

Université de Montréal

Complexité des homomorphismes de graphes avec listes

par
Adrien Lemaître

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des arts et sciences
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en informatique

avril, 2012

© Adrien Lemaître, 2012.

Université de Montréal
Faculté des arts et sciences

Cette thèse intitulée:

Complexité des homomorphismes de graphes avec listes

présentée par:

Adrien Lemaître

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Sylvie Hamel,	président-rapporteur
Geña Hahn,	directeur de recherche
Benoît Larose,	codirecteur
Pierre McKenzie,	membre du jury
Hubie Chen,	examineur externe
Khalid Benabdallah,	représentant du doyen de la FES

Thèse acceptée le:

RÉSUMÉ

Les problèmes de satisfaction de contraintes, qui consistent à attribuer des valeurs à des variables en respectant un ensemble de contraintes, constituent une large classe de problèmes naturels. Pour étudier la complexité de ces problèmes, il est commode de les voir comme des problèmes d'homomorphismes vers des structures relationnelles. Un axe de recherche actuel est la caractérisation des classes de complexité auxquelles appartient le problème d'homomorphisme, ceci dans la perspective de confirmer des conjectures reliant les propriétés algébriques des structures relationnelles à la complexité du problème d'homomorphisme.

Cette thèse propose dans un premier temps la caractérisation des digraphes pour lesquels le problème d'homomorphisme avec listes appartient à FO. On montre également que dans le cas des problèmes d'homomorphisme avec listes sur les digraphes télescopiques, les conjectures reliant algèbre et complexité sont confirmées.

Dans un deuxième temps, on caractérise les graphes pour lesquels le problème d'homomorphisme avec listes est résoluble par cohérence d'arc. On introduit la notion de polymorphisme monochromatique et on propose un algorithme simple qui résout le problème d'homomorphisme avec listes si le graphe cible admet un polymorphisme monochromatique TSI d'arité k pour tout $k \geq 2$.

Mots clés: Cohérence d'arc, digraphes, homomorphisme avec listes, polymorphisme, problèmes de satisfaction de contraintes

ABSTRACT

Constraint satisfaction problems, consisting in assigning values to variables while respecting a set of constraints, form a large class of natural problems. In order to study the complexity of these problems, it is convenient to see them as homomorphism problems on relational structures. One current research topic is to characterise complexity classes where the homomorphism problem belongs. The ultimate goal is to confirm conjectures that bind together algebraic properties of the relational structure and complexity of the homomorphism problem.

At first, the thesis characterizes digraphs which generate FO list-homomorphism problems. It is shown that in the particular case of telescopic digraphs, conjectures binding together algebra and complexity are confirmed.

Subsequently, we characterize graphs which generate arc-consistency solvable list-homomorphism problems. We introduce the notion of monochromatic polymorphism and we propose a simple algorithm which solves the list-homomorphism problem if the target graph admits a monochromatic TSI polymorphism of arity k for every $k \geq 2$.

Keywords: Complexity, digraph, list-homomorphism, polymorphism, constraint satisfaction problem

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES FIGURES	xiii
REMERCIEMENTS	xv
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
1.1 Notions de complexité	4
1.1.1 Temps et espace d'exécution d'une machine de Turing	5
1.1.2 Réduction	6
1.1.3 L	6
1.1.4 SL	7
1.1.5 NL	7
1.1.6 FO	7
1.2 Problèmes de satisfaction de contraintes	7
1.2.1 Définition	8
1.2.2 Structures relationnelles	9
1.2.3 Graphes	12
1.2.4 Homomorphismes	14
1.2.5 Les CSP vus comme des problèmes d'homomorphisme	16
1.2.6 Complexité des CSP	19
1.2.7 Conjecture de dichotomie	20
1.2.8 Réductions	20
1.2.9 Conséquences	20
1.2.10 Au-delà de la conjecture de dichotomie	21
1.3 Logique	21
1.3.1 Logique du premier ordre	21
1.3.2 DATALOG	24
1.3.3 Calcul des relations	25

1.3.4	Lien avec les CSP	26
1.3.5	DATALOG linéaire	28
1.3.6	DATALOG symétrique	28
1.4	Algèbre	29
1.4.1	Préliminaires	30
1.4.2	Liens avec les CSP	31
1.4.3	Polymorphismes	33
1.4.4	Types d'algèbre	36
1.5	Homomorphismes avec listes et constantes	41
1.5.1	Définitions	41
1.5.2	Réduction de $L-HOM$ à HOM	42
1.5.3	Réduction de $C-HOM$ à HOM	43
1.5.4	Conséquences algébriques	43
1.5.5	Dichotomie	44
1.5.6	Graphes	45
1.5.7	Digraphes	46
CHAPITRE 2 : DIGRAPHERS AVEC LISTES ET PROBLÈMES D'HOMO-		
MORPHISME DANS FO		47
2.1	Caractérisation de problèmes dans FO	47
2.1.1	Observations générales	49
2.1.2	Digraphes réflexifs	53
2.1.3	Digraphes irréflexifs	55
2.1.4	Cas général	57
2.1.5	Détection	88
2.1.6	Détection des bicycles entravants dans un graphe télescopique .	91
2.2	Graphes télescopiques	93
CHAPITRE 3 : GRAPHES AVEC LISTES ET COHÉRENCE D'ARC . .		99
3.1	Cohérence d'arc	99
3.2	Caractérisation	101
3.2.1	Graphes irréflexifs	102
3.2.2	Graphes réflexifs	102
3.3	Polymorphismes monochromatiques	105
3.4	Cas général	108

3.4.1	Détection	124
3.5	Graphes pseudo-intervalles	124
CHAPITRE 4 : CONCLUSION		127
BIBLIOGRAPHIE		129

LISTE DES FIGURES

1.1	Graphe biparti.	9
1.2	Les graphes G et H	10
1.3	Produit de graphes.	11
1.4	Sous-graphe et sous-graphe induit.	13
1.5	Le graphe induit par 2, 3, 4, 5 est une clique.	14
1.6	Homomorphisme de H vers G	14
1.7	Homomorphisme vers une boucle.	15
1.8	2-coloriage.	17
1.9	Ordre sur les types d'algèbre.	39
2.1	Le sommet 1 domine le sommet 2 ; le sommet 3 domine le sommet 5.	47
2.2	Séquences de démantèlement menant à des graphes distincts.	51
2.3	Arcs séparés.	51
2.4	Arcs séparés à sommets non distincts.	52
2.5	Graphe télescopique.	53
2.6	Mise en évidence d'arcs séparés.	56
2.7	Bicycle entravant.	58
2.8	Existence des sommets c, d, e et f	61
2.9	Situation 1.	61
2.10	Situation 2.	61
2.11	Cas (i).	63
2.12	Cas (iii).	63
2.13	Cas 2 de l'observation 2.36.	63
2.14	Situation (b) - Cas 3 de l'observation 2.36.	64
2.15	Situation (a).	65
2.16	Conclusion de la situation (i).	65
2.17	Conclusion de la situation (ii).	65
2.18	Le graphe G_L	66
2.19	G_L contient un bicycle entravant.	67
2.20	Sous-graphes induits par trois sommets de G_L	67
2.21	Digraphe spécial.	68
2.22	Passage de G à G^+	68
2.23	Il existe un cycle dans $G^+ \Leftrightarrow$ il existe un bicycle dans G	69

2.24	Digraphe spécial de type I.	73
2.25	Digraphe spécial de type II.	74
2.26	Augmentation d'un digraphe spécial de type I.	76
2.27	Augmentation d'un digraphe spécial de type I.	77
2.28	Digraphe minimalement non FO de taille 6.	88
2.29	Réduction de CYCLE à BICYCLE.	92
2.30	Cycle dans un digraphe télescopique.	92
3.1	Sous-graphes interdits des graphes d'intervalle.	104
3.2	Forçage de la valeur de $f(b, d)$	109
3.3	Représentation arc-circulaire d'un graphe couvert par deux cliques.	111
3.4	Impossibilité d'une représentation arc-circulaire du sous-graphe de \overline{H} sous les hypothèses.	113
3.5	Produit d'un graphe biparti avec \mathbf{K}_2	116
3.6	Existence de chemins évitants dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$	122
3.7	Le graphe admet un ordonnancement minimal	126

REMERCIEMENTS

Si les dernières années se sont révélées particulièrement passionnantes et enrichissantes, je le dois à de nombreuses personnes.

Annick m'a poussé à entreprendre ce doctorat et réussit la plupart du temps à feindre un intérêt pour mes excitantes aventures mathématiques : elle est formidable.

Ma famille a également été admirable : elle a refusé de désespérer de voir mes études finir un jour et a choisi de me soutenir.

Mes directeurs, Geňa Hahn et Benoît Larose, m'ont donné l'opportunité de mener à bien ce travail. Je les remercie pour leur confiance, les nombreuses heures qu'ils m'ont consacrées et leur généreux soutien financier. À ce chapitre, j'aimerais aussi remercier Gilles Brassard, sans qui la dernière année aurait été problématique.

Mon passage au LITQ fut incroyablement plaisant. Le crédit en revient aux gens que j'ai eu le plaisir d'y côtoyer : Laurent Beaudou, Hugue Blier, Frédéric Dupuis, Heinz Fiedler Straubhaar, Marc Kaplan, Olivier Landon-Cardinal, David Pouliot, Louis Salvail, Benno Salwey, Dave Touchette. J'aimerais remercier particulièrement Michaël Cadihac pour ses avis éclairés sur toutes sortes de sujets, sa patience lors de démonstrations improbables et son impressionnante capacité à générer la procrastination.

Finalement, je pense que je ne me serais jamais intéressé aux mathématiques sans les exposés enthousiastes de Jean-Marie Favreau, je lui en suis très reconnaissant.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) constituent une classe de problèmes auxquels il est naturel de se confronter. Étant donné un nombre fini de variables, un domaine fini sur ces variables et des relations entre ces variables, on veut attribuer des valeurs aux variables de sorte que les relations soient respectées. Ce cadre est assez large pour inclure une grande quantité de problèmes courants. De nombreux jeux populaires tels que le sudoku ou le problème des huit reines appartiennent à cette famille de problèmes. On peut également penser à des applications plus concrètes telles que la création d'emplois du temps, l'ordonnancement de tâches ou la distribution de calculs. Finalement, certains problèmes théoriques d'importance sont purement des problèmes de satisfaction de contraintes, par exemple le problème de satisfaction d'une formule booléenne (SAT), la résolution d'un système d'équations modulo n ou encore un problème de coloration de graphe. Les CSP sont des problèmes largement étudiés en informatique, dans des domaines aussi divers que l'intelligence artificielle (dont ils sont issus [47]), les bases de données [56] ou la complexité algorithmique [26]. Les CSP appartiennent à la classe de complexité NP, les problèmes pour lesquels on peut vérifier une solution en temps polynomial. En particulier, le problème de satisfaction d'une formule booléenne (SAT), complet pour la classe NP, est un CSP. En général, on ne sait pas résoudre un problème NP en temps raisonnable, c'est à dire en temps polynomial. Cette notion de raisonnable est purement théorique : un algorithme en temps polynomial peut n'être d'aucune utilité en pratique. Les CSP peuvent donc être considérés comme des problèmes difficiles à résoudre en général. Séparer P de NP validerait cet angle de vue.

Toute une branche des études consacrées aux CSP s'attache à la conception d'algorithmes heuristiques permettant de réduire les temps de résolution des CSP. De nombreux algorithmes ont été élaborés mettant en oeuvre des méthodes plus fines que la simple force brute. Dans tous les cas, il s'agit de réduire l'espace des solutions du problème considéré [5, 19, 32, 55].

Bien que ces explorations soient intéressantes et fertiles, nous ne nous y attarderons pas ici. Le travail effectué porte sur les aspects théoriques des problèmes de satisfaction de contraintes, en particulier sur les liens qu'ils semblent entretenir avec l'algèbre. Nous ne nous intéresserons qu'aux CSP possédant un nombre fini de contraintes et de variables

sur des domaines finis. L'approche utilisée est standard dans le domaine : elle considère que tout CSP est un problème d'homomorphisme [26].

Un homomorphisme entre deux structures relationnelles est une application de l'univers d'une structure vers celui d'une autre qui préserve les relations entre les sommets. En particulier, un homomorphisme de digraphe est une application des sommets d'un digraphe vers les sommets d'un autre qui préserve la relation d'arc. Le problème d'homomorphisme HOM consiste à décider si, pour deux structures G et H données en entrée, il existe un homomorphisme de G vers H . Le problème d'homomorphisme avec cible fixée $HOM(H)$ consiste à décider si une structure G donnée en entrée admet un homomorphisme vers H . Pour tout CSP, il existe des structures relationnelles G et H telle que résoudre le CSP revient à trouver un homomorphisme de G vers H [26]. Une grande attention a été portée au problème d'homomorphisme avec cible fixée, présenté en détail par Feder et Vardi [26]. Ce problème est l'objet d'une conjecture particulièrement importante du domaine :

Conjecture 1.1 (Conjecture de dichotomie [26]). *Pour toute structure relationnelle H , le problème $HOM(H)$ est soit NP-complet, soit dans P .*

Cette conjecture fait implicitement référence à un résultat de Ladner :

Théorème 1.2 ([37]). *Si $P \neq NP$, alors il existe des problèmes qui n'appartiennent pas à P et qui appartiennent à NP sans être NP-complets.*

La conjecture de Feder et Vardi prédit donc que si $P \neq NP$, alors aucun CSP n'appartient à la classe de problèmes décrite par Ladner. Étudier cette dichotomie peut être fait dans un cadre relativement simple, celui des problèmes $HOM(H)$ lorsque H est un graphe orienté. Bien que le graphe orienté soit une structure relationnelle simple, il est suffisamment expressif pour simuler toute structure relationnelle : tout problème d'homomorphisme entre deux structures relationnelles peut être réduit polynomialement à un problème d'homomorphisme entre deux graphes [26].

Dans le paradigme des problèmes d'homomorphismes, la conjecture de dichotomie est vérifiée dans un certain nombre de cas particuliers. Il y a dichotomie pour les problèmes d'homomorphisme entre des graphes non orientés [29], entre des structures relationnelles sur des univers de taille 2 [49] et 3 [6]. Si on s'intéresse au problème des homomorphismes avec listes, la dichotomie a été prouvée dans le cas général par des moyens purement algébriques [3, 7]. Une reformulation en terme de structure de graphe a été faite pour les cas orientés et non orientés [25, 30].

Au-delà de la dichotomie, il y a la question de la complexité des problèmes résolubles en temps polynomial. La famille formée par ces problèmes n'est pas monolithique : il existe en son sein des classes de complexité d'intérêt tant pratique que théorique. On pense en particulier aux classes FO, L et NL, qui introduisent des contraintes sur les moyens mis à disposition pour le calcul. Une fois la dichotomie établie, la classification des problèmes résolubles en temps polynomial est un objectif naturel. Une telle classification a été faite dans le cas des problèmes d'homomorphisme entre des structures relationnelles sur des univers de taille 2 [1] ainsi que dans le cas des problèmes d'homomorphisme entre des graphes non orientés conservatifs [20].

L'article de Feder et Vardi [26], qui a inspiré de nombreux travaux, utilise des outils issus de la complexité descriptive, qui vise à caractériser des classes de complexité au moyen de logiques formelles. En particulier, il emploie le langage DATALOG qui caractérise une large classe de problèmes résolubles en temps polynomial, via le concept de largeur bornée. Sous-ensemble du langage PROLOG, le langage DATALOG est adapté au traitement de bases de données, c'est à dire de structures relationnelles [53]. On dit que le problème $HOM(\mathbf{H})$ est résoluble par DATALOG s'il est possible de définir $\overline{HOM(\mathbf{H})}$ en DATALOG [26]. En contraignant la forme de ces programmes, on peut affiner cette caractérisation. Ainsi, les problèmes résolubles en DATALOG linéaire appartiennent à la classe NL [15] et les problèmes résolubles en DATALOG symétrique à la classe L [15, 48].

L'introduction de concepts algébriques, via la *tame congruence theory* [31], permet d'établir des liens entre la complexité de $HOM(\mathbf{H})$ et la variété algébrique engendrée par \mathbf{H} . Le comportement local des algèbres de cette variété est limité à cinq *types*. On sait que lorsque \mathbf{H} est une structure relationnelle noyau, les types algébriques influencent la complexité de $HOM(\mathbf{H})$: ce sont des conditions suffisantes pour qu'un problème soit NL-difficile, P-difficile ou NP-complet [40]. Il est conjecturé qu'il s'agit en fait de conditions nécessaires et suffisantes, que les types algébriques caractérisent complètement la complexité d'un CSP [40]. Il existe également des liens entre la résolution par DATALOG et ses variantes et les types d'algèbre [4, 40]. En particulier, un CSP est résoluble par DATALOG si et seulement si la variété engendrée par son algèbre associée admet les bons types [4]. Dans le cas particulier des homomorphismes avec listes sur les graphes non orientés, il a été montré que la complexité est entièrement caractérisable par les types algébriques [20]. Ces outils ouvrent une perspective intéressante sur la nature de la complexité d'un CSP. On travaille habituellement sous l'hypothèse que $P \neq NP$: si cette hypothèse ne tenait pas, il serait sans objet de s'interroger sur la dichotomie

des CSP telle que formulée dans la conjecture 1.1. La reformulation de l'hypothèse en termes algébriques permet de se passer de cette hypothèse, la conjecture devenant alors :

Conjecture 1.3 (Conjecture algébrique de dichotomie [8]). *Soit \mathbf{H} une structure noyau. Le problème $HOM(\mathbf{H})$ est NP-complet si et seulement si la variété algébrique associée à \mathbf{H} admet le type 1.*

On s'intéresse ici à une variante des problèmes d'homomorphisme vers les graphes : les problèmes d'homomorphisme avec listes vers les graphes. Ces problèmes sont en général plus complexes que les problèmes d'homomorphismes : les listes constituent des contraintes supplémentaires qu'il faut respecter. Cependant leur étude est plus simple, puisqu'ils sont plus structurés. En particulier, les algèbres associées ont des propriétés intéressantes.

Le reste de ce chapitre est consacré à la présentation des classes de complexité considérées, des notations et vocabulaires utilisés concernant les graphes et des outils logiques et algébriques qui seront utilisés par la suite.

Le chapitre 2 concerne la famille des digraphes avec listes qui engendrent des problèmes d'homomorphisme dans FO. Dans un premier temps, on caractérise cette famille au moyen d'une collection de sous-graphes interdits. On démontre que cette caractérisation fait nécessairement intervenir un nombre infini de sous-graphes interdits, puis on s'intéresse à des questions liées à la détection des graphes appartenant à cette famille. Finalement, on s'intéresse aux graphes télescopiques, une famille de graphes à la structure très contrainte.

Le chapitre 3 s'intéresse aux digraphes avec listes qui engendrent des problèmes d'homomorphisme résolubles par cohérence d'arc. La complexité des problèmes d'homomorphisme avec listes sur les graphes non orientés a été complètement caractérisée [20]. On étudie la possibilité d'employer la cohérence d'arc comme méthode de résolution du problème. On rappelle le principe de la cohérence d'arc, on introduit le concept de polymorphisme monochromatique puis on caractérise la famille de digraphes avec listes permettant l'utilisation de la cohérence d'arc pour résoudre le problème d'homomorphisme.

1.1 Notions de complexité

On suppose que le lecteur est familier avec les notions de complexité asymptotiques et de machine de Turing et qu'il connaît les classes de complexité P et NP. Nous présen-

tons brièvement dans cette section quelques classes de complexité moins fréquemment rencontrées ainsi que la notion de *réduction*. Nous nous en servons dans ce qui suit.

Il existe, au sein de P , certaines classes de complexité moins fréquemment utilisées qui n'en sont pas moins dignes d'intérêt. Nous présentons maintenant trois classes, L , NL et FO , qui imposent une restriction aux machines de Turing utilisées. Pour plus d'informations sur les notions abordées ici, le lecteur intéressé pourra consulter [2, 33, 34, 44, 50].

Définition 1.4. *Un problème de décision est un ensemble de structures relationnelles similaires (voir définition 1.10).*

Résoudre le problème de décision P pour l'entrée A consiste à déterminer si A appartient à P ou non.

Exemple 1.5. *Soit P l'ensemble des graphes bipartis. Le problème de décision P peut être exprimé comme :*

Problème : P
Entrée : un graphe G
Sortie : VRAI si G est biparti, FAUX sinon.

On notera \bar{P} le *complément* du problème P , c'est à dire l'ensemble des structures relationnelles similaires à celles de P qui n'appartiennent pas à P .

La complexité d'un problème P est la complexité nécessaire à une machine de Turing pour décider si une structure quelconque appartient à P .

1.1.1 Temps et espace d'exécution d'une machine de Turing

Les machines de Turing consomment deux types de ressources : du temps et de l'espace mémoire (cases du ruban). On se sert de ces deux critères pour établir une classification des problèmes que résolvent les machines de Turing.

Définition 1.6. *Soit une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$,*

- $TIME(f(n))$ est la classe des problèmes pouvant être résolus par une machine de Turing déterministe effectuant $\mathcal{O}(f(n))$ transitions avant de s'arrêter ;*
- $NTIME(f(n))$ est la classe des problèmes pouvant être résolus par une machine de Turing non-déterministe effectuant $\mathcal{O}(f(n))$ transitions avant de s'arrêter ;*

- $SPACE(f(n))$ est la classe des problèmes pouvant être résolus par une machine de Turing déterministe qui utilise $\mathcal{O}(f(n))$ cases de mémoire avant de s'arrêter ;
- $NSPACE(f(n))$ est la classe des problèmes pouvant être résolus par une machine de Turing non-déterministe qui utilise $\mathcal{O}(f(n))$ cases de mémoire avant de s'arrêter.

1.1.2 Réduction

Soient P_1 et P_2 deux problèmes. On dit que P_1 se réduit à P_2 s'il existe une machine de Turing M qui transforme une instance I_1 de P_1 en une instance I_2 de P_2 telle que I_2 admet une solution si et seulement si I_1 admet une solution. On peut imposer des conditions sur le fonctionnement de M , par exemple en temps et en espace. Ainsi, on appellera la réduction :

- *réduction polynomiale* et on la notera \leq_p si la transformation de I_1 en I_2 appartient à $TIME(p(n))$ où p est un polynôme ;
- *réduction en espace logarithmique* et on la notera \leq_l si la transformation de I_1 en I_2 appartient à $SPACE(\log(n))$;
- *réduction sous FO* et on la notera \leq_{FO} si le fonctionnement de M est simulable par une formule du premier ordre.

Dans une classe de complexité C , on dit qu'un problème P est *difficile* pour C (ou C -difficile) sous réduction \leq_x si tout problème P' dans C est tel que $P' \leq_x P$. Ce type de problème est donc aussi difficile que tous les problèmes de cette classe, tout problème de C pouvant être considéré comme un cas particulier de P .

Si un problème C -difficile appartient en plus à la classe C , alors on dit qu'il est *complet* pour C (ou C -complet).

1.1.3 L

On appelle L la classe des problèmes résolubles par une machine de Turing déterministe qui n'utilise qu'une quantité d'espace logarithmique par rapport à la taille de l'entrée (l'espace occupé par l'entrée n'est pas pris en compte). D'après les définitions fournies précédemment, $L = SPACE(\log(n))$. Le problème 2-COL est complet pour cette classe de complexité. D'autres exemples de problèmes L -complets sont proposés dans [14].

1.1.4 SL

On appelle SL la classe des problèmes résolubles en espace logarithmique par une machine de Turing non-déterministe telle que si la machine peut effectuer une transition non-déterministe de la configuration A vers la configuration B , alors elle peut aussi effectuer une transition de B vers A (d'où le qualificatif symétrique). La classe SL a été introduite en 1982 par Lewis et Papadimitriou [43], qui prouvèrent également que le problème d'accessibilité non-orienté est SL-complet. Reingold a prouvé en 2004 que $SL = L$ [48].

1.1.5 NL

La classe de complexité NL est le pendant non-déterministe de L. C'est donc la classe des problèmes résolubles par une machine de Turing non-déterministe qui n'utilise qu'une quantité logarithmique d'espace par rapport à la taille de l'entrée. D'après les définitions fournies précédemment, $NL = NSPACE(\log(n))$. La classe NL peut aussi être vue comme la classe des problèmes dont une solution peut être vérifiée par une machine de Turing dont l'entrée ne peut être lue qu'une fois et n'utilisant qu'un espace logarithmique par rapport à la taille de l'entrée [2]. Le problème d'accessibilité dans un graphe orienté, consistant à déterminer si deux sommets sont connectés par un chemin orienté, est NL-complet [50]. Si l'inclusion de L dans NL est triviale, on ne sait pas si L est différent de NL.

1.1.6 FO

Un problème P appartient à la classe FO s'il existe une formule logique du premier ordre ϕ de vocabulaire σ telle que toute σ -structure appartenant à P satisfait ϕ [34]. La classe FO est strictement incluse dans L [34].

Récapitulons les inclusions entre les classes présentées :

$$FO \subset L = SL \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP.$$

1.2 Problèmes de satisfaction de contraintes

Intuitivement, un problème de satisfaction de contraintes, abrégé CSP (*Constraint Satisfaction Problem*), consiste en un ensemble de variables associées à des domaines de valeurs liées entre elles par des contraintes, c'est à dire une mise en relation entre

les différentes valeurs. L'objectif est de décider s'il existe une attribution de valeurs aux variables qui satisfasse toutes les contraintes.

1.2.1 Définition

Le forme classique d'un CSP se présente comme suit :

Définition 1.7. *L'instance P d'un CSP est un triplet (V, D, C) où*

- V est un ensemble fini de variables ;
- D est un domaine fini non vide ;
- C est un ensemble de contraintes $\{C_1, \dots, C_k\}$ où chaque C_i est une paire (\vec{x}_i, R_i) avec
 - \vec{x}_i est un uplet de variables de V de longueur l_i ;
 - R_i est un sous-ensemble de D^{l_i} appelé relation de contraintes.

Résoudre un CSP revient alors à définir une fonction $f : V \rightarrow D$ telle que pour toute contrainte $C_i = (\vec{x}_i, R_i)$ on a $f(\vec{x}_i) \in R_i$.

Exemple 1.8 (Graphes bipartis). *On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est biparti lorsqu'on est en mesure de colorier chacun de ses sommets en bleu ou en rouge de sorte que deux sommets voisins ne possèdent pas la même couleur (voir figure 1.1).*

Exprimé dans le formalisme des CSP, $P = (V, D, C)$, avec D un ensemble à deux éléments (bleu et rouge) et C est un ensemble de contraintes de la forme

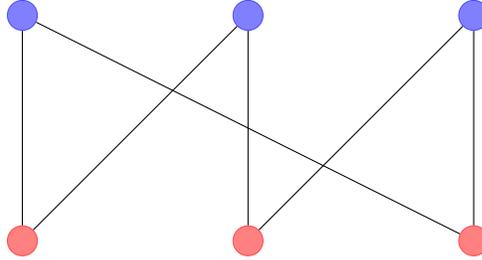
$$((x_i, x_j), \{(r, b), (b, r)\})$$

où $x_i, x_j \in V$ et $(x_i, x_j) \in E$.

Exhiber une fonction $f : V \rightarrow D$ telle que tous sommets voisins dans G se voient attribuer des couleurs différentes correspond, par définition, à décider si G est biparti. Il est bien connu que tester si un graphe est biparti est équivalent à tester l'existence d'un cycle de longueur impaire dans ce graphe. On peut alors se demander s'il existe un lien entre ces deux façons de prouver (ou d'infirmer) le fait que G est biparti.

En fait, la relation devient plus évidente si on change de point de vue.

Figure 1.1 – Graphe biparti.



1.2.2 Structures relationnelles

Il est possible d'exprimer les CSP au moyen d'une autre définition qui fait appel aux notions d'homomorphisme et de structures relationnelles [26].

Définition 1.9. On appelle vocabulaire σ un ensemble de symboles $\{R_1^{r_1}, \dots, R_k^{r_k}\}$, où r_1, \dots, r_k sont des entiers naturels positifs. On dit que $R_i^{r_i} \in \sigma$ est un symbole de relation r -aire.

Définition 1.10. Soit $\sigma = \{R_1^{r_1}, \dots, R_k^{r_k}\}$ un vocabulaire. Soit A un ensemble non-vide quelconque. Pour chaque symbole $R_i^{r_i}$ de σ , avec $i \in \{1, \dots, k\}$, on définit une relation R_i^A d'arité r_i telle que $R_i^A \subseteq A^{r_i}$. On appelle $\mathbf{A} = (A, R_1^A, \dots, R_k^A)$ une structure relationnelle de vocabulaire σ (ou σ -structure). On appelle univers de \mathbf{A} l'ensemble A et on le note $V(\mathbf{A})$. On appelle langage de contraintes sur A les relations $\{R_1^A, \dots, R_k^A\}$.

Une structure relationnelle est donc simplement un langage de contraintes sur A associé à A . Deux structures relationnelles possédant le même vocabulaire sont dites *similaires*.

Les exemples suivants utilisent le concept de digraphe, défini section 1.2.3.

Exemple 1.11. Soient les graphes.

$$\mathbf{G} = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2)\}) \quad \text{et}$$

$$\mathbf{H} = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\}).$$

Ce sont des structures relationnelles similaires mais l'univers et le contenu de la relation binaire sont différents pour \mathbf{G} et \mathbf{H} .

Une structure relationnelle est dite *conservative* ou *avec listes* si toutes les relations unaires non vides possibles font partie de ses relations. En particulier, on appelle *graphe*

Figure 1.2 – Les graphes \mathbf{G} et \mathbf{H} .

conservatif ou *graphe avec listes* une structure relationnelle contenant une relation binaire et toutes les relations unaires. Si \mathbf{A} est une structure relationnelle quelconque, on note \mathbf{A}_L la structure relationnelle obtenue en ajoutant à \mathbf{A} le minimum de relations nécessaires pour en faire une structure conservative.

Exemple 1.12. *La structure*

$$\mathbf{G}_L = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2)\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\})$$

est un graphe avec listes.

Une structure relationnelle est dite *idempotente* ou *avec constantes* si toutes les relations unaires à un élément font partie de ses relations. En particulier, on appelle *graphe idempotent* ou *graphe avec constantes* une structure relationnelle contenant une relation binaire et toutes les relations unaires à un élément. Si \mathbf{A} est une structure relationnelle quelconque, on note \mathbf{A}_C la structure relationnelle obtenue en ajoutant à \mathbf{A} le minimum de relations nécessaires pour en faire une structure idempotente.

Exemple 1.13. *La structure*

$$\mathbf{G}_C = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2)\}, \{0\}, \{1\}, \{2\})$$

est un graphe avec constantes.

Les raisons de ces dénominations seront explicitées plus tard (voir section 1.5.4).

Définition 1.14. Soit $\mathbf{A} = (A, \{R_1, \dots, R_k\})$ une structure relationnelle. On appelle sous-structure de \mathbf{A} une structure relationnelle $\mathbf{A}' = (A', \{R'_1, \dots, R'_k\})$ telle que $A' \subseteq A$, $R'_1 \subseteq R_1, \dots, R'_k \subseteq R_k$.

Une sous-structure \mathbf{A}' est dite induite par \mathbf{A} si, pour tout $x_1, \dots, x_n \in V(\mathbf{A}')$, $(x_1, \dots, x_n) \in R_i$ implique $(x_1, \dots, x_n) \in R'_i$.

Définition 1.15. Le produit des structures relationnelles similaires $\mathbf{A} = (A, R_1^{\mathbf{A}}, \dots, R_k^{\mathbf{A}})$ et $\mathbf{B} = (B, R_1^{\mathbf{B}}, \dots, R_k^{\mathbf{B}})$, noté $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, est la structure $\mathbf{C} = (A \times B, R_1^{\mathbf{C}}, \dots, R_k^{\mathbf{C}})$, avec, pour $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$R_i^{\mathbf{C}} = \{((a_1, b_1), \dots, (a_{l_i}, b_{l_i})) \mid (a_1, \dots, a_{l_i}) \in R_i^{\mathbf{A}}, (b_1, \dots, b_{l_i}) \in R_i^{\mathbf{B}}\}.$$

On appelle *carré* de \mathbf{A} , et on note \mathbf{A}^2 , le produit $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. On appelle *diagonale* du carré de \mathbf{A} la sous-structure de \mathbf{A}^2 induite par l'ensemble des sommets $\{(a, a) \mid a \in V(\mathbf{A})\}$.

Exemple 1.16. Soient deux graphes orientés

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\{0, 1\}, \{(0, 0), (0, 1)\}) \quad \text{et} \\ \mathbf{H} &= (\{a, b\}, \{(a, b), (b, b)\}). \end{aligned}$$

Le produit des graphes \mathbf{G} et \mathbf{H} est :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times \mathbf{H} &= (\{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}, \\ &\quad \{((1, a), (1, b)), ((1, b), (1, b)), ((0, a), (1, b)), ((0, b), (1, b))\}) \end{aligned}$$

(voir figure 1.3).

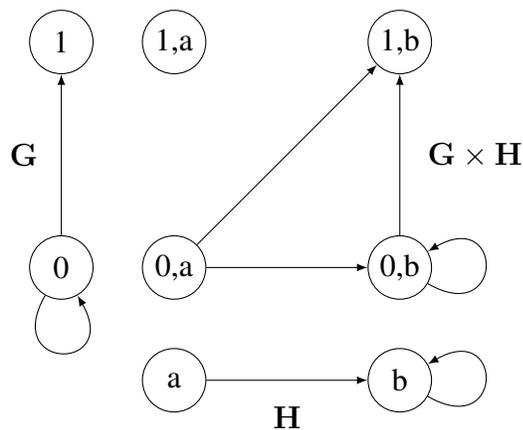


Figure 1.3 – Produit de graphes.

1.2.3 Graphes

Une famille de structures relationnelles retient particulièrement notre attention : les graphes. Il s'agit d'une structure simple ne comportant qu'une relation binaire mais qui possède une grande expressivité, en particulier tout CSP peut être vu comme un problème d'homomorphisme vers un graphe [26].

Définition 1.17. *Un digraphe est une structure relationnelle $\mathbf{G} = (V, E)$, où l'univers V de \mathbf{G} est appelé ensemble des sommets de \mathbf{G} et la relation binaire E est appelée ensemble des arcs de \mathbf{G} .*

On note $V(\mathbf{G})$ l'ensemble des sommets de \mathbf{G} et $E(\mathbf{G})$ l'ensemble des arcs de \mathbf{G} . Si $E(\mathbf{G})$ est symétrique, le digraphe \mathbf{G} est dit non orienté ou simplement appelé graphe.

Dans le cas général, le graphe \mathbf{G} est dit orienté ou appelé digraphe.

Dans ce qui suit, on emploiera systématiquement le terme digraphe pour désigner un graphe orienté. Le terme graphe désignera systématiquement un graphe non orienté. Dans le cas des graphes non orientés, le terme *arête* est préféré au terme arc pour désigner un couple de sommets.

Un arc (u, u) est appelé une *boucle*. On dit alors que u porte une boucle.

Dans le cas non orienté, on dira que u et v sont *voisins* pour signifier que $(u, v), (v, u) \in E(\mathbf{G})$.

Un arc ou une arête (u, v) est dit *sans boucle* si les sommets u et v ne portent pas de boucle.

Un graphe dont tous les sommets portent une boucle est dit *réflexif*.

Un graphe dont aucun sommet ne porte de boucle est dit *irréflexif*.

Définition 1.18. *Soit \mathbf{G} un digraphe. On appelle sous-graphe de \mathbf{G} un digraphe \mathbf{G}' tel que $V(\mathbf{G}') \subseteq V(\mathbf{G})$ et $E(\mathbf{G}') \subseteq E(\mathbf{G})$. On dit que \mathbf{G}' est un sous-graphe induit de \mathbf{G} si $E(\mathbf{G}') = E(\mathbf{G}) \cap V(\mathbf{G}')^2$.*

Exemple 1.19. *Soient les graphes*

$$\mathbf{G} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}\},$$

$$\mathbf{G}' = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 3), (2, 3), (4, 1)\}\} \text{ et}$$

$$\mathbf{G}'' = \{\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}\}.$$

Le graphe \mathbf{G}' est un sous-graphe de \mathbf{G} , mais il n'est pas induit. Le graphe \mathbf{G}'' est un sous-graphe induit de \mathbf{G} .

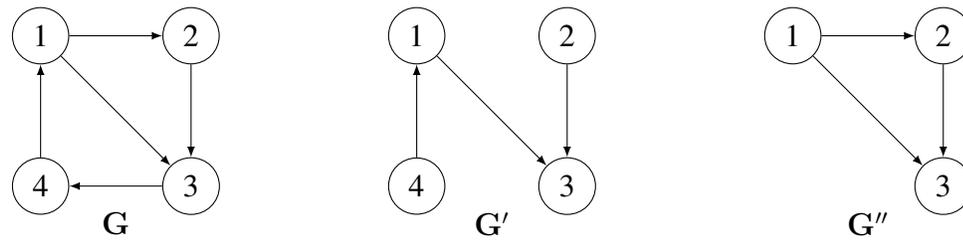


Figure 1.4 – Sous-graphe et sous-graphe induit.

Définition 1.20. Soit \mathbf{G} un digraphe. Soit un sommet $u \in V(\mathbf{G})$. On appelle voisinage sortant de u , et on note $N^+(u)$, l'ensemble des sommets v tels que (u, v) est un arc de \mathbf{G} . On appelle voisinage entrant de u , et on note $N^-(u)$, l'ensemble des sommets v tels que (v, u) est un arc de \mathbf{G} .

On appelle degré sortant de u , et on note $\delta^+(u)$, la cardinalité de $N^+(u)$. On appelle degré entrant de u , et on note $\delta^-(u)$, la cardinalité de $N^-(u)$.

Définition 1.21. Soit \mathbf{G} un graphe. Soit un sommet $u \in V(\mathbf{G})$. On appelle voisinage de u , et on note $N(u)$, l'ensemble des sommets voisins de u . On appelle degré de u , et on note $\delta(u)$, la cardinalité de $N(u)$.

Définition 1.22. Un graphe \mathbf{G} (orienté ou non) est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets $V(\mathbf{G})$ en deux sous-ensembles R et B tels que pour tout arc $(u, v) \in E(\mathbf{G})$ on a $u \in R, v \in B$ ou $u \in B, v \in R$ (voir figure 1.1). Les ensembles R et B sont appelés classes de couleur de \mathbf{G} .

Notons que la partition des sommets d'un graphe biparti en deux classes de couleur n'est pas nécessairement unique.

Définition 1.23. Un graphe complet \mathbf{G} est un graphe tel que pour toute paire de sommets distincts u et v dans $V(\mathbf{G})$, on a $(u, v), (v, u) \in E(\mathbf{G})$. La notation standard désignant un graphe complet à n sommets est K_n . On appelle clique un sous-graphe de \mathbf{G} qui est un graphe complet. On parlera de clique réflexive si chaque sommet de la clique porte une boucle.

Les graphes ayant une structure simple, il est facile de les représenter graphiquement. Toutefois, il est possible qu'en cours de démonstration, l'ensemble du graphe ne soit pas connu. Les représentations graphiques illustrent alors le sous-graphe connu ou pertinent. Dans ces situations, l'absence de flèche graphique ne présume pas l'absence d'arc dans le graphe, mais traduit simplement l'incertitude quant à leur existence. Pour signaler l'absence d'un arc dans le graphe, on utilisera alors des flèches en pointillés.

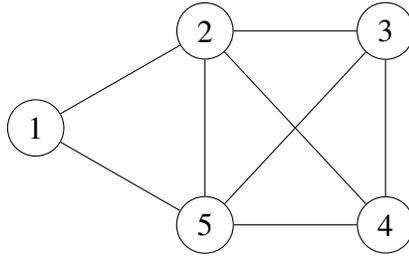


Figure 1.5 – Le graphe induit par 2, 3, 4, 5 est une clique.

