, un calcul fort fastidieux donne le tenseur T :

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(-l)T_{\alpha\beta}^- + \Theta(l)T_{\alpha\beta}^+ + \delta(l)S_{\alpha\beta} \quad (2.38)$$

où

$$16\pi\varepsilon S_{\alpha\beta} = \kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - \kappa_\mu^\mu n_{\alpha\beta} - \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} (\kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \kappa_\mu^\mu \varepsilon) \quad (2.39)$$

avec $\varepsilon = n^\mu n_\mu$ et

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon (g_{\alpha\beta,\gamma}^+ - g_{\alpha\beta,\gamma}^-) n^\gamma. \quad (2.40)$$

Donc, pour que l'espace-temps soit exempt de singularités à l'interface, il faut que $S_{\alpha\beta} = 0$. Il est possible de montrer que le tenseur S est toujours tangent à Σ et que donc

¹³ $\Theta(l)$ est la fonction de Heaviside, elle vaut zéro si son argument est plus petit que zéro et un si il est plus grand.

$S^{\alpha\beta} = S^{ab} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}$. De plus, il est possible de montrer que

$$S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} (K_{ab}^+ - K_{ab}^- - g_{ab} (Tr(K^+) - Tr(K^-))) \quad (2.41)$$

avec $K_{ab} = (n_{\alpha;\beta}) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}$ la courbure externe¹⁴ induite sur Σ . Nous pouvons alors voir que l'espace temps sera exempt de singularité à l'interface si

$$K_{ab}^+ = K_{ab}^- . \quad (2.42)$$

C'est à dire que les deux métriques induisent la même courbure externe sur la sous-variété. Les conditions (2.37) et (2.42) sont souvent appelées équations de Lanczos.

2.6 Le trou noir statique

Nous allons maintenant voir un exemple d'espace-temps particulièrement intéressant, le trou noir statique. Cet espace temps représente l'extérieur d'un corps sphérique et statique de masse¹⁵ m . Il est décrit par la métrique de Schwarzschild, qui, en coordonnée de Schwarzschild, prend la forme :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 . \quad (2.43)$$

Dans ce système, les coordonnées θ et ϕ sont les coordonnées sphériques standards, t est le temps mesuré par un observateur se trouvant infiniment loin du corps et r représente la distance par rapport au corps. Cette carte n'est valide que pour $r > r_s = 2m$. En ce point, nos coordonnées de temps et d'espace n'ont plus de sens, c'est ce que l'on appelle une singularité de coordonnées. Ce phénomène apparaît généralement lorsque la carte n'a pas été choisie de façon appropriée pour une région de la variété. Elle peut alors représenter un vrai phénomène physique, ou n'être qu'une simple curiosité du système de coordonnées. Afin de savoir de quel type de phénomène il s'agit ici, nous allons introduire un système de coordonnées qui couvre toute la variété, soit le système de Gullstrand-Painlevé.

¹⁴Aussi appelée seconde forme fondamentale. Pour la signification géométrique de ce tenseur, voir par exemple [10]

¹⁵En unité telle que $G = c = 1$.

2.6.0.1 Coordonnée de Gullstrand-Painlevé

Ces coordonnées[28] sont très utiles parce que leur interprétation physique est très simple, tout en couvrant tout l'espace temps. La coordonnée temporelle est définie à partir des coordonnées de Schwarzschild de la façon suivante :

$$t_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \left(t + 4m \left(\frac{1 - \frac{2m}{r}}{\sqrt{\frac{2m}{r}}} \right) \right) \quad (2.44)$$

et les autres coordonnées sont les mêmes. Un calcul simple montre que dans ce système la métrique prends la forme :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt_r^2 - 2\sqrt{\frac{2m}{r}} dr dt_r - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (2.45)$$

qui est inversible et non-singulière pour tout $r > 0$. Les composantes de la connexion affine, du tenseur de Riemann et de Ricci peuvent être calculées sans grandes difficultés par la suite, nous nous contentons ici de mentionner que le tenseur de Ricci est identiquement nul partout, ce qui signifie que cette métrique est bel et bien une solution des équations d'Einstein pour le vide autour d'un corps sphérique.

2.6.1 Géodésique radiale

Maintenant que nous avons un système de coordonnées qui couvre toute la variété, nous allons considérer les géodésiques radiales, afin de déterminer comment se comportent des rayons lumineux ainsi que des observateurs qui seraient en chute libre vers le trou noir. Commençons par les rayons lumineux.

2.6.1.1 Géodésique nulle

Les géodésiques sur lesquels se propage des rayons de lumière sont toujours de type nul, c'est à dire que leurs vecteurs tangents sont toujours orthogonaux à eux même. Pour une géodésique radiale, nous avons donc :

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) - 2\sqrt{\frac{2m}{r}} \frac{dr}{dt_r} - \left(\frac{dr}{dt_r} \right)^2 \quad (2.46)$$

c'est à dire,

$$\left(\frac{dr}{dt_r} + \left(1 + \frac{2m}{r}\right)\right) \left(\frac{dr}{dt_r} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right) = 0. \quad (2.47)$$

Nous avons donc deux solutions possibles :

$$\frac{dr}{dt_r} = \pm 1 - \frac{2m}{r} \quad (2.48)$$

qui correspondent à un rayon de lumière orienté vers l'intérieur ou vers l'extérieur. Notons que si $r < 2m$ alors $\frac{dr}{dt_r} < 0$ et un rayon de lumière est donc toujours orienté vers l'intérieur. Autrement dit, la lumière ne peut jamais s'échapper de cette région, et le point $r = 2m$ est appelé un horizon de Schwarzschild.

2.6.1.2 Géodésique temporelle

Nous nous intéressons maintenant aux géodésiques temporelles car elles représentent des observateurs inertiels. Nous voulons donc résoudre les équations suivantes

$$\frac{d^2 x^\mu(s)}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha(s)}{d\tau} \frac{dx^\beta(s)}{d\tau} = 0 \quad (2.49)$$

dans le cas particulier où $\frac{d\theta}{d\tau}(0) = \frac{d\phi}{d\tau}(0) = 0$, c'est à dire qu'au moment initial, l'observateur ne se déplace qu'en direction radiale. L'équation pour $\frac{d^2\phi(\tau)}{d\tau^2}$ peut être intégrée directement et nous trouvons

$$\phi'(\tau) = \phi'(0) \left(\frac{r(0) \sin(\theta(0))}{r(\tau) \sin(\theta(\tau))}\right)^2 \quad (2.50)$$

et comme $\phi'(0) = 0$, nous trouvons donc $\phi'(\tau) = 0$. L'équation pour $\frac{d^2\theta(\tau)}{d\tau^2}$ peut être intégrée elle aussi et l'on trouve :

$$\theta'(\tau) = \theta'(0) \left(\frac{r(0)}{r(\tau)}\right)^2 \quad (2.51)$$

et comme $\theta'(0) = 0$, nous trouvons donc $\theta'(\tau) = 0$. De plus, nous pouvons choisir la vitesse comme étant normalisée, ce qui nous permet d'obtenir $t'_r(\tau)$:

$$t'_r(\tau) = \frac{\sqrt{\frac{2m}{r(\tau)} r(\tau) r'(\tau)} + \sqrt{r(\tau) (-2m + r(\tau) (1 + r'(\tau)^2))}}{r(\tau) - 2m}. \quad (2.52)$$

Une fois tout cela inséré dans l'équation pour $r''(\tau)$, nous obtenons alors :

$$\frac{m}{r(\tau)^2} + r''(\tau) = 0 \quad (2.53)$$

qui est exactement l'équation du mouvement en gravitation Newtonienne ! La seule différence est qu'elle fait intervenir le temps propre de l'observateur plutôt que la coordonnée de temps. Examinons en particulier le cas d'un observateur en chute libre depuis l'infini. La solution de la précédente équation est alors

$$r'(\tau) = \pm \frac{2m}{r(\tau)} \quad (2.54)$$

et l'équation pour le temps devient

$$t'(\tau) = \frac{r(\tau) \pm 2m}{r(\tau) - 2m} \quad (2.55)$$

nous choisissons la solution – car c'est elle qui représente une particule qui tombe depuis l'infini vers le trou noir. Nous pouvons alors voir que $t'(\tau) = 1$, c'est à dire que la coordonnée temporelle correspond au temps propre de l'observateur, à une constante additive près. Nous pouvons également voir que la vitesse radiale de l'observateur dépassera $1 = c$ lors que $r(\tau) < 2m$, c'est à dire lorsqu'il franchira l'horizon. Ceci ne contredit pas le principe selon lequel un observateur ne peut dépasser la vitesse de la lumière, car une observation judicieuse de notre résultat pour les géodésiques de type lumière montre que :

$$\frac{r'_{\text{observateur}}(r)}{r'_{\text{lumière}}(r)} = \frac{2m}{r + 2m} < 1 . \quad (2.56)$$

2.6.2 Théorème de Birkhoff

Nous allons conclure ce traitement des trous noirs par un théorème fondamental : Le théorème de Birkhoff[8]. Celui stipule que si une région de l'espace temps est vide, avec symétrie sphérique, alors il est statique et du type Schwarzschild-de Sitter¹⁶. Être vide signifie que le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique, et non pas $T_{\mu\nu} = 0$.

¹⁶L'espace de Sitter est un espace-temps rempli d'une densité d'énergie constante, dont le tenseur énergie-impulsion est λg où λ est appelé "constante cosmologique". Il est l'équivalent hyperbolique d'une sphère, ou d'une pseudo-sphère, selon le signe de cette densité d'énergie. Un espace Schwarzschild-de Sitter représente donc un trou noir baignant dans une constante cosmologique.

Être statique signifie qu'il possède un vecteur de Killing de type temporel et avoir symétrie sphérique signifie qu'il possède un ensemble de vecteur de Killing de type spatial qui engendre une représentation fidèle¹⁷ de l'algèbre $so(3)$. Ce théorème stipule donc que sous ces hypothèses, alors il existe une carte telle que :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \Lambda \frac{r^3}{3}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} - \Lambda \frac{r^3}{3}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.57)$$

2.7 Conclusion

En somme, la relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation qui associe une déformation de l'espace temps à la présence d'énergie ou d'impulsion. Les équations du mouvements sont remarquablement compliqués, parce que les équations d'Einstein sont hautement non-linéaires, d'une part, mais également parce que chaque corps déforme l'espace-temps tout en subissant lui-même les effets de cette déformation. Pour une particule test par contre, elle se déplace seulement sur des géodésiques, se qui est plus simple. Également, lorsque l'on considère l'espace-temps comme étant proche de l'espace de Minkowski, alors les équations d'Einstein prennent une forme rappelant l'équation d'onde.

La géométrie de Minkowski utilisée nous a obligé à modifier légèrement nos définitions géométriques, en plus de donner lieu à trois classes de vecteurs différents : temporel, spatial et lumière, chacune d'elle étant caractérisée par le signe de la norme des vecteurs lui appartenant.

Les conditions d'énergie nous donnent des critères algébriques relativement simples pour déterminer si un espace-temps donné est physiquement réaliste localement. Elles ne tiennent malheureusement pas compte de propriétés globales généralement admises comme n'étant pas physique, telle que la présence de géodésiques temporelles fermées. Elles sont également violées dans certains cas réel comme dans l'effet Casimir ainsi que dans certains scénarios inflationnistes [26].

Les sous-variétés héritent d'une structure provenant de l'espace-temps complet. Nous avons seulement traité le cas des sous-variétés spatiales et temporelles, les sous-

¹⁷i.e. il existe $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ des vecteurs de Killing de l'espace-temps tous linéairement indépendants tels que $\mathcal{L}_{\xi^n} \xi^m = \frac{\varepsilon_{nmp}}{\sqrt{-g}} \xi^p$, où ε_{nmp} est le symbole de Lévi-Civita.

variétés de type lumière nécessitant un traitement plus délicat. Nous avons vu que l'espace-temps induit une métrique, ainsi qu'une courbure extérieure dessus. La première se doit d'être toujours continue, mais la seconde peut-être discontinue, signe de la présence d'une singularité dans la densité d'énergie.

Finalement, nous avons traité le cas du trou noir statique, particulièrement en coordonnées de Gullstrand-Painlevé. Nous avons alors vu que la lumière ne pouvait s'échapper d'une surface, appelé horizon, et que la vitesse d'un observateur dépassait c lorsqu'il franchissait cette surface. Heureusement, la lumière est elle même accélérée et sa vitesse demeure toujours supérieure à la vitesse de tout observateur. Nous avons finalement vu le théorème de Birkhoff, qui stipule qu'un espace temps dont le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique et qui a symétrie sphérique est toujours statique et peut toujours être décrit par la métrique de Schwarzschild-de Sitter.

Nous n'avons fait ici qu'une introduction très succincte à ce vaste sujet, nous contentant d'introduire les notions nécessaires à la compréhension du présent document. Une foule d'autres outils et résultats extrêmement fascinants peuvent être trouvés dans la littérature, par exemple dans [9] et [10].

CHAPITRE 3

STRUCTURE D'UNE BULLE D'ESPACE-TEMPS

Supposons qu'un espace-temps puisse être séparé en trois sous-variétés disjointes et que nous connaissions la distribution d'énergie se trouvant dans seulement deux des trois sous-variétés. Qu'est-il alors possible de dire sur la distribution d'énergie dans la troisième ? C'est un problème de ce type que nous allons traiter ici. En particulier, nous allons considérer que les trois sous-variétés sont enchâssées les unes dans les autres, et que leurs bords ont la symétrie sphérique. Par ceci nous voulons dire qu'il n'existe pas de chemin continue qui puisse passer de la première sous-variété à la troisième sans passer par la deuxième et que la surface à la jonction de chacune des sous-variétés est une variété à symétrie sphérique¹. À un temps donné, l'espace a donc l'air d'une bulle sphérique dont la membrane a une épaisseur finie.

Nous supposerons également que les distributions d'énergie dans les sous-variétés ont elles-mêmes la symétrie sphérique. De plus, afin de simplifier les choses, nous supposerons que tout ceci varie suffisamment lentement dans le temps pour que nous puissions considérer l'espace-temps comme étant statique. Nous demanderons également que l'espace-temps soit continu et que la distribution d'énergie le soit elle aussi.

Ensuite, nous pourrons utiliser des critères permettant de restreindre les paramètres d'une distribution d'énergie donnée, les conditions d'énergie, que nous avons vus précédemment dans la section 2.4. Combinées à un ensemble de conditions aux bords de la bulle, nous pourrons alors obtenir des bornes sur les possibles distributions d'énergie à l'intérieur de sa "membrane".

Dans la section 3.1, nous allons d'abord étudier les conditions d'énergie pour un espace-temps statique et à symétrie sphérique général. Nous pourrons alors montrer qu'elles se résument à un ensemble de quatre inégalités différentielles pour les composantes de la métrique.

Nous regarderons ensuite un cas particulier de symétrie sphérique. Nous passerons alors de quatre inégalités à seulement deux. Nous pourrons ensuite exprimer notre métrique de façon à rendre ces inégalités plus faciles à étudier dans certains cas pratiques.

¹Rappelons qu'une variété à symétrie sphérique possède un ensemble de vecteur de Killing engendrant une représentation fidèle de $so(3)$ [8], ce qui revient à dire que cette variété est localement difféomorphe à une 2-sphère.

Finalement, nous considérerons plusieurs exemples de ce type de bulle, afin de voir les restrictions que les conditions d'énergie combinées aux conditions aux bords peuvent imposer. Nous nous concentrerons sur des bulles dont l'extérieur est décrit par la métrique de Schwarzschild de Sitter [29], c'est-à-dire des trous noirs baignant dans une constante cosmologique. Nous prendrons également soin dans chacun des cas de montrer les résultats que l'analyse traditionnelle² donnerait et de les comparer aux nôtres.

3.1 Les conditions d'énergie

Bien qu'il y ait quatre conditions d'énergie communément admises, la condition nulle, la faible, la forte et la dominante, nous ne considérerons pas la condition d'énergie forte. La raison étant que, comme mentionné au chapitre précédent, il y a de nombreuses situations physiquement acceptables qui la violent. De plus, sa signification physique est plus nébuleuse que celle des trois autres conditions.