1.2.4 Homomorphismes

Ce qui va retenir notre attention est, en un sens, les similitudes qui existent entre deux structures relationnelles. Pour que la comparaison ait un sens, les structures relationnelles doivent être similaires. Un homomorphisme est une fonction qui envoie une structure relationnelle sur une autre en conservant les relations. C'est cet outil dont nous allons nous servir par la suite.

Définition 1.24. Soient deux structures relationnelles similaires \mathbf{A} et \mathbf{B} dont le vocabulaire est $\sigma = \{R_1^{r_1}, \dots, R_k^{r_k}\}$. On appelle homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{B} une fonction $f : V(\mathbf{A}) \rightarrow V(\mathbf{B})$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, si $(x_1, \dots, x_{r_i}) \in R_i^{r_i, \mathbf{A}}$ alors $(h(x_1), \dots, h(x_{r_i})) \in R_i^{r_i, \mathbf{B}}$.

On dit que l'homomorphisme f est *conservatif* si $f(x_1, \dots, x_{r_i}) \in \{x_1, \dots, x_{r_i}\}$.

Exemple 1.25. Soient les graphes orientés

$$\mathbf{G} = \{\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}\} \text{ et}$$

$$\mathbf{H} = \{\{a, b\}, \{(a, b)\}\}.$$

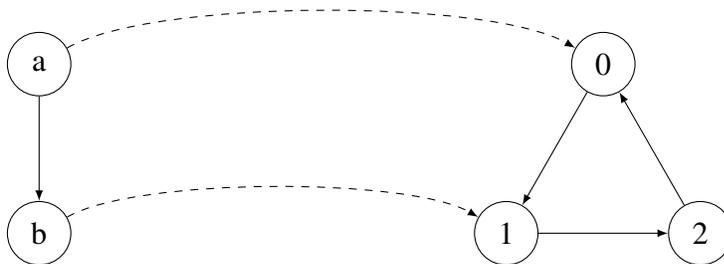


Figure 1.6 – Homomorphisme de \mathbf{H} vers \mathbf{G} .

Il existe manifestement un homomorphisme de \mathbf{H} vers \mathbf{G} , il suffit d'envoyer a sur 0 et b sur 1 (figure 1.6). Par contre il n'existe pas d'homomorphisme de \mathbf{G} vers \mathbf{H} . En effet, on a nécessairement $(f(0), f(1)), (f(1), f(2)), (f(2), f(0)) \in E(\mathbf{H})$. Or si $f(0) = a$, cela force $f(1) = b$, d'où $f(2) = a$. On a donc $(f(2), f(0)) = (a, a) \notin E(\mathbf{H})$.

Dans le cas des graphes, on constate que la présence d'une boucle dans la structure cible rend triviale la question de l'existence d'un homomorphisme. Il en existe forcément un qui consiste à envoyer tous les sommets de la structure de départ vers le sommet avec boucle de la structure d'arrivée.

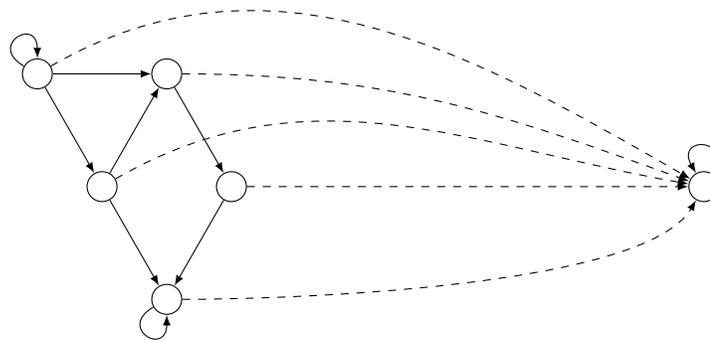


Figure 1.7 – Homomorphisme vers une boucle.

Une telle situation peut se produire pour toute structure relationnelle, il suffit de considérer qu'un sommet a admet une boucle si chaque relation de la structure contient un uplet ne contenant que a .

Un homomorphisme bijectif dont l'inverse est un homomorphisme est appelé *isomorphisme*. Un isomorphisme entre deux structures relationnelles possède la particularité de préserver à la fois la présence et l'absence de relations entre les sommets. Ceci fait en sorte que deux structures isomorphes peuvent être considérées identiques, à l'étiquetage des sommets près. Un homomorphisme d'une structure relationnelle vers elle-même est appelé *endomorphisme*. Un isomorphisme d'une structure relationnelle vers elle-même est appelé *automorphisme*. On appelle *noyau* une structure relationnelle qui n'admet aucun homomorphisme vers une de ses sous-structures propres.

Le problème d'homomorphisme $HOM(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des structures relationnelles, consiste à décider s'il existe un homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{B} .

Une variante à ce problème consiste à ne pas spécifier la structure de départ, de sorte que celle-ci devient un paramètre du problème. Le problème d'homomorphisme

$HOM(\mathbf{B})$ consiste à décider s'il existe un homomorphisme entre une structure relationnelle \mathbf{A} fournie en entrée et la structure relationnelle \mathbf{B} .

Le cas général du problème d'homomorphisme, HOM , consiste à ne spécifier ni la structure de départ, ni la structure d'arrivée.

1.2.5 Les CSP vus comme des problèmes d'homomorphisme

Nous nous intéressons aux homomorphismes parce que les CSP peuvent en fait être vus comme des problèmes d'homomorphismes de type $HOM(\mathbf{A})$ [26]. Dans un CSP, nous avons un ensemble de variables liées entre elles par des contraintes. On peut voir cet ensemble et ces contraintes comme une structure relationnelle dont les sommets seraient les variables et les relations les contraintes sur les variables.

De même, on peut considérer que les valeurs du domaine ainsi que les relations entre ces valeurs forment une structure relationnelle.

Nous obtenons donc deux structures relationnelles similaires. Exhiber un homomorphisme f de la première structure vers la seconde structure revient à attribuer à chaque variable une valeur de sorte que les relations soient respectées. Ceci revient en fait à résoudre le CSP.

Pour illustrer notre propos, considérons l'exemple suivant. Le problème du k -coloriage (k -COL) est de déterminer si, pour un graphe non-orienté donné, il est possible d'attribuer une couleur parmi $k > 1$ couleurs disponibles à chacun de ses sommets de sorte qu'aucun sommet n'arbore la même couleur qu'un de ses voisins.

Par exemple, un graphe complet de taille $k+1$ ne peut bien évidemment pas être k -coloriable, tandis qu'un arbre le sera forcément.

Un problème de k -coloriage est bel et bien un CSP. Nous avons un ensemble de variables (les sommets du graphe) auxquelles nous désirons assigner des valeurs (les couleurs) tout en satisfaisant des contraintes (deux sommets voisins doivent être de couleurs différentes). Comment représenter ce problème dans le cadre du problème d'homomorphisme ?

Exemple 1.26 (k -coloriage de graphe). *Soit \mathbf{H} un graphe complet à k sommets. Soit \mathbf{G} un graphe quelconque. Supposons qu'il existe un homomorphisme f de \mathbf{G} vers \mathbf{H} . Si deux sommets sont voisins dans \mathbf{G} , alors leurs images par f doivent être voisines dans \mathbf{H} , par définition d'un homomorphisme. Si on considère que les sommets de \mathbf{H} sont les couleurs, alors cela revient à dire qu'à deux sommets voisins de \mathbf{G} sont attribués deux couleurs différentes.*

S'il existe un coloriage du graphe G , on peut attribuer à chaque sommet de G une couleur de sorte que deux sommets voisins ne soient pas de la même couleur. Si on considère que chaque sommet du graphe H représente une couleur, alors on peut considérer que le coloriage de G définit un homomorphisme de G vers H : puisque toute paire de sommets voisins est coloriée de deux couleurs différentes, on a bien que toute paire de sommets voisins dans G est envoyée vers une paire de sommets voisins dans H .

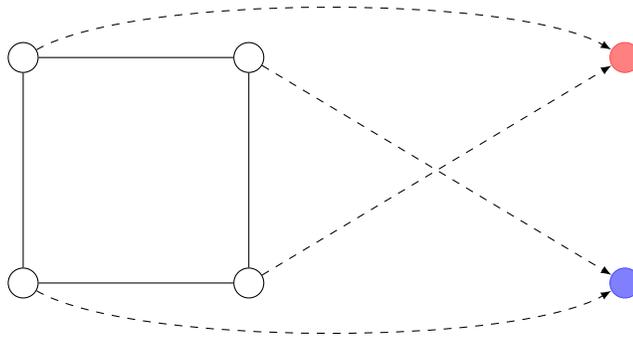
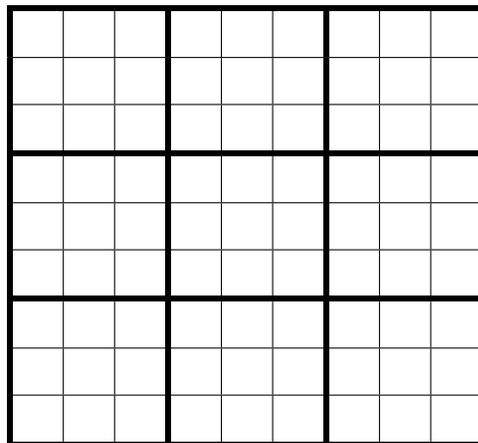


Figure 1.8 – 2-coloriage.

Il est en fait assez simple de passer de la formulation intuitive d'un CSP à sa formulation en terme de problèmes d'homomorphisme, il suffit de transformer mécaniquement les contraintes en relation et de créer les structures relationnelles correspondant aux variables et au domaine en leur adjoignant ces relations.

Exemple 1.27. *Remplir une grille de Sudoku est un problème populaire dont les règles sont simples. Étant donnée une grille :*



l'objectif est de remplir les cases vides de la grille des nombres 1 à 9 de sorte que :

- chaque ligne comporte exactement une fois tous les nombres de 1 à 9 ;
- chaque colonne comporte exactement une fois tous les nombres de 1 à 9 ;
- chaque carré de trois cases par trois cases délimité par les lignes en gras comporte exactement une fois tous les nombres de 1 à 9.

On a donc une structure relationnelle cible \mathbf{B} dont le domaine est $\{1, \dots, 9\}$, munie d'une relation d'arité 9 et de 9 relations d'arité 1.

Soit $R^{\mathbf{B}} = \{(i_1, \dots, i_9) \mid \{i_1, \dots, i_9\} = \{1, \dots, 9\}\}$ la relation d'arité 9.

Soient $N_1^{\mathbf{B}} = \{1\}, \dots, N_9^{\mathbf{B}} = \{9\}$ les relations d'arité 1. Elles représentent le fait que certaines cases de la grille de départ contiennent des nombres, ce qui constitue en fait des contraintes supplémentaires. Soit une instance de ce problème, représentée par la grille suivante :

	5		4					
			5	9	1			6
3		6						
			2		5	7		1
			9					3
			7			4		
9			3			8		5
		7		2				
	8					3	4	

La structure de départ représentant l'instance du problème est une structure \mathbf{A} similaire à \mathbf{B} dont le domaine est constitué de 81 variables de la forme $v_{i,j}$, avec $i, j \in \{1, \dots, 9\}$. Chaque variable $v_{i,j}$ représente la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j . Les relations de \mathbf{A} sont définies comme suit :

- $R^{\mathbf{A}} = \{(v_{i,1}, \dots, v_{i,9}) \mid i \in \{1, \dots, 9\}\}$
 $\cup \{(v_{1,i}, \dots, v_{9,i}) \mid i \in \{1, \dots, 9\}\}$
 $\cup \{(v_{(i-1)*3+1, (j-1)*3+1}, v_{(i-1)*3+1, (j-1)*3+2}, v_{(i-1)*3+1, (j-1)*3+3},$
 $v_{(i-1)*3+2, (j-1)*3+1}, v_{(i-1)*3+2, (j-1)*3+2}, v_{(i-1)*3+2, (j-1)*3+3},$
 $v_{(i-1)*3+3, (j-1)*3+1}, v_{(i-1)*3+3, (j-1)*3+2}, v_{(i-1)*3+3, (j-1)*3+3}\}$
 $\mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}$;
- $N_1^{\mathbf{A}} = \{v_{2,6}, v_{4,9}\}$;
- $N_2^{\mathbf{A}} = \{v_{4,3}, v_{8,5}\}$;
- $N_3^{\mathbf{A}} = \{v_{3,1}, v_{5,9}, v_{7,4}, v_{9,7}\}$;
- $N_4^{\mathbf{A}} = \{v_{1,4}, v_{6,7}, v_{9,8}\}$;

- $N_5^A = \{v_{1,2}, v_{2,4}, v_{4,6}, v_{7,9}\}$;
- $N_6^A = \{v_{2,9}, v_{3,1}\}$;
- $N_7^A = \{v_{4,7}, v_{6,4}, v_{8,2}\}$;
- $N_8^A = \{v_{7,7}, v_{9,2}\}$;
- $N_9^A = \{v_{2,5}, v_{5,4}, v_{7,1}\}$.

Les uplets qui apparaissent dans la relation R^A correspondent aux lignes, aux colonnes et aux carrés 3×3 de la grille. Chaque uplet de cette relation ne peut être envoyé que vers des uplets contenant exactement une fois chaque nombre entre 1 et 9, par conséquent tout homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{B} doit respecter les règles du jeu.

Les variables qui apparaissent dans les relations N_i^A correspondent aux cases qui contiennent des valeurs. Puisque seul le nombre i appartient à la relation N_i^B , alors tout homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{B} envoie les éléments présents dans N_i^A vers i .

Donc, tout homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{B} peut être vu comme l'attribution de valeurs de 1 à 9 aux cases de la grille de départ de sorte que les valeurs de départ et les règles du jeu sont respectées.

1.2.6 Complexité des CSP

Nous nous intéressons à la complexité des CSP. Cela revient à s'intéresser à la complexité de HOM . Il est facile de voir que HOM est un problème dans NP [26]. En effet, si on fournit l'homomorphisme, vérifier que les relations sont respectées peut être fait en temps polynomial. Il suffit de vérifier que chaque uplet appartenant à une relation de la structure relationnelle de départ est envoyé vers un uplet de la relation similaire dans la structure relationnelle d'arrivée. Le problème 3-SAT est manifestement un cas particulier du problème d'homomorphisme, on doit attribuer des valeurs de vérité aux variables booléennes de façon à satisfaire une formule booléenne. Or, 3-SAT est notoirement NP-complet. Cela implique que tout problème dans NP se réduit à un problème de 3-SAT, lui-même cas particulier de HOM . Par conséquent, HOM est NP-complet en général. Toutefois, cela n'interdit pas au problème d'homomorphisme d'être plus simple lorsque la structure d'arrivée est fixée.

C'est donc à l'étude de problèmes du type $HOM(\mathbf{A})$ que nous nous attellerons. Nous dirons que la structure relationnelle \mathbf{A} est *tractable* si $HOM(\mathbf{A})$ est dans P et qu'elle est *intractable* si $HOM(\mathbf{A})$ est NP-complet.

1.2.7 Conjecture de dichotomie

Une conjecture importante concernant la complexité des CSP a été émise par Feder et Vardi [26].

Conjecture 1.28. *Pour toute structure relationnelle \mathbf{A} , le problème $HOM(\mathbf{A})$ est soit dans P , soit NP-complet.*

Cette question est toujours ouverte à l'heure actuelle. Il existe un certain nombre de cas particuliers qui satisfont cette dichotomie. Schaefer a prouvé en 1978 [49] que les CSP sur des domaines à deux éléments sont soit dans P soit NP-complets. Hell et Nešetřil ont prouvé que les CSP sur des graphes non orientés sont également sujets à dichotomie [29] : si G est un graphe biparti, alors $HOM(G) \in P$, si G n'est pas biparti, alors $HOM(G)$ est NP-complet. Plus récemment, Bulatov a confirmé la conjecture de dichotomie en ce qui concerne les CSP dont le domaine possède trois éléments [6].

1.2.8 Réductions

La conjecture de dichotomie concerne l'ensemble des problèmes $HOM(G)$, pour n'importe quelle structure relationnelle cible fixée. Comme pour d'autres classes de complexité, il est intéressant de se demander quels problèmes sont complets pour $HOM(G)$. Feder et Vardi [26] proposent un grand nombre de réductions polynomiales des CSP vers des cas particuliers d'homomorphisme de graphes orientés. Par conséquent, si la conjecture de dichotomie s'avérait vraie pour les graphes orientés, elle serait également vraie pour toute structure relationnelle. D'où l'intérêt pour les recherches menées sur les graphes orientés.

1.2.9 Conséquences

La conjecture de dichotomie est liée intimement à une question de complexité algorithmique concernant les langages de Ladner. Ladner a prouvé que si $P \neq NP$, alors il existe des langages (ou problèmes) dans NP qui ne sont ni NP-complets ni dans P [37].

On peut alors se demander quel est le plus grand sous-ensemble de NP qui ne contient pas de tels langages. En fait, quel est le plus grand sous-ensemble de NP qui admet une dichotomie ? Feder et Vardi indiquent que la classe de complexité des MMSNP est une bonne candidate [26]. La classe MMSNP est un sous-ensemble de la classe SNP. Le théorème de Fagin [22] établit que NP est exactement l'ensemble problèmes réductibles à

l'évaluation d'une propriété exprimable par une formule logique existentielle du second ordre sur les graphes. La classe SNP (Strict NP) est l'ensemble des problèmes réductibles à l'évaluation d'une formule logique existentielle du second ordre dont les composantes du premier ordre ne contiennent que le quantificateur existentiel. La classe MMSNP est la sous-classe de SNP pour laquelle les variables quantifiées du second ordre sont des ensembles (monadicité) et toute relation du premier ordre est précédée d'une négation (monotonie). On interdit également l'usage de l'inégalité. La classe MMSNP est polynomialement équivalente à la classe des CSP [26, 36]. Prouver la conjecture de dichotomie confirmerait la dichotomie de MMSNP.

1.2.10 Au-delà de la conjecture de dichotomie

Bien que la conjecture de dichotomie soit une question importante, on peut constater que la classification est sommaire. Certes, il est intéressant de pouvoir placer un problème dans P, mais, comme on l'a vu, cette classe de complexité n'est pas monolithique. Un des axes de recherche actuels consiste à raffiner la dichotomie en classant les CSP tractables dans les différentes classes de complexité contenues dans P. Ainsi, le résultat de Schaefer [49] a-t-il été précisé par Allender, Bauland, Immerman, Schnoor et Vollmer [1].

1.3 Logique

Une partie du travail de Feder et Vardi [26] s'appuie sur des notions de complexité descriptive. La complexité descriptive est une branche de la complexité qui tente de caractériser des classes de complexités au moyen de logiques (voir [34]). Par exemple, Fagin [22] a démontré que la classe NP est exactement celle des problèmes réductibles à l'évaluation d'une formule logique existentielle du second ordre. Feder et Vardi proposent d'employer le langage DATALOG, correspondant à la logique existentielle du premier ordre avec opérateur point fixe [53], pour évaluer la complexité de certains problèmes. DATALOG est décrit, entre autres, dans [12, 34, 53].

1.3.1 Logique du premier ordre

Nous avons défini dans la section précédente le concept de vocabulaire. Nous allons étendre ce concept dans cette section pour fournir une définition la plus large possible. Toutefois, dans le reste du document, nous n'utiliserons que des structures relationnelles.

Définition 1.29. On appelle vocabulaire σ la réunion d'un ensemble de symboles relationnels $\{R_1^{r_1}, \dots, R_k^{r_k}\}$, d'un ensemble de symboles de constantes $\{c_1, \dots, c_l\}$ et d'un ensemble de symboles de fonctions $\{f_1^{a_1}, \dots, f_n^{a_n}\}$, où $r_1, \dots, r_k, a_1, \dots, a_n$ sont des entiers naturels. On appelle $R_i^{r_i}$ symbole de relation d'arité r_i . On appelle $f_i^{a_i}$ symbole fonction d'arité a_i .

Définition 1.30. Soit σ un vocabulaire. Une σ -structure

$$\mathbb{A} = (A, c_1^{\mathbb{A}}, \dots, c_l^{\mathbb{A}}, R_1^{\mathbb{A}}, \dots, R_k^{\mathbb{A}}, f_1^{\mathbb{A}}, \dots, f_n^{\mathbb{A}})$$

est composée :

- d'un ensemble non vide A appelé univers ;
- d'un élément $c_i^{\mathbb{A}}$ pour chaque symbole de constante c_i de σ , avec $i \in \{1, \dots, l\}$;
- d'une relation $R_i^{\mathbb{A}} \subseteq A^{r_i}$ pour chaque symbole de relation $R_i^{r_i}$ de σ , avec $i \in \{1, \dots, k\}$;
- d'une fonction $f_i^{\mathbb{A}} : A^{a_i} \rightarrow A$ pour chaque symbole de fonction $f_i^{a_i}$ de σ , avec $i \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 1.31. Soit σ un vocabulaire. Soit X un ensemble infini de variables. On définit par récurrence les termes et formules du calcul des prédicats de premier ordre :

- chaque constante de σ est un terme ;
- chaque variable de X est un terme ;
- si t_1, \dots, t_k sont des termes et f un symbole de fonction d'arité k , alors $f(t_1, \dots, t_k)$ est un terme ;
- si t_1, t_2 sont des termes, alors $t_2 = t_1$ est une formule ;
- si t_1, \dots, t_k sont des termes et R est une relation d'arité k de σ , alors $R(t_1, \dots, t_k)$ est une formule ;
- si F_1, F_2 sont des formules, alors $F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2$ et $\neg F_1$ sont des formules ;
- si F est une formule, alors $\exists x F$ et $\forall x F$ sont des formules.

Une formule qui n'utilise pas de quantificateur existentiel (\exists) ou universel (\forall) est dite sans quantificateur.

Définition 1.32. Les variables libres d'une formule ou d'un terme sont définies par les conditions suivantes :

- un terme composé d'une constante ne contient aucune variable libre ;
- la seule variable libre d'un terme x est x ;

- les variables libres de $t_1 = t_2$ sont les variables libres de t_1 et t_2 ;
- les variables libres de $P(t_1, \dots, t_k)$ sont les variables libres de t_1, \dots, t_k ;
- les variables libres de $f(t_1, \dots, t_k)$ sont les variables libres de t_1, \dots, t_k ;
- les variables libres de $\neg F$ sont les variables libres de F ;
- les variables libres de $F_1 \wedge F_2$ sont les variables libres de F_1 et F_2 ;
- les variables libres de $F_1 \vee F_2$ sont les variables libres de F_1 et F_2 ;
- les variables libres de $\forall x F$ sont les variables libres de F sauf x ;
- les variables libres de $\exists x F$ sont les variables libres de F sauf x ;

Les variables qui ne sont pas libres sont dites liées. Si x_1, \dots, x_k sont les variables libres de la formule F , on note $F(x_1, \dots, x_k)$.

Définition 1.33. Soit σ un vocabulaire. Soit \mathbf{A} une σ -structure. Soit $a_1, \dots, a_k \in V(\mathbf{A})$.

On définit $t^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)$ comme suit :

- si t est un terme composé d'une variable x_i , la valeur de $t^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)$ est a_i ;
- si t est un terme composé d'une constante c_i , la valeur de $t^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)$ est $c_i^{\mathbf{A}}$.
- si $t = f(t_1, \dots, t_k)$, la valeur de $t^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)$ est $f_i^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k), \dots, t_k^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k))$.

Pour une formule F dont les variables libres sont x_1, \dots, x_k , on définit $\mathbf{A} \models F(a_1, \dots, a_k)$ par

- si $F \equiv t_1 = t_2$, alors $\mathbf{A} \models F(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $t_1^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k) = t_2^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)$;
- si $F \equiv R(t_1, \dots, t_k)$, alors $\mathbf{A} \models F(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si

$$(t_1^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k), \dots, t_k^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)) \in R^{\mathbf{A}};$$

- $\mathbf{A} \models \neg F(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $\mathbf{A} \not\models F(a_1, \dots, a_k)$;
- $\mathbf{A} \models F_1(a_1, \dots, a_k) \wedge F_2(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $\mathbf{A} \models F_1(a_1, \dots, a_k)$ et $\mathbf{A} \models F_2(a_1, \dots, a_k)$;
- $\mathbf{A} \models F_1(a_1, \dots, a_k) \vee F_2(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $\mathbf{A} \models F_1(a_1, \dots, a_k)$ ou $\mathbf{A} \models F_2(a_1, \dots, a_k)$;
- si $F \equiv \exists y F(y, a_1, \dots, a_k)$, alors $\mathbf{A} \models F(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $\mathbf{A} \models F(a, a_1, \dots, a_k)$ pour un certain $a \in V(\mathbf{A})$;
- si $F \equiv \forall y F(y, a_1, \dots, a_k)$, alors $\mathbf{A} \models F(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $\mathbf{A} \models F(a, a_1, \dots, a_k)$ pour tout $a \in V(\mathbf{A})$;

Définition 1.34. On dit qu'un ensemble E de structures relationnelles similaires de vocabulaire σ est définissable en FO si et seulement si il existe une formule logique du

premier ordre F utilisant le vocabulaire σ telle que pour toute structure \mathbf{A} , \mathbf{A} est dans E si et seulement si $\mathbf{A} \models F$.

1.3.2 DATALOG

DATALOG est un sous-ensemble du langage Prolog, spécifiquement orienté vers le traitement de base de données [53]. DATALOG permet de définir de nouvelles relations à partir d'un ensemble de relations qu'on lui fournit au préalable (la base de données). En ce sens, DATALOG peut être considéré comme un langage de requêtes, au même titre que SQL par exemple. Cependant, DATALOG possède un pouvoir d'expression supérieur à SQL : la possibilité d'écrire des programmes récursifs en DATALOG permet de définir des relations qui échappent à SQL [34, 53]. Un exemple emblématique est la clôture transitive d'une relation. Définissons dans un premier temps ce qu'est un programme DATALOG.

Définition 1.35. *Un programme DATALOG sur un vocabulaire σ est un ensemble de règles de la forme*

$$I(x_1, \dots, x_k) \quad :- \quad E_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,l_1}), \dots, E_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,l_n}).$$

On appelle la partie gauche la tête de la règle. On appelle la partie droite le corps de la règle.

Les E_1, \dots, E_n sont soit des symboles relationnels de σ , soit des symboles apparaissant dans la tête d'une règle. Le symbole I ne peut pas appartenir à σ .

On distingue deux types de symboles dans un programme DATALOG. Les symboles apparaissant dans la tête des programmes DATALOG sont appelés Intensional Database Predicates (IDB). Les symboles relationnels de σ sont appelés Extensional Database Predicates (EDB).

Un ensemble de règles partageant la même tête de la forme $I(x_1, \dots, x_k)$ définit une relation R_I d'arité k . Un uplet (x_1, \dots, x_k) appartient à R_I si et seulement s'il existe une règle

$$I(x_1, \dots, x_k) \quad :- \quad E_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,l_1}), \dots, E_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,l_n})$$

qui peut être satisfaite, c'est à dire que les uplets $(y_{1,1}, \dots, y_{1,l_1}), \dots, (y_{n,1}, \dots, y_{n,l_n})$ appartiennent respectivement aux relations symbolisées par E_1, \dots, E_n . Puisque certains E_i peuvent être des IDB, cette définition est récursive.

Exemple 1.36. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le programme DATALOG suivant définit l'ensemble des couples de sommets qui sont reliés par un chemin de longueur impair.

$$\begin{aligned} \text{odd}(x, y) &: - E(x, y) \\ \text{odd}(x, y) &: - E(x, u), E(u, v), \text{odd}(v, y). \end{aligned}$$

Un couple (x, y) appartient à la relation *odd* si et seulement si

- $(x, y) \in E$ ou ;
- il existe $u, v \in V$ tel que $(x, u), (u, v) \in E$ et $(v, y) \in \text{odd}$.

Dans l'exemple précédent, E est un prédicat EDB et *odd* un prédicat IDB. L'entrée d'un programme DATALOG est en fait la base de données à laquelle on applique ce programme. Une base de données est une collection de relations, elle peut donc être vue comme une structure relationnelle. On peut considérer que l'entrée d'un programme DATALOG est une structure relationnelle à partir de laquelle le programme produit une nouvelle relation. On dit qu'un programme DATALOG *reconnaît* une structure relationnelle si et seulement s'il existe un IDB G d'arité 0 qui peut être satisfait. Une interprétation naturelle de la relation produite par un programme DATALOG consiste à dire qu'un programme DATALOG *reconnaît* une structure relationnelle si et seulement s'il produit une relation non vide à partir de cette structure.

1.3.3 Calcul des relations

Lemme 1.37 ([53]). Une relation définie par un programme DATALOG est calculable en temps polynomial.

Supposons qu'on veuille calculer une relation k -aire définie par un programme. Il est clair qu'une partie des uplets appartenant à cette relation satisfait les règles non-récurrentes du programme (celles qui ne contiennent que des prédicats EDB). Ces uplets forment la base de la relation, à partir de laquelle on pourra calculer les uplets satisfaisant les règles récurrentes. Trouver les uplets de taille k qui satisfont ces règles et tester les prédicats EDB peut se faire en temps polynomial, en énumérant tous les uplets de taille k possibles. Une fois la base calculée, on peut utiliser les règles récurrentes. On teste alors de nouveau tous les uplets de taille k possibles qui satisfont les règles récurrentes. Ceci peut également se faire en temps polynomial. Chaque étape au cours de laquelle on a utilisé des règles récurrentes est susceptible d'ajouter de nouveaux uplets à la relation. Il suffit alors de vérifier que de nouveaux uplets peuvent être ajoutés au regard des dernières

modifications de la relation. Puisque nous travaillons sur des domaines finis fixés, le nombre d'uplets contenus dans une relation est lui-même fini. Pour être plus précis, il est même polynomial. Par conséquent, on va nécessairement atteindre, en utilisant la procédure décrite, un point fixe, une étape au cours de laquelle on ne pourra pas augmenter la relation. Si cela se produit, on peut arrêter le calcul de la relation. On effectue bien un nombre polynomial d'étapes de complexité polynomial.

1.3.4 Lien avec les CSP

DATALOG est un outil permettant d'obtenir des informations sur la complexité de certains CSP. L'ensemble des structures relationnelles reconnues par un programme DATALOG est fermé par homomorphisme. Supposons qu'une structure \mathbf{A} soit reconnue par un programme DATALOG p . Soit \mathbf{B} une structure relationnelle similaire à p telle qu'il existe un homomorphisme $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Pour toute règle sans prédicat IDB

$$I(x_1, \dots, x_k) : - E_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,l_1}), \dots, E_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,l_n}),$$

s'il existe $x_1, \dots, x_k, y_{1,1}, \dots, y_{1,l_1}, y_{n,1}, \dots, y_{n,l_n}$ satisfaisant cette règle, alors, par définition, $h(x_1), \dots, h(x_k), h(y_{1,1}), \dots, h(y_{1,l_1}), h(y_{n,1}), \dots, h(y_{n,l_n})$ la satisfont également, puisque toute relation satisfaite par des variables de \mathbf{A} est également satisfaite par leur image par h dans \mathbf{B} . Donc, si p retourne une relation non vide pour \mathbf{A} , il existe forcément une règle sans relation IDB qui est satisfaite. Puisque la même règle est également satisfaite pour la structure \mathbf{B} , cela signifie que p produit une relation non vide pour \mathbf{B} .

À l'opposé, pour une structure relationnelle \mathbf{A} donnée, l'ensemble des structures relationnelles appartenant à $HOM(\mathbf{A})$ n'est (en général) pas fermé par homomorphisme. On peut par exemple penser à l'ensemble des graphes bipartis : un graphe composé de deux sommets reliés par une arête est biparti ; il existe un homomorphisme de ce graphe vers le graphe complet à trois sommets ; le graphe complet à trois sommets n'est pas biparti. Par conséquent, on ne peut pas espérer caractériser $HOM(\mathbf{A})$ au moyen de DATALOG.

Toutefois, il est intéressant de remarquer que l'ensemble $\neg HOM(\mathbf{C})$ est fermé par homomorphisme. La composition d'homomorphisme étant elle-même un homomorphisme, il est clair qu'il ne peut exister deux structures relationnelles \mathbf{A} et \mathbf{B} telles qu'il existe un homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{B} , un homomorphisme de \mathbf{B} vers \mathbf{C} mais aucun homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathbf{C} . Il n'est donc pas exclu qu'on puisse reconnaître le complément d'un CSP au moyen d'un programme DATALOG. Si un programme DATALOG

reconnait exactement $\neg HOM(\mathbf{C})$, alors on sait que $HOM(\mathbf{C})$ est dans P, puisque DATALOG peut être évalué en temps polynomial et que $\text{co-P} = \text{P}$. Il semble en fait exister une classification plus fine de la complexité d'un CSP qu'il est peut-être possible de capturer au moyen de programmes DATALOG dont on restreint la forme.

Définition 1.38. *On dit que $HOM(\mathbf{A})$ peut être résolu par un programme DATALOG s'il existe un programme DATALOG évalué à vrai pour toute base de données représentant une structure relationnelle \mathbf{A} appartenant à $\neg HOM(\mathbf{A})$.*

On dit que $HOM(\mathbf{A})$ est de largeur (l, k) s'il peut être résolu par un programme DATALOG- (l, k) , c'est à dire un programme dont les règles contiennent, au plus, l variables dans la tête et k variables au total.

On dit que $HOM(\mathbf{A})$ est de largeur l s'il existe un certain k tel que $\neg HOM(\mathbf{A})$ peut être résolu par un programme DATALOG- (l, k) .

On dit que $HOM(\mathbf{A})$ admet une largeur bornée s'il existe certains k et l tels que $HOM(\mathbf{A})$ peut être résolu par un programme DATALOG- (l, k) .

Le programme *odd*, présenté précédemment, est de largeur $(2, 4)$.

Feder et Vardi [26] ont montré qu'il existe une famille de programmes DATALOG canoniques. C'est à dire que pour tout problème susceptible d'être résolu par DATALOG, il existe une méthode déterministe pour écrire un programme qui le résoudra.

Théoreme 1.39 ([26]). *Pour tout problème $HOM(\mathbf{A})$, il existe un programme DATALOG- (l, k) canonique tel que si ce problème peut être résolu par un programme DATALOG- (l, k) , il peut l'être par le programme DATALOG- (l, k) canonique.*

Ce résultat garantit non seulement l'existence d'un programme canonique, mais permet en plus de borner la largeur de ce programme. Il existe en fait un programme canonique tel que l et k sont minimaux.

Un résultat plus récent fournit une borne plus précise sur la largeur des problèmes d'homomorphisme.

Théoreme 1.40 ([4]). *Soit \mathbf{A} une structure relationnelle noyau. Si $HOM(\mathbf{A})$ est de largeur bornée, alors $HOM(\mathbf{A})$ est de largeur $(2\lceil \frac{p}{2} \rceil, 3\lceil \frac{p}{2} \rceil)$, où p est l'arité maximale d'une relation de \mathbf{A} .*

Comme on l'a vu précédemment, une relation définie par un programme DATALOG est calculable en temps polynomial. Par conséquent, si $HOM(\mathbf{A})$ peut être résolu par un programme DATALOG, alors $\neg HOM(\mathbf{A}) \in \text{P}$ et $HOM(\mathbf{A}) \in \text{P}$.

Nous possédons donc un critère permettant de placer un problème dans P. Toutefois, ce résultat est peu satisfaisant à certains égards. D'une part, le fait qu'un problème ne soit pas définissable en DATALOG ne prouve pas sa non-appartenance à P. En fait, certains problèmes tractable ne sont pas de largeur bornée. Feder et Vardi [26] présentent une propriété, qu'ils nomment *ability to count*, suffisante pour qu'un CSP n'admette pas une largeur bornée. Or, certains CSP avec cette propriété sont notoirement résolubles en temps polynomial. Par exemple, la résolution de systèmes d'équations linéaires modulo 2 peut se faire en temps polynomial mais possède la propriété *ability to count* [26].

On peut également s'interroger sur la complexité fine des problèmes résolubles par DATALOG. Plusieurs travaux ont établi des relations intéressantes entre des formes spécifiques de programmes DATALOG et les classes de complexité L et NL [15, 21].

1.3.5 DATALOG linéaire

Définition 1.41. *Un programme DATALOG est dit linéaire si chaque corps de règle contient au plus une occurrence d'un prédicat IDB.*

Exemple 1.42. *Le programme*

$$\begin{aligned} \text{odd}(x, y) &: - E(x, y) \\ \text{odd}(x, y) &: - E(x, u), E(u, v), \text{odd}(v, y) \end{aligned}$$

est linéaire. Il décrit l'ensemble des couples de sommets reliés par un chemin de longueur impaire dans un graphe.

La complexité des programmes DATALOG linéaires a été étudiée, entre autres, par Dalmau [15]. Certains indices laissent penser que, en admettant que $NL \neq P$, DATALOG linéaire caractérise les CSP appartenant à NL. Dalmau a prouvé le résultat suivant.

Théoreme 1.43 ([15]). *Soit \mathbf{A} une structure relationnelle. Si $\neg \text{HOM}(\mathbf{A})$ est définissable en DATALOG linéaire, alors $\text{HOM}(\mathbf{A}) \in NL$.*

Il n'est pas prouvé que la réciproque de ce résultat soit vraie.

1.3.6 DATALOG symétrique

Les programmes DATALOG symétriques sont en fait un sous-ensemble des programmes linéaires.

Définition 1.44. *Un programme DATALOG est dit symétrique s'il est linéaire et si pour chaque règle de la forme*

$$I_1(x_1, \dots, x_k) \quad : - \quad I_2(y_1, \dots, y_l), E(z_{1,1}, \dots, z_{1,m_1}), \dots, E(z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n}),$$

la règle

$$I_2(y_1, \dots, y_l) \quad : - \quad I_1(x_1, \dots, x_k), E(z_{1,1}, \dots, z_{1,m_1}), \dots, E(z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n})$$

est aussi une règle du programme (I_1 et I_2 sont des prédicats IDB).

Exemple 1.45. *Le programme*

$$\begin{aligned} \text{odd}(x, y) & : - \quad E(x, y) \\ \text{odd}(v, y) & : - \quad E(x, u), E(u, v), \text{odd}(x, y) \\ \text{odd}(x, y) & : - \quad E(x, u), E(u, v), \text{odd}(v, y) \end{aligned}$$

est symétrique. Il définit l'ensemble des couples de sommets connectés dans un graphe non-orienté.

Les programmes DATALOG symétriques ont été introduits et étudiés par Egri, Larose et Tesson [21]. Leurs résultats indiquent que DATALOG symétrique pourrait être une caractérisation des CSP résolubles en espace logarithmique, en admettant que $L \neq P$. En prouvant que les programmes DATALOG symétriques sont dans SL [21] et en utilisant un résultat de Reingold [48] démontrant que $SL=L$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.46 ([21]). *Les programmes DATALOG symétriques peuvent être évalués en espace logarithmique.*

Puisque $L=co-L$, s'il existe un programme DATALOG symétrique qui résoud $HOM(\mathbf{A})$ alors $\neg HOM(\mathbf{A})$ est dans L, donc $HOM(\mathbf{A})$ est dans L.

1.4 Algèbre

L'algèbre occupe une place importante dans l'étude actuelle des CSP [10, 13, 35]. Elle offre des outils qui permettent de regrouper les structures relationnelles par familles, en considérant l'ensemble des opérations qui les préservent. L'étude de ces familles offre un bon angle d'attaque pour qui désire caractériser la complexité des CSP associés aux

structures. On commencera par présenter les notions de base puis on explicitera les propriétés qui permettent de relier l’algèbre à la complexité des CSP. Dans cette section, on écrira $HOM(\Gamma)$ pour désigner $HOM(A, \Gamma)$, où Γ est un langage de contraintes sur A ((A, Γ) formant alors une structure relationnelle).

1.4.1 Préliminaires

Commençons par définir ce qu’est une algèbre.

Définition 1.47. Une algèbre \mathbb{A} est un couple (A, F) tel que A est un ensemble non vide et F est un ensemble d’opérations d’arité finies sur A . On appelle A l’univers de \mathbb{A} . On appelle une opération de F une opération de base de \mathbb{A} . L’ensemble des opérations d’arité finie sur A est noté \mathcal{O}_A .

Les algèbres sont des structures mathématiques connues depuis longtemps et certaines d’entre elles ont été très largement étudiées (voir [11, 46]). Citons, entre autres, les monoïdes, les groupes, les anneaux ou les espaces vectoriels.

Une opération f d’arité k est dite *idempotente* si on a $f(x, \dots, x) = x$ pour tout élément x .

Une opération f d’arité k est dite *conservative* si pour tout éléments x_1, \dots, x_k on a $f(x_1, \dots, x_k) \in \{x_1, \dots, x_k\}$.

On appelle *terme* de l’algèbre \mathbb{A} une opération sur l’univers de \mathbb{A} obtenue par composition des opérations de base de \mathbb{A} . On appelle *polynôme* de l’algèbre \mathbb{A} une opération sur l’univers de \mathbb{A} obtenue par composition des opérations de base et des constantes de \mathbb{A} .

Deux algèbres engendrant les mêmes termes sont dites *termes-équivalentes*. Deux algèbres engendrant les mêmes polynômes sont dites *polynomialement équivalentes*.

Exemple 1.48. Soit l’algèbre $\mathbb{A} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$. Les opérations \wedge et \vee sont d’arité 2, l’opération \neg est d’arité 1. On les définit comme suit, pour $x \in \{0, 1\}$:

$$x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x,$$

$$x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1,$$

$$\neg 0 = 1, \neg 1 = 0.$$

L’opération $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x, y) = x \wedge (x \vee y)$ est un terme de

A. L'opération $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x, y, z) = z \wedge (x \wedge (0 \vee y))$ est un polynôme de A.

Les symboles des opérations d'une algèbre associés à l'arité des opérations est appelé *vocabulaire* de cette algèbre. Deux algèbres possédant le même vocabulaire sont dites *similaires*.

Définition 1.49. Soit \mathbb{A} une algèbre. On appelle sous-algèbre de \mathbb{A} l'algèbre dont l'univers V est un sous-ensemble de $V(\mathbb{A})$ et dont les opérations sont les restrictions des opérations de \mathbb{A} à V .

Définition 1.50. Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} des algèbres similaires. On appelle homomorphisme de \mathbb{A} vers $V(\mathbb{B})$ une application h de $V(\mathbb{A})$ vers $V(\mathbb{B})$ telle que, pour tout symbole d'opération f du vocabulaire des algèbres \mathbb{A} et \mathbb{B} , on a :

$$h(f_{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f_{\mathbb{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

Définition 1.51. Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} des algèbres similaires. Soit h un homomorphisme de \mathbb{A} à \mathbb{B} . On appelle image homomorphe de \mathbb{A} par h la sous-algèbre de \mathbb{B} induite par l'image de $V(\mathbb{A})$ par h .

Définition 1.52. Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} des algèbres similaires. On appelle produit direct de \mathbb{A} et \mathbb{B} et on note $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ l'algèbre formée par l'univers $V(\mathbb{A}) \times V(\mathbb{B})$ et dont les opérations $f_{\mathbb{A} \times \mathbb{B}}$ sont définies par : $f_{\mathbb{A} \times \mathbb{B}}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (f_{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n), f_{\mathbb{B}}(b_1, \dots, b_n))$.

Définition 1.53. On appelle variété engendrée par l'algèbre \mathbb{A} et on note $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ l'ensemble minimal d'algèbres similaires contenant \mathbb{A} et fermé sous produit, sous-algèbre et image homomorphe.

1.4.2 Liens avec les CSP

À première vue, il ne semble pas y avoir de rapports entre les structures relationnelles et les algèbres. Pourtant, on peut aisément passer de l'une à l'autre.

Pour établir cette relation, commençons par considérer la puissance d'expression d'une structure relationnelle. En utilisant la logique du premier ordre, on peut définir de nouvelles relations à partir des relations de base d'une structure relationnelle.

Exemple 1.54. Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque. Nous voulons définir l'ensemble F des couples de sommets qui possèdent un voisin commun. Une telle relation peut être

exprimée comme suit :

$$F(x, y) = (\exists z)[E(x, z) \wedge E(z, y)].$$

On s'intéresse à la puissance d'expression d'une structure relationnelle, c'est à dire à l'ensemble des relations qu'il est possible de définir à partir des relations de base.

Définition 1.55. Soit A un ensemble quelconque non vide. Soit \mathbf{A} une structure relationnelle. On dit que \mathbf{A} exprime une relation R si R peut être définie par une formule logique primitive positive sur le vocabulaire de \mathbf{A} .

Une formule logique primitive positive est une formule logique du premier ordre qui ne contient que le quantificateur existentiel et l'opérateur logique \wedge .

L'ensemble des relations exprimables par une structure relationnelle $\mathbf{A} = (A, \Gamma)$ est appelé *clone relationnel* de \mathbf{A} et on le note $\langle \Gamma \rangle$. Le clone relationnel d'une structure relationnelle est un outil intéressant. En particulier, nous pouvons supposer que deux structures relationnelles similaires différentes possédant des clones relationnels identiques partagent un certain nombre de propriétés.

Exemple 1.56. Soit le graphe $\mathbf{G} = (V, E)$. Soit la structure relationnelle $\mathbf{H} = (V, E, F)$ où F est une relation binaire telle que $F(x, y) = (\exists z)[E(x, z) \wedge E(z, y)]$. Il est évident, d'après la définition précédente, que $\langle \mathbf{G} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle$.

On peut donc étudier, plutôt que chaque structure relationnelle, des familles de structures associées par leur clone relationnel. Le théorème suivant nous garantit en fait que pour étudier la complexité de $HOM(\mathbf{A})$, il est possible de considérer uniquement son clone relationnel.

Théorème 1.57 ([35]). Soit A un ensemble non vide. Soient Γ et Γ_0 deux langages de contraintes sur A . Soient $\mathbf{A} = (A, \Gamma)$ et $\mathbf{A}' = (A, \Gamma_0)$. Si $\Gamma_0 \subseteq \langle \Gamma \rangle$, alors il existe une réduction en espace logarithmique de $HOM(\Gamma_0)$ vers $HOM(\Gamma)$.

Le problème de l'existence d'une dichotomie peut donc être uniquement abordé à travers l'étude des clones relationnels, puisque les CSP associés à deux structures engendrant le même clone peuvent être réduits polynomialement au CSP associé à leur clone relationnel. On a en effet $HOM(\Gamma) \in \mathbf{P}$ si et seulement si $HOM(\langle \Gamma \rangle) \in \mathbf{P}$, puisque $\langle \Gamma \rangle \subseteq \langle \Gamma \rangle$ et $\Gamma \subseteq \langle \langle \Gamma \rangle \rangle = \langle \Gamma \rangle$. Pour les mêmes raisons, $HOM(\Gamma)$ est NP-complet si et seulement si $HOM(\langle \Gamma \rangle)$ est NP-complet.

Il est naturel d'étudier le clone relationnel d'une structure relationnelle pour en tirer des conclusions sur la complexité du CSP associé. En effet, si on se souvient que les relations de la structure sont ce dont on va se servir pour définir les contraintes du CSP, il semble raisonnable de penser qu'étudier les combinaisons de contraintes permettra de caractériser la complexité du CSP. Ces combinaisons de contraintes sont le clone relationnel de la structure relationnelle. L'inconvénient majeur de cette méthode est que l'utilisation des clones relationnels n'est pas nécessairement simple. Prouver que deux structures relationnelles engendrent le même clone peut être difficile, tout comme trouver un ensemble générateur canonique à un clone relationnel. En fait, il faut régler la question de la représentation et de la description des clones relationnels.

1.4.3 Polymorphismes

La solution adoptée consiste à déplacer le problème et à observer une algèbre associée au clone relationnel pour gagner des informations concernant le clone. De la même manière que nous sommes passés des structures aux clones relationnels, nous passons maintenant des clones aux algèbres.

Définition 1.58. Soit D un ensemble. Soit $f : D^k \rightarrow D$ une opération k -aire sur D . Soit R une relation d'arité n sur D . On dit que la fonction f préserve la relation R si $(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}), \dots, (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in R$ implique

$$(f(x_{1,1}, \dots, x_{k,1}), \dots, f(x_{1,n}, \dots, x_{k,n})) \in R.$$

On dit également que R est invariante sous f ou que f est un polymorphisme de R . C'est l'ensemble des fonctions qui préservent les relations d'une structure relationnelle qui va nous servir par la suite.

Définition 1.59. Soit un langage de contraintes Γ sur un ensemble non vide A . On appelle polymorphisme de Γ et on note $Pol(\Gamma)$ l'ensemble des opérations f telles que toutes les relations de Γ sont invariantes sous f .

Définition 1.60. On appelle algèbre associée à la structure relationnelle $\mathbf{A} = (A, \Gamma)$ et on note $\mathbb{A}(\mathbf{A})$ l'algèbre $(A, Pol(\Gamma))$.

Exemple 1.61. Soit $\mathbf{G} = (\{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 1)\})$ un graphe. La fonction commutative \wedge d'arité 2, définie par $0 \wedge x = 0$ et $1 \wedge x = x$, est un polymorphisme de \mathbf{G} . En effet,

$$(0 \wedge 1, 1 \wedge 1), (0 \wedge 0, 1 \wedge 1), (1 \wedge 0, 1 \wedge 1), (1 \wedge 1, 1 \wedge 1) \in E(\mathbf{G}).$$

De même, la fonction commutative \vee d'arité 2, définie par $0 \vee x = x$ et $1 \vee x = 1$, est un polymorphisme de \mathbf{G} . On a bien

$$(0 \vee 1, 1 \vee 1), (0 \vee 0, 1 \vee 1), (1 \vee 0, 1 \vee 1), (1 \vee 1, 1 \vee 1) \in E(\mathbf{G}).$$

Par contre, la fonction \neg d'arité 1, définie par $\neg 1 = 0$ et $\neg 0 = 1$, n'est pas un polymorphisme de \mathbf{G} puisque $(0, 1) \in E(\mathbf{G})$ et $(\neg 0, \neg 1) = (1, 0) \notin E(\mathbf{G})$.

La définition précédente en appelle une autre, complémentaire, celle de l'ensemble des relations qui sont invariantes sous un ensemble d'opérations.

Définition 1.62. Soit F un ensemble d'opérations sur un domaine D . On appelle invariant de F et on note $Inv(F)$ l'ensemble des relations invariantes sous toutes les opérations de F .

Invariant et polymorphisme sont deux aspects complémentaires, l'un abordant l'angle relationnel, l'autre l'angle opératoire. Ces deux ensembles forment une correspondance de Galois entre l'ensemble des opérations définissables sur un ensemble E et l'ensemble des relations définissables sur E [52]. On peut en effet vérifier les propriétés suivantes, caractéristiques d'une correspondance de Galois :

- soient Γ_1 et Γ_2 deux langages de contraintes sur un ensemble A non vide, on a $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \rightarrow Pol(\Gamma_2) \subseteq Pol(\Gamma_1)$ et $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_1 \subseteq Inv(Pol(\Gamma_2))$;
- soient F_1 et F_2 deux ensembles de fonctions sur un ensemble A non vide, on a $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow Inv(F_2) \subseteq Inv(F_1)$ et $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_1 \subseteq Pol(Inv(F_2))$.

De ceci, on peut déduire la propriété suivante.

Propriété 1.63 (voir [52]). $Inv(F) = Inv(Pol(Inv(F)))$

On peut donc passer sans conséquence de l'invariant d'un ensemble de fonctions au polymorphisme de cet invariant.

Propriété 1.64 (voir [35]). $\langle \Gamma \rangle = Inv(Pol(\Gamma))$

Cette propriété noue ensemble les notions de clone relationnel, de polymorphisme et d'invariant. À partir de la structure relationnelle, on passe au polymorphisme. Du polymorphisme, on peut passer au clone relationnel, puis repasser au polymorphisme.

L'étude du polymorphisme permettrait donc de dégager des propriétés concernant le clone relationnel et par conséquent la structure elle-même. Notamment, le pouvoir d'expression de la structure relationnelle et le polymorphisme de cette même structure sont liés par les propriétés suivantes.

Propriété 1.65. *Une relation R est exprimable par une structure relationnelle $\mathbf{A} = (A, \Gamma)$ si et seulement si $Pol(\Gamma) \subseteq Pol(\{R\})$.*

Démonstration. (\Rightarrow) Par définition, $R \in \langle \Gamma \rangle$. Par la propriété 1.64, on a $R \in Inv(Pol(\Gamma))$. Donc R est invariant sous les fonctions qui préservent les relations de Γ . Par conséquent, toute fonction $f \in Pol(\Gamma)$ préserve aussi R , donc appartient à $Pol(\{R\})$. On a bien $Pol(\Gamma) \subseteq Pol(\{R\})$.

(\Leftarrow) Puisque $Pol(\Gamma) \subseteq Pol(\{R\})$, alors

$$Inv(Pol(\{R\})) = \langle \{R\} \rangle \subseteq Inv(Pol(\Gamma)) = \langle \Gamma \rangle.$$

Or $R \in \langle \{R\} \rangle \subseteq \langle \Gamma \rangle$, d'où $R \in \langle \Gamma \rangle$. Donc R est exprimable par \mathbf{A} . \square

De même, on peut lier complexité et polymorphisme au moyen de la propriété suivante.

Propriété 1.66. *Soient $\mathbf{A} = (A, \Gamma_A)$ et $\mathbf{B} = (B, \Gamma_B)$ deux structures relationnelles. Si $Pol(\Gamma_A) \subseteq Pol(\Gamma_B)$, alors il existe une réduction en temps polynomial de $HOM(\mathbf{B})$ à $HOM(\mathbf{A})$.*

Démonstration. Puisque $Pol(\Gamma_A) \subseteq Pol(\Gamma_B)$, alors on a $Inv(Pol(\Gamma_B)) \subseteq Inv(Pol(\Gamma_A))$. Donc, d'après la propriété 1.64, $\langle \Gamma_B \rangle \subseteq \langle \Gamma_A \rangle$. On a de plus $\Gamma_B \subseteq \langle \Gamma_B \rangle$, donc $\Gamma_B \subseteq \langle \Gamma_A \rangle$. D'après le théorème 1.57, il existe alors une réduction polynomiale de $HOM(\mathbf{B})$ vers $HOM(\mathbf{A})$. \square

Il existe plusieurs opérations remarquables dont nous nous servirons ultérieurement.

Définition 1.67. *Une opération de semi-treillis est une opération binaire f telle que $f(x, x) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$ et $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$, pour tout x, y, z .*

Une opération totalement symétrique est une opération k -aire f , avec $k \geq 2$ telle que si $\{x_1, \dots, x_k\} = \{y_1, \dots, y_k\}$, alors $f(x_1, \dots, x_k) = f(y_1, \dots, y_k)$, pour tout x_1, \dots, x_k . Une opération totalement symétrique et idempotente sera abrégée opération TSI.

Une opération de presque-unanimité est une opération k -aire f , avec $k \geq 2$, telle que $f(x, \dots, x, y) = f(x, \dots, y, x) = \dots = f(y, x, \dots, x) = x$, pour tout x, y .

Une opération de presque-unanimité faible est une opération k -aire f , avec $k \geq 3$, telle que $f(x, \dots, x, y) = f(x, \dots, y, x) = \dots = f(y, x, \dots, x)$, pour tout x, y .

Une opération de majorité est une opération ternaire f telle que pour tout x, y , on a $f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x$. La majorité est une opération de presque-unanimité d'arité 3.

Une opération de Mal'tsev est une opération ternaire f telle que, pour tout x, y , $f(x, x, y) = f(y, x, x) = y$.

Théoreme 1.68. Soit \mathbf{A} une structure relationnelle.

- si \mathbf{A} admet un polymorphisme presque-unanimité, alors $HOM(\mathbf{A})$ est dans P [26];
- si \mathbf{A} admet un polymorphisme majorité, alors $HOM(\mathbf{A})$ est dans NL et $\neg HOM(\mathbf{A})$ est définissable en DATALOG LINÉAIRE [16];
- si $\neg HOM(\mathbf{A})$ est définissable en DATALOG et \mathbf{A} admet un polymorphisme de Mal'tsev, alors $\neg HOM(\mathbf{A})$ est définissable en DATALOG symétrique [17].

En se concentrant sur certaines opérations intéressantes, on peut déterminer certains aspects de la complexité d'un CSP. L'objectif serait évidemment de caractériser totalement les classes de complexité via l'observation de l'algèbre associée. Les notions que nous présentons maintenant fournissent une approche intéressante pour résoudre ces questions.

1.4.4 Types d'algèbre

L'observation des types, que nous allons définir dans cette section, est une approche qui permet de dégager des propriétés d'une structure relationnelle à partir de l'étude d'un fragment de l'algèbre associée. Il est possible que les types d'une variété $\mathcal{V}(\mathbb{A}(\mathbf{B}))$ soient suffisants pour totalement caractériser la complexité de $HOM(\mathbf{B})$. Dans tous les cas, ils permettent de déduire la complexité du CSP dans un certain nombre de situations.

1.4.4.1 Définitions

Établissons dans un premier temps quelques définitions.

Définition 1.69. Soit $\mathbb{A} = (A, \{f_1, \dots, f_k\})$ une algèbre. On appelle congruence de \mathbb{A} une relation d'équivalence θ sur l'univers de \mathbb{A} invariante sous les opérations de \mathbb{A} . Pour a appartenant à l'univers de \mathbb{A} , on note $a|_{\theta}$ la classe d'équivalence de a . On note A/θ l'ensemble composé des classes d'équivalence des éléments de A pour la relation θ . On note f_i/θ l'opération sur A/θ définie par $f_i/\theta(x_1|_{\theta}, \dots, x_{l_i}|_{\theta}) = f(x_1, \dots, x_{l_i})|_{\theta}$.

Il existe toujours au moins deux congruences triviales sur toute algèbre \mathbb{A} : la congruence $0_{\mathbb{A}}$ qui est définie par $0_{\mathbb{A}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{A}\}$, et la congruence $1_{\mathbb{A}}$ qui est définie par $1_{\mathbb{A}} = A^2$. La congruence $0_{\mathbb{A}}$ isole chaque élément de l'algèbre dans sa propre classe d'équivalence alors que la congruence $1_{\mathbb{A}}$ place tous les éléments dans une unique classe d'équivalence.

On vérifie facilement que la structure notée $\mathbb{A}/\theta = (A/\theta, f_1/\theta, \dots, f_k/\theta)$ est une algèbre similaire à \mathbb{A} . Il existe un homomorphisme naturel de l'algèbre \mathbb{A} vers l'algèbre \mathbb{A}/θ qui associe à tout élément de \mathbb{A} sa classe d'équivalence dans \mathbb{A}/θ (voir [11]).

Ce qui nous intéresse est, en un sens, de trouver une image homomorphe minimale d'une algèbre. On s'appuie pour cela sur le concept de congruence minimale.

Définition 1.70 ([10]). *Une congruence θ sur une algèbre \mathbb{A} est dite minimale si $0_{\mathbb{A}} \subset \theta$ et si pour toute relation de congruence ϕ sur \mathbb{A} on a $0_{\mathbb{A}} \subset \phi \subseteq \theta \rightarrow \phi = \theta$.*

Notons qu'il peut très bien exister plusieurs congruences minimales sur une algèbre. Si la seule congruence de \mathbb{A} est $0_{\mathbb{A}}$, l'algèbre est dite *simple*. Une algèbre simple n'admettant que des sous-algèbres à un élément est dite *strictement simple*.

Exemple 1.71. *Soit une algèbre composée d'un ensemble à trois éléments a, b et c et de l'opération unaire d'identité. Toute relation d'équivalence est une relation de congruence pour cette algèbre. Les relations*

$$\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\} \quad \text{et} \\ \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c), (b, b)\}$$

ne sont pas comparables par l'inclusion (puisque aucune des deux ne contient l'autre). Il n'existe de plus aucune relation de congruence autre que $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ qui soit incluse dans une des deux relations précédentes. Par définition, ce sont bien des congruence minimales toutes deux.

Définition 1.72 ([10]). *Soit θ une congruence minimale sur une algèbre finie \mathbb{A} . On dit que l'ensemble $U \subseteq A$ est θ -minimal si :*

- $U = p(A)$ pour un polynôme unaire $p(x)$ de \mathbb{A} tel que $p(x)$ n'est pas constant pour au moins une classe d'équivalence de θ , c'est à dire que l'image par p des éléments de cette classe d'équivalence n'est pas incluse dans une seule classe d'équivalence ;
- U est minimal, c'est à dire qu'il n'existe aucun ensemble U' respectant la condition précédente tel que $U' \subset U$.

Définition 1.73. Soit θ une congruence minimale sur une algèbre finie \mathbb{A} . On appelle θ -voisinage de A un sous-ensemble $N \subseteq A$ tel que

- $N = U \cap (a/\theta)$ avec U un ensemble θ -minimal et a un élément de \mathbb{A} ;
- $|N| > 1$.

Il est facile de constater qu'un ensemble θ -minimal U contient toujours au moins un θ -voisinage. Il suffit de remarquer que $p(x)$ n'est pas constant pour au moins une classe d'équivalence et que si $p(a) = b$, alors pour tout $x \in a/\theta$, $p(x) \in b/\theta$. Par conséquent, il existe au moins une classe d'équivalence dont deux éléments appartiennent à U .

Définition 1.74. Soit \mathbb{A} une algèbre finie. Soit $U \subseteq A$. L'algèbre induite par \mathbb{A} sur U , notée $\mathbb{A}|_U$, est l'algèbre dont l'univers est U et dont les opérations sont la restriction à U de tous les polynômes de \mathbb{A} pour lesquels U est fermé.

Les algèbres induites par les θ -voisinages vont retenir notre attention. Le théorème suivant nous permet de classer les algèbres induites en fonction de leurs polynômes.

Théorème 1.75 ([31]). Soit \mathbb{A} une algèbre finie et θ une congruence minimale sur \mathbb{A} . Si N est un θ -voisinage, alors $\mathbb{A}|_N$ est polynomialement équivalente à une des cinq algèbres suivantes :

1. Une algèbre unaire dont les opérations de base sont les permutations (type unaire) ;
2. Un espace vectoriel à une dimension sur un corps fini (type affine) ;
3. Une algèbre booléenne à deux éléments (type booléen) ;
4. Un treillis à deux éléments (type treillis) ;
5. Un semi-treillis à deux éléments (type semi-treillis).

Les algèbres évoquées ici sont abondamment décrites dans la littérature. Le lecteur intéressé pourra consulter [11, 46] pour plus de renseignements. Elles sont ordonnées par inclusion de leur pouvoir d'expression comme suit (voir également figure 1.9) :

$$3 > 4 > 5 > 1 < 2 < 3.$$

Le résultat suivant prouve que les θ -voisinages d'une algèbre finie possèdent les mêmes polymorphismes.

Théorème 1.76 ([31]). Soient \mathbb{A} une algèbre finie et θ une congruence sur \mathbb{A} . Si N et M sont des θ -voisinages de \mathbb{A} , alors $\mathbb{A}|_N$ et $\mathbb{A}|_M$ sont isomorphes.

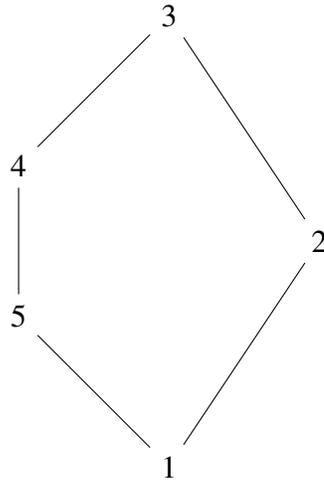


Figure 1.9 – Ordre sur les types d’algèbre.

Le fait que deux θ -voisinages de \mathbb{A} soient isomorphes signifie qu’ils possèdent le même nombre d’éléments et qu’ils se comportent de la même manière sous les opérations de \mathbb{A} . Il est donc clair que les polynômes de $\mathbb{A}|_N$ et $\mathbb{A}|_M$ sont identiques. À une congruence on peut donc associer un type unique.

On dit qu’une algèbre finie \mathbb{A} admet le type i , avec $i \in \{1, \dots, 5\}$, s’il existe une congruence θ sur \mathbb{A} telle que les θ -voisinages de A sont de type i . Sinon, on dit que \mathbb{A} omet le type i . Notons qu’une algèbre peut admettre plusieurs types. Cette définition peut être étendue aux variétés comme suit : on dit qu’une variété admet le type i s’il existe une algèbre finie qui admet le type i dans cette variété. L’ensemble des types admis par une variété \mathcal{V} est noté $Typ(\mathcal{V})$.

Exemple 1.77. Soit une algèbre \mathbb{A} sur l’univers $(0, 1, 2)$ possédant une seule opération \times définie comme suit :

\times	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	0
2	2	0	1

Exceptées 0_A et 1_A , \mathbb{A} n’admet qu’une seule congruence $\alpha = \{\{0, 1\}, \{2\}\}$ qui est donc trivialement minimale. Prouvons que α est une congruence de type 5. Soit $p(x) = 1 \times x$. L’image de $\{0, 1\}$ par p est $\{0, 1\}$ (p n’est donc pas constante pour

cette classe d'équivalence) et celle de $\{2\}$ est $\{0\}$. Il est clair que $\{0, 1\}$ est un ensemble α -minimal, puisqu'il ne contient que deux éléments. Pour cette même raison, $\{0, 1\}$ constitue donc forcément un α -voisinage. La fonction $\times_{\{0,1\}}$ est commutative, associative et idempotente. L'ensemble $\{0, 1\}$ muni de cette opération est donc, par définition, un semi-treillis. Il est donc trivialement vrai que tout polynôme de $\mathbb{A}_{\{0,1\}}$ est engendré par un semi-treillis à deux éléments et inversement. Donc $\mathbb{A}_{\{0,1\}}$ est polynomialement équivalent à un semi-treillis à deux éléments. La congruence α est donc de type 5. Puisqu'il n'existe pas d'autre congruence minimale que α sur \mathbb{A} , on peut conclure que l'algèbre \mathbb{A} admet seulement le type 5.

1.4.4.2 Applications

Les types définis dans la section précédente sont particulièrement utiles lorsqu'on désire lier la complexité d'un CSP et les propriétés de son algèbre associée.

Il suffit, dans certains cas, de prouver la présence ou l'omission de certains types pour placer le problème dans une classe de complexité.

L'un des enjeux de l'approche algébrique est de trouver une équivalence entre présence ou omission de types et classe de complexité.

Certains liens entre ces concepts sont déjà connus.

Théoreme 1.78. *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle noyau. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{H})$ l'algèbre associée à \mathbf{H} .*

- Si $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ admet le type 1, alors $HOM(\mathbf{H})$ est NP-complet [9] sous réduction FO [40];
- Si $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1 et 2 et admet le type 5, alors $HOM(\mathbf{H})$ est P-difficile [40] sous réduction FO;
- Si $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1, 2 et 5 et admet le type 4, alors $HOM(\mathbf{H})$ est NL-difficile [40] sous réduction FO.

Il existe également des résultats qui lient les types et la définissabilité en DATALOG.

Théoreme 1.79. *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle noyau. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{H})$ l'algèbre associée à \mathbf{H} .*

- Si $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ admet le type 1 ou le type 2, alors $\neg HOM(\mathbf{H})$ n'est pas définissable en DATALOG [41];

- Si $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1 et 2 et admet le type 5, alors $\neg HOM(\mathbf{H})$ n'est pas définissable en DATALOG linéaire [40];
- Si $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1, 2 et 5 et admet le type 4, alors $\neg HOM(\mathbf{H})$ n'est pas définissable en DATALOG symétrique [40].

Ces résultats présentent des conditions suffisantes sur la présence de types pour conclure quant à la complexité du CSP. Naturellement, il serait particulièrement intéressant de pouvoir établir des conditions nécessaires et suffisantes. Un résultat en ce sens a été établi récemment par Barto et Kozik.

Théoreme 1.80 ([4]). *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle noyau. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{H})$ l'algèbre associée à \mathbf{H} . La variété $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1 et 2 si et seulement si $\neg HOM(\mathbf{H})$ est de largeur bornée (i.e. définissable en DATALOG).*

Il reste encore un certain nombre de conjectures raisonnables dont la résolution serait extrêmement satisfaisante.

Conjecture 1.81. *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle noyau. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{H})$ l'algèbre associée à \mathbf{H} .*

- $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet le type 1 $\Rightarrow HOM(\mathbf{H}) \in P$ [9];
- $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1, 2 et 5 $\Leftrightarrow \neg HOM(\mathbf{H})$ est définissable en DATALOG linéaire [40];
- $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ omet les types 1, 2, 4 et 5 $\Leftrightarrow \neg HOM(\mathbf{H})$ est définissable en DATALOG symétrique [40].

1.5 Homomorphismes avec listes et constantes

On s'intéresse à une forme plus contrainte d'homomorphismes, à laquelle on rajoute des conditions sur les domaines que peuvent atteindre chaque variable de la structure de départ. Ces contraintes supplémentaires donnent aux algèbres associées à ces structures plus de rigidité, ce qui facilite leur étude.

1.5.1 Définitions

Résoudre un CSP consiste à attribuer des valeurs à des variables. Dans la forme la plus générale, chaque variable a accès à toutes les valeurs du domaine. Toutefois, il existe de nombreux problèmes qui ne laissent pas tant de liberté et qui restreignent les valeurs

que peuvent prendre les variables. On associe donc à ces variables une liste de valeurs autorisées. Ceci se transpose naturellement au problème d'homomorphisme. Alors qu'un homomorphisme autorise n'importe quel élément de la structure relationnelle d'arrivée à être choisi comme image d'un élément de la structure relationnelle de départ, les homomorphismes avec listes restreignent les choix d'image possibles. À chaque élément de la structure de départ, on associe une liste des éléments de la structure d'arrivée autorisés à en être l'image par homomorphisme. Cela restreint donc les possibilités de définition des homomorphismes entre les deux structures. On appelle *LHOM* le problème consistant à décider l'existence d'un homomorphisme avec listes d'une structure relationnelle vers une autre. Les problèmes d'homomorphisme avec listes trouvent des applications concrètes assez immédiates. Hell et Nešetřil donnent l'exemple de l'attribution de tâches à des processeurs.

Exemple 1.82 ([29]). *On dispose d'un ensemble de processeurs dont certains peuvent communiquer entre eux. Ces processeurs forment un graphe naturel \mathbf{H} . On dispose également d'un ensemble de tâches à effectuer, chaque tâche ne pouvant être effectuée que par certains processeurs. De plus certaines paires de tâches nécessitent que les processeurs puissent communiquer entre eux. Nous avons un autre graphe naturel \mathbf{G} , dont les sommets sont les tâches et les arêtes relient entre elles deux tâches qui nécessitent que les processeurs communiquent entre eux. Assigner à chaque tâche un processeur est un homomorphisme avec listes de \mathbf{G} vers \mathbf{H} .*

Un cas particulier d'homomorphismes avec listes est l'homomorphisme avec constantes, ou homomorphisme tout-ou-un (*one-or-all*) : chaque liste associée à un élément de la structure de départ est constituée soit de tous les éléments de la structure d'arrivée, soit d'un seul élément de la structure d'arrivée. On appelle *C-HOM* le problème consistant à décider l'existence d'un homomorphisme avec constantes d'une structure relationnelle vers une autre.

1.5.2 Réduction de *L-HOM* à *HOM*

Le problème d'homomorphisme avec listes peut être vu comme un cas particulier du problème d'homomorphisme. Il suffit d'adapter les structures relationnelles pour simuler les listes.

Soient deux structures relationnelles similaires \mathbf{A} et \mathbf{B} . On ajoute au vocabulaire de \mathbf{A} et \mathbf{B} les relations unaires R_1, \dots, R_k telles que k est le nombre de sous-ensembles

non vides de $V(\mathbf{B})$. On obtient la nouvelle structure \mathbf{B}' en définissant $R_{E_1}^{\mathbf{B}'}, \dots, R_{E_k}^{\mathbf{B}'}$, avec $R_{E_i} = E_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et où $\{E_1, \dots, E_k\}$ est l'ensemble des sous-ensembles non vides de $V(\mathbf{B})$. On obtient la nouvelle structure \mathbf{A}' en définissant $R_i^{\mathbf{A}'}$ comme l'ensemble des sommets de \mathbf{A} dont la liste associée est égale au sous-ensemble $R_i^{\mathbf{A}}$. Observons que, par définition, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_L$.

Le fait qu'un sommet $v \in V(\mathbf{A}')$ respecte la relation $R_i^{\mathbf{A}'}$ implique qu'un homomorphisme h de \mathbf{A}' vers \mathbf{B}' ne peut envoyer v que vers un des sommets de $R_i^{\mathbf{B}}$. Puisque tous les sous-ensembles non vides de \mathbf{B} sont représentés par les relations R_i , toute liste de valeurs autorisées peut être associée à v par ce moyen.

1.5.3 Réduction de C - HOM à HOM

Le problème d'homomorphisme avec constantes peut être vu comme un cas particulier du problème d'homomorphisme. Une fois encore, on adapte les structures relationnelles pour simuler les constantes.

Soient deux structures relationnelles similaires \mathbf{A} et \mathbf{B} . On ajoute au vocabulaire de \mathbf{A} et \mathbf{B} les relations unaires $R_1, \dots, R_{|B|}$. On obtient la nouvelle structure \mathbf{B}' en définissant $R_{E_1}^{\mathbf{B}'}, \dots, R_{E_{|B|}}^{\mathbf{B}'}$, avec $R_{E_i} = E_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, |B|\}$ et où $\{R_{E_1}, \dots, R_{E_k}\}$ est l'ensemble des sous-ensembles à un élément de $V(\mathbf{B})$. On obtient la nouvelle structure \mathbf{A}' en définissant $R_i^{\mathbf{A}'}$ comme l'ensemble des sommets de \mathbf{A} qui sont associés à l'élément contenu dans $R_i^{\mathbf{A}}$. Observons que, par définition, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_C$.

Le fait qu'un sommet $v \in V(\mathbf{A}')$ respecte la relation $R_i^{\mathbf{A}'}$ implique qu'un homomorphisme h de \mathbf{A} vers \mathbf{B} ne peut envoyer v que vers le sommet contenu dans $R_i^{\mathbf{B}}$. Puisque tous les sous-ensembles à un élément de \mathbf{B} sont représentés par les relations R_i , toute liste constituée d'un élément peut être associée à v par ce moyen.

1.5.4 Conséquences algébriques

Un très grand avantage des structures relationnelles conservatives et idempotentes qu'elles sont nécessairement des structures noyaux. En effet, quel que soit a un sommet de la structure \mathbf{A}_L ou \mathbf{A}_C , a est le seul élément à satisfaire la relation $\{a\}$. Par conséquent, il ne peut exister d'endomorphisme qui envoie a vers un autre sommet que a . Ceci permet d'utiliser les résultats des théorèmes 1.78, 1.79 et 1.80. Ceci sera également utile par la suite, lorsque nous utiliserons des résultats de Larose, Loten et Tardif [39].

Les structures relationnelles avec listes permettent de simuler les homomorphismes

avec listes, d'où leur nom. Tout polymorphisme d'arité k admis par une structure relationnelle avec listes est nécessairement conservatif.

Observation 1.83. *Soit \mathbf{G}_L une structure relationnelle avec listes. Soit f un polymorphisme d'arité k sur \mathbf{G}_L . Pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in V(\mathbf{G}_L)^k$, on a $f(x_1, \dots, x_k) \in \{x_1, \dots, x_k\}$.*

Démonstration. Les sommets x_1, \dots, x_k appartiennent tous à au moins une des relations unaires de \mathbf{G}_L , la relation unaire $\{x_1, \dots, x_k\}$. Puisque f est un polymorphisme, $f(x_1, \dots, x_k)$ doit également appartenir à $\{x_1, \dots, x_k\}$. \square

Le qualificatif de conservatif, attribué plus tôt aux structures avec listes trouve là sa justification. Cette propriété restreint considérablement l'ensemble des fonctions à considérer dans le cadre de l'étude des polymorphismes d'une structure avec listes, la facilitant énormément.

Les structures relationnelles avec constantes permettent de simuler les homomorphismes avec constantes, d'où leur nom. Tout polymorphisme d'arité k admis par une structure relationnelle avec constantes est nécessairement idempotent.

Observation 1.84. *Soit \mathbf{G}_C une structure relationnelle avec constantes. Soit f un polymorphisme d'arité k sur \mathbf{G}_C . Pour tout (x, \dots, x) avec $x \in V(\mathbf{G}_C)$, on a $f(x, \dots, x) = x$.*

Démonstration. Le sommet x appartient à la relation unaire $\{x\}$. Par conséquent, chaque coordonnée de l'uplet (x, \dots, x) appartient à la relation unaire $\{x\}$. Puisque f est un polymorphisme, $f(x, \dots, x)$ appartient également à $\{x\}$. \square

Le qualificatif idempotent, attribué plus tôt aux structures avec constantes trouve là sa justification. Cette propriété restreint également l'ensemble des fonctions à considérer lorsqu'on cherche des polymorphismes sur une structure avec constantes, quoique moins fortement que dans le cas conservatif.

1.5.5 Dichotomie

Nous possédons plus d'informations concernant les homomorphismes avec listes que les homomorphismes en général. On sait en particulier que la conjecture de dichotomie est vraie pour les problèmes d'homomorphismes avec listes [7]. Ce résultat s'appuie sur les notions algébriques dont nous avons parlé précédemment.

Théorème 1.85 ([7]). *Soit $\mathbf{A} = (A, \Gamma)$ une structure relationnelle conservative. Le problème $HOM(\mathbf{A})$ est tractable si et seulement si pour tout sous-ensemble à deux éléments $B \subseteq V(\mathbf{A})$ (on suppose que $B = \{0, 1\}$) il existe une opération $f \in Pol(\Gamma)$ telle que f restreinte aux éléments de B est*

- une opération de semi-treillis ; ou
- une opération majorité ; ou
- une opération de Mal'tsev.

Dans tout autre cas, $HOM(\mathbf{A})$ est intractable.

Ce théorème prouve l'existence de la dichotomie sur une large classe de problèmes naturels. L'article de Bulatov [7] décrit un algorithme résolvant les cas tractables. Ce résultat présente l'inconvénient d'exprimer des conditions sur les polymorphismes. Dans nombre de cas, il serait plus confortable et naturel de parvenir à exprimer ces conditions au moyen des relations mises à disposition par la structure relationnelle qu'on étudie.

1.5.6 Graphes

Le problème d'homomorphismes avec listes pour les graphes non-orientés est dichotomique [7]. On peut se poser deux questions. En premier lieu, quelles sont les propriétés que les graphes doivent satisfaire pour être tractables ? On parle ici de propriétés exprimables dans le langage de la théorie des graphes, sans avoir besoin de passer par les polymorphismes et leur machinerie algébrique. En second lieu, quelles sont les différentes classes de complexité auxquelles appartiennent les problèmes associés aux graphes tractables, comment peut-on les caractériser ?

Feder, Hell et Huang [25] ont caractérisés les graphes engendrant des problèmes d'homomorphisme avec listes tractables en étudiant certains types de graphes appelés graphes bi-arcs. Le problème d'homomorphisme avec listes sur les graphes est tractable si le graphe est bi-arc, intractable sinon.

Egri, Krokhn, Larose et Tesson [20] ont détaillé ce résultat et arrivent à une caractérisation des graphes avec listes engendrant des problèmes dans L . Cette caractérisation est exprimée par l'interdiction de certains sous-graphes induits. Si ces sous-graphes sont présents, alors le problème d'homomorphisme est NL-complet ou est NP-complet.

On a donc une description des graphes avec listes engendrant un problème NP-complet, une description de ceux engendrant un problème dans L , et, par conséquent, une description implicite de ceux engendrant un problème dans NL. La description des problèmes dans L est de plus affinée pour distinguer les problèmes appartenant à FO [20].