De plus, comme nous ne nous intéressons qu'à des espaces-temps statiques et à symétrie sphérique, nous considérerons que la métrique peut être exprimée comme suit :

$$ds^2 = (\exp 2\Phi(r))dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}dr^2 - r^2d\theta - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 .$$

Ces coordonnées sont appelées "coordonnées de courbure" et il est possible de montrer que tout espace-temps statique à symétrie sphérique peut être mis dans cette forme [6]. De plus, cette paramétrisation est particulièrement intéressante puisqu'il est possible de donner une signification physique relativement simple aux fonctions qui y apparaissent. La fonction $m(r)$ représente la masse gravitationnelle effective, c'est-à-dire la quantité d'énergie contenue dans une sphère de rayon r . La fonction $\Phi(r)$ quant à elle représente le potentiel gravitationnel effectif de la distribution d'énergie.

Également, si cette métrique est une solution des équations d'Einstein, alors le tenseur d'Einstein est proportionnel au tenseur stress-énergie. Donc, $E^{\mu\nu}$ répondra aux mêmes inégalités que $T^{\mu\nu}$ et il sera plus simple de l'utiliser. Dans ce système de coor-

²Traditionnellement, de tel types de bulle sont considérés comme étant infiniment minces, et leurs bords étudiés en utilisant simplement les équations de Lanczos. La continuité de la distribution d'énergie n'est généralement pas demandée non plus. Les équations d'Einstein sont alors vues aux sens des distributions et seule la continuité de la métrique est exigée.

données, le tenseur d'Einstein s'exprime comme :

$$E_0^0 = \frac{2m'(r)}{r^2} \quad (3.1)$$

$$E_1^1 = \frac{2(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r))}{r^3} \quad (3.2)$$

$$E_2^2 = \frac{A + m'(r)(r\Phi'(r) + 1)}{r^2} \quad (3.3)$$

$$E_3^3 = E_2^2 \quad (3.4)$$

où nous avons défini :

$$A = -m(r) \left(\Phi'(r) + \frac{1}{r} \right) - (r - 2m(r)) (r\Phi''(r) + r\Phi'(r)^2 + \Phi'(r)) . \quad (3.5)$$

Pour obtenir une expression concrète pour les champs vectoriels dont nous aurons besoins, nous utiliserons un référentiel de Lorentz, dont les matrices de changement de coordonnées sont :

$$e_i^\mu = \begin{pmatrix} \exp(\Phi(r)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$e_\mu^i = \begin{pmatrix} \exp(-\Phi(r)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin(\theta))^{-1} \end{pmatrix} .$$

On vérifie aisément que ces matrices satisfont les relations habituelles, $e_\mu^i e_j^\mu = \delta_j^i$, $g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = \eta_{ij}$ et $g^{\mu\nu} e_\mu^i e_\nu^j = \eta^{ij}$ où η_{ij} est la métrique usuelle sur l'espace de Minkowski. On peut également vérifier que l'expression de E_ν^μ est la même dans le référentiel de Lorentz que dans le référentiel des coordonnées. Dans ce référentiel, un champ vectoriel temporel orienté vers le futur³ prend la forme suivante :

$$[n^i] = \frac{1}{1 - a^2 - b^2 - c^2} \{1, a, b, c\} \quad (3.6)$$

³Nous le choisissons de norme 1 sans perte de généralité

$$[n_i] = \frac{1}{1 - a^2 - b^2 - c^2} \{1, -a, -b, -c\} \quad (3.7)$$

où nous devons avoir que $1 > a^2 + b^2 + c^2$. Si ce champ était de type lumière, il aurait plutôt la forme :

$$[n^i] = \{1, a, b, c\} \quad (3.8)$$

$$[n_i] = \{1, -a, -b, -c\} \quad (3.9)$$

et nous aurions la restriction $1 = a^2 + b^2 + c^2$. Nous avons donc maintenant les outils nécessaires pour étudier les trois conditions d'énergie que nous avons choisies.

3.1.1 La condition d'énergie nulle

Utilisant les résultats précédents, la condition d'énergie nulle se réduit à l'inégalité suivante :

$$2a^2 (rm'(r) - m(r) + (r - 2m(r))r\Phi'(r)) + (1 - a^2) (-Ar + rm'(r) (1 - r\Phi'(r)) + (1 - r)m(r)r\Phi'(r)) \geq 0 \quad (3.10)$$

où nous avons utilisé le champ vectoriel de type lumière (3.8). Si ce champ est radial, alors nous avons $b = c = 0$ et $a = \pm 1$. La condition devient alors :

$$\Phi'(r) \geq \frac{m(r) - rm'(r)}{r(r - 2m(r))}. \quad (3.11)$$

Si le champ n'est pas radial, nous pouvons alors écrire la condition ainsi :

$$\left(\frac{2a^2}{1 - a^2} \right) (rm'(r) + r(r - 2m(r))\Phi'(r) - m(r)) \geq r(A + m'(r)(r\Phi'(r) - 1) + (r - 1)m(r)\Phi'(r)). \quad (3.12)$$

Le terme de gauche est toujours plus grand que zéro, d'après l'inégalité (3.11), et comme c'est une fonction strictement croissante de a^2 , il suit que cette condition sera toujours vérifiée si elle tient aux points $a^2 = 1$ et $a^2 = 0$. Comme nous avons déjà vérifié le cas où $a^2 = 1$, le seul cas restant nous donne l'inégalité suivante :

$$A + m'(r)(r\Phi'(r) - 1) + (r - 1)m(r)\Phi'(r) \leq 0. \quad (3.13)$$

La condition d'énergie nulle se réduit donc aux deux inégalités (3.11) et (3.13).

3.1.2 La condition d'énergie faible

En utilisant les expressions obtenues pour le tenseur d'Einstein et pour le champ vectoriel de type temporel, la condition d'énergie faible, $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu \geq 0$, se réduit à :

$$\frac{(b^2 + c^2) (Ar + (r^2 m'(r) + (r-1)rm(r)) \Phi'(r) + rm'(r))}{r^3 (a^2 + b^2 + c^2 - 1)} + \frac{2a^2 (m(r) - r(r-2m(r))\Phi'(r)) - 2rm'(r)}{r^3 (a^2 + b^2 + c^2 - 1)} \geq 0. \quad (3.14)$$

Si le champ vectoriel représente la vitesse propre d'un observateur immobile dans ce référentiel, nous aurons $a = b = c = 0$, et la condition devient simplement :

$$\frac{2m'(r)}{r^2} \geq 0 \quad (3.15)$$

ou

$$m'(r) \geq 0. \quad (3.16)$$

Si nous avons $b^2 + c^2 = 0$, la condition prend la forme :

$$rm'(r) \geq a^2 (m(r) - r(r-2m(r))\Phi'(r)). \quad (3.17)$$

Cette inégalité est linéaire en a^2 et elle tient en $a^2 = 0$ si (3.16) est vraie. Il suit donc qu'elle sera toujours vérifiée si elle l'est en $a^2 = 1$. Nous avons donc la condition

$$\Phi'(r) \geq \frac{m(r) - rm'(r)}{r(r-2m(r))} \quad (3.18)$$

qui est l'inégalité (3.11). Maintenant, si $b^2 + c^2 \neq 0$ nous avons alors :

$$2 \left(a^2 \left(m(r) - r^2 \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \Phi'(r) \right) - rm'(r) \right) \leq r (b^2 + c^2) (A + m'(r) (r\Phi'(r) + 1) + (r-1)m(r)\Phi'(r)). \quad (3.19)$$

Encore une fois, cette inégalité est linéaire en $b^2 + c^2$ et elle tient en $b^2 + c^2 = 0$ si (3.11) est vérifiée. Il suit donc qu'elle sera toujours vraie si et seulement si

$$A - m'(r) (1 - r\Phi'(r)) + (r - 1)m(r)\Phi'(r) \leq 0 \quad (3.20)$$

qui est (3.13).

3.1.3 La condition d'énergie dominante

La première étape pour vérifier la condition d'énergie dominante est de s'assurer que $E^{\mu\nu}n_\nu$ soit orienté vers le futur. Nous vérifierons ensuite que ce champ vectoriel est bel et bien de type temporel. En utilisant l'expression obtenue précédemment pour le tenseur d'Einstein(3.1 à 3.4) et pour le champ vectoriel temporel (3.6), nous obtenons :

$$E_{\nu}^0 n^\nu = \frac{2m'(r)}{r^2\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}} \quad (3.21)$$

$$E_{\nu}^1 n^\nu = \frac{2a(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r))}{r^3\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}} \quad (3.22)$$

$$E_{\nu}^2 n^\nu = \frac{b(A + (rm'(r) + (r - 1)m(r))\Phi'(r) + m'(r))}{r^2\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}} \quad (3.23)$$

$$E_{\nu}^3 n^\nu = \frac{c(A + (rm'(r) + (r - 1)m(r))\Phi'(r) + m'(r))}{r^2\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}}. \quad (3.24)$$

Nous pouvons donc constater que ce vecteur sera orienté vers le futur si

$$\frac{2m'(r)}{r^2\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}} \geq 0 \quad (3.25)$$

ce qui est équivalent à (3.16). La norme de $E_{\nu}^{\mu}n^\nu$ peut également être calculée aisément et nous trouvons après un peu d'algèbre :

$$\begin{aligned} & \frac{r^2(b^2 + c^2)}{r^6(a^2 + b^2 + c^2 - 1)} (A + m'(r)(r\Phi'(r) + 1) + (r - 1)m(r)\Phi'(r))^2 \\ & + \frac{4a^2(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r))^2 - 4r^2m'(r)^2}{r^6(a^2 + b^2 + c^2 - 1)}. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Allant au cas par cas, nous commençons par le cas $a = b = c = 0$, soit lorsque notre vecteur n^μ représente la vitesse propre d'un observateur au repos dans le référentiel, la

condition d'énergie dominante devient

$$\frac{m'(r)^2}{r^4} \geq 0 \quad (3.27)$$

qui est toujours vraie ! Si nous nous intéressons plutôt au cas $b = c = 0$, nous trouvons

$$\frac{4a^2 (m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r))^2 - 4r^2 m'(r)^2}{(a^2 - 1)r^6} \geq 0 \quad (3.28)$$

qui devient après un peu de travail

$$\begin{aligned} & (rm'(r) + a(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r))) \\ & (rm'(r) - a(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r))) \geq 0 \quad (3.29) \end{aligned}$$

Comme le produit de deux termes est plus grand que zéro si et seulement si ils ont le même signe, ceci offre deux possibilités, soit les deux termes sont négatifs, soit ils sont positifs. On peut facilement voir que si ils étaient tout les deux négatifs, nous aurions alors

$$rm'(r) \mp a(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r)) \leq 0 \quad (3.30)$$

ce qui contredirait (3.25) lorsque $a = 0$. Nous obtenons donc les deux inégalités :

$$rm'(r) + a(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r)) \geq 0 \quad (3.31)$$

$$rm'(r) - a(m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r)) \geq 0. \quad (3.32)$$

Encore une fois, ces inégalités sont linéaires en a et sont vérifiées en $a = 0$, il suit qu'elles seront toujours valides si

$$rm'(r) + (m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r)) \geq 0 \quad (3.33)$$

$$rm'(r) - (m(r) - r(r - 2m(r))\Phi'(r)) \geq 0 \quad (3.34)$$

que nous pouvons écrire comme

$$\Phi'(r) \geq \frac{m(r) - rm'(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (3.35)$$

$$\Phi'(r) \leq \frac{m(r) + rm'(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (3.36)$$

où nous reconnaissons (3.13) dans (3.35). Nous pouvons également remarquer qu'en additionnant (3.33) et (3.34) nous pouvons retrouver (3.25), ce qui montre qu'il ne sera pas nécessaire de vérifier que cette dernière est satisfaite ! Maintenant si $b^2 + c^2 \neq 0$ mais $a = 0$ nous obtenons alors :

$$4m'(r)^2 - (b^2 + c^2) (A + m'(r) (r\Phi'(r) + 1) + (r - 1)m(r)\Phi'(r))^2 \geq 0. \quad (3.37)$$

Une analyse similaire en tout point à celle du cas $b^2 + c^2 = 0$ montre que ceci se réduit alors aux deux inégalités suivantes :

$$A + m'(r) (r\Phi'(r) + 3) + (r - 1)m(r)\Phi'(r) \geq 0 \quad (3.38)$$

$$A - m'(r) (1 - r\Phi'(r)) + (r - 1)m(r)\Phi'(r) \leq 0. \quad (3.39)$$

On remarque alors que la dernière inégalité est identique à (3.13). Si $b^2 + c^2 \neq 0$ et que $a \neq 0$ alors, l'inégalité peut se réduire à l'énoncé suivant :

Soient $A, B, C \in \mathfrak{R}$ tels que $A \geq B \geq 0$ et $A \geq C \geq 0$. Soit $0 < \alpha < 1$, $\forall x \leq \alpha$, $A \geq (\alpha - x)B + xC$.

On vérifie aisément que cette affirmation est vraie. Donc, en résumé, les trois conditions d'énergie sont équivalentes aux quatre inégalités suivantes :

$$\Phi'(r) \geq \frac{m(r) - rm'(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (3.40)$$

$$\Phi'(r) \leq \frac{rm'(r) + m(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (3.41)$$

$$A - m'(r) (1 - r\Phi'(r)) + (r - 1)m(r)\Phi'(r) \leq 0 \quad (3.42)$$

$$A + m'(r) (r\Phi'(r) + 3) + (r - 1)m(r)\Phi'(r) \geq 0. \quad (3.43)$$

3.2 Un cas particulier

Ce système d'inégalités différentielles étant trop complexe pour être analysé de façon efficace, nous allons considérer un cas particulier. Cette classe de solutions est

caractérisée par le choix $\Phi(r) = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)$. Ce cas est particulièrement intéressant parce qu'il englobe les solutions de Schwarzschild ainsi que celle de de Sitter. Comme le théorème de Birkhoff garantit qu'une solution des équations d'Einstein dans le vide est nécessairement de l'une de ces formes (ou une combinaison des deux), il semble logique d'utiliser ce cas particulier. La métrique prends alors la forme suivante :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} dr^2 - r^2 d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 .$$

Avec cette simplification, nos quatre inégalités deviennent :

$$2rm'(r) \geq 0 \tag{3.44}$$

$$rm'(r) - rm'(r) \geq 0 \tag{3.45}$$

$$rm''(r) + 2m'(r) \geq 0 \tag{3.46}$$

$$rm''(r) - 2m'(r) \leq 0 . \tag{3.47}$$

(3.45) est de toute évidence toujours vraie, et on peut facilement voir que (3.46) et (3.47) impliquent (3.44). Il ne reste donc que les deux dernières inégalités, que nous pouvons écrire comme :

$$\frac{d}{dr} (r^2 m'(r)) \geq 0 \tag{3.48}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{m'(r)}{r^2} \right) \leq 0 . \tag{3.49}$$

3.3 Paramétrisation d'une solution

Bien que les inégalités différentielles obtenues pour notre classe de solutions soient beaucoup plus simples que dans le cas général, il sera tout de même difficile de vérifier si une solution les vérifie. Nous allons donc paramétrer la solution de façon à rendre les conditions d'énergie plus simples à analyser. En particulier, nous allons utiliser la proposition suivante :

Proposition 1. *Soient $R_1 > 0$ et $f(r)$ une fonction deux fois continûment différentiable telle que $f'(R_1) = B$ et $f(R_1) = A$, alors $f(r)$ respecte l'inégalité*

$$rf''(r) - 2f'(r) \leq 0 \tag{3.50}$$

si et seulement si il existe une fonction $J(r) \leq 0, \forall r > 0$ continue telle que

$$f(r) = \int_{R_1}^r w^2 \int_{R_1}^w J(z) dz dw + \frac{(r^3 - R_1^3)B}{3R_1^2} + A. \quad (3.51)$$

Démonstration. (\implies) Si $f(r)$ est deux fois continûment différentiable, alors $rf''(r) - 2f'(r)$ est une fonction continue et plus petite que zéro si $f(r)$ respecte (3.50). Alors soit

$$J(r) = \frac{1}{r^3} (rf''(r) - 2f'(r)) = \frac{d}{dr} \left(\frac{f'(r)}{r^2} \right). \quad (3.52)$$

Cette fonction est de toute évidence continue, intégrable et toujours plus petite ou égale à zéro pour tout $r > 0$. Intégrant l'équation définissant $J(r)$, nous obtenons :

$$\frac{f'(r)}{r^2} = \int_{R_1}^r J(z) dz + \frac{f'(R_1)}{R_1^2}. \quad (3.53)$$

Multiplions les deux côtés par r^2 et intégrons le résultat. Nous obtenons alors :

$$f(r) = \int_{R_1}^r w^2 \int_{R_1}^w J(z) dz dw + \frac{(r^3 - R_1^3) f'(R_1)}{3R_1^2} + f(R_1). \quad (3.54)$$

On complète la preuve en utilisant les valeurs au bord de $f(r)$.

(\impliedby) Il suffit de mettre la définition (3.51) dans l'inégalité (3.50). Nous obtenons alors

$$rf''(r) - 2f'(r) = r^3 J(r) \quad (3.55)$$

qui est de toute évidence plus petit que zéro pour tout $r > 0$. \square

Ce résultat montre la forme générale d'une fonction répondant à notre condition (3.49). Nous pouvons maintenant insérer la forme (3.51) dans l'autre condition et nous obtenons :

$$4 \int_{R_1}^r J(w) dw + rJ(r) \geq -\frac{4A}{R_1^2}. \quad (3.56)$$

Cette paramétrisation sera bien utile lorsque viendra le temps de trouver des solutions particulières à nos inégalités.

3.4 Le cas particulier d'une bulle sphérique

Nous allons maintenant transformer le problème de la bulle d'espace-temps en une forme où nos précédents résultats pourraient s'appliquer de façon concrète. Notre problème peut se formuler de la façon suivante : Soit une solution des équations d'Einstein décrites par trois tenseurs énergie-impulsion distincts, un pour l'intérieur, un pour l'extérieur et un autre pour la section entre les deux, formant ainsi une bulle statique et sphérique. Supposons que la région près de la "peau" de la bulle peut être recouverte par une seule carte où la métrique prends la forme :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2f(r)}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2f(r)}{r}} dr^2 - r^2 d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 .$$

La fonction $f(r)$ devra répondre à un certain de nombre de conditions aux limites garantissant la continuité de la métrique. En se rappelant la forme du tenseur d'Einstein trouvée précédemment, nous pouvons voir que le tenseur énergie-impulsion qui a donné cette métrique sera continu si et seulement si la fonction $f(r)$ est continûment différentiable au moins deux fois aux bords de la "peau" de la bulle. Si nous définissons x comme étant la position de l'interface peau-intérieur et y comme étant la position de l'interface peau-extérieur, la fonction $f(r)$ devra prendre la forme (3.51) avec⁴ $R_1 = x$. Les conditions aux bords sur $f(r)$ exprimées en terme de $J(r)$ deviendront donc :

$$J(x) = \frac{xk''(x) - 2k'(x)}{x^3} \quad (3.57)$$

$$J(y) = \frac{yh''(y) - 2h'(y)}{y^3} \quad (3.58)$$

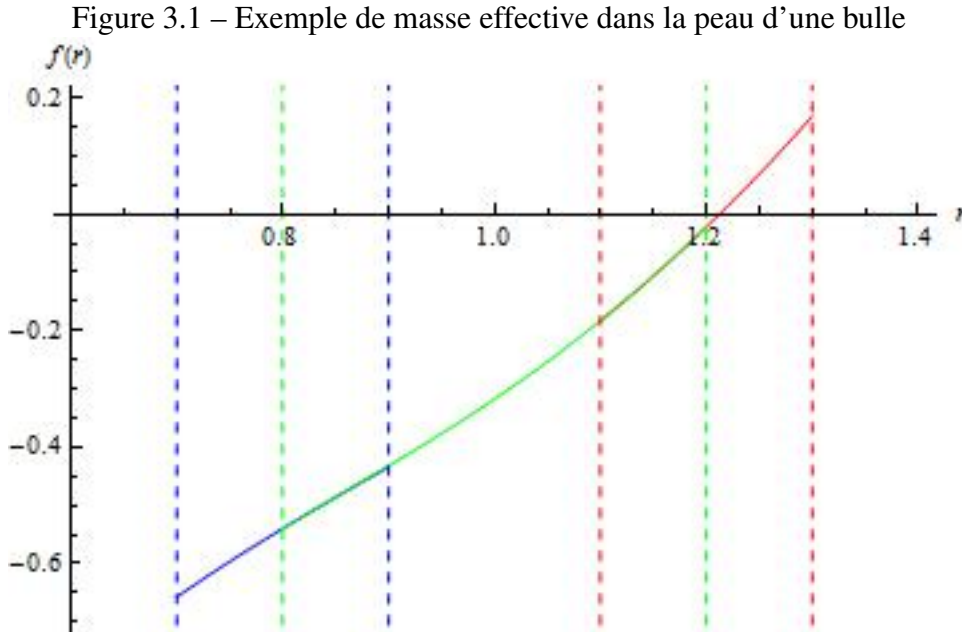
$$\int_x^y J(z) dz = \frac{x^2 h'(y) - y^2 k'(x)}{x^2 y^2} \quad (3.59)$$

$$\int_x^y w^2 \int_x^w J(z) dz dw = h(y) - \frac{(y^3 - x^3) k'(x)}{3x^2} - k(x) \quad (3.60)$$

où $h(x)$ et $k(y)$ sont les fonctions décrivant respectivement la valeur que doit prendre $f(r)$ aux points $r = x$ et $r = y$. La fonction $h(r)$ décrit donc la métrique immédiatement à l'extérieur de la bulle, et la fonction $k(r)$ la décrit immédiatement à l'intérieur de la bulle. La figure ?? montre les fonctions $f(r)$, $h(r)$ et $k(r)$ ainsi que leur domaine

⁴Nous aurions aussi pu choisir $R_1 = y$.

pour un exemple particulier⁵. La fonction $f(r)$ est en vert, $k(r)$ est en bleu et $h(r)$ est en rouge. Les lignes verticales pointillées délimitent les domaines des fonctions de la couleur correspondante.



Nous allons d’abord discuter de la signification physique de la fonction $J(r)$. Nous allons ensuite considérer quelques cas particuliers de $k(r)$ et de $h(r)$. Nous prendrons également soin de vérifier que nos résultats pour une bulle d’épaisseur finie correspondent bien aux résultats classiques pour les bulles infiniment minces lorsque l’on prend la limite $y \rightarrow x$.

Nous commencerons par le cas classique⁶, où l’intérieur et l’extérieur sont tous les deux décrits par un espace Schwarzschild de Sitter. Nous verrons ensuite un cas plus complexe où l’intérieur est donné par une métrique de Reissner-Nordström [9], décrivant une charge électrique isolée. Nous verrons ensuite une forme particulière d’intérieur, le potentiel parabolique. Nous terminerons par le cas où l’intérieur est un trou noir émoussé, un exemple de trou noir exempt de singularité.

⁵L’exemple est celui d’une bulle dont l’intérieur de la peau se trouve en $r = .8$ et l’extérieur en $r = 1.1$. La bulle contient un trou noir de masse nulle mais de charge $Q = 1$ baignant dans une constante cosmologique $\Lambda = 1$. L’extérieur est un espace de type Schwarzschild de Sitter avec un paramètre de masse et une constante cosmologique donné par les équations (3.98) et (3.97). Nous avons également

$$J(r) = \frac{2(6r^7 - 7r^6y + y^7)(Q + x^4(\Lambda - \lambda))}{r^5(8x^7 - 14x^6y + 7x^4y^3 - y^7)}$$

⁶Ce cas est généralement utilisé pour représenter la désintégration du vide, c’est-à-dire un espace de Sitter qui passe d’une constante cosmologique à une autre plus petite suite à une série de fluctuation quantique. Pour plus de détail, voir [7]

3.4.1 La signification physique de $J(r)$

Premièrement, un calcul élémentaire montre que le tenseur d'Einstein prends la forme :

$$E_{\nu}^{\mu} = \left(\int_x^r J(z) dz + \frac{h'(x)}{x^2} \right) \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2} r J(r) (\delta_3^{\mu} \delta_{\nu}^3 + \delta_2^{\mu} \delta_{\nu}^2) . \quad (3.61)$$

Nous pouvons donc voir que la quantité $\left(\int_x^r J(z) dz + \frac{h'(x)}{x^2} \right)$ agit comme une constante cosmologique, représentant un fond d'énergie immobile. Nous pouvons également voir que la quantité $-\frac{1}{2} r J(r)$ est⁷ la densité d'énergie ressentie par un photon en rotation dans la peau de la bulle.

3.4.2 Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter

Dans ce cas particulier, nous avons $k(x) = M + \frac{x^3 \Lambda}{6}$ et $h(y) = m + \frac{y^3 \lambda}{6}$. m et M sont des constantes représentant la masse du "trou noir" et λ et Λ sont les constantes cosmologiques, toutes deux plus grandes que zéro⁸. Ceci nous donne alors les conditions aux bords suivantes :

$$J(x) = J(y) = 0 \quad (3.62)$$

$$\int_x^y J(z) dz = \frac{\lambda - \Lambda}{2} \quad (3.63)$$

$$\int_x^y z^2 \int_x^z J(\xi) d\xi dz = (m - M) + \frac{y^3}{6} (\lambda - \Lambda) . \quad (3.64)$$

Puisque $J(r) \leq 0$, il suit directement de (3.63) que $\lambda \leq \Lambda$, ce qui signifie que la constante cosmologique à l'intérieur doit être plus grande que celle à l'extérieur pour qu'il soit possible d'avoir une bulle continue. Aussi, nous pouvons paramétrer nos équations par $J(r) = BH(r)$ avec $H(x) = H(y) = 0$ et (3.63) donne alors :

$$B = \frac{\lambda - \Lambda}{2 \int_x^y H(z) dz} . \quad (3.65)$$

La condition (3.64) se lira alors

$$\frac{\int_x^y r^3 H(r) dr}{6 \int_x^y H(z) dz} = \frac{m - M}{\Lambda - \lambda} \quad (3.66)$$

⁷À une constante multiplicative près.

⁸Une vérification élémentaire montre que l'espace de Schwarzschild de Sitter avec une constante cosmologique négative ne respecte jamais les conditions d'énergies ; nous prenons donc toujours des constantes cosmologiques positives.

et nous pouvons directement voir que $m > M$. Ne reste plus que la condition (3.56), qui se lit :

$$2\Lambda \geq -4 \int_x^r J(\xi) d\xi - rJ(r) = \frac{\Lambda - \lambda}{2 \int_x^y H(z) dz} \left(4 \int_x^r H(\xi) d\xi + rH(r) \right) \quad (3.67)$$

ou

$$\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda} \geq \frac{(4 \int_x^r H(\xi) d\xi + rH(r))}{4 \int_x^y H(z) dz} \quad (3.68)$$

pour tout $r \in [x, y]$. Nous pouvons voir ici une contrainte fondamentale sur les paramètres du problème. En effet, si l'on multiplie des deux côtés par r^3 et que l'on intègre le résultat, nous obtenons la condition suivante :

$$\frac{(y^4 - x^4)}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda} \geq \frac{y^4 \int_x^y H(\xi) d\xi}{4 \int_x^y H(z) dz} = \frac{y^4}{4} \quad (3.69)$$

ou

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \geq \frac{x^4}{y^4}. \quad (3.70)$$

Nous n'avons pas été en mesure de montrer que cette contrainte est maximale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $H(r)$ telle que (3.68) soit équivalente à (3.70). Cependant, il s'agit là d'une contrainte universelle, complètement indépendante du choix de $H(r)$. L'annexe I.1 montre quelques choix de fonctions ainsi que les contraintes qu'elles impliquent et la masse externe résultante. Nous pouvons voir en particulier que pour toutes les fonctions et pour tous les choix de x et y que nous avons considérés, la borne inférieure sur $\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda}$ est toujours strictement plus grande que un.

3.4.2.1 Méthode traditionnelle

Nous allons maintenant voir ce que la méthode traditionnelle donnerait pour ce cas. Les métriques induites sur la surface de la bulle à l'intérieur et à l'extérieur sont données par :

$$[h_{ab}^-] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(M + \frac{x^3 \Lambda}{6})}{x} & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$[h_{ab}^+] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(m + \frac{x^3\lambda}{6})}{x} & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

La continuité de la métrique sur la surface donne donc :

$$m = M + \frac{x^3}{6}(\lambda - \Lambda). \quad (3.73)$$

La courbure externe à l'intérieur et à l'extérieur est donnée par

$$K_{ab}^- = \left(r - m - \frac{r^3\lambda}{6} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \left(\Lambda - \frac{3M}{r^3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$K_{ab}^+ = \left(r - M - \frac{x^3\lambda}{6} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \left(-\frac{6M}{r^3} + 3\lambda - \Lambda \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

et sa continuité à l'interface donne donc :

$$K_{ab}^+ - K_{ab}^- = \frac{1}{24}(\Lambda - \lambda) (6M + r^3\Lambda - 6r) \delta_{a0} \delta_{b0} \quad (3.76)$$

c'est-à-dire,

$$\lambda = \Lambda \quad (3.77)$$

ou encore,

$$6M + x^3\Lambda - 6x = 0. \quad (3.78)$$

La deuxième possibilité ne se produit que sur l'horizon de l'espace-temps, et à moins que la frontière de la bulle se trouve exactement sur l'horizon, nous concluons que la bulle est triviale, séparant deux espaces-temps complètement identiques ! Ceci ne signifie pas pour autant qu'une telle bulle ne peut pas exister, mais seulement qu'elle ne peut pas être statique et exempte de singularité à son interface. Nous pouvons de plus voir que si l'on prend la limite lorsque y tend vers x dans la condition (3.70), nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \geq 1 \quad (3.79)$$

et comme nous devons avoir $\Lambda \geq \lambda$, il suit que $\lambda = \Lambda$, ce qui correspond bien au résultat obtenu par la méthode traditionnelle. Cependant, si nous admettons que le tenseur-énergie impulsion puisse être discontinu, et avoir une singularité à l'interface de la bulle, nous trouvons alors

$$[S_{ab}] = V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

avec

$$V = \frac{r^2}{32\pi} (\lambda - \Lambda) \left(-M - \frac{r^3 \Lambda}{6} + r \right). \quad (3.81)$$

Nous pouvons alors vérifier les conditions d'énergie pour un observateur se déplaçant sur la bulle. Utilisant un référentiel de Lorentz et un observateur de vitesse propre $[v_a] = \frac{(1, a, b)}{\sqrt{1-a^2-b^2}}$, un calcul simple montre :

$$\rho = (a^2 + b^2) (\lambda - \Lambda) (6r - 6M - r^3 \Lambda) \geq 0 \quad (3.82)$$

$$J^0 = 0 \geq 0 \quad (3.83)$$

$$J^a J_a = - (a^2 + b^2) (\lambda - \Lambda)^2 (6M + r^3 \Lambda - 6r)^2 \geq 0. \quad (3.84)$$

Nous pouvons donc voir que la condition d'énergie faible sera respectée si $\lambda \geq \Lambda$ mais que la condition d'énergie dominante ne sera jamais respectée, sauf si $\lambda = \Lambda$, ce qui correspond bien au résultat que nous avons obtenu.