1.5.7 Digraphes

Comme pour la dichotomie du problème d'homomorphisme concernant les graphes, le cas orienté semble plus complexe que le cas non-orienté. Hell et Rafiey [30] ont caractérisé la dichotomie en utilisant le concept de triplets astéroïdaux orientés. Dans ce contexte, le théorème 1.85 peut être raffiné.

Théorème 1.86 ([30]). *Soit \mathbf{G} un digraphe. Le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ est tractable si et seulement si pour tout sous-ensemble à deux éléments $B \subseteq V(\mathbf{A})$ il existe un polymorphisme f tel que f restreint aux éléments de B est*

- *une fonction semi-treillis ; ou*
- *une fonction majorité.*

Dans tout autre cas, $HOM(\mathbf{A})$ est intractable.

La caractérisation fine de la complexité des problèmes tractables est encore à faire.

CHAPITRE 2

DIGRAPHERS AVEC LISTES ET PROBLÈMES D'HOMOMORPHISME DANS FO

La dichotomie du problème d'homomorphisme appliqué aux digraphes avec listes découle, comme pour toute structure conservative, du résultat de Bulatov [7].

Hell et Rafiey [30] ont caractérisé les digraphes avec liste engendrant des problèmes d'homomorphisme tractables.

Il semble naturel de tenter de reproduire les résultats de [20] dans le cas orienté et d'établir une classification qui séparerait les différents problèmes tractables parmi les classes FO, L, NL et P.

L'objet de ce chapitre est de caractériser l'ensemble des problèmes tractables qui sont dans FO, intuitivement les plus simples parmi ces problèmes.

2.1 Caractérisation de problèmes dans FO

Commençons par définir la notion de démantèlement, centrale dans la caractérisation des problèmes dans FO.

Définition 2.1. Soit $\mathbf{A} = (A, \{R_1, \dots, R_k\})$ une structure relationnelle. Soient u et $v \in V(\mathbf{A})$ tels que $u \neq v$. On dit que u domine v dans \mathbf{A} si pour toute relation R_i de \mathbf{A} , $(v_1, \dots, v_n) \in R_i$, avec $v_j = v$, implique $(u_1, \dots, u_n) \in R_i$, avec $u_j = u$ et $u_l = v_l$ pour tout $l \neq j$. On dit que v est dominé dans \mathbf{A} s'il existe un sommet u tel que u domine v .

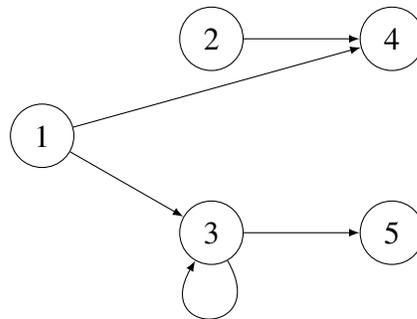


Figure 2.1 – Le sommet 1 domine le sommet 2 ; le sommet 3 domine le sommet 5.

Définition 2.2. Soit \mathbf{A} une structure relationnelle. Soit une séquence $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n = \mathbf{A}'$ telle que, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, \mathbf{A}_i est la sous-structure de \mathbf{A}_{i-1} induite par $V(\mathbf{A}_{i-1}) \setminus \{u\}$, où u est dominé dans \mathbf{A}_{i-1} . On dit alors que \mathbf{A} se démantèle à \mathbf{A}' .

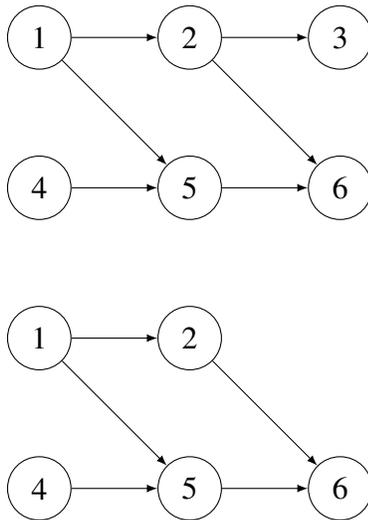
Démanteler \mathbf{A} à \mathbf{A}' consiste donc à enlever successivement des sommets dominés jusqu'à ne garder que le sous-ensemble $V(\mathbf{A}')$. Notons qu'un sommet qui n'est pas dominé dans \mathbf{A} peut l'être dans un sous-graphe induit de \mathbf{A} .

Notons qu'un sommet initialement non dominé peut le devenir après quelques étapes du processus de démantèlement.

Exemple 2.3. Soit un graphe

$$\mathbf{G} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 6), (4, 5), (5, 6)\}).$$

Les sommets 3 et 4 sont les seuls sommets dominés (respectivement par 6 et 1). Après



suppression du sommet 3, le sommet 2 est dominé par le sommet 5.

L'étude des problèmes appartenant à FO est grandement facilitée par le théorème suivant :

Théorème 2.4 ([39]). Soit une structure relationnelle \mathbf{B} . Le problème $HOM(\mathbf{B})$ appartient à FO si et seulement si il existe une image endomorphe de \mathbf{B} dont le carré se démantèle à la diagonale.

Ce théorème présente un inconvénient de taille : il faut trouver une image endomorphe adéquate ou prouver qu'elle n'existe pas. Tester cette condition est un problème NP-complet, ce qui ne nous avance guère. L'avantage de considérer des graphes avec listes est ici immense : un graphe avec listes est nécessairement un noyau, par conséquent toute image endomorphe d'un graphe avec listes est le graphe lui-même. Un corollaire immédiat de ce théorème est alors :

Corollaire 2.5. *Soit \mathbf{H}_L un graphe avec listes. Le problème $HOM(\mathbf{H}_L)$ appartient à FO si et seulement si \mathbf{H}_L^2 se démantèle à sa diagonale.*

Dans le cas de structures noyaux, le démantèlement est un critère simple permettant de caractériser les problèmes d'homomorphismes appartenant à FO. De plus, sa mise en oeuvre ne nécessite qu'un temps polynomial. Toutefois, cette seule caractérisation est insatisfaisante. En effet, le démantèlement ne dit rien de la structure du graphe elle-même. On voudrait une caractérisation qui décrit la forme des graphes avec listes en utilisant le vocabulaire de la théorie des graphes.

2.1.1 Observations générales

Observation 2.6. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe avec listes. Soit (a, b) un sommet de \mathbf{G}_L^2 . Si le sommet (a, b) est dominé, alors il l'est par (a, a) ou (b, b) .*

Démonstration. Par définition de \mathbf{G}_L^2 , l'ensemble

$$A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

est une des relations de \mathbf{G}_L^2 . Puisque le sommet (a, b) satisfait A , alors tout sommet dominant (a, b) doit également satisfaire la relation A . Ceci implique que le sommet (a, b) ne peut être dominé que par (a, a) , (b, b) ou (b, a) . Si (a, b) est dominé par (a, a) ou (b, b) , alors l'énoncé est trivialement satisfait.

Supposons que le sommet (b, a) domine le sommet (a, b) . Alors, pour tout $(c, d) \in V(\mathbf{G}_L^2)$ tel que $((c, d), (a, b)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$, on a $((c, d), (b, a)) \in \mathbf{G}_L^2$. Par conséquent, $((c, d), (a, a)), ((c, d), (b, b)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$. De même, pour tout $(c, d) \in V(\mathbf{G}_L^2)$ tel que $((a, b), (c, d)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$, on a $((b, a), (c, d)) \in \mathbf{G}_L^2$, d'où $((c, d), (a, a)), ((c, d), (b, b)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$. Par conséquent, si (b, a) domine (a, b) , alors (a, a) et (b, b) le dominent également. \square

De façon équivalente, cela signifie que si un sommet (a, b) n'est dominé ni par (a, a) ni par (b, b) , alors il n'est pas dominé du tout. C'est surtout sous cette dernière forme que nous utiliserons cette observation.

Théoreme 2.7. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe avec listes. Si \mathbf{G}_L^2 se démantèle à un sous-graphe \mathbf{H} dont aucun sommet n'est dominé, alors toute séquence de démantèlement de \mathbf{G}_L^2 à un sous-graphe \mathbf{H}' dont aucune sommet n'est dominé est telle que $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$.*

Démonstration. On sait que si un sommet (a, b) est dominé dans \mathbf{G}_L , alors il est dominé par (a, a) ou (b, b) . Autrement dit, $N_{\mathbf{G}_L}^*(a, b) \subseteq N_{\mathbf{G}_L}^*(a, a)$ ou $N_{\mathbf{G}_L}^*(a, b) \subseteq N_{\mathbf{G}_L}^*(b, b)$, avec $*$ $\in \{-, +\}$.

Soit \mathbf{G}'_L un sous-graphe de \mathbf{G}_L induit par un sous-ensemble E de $V(\mathbf{G}_L) \setminus (\{(x, x) \mid x \in V(\mathbf{G}_L)\} \cup \{(a, b)\})$. Il est facile de voir que si (a, b) est dominé dans \mathbf{G}_L , alors (a, b) est dominé dans \mathbf{G}'_L .

Soit u_1, \dots, u_n les sommets démantelés successivement au cours d'une séquence de démantèlement de \mathbf{G}_L à \mathbf{H}_1 , où \mathbf{H}_1 ne contient aucun sommet dominé. Soit v_1, \dots, v_m les sommets démantelés successivement au cours d'une séquence de démantèlement de \mathbf{G}_L à \mathbf{H}_2 , où \mathbf{H}_2 ne contient aucun sommet dominé.

On montre par induction que $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \{u_1, \dots, u_n\}$.

Puisque v_1 est le premier sommet démantelé dans la deuxième séquence, alors v_1 est dominé dans \mathbf{G}_L . Par conséquent, si $v_1 \notin \{u_1, \dots, u_n\}$, alors v_1 est dominé dans \mathbf{H}_1 , ce qui est impossible par hypothèse. Donc $v_1 \in \{u_1, \dots, u_n\}$.

Supposons que $v_i \in \{u_1, \dots, u_n\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Montrons que v_{k+1} appartient à $\{u_1, \dots, u_n\}$. Supposons que v_{k+1} n'appartienne pas à $\{u_1, \dots, u_n\}$. Puisque v_{k+1} est éliminé au cours d'une séquence de démantèlement, alors v_{k+1} est dominé dans le sous-graphe de \mathbf{G}_L induit par $V(\mathbf{G}_L) - \{v_1, \dots, v_k\}$. Puisque $\{v_1, \dots, v_k\}$ est inclus dans $\{u_1, \dots, u_n\}$, alors v_{k+1} est également dominé dans le sous-graphe induit par $V(\mathbf{G}_L) - \{u_1, \dots, u_n\}$, c'est à dire \mathbf{H}_1 . Ceci est impossible par hypothèse. Par conséquent, $v_{k+1} \in \{u_1, \dots, u_n\}$. Donc, on a $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \{u_1, \dots, u_n\}$.

En raisonnant de manière analogue, on montre que $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \{v_1, \dots, v_m\}$. On a donc $\{u_1, \dots, u_n\} = \{v_1, \dots, v_m\}$, d'où $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$. \square

Autrement dit, dans le cas particulier du démantèlement du carré d'un digraphe avec listes, on ne peut pas faire de mauvais choix au cours d'une séquence de démantèlement, toutes les possibilités de suppression de sommets dominés restent toujours accessibles. La procédure de démantèlement peut donc être mise en oeuvre de façon gloutonne, en

choisissant arbitrairement le prochain sommet à démanteler. Notons que ceci n'est pas vrai dans le cas général.

Exemple 2.8. Dans les graphes présentés figure 2.2, les sommets 2 et 3 sont dominés respectivement par les sommets 3 et 2. La suppression d'un de ces sommets produit un sous-graphe induit dans lequel l'autre sommet n'est plus dominé.

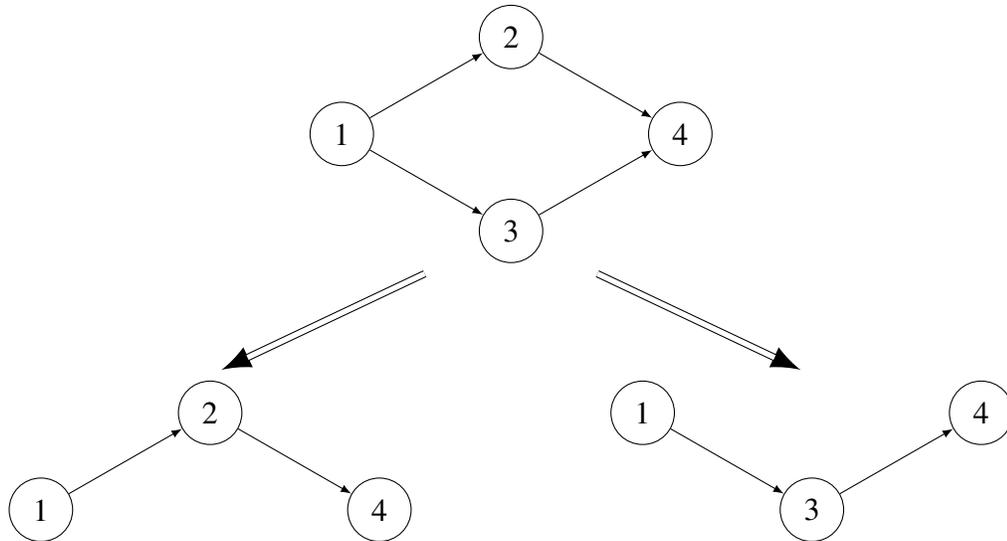


Figure 2.2 – Séquences de démantèlement menant à des graphes distincts.

Intéressons-nous maintenant à une structure particulière.

Définition 2.9. Soit G un digraphe. Soient $a, b, c, d \in V(G)$ tels que $(a, b), (c, d) \in E(G_L)$ et $(a, d), (c, b) \notin E(G_L)$. On appelle (a, b) et (c, d) des arcs séparés (figure 2.3).

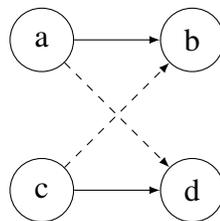


Figure 2.3 – Arcs séparés.

Notons que rien n'oblige les sommets a, b, c, d à être distincts (figure 2.4).

L'absence d'arcs séparés dans un digraphe, qui pourrait sembler anodine, impose en fait une contrainte assez forte sur la forme du digraphe.

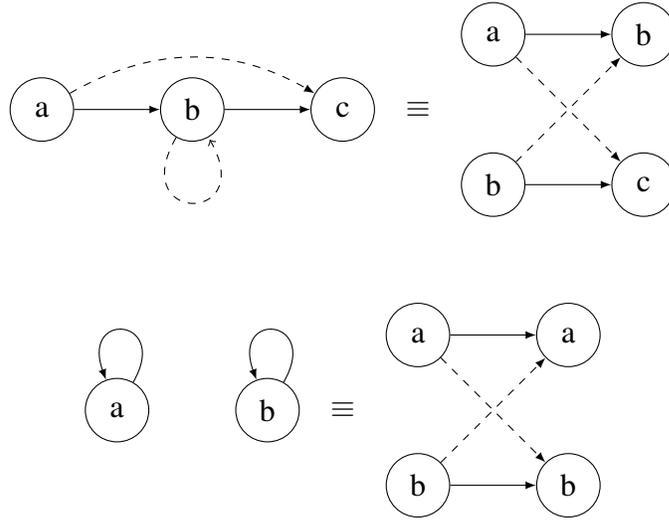


Figure 2.4 – Arcs séparés à sommets non distincts.

Lemme 2.10. Soit \mathbf{G} un digraphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. \mathbf{G} ne contient pas d'arc séparés ;
2. pour tous sommets $u, v \in V(\mathbf{G})$, on a $N^+(u) \subseteq N^+(v)$ ou $N^+(v) \subseteq N^+(u)$;
3. pour tous sommets $u, v \in V(\mathbf{G})$, on a $N^-(u) \subseteq N^-(v)$ ou $N^-(v) \subseteq N^-(u)$.

Démonstration. (1 \Rightarrow 2) Supposons qu'il existe u et v tels que $N^+(u) \not\subseteq N^+(v)$ et $N^+(v) \not\subseteq N^+(u)$. Il existe donc $u' \in N^+(u)$ tel que $u' \notin N^+(v)$ et $v' \in N^+(v)$ tel que $v' \notin N^+(u)$. On a donc $(u, u'), (v, v') \in E(\mathbf{G})$ et $(v, u'), (u, v') \notin E(\mathbf{G})$. Les arcs (u, u') et (v, v') sont donc séparés.

(2 \Rightarrow 1) Supposons qu'il existe $a, b, c, d \in V(\mathbf{G})$ tels que $(a, b), (c, d) \in E(\mathbf{G})$ et $(a, d), (b, c) \notin E(\mathbf{G})$. On a alors $b \in N^+(a)$, $d \notin N^+(a)$ et $d \in N^+(c)$, $b \notin N^+(c)$. Par conséquent, $N^+(a)$ n'est pas inclus dans $N^+(c)$ et $N^+(c)$ n'est pas inclus dans $N^+(a)$.

On prouve de manière similaire que 1 \Leftrightarrow 3. \square

En d'autres termes, tous les voisinages d'un digraphe sans arcs séparés sont comparables par inclusion. L'inclusion étant une relation transitive, l'ensemble des voisinages d'un tel digraphe peut être ordonné par inclusion. Cette propriété inspire la définition suivante.

Définition 2.11. Soit \mathbf{G} un digraphe. On dit que \mathbf{G} est télescopique s'il ne contient pas d'arcs séparés.

Notons qu'un digraphe télescopique à n sommets peut être représenté par une matrice d'adjacence de dimension $n \times n$ telle que pour tout $a_{i,j}$ tel que $a_{i,j} = 1$, on a $a_{k,j} = 1$ pour tout $k \geq i$.

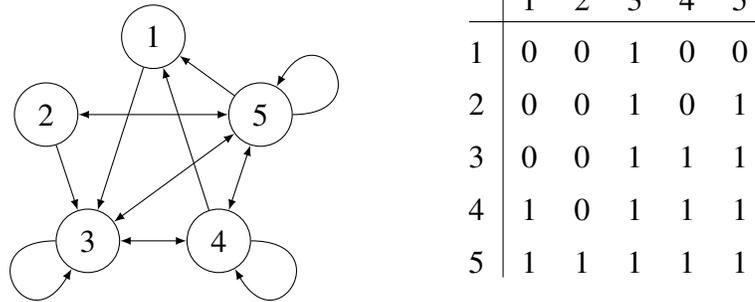


Figure 2.5 – Graphe télescopique.

Observation 2.12. Soit \mathbf{G}_L un digraphe avec listes. Si \mathbf{G}_L^2 est démantelable à sa diagonale, alors \mathbf{G}_L est télescopique.

Démonstration. Soient (a, b) et (c, d) des arcs séparés dans \mathbf{G}_L . On a $((a, c), (b, d)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$ et $((a, a), (b, d)), ((c, c), (b, d)) \notin E(\mathbf{G}_L^2)$. Le sommet (a, c) ne deviendra dominé que si on élimine le sommet (b, d) au cours du démantèlement. On a $((a, c), (b, d)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$ et $((a, c), (b, b)), ((a, c), (d, d)) \notin E(\mathbf{G}_L^2)$. Le sommet (b, d) ne deviendra dominé que si on élimine le sommet (a, c) au cours du démantèlement.

Les sommets (a, c) et (b, d) ne deviendront donc jamais dominés au cours de la procédure de démantèlement, ce qui interdit de démanteler à la diagonale de \mathbf{G}_L^2 . \square

Les arcs séparés constituent donc une première obstruction au démantèlement.

2.1.2 Digraphes réflexifs

Observation 2.13. Soit \mathbf{G}_L un digraphe avec listes tel que \mathbf{G}_L^2 se démantèle à sa diagonale. Soient $a, b \in V(\mathbf{G}_L)$ tels que $a \neq b$, $(a, a), (b, b) \in E(\mathbf{G}_L)$, alors $(a, b), (b, a) \in E(\mathbf{G}_L)$.

Démonstration. L'observation 2.12 nous permet d'affirmer (a, b) ou (b, a) appartient à \mathbf{G}_L (figure 2.4). Sans perte de généralité, supposons que $(a, b) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(b, a) \notin E(\mathbf{G}_L)$. On a alors $((a, b), (a, b)) \in E(\mathbf{G}_L^2)$. Puisque $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO, \mathbf{G}_L^2

se démantèle à sa diagonale. Soit \mathbf{H} le graphe obtenu par démantèlement de \mathbf{G}_L^2 tel que la prochaine étape du processus de démantèlement est la suppression de (a, b) . Cela implique que (a, a) ou (b, b) domine (a, b) dans \mathbf{H} . Le sommet (a, a) ne domine pas (a, b) , puisque $(b, a) \notin E(\mathbf{G}_L)$ implique $((a, b), (a, a)) \notin E(\mathbf{G}_L^2)$. Le sommet (b, b) ne domine pas (a, b) , puisque $(b, a) \notin E(\mathbf{G}_L)$ implique $((b, b), (a, b)) \notin E(\mathbf{G}_L^2)$. Par conséquent, aucun sommet ne domine (a, b) dans \mathbf{H} , ce qui est impossible par hypothèse. Donc, on doit avoir $(b, a) \in E(\mathbf{G}_L)$. \square

Corollaire 2.14. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe réflexif avec listes. Si $HOM(\mathbf{G}_L) \in FO$, alors \mathbf{G}_L est une clique.*

Démonstration. L'observation 2.13 implique que toute paire de sommets u, v est telle que $(u, v), (v, u) \in E(\mathbf{G}_L)$. \square

Théorème 2.15. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe réflexif avec listes. Le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO si et seulement si \mathbf{G}_L est une clique.*

Démonstration. (\Rightarrow) Le corollaire 2.14 prouve que si $HOM(\mathbf{G}_L)$ est dans FO, alors \mathbf{G}_L est une clique réflexive.

(\Leftarrow) Supposons que \mathbf{G}_L est une clique réflexive avec listes. Le graphe \mathbf{G}_L^2 est donc également une clique réflexive. Tout sommet (u, v) de \mathbf{G}_L^2 , avec $u \neq v$ est alors dominé par (u, u) . Dans ces conditions, le théorème 2.7 garantit que \mathbf{G}_L^2 se démantèle à sa diagonale. Par conséquent, le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO (théorème 2.4). \square

2.1.2.1 Détection

Définition 2.16. *Le problème de détection des digraphes \mathbf{G} réflexifs tels que $HOM(\mathbf{G}_L) \in FO$ est défini comme suit :*

Problème : REFLEXIF-FO
Entrée : un digraphe réflexif \mathbf{G}
Sortie : VRAI si \mathbf{G} est une clique, FAUX sinon.

Théorème 2.17. *Le problème REFLEXIF-FO appartient à FO.*

Démonstration. Vérifier qu'un digraphe \mathbf{G} est une clique revient à constater que pour toute paire de sommets u, v , il existe des arcs (u, v) et (v, u) dans \mathbf{G} . Transposée en

logique du premier ordre, cette vérification s'écrit :

$$(\forall u, v)[E(u, v) \wedge E(v, u)].$$

□

2.1.3 Digraphes irréflexifs

Observation 2.18. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe irréflexif avec listes. Si \mathbf{G}_L est télescopique, alors pour tout $a, b, c \in V(\mathbf{G}_L)$ tels que $(a, b), (b, c) \in E(\mathbf{G}_L)$, on a $(a, c) \in E(\mathbf{G}_L)$.*

Démonstration. Trivialement, si $(a, c) \notin E(\mathbf{G}_L)$, alors on a $(a, b), (b, c) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(a, c), (b, b) \notin E(\mathbf{G}_L)$. Les arcs (a, b) et (b, c) sont donc séparés. □

L'absence d'arcs séparés entraîne donc la transitivité de la relation de voisinage dans les digraphes irréflexifs.

Corollaire 2.19. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe irréflexif télescopique avec listes. Il n'existe pas de cycle orienté dans \mathbf{G}_L .*

Démonstration. S'il existait un cycle dans \mathbf{G}_L , alors, par transitivité, il existerait nécessairement une boucle sur un des sommets, ce qui est impossible puisque \mathbf{G}_L est irréflexif. □

Proposition 2.20. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe irréflexif télescopique avec listes. Le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO.*

Démonstration. Puisque \mathbf{G}_L est télescopique, alors il ne contient pas de cycle orienté (corollaire 2.19). Par conséquent, \mathbf{G}_L^2 ne contient pas non plus de cycle orienté. Supposons qu'il ne soit pas possible de démanteler \mathbf{G}_L^2 à sa diagonale. Soit \mathbf{H} le plus petit graphe qu'on puisse obtenir à partir de \mathbf{G}_L^2 en suivant la procédure de démantèlement. Le théorème 2.7 garantit que ce \mathbf{H} est unique. Puisque \mathbf{G}_L^2 ne contient pas de cycle orienté, alors \mathbf{H} n'en contient pas non plus. Par conséquent, il doit exister un sommet $(x, y) \in V(\mathbf{H})$, avec $x \neq y$ tel qu'il n'existe aucun sommet $(z, t) \in V(\mathbf{H})$ tel que $((x, y), (z, t)) \in E(\mathbf{H})$. Puisque (x, y) est un sommet de \mathbf{H} , alors il n'est pas dominé. Cela implique qu'il existe des sommets (u, v) et (z, t) dans $V(\mathbf{H})$ tels que $((u, v), (x, y)), ((z, t), (x, y)) \in E(\mathbf{H})$ et $((u, v), (x, x)), ((u, v), (y, y)) \notin E(\mathbf{H})$. Ceci est impossible puisqu'il n'existe pas d'arcs séparés dans \mathbf{G}_L (voir figure 2.6).

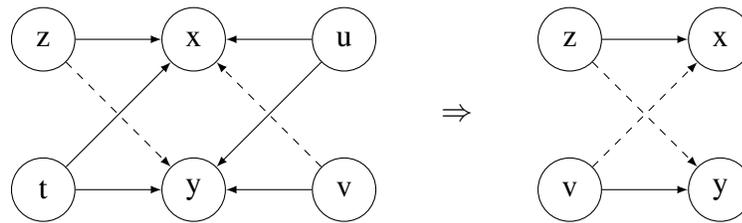


Figure 2.6 – Mise en évidence d'arcs séparés.

Par conséquent, (x, y) doit être démantelable, donc \mathbf{H} n'est pas minimal, ce qui est impossible par hypothèse. Donc, la procédure de démantèlement doit aboutir à la diagonale de \mathbf{G}_L^2 . D'après le théorème [39], $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient donc à FO. \square

L'observation 2.12 et la proposition 2.20 permettent de conclure.

Corollaire 2.21. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe irréflexif avec listes. Le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO si et seulement si \mathbf{G}_L est télescopique.*

La caractérisation étant établie, on peut s'intéresser au méta-problème, à savoir la reconnaissance des digraphes irréflexifs avec listes \mathbf{G}_L tels que $HOM(\mathbf{G}_L)$ est dans FO.

2.1.3.1 Détection

Définition 2.22. *Le problème de détection des digraphes \mathbf{G} irréflexifs tels que $HOM(\mathbf{G}_L) \in FO$ est défini comme suit :*

Problème : IRREFLEXIF-FO
Entrée : un digraphe irréflexif \mathbf{G}
Sortie : VRAI si \mathbf{G} est télescopique, FAUX sinon.

Définition 2.23. *Le problème de détection d'arcs séparés dans un digraphe est défini comme suit :*

Problème : TELESCOPIQUE
Entrée : un digraphe \mathbf{G}
Sortie : VRAI si \mathbf{G} est télescopique, FAUX sinon.

Théorème 2.24. *Le problème TELESCOPIQUE appartient à FO.*

Démonstration. Soit \mathbf{G} un digraphe, vérifier qu'il existe des arcs séparés dans \mathbf{G} revient à vérifier, pour toute paire de sommet $(a, b), (c, d)$, l'existence de l'arc (a, d) ou de l'arc (c, b) . Transposée en logique du premier ordre, cette vérification s'écrit :

$$(\forall a, b, c, d)[(E(a, b) \wedge E(c, d)) \rightarrow (E(a, d) \vee E(c, b))].$$

□

Théorème 2.25. *Le problème IRREFLEXIF-FO appartient à FO.*

Démonstration. Le problème IRREFLEXIF-FO est en fait le problème TELESCOPIQUE lorsqu'on restreint les entrées aux digraphes irréflexifs. Or sait que le problème TELESCOPIQUE appartient à FO. □

Corollaire 2.26. *Soit \mathbf{G} un digraphe irréflexif. Détecter que $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO est un problème FO.*

Démonstration. Ceci découle directement de la définition de IRREFLEXIF-FO, du corollaire 2.21 et du théorème 2.25 □

2.1.4 Cas général

On s'intéresse maintenant au cas général : on ne fait plus d'hypothèse sur la présence ou non de boucles dans le digraphe. Ceci pose un nouveau problème. Il serait naturel d'utiliser une preuve similaire à celle employée pour caractériser le cas irréflexif. Toutefois, un argument crucial ne tient plus dans le cas général : l'absence de cycle orienté. En effet, si on autorise des sommets à porter des boucles, l'observation 2.18 sur la transitivité de la relation de voisinage n'est plus valide. On ne peut alors plus invoquer l'absence de cycle orienté dont on fait usage dans la preuve de la proposition 2.20. Si l'esprit de la preuve reste le même, il est nécessaire de procéder à quelques aménagements.

En premier lieu, constatons l'existence d'autres obstructions que les arcs séparés.

Définition 2.27. *Soit \mathbf{G} un digraphe. On appelle bicycle entravant un ensemble de sommets $a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k$ de \mathbf{G} , avec $k \geq 0$, tels que, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$,*

$$(a_i, a_{i+1}), (b_i, b_{i+1}), (a_i, b_{i+1}) \in E(\mathbf{G}_L)$$

$$(b_i, a_{i+1}) \notin E(\mathbf{G}_L)$$

(les variables sont indicées modulo $k + 1$). On appelle les sommets a_0, \dots, a_k la partie haute du bicycle. On appelle les sommets b_0, \dots, b_k la partie basse du bicycle.

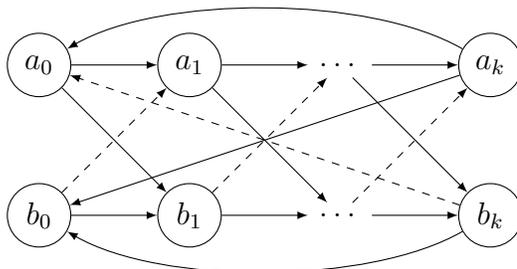


Figure 2.7 – Bicycle entravant.

Observation 2.28. Soit G_L un digraphe avec listes. S'il existe un bicycle entravant dans G_L , alors G_L^2 ne se démantèle pas à sa diagonale.

Démonstration. Soient $a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k$ des sommets formant un bicycle entravant, où a_0, \dots, a_k forment la partie haute et b_0, \dots, b_k forment la partie basse. Supposons que G_L^2 se démantèle. Soit (a_i, b_i) un sommet de G_L^2 . D'après l'observation 2.6, (a_i, b_i) est dominé par (a_i, a_i) ou (b_i, b_i) . Or, $((b_i, b_i), (a_{i+1}, b_{i+1})) \notin E(G_L^2)$ et $((a_{i-1}, b_{i-1}), (a_i, a_i)) \notin E(G_L^2)$. Par conséquent, on ne peut pas démanteler (a_i, b_i) sans démanteler au préalable (a_{i-1}, b_{i-1}) ou (a_{i+1}, b_{i+1}) . Puisque ce raisonnement est valable pour tout i , on ne peut en fait pas démanteler (a_i, b_i) . \square

Il est également possible de prouver cette observation en utilisant des outils algébriques.

Définition 2.29. Une variété est dite $k + 1$ -permutable s'il existe une famille de k termes f_1, \dots, f_k sur cette variété vérifiant, pour tout x, y :

$$\begin{aligned} y &= f_1(x, x, y) \\ f_i(x, y, y) &= f_{i+1}(x, x, y) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, k-1\} \\ f_k(x, y, y) &= y. \end{aligned}$$

Théorème 2.30 ([31]). Une variété \mathcal{V} est k -permutable si et seulement si $\text{Typ}(\mathcal{V}) \subseteq \{2, 3\}$.

Théorème 2.31 ([11, 31]). Soit \mathcal{V} une variété. S'il existe un terme majorité, alors \mathcal{V} omet les types 1, 2 et 5.

Démonstration. Si un tel terme existe, le théorème 12.3 de [11] implique que \mathcal{V} est congruence distributive. Le théorème 9.11 de [31] montre que la congruence distributive implique l'omission des types 1, 2 et 5. \square

Lemme 2.32 ([54]). *Soit \mathbb{A} une algèbre idempotente finie. Si i appartient à $\text{Typ}(\mathcal{V}(\mathbb{A}))$, alors il existe $j \leq i$ et une algèbre strictement simple de type j dans le plus petit ensemble contenant \mathbb{A} clos par sous-algèbre et image homomorphe.*

La relation \leq est ici définie par rapport à l'ordre représenté figure 1.9.

Lemme 2.33 ([30]). *Soit \mathbf{G} un digraphe. Si la variété associée à \mathbf{G}_L admet le type 1 ou le type 2, alors $\text{HOM}(\mathbf{G})$ est NP-complet.*

Démonstration. Si $\text{HOM}(\mathbf{G}_L)$ n'est pas NP-complet, alors la variété associée \mathbf{G}_L omet le type 1 (théorème 1.78). Puisque \mathbf{G}_L est une structure avec listes, alors l'algèbre \mathbb{A} associée à \mathbf{G}_L est conservative. Ceci implique que tout sous-ensemble de l'univers de \mathbb{A} induit une sous-algèbre de \mathbb{A} . Par conséquent, une algèbre strictement simple dans $\mathcal{V}(A)$ possède nécessairement un univers de taille 2.

Or on sait que si $\text{HOM}(\mathbf{G}_L)$ est tractable, alors pour tout sous-ensemble $\{u, v\}$ des sommets $V(\mathbf{G}_L)$, il existe un polymorphisme f tel que $f|_{u,v}$ est une fonction semi-treillis ou majorité (théorème 1.86).

Par conséquent, toute sous-algèbre de \mathbb{A} à deux éléments admet une opération semi-treillis ou majorité, ce qui implique qu'elle est de type 3 ou 4 (théorème 2.31).

S'il existait une algèbre dans $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ qui soit de type 2, alors le lemme 2.32 impliquerait l'existence dans $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ d'une algèbre à deux éléments de type 1 ou 2, ce qui n'est pas possible. La variété associée à \mathbf{G}_L omet donc le type 2. \square

Observation 2.34. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe avec listes. S'il existe un bicycle entravant dans \mathbf{G}_L , alors, pour tout $k \geq 3$, la variété associée à \mathbf{G}_L n'est pas k -permutable.*

Démonstration. Supposons que \mathbf{G}_L contienne un bicycle entravant tel que les sommets x_0, \dots, x_k forment sa partie haute et y_0, \dots, y_k sa partie basse. Supposons qu'il existe k polymorphismes f_1, \dots, f_k d'arité 3 tels que, pour tout $x, y \in V(\mathbf{G})$:

$$\begin{aligned} y &= f_1(x, x, y) \\ f_i(x, y, y) &= f_{i+1}(x, x, y) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, k-1\} \\ f_k(x, y, y) &= x \end{aligned}$$

On a donc $f_1(x_0, x_0, y_0) = y_0$. On prouve par induction que $f_1(x_i, y_i, y_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Si $i = 1$, alors puisque $(x_0, x_1), (x_0, y_1), (y_0, y_1) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(y_0, x_1) \notin E(\mathbf{G}_L)$, on doit avoir $f_1(x_1, y_1, y_1) = y_1$. Si $i > 1$, alors par hypothèse d'induction, on a $f_1(x_{i-1}, y_{i-1}, y_{i-1}) = y_{i-1}$. Puisque $(x_{i-1}, x_i), (x_{i-1}, y_i), (y_{i-1}, y_i) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(y_{i-1}, x_i) \notin E(\mathbf{G}_L)$, on doit avoir $f_1(x_i, y_i, y_i) = y_i$.

Soit un polymorphisme $f_2 : V(\mathbf{G}_L^3) \rightarrow V(\mathbf{G}_L)$ tel que $f_1(a, b, b) = f_2(a, a, b)$, pour tout a, b . On a $f_2(x_0, x_0, y_0) = y_0$.

En utilisant le même raisonnement pour f_2, \dots, f_k , on conclut que $f_k(x_0, y_0, y_0) = y_0$, ce qui est impossible par hypothèse.

Par conséquent, les polymorphismes f_1, \dots, f_k ne peuvent pas exister et \mathbf{G}_L n'est k -permutable pour aucun $k \geq 3$. \square

Corollaire 2.35. *Soit \mathbf{G} un digraphe. S'il existe un bicycle entravant dans \mathbf{G} , alors le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ n'appartient pas à FO.*

Démonstration. Supposons que $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO. Donc, $HOM(\mathbf{G}_L)$ n'est pas un problème difficile pour L [34]. Par conséquent, la variété \mathcal{V} associée à \mathbf{G}_L omet les types 1, 2, 4 et 5 (lemme 2.33, théorème 1.78). \square

La structure circulaire du bicycle entravant ne constitue pas une surprise compte tenu des remarques précédentes concernant la présence possible de cycles orientés dans le cas général. Il était prévisible qu'apparaissent de telles structures.

On s'emploie maintenant à prouver que les arcs séparés et les bicycles entravants caractérisent totalement les digraphes avec listes dont le problème d'homomorphisme appartient à FO. L'argument s'appuie sur une série d'observations relativement simples.

Observation 2.36. *Soit \mathbf{G}_L un digraphe télescopique avec listes tel que \mathbf{G}_L^2 n'est pas démantelable à sa diagonale. Soit \mathbf{H} un sous-graphe induit de \mathbf{G}_L^2 tel qu'aucun sommet de \mathbf{H} n'est dominé et \mathbf{H} est différent de la diagonale de \mathbf{G}_L^2 . Alors, il n'existe pas $(a, b), (c, d), (e, f) \in V(\mathbf{G})$ tels que :*

$$\begin{aligned} &((c, d), (a, b)), ((a, b), (e, f)) \in E(\mathbf{H}) \text{ et} \\ &((c, d), (a, a)), ((a, a), (e, f)) \notin E(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

Démonstration. Puisque \mathbf{G}_L ne contient pas d'arcs séparés, alors on a nécessairement $(c, b), (b, e) \in E(\mathbf{G}_L)$ (voir figure 2.8). Par conséquent, on a $((c, d), (b, b)), ((b, b), (e, f)) \in E(\mathbf{H})$. Il doit alors exister un sommet $(g, h) \in V(\mathbf{H})$ tel que :

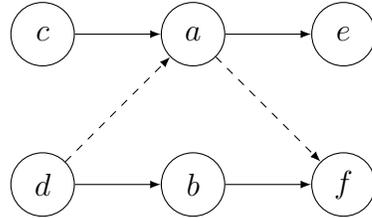


Figure 2.8 – Existence des sommets c , d , e et f .

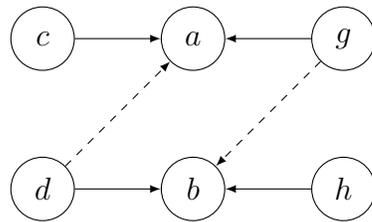


Figure 2.9 – Situation 1.

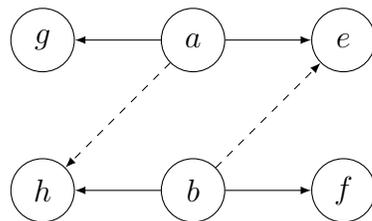


Figure 2.10 – Situation 2.

1. $((g, h), (a, b)) \in E(\mathbf{H})$ et $((g, h), (b, b)) \notin E(\mathbf{H})$; ou
2. $((a, b), (g, h)) \in E(\mathbf{H})$ et $((b, b), (g, h)) \notin E(\mathbf{H})$.

Si tel n'était pas le cas, alors le sommet (b, b) dominerait le sommet (a, b) dans \mathbf{H} , ce qui n'est pas possible puisque, par hypothèse, aucun sommet de \mathbf{H} ne peut être démantelé.

Si (g, h) est tel que $((g, h), (a, b)) \in E(\mathbf{H})$ et $((g, h), (b, b)) \notin E(\mathbf{H})$, alors on a $((g, h), (a, b)), ((c, d), (a, b)) \in E(\mathbf{G})$ et $((g, h), (b, b)), ((c, d), (a, a)) \notin E(\mathbf{H})$. On se retrouve alors dans le cas illustré figure 2.9, ce qui est impossible puisque \mathbf{G}_L ne contient pas d'arcs séparés.

Si (g, h) est tel que $((a, b), (g, h)) \in E(\mathbf{H})$ et $((b, b), (g, h)) \notin E(\mathbf{H})$, alors on a $((a, b), (g, h)), ((a, b), (e, f)) \in E(\mathbf{H})$ et $((a, a), (e, f)), ((b, b), (g, h)) \notin E(\mathbf{H})$. On se retrouve alors dans le cas de figure 2.10, ce qui est impossible puisque \mathbf{G}_L ne contient pas d'arcs séparés. \square

Observation 2.37. Soit \mathbf{G}_L un digraphe télescopique avec listes tel que \mathbf{G}_L^2 n'est pas démantelable à sa diagonale. Soit \mathbf{H} un sous-graphe induit de \mathbf{G}_L^2 tel qu'aucun sommet de \mathbf{H} n'est démantelable et \mathbf{H} est différent de la diagonale de \mathbf{G}_L^2 . Alors, pour tout sommet (x, y) de \mathbf{H} , avec $x \neq y$, il existe un sommet (z, t) de \mathbf{H} tel que :

- $((x, y), (z, t)) \in E(\mathbf{H})$, $(x, t) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(y, z) \notin E(\mathbf{G}_L)$; ou
- $((x, y), (z, t)) \in E(\mathbf{H})$, $(y, z) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(x, t) \notin E(\mathbf{G}_L)$.

Notons que les deux éventualités sont mutuellement exclusives.

Démonstration. Puisque (x, y) ne se démantèle pas, alors il n'est dominé ni par (x, x) ni par (y, y) . Il existe donc un sommet (a, b) tel que :

- (i) $((x, y), (a, b)) \in E(\mathbf{H})$ et $((x, x), (a, b)) \notin E(\mathbf{H})$; ou
- (ii) $((a, b), (x, y)) \in E(\mathbf{H})$ et $((a, b), (x, x)) \notin E(\mathbf{H})$.

De même, il doit exister un sommet (c, d) tel que :

- (iii) $((x, y), (c, d)) \in E(\mathbf{H})$ et $((y, y), (c, d)) \notin E(\mathbf{H})$; ou
- (iv) $((c, d), (x, y)) \in E(\mathbf{H})$ et $((c, d), (y, y)) \notin E(\mathbf{H})$.

Le cas (i) (figure 2.11) ne peut pas se produire. En effet, $((x, x), (a, b)) \notin E(\mathbf{H})$ implique $(x, b) \notin E(\mathbf{G}_L)$. On a également $(x, a), (y, b) \in E(\mathbf{G}_L)$ et puisque \mathbf{G}_L ne contient pas d'arcs séparés, alors on doit avoir $(y, a) \in E(\mathbf{G}_L)$. On pose alors $x = a$ et $t = b$. Le cas (iii) (figure 2.12) ne peut pas se produire. En effet, $((y, y), (c, d)) \notin E(\mathbf{G})$ implique $(y, c) \notin E(\mathbf{G}_L)$. On a également $(x, c), (y, d) \in E(\mathbf{G}_L)$ et puisque \mathbf{G}_L ne contient pas d'arcs séparés, alors on doit avoir $(x, d) \in E(\mathbf{G}_L)$. On pose alors $z = c$ et $t = d$. Il reste donc à considérer la combinaison (ii) et (iv).

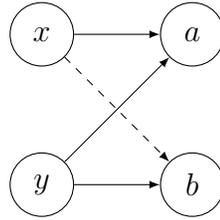


Figure 2.11 – Cas (i).

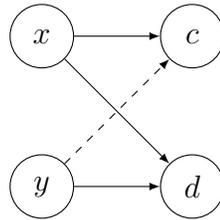


Figure 2.12 – Cas (iii).

Si $((a, b), (x, y)) \in E(\mathbf{H})$ et $((a, b), (x, x)) \notin E(\mathbf{H})$ et $((c, d), (x, y)) \in E(\mathbf{G})$ et $((c, d), (y, y)) \notin E(\mathbf{H})$, alors on est dans le cas 2 de l'observation 2.36 (figure 2.13).

Par conséquent, un sommet (z, t) satisfaisant les conditions de l'énoncé doit exister. \square

Proposition 2.38. Soit \mathbf{G}_L un digraphe télescopique avec listes tel que \mathbf{G}_L^2 ne se démantèle pas à sa diagonale, alors \mathbf{G}_L contient un bicycle entravant.

Démonstration. Soit \mathbf{H} un sous-graphe induit de \mathbf{G}_L^2 tel qu'aucun sommet de \mathbf{H} n'est dominé. Soit (x, y) un sommet de \mathbf{H} , avec $x \neq y$. D'après l'observation 2.37, il existe un sommet (x_1, y_1) de \mathbf{H} tel que :

- (i) $(x, x_1), (y, y_1), (x, y_1) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(y, x_1) \notin E(\mathbf{G}_L)$; ou
- (ii) $(x, x_1), (y, y_1), (y, x_1) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(x, y_1) \notin E(\mathbf{G}_L)$.

Supposons que la proposition (i) soit vraie. On prouve par induction l'existence d'un

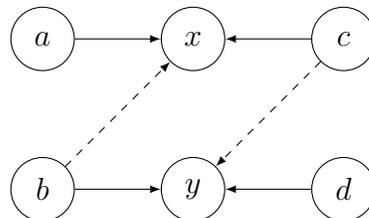


Figure 2.13 – Cas 2 de l'observation 2.36.

chemin $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ de taille $n + 1$ arbitraire tel que

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_0, y_0), \\ (x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+1}), (x_i, y_{i+1}) &\in E(\mathbf{G}_L) \text{ et} \\ (y_i, x_{i+1}) &\notin E(\mathbf{G}_L). \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on sait par hypothèse qu'un tel chemin existe. Supposons qu'un tel chemin existe pour $n \in \{1, \dots, k\}$. Prouvons qu'il en existe également un pour $n = k + 1$. Par hypothèse d'induction, il existe un chemin $(x, y) = (x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ tel que $(x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+1}), (x_i, y_{i+1}) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(y_i, x_{i+1}) \notin E(\mathbf{G}_L)$. D'après l'observation 2.37, il existe (x_{k+1}, y_{k+1}) dans \mathbf{H} tel que :

- (a) $(x_k, x_{k+1}), (y_k, y_{k+1}), (x_k, y_{k+1}) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(y_k, x_{k+1}) \notin E(\mathbf{G}_L)$; ou
- (b) $(x_k, x_{k+1}), (y_k, y_{k+1}), (y_k, x_{k+1}) \in E(\mathbf{G}_L)$ et $(x_k, y_{k+1}) \notin E(\mathbf{G}_L)$.

La situation (b) ne peut pas se produire : il s'agit du cas 3 de l'observation 2.36 (figure 2.14). On a donc la situation (a) et par conséquent, le chemin $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$ respecte les conditions de l'énoncé (figure 2.15). Donc, un tel chemin existe pour tout $n > 0$.

Puisque le graphe \mathbf{G}_L est fini, alors \mathbf{G}_L^2 et \mathbf{H} le sont également. Ce qui signifie que pour un n assez grand, il existe une paire de sommets apparaissant au moins deux fois sur le chemin $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Soit $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$ une telle paire, avec $i < j$. Par définition, les sommets $x_i, \dots, x_j, y_i, \dots, y_j$ forment un bicycle entravant dont la partie haute est constituée des sommets x_i, \dots, x_j et la partie basse des sommets y_i, \dots, y_j (figure 2.16).

En utilisant un raisonnement similaire, on arrive à la même conclusion si la proposition (ii) est vraie. Dans ce cas la partie haute du bicycle sera constituée des sommets y_i, \dots, y_j et sa partie basse des sommets x_i, \dots, x_j (figure 2.17). \square

Théorème 2.39. Soit \mathbf{G}_L un digraphe avec listes, alors \mathbf{G}_L^2 est démantelable à sa dia-

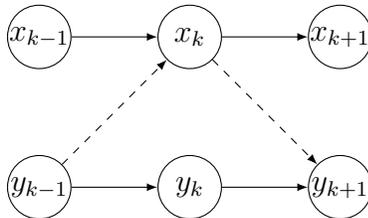


Figure 2.14 – Situation (b) - Cas 3 de l'observation 2.36.

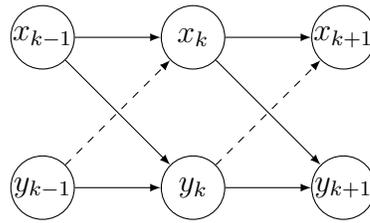


Figure 2.15 – Situation (a).

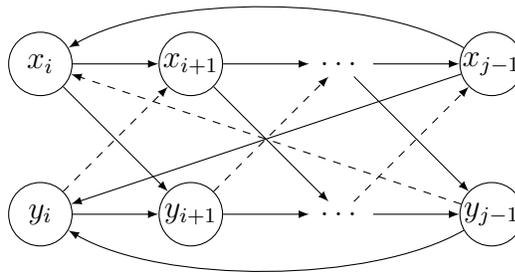


Figure 2.16 – Conclusion de la situation (i).

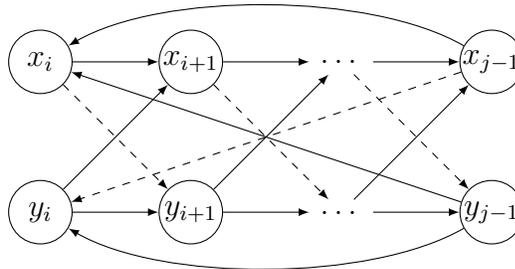


Figure 2.17 – Conclusion de la situation (ii).

gonale si et seulement si \mathbf{G}_L est télescopique ou ne contient pas de bicycle entravant.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons que \mathbf{G}_L^2 ne se démantèle pas à sa diagonale. Si \mathbf{G}_L n'est pas télescopique, alors l'énoncé est trivialement vrai. Supposons donc que \mathbf{G}_L soit télescopique. La proposition 2.38 implique alors l'existence d'un bicycle entravant.

(\Leftarrow) Les observations 2.12 et 2.28 prouvent que si \mathbf{G}_L n'est pas télescopique ou contient un bicycle entravant, alors \mathbf{G}_L^2 n'est pas démantelable à sa diagonale. \square

Ceci achève de caractériser les digraphes pour lesquels le problème d'homomorphisme est dans FO. Cette caractérisation, contrairement à celle du cas irréflexif, consiste

en une infinité de sous-structures interdites. Il est naturel de se demander s'il est possible d'obtenir une caractérisation ne faisant appel qu'à un nombre fini de sous-structures interdites. Par exemple, les bicycles entravants pourraient-ils tous contenir des structures appartenant à une famille finie qui seraient la vraie raison de la non appartenance à FO ?

Comme on le prouve maintenant, une telle caractérisation est en fait impossible.

2.1.4.1 Minimalité de la caractérisation

Nous établissons le théorème suivant :

Théorème 2.40. *Il n'existe pas de famille finie de digraphes \mathcal{F} telle que $HOM(\mathbf{H}_L)$ appartient à FO si et seulement si aucun sous-graphe strict de \mathbf{H} n'appartient à \mathcal{F}*

Pour prouver ce théorème, nous mettons en évidence l'existence d'une famille infinie de digraphes minimalement non FO que nous construisons par récurrence. Une fois cette famille construite, il est facile de conclure.

Définition 2.41. *Soit G_L un digraphe avec listes. On dit que G_L est minimalement non FO si $HOM(G_L)$ n'appartient pas à FO et si pour tout sous-graphe avec listes induit strict G'_L de G_L , $HOM(G'_L)$ appartient à FO.*

Exemple 2.42. *Soit G_L un graphe avec listes représenté figure 2.18. Le problème $HOM(G_L)$*

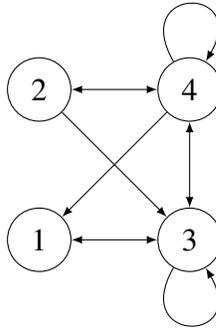
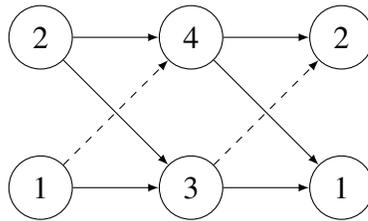
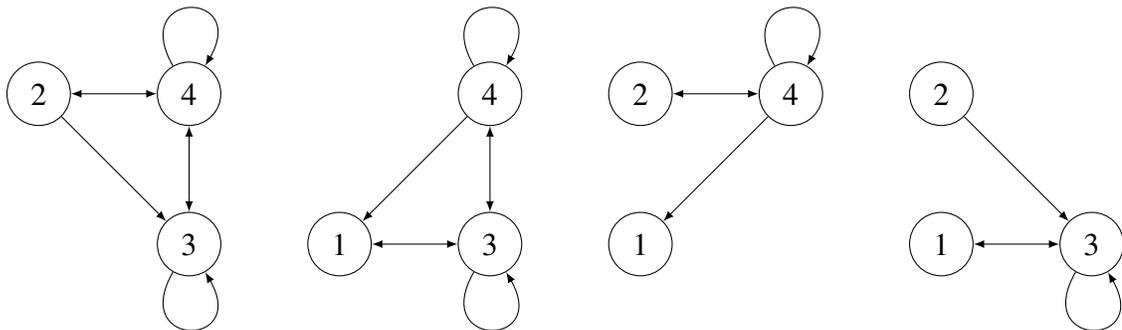


Figure 2.18 – Le graphe G_L .

n'est pas dans FO, puisqu'il contient un bicyclic entravant dont la partie haute est formée par les sommets 2 et 4 et la partie basse par les sommets 1 et 3 (figure 2.19). La suppression d'un sommet quelconque du graphe G_L induit un sous-graphe G'_L qui ne contient ni arcs séparés ni bicyclic entravant (figure 2.20).

Figure 2.19 – \mathbf{G}_L contient un bicycle entravant.Figure 2.20 – Sous-graphes induits par trois sommets de \mathbf{G}_L .

Par conséquent, $HOM(\mathbf{G}'_L)$ est dans FO et \mathbf{G}_L satisfait la définition de minimalité non FO.

Définition 2.43. On appelle digraphe spécial un graphe orienté \mathbf{G} satisfaisant les conditions suivantes :

- il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la cardinalité de $V(\mathbf{G})$ est $4n$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, 4n\}$, il existe $u \in V(\mathbf{G})$ tel que $\delta^+(u) = i$;
- pour tout $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$ et $u, v \in V(\mathbf{G})$ tels que $\delta^+(u) = i, \delta^+(v) = j$, on a $(u, v) \notin E(\mathbf{G})$;
- pour tout $i, j \in \{2n + 1, \dots, 4n\}$ et $u, v \in V(\mathbf{G})$ tels que $\delta^+(u) = i, \delta^+(v) = j$, on a $(u, v) \in E(\mathbf{G})$;
- pour tout $i, j \in \{1, \dots, 4n\}$ tels que $i > j$, soient $v_i, v_j \in V(\mathbf{G})$ tels que $\delta^+(v_i) = i$ et $\delta^+(v_j) = j$, alors $N^+(v_j) \subseteq N^+(v_i)$

Dans un digraphe spécial, les sommets de degré sortant 1 à $2n$ forment un ensemble indépendant, les sommets de degré sortant $2n + 1$ à $4n$ forment une clique réflexive. Remarquons également qu'un digraphe spécial est télescopique (lemme 2.10).

Exemple 2.44. Le graphe \mathbf{G} présenté figure 2.21 est un digraphe spécial.

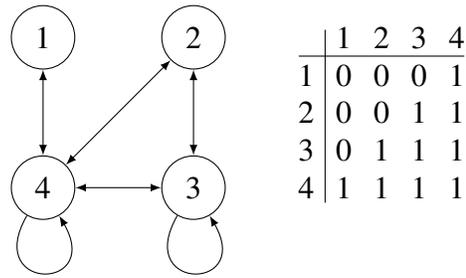


Figure 2.21 – Digraphe spécial.

Notons qu'il est possible, comme c'est le cas ici, d'ordonner les lignes de la matrice d'adjacence d'un digraphe spécial de sorte que sur la première ligne apparaisse un seul 1, sur la deuxième deux 1, etc. Ceci nous conduit à l'observation suivante.

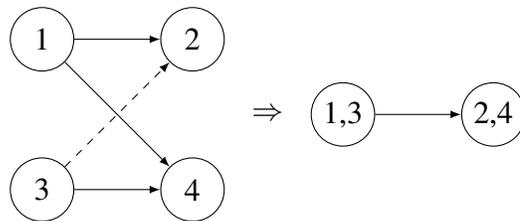
Corollaire 2.45. *Soit G_L un digraphe spécial avec listes, alors $HOM(G_L) \in FO$ si et seulement si G_L ne contient pas de bicycle entravant.*

Démonstration. Le résultat est immédiatement obtenu en utilisant l'observation 2.28 et le théorème 2.39. \square

Définition 2.46. *Soit G un digraphe. On note G^+ le digraphe défini comme suit :*

- $V(G^+) = \{(i, j) \mid i, j \in V(G)\}$;
- $E(G^+) = \{((a, b), (c, d)) \mid (a, c), (a, d), (b, d) \in E(G) \wedge (b, c) \notin E(G)\}$.

Exemple 2.47. *Soit G un digraphe. Tout arc $((1, 3), (2, 4))$ présent dans G^+ est dû à l'existence d'un sous-graphe G' de G tel que $V(G') = \{1, 2, 3, 4\}$, $(1, 2), (3, 4), (1, 4) \in E(G')$ et $(3, 2) \notin E(G')$.*

Figure 2.22 – Passage de G à G^+ .

Propriété 2.48. *Soit G un digraphe. Dans G^+ , tout sommet (u, v) incident à un arc est tel que $u \neq v$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe (u, u) et (v, w) tels que $((u, u), (v, w)) \in E(\mathbf{G}^+)$. Par définition de \mathbf{G}^+ , on a $(u, v), (u, w) \in E(\mathbf{G})$ et $(u, v) \notin E(\mathbf{G})$, ce qui est impossible. Le même raisonnement s'applique s'il existe (u, u) et (v, w) tels que $((v, w), (u, u)) \in E(\mathbf{G}^+)$. \square

Propriété 2.49. *Un digraphe \mathbf{G} contient un bicycle entravant si et seulement si \mathbf{G}^+ contient un cycle orienté.*

Démonstration. (\Rightarrow) Soient a_0, \dots, a_n les sommets formant la partie haute d'un bicycle entravant de \mathbf{G} . Soient b_0, \dots, b_n les sommets formant sa partie basse. Par définition d'un bicycle entravant, on a, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $(a_i, a_{i+1}), (a_i, b_{i+1}), (b_i, b_{i+1}) \in E(\mathbf{G})$ et $(b_i, a_{i+1}) \notin E(\mathbf{G})$. Par définition de \mathbf{G}^+ , on a donc $((a_i, b_i), (a_{i+1}, b_{i+1}))$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ (les variables sont indicées modulo $n + 1$). Il existe donc bien un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ .

(\Leftarrow) Soient $(a_0, b_0), \dots, (a_n, b_n), (a_0, b_0)$ un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ . Par définition de \mathbf{G}^+ , pour tout $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, on a $(a_i, a_{i+1}), (a_i, b_{i+1}), (b_i, b_{i+1}) \in E(\mathbf{G})$ et $(b_i, a_{i+1}) \notin E(\mathbf{G})$. Les sommets a_0, \dots, a_{n-1} constituent donc la partie haute d'un bicycle entravant dans \mathbf{G} et les sommets b_0, \dots, b_{n-1} sa partie basse (figure 2.23). \square

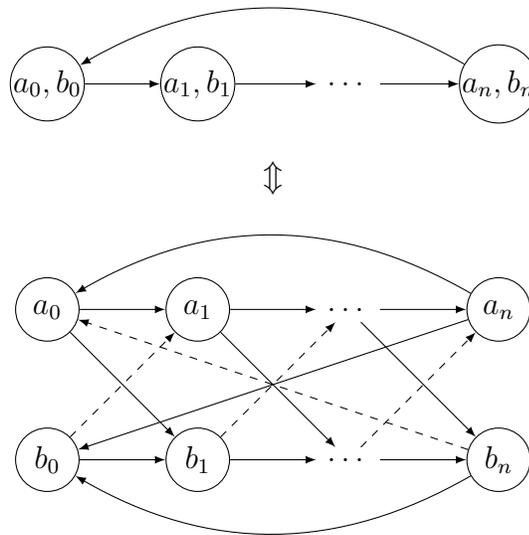


Figure 2.23 – Il existe un cycle dans $\mathbf{G}^+ \Leftrightarrow$ il existe un bicycle dans \mathbf{G} .

Propriété 2.50. *Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de taille $4n$ contenant un bicycle entravant. Soient a_0, \dots, a_k les sommets formant la partie haute d'un bicycle entravant et b_0, \dots, b_k les sommets formant la partie basse. Alors, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, on a :*

1. $\delta^+(a_i) > \delta^+(b_i)$;
2. $\delta^+(a_i), \delta^+(b_i) \in \{1, \dots, 2n\}$ ou $\delta^+(a_i), \delta^+(b_i) \in \{2n + 1, \dots, 4n\}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe i tel que $\delta^+(a_i) < \delta^+(b_i)$. Puisque \mathbf{G} est télescopique, on a $N^+(a_i) \subset N^+(b_i)$, ce qui est impossible puisque par définition de bicycle entravant, on a $(a_i, a_{i+1}) \in E(\mathbf{G})$ et $(b_i, a_{i+1}) \notin E(\mathbf{G})$.

Rappelons que, selon la définition de \mathbf{G} , l'ensemble des sommets de \mathbf{G} de degré sortant appartenant à $\{1, \dots, 2n\}$ forme un ensemble indépendant et que l'ensemble des sommets de \mathbf{G} de degré sortant appartenant à $\{2n + 1, \dots, 4n\}$ forme une clique.

Supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, k\}$ tel que $\delta^+(a_i) \in \{2n + 1, \dots, 4n\}$ et $\delta^+(b_i) \in \{1, \dots, 2n\}$. Puisqu'on a $(b_{i-1}, b_i) \in E(\mathbf{G})$, alors $\delta^+(b_{i-1}) \in \{2n + 1, \dots, 4n\}$. Par conséquent, $(b_{i-1}, a_i) \in E(\mathbf{G})$, ce qui est impossible par définition d'un bicycle entravant.

Supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, k\}$ tel que $\delta^+(a_i) \in \{1, \dots, 2n\}$ et $\delta^+(b_i) \in \{2n + 1, \dots, 4n\}$. Puisqu'on a $(a_i, a_{i+1}) \in E(\mathbf{G})$, alors $\delta^+a_{i+1} \in \{2n + 1, \dots, 4n\}$. Par conséquent, $(b_i, a_{i+1}) \in E(\mathbf{G})$, ce qui est impossible par définition d'un bicycle entravant. \square

Observation 2.51. Soit \mathbf{G} et \mathbf{G}' des digraphes. Si \mathbf{G}' est un sous-graphe induit de \mathbf{G} , alors \mathbf{G}'^+ est le sous-graphe de \mathbf{G}^+ induit par $V(\mathbf{G}'^2)$.

Démonstration. Supposons que \mathbf{G} est un sous-graphe induit de \mathbf{G}' . L'ensemble des sommets $V(\mathbf{G}')$ est un sous-ensemble de $V(\mathbf{G})$, d'où $V(\mathbf{G}'^2)$ est un sous-ensemble de $V(\mathbf{G}^2)$. Soit $((a, b), (c, d))$ un arc de (\mathbf{G}^+) tel que $a, b, c, d \in V(\mathbf{G}')$. Par définition, on a $(a, b), (c, d), (a, d) \in E(\mathbf{G})$ et $(c, b) \notin E(\mathbf{G})$, donc $(a, b), (c, d), (a, d) \in E(\mathbf{G}')$ et $(c, b) \notin E(\mathbf{G}')$. L'arc $((a, b), (c, d))$ appartient donc à $E(\mathbf{G}'^+)$. \square

Observation 2.52. Un digraphe télescopique \mathbf{G} est minimalement non FO si et seulement si tout cycle C dans \mathbf{G}^+ est tel que pour tout sommet $u \in V(\mathbf{G})$, il existe un sommet $(x, y) \in C$ tel que $x = u$ ou $y = u$.

Démonstration. Puisque \mathbf{G} est télescopique et minimalement non FO, alors il doit contenir un bicycle entravant. Par conséquent, \mathbf{G}^+ contient au moins un cycle orienté C (propriété 2.49).

Supposons qu'il existe un sommet u tel qu'aucun sommet de C ne satisfait la condition de l'énoncé. Soit \mathbf{G}' le sous-graphe de \mathbf{G} induit par $V(\mathbf{G}) \setminus \{u\}$. Le graphe \mathbf{G}'^+ est alors le sous-graphe de \mathbf{G}^+ induit par $(V(\mathbf{G}) \setminus \{u\})^2$ (observation 2.51). Puisque C ne

contient pas de sommet (x, y) tel que $x = u$ ou $y = u$, alors C est également présent dans G'^+ . Il existe donc un bicycle entravant dans G' . Or, puisque G est minimalement non FO, G' ne peut pas contenir de bicycle entravant.

Supposons que tout cycle C dans G^+ est tel que pour tout sommet $u \in V(G)$, il existe un sommet $(x, y) \in C$ tel que $x = u$ ou $y = u$. Soit u un sommet quelconque de G . Soit G' le sous-graphe de G induit par $V(G \setminus \{u\})$. Le digraphe G'^+ ne contient aucun sommet (x, y) tel que $x = u$ ou $y = u$. Le digraphe G'^+ est un sous-graphe de G^+ induit par $(V(G) \setminus \{u\})^2$ (observation 2.51). Par conséquent, un cycle existe dans G'^+ seulement si il existe aussi dans G^+ . Or il n'existe aucun cycle dans G^+ qui ne contient pas de sommet (x, y) avec $x = u$ ou $y = u$. Par conséquent, il n'existe aucun cycle dans G'^+ , d'où G' ne contient pas de bicycle entravant. Puisque G est télescopique, alors G' l'est également. Par conséquent, $HOM(G')$ appartient à FO (théorème 2.39). Le graphe G est donc minimalement non FO. \square

Définition 2.53. Soit G un digraphe spécial de taille $4n$. Soient v_1, \dots, v_{4n} les sommets de G tels que $\delta^+(v_i) = i$ pour tout $i \in \{1, \dots, 4n\}$.

On dit que G est un digraphe spécial de type I s'il respecte les conditions suivantes :

- $\{u \mid (u, v_3) \in E(G)\} = \{v_{4n}\}$;
- il existe un cycle orienté C de taille $2n$ dans G^+ tel que pour tout sommet v de G , il existe dans C un unique sommet (v, x) ou (x, v) ;
- tout cycle orienté de G^+ contient l'arc $((v_{4n}, v_{4n-1}), (v_3, v_2))$;
- G est minimalement non FO.

On dit que G est un graphe spécial de type II s'il respecte les conditions suivantes :

- il existe un cycle orienté C de taille $2n$ dans G^+ tel que pour tout sommet v de G , il existe dans C un unique sommet (v, x) ou (x, v) ;
- tout cycle orienté de G^+ contient l'arc $((v_2, v_1), (v_{4n}, v_{4n-3}))$;
- G est minimalement non FO.

Exemple 2.54. Le digraphe G représenté figure 2.24 est spécial. On vérifie en observant sa matrice d'adjacence qu'il possède 8 sommets, que les sommets v_1, \dots, v_8 sont respectivement de degré sortant $1, \dots, 8$, que les sommets v_1, \dots, v_4 forment un ensemble indépendant, que les sommets v_5, \dots, v_8 forment une clique et qu'il est télescopique.

De plus, le digraphe G est de type I. L'ensemble des sommets u tel que $(v_3, u) \in E(G)$ est $\{v_8\}$.

Supposons que tout cycle C de G^+ est tel qu'il existe (u, v) dans C tel que $v = v_7$. On a alors nécessairement $u = v_8$ (proposition 2.50). Soit (x, y) le successeur de (v_8, v_7)

dans C . On a nécessairement $x = v_3$, puisque $(v_7, u) \notin E(\mathbf{G}^+)$. La proposition 2.50 implique alors que $y = v_1$ ou $y = v_2$.

Soit (z, t) le successeur de (x, y) dans C . Si $y = v_1$, alors $t = v_7$. La proposition 2.50 impose alors $z = v_8$, ce qui est impossible puisque $(v_3, v_8) \notin E(\mathbf{G})$. Donc $y = v_2$.

Puisque $(x, z) \in E(\mathbf{G})$ et $(y, z) \notin E(\mathbf{G})$, on a nécessairement $z = v_6$. On a alors $t = v_5$ (proposition 2.50).

Soit (r, s) le successeur de (z, t) dans C . Puisque $(t, s) \in E(\mathbf{G})$, on a $s = v_1$. Puisque $(z, r) \in E(\mathbf{G})$ et $4 \geq \delta^+ r > \delta^+(s)$ (proposition 2.50), alors $r = v_4$.

Soit (p, q) le successeur de (r, s) dans C . Puisque $(s, q) \in E(\mathbf{G})$, alors $q = v_7$. Par conséquent, $r = v_8$ (proposition 2.50).

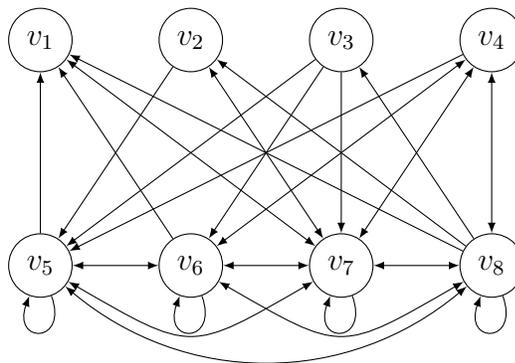
Il n'existe donc qu'un unique cycle C dans \mathbf{G}^+ tel qu'il existe (u, v) dans C tel que $v = v_7$. Il s'agit du cycle $(v_3, v_2), (v_6, v_5), (v_4, v_1), (v_8, v_7), (v_3, v_2)$.

Supposons qu'il existe un cycle C dans \mathbf{G}^+ tel qu'il n'existe pas (u, v) dans C tel que $u = v_7$ ou $v = v_7$. Puisque tout sommet u de \mathbf{G} est tel que $(u, v_7) \in E(\mathbf{G})$, alors il n'existe pas (u, v) dans C tel que $u = v_7$. Puisque $N^+(v_1) = \{v_7\}$, alors il n'existe pas (u, v) dans C tel que $u = v_1$ ou $v = v_1$. S'il existe (u, v) dans C tel que $u = v_5$ ou $v = v_5$, alors on a nécessairement $u \neq v_5$ et $v = v_5$ (proposition 2.50). Soit (z, t) le successeur de (u, v_5) dans C . Puisque $(v_5, z) \notin E(\mathbf{G})$, on a nécessairement $\delta^+(z) \in \{1, \dots, 4\}$, d'où $\delta^+ t \in \{1, \dots, 4\}$ (proposition 2.50). Puisque $(v_5, t) \in E(\mathbf{G})$, on a nécessairement $t = v_1$, ce qui est impossible. Par conséquent, il n'existe pas (u, v) dans C tel que $u = v_5$ ou $v = v_5$. Puisque $N^+(v_2) = \{5, 7\}$, alors il n'existe pas (u, v) dans C tel que $u = v_2$ ou $v = v_2$. Il ne peut donc exister que deux sommets dans C , (v_8, v_6) et (v_4, v_3) . Or $(v_6, v_3) \notin E(\mathbf{G})$, donc (v_8, v_6) n'est pas le prédécesseur de (v_6, v_3) dans C , ce qui est impossible. Donc, tout cycle C dans \mathbf{G}^+ est tel qu'il existe (u, v) dans C tel que $u = v_7$ ou $v = v_7$. Ceci implique que le seul cycle dans \mathbf{G}^+ est $(v_3, v_2), (v_6, v_5), (v_4, v_1), (v_8, v_7), (v_3, v_2)$.

L'observation 2.52 permet alors de conclure que \mathbf{G} est minimalement non FO.

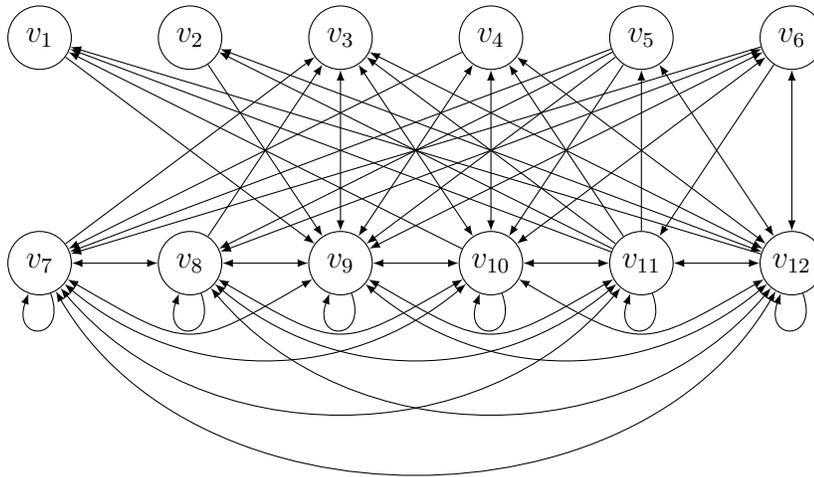
Exemple 2.55. Le digraphe \mathbf{H} représenté 2.25 est spécial de type II. Dans \mathbf{H}^+ , le cycle $(V_{12}, v_9), (v_5, v_4), (v_8, v_7), (v_6, v_3), (v_{11}, v_{10}), (v_2, v_1), (v_{12}, v_9)$ fait intervenir chaque sommet de \mathbf{H} exactement une fois.

La représentation graphique des digraphes spéciaux devient rapidement problématique, il est préférable de s'en tenir aux matrices d'adjacence.



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 2.24 – Digraphe spécial de type I.



$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}$$

Figure 2.25 – Digraphe spécial de type II.

Définition 2.56. Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de type I de taille $4n$. Soient v_1, \dots, v_{4n} les sommets de \mathbf{G} tels que $\delta^+(v_i) = i$ pour tout $i \in \{1, \dots, 4n\}$. On appelle augmenté de \mathbf{G} et on note $Aug_I(\mathbf{G})$ le graphe orienté défini comme suit, avec $\mathbf{H} = Aug_I(\mathbf{G})$:

- $V(\mathbf{H}) = \{v_1, \dots, v_{4n}\} \cup \{x, y, z, t\}$;
- l'ensemble des arcs $E(Aug_I(\mathbf{G}))$ est l'ensemble d'arcs satisfaisant exactement les conditions suivantes sur les voisinages des sommets :
 - $N_{\mathbf{H}}^+(y) = \{t\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(x) = \{z, t\}$;
 - pour tout $i \in \{1, \dots, 4n - 2\}$, $N_{\mathbf{H}}^+(v_i) = N_{\mathbf{G}}^+(v_i) \cup \{x, y\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(v_{4n-1}) = \{v_1, \dots, v_{4n}, y, z, t\} \setminus \{v_3\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(v_{4n}) = \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\} \setminus \{v_3\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(z) = \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$.

Notons que le seul arc présent dans \mathbf{G} et absent de $Aug_I(\mathbf{G})$ est (v_{4n}, v_3) .

L'intérêt de l'augmenté de \mathbf{G} est d'allonger la taille d'un cycle orienté présent dans \mathbf{G}^+ . Puisque \mathbf{G} est spécial de type I, alors il existe un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ qui fait intervenir exactement une fois chaque sommet de \mathbf{G} . L'idée derrière l'augmenté de \mathbf{G} est de prendre ce cycle, de le couper, d'introduire de nouveaux sommets de façon à former un nouveau cycle plus long. La difficulté de l'opération consiste à garantir que le digraphe obtenu au final est télescopique et minimalement non FO, ce qui nécessite en particulier de contrôler la formation de nouveaux cycles plus courts dans \mathbf{G}^+ .

Exemple 2.57. Réutilisons le digraphe spécial de type I de la figure 2.24. Il existe dans \mathbf{G}^+ le cycle $(v_3, v_2), (v_6, v_5), (v_4, v_1), (v_8, v_7), (v_3, v_2)$ (figure 2.27). Ceci correspond à l'existence dans \mathbf{G} d'un bicycle entravant (figure 2.26). La suppression de l'arc (v_8, v_3) coupe le cycle : il s'agit maintenant d'un chemin orienté $(v_3, v_2), (v_6, v_5), (v_4, v_1), (v_8, v_7)$ (figures 2.26 et 2.27). L'ajout des arcs $(v_8, x), (v_8, y), (v_7, y), (x, z), (x, t), (y, t), (z, v_2)$ et l'absence des arcs $(v_7, x), (y, z), (t, v_3)$ introduit dans \mathbf{G}^+ un nouveau cycle orienté (figures 2.26 et 2.27). Les arcs ajoutés en plus, qui ne sont pas directement nécessaires pour obtenir un nouveau cycle orienté dans \mathbf{G}^+ , garantissent que le digraphe final est télescopique et minimalement non FO.

Observation 2.58. Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de type I de taille $4n$. Le graphe $Aug_I(\mathbf{G})$ est un digraphe spécial de taille $4n + 4$.

Démonstration. Les noms de variables utilisés correspondent à ceux de la définition 2.56. Dans cette démonstration, la notation δ^+ fait référence au graphe $Aug_I(\mathbf{G})$. Soit $\mathbf{H} =$

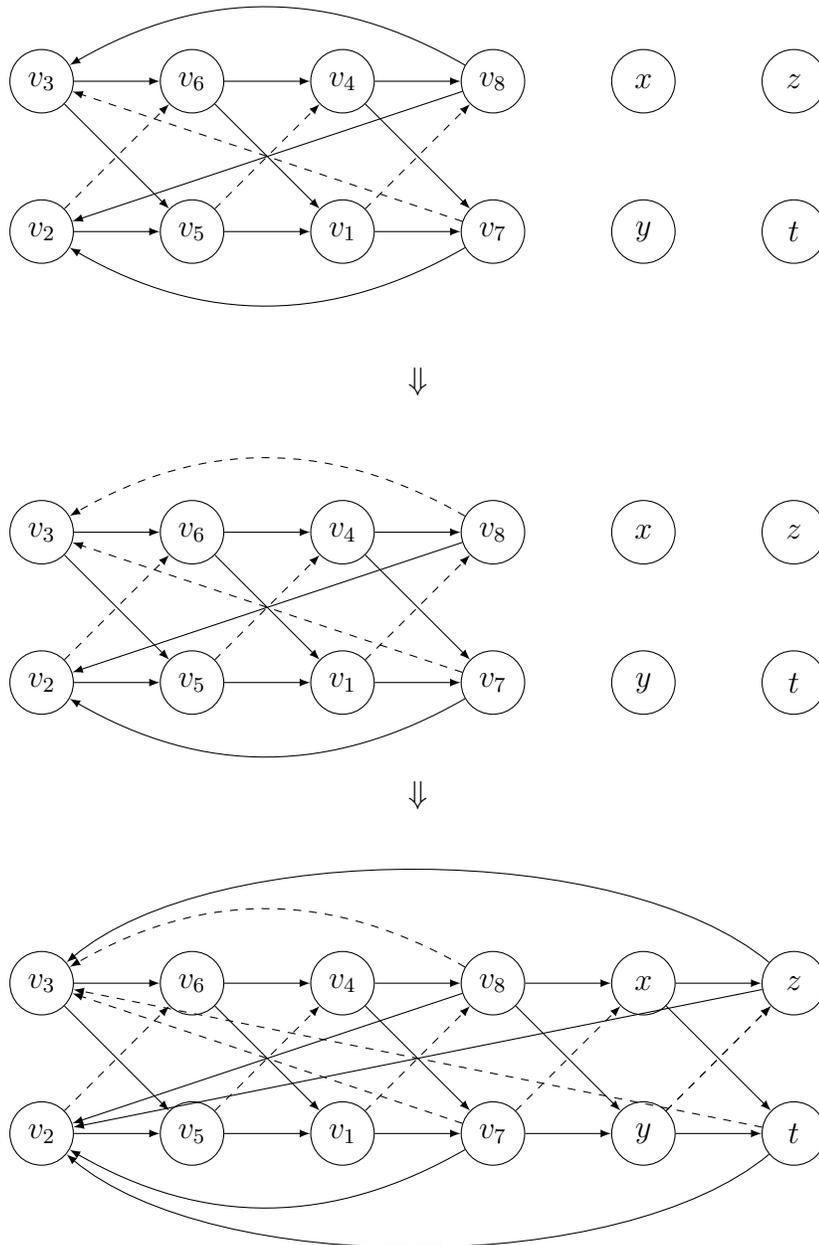


Figure 2.26 – Augmentation d'un digraphe spécial de type I.