3.4.3 Reissner-Nordström à Schwarzschild de Sitter

Dans ce cas particulier, l'intérieur de la bulle est décrit par un trou noir statique chargé électriquement baignant dans une constante cosmologique et l'extérieur est un trou noir baignant aussi dans une constante cosmologique. Nous avons donc les fonctions suivantes pour décrire les conditions aux bords [9] :

$$k(x) = M + \frac{x^3 \Lambda}{6} - \frac{Q}{2x} \quad (3.85)$$

$$h(y) = m + \frac{y^3 \lambda}{6} \quad (3.86)$$

où M est la masse du trou noir à l'intérieur de la bulle, m est la masse perçue à l'extérieur de la bulle, Λ et λ sont les constantes cosmologiques à l'intérieur et à l'extérieur respectivement. Le paramètre de charge est $Q = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \geq 0$ avec q la charge électrique du trou noir, G la constante de gravitation de Newton, c est la vitesse de la lumière et ϵ_0 est la permittivité du vide. Nos conditions aux bords s'expriment donc ainsi :

$$J(x) = -\frac{2Q}{x^5} \quad (3.87)$$

$$J(y) = 0 \quad (3.88)$$

$$\int_x^y J(\xi) d\xi = \frac{\lambda - \Lambda - \frac{Q}{x^4}}{2} \quad (3.89)$$

$$\int_x^y \omega^2 \int_x^\omega J(\xi) d\xi d\omega = m - M + \frac{Q}{6x^4} (4x^3 - y^3) + \frac{y^3}{6} (\lambda - \Lambda). \quad (3.90)$$

L'équation (3.89) implique $\lambda \leq \Lambda + \frac{Q}{x^4}$, puisque l'intégrale de $J(r)$ est toujours plus petite que zéro. Nous définissons une nouvelle fonction $H(r) = B^{-1}J(r)$, et l'équation (3.89) nous donne

$$B = \frac{\lambda - \Lambda - \frac{Q}{x^4}}{2 \int_x^y H(z) dz} \quad (3.91)$$

et les autres conditions aux bords deviennent alors

$$H(y) = 0 \quad (3.92)$$

$$\frac{H(x)}{\int_x^y H(z) dz} = -\frac{4Q}{x(x^4(\lambda - \Lambda) - Q)} \quad (3.93)$$

$$\frac{\int_x^y r^3 H(r) dr}{\int_x^y H(z) dz} = \frac{2x^3(3x(m - M) + 2Q)}{Q + x^4(\Lambda - \lambda)} \quad (3.94)$$

et notre condition (3.56) devient

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\frac{2Q}{x^4} + \Lambda}} \geq \frac{4 \int_x^r H(\xi) d\xi + rH(r)}{4 \int_x^y H(\xi) d\xi}. \quad (3.95)$$

La même démarche que pour le cas de Sitter à de Sitter montre alors que nous devons avoir :

$$\frac{\lambda}{Q + x^4\Lambda} \geq \left(\frac{1}{y}\right)^4. \quad (3.96)$$

Il semble impossible de tirer des conclusions supplémentaires sans utiliser une

forme particulière pour $H(r)$. Par contre, nous pouvons écrire les conditions aux bords comme des définitions des paramètres internes de la bulle, nous donnant alors un ensemble de définitions implicites pour $H(r)$. Les conditions aux bords nous donnent alors

$$\Lambda = \frac{Q}{x^4} \left(\frac{4 \int_x^y H(z) dz}{xH(x)} - 1 \right) + \lambda \quad (3.97)$$

$$M = \frac{2Q}{3x} \left(1 - \frac{\int_x^y \xi^3 H(\xi) d\xi}{x^4 H(x)} \right) + m \quad (3.98)$$

et nos inégalités deviennent donc :

$$\frac{1}{Q} \geq -\frac{(rH(r))}{x^5 \lambda H(x)} \left(\frac{4 \int_r^y H(z) dz}{rH(r)} - 1 \right) \quad (3.99)$$

$$\frac{\int_x^y H(z) dz}{H(x)} > 0. \quad (3.100)$$

La deuxième condition demandée est toujours vérifiée puisque la fonction $H(r)$ doit toujours avoir le même signe.

Afin de voir d'autres propriétés de ce système, les conditions ainsi que les paramètres obtenus pour différents choix de la fonction $H(r)$ sont présentés dans I.2. Nous pouvons voir en particulier que certains choix donnent $m > M$ alors que d'autres donnent $M > m$. En particulier, nous pourrions alors avoir $m < 0$, une telle configuration décrirait donc un trou noir chargé enfermé dans une bulle qui lui donne l'air d'un trou noir neutre de masse négative.

3.4.3.1 Limite $y \rightarrow x$

Dans la limite où y tend vers x , nos paramètres internes deviennent définis par :

$$\Lambda = \lambda - \frac{Q}{x^4} \quad (3.101)$$

$$M = \frac{2Q}{3x} + m. \quad (3.102)$$

Nous pouvons donc voir que la constante cosmologique à l'extérieur sera toujours plus grande que celle à l'intérieur, et que la masse à l'extérieur sera toujours plus petite que celle à l'intérieur. De son côté, notre inégalité devient

$$\frac{x^4}{Q} \geq \frac{1}{\lambda} \quad (3.103)$$

et est donc équivalente à dire que $\Lambda > 0$.

3.4.3.2 Méthode traditionnelle

Nous commençons par regarder la métrique induite sur la peau de la bulle à l'extérieur et à l'intérieur. Nous trouvons

$$[h_{ab}^+] = \begin{pmatrix} -\frac{2m}{x} - \frac{\lambda x^2}{3} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

$$[h_{ab}^-] = \begin{pmatrix} \frac{Q-2Mx}{x^2} - \frac{\Lambda x^2}{3} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

et la continuité de la métrique induite implique donc $m = M - \frac{Q}{2r} - \frac{r^3}{6}(\lambda - \Lambda)$. Pour ce qui est de la courbure externe induite, nous trouvons

$$K_{ab}^+ = \left(x - 2M + \frac{Q}{x} - \frac{\Lambda x^3}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \left(3\lambda - \Lambda + \frac{3(Q-2Mx)}{x^4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

et

$$K_{ab}^- = \left(x - 2M + \frac{Q}{x} - \frac{\Lambda x^3}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{3} + \frac{Q-Mx}{x^4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Nous pouvons alors voir que la courbure externe sera continue si $\lambda = \Lambda + \frac{Q}{x^4}$, et le paramètre de masse à l'extérieur devient alors $m = M - \frac{2Q}{3x}$ et est donc strictement plus petit que le paramètre de masse à l'intérieur. Si la courbure externe est discontinue, alors la singularité induite dans le tenseur énergie-impulsion sera

$$[S_b^a] = -\frac{(6Mr - 3Q + \Lambda r^4 - 3r^2)(Q - \lambda r^4 + \Lambda r^4)}{48\pi r^5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.108)$$

Nous pouvons alors vérifier les conditions d'énergie pour un observateur se déplaçant sur la bulle. Utilisant un référentiel de Lorentz et un observateur de vitesse propre $[v_a] = \frac{(1,a,b)}{\sqrt{1-a^2-b^2}}$, un calcul simple montre :

$$\rho = \frac{(a^2 + b^2)}{1 - a^2 - b^2} \frac{(-3Q + 6Mr - 3r^2 + r^4\Lambda)(Q - r^4\lambda + r^4\Lambda)}{48\pi r^5} \quad (3.109)$$

$$J^0 = 0 \quad (3.110)$$

$$J^\alpha J_\alpha = -\rho^2 \frac{1 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} . \quad (3.111)$$

Nous pouvons donc voir qu'à condition que l'observateur se trouve à l'extérieur de l'horizon, la condition d'énergie faible se réduit alors à $\lambda \leq \Lambda + \frac{Q}{r^4}$ alors que la condition dominante sera toujours violée sauf si $\rho = 0$. Nous pouvons voir que la valeur des paramètres internes sont les mêmes que ceux que nous avons obtenus en prenant la limite $y \rightarrow x$.

Également, nous avons trouvé que les conditions d'énergie étaient vérifiées au bord de la bulle à condition qu'elles soient respectées à l'extérieur de la bulle. Comme nous demandions la continuité du tenseur énergie-impulsion, ce n'est pas un résultat surprenant. Toutefois, comme la méthode traditionnelle ne demande pas la continuité de l'énergie, il semble logique de ne pas avoir le même résultat.

3.4.4 Potentiel parabolique à Schwarzschild de Sitter

Ce type de bulle représente une distribution d'énergie ressemblant à une section de parabole et qui apparaît vue de l'extérieur comme un simple trou noir avec une constante cosmologique. La fonction à l'intérieur est donc donnée par

$$k(r) = \frac{1}{30}A(x,y)r^5 \left(\frac{10y^2}{r^2} - \frac{15y}{r} + 6 \right) + \frac{r^3\lambda}{6} \quad (3.112)$$

où $A(x,y) > 0$ nous donne l'amplitude de la parabole, et λ est la constante cosmologique, la même que celle qui apparaîtra à l'extérieur. Pour voir d'où provient le nom de cette distribution d'énergie, nous pouvons regarder le tenseur d'Einstein que cette fonction génère :

$$E_0^0 = E_1^1 = \lambda + 2A(x,y)(y-r)^2 \quad (3.113)$$

$$E_2^2 = E_3^3 = \lambda + 2A(x,y)(2r^2 - 3ry + y^2) . \quad (3.114)$$

La fonction à l'extérieur est encore une fois donnée par :

$$h(y) = m + \frac{y^3 \lambda}{6} \quad (3.115)$$

ce qui nous donne les conditions aux bords suivantes :

$$J(x) = -2(y-x)A(x,y) \quad (3.116)$$

$$J(y) = 0 \quad (3.117)$$

$$\int_x^y J(\xi) d\xi = -(x-y)^2 A(x,y) \quad (3.118)$$

$$\int_x^y \zeta^2 \int_x^\zeta J(\xi) d\xi d\zeta = m + \frac{A(x,y)}{30} (4x^5 - 5x^4 y - 10x^2 y^3 + 20xy^4 - 10y^5) . \quad (3.119)$$

Encore une fois nous définissons $H(r) = \frac{J(r)}{B}$, et nous posons $B = -\frac{(y-x)^2 A(x,y)}{\int_x^y H(z) dz}$. Les conditions aux bords deviennent donc simplement :

$$H(y) = 0 \quad (3.120)$$

$$\frac{H(x)}{\int_x^y H(\xi) d\xi} = \frac{2}{y-x} \quad (3.121)$$

$$\frac{m}{(x-y)^2 A(x,y)} = \frac{\int_x^y z^3 H(z) dz}{3 \int_x^y H(z) dz} + \frac{x^4(5y-4x)}{30(y-x)^2} . \quad (3.122)$$

Nous pouvons alors voir que la dernière condition aux bords implique $m > 0$. De plus, notre inégalité devient simplement

$$\frac{2\lambda}{(x-y)^2 A(x,y)} \geq \frac{4 \int_x^r H(\xi) d\xi + rH(r)}{\int_x^y H(z) dz} - 4 . \quad (3.123)$$

Encore une fois, en multipliant de chaque côté par r^3 et en intégrant, nous trouvons :

$$\frac{\lambda}{A(x,y)} \geq \frac{2x^4(x-y)^2}{y^4 - x^4} . \quad (3.124)$$

Nous pouvons également remarquer que la constante cosmologique n'apparaît pas dans les conditions aux bords mais seulement dans la condition d'énergie. Il apparaît donc

que pour toute fonction $A(x, y)$ et pour tous paramètres m, x, y , il y aura un choix de λ tel que les conditions d'énergie seront respectées. De plus, lorsque l'on prend la limite lorsque $y \rightarrow x$, nous pouvons voir que l'inégalité est vérifiée pour $\lambda > 0$ et $A(x, y) > 0$ qui est vrai par hypothèse.

3.4.4.1 Méthode traditionnelle

Vérifions maintenant que la méthode traditionnelle utilisant les équations de Lanczos donnent bien les mêmes résultats lorsque la bulle est prise infiniment mince. La métrique induite sur la surface à l'intérieur et à l'extérieur est alors :

$$[h_{ab}^+] = \begin{pmatrix} -\frac{2m}{y} - \frac{\lambda y^2}{3} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -y^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

$$[h_{ab}^-] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15}y^4 A(x, y) - \frac{\lambda y^2}{3} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -y^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

et la continuité de la métrique induite se réduit donc à $m = \frac{1}{30}y^5 A(x, y)$. La courbure externe induite à l'intérieur et à l'extérieur est alors :

$$[K_{ab}^+] = [K_{ab}^-] = \left(y - \frac{y^5}{15} A(x, y) - \frac{\lambda y^3}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{3} - \frac{y^2}{30} A(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.127)$$

et nous pouvons donc voir que la courbure externe induite sera toujours continue ! Il ne peut donc pas y avoir de singularité à la frontière de la bulle, et donc de toute évidence si les conditions d'énergie sont vérifiées à l'intérieur et à l'extérieur, elles le seront aussi sur la peau de la bulle. Ceci correspond bien à notre résultat selon lequel les conditions d'énergies deviennent triviales lorsque l'on prend la limite $x \rightarrow y$.

3.4.5 Trou noir non-singulier à Schwarzschild de Sitter

Nous considérons ici le cas où l'intérieur de la bulle est décrit par la métrique d'un trou noir exempt de singularité et où l'extérieur est décrit par un trou noir standard.

Nous regarderons en particulier une métrique décrite par [18] qui est

$$k(x) = \frac{Mx^3}{x^3 + L^3} \quad (3.128)$$

où M est un paramètre représentant la masse du trou noir et L est un paramètre ayant des unités de longueur représentant l'étalement du trou noir. Plus L est petit, plus le trou est localisé. La métrique à l'extérieur est encore une fois représentée par

$$h(y) = m + \lambda \frac{y^3}{6} \quad (3.129)$$

et les conditions aux bords prennent donc la forme

$$J(y) = 0 \quad (3.130)$$

$$J(x) = -\frac{18L^3Mx^2}{(L^3 + x^3)^3} \quad (3.131)$$

$$\int_x^y J(z) dz = \frac{\lambda}{2} - \frac{3L^3M}{(L^3 + x^3)^2} \quad (3.132)$$

$$\int_x^y r^2 \int_x^r J(\xi) d\xi dr = \frac{L^6m + L^3(2mx^3 - My^3) + x^6(m - M)}{(L^3 + x^3)^2} + \frac{\lambda y^3}{6}. \quad (3.133)$$

Nous pouvons ainsi voir que nous devons avoir $\frac{\lambda}{2} - \frac{3L^3M}{(L^3 + x^3)^2} < 0$. Si nous définissons encore une fois $H(r) = \frac{J(r)}{B}$, les conditions aux bords s'expriment en termes de H et de B :

$$B = \frac{1}{\int_x^y H(z) dz} \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{3L^3M}{(L^3 + x^3)^2} \right) \quad (3.134)$$

$$\frac{H(x)}{\int_x^y H(z) dz} = -\frac{18L^3Mx^2}{(L^3 + x^3)^3 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{3L^3M}{(L^3 + x^3)^2} \right)} \quad (3.135)$$

$$H(y) = 0 \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \frac{\int_x^y r^2 \int_x^r H(\xi) d\xi dr}{\int_x^y H(z) dz} &= \frac{y^3}{3} - \frac{2Mx^6}{(L^3 + x^3)^2 \lambda - 6L^3M} \\ &\quad + \frac{2m(L^3 + x^3)^2}{-6L^3M + (L^3 + x^3)^2 \lambda}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Nous pouvons également écrire la dernière condition aux bords comme

$$2m(L^3 + x^3)^2 = \frac{(6L^3M - (L^3 + x^3)^2 \lambda) \int_x^y r^3 H(r) dr}{3 \int_x^y H(z) dz} + 2Mx^6 \quad (3.138)$$

ce qui montre que $m > 0$. Pour ce qui est de notre inégalité, elle prends la forme

$$\frac{24L^3M}{6L^3M - \lambda(L^3 + x^3)^2} \geq \frac{4 \int_x^r H(\xi) d\xi + rH(r)}{\int_x^y H(z) dz}. \quad (3.139)$$

En multipliant encore une fois par r^3 et en intégrant le résultat de chaque côté, nous obtenons la condition nécessaire

$$\lambda \geq \frac{6L^3Mx^4}{y^4(L^3 + x^3)^2}. \quad (3.140)$$

Nous pouvons également analyser cette inégalité en exprimant d'abord nos conditions aux bords sur H comme des définitions pour nos paramètres externes m et λ . Nous pouvons voir ceci comme une situation où la description de la bulle et de son intérieur est connue mais pas son extérieur, ou simplement comme une définition implicite de H . Dans les deux cas, l'expression des paramètres externes en fonction de H est

$$\lambda = \frac{6L^3M}{(L^3 + x^3)^2} \left(1 - \frac{6x^2 \int_x^y H(z) dz}{H(x)(L^3 + x^3)} \right) \quad (3.141)$$

$$m = \frac{Mx^6}{(L^3 + x^3)^2} \left(\frac{6L^3}{x^3(L^3 + x^3)} \frac{\int_x^y r^3 H(r) dr}{xH(x)} + 1 \right) \quad (3.142)$$

et l'inégalité devient équivalente à

$$\frac{6x^3}{L^3 + x^3} \leq \frac{4xH(x)}{rH(r) + 4 \int_x^r H(\xi) d\xi}. \quad (3.143)$$

Nous ne pouvons plus à présent tirer de conclusions supplémentaires sans avoir une forme explicite pour $H(r)$; L'annexe I.3 présente donc l'inégalité de même que les valeurs prises par les paramètres externes pour différents choix de fonction $H(r)$. Nous pouvons alors voir que pour certains choix de fonction, lorsque y est grand, la borne sur $\frac{x^3}{L^3 + x^3}$ semble tendre vers $\frac{2}{3}$.