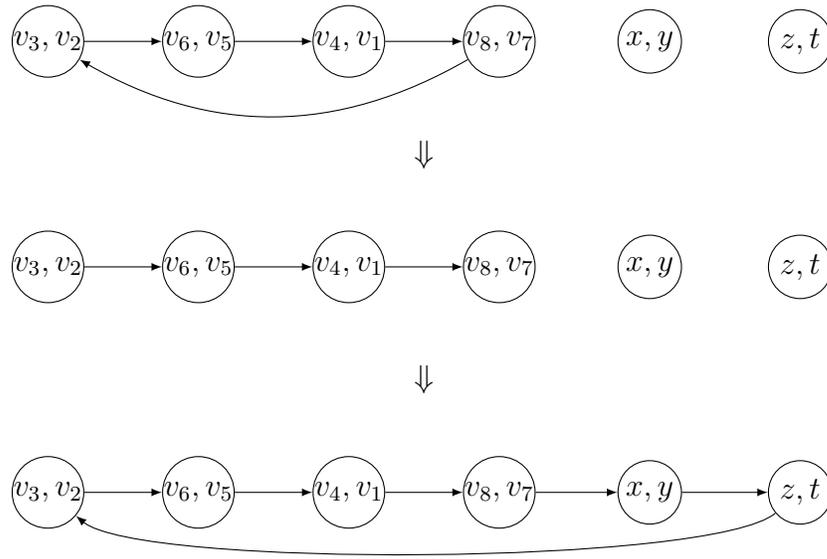


Figure 2.27 – Augmentation d'un digraphe spécial de type I.

$Aug_I(\mathbf{G})$

La taille de \mathbf{G} est un multiple de 4.

Par construction, $\delta^+(y) = 1$.

Par construction, $\delta^+(x) = 2$.

Par construction, on a $\delta^+(v_i) = i + 2$ pour tout $i \in \{1, \dots, 4n - 2\}$.

Par construction, $\delta^+(t) = 4n + 1$.

Par construction, $\delta^+(v_{4n-1}) = 4n + 2$.

Par construction, $\delta^+(v_{4n}) = 4n + 3$.

Par construction, $\delta^+(z) = 4n + 4$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, 4n + 4\}$, il existe donc $u \in V(\mathbf{H})$ tel que $\delta^+(u) = i$.

Soient $i, j \in \{3, \dots, 2n + 2\}$ et $u, v \in V(\mathbf{H})$ tels que $\delta^+(u) = i$, $\delta^+(v) = j$. Par construction, $u, v \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$, donc $(u, v) \notin E(\mathbf{H})$, $(x, u), (u, x), (y, u), (y, x) \notin E(\mathbf{H})$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1, \dots, 2n + 2\}$ et $u, v \in V(\mathbf{H})$ tels que $\delta^+(u) = i$ et $\delta^+(v) = j$, on a $(u, v) \notin E(\mathbf{H})$.

Soient $i, j \in \{2n + 1, \dots, 4n, 4n + 2, 4n + 3\}$ et $u, v \in V(\mathbf{H})$ tels que $\delta^+(u) = i$ et $\delta^+(v) = j$. Par construction, $u, v \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$, donc $(u, v) \in E(\mathbf{H})$, $(z, u), (u, z), (t, u), (u, t) \in E(\mathbf{H})$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{2n + 1, \dots, 4n + 4\}$ et $u, v \in V(\mathbf{H})$ tels que $\delta^+(u) = i$ et $\delta^+(v) = j$, on a $(u, v) \in E(\mathbf{H})$.

Soient $i, j \in \{1, \dots, 4n - 2\}$ et $i < j$. Par construction, on a $\delta^+(i) < \delta^+(j)$. Puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial, alors $N_{\mathbf{G}}^+(i) \subseteq N_{\mathbf{G}}^+(j)$. Par construction, $N_{\mathbf{G}}^+(i) \cup \{z, t\} = N_{\mathbf{H}}^+(i)$ et $N_{\mathbf{G}}^+(j) \cup \{z, t\} = N_{\mathbf{H}}^+(j)$. Par conséquent, $N_{\mathbf{H}}^+(i) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(j)$.

On a $\delta^+(y) = 1$ et $(y, t) \in E(\mathbf{H})$. Par construction, on a également $(u, t) \in E(\mathbf{H})$, donc $N_{\mathbf{H}}^+(y) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, x, z, t\}$.

On a $\delta^+(x) = 2$ et $(x, t), (x, z) \in E(\mathbf{H})$. Par construction, on a également $(u, t), (u, z) \in E(\mathbf{H})$, donc $N_{\mathbf{H}}^+(x) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, z, t\}$.

On a $\delta^+(z) = 4n + 4$, donc $N_{\mathbf{H}}^+(u) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(z)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, t\}$.

On a $\delta^+(v_{4n}) = 4n + 3$ et $(v_{4n}, 3) \notin E(\mathbf{H})$. Par construction,

$$N_{\mathbf{H}}^+(v_{4n}) = (N_{\mathbf{G}}^+(v_{4n}) \cup \{(v_{4n}, x), (v_{4n}, y), (v_{4n}, z), (v_{4n}, t)\}) - \{v_3\}.$$

De plus, pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n-1}, x, y, t\}$, on a $(u, v_3) \notin E(\mathbf{H})$, par conséquent $N_{\mathbf{H}}^+(u) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(v_{4n})$.

On a $\delta^+(v_{4n-1}) = 4n + 2$ et $(v_{4n-1}, v_3), (v_{4n-1}, x) \notin E(\mathbf{H})$. Par construction,

$$N_{\mathbf{H}}^+(v_{4n-1}) = N_{\mathbf{G}}^+(v_{4n-1}) \cup \{(v_{4n-1}, y), (v_{4n-1}, z), (v_{4n-1}, t)\}.$$

De plus, pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n-2}, x, y\}$, on a $(u, v_3), (u, x) \notin E(\mathbf{H})$, par conséquent $N_{\mathbf{H}}^+(u) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(v_{4n-1})$.

On a $\delta^+(t) = 4n + 1$ et $(t, v_3), (t, x), (t, y) \notin E(\text{Aug}_I(\mathbf{G}))$. Par construction,

$$N_{\mathbf{H}}^+(t) = \{v_1, \dots, v_{4n}, z, t\} - \{v_3\}.$$

De plus, pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n-2}, x, y\}$, on a $(u, v_3), (u, x), (u, y) \notin E(\mathbf{H})$, par conséquent $N_{\mathbf{H}}^+(\{u\}) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(\{t\})$.

Le graphe $\text{Aug}_I(\mathbf{G})$ respecte la définition d'un digraphe spécial de taille $4n + 4$. \square

Lemme 2.59. Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de type I de taille $4n$. Le digraphe $Aug_I(\mathbf{G})$ est un digraphe spécial de type II de taille $4n + 4$.

Démonstration. Les noms de variables utilisés correspondent à ceux de la définition 2.56. On étudie l'existence de cycles orientés dans le digraphe $Aug_I(\mathbf{G})^+$. Pour ce faire, on établit la liste des sommets de $Aug_I(\mathbf{G})^+$ qui ne peuvent pas appartenir à un cycle orienté.

Soit $\mathbf{H} = Aug_I(\mathbf{G})$.

Dans un premier temps, la propriété 2.50 nous permet d'affirmer que tout sommet de la forme (i, j) pour lequel :

- $\delta_{\mathbf{H}}^+(i) \leq \delta_{\mathbf{H}}^+(j)$; ou
- $\delta_{\mathbf{H}}^+(i) \in \{1, \dots, 2n + 2\}$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(j) \in \{2n + 3, \dots, 4n + 4\}$; ou
- $\delta_{\mathbf{H}}^+(i) \in \{2n + 3, \dots, 4n + 4\}$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(j) \in \{1, \dots, 2n + 2\}$;

ne peut appartenir à un cycle orienté. Il reste à étudier les cas qui ne sont pas couverts par ces conditions.

Considérons les sommets de la forme (t, i) , avec $i \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n-2}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté dans \mathbf{H}^+ . Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(u, t), (u, i), (v, i) \in E(\mathbf{H})$ et $(v, t) \notin E(\mathbf{H})$. Par construction, il n'existe aucun sommet dans $\{v_{2n+1}, \dots, v_{4n-2}\}$ tel que $(v, t) \notin E(\mathbf{H})$.

Considérons les sommets de la forme (z, i) , avec $i \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(u, z), (u, i), (v, i) \in E(\mathbf{H})$ et $(v, z) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(v, z) \notin E(\mathbf{H})$, on doit avoir $v = y$. Or, il n'existe aucun sommet dans $\{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$ tel que $(y, i) \in E(\mathbf{H})$.

Considérons les sommets de la forme (i, t) , avec $i \in \{v_{4n-1}, v_{4n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(i, u), (i, v), (t, v) \in E(\mathbf{H})$ et $(t, u) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(t, u) \notin E(\mathbf{H})$, on doit avoir $u \in \{v_3, x, y\}$. On doit avoir $\delta_{\mathbf{H}}^+(v) < \delta_{\mathbf{H}}^+(u)$. Si $u = y$, il est impossible de satisfaire cette contrainte. Si $u = x$, alors on devrait avoir $v = y$, ce qui est impossible puisque $(t, y) \notin E(\mathbf{H})$. On a donc $u = v_3$. Il n'existe alors aucun sommet i dans $\{v_{4n-1}, v_{4n}\}$ tel que $(i, v_3) \in E(\mathbf{H})$.

Considérons les sommets de la forme (i, y) , avec $i \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(u, i), (u, y), (v, y) \in E(\mathbf{H})$ et $(v, i) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire

$(v, y) \in E(\mathbf{H})$, on doit avoir $v \in \{z, v_{4n}, v_{4n-1}\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 4n + 4$ et que $\delta_{\mathbf{H}}^+(u) > \delta_{\mathbf{H}}^+(v)$, on doit en fait avoir $v \in \{v_{4n}, v_{4n-1}\}$. Dans $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$, le seul sommet i tel que $(v_{4n}, i), (v_{4n-1}, i) \notin E(\mathbf{H})$, est v_3 , donc $i = v_3$. Par conséquent, pour satisfaire $(u, i) \in E(\mathbf{H})$ on doit avoir $u = z$. Les seuls prédécesseurs possibles de (i, y) dans un cycle orienté sont donc des sommets de la forme (z, v) , avec $v \in \{v_{4n-1}, v_{4n}\}$. Or, on sait que les sommets de la forme (z, v) avec $v \in \{v_{4n-1}, v_{4n}\}$ ne peuvent pas appartenir à un cycle orienté. Par conséquent, les sommets de la forme (i, y) ne peuvent appartenir à un cycle orienté.

Considérons les sommets de la forme (i, x) , avec $i \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, il existerait $(u, v) \in V(\text{Aug}_I(\mathbf{G})^+)$ tel que $(u, i), (u, x), (v, x) \in E(\text{Aug}_I(\mathbf{G}))$ et $(v, i) \notin E(\text{Aug}_I(\mathbf{G}))$. Pour satisfaire $(v, x) \in E(\text{Aug}_I(\mathbf{G}))$, on doit avoir $v \in \{z, v_{4n}\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 4n + 4$, on doit en fait avoir $v = v_{4n}$. Par conséquent, pour satisfaire $(v, i) \notin E(\text{Aug}_I(\mathbf{G}))$, on doit avoir $i = v_3$. Par conséquent, pour satisfaire $(u, i) \in E(\text{Aug}_I(\mathbf{G}))$, on doit avoir $u = z$. Les seuls prédécesseurs possibles de (i, x) dans un cycle orienté sont donc des sommets de la forme (z, v) , avec $v \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$. Or, on sait que les sommets de la forme (z, v) avec $v \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$ ne peuvent pas appartenir à un cycle orienté. Par conséquent les sommets de la forme (i, x) ne peuvent appartenir à un cycle orienté.

Les seuls sommets susceptibles d'appartenir à un cycle orienté dans $\text{Aug}_I(\mathbf{G})^+$ sont donc de la forme :

- (i, j) , avec $i, j \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$; ou
- (i, j) , avec $i, j \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$; ou
- (x, y) ; ou
- (z, t) .

Il est impossible qu'un cycle orienté soit composé uniquement de (x, y) et (z, t) puisque $(t, y) \notin E(\mathbf{H})$.

Il est impossible qu'un cycle orienté soit composé uniquement de sommets de la forme (i, j) , avec $i, j \in \{v_1, \dots, v_{4n}\}$. En effet, par construction, tout cycle orienté dans \mathbf{H}^+ qui n'utilise que des sommets (i, j) existe également dans \mathbf{G}^+ . Or puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type I, tout cycle orienté dans \mathbf{G}^+ passe nécessairement par l'arc $((v_{4n}, v_{4n-1}), (v_3, v_2))$. Puisque \mathbf{G}' ne contient pas l'arête (v_{4n}, v_3) , alors il ne peut exister aucun cycle n'utilisant que des sommets (i, j) dans \mathbf{G}'^+ .

Le seul successeur possible de (x, y) dans un cycle orienté est le sommet (z, t) .

Les seuls prédécesseurs possibles de (z, t) dans un cycle orienté sont des sommets de

la forme (i, y) , avec $i \in \{v_1, \dots, v_{2n+2}, x\}$. Or on sait que les sommets de la forme (i, y) , avec $i \in \{v_1, \dots, v_{2n+2}\}$ ne peuvent pas appartenir à un cycle orienté. Par conséquent, on a $i = x$ et le seul prédécesseur possible de (z, t) dans un cycle orienté est le sommet (x, y) .

Par conséquent, tout cycle orienté de \mathbf{H}^+ passe par l'arc $((x, y), (z, t))$.

Les seuls prédécesseurs possibles de (x, y) dans un cycle orienté sont de la forme (i, j) , avec $i \in \{v_{4n}, z\}$ et $j \in \{v_{4n-1}, v_{4n}, z\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 4n + 4$, on a en fait $j \in \{v_{4n-1}, v_{4n}\}$. Puisque les sommets de la forme (z, i) , avec $i \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$, ne peuvent pas appartenir à un cycle orienté, le seul prédécesseur possible de (x, y) dans un cycle orienté est (v_{4n}, v_{4n-1}) .

Les seuls successeurs possibles de (z, t) dans un cycle orienté sont de la forme (i, j) , avec $i \in \{v_3, x, y\}$ et $j \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$.

Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(y) = 1$, alors $i \neq x$. Puisque seul $\delta_{\mathbf{H}}^+(y)$ est inférieur à $\delta_{\mathbf{H}}^+(x)$ et que $(t, y) \notin E(\mathbf{H})$, alors $i \neq y$. Donc $i = v_3$. Alors, on a $\delta_{\mathbf{H}}^+(v_3) > \delta_{\mathbf{H}}^+(j)$ seulement si $j \in \{v_1, v_2\}$. Par conséquent les seuls successeurs possibles de (z, t) dans un cycle orienté sont (v_3, v_1) et (v_3, v_2) .

Tout cycle orienté dans \mathbf{H}^+ doit donc contenir un chemin orienté de (v_3, v_1) ou (v_3, v_2) vers (v_{4n}, v_{4n-1}) .

Puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type I, alors il existe au moins un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ , ce cycle passe par l'arc $((v_{4n}, v_{4n-1}), (v_3, v_2))$ et chaque sommet de \mathbf{G} apparaît une et une seule fois dans ce cycle. Le seul arc présent dans ce cycle qui est absent de \mathbf{H}^+ est l'arc $((v_{4n}, v_{4n-1}), (v_3, v_2))$. Par conséquent, il existe dans \mathbf{H}^+ un chemin orienté de (v_3, v_2) vers (v_{4n}, v_{4n-1}) et chaque sommet de $\{v_1, \dots, v_{4n}\}$ apparaît une et une seule fois dans ce chemin. L'existence des arcs $((v_{4n}, v_{4n-1}), (x, y))$, $((x, y), (z, t))$ et $((z, t), (v_3, v_2))$ dans $Aug_I(\mathbf{G})^+$ permet de conclure à l'existence d'un cycle orienté dans \mathbf{H}^+ tel que chaque sommet de $Aug_I(\mathbf{G})$ apparaît une et seule fois dans ce cycle. Donc, \mathbf{H}^2 ne peut pas se démanteler à sa diagonale.

Supposons que \mathbf{H} ne soit pas minimalement non FO. Cela implique qu'il existe un cycle orienté dans $Aug_I(\mathbf{G})^+$ tel qu'au moins un des sommets de $Aug_I(\mathbf{G})$ n'apparaît pas dans ce cycle. On sait que les sommets x, y, z, t sont indispensables à l'existence d'un cycle. Par conséquent, les sommets manquants appartiennent à $\{v_1, \dots, v_{4n}\}$. Cela implique qu'il existe un chemin orienté de (v_3, v_2) ou (v_3, v_1) à (v_{4n}, v_{4n-1}) dans \mathbf{H}^+ dans lequel au moins un des sommets de $\{v_1, \dots, v_{4n}\}$ n'apparaît pas. Si un tel chemin existait, alors il impliquerait l'existence d'un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ qui n'utiliserait pas tous les sommets de \mathbf{G} . En effet, on a $((v_{4n}, v_{4n-1}), (v_3, u)) \in E(\mathbf{G}^+)$, avec $u \in$

$\{v_1, v_2\}$. Par conséquent, \mathbf{G} ne serait pas minimalement non FO, ce qui est impossible puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type I.

Finalement, remarquons que $\delta_{\mathbf{H}}^+(y) = 1$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(x) = 2$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(t) = 4n + 1$ et $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 4n + 4$ et que l'arc $((x, y), (z, t))$ est nécessairement présent dans tout cycle orienté de \mathbf{H}^+ .)

Par conséquent, $Aug_I(\mathbf{G})$ est bien un digraphe spécial de type II de taille $4n + 4$. \square

Définition 2.60. Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de type II de taille $4n$. Soient v_1, \dots, v_{4n} les sommets de \mathbf{G} tels que $\delta^+(v_i) = i$ pour tout $i \in \{1, \dots, 4n\}$. On appelle augmenté de \mathbf{G} et on note $Aug_{II}(\mathbf{G})$ le graphe orienté défini comme suit, avec $\mathbf{H} = Aug_{II}(\mathbf{G})$:

- $V(\mathbf{H}) = \{v_1, \dots, v_{4n}\} \cup \{x, y, z, t\}$;
- l'ensemble des arcs $E(Aug_I(\mathbf{G}))$ est l'ensemble d'arcs satisfaisant exactement les conditions suivantes sur les voisinages des sommets :
 - $N_{\mathbf{H}}^+(v_1) = \{y\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(t) = \{v_{4n-3}, y\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(z) = \{v_{4n-3}, v_{4n}, y\}$;
 - pour tout $i \in \{2, \dots, 4n\}$, $N_{\mathbf{H}}^+(v_i) = N_{\mathbf{G}}^+(v_i) \cup \{x, y\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(y) = \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, t\}$;
 - $N_{\mathbf{H}}^+(x) = \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$.

Notons que le seul arc présent dans \mathbf{G} et absent de $Aug_I(\mathbf{G})$ est (v_1, v_{4n-3}) . L'augmenté d'un digraphe de type II procède des mêmes besoins que pour l'augmenté de type I : augmenter la longueur d'un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ tout en n'en créant pas de nouveaux qui soient plus courts.

L'objectif est de pouvoir en fait allonger arbitrairement la longueur du cycle orienté dans \mathbf{G}^+ de façon à pouvoir exhiber des digraphes avec listes minimalement non FO de taille arbitraire.

Les types de digraphes spéciaux introduits précédemment permettent cette construction.

Lemme 2.61. Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de type II de taille $4n$. Le digraphe $Aug_{II}(\mathbf{G})$ est un digraphe spécial de taille $4n + 4$.

Démonstration. Soit $\mathbf{H} = Aug_{II}(\mathbf{G})$. La taille de \mathbf{H} est un multiple de 4.

Par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(v_1) = 1$.

Par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(t) = 2$.

Par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 3$.

Par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(v_i) = i + 2$ pour tout $i \in \{2, \dots, 4n\}$.

Par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(y) = 4n + 3$.

Par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(x) = 4n + 4$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, 4n+4\}$, il existe donc bien un sommet $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$ tel que $\delta_{\mathbf{H}}^+(u) = i$.

Soient $i, j \in \{v_1, \dots, v_{2n}, z, t\}$, par construction, $\delta_{\mathbf{H}}^+(i), \delta_{\mathbf{H}}^+(j) \in \{1, \dots, 2n + 2\}$. Puisque $(i, j) \notin E(\mathbf{G})$ pour tout $i, j \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$, alors par construction $(i, j) \notin E(\mathbf{H})$ pour tout $\{z, t, v_1, \dots, v_{2n}\}$.

Soient $i, j \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}, x, y\}$, par construction $\delta_{\mathbf{H}}^+(i), \delta_{\mathbf{H}}^+(j) \in \{2n + 3, \dots, 4n + 4\}$. Puisque $(i, j) \in E(\mathbf{G})$ pour tout $i, j \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$, alors par construction $(i, j) \in E(\mathbf{H})$ pour tout $\{x, y, v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$.

Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(v_1) = 1$ et $(u, y) \in E(\mathbf{H})$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$, alors $N_{\mathbf{H}}^+(v_1) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$.

Puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type II, alors on a $(v_1, v_{4n-3}) \in E(\mathbf{G})$. Par conséquent, on a $v_{4n-3} \in N_{\mathbf{G}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}\}$. Par construction, on a alors $v_{4n-3} \in N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{4n}\}$. De plus, on a $v_{4n-3} \in N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{x, y, z, t\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(t) = 2$ et $v_{4n-3}, y \in N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$, alors $N_{\mathbf{H}}^+(t) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$.

Puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type II, alors on a $(v_2, v_{4n}) \in E(\mathbf{G})$. Par conséquent, on a $v_{4n} \in N_{\mathbf{G}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{4n}\}$. De plus, on a $v_{4n} \in N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{x, y, z\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 3$ et $v_{4n}, v_{4n-3}, y \in N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{4n}, x, y, z\}$, alors $N_{\mathbf{H}}^+(z) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{4n}, x, y, z\}$.

Soient $i, j \in \{v_2, \dots, v_{4n}\}$. Alors on a $N_{\mathbf{H}}^+(i) = N_{\mathbf{G}}^+(i) \cup \{x, y\}$ et $N_{\mathbf{H}}^+(j) = N_{\mathbf{G}}^+(j) \cup \{x, y\}$. Or, par hypothèse on a $N_{\mathbf{G}}^+(i) \subseteq N_{\mathbf{G}}^+(j)$ ou $N_{\mathbf{G}}^+(j) \subseteq N_{\mathbf{G}}^+(i)$. Par conséquent, on a $N_{\mathbf{H}}^+(i) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(j)$ ou $N_{\mathbf{H}}^+(j) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(i)$.

Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(y) = 4n + 3$ et $z \notin N_{\mathbf{H}}^+(u)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, y, z, t\}$, alors $N_{\mathbf{H}}^+(u) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(y)$ pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, z, t\}$.

Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(x) = 4n + 4$, alors pour tout $u \in \{v_1, \dots, v_{4n}, x, y, z, t\}$, on a $N_{\mathbf{H}}^+(u) \subseteq N_{\mathbf{H}}^+(z)$.

Le digraphe \mathbf{H} est donc bien un digraphe spécial de taille $4n + 4$. □

Lemme 2.62. *Soit \mathbf{G} un digraphe spécial de type II de taille $4n$. Le digraphe $Aug_{II}(\mathbf{G})$ est un digraphe spécial de type I de taille $4n + 4$.*

Démonstration. On va étudier l'existence de cycles orientés dans le digraphe $Aug_{II}(\mathbf{G})^+$. Pour ce faire, on va établir la liste des sommets de $Aug_{II}(\mathbf{G})^+$ qui ne peuvent pas faire partie d'un cycle orienté.

Soit $\mathbf{H} = Aug_{II}(\mathbf{G})$.

Dans un premier temps, la proposition 2.50 nous permet d'affirmer que tout sommet de la forme (i, j) pour lesquels :

- $\delta_{\mathbf{H}}^+(i) \leq \delta_{\mathbf{H}}^+(j)$; ou
- $\delta_{\mathbf{H}}^+(i) \in \{1, \dots, 2n + 2\}$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(j) \in \{2n + 3, \dots, 4n + 4\}$; ou
- $\delta_{\mathbf{H}}^+(i) \in \{2n + 3, \dots, 4n + 4\}$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(j) \in \{1, \dots, 2n + 2\}$

ne peut appartenir à un cycle orienté.

Considérons les sommets de la forme (y, i) , avec $i \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(u, y), (u, i), (v, i) \in E(\mathbf{H})$ et $(v, y) \notin E(\mathbf{H})$. Il n'existe aucun sommet $v \in V(\mathbf{H})$ tel que $(v, y) \notin E(\mathbf{H})$.

Considérons le sommet (t, v_1) . Il est impossible que ce sommet fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(t, u), (t, v), (v_1, v) \in E(\mathbf{H})$ et $(v_1, u) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(v_1, v) \in E(\mathbf{H}^+)$, on doit avoir $v = y$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(u) > \delta_{\mathbf{H}}^+(v) = 4n + 3$, alors on doit avoir $u = x$. Or $(t, x) \notin E(\mathbf{H})$.

Considérons le sommet (z, v_1) . Il est impossible que ce sommet fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(z, u), (z, v), (v_1, v) \in E(\mathbf{H})$ et $(v_1, u) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(v_1, v) \in E(\mathbf{H}^+)$, on doit avoir $v = y$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(u) > \delta_{\mathbf{H}}^+(v) = 4n + 3$, alors on doit avoir $u = x$. Or $(z, x) \notin E(\mathbf{H})$.

Considérons les sommets de la forme (i, z) , avec $i \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(u, i), (u, z), (v, z) \in E(\mathbf{H})$ et $(v, i) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(v, z) \in E(\mathbf{H})$, on doit avoir $v = x$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(x) = 4n + 4$, il est impossible qu'un

sommet de la forme (u, x) fasse partie d'un cycle. Par conséquent, les seuls prédécesseurs possibles pour (i, z) dans un cycle orienté ne peuvent pas faire partie d'un cycle. Donc, (i, z) ne peut pas faire partie d'un cycle.

Considérons les sommets de la forme (i, t) , avec $i \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H})^+$ tel que $(u, i), (u, t), (v, t) \in E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(v, t) \in E(\mathbf{H})$, on doit avoir $v \in \{x, y\}$. Il n'existe alors pas de $i \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$ tel que $(v, i) \notin E(\mathbf{H})$.

Considérons les sommets de la forme (x, i) , avec $i \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$. Il est impossible qu'un de ces sommets fasse partie d'un cycle orienté. Si tel était le cas, alors il existerait $(u, v) \in V(\mathbf{H}^+)$ tel que $(u, x), (u, i), (v, i) \in E(\mathbf{H})$ et $(v, x) \notin E(\mathbf{H})$. Pour satisfaire $(v, x) \notin E(\mathbf{H})$, on doit avoir $v \in \{v_1, z, t\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(v_1) = 1$, $(v_1, y) \in E(\mathbf{H})$ et $i \neq y, v \neq v_1$. Pour satisfaire $(u, x) \in E(\mathbf{H})$, on doit avoir $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$. Par conséquent, les seuls prédécesseurs possibles pour (x, i) dans un cycle sont de la forme (u, v) , avec $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$ et $v \in \{z, t\}$. Or, on a vu précédemment que les sommets correspondant à ces formes ne peuvent pas appartenir à un cycle. Par conséquent, (x, i) ne peut appartenir à un cycle.

Les seuls sommets susceptibles d'appartenir à un cycle orienté dans \mathbf{H}^+ sont donc de la forme :

- (i, j) , avec $i, j \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$; ou
- (i, j) , avec $i, j \in \{v_{2n+1}, \dots, v_{4n}\}$; ou
- (x, y) ; ou
- (z, t) .

Il est impossible qu'un cycle soit composé uniquement de (x, y) et (z, t) , puisque $(z, x) \notin E(\mathbf{H})$.

Il est impossible qu'un cycle soit composé uniquement de sommets de la forme (i, j) , avec $i, j \in \{v_1, \dots, v_{4n}\}$. En effet, par construction, tout cycle orienté dans \mathbf{H}^+ qui n'utilise que des sommets (i, j) existe également dans \mathbf{G}^+ . Or, puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type II, tout cycle de \mathbf{G}^+ passe par l'arc $((v_2, v_1), (v_{4n}, v_{4n-3}))$. Puisque \mathbf{G}' ne contient pas l'arête (v_1, v_{4n-3}) , alors il ne peut exister aucun cycle n'utilisant que des sommets (i, j) dans \mathbf{G}'^+ .

Puisque $\{u \mid (y, u) \notin E(\mathbf{H})\} = \{z\}$, alors les seuls successeurs possibles de (x, y) dans un cycle orienté sont des sommets de la forme (z, i) , avec $i \in \{v_1, \dots, v_{2n}, t\}$. Or on sait que les sommets de la forme (z, i) , avec $i \in \{v_1, \dots, v_{2n}\}$, ne peuvent appartenir à un cycle. Par conséquent, le seul successeur possible de (x, y) dans un cycle orienté est (z, t) .

On a $\{u \mid (u, t) \in E(\mathbf{H})\} = \{x, y\}$. Puisque $\delta_{\mathbf{H}}^+(x) = 4n + 4$ et $\delta_{\mathbf{H}}^+(y) = 4n + 3$, alors le seul prédécesseur possible de (z, t) dans un cycle orienté est le sommet (x, y) .

Par conséquent, tout cycle orienté dans \mathbf{H}^+ passe par l'arc $((x, y), (z, t))$.

Puisque $\{u \mid (z, u) \in E(\mathbf{H})\} = \{v_{4n}, v_{4n-3}, y\}$ et $\{u \mid (t, u) \in E(\mathbf{H})\} = \{v_{4n-3}, y\}$, alors le seul successeur possible de (z, t) dans un cycle orienté est (v_{4n}, v_{4n-3}) .

Puisque $\{u \mid (u, x) \notin E(\text{Aug}_{II})(\mathbf{G})\} = \{v_1, z, t\}$, alors les prédécesseurs potentiels de (x, y) dans un cycle orienté sont des sommets de la forme (u, v) , avec $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$ et $v \in \{v_1, z, t\}$. On sait que les sommets de la forme (u, v) , avec $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$ et $v \in \{z, t\}$ ne peuvent appartenir à des cycles. Par conséquent, les prédécesseurs possibles de (x, y) dans un cycle orienté sont des sommets de la forme (u, v_1) , avec $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$.

Il existe donc un cycle orienté dans \mathbf{H}^+ si et seulement si il existe un chemin orienté de (v_{4n}, v_{4n-3}) vers (u, v_1) dans \mathbf{H}^+ , avec $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$.

Puisque \mathbf{G} est un digraphe spécial de type II, alors il existe au moins un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ , ce cycle passe par l'arc $((v_2, v_1), (v_{4n}, v_{4n-3}))$ et chaque sommet de \mathbf{G} apparaît une et une seule fois dans ce cycle. Le seul arc présent dans ce cycle qui est absent de \mathbf{H} est l'arc $((v_2, v_1), (v_{4n}, v_{4n-3}))$. Par conséquent, il existe dans \mathbf{H}^+ un chemin orienté de (v_{4n}, v_{4n-3}) vers (u, v_1) et chaque sommet de $\{v_1, \dots, v_{4n}\}$ apparaît une et une seule fois dans ce chemin. L'existence des arcs $((v_2, v_1), (x, y))$, $((x, y), (z, t))$ et $((z, t), (v_{4n}, v_{4n-3}))$ dans \mathbf{H}^+ permet de conclure à l'existence d'un cycle orienté dans \mathbf{H}^+ tel que chaque sommet de \mathbf{H} apparaît une et une seule fois dans ce cycle.

Supposons que \mathbf{H} ne soit pas minimalement non-FO. Cela implique qu'il existe un cycle orienté dans \mathbf{H}^+ tel qu'au moins un des sommets de \mathbf{H} n'apparaît pas dans ce cycle. On sait que les sommets x, y, z, t sont indispensables à l'existence d'un cycle. Par conséquent, les sommets manquants appartiennent à $\{v_1, \dots, v_{4n}\}$. Cela implique qu'il existe un chemin orienté de (v_{4n}, v_{4n-3}) à (u, v_1) dans \mathbf{H}^+ , avec $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$, dans lequel au moins un des sommets de $\{v_1, \dots, v_{4n}\}$ n'apparaît pas. Si un tel chemin existait, alors il impliquerait l'existence d'un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ qui n'utiliserait pas tous les sommets de \mathbf{G} . En effet, puisque $(v_2, v_{4n}), (v_1, v_{4n-3}) \in E(\mathbf{G})$, on a $((u, v_1), (v_{4n}, v_{4n-3})) \in E(\mathbf{G}^+)$ pour tout $u \in \{v_2, \dots, v_{2n}\}$. Par conséquent, \mathbf{G} ne serait pas minimalement non-FO, ce qui est impossible par hypothèse.

Finalement, remarquons que $\delta_{\mathbf{H}}^+(x) = 4n + 4$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(y) = (4n + 4) - 3$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(z) = 2$, $\delta_{\mathbf{H}}^+(t) = 1$ et que l'arc $((x, y), (z, t))$ est nécessairement présente dans tout cycle orienté de \mathbf{H}^+ . De plus, $\{u \mid (u, v_3) \in E(\mathbf{H})\} = \{x\}$.

Par conséquent, $\text{Aug}_{II}(\mathbf{G})$ est bien un digraphe spécial de type I de taille $4n + 4$. \square

Lemme 2.63. *Il existe un digraphe spécial de type I de taille 8.*

Démonstration. Le digraphe \mathbf{G} représenté figure 2.24 est spécial de type I. Vérifier qu'il s'agit d'un digraphe spécial se fait aisément en observant sa matrice d'adjacence. Vérifier que le digraphe \mathbf{G}^+ ne contient qu'un unique cycle orienté satisfaisant les critères de la définition de digraphe spécial de type I est facile et fastidieux. L'unicité de ce cycle implique que \mathbf{G} est minimalement non FO. \square

Corollaire 2.64. *Il existe des digraphes \mathbf{G} minimalement non-FO de taille arbitrairement grande.*

Démonstration. Le lemme 2.63 fournit un point de départ : il existe un digraphe \mathbf{G} de taille 8 minimalement non FO. De plus, \mathbf{G} est spécial de type I. En utilisant le lemme 2.59, on obtient un digraphe spécial de type II \mathbf{G}' de taille 12 minimalement non FO. En utilisant le lemme 2.62, on obtient un digraphe spécial de type I \mathbf{G}'' de taille 16 minimalement non FO. Ce procédé peut être répété à l'envi et par ce biais, on peut obtenir des digraphes minimalement non FO de taille arbitrairement grande, multiple de 4. \square

Théorème 2.65. *Il n'est pas possible de caractériser l'ensemble des digraphes \mathbf{G} tels que $LHOM(\mathbf{G}) \in FO$ au moyen d'un ensemble fini de sous-graphes interdits.*

Démonstration. Supposons qu'un ensemble fini E permette de caractériser les digraphes \mathbf{G} tels que $LHOM(\mathbf{G}) \in FO$. Un tel ensemble admet nécessairement un graphe de taille maximale. Soit \mathbf{G}_{Max} un tel graphe. Par définition, $LHOM(\mathbf{G}_{Max}) \notin FO$.

Le corollaire 2.64 permet d'affirmer l'existence d'un digraphe \mathbf{H} dont la taille est strictement supérieure à $|V(\mathbf{G}_{Max})|$ tel que $LHOM(\mathbf{H}) \notin FO$ et \mathbf{H} est minimalement non FO.

Puisque $LHOM(\mathbf{H}) \notin FO$, il devrait exister \mathbf{G} dans E tel que \mathbf{G} est un sous-graphe de \mathbf{H} et $|\mathbf{G}| < |\mathbf{H}|$. Or, tout sous-graphe strict \mathbf{H}' de \mathbf{H} est tel que $LHOM(\mathbf{H}') \in FO$.

Par conséquent, un tel ensemble E ne peut exister. \square

Notons qu'il existe des graphes minimalement non FO qui ne sont pas couverts par la famille décrite précédemment, notamment des graphes dont la taille n'est pas un multiple de 4 (figure 2.28, la propriété a été vérifiée par un programme). Une description de l'ensemble des digraphes minimalement non FO pourrait être d'intérêt.

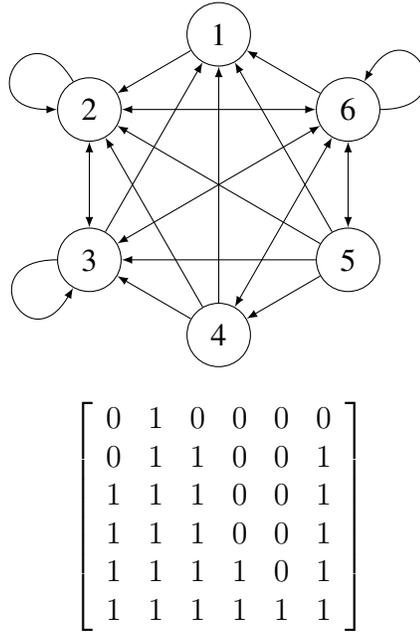


Figure 2.28 – Digraphe minimalement non FO de taille 6.

2.1.5 Détection

Il est maintenant établi qu'une caractérisation par sous-graphes interdits des digraphes \mathbf{G} tels que $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO contient une infinité de sous-graphes. Il n'est donc pas possible, comme on l'a fait dans les cas réflexifs et irréflexif, de placer trivialement le problème de reconnaissance dans la classe de complexité FO. D'après les résultats précédents, détecter que $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO peut se faire en vérifiant successivement qu'un graphe est télescopique et qu'il ne contient pas de bicycle entravant. La détection des graphes télescopiques ayant déjà été traitée, attardons-nous sur la détection des bicycles entravants.

Dans ce qui suit, on note \overline{P} le complément du problème P , c'est à dire l'ensemble des entrées qui ne sont pas des solutions de P .

2.1.5.1 Détection des bicycles entravants

Le problème de reconnaissance des bicycles entravants fait naturellement intervenir la détection de cycles orientés dans un graphe. La proposition 2.49 établit que l'existence d'un bicycle entravant dans \mathbf{G} est équivalente à l'existence d'un cycle orienté dans \mathbf{G}^+ .

Définition 2.66. *Le problème de détection d'un cycle orienté dans un digraphe est défini*

comme suit :

Problème : *CYCLE*
Entrée : un digraphe G
Sortie : *VRAI* si G contient un cycle orienté, *FAUX* sinon.

Définition 2.67. *Le problème de détection d'un bicycle entravant dans un digraphe est défini comme suit :*

Problème : *BICYCLE*
Entrée : un digraphe G
Sortie : *VRAI* si G contient un bicycle entravant, *FAUX* sinon.