Par contre, nous pouvons voir que dans la limite $y \rightarrow x$, alors l'inégalité devient :

$$\frac{L^3}{x^3} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.144)$$

Les paramètres externes eux deviennent

$$\lambda = \frac{6ML^3}{(L^3 + x^3)^2} \quad (3.145)$$

$$m = \frac{Mx^6}{(L^3 + x^3)^2} < M. \quad (3.146)$$

3.4.5.1 Méthode traditionnelle

Nous pouvons maintenant voir ce que la méthode traditionnelle nous dit. La métrique induite à l'extérieur et à l'intérieur est alors donnée par

$$[h_{ab}^+] = \begin{pmatrix} -\frac{2m}{x} - \frac{\lambda x^2}{3} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.147)$$

$$[h_{ab}^-] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mx^2}{L^3 + x^3} & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.148)$$

Nous pouvons donc voir que la métrique induite sur le bord de la bulle sera continue si $m = \frac{Mx^3}{L^3 + x^3} - \frac{\lambda x^3}{6}$. La courbure externe induite peut aussi être calculée et nous trouvons

$$[K_{ab}^+] = \left(\frac{x(L^3 + x^2(x - 2M))}{L^3 + x^3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} - \frac{M}{L^3 + x^3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.149)$$

$$[K_{ab}^-] = \left(\frac{x(L^3 + x^2(x - 2M))}{L^3 + x^3} \right) \begin{pmatrix} \frac{M(2L^3 - x^3)}{(L^3 + x^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.150)$$

Nous pouvons alors voir qu'elle sera continue si $\lambda = \frac{6L^3M}{(L^3+x^3)^2}$. Ceci nous donne alors également $m = \frac{Mx^6}{(L^3+x^3)^2}$ ce qui correspond exactement aux résultats que nous avons eu précédemment. Si toutefois la courbure externe n'est pas continue, la singularité induite à la surface de la bulle sera

$$[S_b^a] = V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

avec

$$V = \frac{x(L^3 - 2Mx^2 + x^3) \left(\lambda (L^3 + x^3)^2 - 6L^3M \right)}{16\pi(L+x)^3 (L^2 - Lx + x^2)^3}. \quad (3.152)$$

Nous pouvons alors vérifier les conditions d'énergie pour un observateur se déplaçant sur la bulle. Utilisant un référentiel de Lorentz et un observateur de vitesse propre $[v_a] = \frac{(1,a,b)}{\sqrt{1-a^2-b^2}}$, un calcul simple montre :

$$\rho = \frac{a^2 + b^2}{1 - a^2 - b^2} V \quad (3.153)$$

$$J^0 = 0 \quad (3.154)$$

$$J^i J_i = -V^2 \frac{a^2 + b^2}{1 - a^2 - b^2} \quad (3.155)$$

ce qui montre que la condition d'énergie faible sera respectée lorsque $V > 0$ et que la condition d'énergie dominante sera toujours violée sauf si $V = 0$.

3.5 Conclusion

Nous avons d'abord montré que les conditions d'énergie peuvent être réduites à un ensemble de quatre inégalités différentielles dans le cas des espaces-temps statiques et à symétrie sphérique.

Nous avons ensuite isolé une forme particulière pour le potentiel gravitationnel effectif nous donnant des inégalités plus simples. Celles-ci se réduisent alors à un ensemble de deux inégalités différentielles relativement simples pour la masse gravitationnelle effective de l'espace-temps.

Nous avons alors exprimé la masse gravitationnelle effective en terme d'une fonction $J(r) < 0$ et de deux conditions aux bords. Les conditions d'énergie deviennent

alors beaucoup plus simple.

Cette simplicité nous a alors permis de traiter quatre exemples de bulles dont l'extérieur est décrit par la métrique de Schwarzschild de Sitter. Nous avons alors pu vérifier que dans ces cas particuliers, la limite où l'épaisseur de la bulle tends vers zéro nous donne bel et bien les mêmes résultats que lorsque l'on considère seulement les équations de Lanczos.

CHAPITRE 4

DISPERSION D'UNE ONDE GRAVITATIONNELLE PAR UN NUAGE DE BULLE D'ESPACE-TEMPS

Maintenant que nous avons une idée de ce que peut avoir l'air une bulle d'espace-temps, il serait normal de se demander comment celles-ci peuvent interagir entre elles. Cependant, dans la mesure où l'extérieur d'une bulle est vide, en dehors d'une possible constante cosmologique, elle apparaîtra comme un trou noir. Il semble donc que des bulles de vide interagiraient de la même manière que des trous noirs, sauf si elles se superposent, auquel cas leur structure interne pourrait jouer.

Cependant, il convient de mentionner deux choses. L'une est que nos résultats tiennent pour des bulles à symétrie sphérique, et seules dans l'univers. Or il serait raisonnable de croire que la présence d'un objet massif à l'extérieur d'une bulle pourra la déformer, et donc ruiner la symétrie sphérique. Nous ne pourrions donc plus garantir que nos bulles d'espace-temps auront l'apparence de trous noirs. L'approximation de bulle sphérique restera raisonnable dans la limite où les bulles n'interagissent que faiblement.

L'autre chose importante est que si l'on traite les bulles comme agissant faiblement, leur interaction gravitationnelle se limite donc à une interaction newtonienne, qui fut très largement étudié. Il semble donc évident qu'une analyse de ce problème dans le cadre de notre approximation ne donnera aucun nouveau résultat.

Par contre, rappelons-nous que dans la section 3.4.3, nous avons vu que dans certains cas, une bulle d'espace-temps pouvait apparaître comme ayant une masse négative. Or, cette possibilité n'est pas complètement nouvelle. Comme le potentiel newtonien est de la même forme que le potentiel de Coulomb, un nuage de bulle d'espace-temps ayant des masses positives et négatives s'apparente à un nuage d'électrons et de positrons, un problème qui fut lui aussi étudié.

Un aspect de ce problème qui ne fut pas étudié est la façon dont un tel nuage interagirait avec une onde gravitationnelle. Nous voudrions donc connaître la relation de dispersion pour une onde dans un tel nuage. Or, la relation de dispersion pour une onde gravitationnelle se propageant dans un nuage de particules coulombiennes fut déjà étudiée.

Nous commencerons par présenter ces résultats, puis nous verrons comment ceux-ci peuvent s'appliquer à notre problème.

4.1 Méthode générale

La méthode générale procède comme suit. Supposons que la métrique est près de la métrique de Minkowski, au sens où :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}^{\nu} + O^3(h_{\mu\nu}) \quad (4.2)$$

où $h_{\mu\nu}$ représente la perturbation faite par l'onde gravitationnelle¹. Nous supposons donc que ni le nuage, ni l'onde ne perturbe significativement l'espace-temps. Nous nous placerons également dans la jauge TT, c'est-à-dire que $\partial_{\mu}h_{\mu\nu} = 0$ pour tout ν et que $h_{\mu}^{\mu} = 0$. Les équations d'Einstein prennent alors la forme

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}h_{ij} = -\frac{4\kappa}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial h^{ij}} \quad (4.3)$$

où $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ et \mathcal{L} est la densité lagrangienne de la matière. Si l'on développe en série le côté droit de l'équation et que nous utilisons le fait que la matière n'est pas sensée perturber l'espace-temps lui-même, nous obtenons :

$$\partial^{\gamma}\partial_{\gamma}h_{\mu\nu} = -4\kappa\left(\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}}\right)\right)_{h^{\mu\nu}\rightarrow 0}h^{\alpha\beta}. \quad (4.4)$$

Si de plus l'onde est plane, c'est-à-dire $h^{\alpha\beta}(t, \vec{r}) = f(t, \vec{r})b^{\alpha\beta}$, et que le terme multipliant $h^{\alpha\beta}$ à droite de l'équation est indépendant de la position et du temps, nous avons alors la relation de dispersion suivante :

$$\left((k^2 - \omega^2)\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + 4\kappa\left(\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}}\right)\right)_{h^{\mu\nu}\rightarrow 0}\right)b^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.5)$$

¹Rappelons que pour une telle perturbation, les indices sont montés/descendus avec la métrique η .

4.2 Fluide libre sans interaction

Puisqu'en première approximation un gaz de bulles de vide devrait se comporter comme un fluide parfait sans interaction, nous allons commencer par cet exemple. Le lagrangien de ce modèle est donné par [9]

$$\mathcal{L} = \rho \sqrt{-g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} \quad (4.6)$$

où ρ est la densité du fluide, et U^μ est la vitesse propre du fluide, que nous supposons normalisée. Un calcul simple montre alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) \right)_{h^{\mu\nu} \rightarrow 0} = \rho \left(-\frac{1}{2} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}) + \eta_{\mu\nu} U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} U_\alpha U_\beta U_\mu U_\nu \right). \quad (4.7)$$

Si nous négligeons les termes en vitesses, nous obtenons alors la relation de dispersion

$$k^2 = 4\kappa\rho + \omega^2. \quad (4.8)$$

Nous pouvons alors voir que si la densité du fluide avait été négative, alors pour certaines fréquences trop basses $k^2 < 0$ et il n'y a donc pas de propagation. Ceci est un effet analogue à ce qui se produit lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un plasma. C'est cet effet qui empêche les physiciens de scruter les premiers instants du Big Bang avec des ondes électromagnétiques. L'espoir est pour plusieurs de pouvoir examiner cet événement avec des ondes gravitationnelles, et bien que le fait que des masses négatives les bloqueraient soit déjà connu, beaucoup croyait que les conditions d'énergies proscrieraient une telle situation. Or, comme nous avons montré que de telles bulles pouvaient exister sans nécessiter de réelles masses négatives ni violer les conditions d'énergie, il semble maintenant que cette possibilité soit de nouveau à prendre au sérieux.

Cependant, comme nous l'avons mentionné, ces résultats supposent des bulles d'espace-temps qui n'interagissent pas beaucoup, et qui ne causent pas de sérieuse perturbation sur la métrique. Nous pouvons donc voir que $\kappa\rho$ sera toujours très petit, et donc, que seules les ondes gravitationnelles de très faibles fréquences seraient affectées par cet effet.

4.3 Conclusion

Nous avons d'abord présenté le formalisme général utilisé pour traiter la diffusion d'une onde gravitationnelle se propageant sur un fond de Minkowski, en supposant que la matière diffusant l'onde ne cause pas de perturbation significative de la métrique.

Nous avons ensuite appliqué ce formalisme au cas d'une onde gravitationnelle se propageant dans un fluide sans interactions. Nous avons obtenu la relation de dispersion lorsque le fluide est pris comme étant statique. Ceci semble une bonne approximation pour représenter un gaz de bulles de vide, dont la structure fut analysée précédemment. Nous avons alors pu montrer que dans une certaine approximation, un gaz de bulles d'espace-temps pourrait bloquer la propagation des ondes gravitationnelles de très faible fréquence.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Nous avons analysé la structure de bulles d'espace-temps afin de déterminer si l'approximation de bulles infiniment minces était bien l'approximation d'une structure plus complexe.

Nous avons d'abord présenté une introduction à la géométrie différentielle, en mettant l'emphase sur les concepts utiles pour l'étude de la relativité générale en général et pour notre problème en particulier. Après avoir revu les concepts de base, nous avons illustré ceux-ci en analysant la variété non-triviale la plus commune, la 2-sphère.

Nous avons ensuite utilisé ces concepts pour présenter une introduction à la relativité générale, une théorie géométrique de la gravitation. La signification du tenseur énergie-impulsion fut explicitée, et les conditions d'énergie furent présentées comme étant des contraintes algébriques sur ses composantes nous assurant que la matière présente possède quelques caractéristiques communes à la plupart des modèles physiques. Puisqu'il est souvent question de trous noirs lorsque l'on parle de bulles d'espace-temps, nous avons ensuite présenté la forme de trou noir la plus simple, les trous noirs de Schwarzschild.

Nous avons ensuite montré que pour un espace-temps statique et à symétrie sphérique, les conditions d'énergie se résument à quatre inégalités différentielles en termes des composantes de la métrique. De plus, si le potentiel gravitationnel effectif adopte une forme particulière, alors les conditions d'énergie se résument à deux inégalités différentielles simples. Ensuite, une paramétrisation astucieuse de la masse gravitationnelle effective nous permet d'analyser plus aisément le problème des bulles d'espace-temps.

Pour illustrer notre méthode, nous avons analysé quatre types de bulles différentes, toutes caractérisées par un extérieur de type Schwarzschild de Sitter, des trous noirs baignant dans une constante cosmologique. Lorsque l'intérieur est lui aussi de type Schwarzschild de Sitter, nous avons montré que les conditions d'énergie imposent que la constante cosmologique à l'intérieur soit plus grande que celle à l'extérieur, et que le paramètre de masse à l'extérieur est toujours plus grand que celui à l'intérieur.

Lorsque l'intérieur est de type Reissner-Nordström de Sitter, un trou noir chargé

électriquement baignant dans une constante cosmologique, nous avons montré qu'il existe des configurations admettant un paramètre de masse négatif sans qu'il n'y ait violation des conditions d'énergie. Ces configurations se comporteraient comme des trous noirs ayant une masse négative.

Lorsque l'intérieur est décrit par le potentiel parabolique présenté dans 3.4.4, alors le paramètre de masse extérieur est toujours plus grand que zéro. De plus la constante cosmologique est restreinte par les conditions d'énergie, mais sa valeur n'influence aucunement le paramètre de masse.

Finalement, lorsque l'intérieur est décrit par un trou noir exempt de singularité, que nous avons pris de la forme présentée dans [18], alors le paramètre de masse externe est encore une fois plus grand que zéro. Cependant, si l'on prend la limite lorsque l'épaisseur de la bulle tend vers zéro, alors le paramètre de masse interne est toujours plus grand que celui à l'extérieur.

Nous présentons également l'analyse classique de ces problèmes, en montrant à chaque fois la cohérence de notre méthode lorsque la limite où l'épaisseur des bulles tend vers zéro est prise.

Nous terminons par un traitement succinct du problème d'une onde gravitationnelle se propageant dans un nuage de bulles d'espace-temps. Nous avons dû nous limiter à une analyse très sommaire, réduite à une approximation fort simple, le fluide statique sans interaction. Nous montrons que les bulles de masse négative vues lors de l'analyse de la bulle ayant un trou noir chargé à l'intérieur, pourrait causer un blocage des ondes ayant une très faible fréquence.

5.1 Problèmes futurs

Pour la suite, il serait intéressant de voir comment les ondes gravitationnelles seraient affectées par le nuage de bulles dans une approximation plus fine que celle que nous avons utilisée ici. Particulièrement, même si l'hypothèse de non-interaction semble raisonnable, l'effet de la constante cosmologique elle-même a dû être négligé. Celle-ci affecte la forme exacte de l'équation d'onde utilisée et elle est fondamentale pour l'existence des bulles de masse négative.

De plus, il est généralement admis que de telles bulles d'espace-temps ne sont pas statiques. Nous avons pu vérifier que lorsque les bulles sont prises statiques et d'épaisseur nulle, alors les conditions d'énergie sont toujours violées sauf si le ten-

seur d'énergie-impulsion est non-singulier au bord. Également, l'espace de Friedmann-Robertson-Walker est mieux adapté pour représenter des fluides, il serait intéressant de considérer le cas où l'intérieur, ou simplement le bord, est représenté par cet espace-temps.

En restant toutefois dans les espaces-temps statiques, de nombreuses solutions représentant des fluides n'ont pas un potentiel gravitationnel effectif adoptant la forme que nous avons utilisée. Il pourrait donc être intéressant de voir comment ces formes de potentiel affecte les conditions d'énergie. Pensons particulièrement à la solution Schwarzschild intérieure, qui fut très étudiée mais qui ne respecte pas nos hypothèses.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Cetrioli, C.J. Pethick, "Interaction of gravitational waves with matter", ArXiv 1110.0408v1 , 2011
- [2] H.J. de Vega, J. Ramirez, N. Sanchez, "Generation of gravitational waves by generic sources in de Sitter space-time", Physical Review D, Volume 60, 044007
- [3] A. Einstein, L. Infeld, "On the motion of particles in general relativity theory", Canad. J. Math. 1(1949), 209-241
- [4] Einstein, Albert (1936). "Lens-like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field". Science 84 (2188) : 506-7
- [5] A. Papapetrou, "Equations of motion in General Relativity", Proc. Phys. Soc. A 64 57, 1951
- [6] Kayll, Lake, "All static spherically symmetric perfect fluid solutions of Einstein's equations", ArXiv 0209104v4, 2008
- [7] P. Laguna-Castillo, R.A. Matzner, "Inflation and bubbles in general relativity", Physical Review D 34(1986), 2913 - 2925
- [8] K. Schleich, D. M. Witt, "A simple proof of Birkhoff's theorem for cosmological constants", ArXiv :0908.4110v2, 2009
- [9] Eric Poisson, "A Relativist's Toolkit", Cambridge University Press, 2004
- [10] Hans Stephani, "Relativity, an introduction to Special and General Relativity", Cambridge University Press, 2004
- [11] Barret O'Neill, "Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity", Academic Press, 1983
- [12] M. Göckeler, T.Schücker, "Differential Geometry, gauge theories, and gravity", Cambridge University Press, 1987
- [13] A. Pressley, "Elementary Differential Geometry", Springer, 2007
- [14] , H. Brezis, "Analyse fonctionnelle Théorie et applications", Dunod, Paris, 1999

- [15] Luc Blanchet, "On the two-body problem in general relativity", ArXiv : 0108086v1, 2001
- [16] Alcubierre, Miguel (1994). "The warp drive : hyper-fast travel within general relativity". *Classical and Quantum Gravity* 11 (5) : L73-L77. arXiv :gr-qc/0009013
- [17] A. DeBenedictis, A. Das, "On a General Class of Wormhole Geometries", *Class.Quant.Grav.* 18 (2001) 1187-1204
- [18] J. Ziprick, G. Kunstatter, "Quantum Corrected Spherical Collapse : A Phenomenological Framework", arXiv :1004.0525v1
- [19] Goldstein H (1980). *Classical Mechanics* (2nd. ed.). New York : Addison-Wesley.
- [20] Hughes, Scott A. (2005). "Trust but verify : The case for astrophysical black holes". arXiv :hep-ph/0511217
- [21] George T. Gillies (1997), "The Newtonian gravitational constant : recent measurements and related studies", *Reports on Progress in Physics* 60 (2) : 151 ?225
- [22] Penrose, R (2004). *The Road to Reality : A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Vintage Books. pp. 410 ?1
- [23] L. Rosefeld (1940). "Sur le tenseur D ?Impulsion- Energie". *Acad. Roy. Belg. Memoirs de classes de Science* 18.
- [24] Charles W. Misner, Thorne, Kip S. , Wheeler, John A., (1973). *Gravitation*. San Francisco : W. H. Freeman and Company.
- [25] Morris, Michael ; Thorne, Kip ; Yurtsever, Ulvi (1988). "Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition". *Physical Review Letters* 61 (13) : 1446 ?1449.
- [26] Matt Visser, Carlos Barceló, Energy conditions and their cosmological implications, arXiv :gr-qc/0001099v1
- [27] Kerr, RP (1963). "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics". *Physical Review Letters* 11 (5) : 237 ?238.
- [28] Paul Painlevé, "La mécanique classique et la théorie de la relativité", *C. R. Acad. Sci. (Paris)* 173, 677 ?680 (1921).

- [29] H. Nariai (1951). "On a new cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation". *Sci. Rep. Tohoku Univ.* 35 : 62.
- [30] Arkhangel'skii, A.V.; Pontryagin, L.S. (1990), *General Topology I : Basic Concepts and Constructions Dimension Theory*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer

Annexe I

Résultats Numériques

I.1 Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter

Lorsque l'on exprime la continuité de la métrique aux bords de la membrane de la bulle comme une contrainte sur les paramètres de la bulle, nous obtenons la condition suivante :

$$\frac{m-M}{\Lambda-\lambda} = \frac{\int_x^y r^3 H(r) dr}{6 \int_x^y H(z) dz} \quad (\text{I.1})$$

et les conditions d'énergie s'expriment simplement par

$$\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda} \geq \frac{4 \int_x^r H(\xi) d\xi + rH(r)}{4 \int_x^y H(z) dz} \quad (\text{I.2})$$

avec $H(r)$ ayant toujours le même signe. Les tables I.I, I.III, I.V et I.VII donnent la valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour différents choix de fonction $H(r)$ et différentes valeurs de x et y . Les tables I.II, I.IV, I.VI et I.VIII donnent la borne inférieure sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour les mêmes fonctions.

Tableau I.I – Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.600000	0.485714	0.416667	0.371032	0.338889
2	0.714286	0.589286	0.507937	0.451389	0.410101
3	0.797619	0.670635	0.583333	0.520202	0.472727
4	0.861111	0.736111	0.646465	0.579545	0.527972
5	0.911111	0.789899	0.700000	0.631119	0.576923

Tableau I.II – Borne inférieure sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.33639	1.28219	1.28731	1.31604	1.35885
2	1.51127	1.40741	1.38614	1.39408	1.41688
3	1.68898	1.53545	1.4894	1.48036	1.48929
4	1.86838	1.66524	1.59488	1.56999	1.56683
5	2.04887	1.79621	1.70175	1.66149	1.64699

Tableau I.III – Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.638095	0.515306	0.439484	0.388889	0.353131
2	0.675466	0.545635	0.463450	0.407909	0.368421
3	0.711530	0.576253	0.488312	0.427970	0.384711
4	0.745854	0.606727	0.513783	0.448912	0.401925
5	0.778157	0.636672	0.539568	0.470549	0.419958

Tableau I.IV – Borne inférieure sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.39047	1.31043	1.30078	1.31816	1.35117
2	1.45066	1.34398	1.31961	1.32595	1.34948
3	1.51617	1.38230	1.34317	1.33874	1.35315
4	1.58621	1.42482	1.37094	1.35596	1.36158
5	1.66005	1.47104	1.40243	1.37708	1.37422

Tableau I.V – Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	38.8667	23.9524	16.1310	11.5774	8.71667
2	53.7810	35.6845	25.2381	18.7292	14.4303
3	65.8452	46.1310	33.9167	25.8939	20.3758
4	75.7024	55.2917	41.9394	32.7917	26.2855
5	83.8667	63.3030	49.2576	39.2978	32.0128

Tableau I.VI – Borne inférieure sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.12322	1.07151	1.05237	1.04301	1.03780
2	1.20513	1.12411	1.09234	1.07605	1.06655
3	1.29284	1.18243	1.13742	1.11361	1.09928
4	1.38416	1.24455	1.18607	1.15439	1.13492
5	1.47789	1.30932	1.23727	1.19756	1.17275

Tableau I.VII – Valeur de $\frac{m-M}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	51.0693	33.1341	22.9613	16.7267	12.6723
2	61.8931	42.1394	30.1551	22.4419	17.2400
3	71.1940	50.5023	37.2422	28.3393	22.1313
4	79.1342	58.0805	43.9756	34.1624	27.1181
5	85.9363	64.8841	50.2563	39.7696	32.0509

Tableau I.VIII – Borne inférieure sur $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda}$ pour $H(r) = (x-r)r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.18990	1.11218	1.08172	1.06605	1.05683
2	1.26419	1.15966	1.11700	1.09429	1.08048
3	1.34311	1.21178	1.15662	1.12654	1.10784
4	1.42501	1.26709	1.19937	1.16179	1.13804
5	1.50894	1.32470	1.24443	1.19928	1.17042

I.2 Reissner-Nordström à Schwarzschild de Sitter

Exprimées en termes des paramètres de la bulle, les conditions aux bords sont

$$\frac{\lambda - \Lambda}{Q} = \frac{1 - \frac{4 \int_x^y H(z) dz}{xH(x)}}{x^5} \quad (\text{I.3})$$

$$\frac{m - M}{Q} = \frac{\frac{\int_x^y r^3 H(r) dr}{x^4 H(x)} - 1}{3x} \quad (\text{I.4})$$

avec $H(y) = 0$ et les conditions d'énergie s'expriment par

$$\frac{\lambda}{Q} \geq \frac{rH(r) \left(1 - \frac{4 \int_r^y H(r) dr}{rH(r)}\right)}{x^5 H(x)} \quad (\text{I.5})$$

avec $H(r)$ toujours du même signe. Les tables I.IX, I.XII, I.XV et I.XVIII donnent la valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour différentes fonctions $H(r)$ ¹ et différents choix de x et y . Les tables I.X, I.XIII, I.XVI et I.XIX donnent la valeur de $\frac{\lambda - \Lambda}{Q}$ pour les mêmes choix, alors que les tables I.XI, I.XIV, I.XVII et I.XX donnent la valeur de la borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$, encore pour les mêmes choix.

Tableau I.IX – Valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.300000	-0.0190476	-0.139286	-0.197884	-0.231217
2	0.619048	0.1011900	-0.0806878	-0.164550	-0.210197
3	1.136900	0.2830690	0.0031746	-0.118903	-0.182419
4	1.990740	0.5629630	0.1252530	-0.055387	-0.145170
5	3.418520	1.0006700	0.3058920	0.0343952	-0.0944796

¹ $G_{n,k}(r)$ est la solution de l'équation différentielle $5G(r) + rG'(r) = r^k(y-r)^n$ avec des conditions au bord appropriées.

Tableau I.X – Valeur de $\frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	-1.66667	-0.666667	-0.200000	0.0666667	0.238095
2	-2.66667	-1.13333	-0.466667	-0.104762	0.119048
3	-4.20000	-1.80000	-0.828571	-0.328571	-0.031746
4	-6.60000	-2.77143	-1.32857	-0.625397	-0.225397
5	-10.4286	-4.21429	-2.03175	-1.02540	-0.477633

Tableau I.XI – Borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.544218	0.291667	0.237037	0.240299	0.279549
2	0.919271	0.417497	0.292032	0.258777	0.266722
3	1.590980	0.626688	0.384646	0.302672	0.280002
4	2.804070	0.974938	0.532980	0.377104	0.316413
5	5.012540	1.559570	0.768479	0.493881	0.379111

Tableau I.XII – Valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1234.17	391.524	162.899	80.2381	44.3952
2	8817.95	2449.15	906.845	402.824	203.251
3	66137.2	16329.9	5443.04	2198.98	1017.84
4	514403.	114311.	34639.6	12829.2	5482.36
5	4.11523×10^6	831358.	230933.	78951.1	31329.6

Tableau I.XIII – Valeur de $\frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	-71.	-38.	-24.2	-17.	-12.7143
2	-368.	-162.2	-89.	-55.5714	-37.7857
3	-2220.2	-821.	-389.857	-215.643	-132.286
4	-14813.	-4701.29	-1957.79	-965.857	-535.743
5	-105818.	-29392.8	-10885.1	-4836.89	-2442.01

Tableau I.XIV – Borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = r^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	7.55858	2.25051	1.01611	0.57227	0.369858
2	63.8383	16.1072	6.25926	3.08139	1.76444
3	552.423	120.889	41.2215	18.0203	9.26145
4	4868.19	940.333	285.59	112.259	52.3289
5	43511.6	7521.09	2058.9	735.109	313.49

Tableau I.XV – Valeur de $\frac{m-M}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	-0.221667	-0.241096	-0.256021	-0.267503	-0.276432
2	-0.215924	-0.234979	-0.250262	-0.262375	-0.271979
3	-0.210871	-0.229240	-0.244598	-0.257160	-0.267345
4	-0.206482	-0.223961	-0.239136	-0.251949	-0.262593
5	-0.202703	-0.219180	-0.233963	-0.246829	-0.257791

Tableau I.XVI – Valeur de $\frac{\lambda-\Lambda}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.233333	0.319635	0.395812	0.460815	0.515625
2	0.207827	0.288412	0.363208	0.429341	0.486454
3	0.186454	0.260331	0.332284	0.398330	0.456936
4	0.168806	0.235595	0.303567	0.368342	0.427527
5	0.154364	0.214179	0.277412	0.339875	0.398697

Tableau I.XVII – Borne inférieure sur $\frac{\lambda}{Q}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.466667	1.02283	2.11099	4.21317	8.25
2	0.302294	0.576824	1.0566	1.89502	3.36574
3	0.229482	0.396694	0.664569	1.09648	1.79963
4	0.189536	0.304608	0.476767	0.736683	1.13416
5	0.164655	0.250365	0.371819	0.545505	0.797393

Tableau I.XVIII – Valeur de $10^{2\frac{m-M}{Q}}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	-4.66644	-5.33252	-5.99780	-6.66171	-7.32351
2	-4.44442	-4.99990	-5.55525	-6.11035	-6.66503
3	-4.28571	-4.76189	-5.23805	-5.71417	-6.19022
4	-4.16667	-4.58333	-4.99999	-5.41665	-5.83329
5	-4.07407	-4.44444	-4.81481	-5.18518	-5.55555

Tableau I.XIX – Valeur de $10^{3\frac{\lambda-\Lambda}{Q}}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.680404	1.32681	2.31487	3.72063	5.61368
2	0.464940	0.832812	1.37782	2.14353	3.17446
3	0.359834	0.599238	0.940286	1.40718	2.02585
4	0.299984	0.471345	0.706838	1.02052	1.42766
5	0.261903	0.392848	0.567424	0.794328	1.08301

Tableau I.XX – Borne inférieure sur $10^{3\frac{\lambda}{Q}}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.700004	1.40003	2.52016	4.20062	6.60195
2	0.466667	0.840003	1.40001	2.20005	3.30017
3	0.360000	0.600000	0.942858	1.41429	2.04287
4	0.300000	0.471429	0.707143	1.02143	1.43000
5	0.261905	0.392857	0.567460	0.794444	1.08333

I.3 Trou noir non-singulier à Schwarzschild de Sitter

Si nous définissons $\alpha = \frac{x^3}{L^3+x^3}$, les paramètres externes de la bulle sont alors donnés par :

$$\frac{\lambda x^3}{6M} = (1 - \alpha)\alpha \left(1 - \frac{6\alpha \int_x^y H(z) dz}{xH(x)} \right) \quad (\text{I.6})$$

$$\frac{m}{M} = \alpha^2 \left(\frac{(6(1 - \alpha)) \int_x^y r^3 H(r) dr}{x^3(xH(x))} + 1 \right) \quad (\text{I.7})$$

et α doit répondre à la condition suivante :

$$0 < \alpha \leq \frac{2xH(x)}{3(rH(r) + 4 \int_x^r H(\xi) d\xi)} \quad (\text{I.8})$$

Les tables I.XXI, I.XXIV, I.XXVII et I.XXX donnent la valeur maximale² de $\frac{m}{M}$ pour différentes fonctions $H(r)$ et différents choix de x et y . Les tables I.XXII, I.XXV, I.XXVIII et I.XXXI donnent la valeur de $\frac{\lambda - \Lambda}{Q}$ pour les mêmes choix, alors que les tables I.XXIII, I.XXVI, I.XXIX et I.XXXII donnent la valeur de la borne supérieure sur α , encore pour les mêmes choix.

Tableau I.XXI – Valeur maximale de $\frac{m}{M}$ pour $H(r) = (x - r)^k(y - r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.432515	0.548309	0.618209	0.662487	0.680818
2	0.330748	0.462924	0.549446	0.610213	0.650879
3	0.239643	0.376104	0.474774	0.548227	0.603345
4	0.164864	0.29331	0.397928	0.480734	0.546391
5	0.10818	0.219378	0.322756	0.410885	0.484173

²Puisque le minimum est toujours zéro et que ces fonctions sont continues en α , seule leur valeur maximale est importante.