Théorème 2.68 ([50]). *Le problème d'existence d'un cycle orienté dans un graphe orienté est NL-complet.*

On prouve que BICYCLE problème NL-complet en prouvant qu'il appartient à NL et en lui réduisant le problème CYCLE.

Lemme 2.69. *Le problème BICYCLE est dans NL.*

Démonstration. Un problème NL est un problème dont on peut vérifier une solution potentielle en ne la parcourant qu'une fois tout en employant un espace logarithmique en la taille de l'entrée. Soit G le digraphe fournit en entrée. Supposons que soit fournie une suite de paire de sommets de G . On veut vérifier que cette suite constitue un bicycle entravant. On aura besoin de la mémoire suivante :

- mémorisation de la première paire de la suite (espace logarithmique) ;
- mémorisation de la paire courante (espace logarithmique) ;
- mémorisation de la paire immédiatement précédente à la paire courante (espace logarithmique) ;
- nombre fini de compteurs pour accéder aux informations de l'entrée (espace logarithmique).

On mémorise la première paire de la suite dans l'espace prévu ainsi que dans l'espace réservé à la paire immédiatement précédente. On va parcourir le reste de la suite des paires en effectuant les actions suivantes :

- mémoriser la paire courante (espace logarithmique) ;
- vérifier que la paire courante et la paire immédiatement précédente respectent les conditions décrite dans la définition 2.27 ;

Arrivé à la dernière paire, on vérifie qu'elle est identique à la première paire. \square

Théoreme 2.70. *Le problème BICYCLE est NL-complet.*

Démonstration. On sait que détecter un bicycle est un problème NL. Pour prouver la complétude du problème, on va le réduire le problème CYCLE au problème BICYCLE.

Soit \mathbf{G} une instance de CYCLE. On définit le graphe \mathbf{G}' comme suit :

- $V(\mathbf{G}') = \{u_x \mid x \in V(\mathbf{G})\} \cup \{v_x \mid x \in V(\mathbf{G})\}$;
- $E(\mathbf{G}') = \{(u_x, v_y), (v_x, v_y) \mid (x, y) \in E(\mathbf{G})\}$.

Supposons qu'il existe un cycle orienté x_1, \dots, x_n, x_1 dans \mathbf{G} . Par construction, il existe alors un cycle orienté $u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1}$ et un cycle orienté $v_{x_1}, \dots, v_{x_n}, v_{x_1}$ dans \mathbf{G}' . Puisque $(x_n, x_1) \in E(\mathbf{G})$ et $(x_i, x_{i+1}) \in E(\mathbf{G})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, alors, par construction, on a $(u_{x_n}, v_{x_1}) \in E(\mathbf{G}')$ et $(u_{x_i}, v_{x_{i+1}}) \in E(\mathbf{G}')$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Finalement, il n'existe aucun arc de la forme (v_x, u_y) dans \mathbf{G}' . Les sommets u_{x_1}, \dots, u_{x_n} forment donc la partie haute d'un bicycle entravant dans \mathbf{G}' et les sommets v_{x_1}, \dots, v_{x_n} sa partie basse.

Supposons qu'il existe un bicycle entravant dans \mathbf{G}' . Il existe donc au moins un cycle orienté C dans \mathbf{G}' . Si C est uniquement formé de sommets de la forme u_x , alors, par construction, il existe un cycle dans \mathbf{G} . Si C est uniquement formé de sommets de la forme v_x , alors, par construction, il existe un cycle orienté dans \mathbf{G} . Puisqu'il n'existe pas d'arc de la forme (v_x, u_y) dans \mathbf{G}' , alors il est impossible qu'un cycle orienté de \mathbf{G}' contienne à la fois des sommets de la forme u_x et des sommets de la forme v_x . Par conséquent, s'il existe un bicycle entravant dans \mathbf{G}' , alors il existe un cycle orienté dans \mathbf{G} .

Prouvons finalement qu'obtenir \mathbf{G}' à partir de \mathbf{G} peut se faire en espace logarithmique. Tous les couples ordonnés de sommets du graphe \mathbf{G}' peuvent être énumérés au moyen de deux compteurs c_1 et c_2 de taille $\log(2|V(\mathbf{G})|)$. Considérons que les sommets de \mathbf{G} sont étiquetés de 1 à $|V(\mathbf{G})|$. Étiquetons les sommets de \mathbf{G}' de la forme u_x de 1 à $|V(\mathbf{G})|$ de sorte que le sommet étiqueté i dans \mathbf{G}' soit la copie du sommet étiqueté i dans \mathbf{G} . Étiquetons les sommets de \mathbf{G}' de la forme v_x de $|V(\mathbf{G})| + 1$ à $2|V(\mathbf{G})|$ de sorte que le sommet étiqueté $|V(\mathbf{G})| + i$ dans \mathbf{G}' soit la copie du sommet étiqueté i dans \mathbf{G} . Pour chaque couple ordonné de sommets (a, b) de \mathbf{G}' , on détermine s'il existe un arc (a, b) . On a quatre possibilités :

- si $c_1 \leq |V(\mathbf{G})|$ et $c_2 \leq |V(\mathbf{G})|$, alors il existe un arc dans \mathbf{G}' du sommet étiqueté par c_1 vers le sommet étiqueté par c_2 s'il existe un arc dans \mathbf{G} du sommet étiqueté par c_1 vers le sommet étiqueté par c_2 ;

- si $c_1 \leq |V(\mathbf{G})|$ et $c_2 \geq |V(\mathbf{G})| + 1$, alors il existe un arc dans \mathbf{G}' du sommet étiqueté par c_1 vers le sommet étiqueté par c_2 s'il existe un arc dans \mathbf{G} du sommet étiqueté par c_1 vers le sommet étiqueté par $c_2 - |V(\mathbf{G})|$;
- si $c_1 \geq |V(\mathbf{G})| + 1$ et $c_2 \leq |V(\mathbf{G})|$, alors il n'existe pas d'arc dans \mathbf{G}' du sommet étiqueté par c_1 vers le sommet étiqueté par c_2 ;
- si $c_1 \geq |\mathbf{G}| + 1$ et $c_2 \geq |\mathbf{G}| + 1$, alors il existe un arc dans \mathbf{G}' du sommet étiqueté par c_1 vers le sommet étiqueté par c_2 s'il existe un arc dans \mathbf{G} du sommet étiqueté par $c_1 - |V(\mathbf{G})|$ vers le sommet étiqueté par $c_2 - |V(\mathbf{G})|$;

Tester l'existence d'arc dans le graphe \mathbf{G} peut se faire au moyen de deux compteurs de taille $\log(|V(\mathbf{G})|)$. Le graphe \mathbf{G}' peut donc être produit en n'utilisant qu'un espace logarithmique et un ruban de sortie à sens unique. \square

La détection des sous-graphes interdits est cependant plus large que la détection des bicycles entravants, elle nécessite également de détecter les digraphes non télescopiques.

2.1.6 Détection des bicycles entravants dans un graphe télescopique

Comme on l'a déjà vu, l'absence d'arcs séparés impose une contrainte assez sévère sur la structure d'un digraphe, contrainte qui pourrait faciliter grandement le travail de détection. Vu autrement, on sait que BICYCLE appartient à NL et que $\overline{\text{TELESCOPIQUE}}$ appartient à FO, mais rien ne garantit que $\overline{\text{TELESCOPIQUE}} \cup \text{BICYCLE}$ n'appartient pas à un sous-ensemble strict de NL.

La détection de cycle dans un graphe télescopique illustre cette possibilité.

Propriété 2.71. *Soit \mathbf{G} un digraphe télescopique. Alors \mathbf{G} contient un cycle orienté si et seulement si \mathbf{G} contient une paire d'arcs symétriques.*

Démonstration. (\Rightarrow) Soit v_1, \dots, v_k, v_1 un cycle orienté dans \mathbf{G} . Si $k = 2$, alors l'énoncé est trivialement vrai. Supposons que $k > 2$. Sans perte de généralité, supposons que $\delta^+(v_1) \subseteq \delta^+(v_i)$, pour tout $i \in \{2, \dots, k\}$. On a alors $(v_3, v_2) \in E(\mathbf{G})$, puisque $(v_1, v_2) \in E(\mathbf{G})$. Les arcs (v_2, v_3) et (v_3, v_2) sont symétriques.

(\Leftarrow) Trivialement, s'il existe un arc symétrique (u, v) dans \mathbf{G} , alors il existe un cycle orienté u, v, u dans \mathbf{G} . \square

Exemple 2.72. *Soit le digraphe télescopique \mathbf{G} représenté figure 2.30. Les sommets 1, 2, 3, 4, 1 forment un cycle orienté dans \mathbf{G} . On observe la présence de l'arc symétrique $(2, 3), (3, 2)$ prévu par la propriété 2.71*

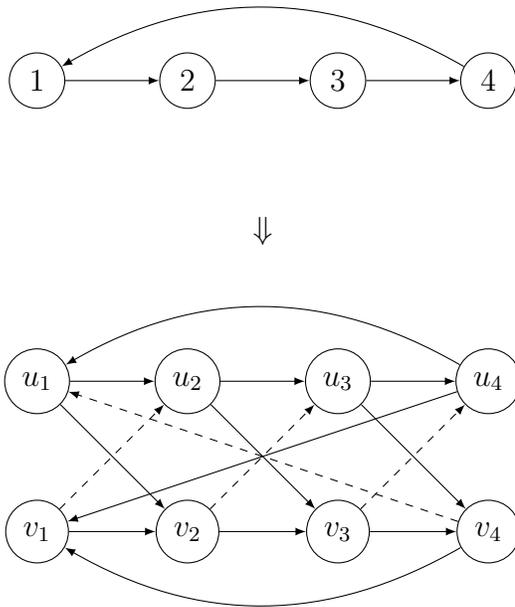
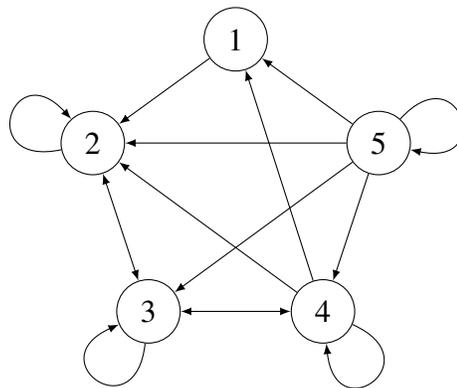


Figure 2.29 – Réduction de CYCLE à BICYCLE.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 2.30 – Cycle dans un digraphe télescopique.

Corollaire 2.73. *Le problème $\overline{\text{TELESCOPIQUE}} \cup \text{CYCLE}$ appartient à FO.*

Démonstration. Dans un premier temps, on vérifie que l'entrée contient ou pas d'arcs séparés. S'il existe des arcs séparés, alors l'entrée est dans le langage. Sinon, on vérifie la présence d'arcs symétriques. Si elle n'en contient pas alors l'entrée n'est pas dans le langage, sinon elle l'est. \square

Il existe donc un exemple pour lequel l'union du problème $\overline{\text{TELESCOPIQUE}}$ avec un problème NL-complet est un langage FO.

La question qui nous préoccupe est donc : $\overline{\text{TELESCOPIQUE}} \cup \text{BICYCLE}$ est-il un problème FO ? De manière plus large, pour quels problèmes $P \in \text{NL}$ le problème $\overline{\text{TELESCOPIQUE}} \cup P$ est-il dans FO ? NL-complet ? Si de telles questions étaient résolues, on pourrait également s'interroger sur la complexité des algorithmes permettant de reconnaître ces problèmes. Ces questions sont encore ouvertes pour le moment.

2.2 Graphes télescopiques

On étudie maintenant la complexité du problème $\text{HOM}(\mathbf{G}_L)$ lorsque \mathbf{G} est télescopique. On a vu que les digraphes télescopiques sont d'une forme très particulière : les voisinages sortants de leurs sommets sont comparables deux à deux par inclusion (2.10). Cette propriété permet de définir un ordre total naturel sur l'ensemble des voisinages sortants des sommets, qui induit lui-même un ordre total sur les sommets.

Définition 2.74. *Soit \mathbf{G} un graphe orienté télescopique à n sommets. Soit $\equiv_{\mathbf{G}}$ la relation d'équivalence sur les sommets de \mathbf{G} définie par $u \equiv_{\mathbf{G}} v \Leftrightarrow \delta^+u = \delta^+v$.*

Pour chaque classe d'équivalence $[u]_{\equiv_{\mathbf{G}}}$, on définit une relation d'ordre total arbitraire $\preceq_{\mathbf{G}}^{[u]}$.

Soient v_1, \dots, v_n les sommets de \mathbf{G} tels que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

- si $\delta^+(v_i) \neq \delta^+(v_j)$, alors $i \leq j$ si et seulement si $\delta^+(v_i) \subseteq \delta^+(v_j)$;*
- si $\delta^+(v_i) = \delta^+(v_j)$, alors $i \leq j$ si et seulement si $v_i \preceq_{\mathbf{G}}^{[v_i]} v_j$.*

On définit la relation binaire $\leq_{\mathbf{G}}^+$ sur les sommets de \mathbf{G} comme suit :

- si $\delta_{\mathbf{G}}^+(u) = \delta_{\mathbf{G}}^+(v)$, alors $u \leq_{\mathbf{G}}^+ v$ si et seulement si $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} v$;*
- si $\delta_{\mathbf{G}}^+(u) \neq \delta_{\mathbf{G}}^+(v)$, alors $u \leq_{\mathbf{G}}^+ v$ si et seulement si $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(v)$.*

Soit $\max_{\mathbf{G}}^+ : V(\mathbf{G}^2) \rightarrow V(\mathbf{G})$ définie par

$$\max_{\mathbf{G}}^+(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq_{\mathbf{G}}^+ b \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\min_{\mathbf{G}}^+ : V(\mathbf{G}^2) \rightarrow V(\mathbf{G})$ définie par

$$\min_{\mathbf{G}}^+(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq_{\mathbf{G}}^+ b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 2.75. Soit \mathbf{G} un digraphe télescopique. La relation $\leq_{\mathbf{G}}^+$ est une relation d'ordre total.

Démonstration. Réflexivité : soit u un sommet de \mathbf{G} . On a $\delta^+(u) = \delta^+(u)$ et puisque $\preceq_{\mathbf{G}}^{[u]}$ est une relation d'ordre, on a $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} u$. Par définition, on a alors $u \leq_{\mathbf{G}}^+ u$.

Antisymétrie : soient u et v des sommets de \mathbf{G} tels que $u \leq_{\mathbf{G}}^+ v$ et $v \leq_{\mathbf{G}}^+ u$. On a deux cas de figure :

- si $\delta^+(u) = \delta^+(v)$, on a $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} v$ et $v \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} u$. Par conséquent $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} v$, donc $u = v$;
- si $\delta^+(u) \neq \delta^+(v)$, on a $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(v)$ et $\delta^+(v) \subseteq \delta^+(u)$, donc $\delta^+(u) = \delta^+(v)$, ce qui est impossible par hypothèse.

Transitivité : soient u, v, w des sommets de \mathbf{G} tels que $u \leq_{\mathbf{G}}^+ v \leq_{\mathbf{G}}^+ w$. On a quatre cas de figure :

- si $\delta^+(u) = \delta^+(v) = \delta^+(w)$, alors $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} v \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} w$, donc $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} w$, donc $u \leq_{\mathbf{G}}^+ w$;
- si $\delta^+(u) = \delta^+(v)$ et $\delta^+(v) \neq \delta^+(w)$, alors $\delta^+(v) \subseteq \delta^+(w)$, donc $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(w)$, donc $u \leq_{\mathbf{G}}^+ w$;
- si $\delta^+(u) \neq \delta^+(v)$ et $\delta^+(v) = \delta^+(w)$, alors $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(v)$, donc $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(w)$, donc $u \leq_{\mathbf{G}}^+ w$;
- si $\delta^+(u) \neq \delta^+(v)$ et $\delta^+(v) \neq \delta^+(w)$, alors $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(v)$ et $\delta^+(v) \subseteq \delta^+(w)$, donc $\delta^+(u) \subseteq \delta^+(w)$, donc $u \leq_{\mathbf{G}}^+ w$.

□

Propriété 2.76. Soit \mathbf{G} un graphe orienté télescopique. La fonction $\max_{\mathbf{G}}^+$ est un polymorphisme de \mathbf{G} .

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in V(\mathbf{G})$ tels que $(a, c), (b, d) \in E(\mathbf{G})$, $\max_{\mathbf{G}}^+(a, b) = a$ et $\max_{\mathbf{G}}^+(c, d) = d$. Puisque $\max_{\mathbf{G}}^+(a, b) = a$, alors $b \leq_{\mathbf{G}}^+ a$, donc $N^+(b) \subseteq N^+(a)$. Puisque $d \in N^+(b)$, alors $d \in N^+(a)$, d'où $(a, d) \in E(\mathbf{G})$

□

Corollaire 2.77. Soit \mathbf{G} un digraphe télescopique, alors \mathbf{G} admet des polymorphismes totalement symétriques et idempotents d'arité k pour tout $k \geq 2$.

Démonstration. Le polymorphisme $max_{\mathbf{G}^+}$ est défini comme étant le maximum de deux sommets de \mathbf{G} , pour un certain ordre total imposé sur les sommets de \mathbf{G} . En composant $max_{\mathbf{G}^+}$, on définit naturellement un polymorphisme k -aire dont le résultat est le maximum de ses arguments. \square

Ceci signifie que pour tout digraphe télescopique \mathbf{G} , le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ peut être résolu en temps polynomial par un algorithme de cohérence d'arc (voir chapitre 3). La famille des digraphes télescopiques avec listes donne donc naissance à une famille de problèmes d'homomorphisme tractables.

On peut aller un peu plus loin.

Définition 2.78. Soit $\equiv_{\mathbf{G}}$ la relation d'équivalence sur les sommets de \mathbf{G} définie par $u \equiv_{\mathbf{G}} v \Leftrightarrow \delta^- u = \delta^- v$.

Pour chaque classe d'équivalence $[u]_{\equiv_{\mathbf{G}}}$, on définit une relation d'ordre total arbitraire $\preceq_{\mathbf{G}}^{[u]}$.

Soient v_1, \dots, v_n les sommets de \mathbf{G} tels que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

- si $\delta^-(v_i) \neq \delta^-(v_j)$, alors $i \leq j$ si et seulement si $\delta^-(v_i) \subseteq \delta^-(v_j)$;
- si $\delta^-(v_i) = \delta^-(v_j)$, alors $i \leq j$ si et seulement si $v_i \preceq_{\mathbf{G}}^{[v_i]} v_j$.

On définit la relation binaire $\leq_{\mathbf{G}}^-$ sur les sommets de \mathbf{G} comme suit :

- si $\delta_{\mathbf{G}}^-(u) = \delta_{\mathbf{G}}^-(v)$, alors $u \leq_{\mathbf{G}}^- v$ si et seulement si $u \preceq_{\mathbf{G}}^{[u]} v$;
- si $\delta_{\mathbf{G}}^-(u) \neq \delta_{\mathbf{G}}^-(v)$, alors $u \leq_{\mathbf{G}}^- v$ si et seulement si $\delta^-(u) \subseteq \delta^-(v)$.

Soit $min_{\mathbf{G}}^- : V(\mathbf{G}^2) \rightarrow V(\mathbf{G})$ définie par

$$min_{\mathbf{G}}^+(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq_{\mathbf{G}}^- b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette relation est le pendant de la relation $\leq_{\mathbf{G}}^+$, on considère les voisinages entrants des sommets plutôt que leurs voisinages sortants.

Lemme 2.79. Soit \mathbf{G} un digraphe télescopique. Il existe un polymorphisme majorité conservatif sur \mathbf{G} .

Démonstration. Soit $R(a, b, c)$ le sous-ensemble de $V(\mathbf{G})$ défini par

$$R(a, b, c) = \{a, b, c\} \setminus (\{min_{\mathbf{G}}^+(a, b, c)\} \cup \{min_{\mathbf{G}}^-(a, b, c)\}).$$

Soit $m : V(\mathbf{G})^3 \rightarrow V(\mathbf{G})$ respectant la contrainte

$$m(a, b, c) = m(a, c, b) = m(b, a, c) = m(b, c, a) = m(c, a, b) = m(c, b, a)$$

et définie par :

$$m(a, b, c) = \begin{cases} x & x \in R(a, b, c) \text{ si } |\{a, b, c\}| = 3 \\ a & \text{si } a = b \text{ ou } a = c \\ b & \text{si } b = c \end{cases}$$

Si $|\{a, b, c\}| = 3$, dans le cas où $R(a, b, c)$ serait de cardinalité supérieure à 1, x est choisi indifféremment parmi les éléments de $R(a, b, c)$. ceci étant toujours possible puisque $\min_{\mathbf{G}}^-$ et $\min_{\mathbf{G}}^+$ sont des fonctions symétriques. Puisque $R(a, b, c)$ ne peut être vide, la fonction m est bien définie. Elle est également symétrique et conservative.

Par définition, on a bien $m(a, a, b) = m(a, b, a) = m(b, a, a)$. Donc m est une opération de majorité.

Supposons que m ne soit pas un polymorphisme de \mathbf{G} . Puisque m est symétrique, on peut supposer sans perte de généralité l'existence de sommets $a, b, c, d, e, f \in V(\mathbf{G})$ tels que $(a, d), (b, e), (c, f) \in E(\mathbf{G})$, $(a, e) \notin E(\mathbf{G})$, $m(a, b, c) = a$ et $m(d, e, f) = e$.

Si $a = b$, alors on a $(a, e) = (b, e) \in E(\mathbf{G})$, ce qui est impossible par hypothèse.

Si $a \neq b$ et $b = c$, alors $m(a, b, c) = b$, ce qui est impossible par hypothèse.

Supposons que $a \neq b$, $b \neq c$ et $a = c$. Si $d = e$ ou $e = f$, alors on a $(a, e) \in E(\mathbf{G})$, ce qui est impossible par hypothèse. Si $d \neq e$, $e \neq f$ et $d = f$, alors on a $m(d, e, f) = d$, ce qui est impossible par hypothèse. Si $|\{d, e, f\}| = 3$, puisque $m(d, e, f) = e$, alors $\min_{\mathbf{G}}^-(d, e, f) \neq e$. Puisque $(a, d), (a, f) \in E(\mathbf{G})$ et $(a, e) \notin E(\mathbf{G})$, alors $e <_{\mathbf{G}}^- d, f$, d'où $\min_{\mathbf{G}}^-(d, e, f) = e$, ce qui est impossible.

Finalement, supposons que $|\{a, b, c\}| = 3$. Si $d = e$, alors on a $(a, d) = (a, e) \in E(\mathbf{G})$, ce qui est impossible par hypothèse.

Si $d \neq e$ et $d = f$, alors on a $m(d, e, f) = d$, ce qui est impossible par hypothèse.

Si $d \neq e$, $d \neq f$ et $e = f$, puisque $(a, e) \notin E(\mathbf{G})$ et $(b, e), (c, e) \in E(\mathbf{G})$, alors on a $a <_{\mathbf{G}}^+ b, c$, donc $\min_{\mathbf{G}}^+(a, b, c) = a$, ce qui est impossible par hypothèse.

Supposons que $|\{d, e, f\}| = 3$. Puisque $m(a, b, c) = a$, alors $a \neq \min_{\mathbf{G}}^+(a, b, c)$. Puisque $(b, e) \in E(\mathbf{G})$ et $(a, e) \notin E(\mathbf{G})$, alors $a <_{\mathbf{G}}^+ b$. On a alors $c \leq_{\mathbf{G}}^+ a \leq_{\mathbf{G}}^+ b$. Puisque $m(d, e, f) = e$, alors on a $e \neq \min_{\mathbf{G}}^-(d, e, f)$. Puisque $(a, d) \in E(\mathbf{G})$ et $(a, e) \notin E(\mathbf{G})$, alors on a $e \leq_{\mathbf{G}}^- d$. Par conséquent, on a $f \leq_{\mathbf{G}}^- e \leq_{\mathbf{G}}^- d$. Puisque $(c, f) \in E(\mathbf{G})$ et $c \leq_{\mathbf{G}}^+ a$, alors $(a, f) \in E(\mathbf{G})$. Puisque $(a, f) \in E(\mathbf{G})$ et $f \leq_{\mathbf{G}}^- e$, alors $(a, e) \in E(\mathbf{G})$,

ce qui est impossible par hypothèse. \square

Ce résultat permet d'affiner la complexité de $HOM(\mathbf{G}_L)$ lorsque \mathbf{G} est un digraphe télescopique.

Théorème 2.80. *Soit \mathbf{G} un digraphe télescopique. Soit \mathcal{V} la variété associée à \mathbf{G} , alors :*

1. *si \mathcal{V} n'admet que le type 3, alors $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO (donc à L);*
2. *si \mathcal{V} omet les types 1, 2, 5 et admet le type 4, alors $HOM(\mathbf{G}_L)$ est NL-complet.*

Démonstration. L'existence d'un polymorphisme majorité sur \mathbf{G}_L (lemme 2.79) garantit que la variété engendrée par \mathbf{G}_L omet les types 1, 2 et 5 (théorème 2.31).

Si la variété admet le type 4, $HOM(\mathbf{G}_L)$ est décidé par un programme DATALOG linéaire (théorème 1.68), donc $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à NL. De plus, $HOM(\mathbf{G}_L)$ est NL-complet (théorème 1.78).

Si la variété n'admet que le type 3, alors il existe une famille de polymorphismes k -permutable sur \mathbf{G}_L [31]. L'observation 2.34 implique alors que \mathbf{G}_L ne contient pas de bicycle entravant. Par conséquent, $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO (théorème 2.39). \square

Pour les digraphes télescopiques avec listes, les conjectures de [40] sont donc vérifiées : les types de la variété associé au digraphe télescopique avec listes \mathbf{G}_L déterminent totalement la classe de complexité du problème d'homomorphisme engendré par \mathbf{G}_L .

CHAPITRE 3

GRAPHES AVEC LISTES ET COHÉRENCE D'ARC

On sait que le problème d'homomorphisme des graphes non orientés admet une dichotomie [29]. Lorsqu'on introduit les listes, le problème d'homomorphisme devient plus complexe : les listes constituent des contraintes supplémentaires. Cette augmentation du nombre de contraintes impose plus de conditions sur les structures relationnelles qui engendrent des problèmes d'homomorphisme tractables. Par conséquent, il devient plus facile de les caractériser. Ajouter les listes simplifie donc l'étude du problème d'homomorphisme. Le théorème 1.85 établit l'existence d'une dichotomie pour tous les problèmes d'homomorphismes liés à des structures conservatives.

La caractérisation de ces graphes a été proposée par Feder, Hell et Huang [25], puis affinée par Egri, Krokhn, Larose et Tesson [20].

On caractérise ici les graphes avec listes qui engendrent des problèmes d'homomorphisme résolubles par cohérence d'arc. On répond ainsi à une question posée par Feder et Hell [24] en affinant la caractérisation des graphes avec listes engendrant des problèmes tractables proposée par Feder, Hell et Huang [25].

3.1 Cohérence d'arc

La cohérence d'arc est une méthode simple et intuitive de résolution de problèmes de satisfaction de contraintes, préalable à la plupart des algorithmes de résolution. Elle est basée sur l'observation locale de contraintes.

Définition 3.1. Soit \mathbf{H} un digraphe avec listes et \mathbf{G} une structure similaire à \mathbf{H} . Soient L et L' des sous-ensembles de $V(\mathbf{H})$. On dit que la paire (L, L') est cohérente si :

- pour tout $u \in L$, il existe $v \in L'$ tel que $(u, v) \in E(\mathbf{H})$; et
- pour tout $v \in L'$, il existe $u \in L$ tel que $(u, v) \in E(\mathbf{H})$.

La structure \mathbf{G} est dite cohérente si pour toute paire de sommets (u, v) de \mathbf{G} , la paire de listes (L_u, L_v) est cohérente.

On voit que si une paire de listes (L_u, L_v) n'est pas cohérente, alors il existe un sommet x dans L_u (resp. L_v) tel que aucun homomorphisme de \mathbf{G} vers \mathbf{H} ne permet d'envoyer u (resp. v) vers x . On peut donc éliminer d'emblée toute solution se proposant d'envoyer u (resp. v) vers x .

C'est ainsi que procède un algorithme de cohérence d'arc : il vérifie chaque paire de sommets de G et élimine les incohérences de leurs listes. On procède à cette vérification en boucle jusqu'à ce que le contenu des listes soit stable, c'est à dire qu'il n'existe plus de paire de listes de sommets incohérente ou qu'il existe une liste vide. Au final, on obtient un nouveau digraphe avec listes G' nécessairement cohérent en un nombre polynomial d'opérations. Il existe de nombreux algorithmes qui mettent en oeuvre cette méthode, la plupart d'entre eux sont optimaux [5].

Au terme de l'algorithme de cohérence d'arc, on a deux possibilités. S'il existe une liste vide L_u dans G' , alors il n'existe pas d'homomorphisme de G vers H . En effet, si L_u est vide dans G' , cela signifie qu'aucune des images possibles de u n'est compatible avec un homomorphisme de G vers H . S'il n'existe aucune liste vide, on ne peut pas conclure, dans le cas général, qu'il existe un homomorphisme de G vers H .

Exemple 3.2. *Décider l'existence d'un homomorphisme avec listes de K_3 vers K_2 lorsque toutes les listes associées aux sommets de K_3 contiennent les deux sommets de K_2 est un exemple classique où la cohérence d'arc échoue.*

Soient 0 et 1 les sommets de K_2 , on voit qu'une paire $(\{0, 1\}, \{0, 1\})$ est cohérente. Ainsi, toutes les paires de listes de sommets de K_3 sont cohérentes, pourtant il n'existe aucun homomorphisme de K_3 vers K_2 .

Si, pour tout G tel que la cohérence d'arc ne vide aucune liste de G , il existe toujours un homomorphisme de G vers H , on dit que $HOM(H)$ est résoluble par cohérence d'arc.

Définition 3.3. *Soit H un digraphe. On définit le graphe $\mathcal{P}(H)$ tel que :*

- $V(\mathcal{P}(H)) = \{U \mid U \subseteq V(H) \text{ et } U \neq \emptyset\}$;
- $E(\mathcal{P}(H)) = \{(U, V) \mid U \text{ et } V \text{ forment une paire cohérente}\}$.

Théoreme 3.4 ([26],[18]). *Soit H un digraphe, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $HOM(H_L)$ est résoluble par cohérence d'arc ;
- il existe un homomorphisme conservatif de $\mathcal{P}(H)$ vers H ;
- pour tout $k \geq 2$, H admet un polymorphisme conservatif TSI d'arité k .

L'équivalence entre résoluble par cohérence d'arc et existence d'un homomorphisme entre $\mathcal{P}(H)$ et H est intuitive : à la fin de l'algorithme de cohérence d'arc appliqué à un graphe G , le graphe avec listes obtenu G' contient une liste vide ou est homomorphe

à $\mathcal{P}(\mathbf{H})$; s'il existe un homomorphisme entre $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ et \mathbf{H} , alors l'absence de liste vide dans \mathbf{G}' implique l'existence d'un homomorphisme entre \mathbf{G} et \mathbf{H} .

On se propose de caractériser les graphes \mathbf{H} tels que la cohérence d'arc décide $HOM(\mathbf{H}_L)$. On étudie pour cela l'existence de polymorphismes conservatifs TSI d'arité arbitraire. Pour prouver que $HOM(\mathbf{H}_L)$ n'est pas résoluble par cohérence d'arc, on infirmera l'existence d'un polymorphisme TSI d'arité 2. Pour prouver que $HOM(\mathbf{H}_L)$ est résoluble par cohérence d'arc, on prouvera l'existence d'un polymorphisme conservatif TSI d'arité 2 et on construira à partir de celui-ci des polymorphismes conservatifs TSI d'arité arbitraire.

3.2 Caractérisation

Cette section traite de résultats présentés dans [38]. Commençons par deux observations dont nous nous servirons à plusieurs reprises.

Observation 3.5. *Soit \mathbf{H} un graphe. S'il existe une arête (u, v) sans boucle dans \mathbf{H} , alors \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme conservatif TSI d'arité 2.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps qu'il existe u et v tels que $(u, v) \in E(\mathbf{H})$ et $(u, u), (v, v) \notin E(\mathbf{H})$. Supposons que \mathbf{H} admette un polymorphisme conservatif TSI f d'arité 2. On doit alors avoir $(f(u, v), f(v, u)) \in E(\mathbf{H})$. Puisque f est totalement symétrique et conservatif, on a $f(u, v) = f(v, u) \in \{u, v\}$. Or, $(u, u), (v, v) \notin E(\mathbf{H})$, donc $(f(u, v), f(v, u)) \notin E(\mathbf{H})$. \square

Cette observation peut en fait être généralisée comme suit.

Observation 3.6. *Soit \mathbf{H} un graphe. S'il existe un sommet $u \in V(\mathbf{G})$ tel que u ne porte pas de boucle et $N(u)$ n'est pas une clique réflexive, alors \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme conservatif TSI d'arité 2.*

Démonstration. Supposons que \mathbf{H} admette un polymorphisme conservatif TSI f d'arité 2. Supposons que $u \in V(\mathbf{H})$ ne porte pas de boucle et que $N(u)$ ne soit pas une clique réflexive. D'après l'observation 3.5, $N(u)$ est nécessairement réflexif. Supposons qu'il existe $v, w \in N(u)$ tels que $(v, w) \notin E(\mathbf{H})$. On doit alors avoir $f(u, v) = f(v, u) = v$. En effet, puisque $(u, v) \in E(\mathbf{H})$ et que f est un polymorphisme conservatif TSI, on a $(f(u, v), f(v, u)) \in E(\mathbf{H})$ et $f(u, v) = f(v, u) \in \{u, v\}$. Pour les mêmes raisons, on doit avoir $f(u, w) = f(w, u) = w$. Puisque $(u, v), (u, w) \in E(\mathbf{H})$, alors $(f(u, v), f(w, u)) \in E(\mathbf{H})$. Or $(f(u, v), f(w, u)) = (v, w) \notin E(\mathbf{H})$. \square

3.2.1 Graphes irréflexifs

À la lumière de l'observation 3.6, il est évident qu'aucun graphe irréflexif \mathbf{H} n'est tel que $HOM(\mathbf{H}_L)$ est résoluble par cohérence d'arc.

3.2.2 Graphes réflexifs

Le cas des graphes réflexifs est également simple à résoudre. On s'appuie sur la caractérisation proposée par Feder et Hell [23].

Définition 3.7. *Soit \mathbf{H} un graphe. S'il existe une famille $\{I_u \mid u \in V(\mathbf{H})\}$ d'intervalles de nombres réels tels que $(u, v) \in E(\mathbf{H})$ si et seulement si $I_u \cap I_v \neq \emptyset$, alors on dit que \mathbf{H} est un graphe d'intervalle.*

Notons que cette définition implique qu'un graphe d'intervalle est réflexif.

Théoreme 3.8 ([23]). *Soit \mathbf{H} un graphe réflexif. Le problème $HOM(\mathbf{H}_L)$ est tractable si \mathbf{H} est un graphe d'intervalle, sinon il est NP-complet.*

Tel que suggéré dans [23], il est possible de prouver qu'un graphe d'intervalle \mathbf{H} admet un ordonnancement minimal de ses sommets.

Définition 3.9. *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle. On dit que \mathbf{H} admet un ordonnancement minimal s'il existe un ordre total $\leq_{\mathbf{H}}$ sur ses sommets tel que la fonction $min_{\mathbf{H}} : \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}$ définie par :*

$$min_{\mathbf{H}}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq_{\mathbf{H}} b \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un polymorphisme de \mathbf{H} .

Définition 3.10. *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle. On dit que \mathbf{H} admet un ordonnancement maximal s'il existe un ordre total $\leq_{\mathbf{H}}$ sur ses sommets tel que la fonction $max_{\mathbf{H}} : \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}$ définie par :*

$$max_{\mathbf{H}}(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq_{\mathbf{H}} b \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un polymorphisme de \mathbf{H} .

Les polymorphismes $min_{\mathbf{H}}$ et $max_{\mathbf{H}}$ sont des polymorphismes conservatifs TSI.

Les fonctions $\min_{\mathbf{H}}$ et $\max_{\mathbf{H}}$ peuvent être définies naturellement pour des arités supérieures à 2 en considérant que $\min_{\mathbf{H}}(x_1, \dots, x_k)$ (respectivement $\max_{\mathbf{H}}(x_1, \dots, x_k)$) est le plus petit (respectivement le plus grand) élément de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_k\}$ en regard de la relation d'ordre totale $\leq_{\mathbf{H}}$. Ces fonctions sont clairement TSI. Le résultat suivant est alors immédiat.

Théoreme 3.11. *Soit \mathbf{H} une structure relationnelle. Si \mathbf{H} admet un ordonnancement minimal ou maximal, alors pour tout $k \geq 2$, \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif TSI d'arité k .*

Théoreme 3.12. *Soit \mathbf{H} un graphe, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- \mathbf{H} est un graphe d'intervalle ;
- il existe un ordre total \leq sur les cliques maximales de \mathbf{H} tel que si A et C sont des cliques maximales et $A \leq C$, alors tout sommet x appartenant à A et C appartient également à toute clique maximale B telle que $A \leq B \leq C$ [27] ;
- \mathbf{H} n'admet pas de sous-graphe induit appartenant aux familles représentées figure 3.1 [42].

Le résultat suivant est signalé dans [23].

Lemme 3.13. *Soit \mathbf{H} un graphe d'intervalle, alors \mathbf{H} admet un ordonnancement minimal.*

Démonstration. Soient v_1, \dots, v_n les sommets de \mathbf{H} . Soient I_1, \dots, I_n les intervalles représentant respectivement les sommets v_1, \dots, v_n . On dénote $b(I_i)$ le point de départ de l'intervalle I_i . On dénote $e(I_i)$ le point d'arrivée de l'intervalle I_i . Puisque le nombre d'intervalle est fini, on peut supposer sans perte de généralité qu'il n'existe pas deux intervalles distincts I_i et I_j tels que $b(I_i) = b(I_j)$. On définit la relation $\leq_{\mathbf{H}}$ comme suit :

$$v_i \leq_{\mathbf{H}} v_j \Leftrightarrow b(I_i) \leq b(I_j).$$

Pour tout sommet v_i , il existe un intervalle I_j le représentant. Puisque la relation $<$ sur les nombres réels est une relation d'ordre totale, alors la relation $\leq_{\mathbf{H}}$ est également une relation d'ordre totale.

Il reste à vérifier que la fonction $\min_{\mathbf{H}}$ induite par $\leq_{\mathbf{H}}$ est un polymorphisme. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors $v_i, v_j, v_k, v_l \in V(\mathbf{H})$ tels que $(v_i, v_j), (v_k, v_l) \in E(\mathbf{H})$, $(v_i, v_l) \notin E(\mathbf{H})$, $\min_{\mathbf{H}}(v_i, v_k) = v_i$ et $\min_{\mathbf{H}}(v_j, v_l) = v_l$. On a alors $b(I_i) \leq b(I_k)$ et $b(I_l) \leq b(I_j)$.