Tableau I.XXII – Valeur maximale de $\frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.0549637	0.0812135	0.1037810	0.1226170	0.138118
2	0.0414251	0.0664738	0.0896339	0.1098770	0.127032
3	0.0300318	0.0526749	0.0754349	0.0964772	0.115004
4	0.0209790	0.0403803	0.0617509	0.0828247	0.102259
5	0.0141612	0.0299549	0.0491148	0.0694002	0.0891295

Tableau I.XXIII – Borne minimale de α pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	0.207627	0.340426	0.463918	0.568037	0.640131
2	0.145372	0.261353	0.379068	0.488924	0.580885
3	0.0981695	0.194551	0.301221	0.408686	0.508228
4	0.0640775	0.140458	0.232974	0.332917	0.432392
5	0.0405488	0.0984176	0.175428	0.264626	0.359051

Tableau I.XXIV – Valeur maximale de $\frac{m}{M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.54729	1.81278	1.85235	1.80292	1.72076
2	0.375973	0.607241	0.777869	0.896359	0.974475
3	0.0687605	0.14684	0.232898	0.318612	0.399008
4	0.0106224	0.0287184	0.0549968	0.0880828	0.126257
5	0.0014763	0.00487891	0.0110239	0.0203335	0.0329777

Tableau I.XXV – Valeur maximale de $10^3 \frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	2.30411	4.23706	6.52657	9.0886	11.8592
2	0.451263	1.01916	1.845	2.92879	4.26026
3	0.0750024	0.202675	0.426047	0.768132	1.24732
4	0.0112448	0.0354394	0.0850722	0.17232	0.310319
5	0.001476	0.00563514	0.0152635	0.0344443	0.0682124

Tableau I.XXVI – Borne minimale de $10^3 \alpha$ pour $H(r) = (x-r)^k(y-r)^n$, avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	8.37957	16.1614	25.4297	35.8958	47.3346
2	1.54022	3.71801	6.92574	11.1758	16.4405
3	0.24036	0.707047	1.54293	2.84095	4.67681
4	0.0338716	0.118148	0.297039	0.61779	1.13172
5	0.00446435	0.0180596	0.0514998	0.119624	0.241852

Tableau I.XXVII – Valeur maximale de $10 \frac{m}{M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	5.6202	6.77528	7.33477	7.64431	7.83675
2	3.08015	4.96472	6.10726	6.77082	7.17267
3	1.23583	2.95503	4.50205	5.59288	6.30486
4	0.397263	1.41231	2.82482	4.15685	5.18602
5	0.113362	0.565445	1.49798	2.70994	3.88853

Tableau I.XXVIII – Valeur maximale de $10 \frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.37645	1.35154	1.33122	1.31481	1.30163
2	1.46638	1.43282	1.40363	1.3787	1.35767
3	1.44024	1.51524	1.48032	1.44896	1.42127
4	1.06919	1.51617	1.55638	1.52115	1.48878
5	0.665912	1.23479	1.56396	1.5918	1.55682

Tableau I.XXIX – Borne minimale de 10α pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 2$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	5.40541	6.09125	6.39165	6.53127	6.59876
2	3.91421	5.17433	5.86667	6.23628	6.43385
3	2.45533	3.93686	5.00394	5.68246	6.09158
4	1.40281	2.70378	3.92584	4.87208	5.52961
5	0.763268	1.71853	2.84573	3.90632	4.76634

Tableau I.XXX – Valeur maximale de $\frac{m}{M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.20888	1.21481	1.21905	1.22222	1.22469
2	1.19107	1.2	1.20635	1.21111	1.21481
3	1.17321	1.18517	1.19365	1.2	1.20494
4	1.15526	1.17034	1.18095	1.18889	1.19506
5	1.13716	1.15549	1.16825	1.17778	1.18519

Tableau I.XXXI – Valeur maximale de $10\frac{\lambda}{6M}$ pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1	1.17419	1.17403	1.17395	1.1739	1.17387
2	1.17468	1.1743	1.17413	1.17403	1.17397
3	1.17543	1.17472	1.17439	1.17421	1.1741
4	1.1765	1.1753	1.17474	1.17445	1.17428
5	1.17794	1.17608	1.17521	1.17476	1.17449

Tableau I.XXXII – Borne minimale de 10α pour $H(r) = G_{n,k}(r)$ avec $y = 10$ et $x = 1$

k \ n	1	2	3	4	5
1.	6.66654	6.66666	6.66667	6.66667	6.66667
2.	6.66618	6.66662	6.66666	6.66667	6.66667
3.	6.6653	6.66652	6.66665	6.66666	6.66667
4.	6.66347	6.66629	6.66662	6.66666	6.66667
5.	6.66008	6.66583	6.66655	6.66665	6.66666

Annexe II

Exemple de code

Nous présentons ici un exemple des codes utilisés lors de ces travaux. Nous commencerons par présenter le code servant à analyser la structure d'une bulle, puis nous présenterons les codes utilisés pour étudier les conditions de Lanczos. Nous terminerons par la démonstration des résultats présentés dans le chapitre 4.

II.1 Analyse des conditions d'énergie

Voici une retranscription du code Mathematica utilisé lors du traitement des conditions d'énergie pour la bulle de type Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter. Les sections en gras sont les entrées et les autres les sorties.

(*Les fonctions à l'intérieur et à l'extérieur sont respectivement*)

$k = \text{Function} \left[\{r\}, \frac{r^3 \Lambda}{6} + M \right];$

$h = \text{Function} \left[\{x\}, \frac{\lambda x^3}{6} + m \right];$

(*Nous supposons de plus que*) $y > x > 0,$

(* et que la constante cosmologique à l'extérieur est plus grande que zéro*);

$\$Assumptions = y > r > x > 0 \&\& \lambda > 0;$

(*Les conditions aux bords sont alors*)

$j[x] == \left(\frac{k'[x]}{x^2} - \frac{2k[x]}{x^3} \right) // \text{FullSimplify}$

$j[y] == \left(\frac{h'[y]}{y^2} - \frac{2h[y]}{y^3} \right) // \text{FullSimplify}$

$\text{Integrate}[j[z], \{z, x, y\}] == \left(\frac{D[h[z], z]}{z^2} /. z \rightarrow y \right) - \left(\frac{D[k[z], z]}{z^2} /. z \rightarrow x \right) //$

FullSimplify

$\text{Integrate} \left[r^2 \text{Integrate}[j[\xi], \{\xi, x, r\}], \{r, x, y\} \right] ==$

$h[y] - k[x] + (x^3 - y^3) \left(\frac{D[k[z], z]}{3z^2} /. z \rightarrow x \right) // \text{FullSimplify}$

$j[x] == 0$

$j[y] == 0$

$\lambda == \Lambda + 2 \int_x^y j[z] dz$

$$6m + y^3(\lambda - \Lambda) == 6 \left(M + \int_x^y r^2 \int_x^r j[\xi] d\xi dr \right)$$

(*Nous définissons une fonction H par*)

$$H[r] == \frac{j[r]}{B};$$

(*La 3e conditions au bord nous donne donc*)

$$B == \frac{\lambda - \Lambda}{2 \int_x^y H[z] dz};$$

(*et les trois autres deviennent simplement*)

$$H[x] == 0;$$

$$H[y] == 0;$$

$$\frac{m - M + \frac{y^3}{6}(\lambda - \Lambda)}{\lambda - \Lambda} == \frac{\int_x^y r^2 \left(\int_x^r H[\xi] d\xi \right) dr}{2 \int_x^y H[z] dz};$$

(*Nous pouvons réécrire la 3e condition comme*)

$$\frac{\int_x^y r^3 H[r] dr}{6 \int_x^y H[z] dz} == \frac{m - M}{\Lambda - \lambda};$$

(*Puisque*)

$$\Lambda > \lambda;$$

(* nous voyons alors que*)

$$M < m;$$

(*L'autre inégalité différentielle devient donc*)

$$\frac{4k[x]}{x^2} \geq -4 \int_x^r j[\xi] d\xi + rj[r];$$

$$2\Lambda \geq (\Lambda - \lambda) \frac{4 \int_x^r H[\xi] d\xi + rH[r]}{2 \int_x^y H[z] dz};$$

$$\frac{\Lambda}{(\Lambda - \lambda)} \geq \frac{4 \int_x^r H[\xi] d\xi + rH[r]}{4 \int_x^y H[z] dz};$$

(*on multiplie de chaque côté par*)

$$r^3 (*puis nous intégrons des deux côtés de x à y*);$$

(*Nous obtenons alors*)

$$\frac{y^4 - x^4}{4} \frac{\Lambda}{(\Lambda - \lambda)} \geq \frac{y^4 \int_x^y H[\xi] d\xi}{4 \int_x^y H[z] dz};$$

$$\frac{\Lambda}{(\Lambda - \lambda)} \geq \frac{y^4}{y^4 - x^4};$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\Lambda}} \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^4};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 \leq \frac{\lambda}{\Lambda};$$

(*et ce, indépendamment de la fonction H choisie*)

II.2 Équations de Lanczos

Voici le code de base utilisé lors du traitement des conditions de Lanczos, suivis d'un exemple de son utilisation. Encore une fois les sections en gras sont les entrées, et le reste les sorties.

(*Nous allons ici traiter de façon claire les équations de Lanczos*)

(*On importe d'abord le paquet pour le calcul tensoriel RGTC*)

Get[

“G : \\Wolfram Research\\Mathematica\\8.0\\AddOns\\Packages\\RGTC\\EDCRGTCcode.m”]

(*On définit nos coordonnées*)

$xIN = \{t, r, \theta, \phi\};$

(*Et nous posons la métrique comme étant*)

$gIN = \left\{ \left\{ \left(1 - \frac{2p[r]}{r}\right), 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -1 / \left(1 - \frac{2p[r]}{r}\right), 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, -r^2, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, -r^2 * \text{Sin}[\theta]^2 \right\} \right\};$

(*On appelle RGTC, ce qui calcule tout les tenseurs pertinents*)

RGtensors[gIN, xIN];

(*Les coordonnées sur Σ sont*)

$yIN = \{t, \theta, \phi\};$

(*La matrice d'induction est donc*)

$eUd = \text{Table}[D[xIN[[i]], yIN[[j]]], \{i, 1, \text{Length}[xIN]\}, \{j, 1, \text{Length}[yIN]\}];$

(*Et la métrique induite est*)

$hdd = \text{Contract}[\text{Outer}[\text{Times}, gdd, eUd, eUd], \{1, 3\}, \{2, 5\}];$

(*La normale est donnée par*)

$\Psi = \text{Function}[\{\rho\}, \rho - x];$

$nd = \text{Table}[D[\Psi[r], xIN[[i]]], \{i, 1, \text{Length}[xIN]\}];$

$nU = \text{Raise}[nd, 1];$

$\varepsilon = \text{Contract}[\text{Outer}[\text{Times}, nU, nd], \{1, 2\}];$

(*La courbure externe est donc*)

Kdd = Contract[Outer[Times, covD[nd], eUd, eUd], {1, 3}, {2, 5}];

(*Et le tenseur S non différencié induit est*)

NSdd = $\frac{-\epsilon}{8\pi}$ (Kdd - hdd Contract[Outer[Times, Kdd, Inverse[hdd]], {1, 3}, {2, 4}]);

$$gdd = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2p[r]}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2p[r]}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

LineElement = $-r^2 d[\theta]^2 - \frac{rd[r]^2}{r-2p[r]} + \frac{d[t]^2(r-2p[r])}{r} - r^2 d[\phi]^2 \text{Sin}[\theta]^2$

$$gUU = \begin{pmatrix} \frac{r}{r-2p[r]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r-2p[r]}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\text{Csc}[\theta]^2}{r^2} \end{pmatrix}$$

gUU computed in 0. sec

Gamma computed in 0.016 sec

Riemann(dddd) computed in 0. sec

Riemann(Uddd) computed in 0.015 sec

Ricci computed in 0. sec

Weyl computed in 0.016 sec

Einstein computed in 0. sec

II.2.1 Exemple : Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter

Voici maintenant un exemple de l'utilisation de ce code pour la bulle de type Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter.

(*Rappelons les fonctions à l'intérieur et à l'extérieur*)

k = Function[{r}, $\frac{\Lambda r^3}{6} + M$];

h = Function[{r}, $\frac{\lambda r^3}{6} + m$];

(*Les métriques induites sont alors*)

hdd/.{p → h} // FullSimplify // MatrixForm

hdd/.{p → k} // FullSimplify // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2\lambda}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2\Lambda}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

(*Et la continuité de la métrique impose donc*)

$m=.$;

$$m = m/. \text{Solve}[\left(\left(\frac{\text{Kdd}}{-2M+r-\frac{r^3\Lambda}{3}}/. \{p \rightarrow h\}\right) - \frac{\text{Kdd}}{-2M+r-\frac{r^3\Lambda}{3}}/. \{p \rightarrow k\}\right) == 0 // \text{FullSimplify}, m][[1]]$$

$$\frac{1}{6} (6M - r^3\lambda + r^3\Lambda)$$

(*La courbure externe induite à l'intérieur et à l'extérieur est alors*)

$$\frac{\text{Kdd}}{-2M+r-\frac{r^3\Lambda}{3}}/. \{p \rightarrow h\} // \text{FullSimplify} // \text{MatrixForm}$$

$$\frac{\text{Kdd}}{-2M+r-\frac{r^3\Lambda}{3}}/. \{p \rightarrow k\} // \text{FullSimplify} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{M}{r^3} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\Lambda}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{M}{r^3} + \frac{\Lambda}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

(*Et la courbure externe est continue si*)

$$\text{Solve} \left[\left[\left(\frac{\text{Kdd}}{-2M+r-\frac{r^3\Lambda}{3}}/. \{p \rightarrow h\} \right) - \left(\frac{\text{Kdd}}{-2M+r-\frac{r^3\Lambda}{3}}/. \{p \rightarrow k\} \right) // \text{FullSimplify} \right] == 0, \lambda \right]$$

$$\{\{\lambda \rightarrow \Lambda\}\}$$

(*Et la seule solution est donc que la bulle soit triviale!*)

(*Calculons la singularité induite à l'interface si la courbure externe n'est pas continue*)

$\lambda =$

$(\text{NSdd}/.\{p \rightarrow h\}) - (\text{NSdd}/.\{p \rightarrow k\}) // \text{FullSimplify}$

$\text{ISUd} = \text{Contract}[\text{Outer}[\text{Times}, \%, \text{Inverse}[(\text{hdd}/.\{p \rightarrow h\})]], \{1, 3\}]$

$$\left\{ \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{r^2(\lambda - \Lambda)(6M - 3r + r^3\Lambda)}{48\pi}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{r^2(\lambda - \Lambda)(6M - 3r + r^3\Lambda)\text{Sin}[\theta]^2}{48\pi} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{(\lambda - \Lambda)(6M - 3r + r^3\Lambda)}{48\pi}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{(\lambda - \Lambda)(6M - 3r + r^3\Lambda)}{48\pi} \right\} \right\}$$

(*Si l'on regarde maintenant les conditions d'énergie sur la singularité*)

(*Notre vecteur temporel est donné par*)

$$\mathbf{VU} = \frac{\{1, a, b\}}{(1 - a^2 - b^2)^{1/2}};$$

$$\mathbf{vd} = \frac{\{1, -a, -b\}}{(1 - a^2 - b^2)^{1/2}};$$

(*Et la métrique dans le référentiel de l'observateur est donc*)

$$\eta = \{\{1, 0, 0\}, \{0, -1, 0\}, \{0, 0, -1\}\};$$

$$\$Assumptions = 1 - a^2 - b^2 > 0 \&\&a \in \text{Reals} \&\&b \in \text{Reals} \&\&r > 0;$$

(*La densité d'énergie ressentie est alors*)

$$\rho = \text{Contract}[\text{Outer}[\text{Times}, \text{ISUd}, \mathbf{VU}, \mathbf{vd}], \{2, 3\}, \{1, 4\}];$$

(*et est positive si*)

$$\rho \geq 0 // \text{FullSimplify}$$

$$(a^2 + b^2)(\lambda - \Lambda)(6M - 3r + r^3\Lambda) \leq 0$$

(*Soit donc*)

$$\lambda \geq \Lambda;$$

(*Car nous devons être à l'extérieur des horizons*)

(*Le courant ressentie par l'observateur est lui*)

$$\mathbf{JU} = \text{Contract}[\text{Outer}[\text{Times}, \text{ISUd}, \mathbf{VU}], \{2, 3\}];$$

(*Et est dirigé vers le futur si*)

$$\mathbf{JU}[[1]] \geq 0$$

(*Et est de type temporel si*)

$$\text{Contract}[\text{Outer}[\text{Times}, \mathbf{JU}, \mathbf{JU}, \eta], \{1, 3\}, \{2, 4\}];$$

$$\% \geq 0 // \text{FullSimplify}$$

True

$$(a^2 + b^2) (\lambda - \Lambda)^2 (6M - 3r + r^3 \Lambda)^2 \leq 0$$

(*Qui est vraie pour toute $a^2 + b^2 < 1$ que si*)

$$\lambda = \Lambda;$$

II.3 Étude numérique des conditions d'énergie

Voici le code utilisé pour traiter numériquement les inégalités que nous avons trouvé pour la bulle de type Schwarzschild de Sitter à Schwarzschild de Sitter. Encore une fois, les sections en gras sont les entrées, et le reste sont les sorties.

(*La différence entre la masse à l'extérieur et la masse à l'intérieur est*)

$$m - M = (\Lambda - \lambda) \frac{\int_x^y r^3 H[r] dr}{6 \int_x^y H[z] dz};$$

(*Alors que la contrainte sur les constantes cosmologiques est*)

$$\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda} \geq \frac{(4 \int_x^r H[\xi] d\xi + rH[r])}{4 \int_x^y H[z] dz};$$

(*Nous définissons une fonction bords, qui prends la valeur x et y,

la position des bords. Elle calcul ensuite la différence entre la masse

externe et la masse interne et elle trouve la valeur de la contrainte

lorsque celle – ci est maximale. Elle le fait pour un ensemble de choix

de fonction H , tous des polynômes de différent degrés,

et organise le tout dans un tableau*)

Bords = Fonction[{X,Y},

(*Nous commençons par définir les variables dont nous aurons besoins*)

Liste = {};

y = Y;

x = X;

Ext=.

(*Nous ouvrons une boucle, qui agira sur k , et n *)

Do[

(*Nous vidons les variables qui seront redéfinies à chaque boucles.*)

(*H est la fonction d'interpolation*)

H=.

(*p est la liste dans laquelle nous mettrons les points ou la contrainte sera extrémale*)

p=.

p = {};

(*ρ et rserons les variables que nous utiliserons lorsque nos fonctions auront besoin d'argument*)

ρ=.

r=.

(*P contiendra les points de p se trouvant dans l'interval[x,y]*)

P=.

P = {};

(*msera notre différence de masse.*)

m=.

(*Nous prenons comme fonction un polynôme*)

H = Function [{ρ}, (x - ρ)^k(y - ρ)ⁿ];

(*On trouve ensuite les points ou la contrainte est maximale. Les points ou la dérivée de la contrainte s'annule sont*)

p = (r/.Solve [5H[r] + rH'[r] == 0, r])//FullSimplify;

(*Nous ouvrons une deuxième liste, afin d'éliminer les racines complexes, ou ne se trouvant pas dans l'interval[x,y]. La liste II contiendra les numéros des racines complexes*)

II = {};

Do[If[(p[[i]] ∈ Reals)//FullSimplify, , II = Append[II, {i}],

{i, 1, Length[p]}];

(*Nous retirons de p les racines complexes*)

```

p = Delete[p, II];
(*Nous en retirons aussi les racines multiples*)
p = DeleteDuplicates[p, (#1 == #2 &)//FullSimplify];
(*Que nous ajoutons dans P*)
Do[
If[(y ≥ p[[i]] && p[[i]] ≥ x)//FullSimplify,
P = Append[P, p[[i]];]
, {i, 1, Length[p]};
(*La différence de masse entre l'extérieur et l'intérieur est donc*)
m =  $\frac{\int_x^y r^3 H[r] dr}{6 \int_x^y H[\rho] d\rho}$ //FullSimplify;
(*Et les valeurs que prends la contrainte en ses points extrémaux sont*)
Ext = Table [ $\frac{(4 \int_x^r H[\rho] d\rho + r H[r])}{4 \int_x^r H[\rho] d\rho}$  /. {r → (P[[i]])}]//FullSimplify,
{i, 1, Length[P]};
(*Nous ne gardons que la plus grande*)
max = Max[Ext];
(*Et nous définissons l'élément k, n de la liste finale*)
Lk,n = {m, max};
, {n, 1, 5}, {k, 1, 5}];
(*Finalement, nous construisons la liste finale*)
Liste = Table [Lk,n, {k, 1, 5}, {n, 1, 5}];
(*ET nous vidons les valeurs de x et y, pour qu'elles puissent être réutilisées*)
y =.;
x =.;
(*Puis on affiche la liste, sous forme matricielle,
en exprimant au long chacun des nombres du résultat*)
Liste//MatrixForm//N
];
(*Si nous essayons par exemple avec x = 1 et y = 2, nous trouvons alors*)

```

Bords[1,2]//Timing

7.582,	$\left(\begin{array}{c} 0.6 \\ 1.33639 \\ 0.714286 \\ 1.51127 \\ 0.797619 \\ 1.68898 \\ 0.861111 \\ 1.86838 \\ 0.911111 \\ 2.04887 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 0.485714 \\ 1.28219 \\ 0.589286 \\ 1.40741 \\ 0.670635 \\ 1.53545 \\ 0.736111 \\ 1.66524 \\ 0.789899 \\ 1.79621 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 0.416667 \\ 1.28731 \\ 0.507937 \\ 1.38614 \\ 0.583333 \\ 1.4894 \\ 0.646465 \\ 1.59488 \\ 0.7 \\ 1.70175 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 0.371032 \\ 1.31604 \\ 0.451389 \\ 1.39408 \\ 0.520202 \\ 1.48036 \\ 0.579545 \\ 1.56999 \\ 0.631119 \\ 1.66149 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 0.338889 \\ 1.35885 \\ 0.410101 \\ 1.41688 \\ 0.472727 \\ 1.48929 \\ 0.527972 \\ 1.56683 \\ 0.576923 \\ 1.64699 \end{array} \right)$
--------	--	---	---	---	---

(*Ceci nous permettra de représenter les résultats de façon cohérente

dans le mémoire. La liste contient cette fois la nombre n ,

suis des valeurs de $L_{n,k}[[1]]$, sous forme de matrice dans LaTeX*)

Table [Flatten [{n, Table [L_{n,k}[[1]], {k, 1, 5}]}], {n, 1, 5}] //MatrixForm//N//

TeXForm

II.4 Dispersion

Voici maintenant les calculs effectués pour déterminer la diffusion des ondes gravitationnelles.

(*Nous voulons trouver*)

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}};$$

(*avec*)

$$g_{\mu\nu} == \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu};$$

$$g^{\mu\nu} == \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha} h_{\alpha}{}^{\nu};$$

$$h^{\mu\nu} == \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta};$$

(*Nous vérifions que*)

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} == \delta^{\mu}_{\nu};$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} == \left(\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha} + h^{\mu\beta} h_{\beta}^{\alpha} \right) \left(\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu} \right);$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} == \delta^{\mu}_{\nu} - h^{\mu}_{\nu} + h^{\mu}_{\nu} - h^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + h^{\mu\beta} h_{\beta}^{\alpha} \eta_{\alpha\nu};$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} == \delta^{\mu}_{\nu};$$

(*Ça marche, jusqu'au deuxième ordre, ce qui est suffisant pour nous*)

(*Le déterminant de g est lui donné par*)

$$g = \text{Det} [g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha} h_{\alpha}^{\nu}];$$

(*et en utilisant la formule de Jacobi*)

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} == g \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \alpha} \right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \beta \partial \alpha} == \frac{\partial g}{\partial \beta} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \alpha} \right) + g \frac{\partial}{\partial \beta} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \alpha} \right);$$

(*et pour les dérivées de $g_{\mu\nu}$, nous avons*)

$$\frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} == \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2};$$

$$\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} == \frac{\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}}{2};$$

$$\frac{\partial h_{\beta}^{\alpha}}{\partial h^{\mu\nu}} == \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\beta\mu} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2};$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} == \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} == \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\phi} \frac{\partial h^{\gamma\phi}}{\partial h^{\mu\nu}} == \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\phi} \frac{(\delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{\nu}^{\phi} + \delta_{\mu}^{\phi} \delta_{\nu}^{\gamma})}{2} == \frac{\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}}{2};$$

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} == - \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2} + \eta_{\kappa\lambda} \frac{\partial h^{\alpha\lambda} h^{\kappa\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} == - \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2} + \eta_{\kappa\lambda} \left(h^{\alpha\lambda} \frac{\partial h^{\kappa\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} + \frac{\partial h^{\alpha\lambda}}{\partial h^{\mu\nu}} h^{\kappa\beta} \right) ==$$

$$- \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2} + \frac{\eta_{\kappa\lambda}}{2} \left(h^{\alpha\lambda} (\delta_{\mu}^{\kappa} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\kappa}) + (\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\nu}^{\alpha}) h^{\kappa\beta} \right) ==$$

$$- \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2} + \frac{1}{2} \left(h^{\alpha\lambda} (\eta_{\mu\lambda} \delta_{\nu}^{\beta} + \eta_{\nu\lambda} \delta_{\mu}^{\beta}) + (\eta_{\kappa\nu} \delta_{\mu}^{\alpha} + \eta_{\kappa\mu} \delta_{\nu}^{\alpha}) h^{\kappa\beta} \right) ==$$

$$- \frac{(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha})}{2} + \frac{1}{2} \left((h_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + h_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta}) + (h_{\nu}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} + h_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha}) \right);$$

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial h^{\gamma\phi} \partial h^{\mu\nu}} == 0;$$

$$\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial h^{\gamma\phi} \partial h^{\mu\nu}} == \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h^{\gamma\phi}} \left(h_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + h_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} + h_{\nu}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} + h_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} \right) ==$$

$$\frac{1}{4} \left((\delta_{\gamma}^{\alpha} \eta_{\mu\phi} + \eta_{\gamma\mu} \delta_{\phi}^{\alpha}) \delta_{\nu}^{\beta} + (\delta_{\gamma}^{\alpha} \eta_{\nu\phi} + \eta_{\gamma\nu} \delta_{\phi}^{\alpha}) \delta_{\mu}^{\beta} + (\delta_{\gamma}^{\beta} \eta_{\nu\phi} + \eta_{\gamma\nu} \delta_{\phi}^{\beta}) \delta_{\mu}^{\alpha} \right)$$

$$+ \left((\delta_{\gamma}^{\beta} \eta_{\mu\phi} + \eta_{\gamma\mu} \delta_{\phi}^{\beta}) \delta_{\nu}^{\alpha} \right);$$

(*Nous avons donc*)

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} == \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial h^{\mu\nu}} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} == \frac{-g}{\sqrt{-g}} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) \mathcal{L} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} ==$$

$$\sqrt{-g} \left(\left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) ==$$

$$\sqrt{-g} \left(\left((\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\gamma} h_{\gamma}^{\beta}) \frac{\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}}{2} \right) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) ==$$

$$\sqrt{-g} \left(((\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) + (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu})) \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) = \\ \sqrt{-g} \left((\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right);$$

(*Donc, si nous développons en série *)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}};$$

(*en h , nous trouvons*)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \simeq \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right)_{h \rightarrow 0} + \left(\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) \right)_{h \rightarrow 0} h^{\alpha\beta};$$

(*Or, puisque nous avons supposé que le gaz n'affectait directement l'espace temps,

le terme d'ordre zéro doit s'annuler. Nous trouvons donc finalement*)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \simeq \left(\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) \right)_{h \rightarrow 0} h^{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) &= \frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \left((\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) = \\ & \left(\mathcal{L} \frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) + (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}} + \frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) = \\ & \left(\mathcal{L} \left(-\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} h_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu} \right) + (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta} \partial h^{\mu\nu}} \right) = \\ & \left(\mathcal{L} \left(-\frac{\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}}{2} + \frac{\eta^{\lambda\gamma}}{2} (h_{\gamma\mu} (\eta_{\alpha\lambda} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\lambda}) + h_{\nu\lambda} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\gamma} + \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\mu})) \right) \right) + \\ & (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta} \partial h^{\mu\nu}} = \\ & \left(\frac{\mathcal{L}}{2} \left(-\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \left(h_{\gamma\mu} (\delta_{\alpha}^{\gamma} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \delta_{\beta}^{\gamma}) + h_{\nu\lambda} (\eta_{\alpha\mu} \delta_{\beta}^{\lambda} + \delta_{\alpha}^{\lambda} \eta_{\beta\mu}) \right) \right) \right) + \\ & (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta} \partial h^{\mu\nu}} = \\ & \left(\frac{\mathcal{L}}{2} \left(-\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + h_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + h_{\beta\mu} \eta_{\alpha\nu} + h_{\nu\beta} \eta_{\alpha\mu} + h_{\nu\alpha} \eta_{\beta\mu} \right) + (\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\nu}^{\gamma} h_{\gamma\mu}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta} \partial h^{\mu\nu}} \right); \end{aligned}$$

(*ET donc*)

(*En particulier, pour un gaz de particule qui n'interagissent pas*)

$$\mathcal{L} = \rho \sqrt{g_{\mu\nu} U^{\nu} U^{\mu}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}} &= \frac{\rho U^{\nu} U^{\mu}}{\sqrt{g_{\mu\nu} U^{\nu} U^{\mu}}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial h^{\alpha\beta}} = \left(\frac{\rho U^{\nu} U^{\mu}}{\sqrt{g_{\mu\nu} U^{\nu} U^{\mu}}} \right) \frac{\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}}{2} = \left(\frac{\rho U_{\alpha} U_{\beta}}{\sqrt{g_{\mu\nu} U^{\nu} U^{\mu}}} \right); \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta} \partial h^{\mu\nu}} &= \frac{\partial}{\partial h^{\mu\nu}} \frac{\rho U_{\alpha} U_{\beta}}{\sqrt{g_{\omega\sigma} U^{\omega} U^{\sigma}}} = -\frac{\rho U_{\alpha} U_{\beta} U^{\omega} U^{\sigma}}{2\sqrt{(g_{\omega\sigma} U^{\omega} U^{\sigma})^3}} \frac{\eta_{\sigma\mu} \eta_{\omega\nu} + \eta_{\sigma\nu} \eta_{\omega\mu}}{2} = -\frac{\rho U_{\alpha} U_{\beta} U_{\mu} U_{\nu}}{2\sqrt{(g_{\omega\sigma} U^{\omega} U^{\sigma})^3}}; \end{aligned}$$

(*Et donc, si le champs de vitesse du gaz est normalisé, nous avons*)

$$\left(\frac{\partial}{\partial h^{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} \right) \right)_{h \rightarrow 0} = \rho \left(-\frac{1}{2} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}) + \eta_{\mu\nu} U_{\alpha} U_{\beta} - \frac{U_{\alpha} U_{\beta} U_{\mu} U_{\nu}}{2} \right)$$

(*et l'équation d'onde est alors*)

$$\square h_{\mu\nu} = -4\kappa\rho \left(-\frac{1}{2} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}) + \eta_{\mu\nu} U_{\alpha} U_{\beta} - \frac{U_{\alpha} U_{\beta} U_{\mu} U_{\nu}}{2} \right) h^{\alpha\beta}$$

(*et si la vitesse et la densité du gaz est uniforme,

nous obtenons la relation de dispersion*)

$$\left((k^2 - \omega^2) \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + 4\kappa\rho \left(-\frac{1}{2} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}) + \eta_{\mu\nu} U_\alpha U_\beta - \frac{U_\alpha U_\beta U_\mu U_\nu}{2} \right) \right) \Gamma^{\alpha\beta} == 0$$

(*ET si de plus les particules sont immobiles, alors nous avons*)

$$\left((k^2 - \omega^2) - 4\kappa\rho \right) \Gamma_{\mu\nu} == 0$$

(*Ou*)

$$k^2 == \omega^2 + 4\kappa\rho$$

(*On peut alors voir que si la masse des particules était négative, certaines fréquences seraient bloquées!*)