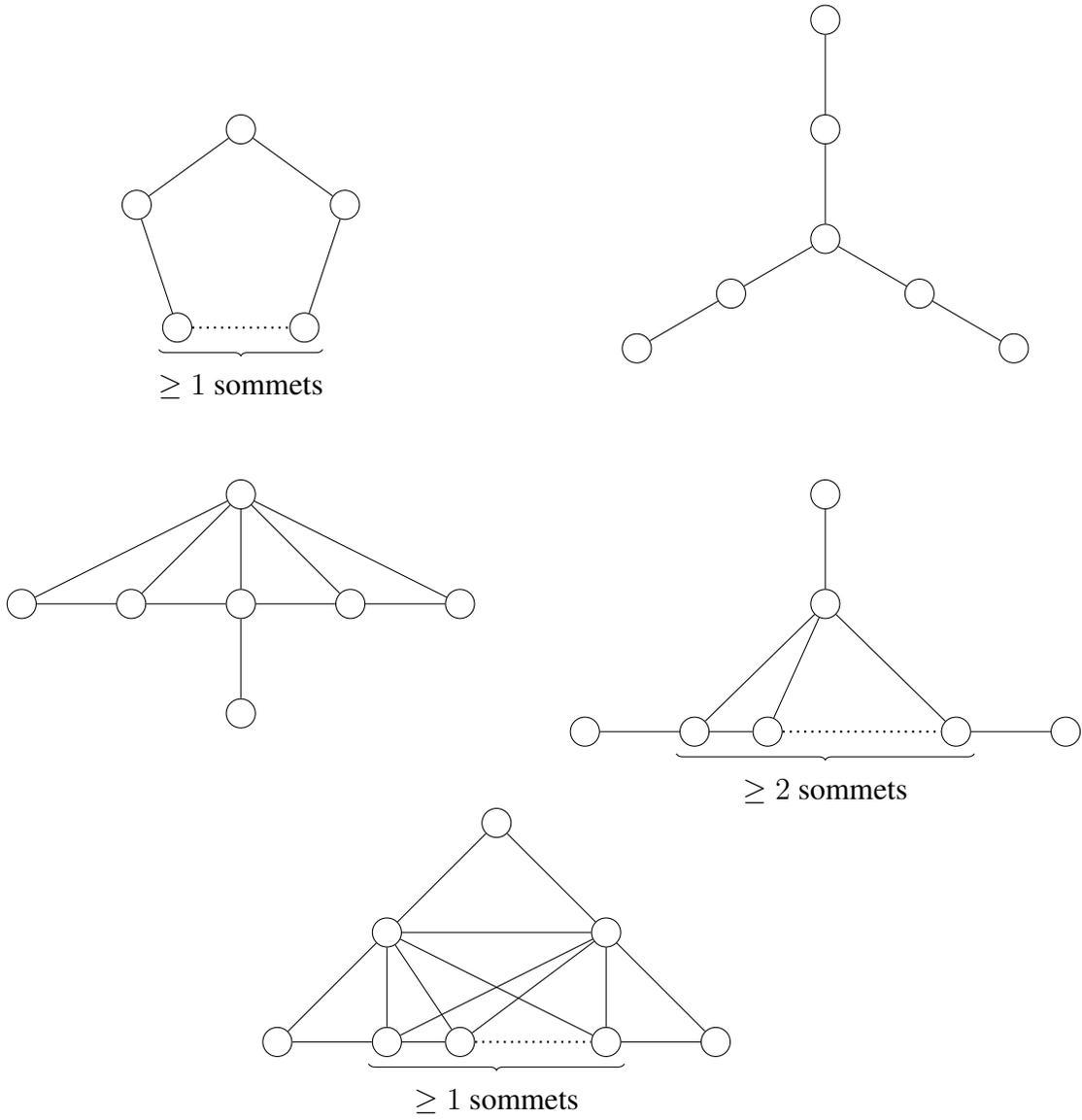


Figure 3.1 – Sous-graphes interdits des graphes d'intervalle.

Puisque $(v_i, v_l) \notin E(\mathbf{H})$, alors les intervalles I_i et I_l sont disjoints.

Supposons que $e(I_l) < b(I_i)$. Puisque $b(I_i) \leq b(I_k)$, alors les intervalles I_l et I_k sont disjoints, ce qui est impossible puisque $(v_k, v_l) \in E(\mathbf{H})$. Supposons que $e(I_i) < b(I_l)$. Puisque $b(I_l) \leq b(I_j)$, alors les intervalles I_i et I_j sont disjoints, ce qui est impossible puisque $(v_i, v_j) \in E(\mathbf{H})$.

La fonction $\min_{\mathbf{H}}$ est donc un polymorphisme de \mathbf{H} . \square

Corollaire 3.14. *Soit \mathbf{H} un graphe d'intervalle, alors $\text{HOM}(\mathbf{H}_L)$ est résoluble par cohérence d'arc.*

3.3 Polymorphismes monochromatiques

L'utilisation des polymorphismes TSI est une manière pratique de confirmer ou d'infirmier la possibilité de résolution par cohérence d'arc. Toutefois, l'observation 3.5 restreint considérablement son champ d'action : on ne peut espérer l'utiliser que sur des graphes ne contenant aucune arête sans boucle. Or, il n'est pas exclu que des algorithmes intuitivement très proches de la cohérence d'arc puissent être employés pour résoudre certains problèmes engendrés par des graphes avec arêtes sans boucle, par exemple une approche mixte basée sur un prétraitement puis une résolution par cohérence d'arc.

En particulier, on peut se poser la question suivante : que se passe-t-il lorsque seul un sous-graphe de $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ est homomorphe à \mathbf{H} ?

On s'intéresse ici au cas des graphes bipartis. En vertu de l'observation 3.5, un graphe biparti contenant au moins une arête ne contient pas de polymorphisme TSI d'arité 2.

Définition 3.15. *Soit \mathbf{H} un graphe biparti. Soient U et D des classes de couleurs de \mathbf{H} . On appelle polymorphisme monochromatique d'arité k une fonction*

$$f : U^k \cup D^k \rightarrow V(\mathbf{H})$$

telle que si $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ sont des arêtes de \mathbf{G} , alors $(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k))$ est une arête de \mathbf{G} .

Le polymorphisme monochromatique f est dit :

- *idempotent si $f(x, \dots, x) = x$ pour tout $x \in V(\mathbf{H})$;*
- *conservatif si $f(x_1, \dots, x_k) \in \{x_1, \dots, x_k\}$ pour tout $x_1, \dots, x_k \in V(\mathbf{H})$;*
- *totalelement symétrique si pour tout $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ tels que $\{x_1, \dots, x_k\} = \{y_1, \dots, y_k\}$ on a $f(x_1, \dots, x_k) = f(y_1, \dots, y_k)$.*

Un polymorphisme monochromatique est donc une fonction définie uniquement sur des uplets dont tous les éléments appartiennent à la même classe de couleur et qui se comporte comme un polymorphisme.

On dit que les instances biparties de $HOM(\mathbf{H})$ sont résolubles par cohérence d'arc si la cohérence d'arc décide correctement l'existence d'un homomorphisme d'une structure bipartie \mathbf{G} vers \mathbf{H} .

Définition 3.16. Soit \mathbf{H} un graphe. Soient X et Y des ensembles disjoints de sommets de \mathbf{H} . On note $\mathcal{P}_{X,Y}(\mathcal{H})$ le sous-graphe de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ induit par les sommets de $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ ne contenant que des éléments de X ou que des éléments de Y .

Théoreme 3.17. Soit \mathbf{H} un graphe biparti. Soient U et D des classes de couleur de \mathbf{H} . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. les instances biparties de $HOM(\mathbf{H}_L)$ sont résolubles par cohérence d'arc ;
2. il existe un homomorphisme f de $\mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})$ vers \mathbf{H} tel que $f(X) \in X$ pour tout $X \in \mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})$;
3. pour tout $k \geq 2$, il existe un polymorphisme monochromatique conservatif TSI $t_k : U^k \cup D^k \rightarrow V(\mathbf{H})$.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) Soit \mathbf{G} le graphe avec listes suivant :

- à chaque sous-ensemble non vide X de U ou D , on fait correspondre un sommet v_X dans \mathbf{G} ;
- à chaque sommet v_X de \mathbf{G} , on associe la liste X ;
- deux sommets v_X et v_Y de \mathbf{G} sont voisins si et seulement si X et Y forment une paire cohérente.

La cohérence d'arc ne modifie pas le graphe \mathbf{G} . Par hypothèse, il existe un homomorphisme g de \mathbf{G} vers \mathbf{H} tel que pour tout sommet v_X , $f(v_X) \in X$. On définit la fonction $h : V(\mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})) \rightarrow V(\mathbf{H})$ par $h(X) = g(v_X)$. Par définition de g , on a $h(X) \in X$. Si X et Y sont voisins dans $\mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})$, alors X et Y forment une paire cohérente, donc X et Y sont voisins dans \mathbf{G} . Puisque g est un homomorphisme, alors $h(X) = g(v_x)$ et $h(Y) = g(v_y)$ sont voisins dans \mathbf{H} . La fonction h est un homomorphisme.

(2) \Rightarrow (1) Soit \mathbf{G} une instance bipartie de $HOM(\mathbf{H}_L)$ telle que la cohérence d'arc ne vide aucune des listes de \mathbf{G} . Soit \mathbf{G}' le graphe obtenu à partir de \mathbf{G} par cohérence d'arc. On a deux possibilités :

- soit les listes de \mathbf{G}' contiennent uniquement des sommets de U ou uniquement des sommets de D ;

– soit chaque liste de \mathbf{G}' contient des sommets de U et des sommets de D .

Dans le premier cas, soit $\mathbf{G}''' = \mathbf{G}'$. Dans le deuxième cas, soit \mathbf{G}'' le graphe obtenu à partir de \mathbf{G}' en supprimant tous les sommets de U de la liste d'un des sommets. Soit \mathbf{G}''' le graphe obtenu par cohérence d'arc à partir de \mathbf{G}'' . Pour tout sommet u de \mathbf{G}''' , on note L_u la liste associée à u . Soit $g : V(\mathbf{G}''') \rightarrow V(\mathbf{H})$ le fonction définie par $g(u) = f(L_u)$. On a $g(u) = f(L_u) \in L_u$, par définition de f . Soient x et y des sommets voisins dans \mathbf{G}''' . Les listes L_x et L_y forment une paire cohérente. Par conséquent, L_x et L_y sont des sommets voisins dans $\mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})$, donc $f(L_x)$ et $f(L_y)$ sont voisins dans \mathbf{H} . Donc, g est un homomorphisme respectant les listes de \mathbf{G}''' vers \mathbf{H} . Puisque \mathbf{G}''' est obtenu de \mathbf{G} en réduisant les listes de \mathbf{G} , alors il existe aussi un homomorphisme respectant les listes de \mathbf{G} vers \mathbf{H} .

(2) \Rightarrow (3) Pour tout $k \geq 2$, la fonction $t_k : U^k \cup D^k \rightarrow V(\mathbf{H})$ est définie par $t_k(x_1, \dots, x_k) = f(\{x_1, \dots, x_k\})$. La fonction t_k est totalement symétrique et puisque $f(\{x_1, \dots, x_k\}) \in \{x_1, \dots, x_k\}$, elle est conservative (et donc idempotente). Si les sommets x_1, \dots, x_k et y_1, \dots, y_k sont tels que $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in E(\mathbf{H})$, alors les ensembles $\{x_1, \dots, x_k\}$ et $\{y_1, \dots, y_k\}$ forment une paire cohérente, donc ils sont voisins dans $\mathcal{P}(\mathbf{H})$, donc $f(\{x_1, \dots, x_k\})$ et $f(\{y_1, \dots, y_k\})$ sont voisins dans \mathbf{H} . Les fonctions t_k sont des homomorphismes.

(3) \Rightarrow (2) Soit m un nombre supérieur ou égal à deux fois le nombre de sommets dans \mathbf{H} . La fonction $f : V(\mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})) \rightarrow V(\mathbf{H})$ est définie par

$$f(\{x_1, \dots, x_k\}) = t_m(x_1, \dots, x_k, \dots, x_k).$$

Le polymorphisme monochromatique t_m est TSI conservatif, donc f est bien définie et $f(\{x_1, \dots, x_k\}) \in \{x_1, \dots, x_k\}$. Soient $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ deux sommets voisins dans $\mathcal{P}_{U,D}(\mathbf{H})$. Les ensembles X et Y forment une paire cohérente, par conséquent, pour tout $x_i \in X$, il existe $x'_i \in Y$ tel que $(x_i, x'_i) \in E(\mathbf{H})$ et pour tout $y_i \in Y$, il existe $y'_i \in X$ tel que $(y_i, y'_i) \in E(\mathbf{H})$. Les uplets de taille m

$$(x_1, \dots, x_k, y'_1, \dots, y'_l, \dots, y'_l) \text{ et} \\ (x'_1, \dots, x'_k, y_1, \dots, y_l, \dots, y_l)$$

sont donc voisins dans \mathbf{H} . Puisque t_m est TSI conservative, on a

$$t_m(x_1, \dots, x_k, y'_1, \dots, y'_l, \dots, y_l) = t_m(x_1, \dots, x_k, \dots, x_k) \text{ et} \\ t_m(x'_1, \dots, x'_k, y_1, \dots, y_l, \dots, y_l) = t_m(y_1, \dots, y_l, \dots, y_l).$$

Puisque t_m est un polymorphisme monochromatique, alors $t_m(x_1, \dots, x_k, \dots, x_k)$ et $t_m(y_1, \dots, y_l, \dots, y_l)$ sont voisins dans \mathbf{H} . Par conséquent, les sommets $f(\{x_1, \dots, x_k\})$ et $f(\{y_1, \dots, y_l\})$ sont voisins dans \mathbf{H} . La fonction f est un polymorphisme. \square

La preuve de ce théorème nous fournit un algorithme permettant de résoudre le problème $HOM(\mathbf{G}_L)$ lorsque \mathbf{G} admet des polymorphismes monochromatiques TSI d'arité k pour tout $k \geq 2$. Il suffit d'appliquer la méthode décrite pour prouver que (2) \Rightarrow (1).

Corollaire 3.18. *Soit \mathbf{H} un graphe biparti bi-arc. Soit \mathbf{G} une structure relationnelle similaire à \mathbf{H}_L , alors :*

- si \mathbf{G} n'est pas biparti, alors il n'existe pas d'homomorphisme de \mathbf{G} vers \mathbf{H}_L ;
- sinon l'algorithme de cohérence d'arc appliqué à \mathbf{G} résoud $HOM(\mathbf{H}_L)$ pour l'instance \mathbf{G} .

Démonstration. La première proposition est trivialement vraie.

Supposons que \mathbf{G} soit biparti. Puisque \mathbf{H} est biparti et bi-arc, alors il admet un polymorphisme conservatif presque-unanimité faible (lemme 3.30), donc un polymorphisme monochromatique semi-treillis conservatif f (lemme 3.33). Par composition de f avec lui-même, on peut engendrer des polymorphismes monochromatiques conservatifs TSI d'arité arbitraire. Le théorème 3.17 permet alors de conclure. \square

Il existe donc un algorithme extrêmement proche de la simple cohérence d'arc pour résoudre le problème $HOM(\mathbf{H}_L)$ lorsque \mathbf{H} est un graphe biparti bi-arc. Notons que reconnaître qu'un graphe est bi-arc peut être fait en temps linéaire [45].

3.4 Cas général

Pour prouver que $HOM(\mathbf{H}_L)$ n'est pas résoluble par cohérence d'arc, il suffit de prouver que pour une certaine arité $k \geq 2$, il n'existe pas de polymorphisme conservatif TSI sur \mathbf{H} . Concentrons-nous sur le cas le plus simple : pourquoi un graphe \mathbf{H} n'admet-il pas de polymorphisme conservatif TSI d'arité 2 ?

Supposons qu'on essaie de définir un tel polymorphisme f progressivement, en fixant successivement les valeurs de $f(x, y)$ pour tout couple x, y de sommets de \mathbf{H} de sorte qu'à tout moment, la définition partielle de f respecte la relation d'arête et reste conservative.

Si un tel polymorphisme n'existe pas, il arrivera nécessairement une étape au cours de ce processus où l'on devra fixer une valeur $f(x, y)$ incohérente avec la définition

de fonction conservative TSI. En l'occurrence, il ne peut s'agir que d'un problème de commutativité : on essaie de définir $f(x, y) \neq f(y, x)$, ce qui ne respecte pas la définition de TSI. Comment en est-on arrivé là ?

Lorsqu'on tente de fixer la valeur de $f(x, y)$, le choix de cette valeur entraîne des conséquences sur les choix ultérieurs.

Exemple 3.19. *Considérons le graphe représenté figure 3.2. Si on a fixé arbitrairement $f(a, c) = a$, alors nécessairement, on doit fixer $f(b, d) = b$.*

La structure qui permet cette propagation de contraintes est le chemin évitant. On n'a besoin ici que d'une version non-orientée de ce concept tel que proposé par Hell et Rafiey [30].

Définition 3.20 ([30]). *Soit \mathbf{H} un graphe. Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des sommets de \mathbf{H} tels que :*

- a_1, \dots, a_n est un chemin dans \mathbf{H} ;
- b_1, \dots, b_n est un chemin dans \mathbf{H} ;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $(a_i, b_{i+1}) \notin E(\mathbf{H})$.

On dit alors que le chemin a_1, \dots, a_n évite le chemin b_1, \dots, b_n .

Remarquons que si a_1, \dots, a_n évite b_1, \dots, b_n et a_n, \dots, a_{n+m} évite b_n, \dots, b_{n+m} , alors a_1, \dots, a_{n+m} évite b_1, \dots, b_{n+m} .

Observation 3.21. *Soit \mathbf{H} un graphe. Soient $P = a_1, \dots, a_n$ et $Q = b_1, \dots, b_n$ des chemins dans \mathbf{H} tels que P évite Q . Pour tout polymorphisme conservatif d'arité 2 f tel que $f(a_1, b_1) = a_1$, on a $f(a_n, b_n) = a_n$.*

Si aucun polymorphisme conservatif TSI d'arité 2 n'existe, alors il doit exister un couple de sommets x et y tels que fixer la valeur de $f(x, y)$ entraîne $f(y, x) \neq f(x, y)$.

Définition 3.22 ([30]). *Soit \mathbf{H} un graphe. Une paire de sommets x, y de \mathbf{H} est dite inversible s'il existe dans \mathbf{H} :*

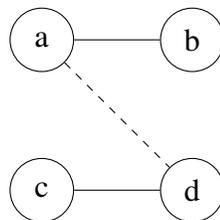


Figure 3.2 – Forçage de la valeur de $f(b, d)$.

- un chemin P de x à y et un chemin Q de y à x tels que P évite Q ;
- un chemin P' de y à x et un chemin Q' de x à y tels que P' évite Q' .

L'absence d'une paire inversible est la condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un polymorphisme conservatif TSI d'arité 2.

Théoreme 3.23 ([30]). *Soit \mathbf{H} un graphe. Il existe un polymorphisme conservatif binaire TSI sur \mathbf{H} si et seulement si il n'existe pas de paire inversible dans \mathbf{H} .*

Définition 3.24. *On dit qu'un graphe \mathbf{G} est arc-circulaire s'il existe une famille d'arcs sur le cercle unitaire $\{A_v \mid v \in V(\mathbf{G})\}$ telle que pour toute paire de sommets x, y , avec $x \neq y$, on a $(x, y) \in E(\mathbf{G})$ si et seulement si $A_x \cap A_y \neq \emptyset$.*

Cette famille d'arcs circulaires est appelée représentation de \mathbf{G} .

Définition 3.25 ([25]). *Soit \mathbf{H} un graphe. Si le graphe $\overline{\mathbf{H}} \times \overline{K_2}$ est arc-circulaire, alors on appelle \mathbf{H} graphe bi-arc.*

Théoreme 3.26 ([25]). *Soit \mathbf{H} un graphe. Si \mathbf{H} est un graphe bi-arc, alors $HOM(\mathbf{H}_L)$ est tractable. Sinon $HOM(\mathbf{H}_L)$ est NP-complet.*

Théoreme 3.27 ([51]). *Soit \mathbf{H} un graphe arc-circulaire. Si \mathbf{H} peut être couvert par deux cliques N et S , alors il existe deux points n et s sur le cercle unitaire tels que \mathbf{H} peut être représenté par une famille d'arcs de cercle dont chaque arc représentant un sommet de N passe par n et pas s et chaque arc représentant un sommet de S passe par s et pas n .*

Exemple 3.28. *La figure 3.3 présente un graphe couvert par deux cliques N et S et sa représentation arc-circulaire respectant l'énoncé du théorème 3.27*

Le résultat suivant a été indépendamment découvert par Hell, Mastrolilli, Nevisi et Rafiey [28].

Lemme 3.29. *Soit \mathbf{H} un graphe. Si \mathbf{H} est biparti et $\overline{\mathbf{H}}$ est arc-circulaire, alors \mathbf{H} admet un polymorphisme monochromatique conservatif semi-treillis.*

Démonstration. Soient v_1, \dots, v_n les sommets de \mathbf{H} . Puisque \mathbf{H} est biparti, alors $\overline{\mathbf{H}}$ peut être couvert par deux cliques N et S . Le théorème 3.27 garantit l'existence de sommets s et n sur le cercle unitaire et d'une représentation par les arcs de cercles A_1, \dots, A_n du graphe $\overline{\mathbf{H}}$ telle que tout arc représentant un sommet de N contient n mais pas s et tout

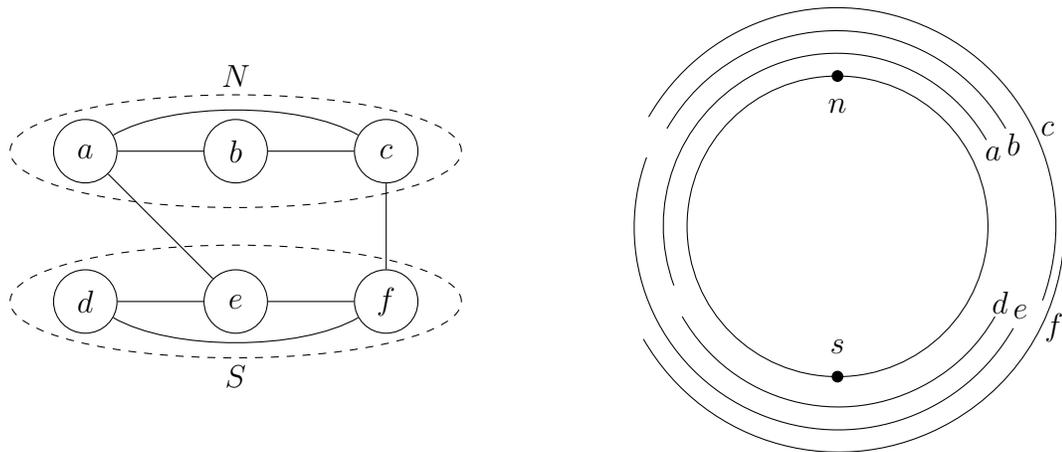


Figure 3.3 – Représentation arc-circulaire d'un graphe couvert par deux cliques.

arc représentant un sommet de S contient s mais pas n . En tournant dans le sens horaire, on appelle $d(v_i)$ le point de départ de l'arc de cercle A_i et $e(v_i)$ le point d'arrivée de l'arc de cercle A_i . Puisque la représentation de \overline{H} est finie, on peut supposer sans perte de généralité qu'il n'existe pas d'arcs A_i, A_j , avec $i \neq j$, tels que $d(v_i) = d(v_j)$ ou $e(v_i) = e(v_j)$.

Pour toute paire de sommets $v_i, v_j \in N$, on définit $v_i \leq_N v_j$ si et seulement si $e(v_i) \in A_j$. Pour toute paire de sommets $v_i, v_j \in S$, on définit $v_i \leq_S v_j$ si et seulement si $e(v_i) \in A_j$. Notons que ces relations sont totales, puisque tout arc représentant un sommet de N (respectivement de S) passe par n (respectivement s). Puisque les sommets de N (respectivement S) ne passent pas par s (respectivement n), on peut considérer que les arcs de cercle de N (respectivement S) sont des intervalles sur un segment fini de la ligne des réels.

Les relations \leq_N et \leq_S sont trivialement réflexives.

Soit $v_i \leq_N v_j$ et $v_j \leq_N v_k$. On a alors $e(v_i) \in A_j$ et $e(v_j) \in A_k$, d'où $e(v_i) \leq e(v_j)$ et $e(v_j) \leq e(v_k)$, donc $e(v_i) \leq e(v_k)$. Par hypothèse, on a alors $v_i \leq_N v_k$. Le même raisonnement tient pour \leq_S . Ces relations sont antisymétriques.

Soit $v_i \leq_N v_j$ et $v_j \leq_S v_k$. On a alors $e(v_i) \in A_j$ et $e(v_j) \in A_k$. Ceci implique $e(v_i) \leq e(v_j)$ et $e(v_j) \leq e(v_k)$, par conséquent $e(v_i) \leq e(v_k)$. Puisque $A_i \cap A_k \neq \emptyset$, alors on doit avoir $e(v_i) \in A_k$, d'où $v_i \leq_N v_k$. Le même raisonnement tient pour \leq_S . Ces relations sont transitives.

Les relations \leq_N et \leq_S sont donc des relations d'ordre totales.

Soit $f : N^2 \cup S^2 \rightarrow \mathbf{G}$ défini par :

$$f(v_i, v_j) = \begin{cases} \min_{\leq_N}(x, y) & \text{si } x, y \in N \\ \min_{\leq_S}(x, y) & \text{si } x, y \in S. \end{cases}$$

Par définition, la fonction f est conservative, totalement symétrique et monochromatique. Il ne reste qu'à vérifier qu'il s'agit d'un polymorphisme monochromatique. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors $v_a, v_b, v_c, v_d \in E(\mathbf{H})$ tels que $(a, b), (c, d) \in E(\mathbf{H}), (a, d) \notin E(\mathbf{H}), f(v_a, v_c) = a$ et $f(v_b, v_d) = d$.

Puisque \mathbf{H} est le complément d'un graphe couvert par les cliques N et S , alors on ne peut qu'avoir $v_a, v_c \in N$ et $v_b, v_d \in S$ ou $v_a, v_c \in S$ et $v_b, v_d \in N$. Supposons sans perte de généralité être dans le premier cas. Puisque $f(v_a, v_c) = v_a$, alors $v_a \leq_N v_c$ et $e(v_a) \in I_c$. Puisque $f(v_b, v_d) = v_d$, alors $v_b \leq v_d$ et $e(v_b) \in I_d$. Puisque $(v_a, v_b) \in E(\mathbf{H})$, alors $(v_a, v_b) \notin E(\overline{\mathbf{H}})$, donc $A_a \cap A_b = \emptyset$. Puisque $(v_c, v_d) \in E(\mathbf{H})$, alors $(v_c, v_d) \notin E(\overline{\mathbf{H}})$, donc $A_c \cap A_d = \emptyset$. Puisque $(v_a, v_d) \notin E(\mathbf{H})$, alors $(v_a, v_d) \in E(\overline{\mathbf{H}})$, donc $A_a \cap A_d \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $e(v_a) \in A_d$ ou $e(v_d) \in A_a$. Si $e(v_a) \in A_d$, alors $e(v_a) \leq e(v_c) \in A_d$, ce qui est impossible puisque $A_c \cap A_d = \emptyset$ (figure 3.4, cas 1). Si $e(v_d) \in A_a$, alors $e(v_d) \leq e(v_b) \in A_a$, ce qui est impossible puisque $A_a \cap A_b = \emptyset$ (figure 3.4, cas 2). La fonction f est donc un polymorphisme monochromatique. \square

Lemme 3.30. *Soit \mathbf{H} un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif presque'unanimité faible ;
2. \mathbf{H} est un graphe bi-arc ;
3. $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme conservatif presque'unanimité faible ;
4. $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme monochromatique semi-treillis conservatif ;
5. $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme conservatif presque'unanimité faible d'arité 3.

Démonstration. L'équivalences propositions (1), (2) et (3) est obtenue directement du lemme 1 de [20].

La proposition (5) implique trivialement la proposition (3).

Le lemme 3.29 prouve que la proposition (2) implique la proposition (4).

On prouve que la proposition (4) implique la proposition (5). Supposons que $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme monochromatique conservatif d'arité 2 f sur les classes de couleur D et U . Par composition, on peut définir un polymorphisme monochromatique conservatif d'arité 3 :

$$f_3(a, b, c) = f(a, f(b, c)).$$

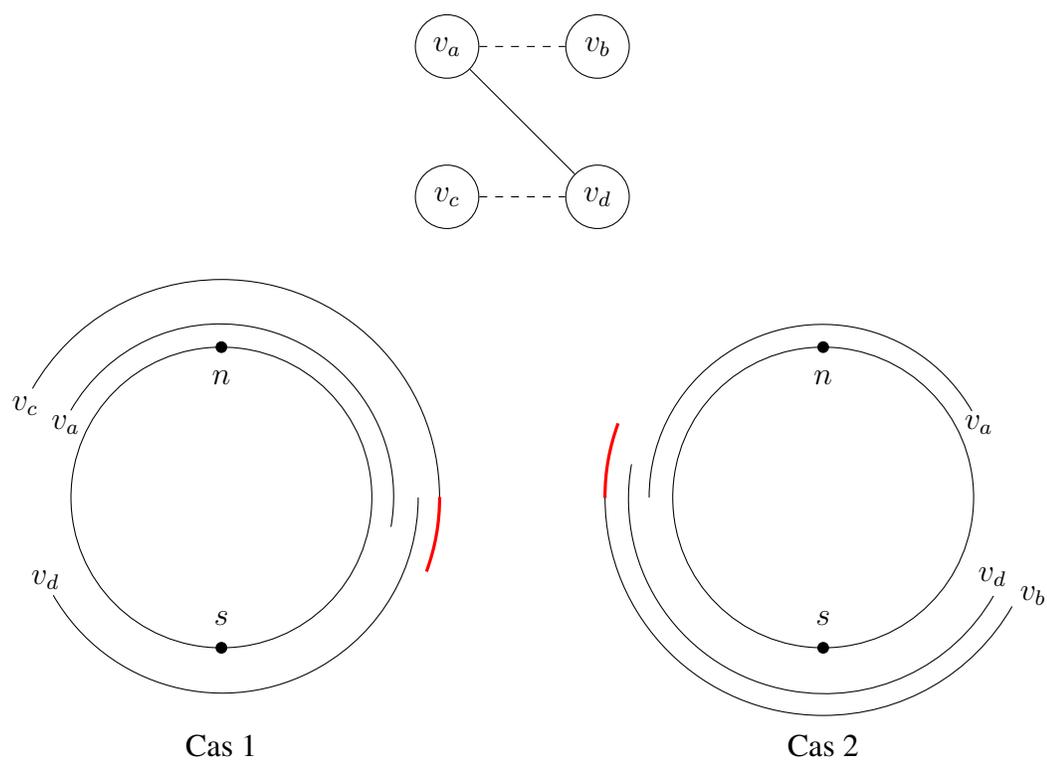


Figure 3.4 – Impossibilité d'une représentation arc-circulaire du sous-graphe de \overline{H} sous les hypothèses.

On définit la fonction $g : (H \times K_2)^3 \rightarrow H \times \mathbf{K}_2$ comme suit :

$$g(a, b, c) = \begin{cases} f_3(a, b, c) & \text{si } a, b, c \in D \text{ ou } a, b, c \in U \\ y & \text{si } y, z \in D \text{ et } x \in U \\ y & \text{si } y, z \in U \text{ et } x \in D \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si x et y appartiennent à U (respectivement D), alors

$$g(x, x, y) = g(x, y, x) = g(y, x, x) = f(x, y) \in \{x, y\}.$$

Si x appartient à U (respectivement D) et y appartient à D (respectivement U), alors

$$g(x, x, y) = g(x, y, x) = g(y, x, x) = x.$$

La fonction g est donc une fonction de presque-unanimité faible conservative.

Supposons que les triplets (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) soient adjacents. Si x_1, y_1, z_1 appartiennent à D (respectivement U), alors x_2, y_2, z_2 appartiennent à U (respectivement D). On a donc

$$g(x_1, y_1, z_1) = f_3(x_1, y_1, z_1)$$

et

$$g(x_2, y_2, z_2) = f_3(x_2, y_2, z_2).$$

Puisque f_3 est un polymorphisme monochromatique, alors $(g(x_1, y_1, z_1), g(x_2, y_2, z_2))$ appartient à $E(H \times K_2)$.

Si $y_1, z_1 \in D$ (respectivement U) et $x_1 \in U$ (respectivement D), alors $y_2, z_2 \in U$ (respectivement D) et $x_2 \in D$ (respectivement U). On a donc

$$(g(x_1, y_1, z_1), g(x_2, y_2, z_2)) = (y_1, y_2) \in E(H \times K_2).$$

Dans tous les autres cas, on a $(g(x_1, y_1, z_1), g(x_2, y_2, z_2)) = (y_1, y_2) \in E(H \times K_2)$. La fonction g est donc un polymorphisme presque-unanimité faible conservatif d'arité 3.

On a prouvé que $(5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$, ces propositions sont donc équivalentes. \square

Observation 3.31. Soit H un graphe biparti. Le graphe $H \times \mathbf{K}_2$ est l'union disjointe de deux graphes isomorphes à H .

Démonstration. Soient D et U les classes de couleur de \mathbf{H} . Soient 0 et 1 les sommets de \mathbf{K}_2 . Le sous-graphe induit par $U \times \{0\} \cup D \times \{1\}$ et le sous-graphe induit par $D \times \{1\} \cup U \times \{0\}$ sont disjoints. L'union de ces deux sous-graphes forment le graphe $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$.

Les sommets de la forme $(x, 0)$, avec $x \in U$ (respectivement $x \in D$) ne sont reliés qu'aux sommets de la forme $(y, 1)$, avec $y \in D$ (respectivement $y \in U$). Par conséquent, le sous-graphe induit par $U \times \{0\} \cup D \times \{1\}$ et le sous-graphe induit par $D \times \{1\} \cup U \times \{0\}$ sont disjoints.

On définit la fonction $f : U \times \{0\} \cup D \times \{1\} \rightarrow \mathbf{H}$ telle que $f(x, y) = x$. Si $(x_1, 0) \neq (x_2, 0)$, alors $x_1 \neq x_2$, d'où $f(x_1, 0) \neq f(x_2, 0)$. Pour tout sommet $x \in V(\mathbf{H})$, si x appartient à U (respectivement à D), alors $(x, 0)$ (respectivement $(x, 1)$) appartient à $U \times \{0\} \cup D \times \{1\}$ et $f(x, 0) = x$ (respectivement $f(x, 1) = x$). La fonction f est une bijection. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U \times \{0\} \cup D \times \{1\}$ alors :

- si $x_1 \in U$ (respectivement $\in D$) et $x_2 \in D$ (respectivement $\in U$), alors $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$, d'où $(x_1, x_2) \in E(\mathbf{H})$ et $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in E(\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2)$;
- sinon $(x_1, x_2) \notin E(\mathbf{H})$ et $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \notin E(\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2)$.

La fonction f est une bijection qui conserve la présence et l'absence d'arêtes, il s'agit donc d'un isomorphisme. De la même manière, on prouve qu'il existe un isomorphisme entre \mathbf{H} et $U \times \{1\} \cup D \times \{0\}$. \square

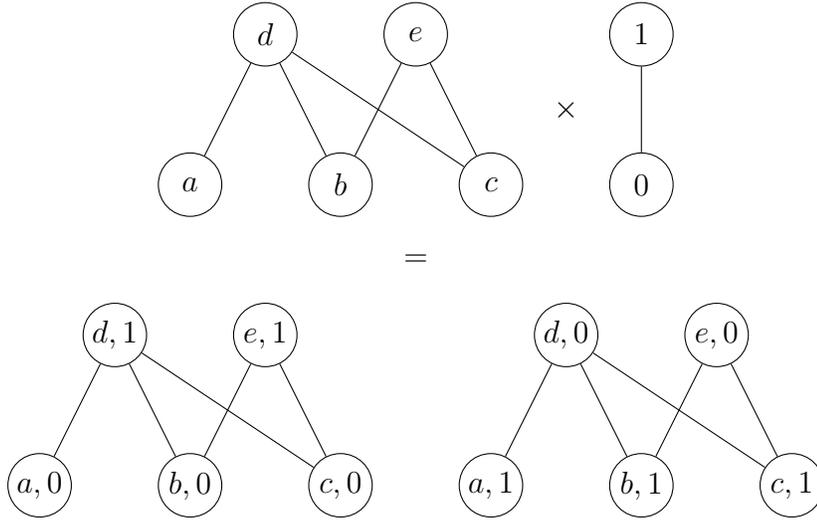
Si \mathbf{H} est biparti, le graphe $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ est donc formé de deux copies de \mathbf{H} disjointes.

Exemple 3.32. La figure 3.5 illustre l'observation 3.31. Le graphe original, formé par les sommets a, b, c, d, e est reproduit deux fois dans son produit avec \mathbf{K}_2 .

Lemme 3.33. Soit \mathbf{H} un graphe biparti. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif presque unanimité faible ;
2. \mathbf{H} admet un polymorphisme monochromatique semi-treillis conservatif.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) : si \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif presque unanimité faible, alors $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme monochromatique semi-treillis conservatif m (lemme 3.30). Puisque \mathbf{H} est biparti, alors le graphe $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ est l'union disjointe de deux sous-graphes \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 isomorphes à \mathbf{H} (observation 3.31). Puisque m est un polymorphisme conservatif, alors la restriction de m à \mathbf{H}_1 est un polymorphisme monochromatique conservatif semi-treillis. Les graphes \mathbf{H} et \mathbf{H}_1 étant isomorphes, il existe donc un polymorphisme monochromatique conservatif semi-treillis sur \mathbf{H} .

Figure 3.5 – Produit d'un graphe biparti avec \mathbf{K}_2 .

(2) \Rightarrow (1) : supposons que \mathbf{H} admet un polymorphisme monochromatique conservatif semi-treillis m sur les classes de couleur U et D . D'après l'observation 3.31, \mathbf{H} est isomorphe aux sous-graphes \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 induits respectivement par $U \times \{0\} \cup D \times \{1\}$ et $U \times \{1\} \cup D \times \{0\}$.

Soit $D' = D \times \{0, 1\}$. Pour tout $(x, i), (y, j) \in D'$, on définit une relation $\leq_{D'}$ comme suit :

- si $i = j$, alors $(x, i) \leq_{D'} (y, j) \Leftrightarrow m(x, y) = x$;
- si $i = 0, j = 1$, alors $(x, i) \leq_{D'} (y, j)$;
- si $i = 1, j = 0$, alors $(y, j) \leq_{D'} (x, i)$.

Puisque m est idempotente, alors $\leq_{D'}$ est réflexive. Si $(x, i) \leq_{D'} (y, j)$ et $(y, j) \leq_{D'} (x, i)$, alors on a nécessairement $i = j$, d'où $m(x, y) = x$ et $m(y, x) = y$. Or $m(x, y) = m(y, x)$, d'où $x = y$ et $(x, i) = (y, j)$. La relation $\leq_{D'}$ est donc antisymétrique. Si $(x, i) \leq_{D'} (y, j)$ et $(y, j) \leq_{D'} (z, k)$, alors on a nécessairement $i \leq j$ et $j \leq k$. En effet :

- si $j \leq i$, alors on ne peut avoir $(x, i) \leq_{D'} (y, j)$, ce qui est impossible par hypothèse ;
- si $k \leq j$, alors on ne peut avoir $(y, j) \leq_{D'} (z, k)$, ce qui est impossible par hypothèse.

Par conséquent, $i \leq j \leq k$. On a donc les deux possibilités suivantes :

- si $i = j = k$, alors $m(x, y) = x$ et $m(y, z) = y$, d'où

$$m(x, z) = m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z)) = m(x, y) = x,$$

d'où $(x, i) \leq_{D'} (z, k)$;

– si $i = 0$ et $k = 1$, alors $(x, i) \leq_{D'} (z, k)$.

La relation $\leq_{D'}$ est donc transitive. Par conséquent, il s'agit d'une relation d'ordre totale sur les éléments de D' .

Soit $U' = U \times \{0, 1\}$. Pour tout $(x, i), (y, j) \in U'$, on définit un ordre $\leq_{U'}$ comme suit :

– si $i = j$, alors $(x, i) \leq_{U'} (y, j) \Leftrightarrow m(x, y) = x$;

– si $i = 0, j = 1$, alors $(y, j) \leq_{U'} (x, i)$;

– si $i = 1, j = 0$, alors $(x, i) \leq_{U'} (y, j)$.

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on prouve que $\leq_{U'}$ est une relation d'ordre totale sur les éléments de U' .

On définit une fonction $g : D'^2 \cup U'^2 \rightarrow V(H \times K_2)$ comme suit :

$$g((x, i), (y, j)) = \begin{cases} \min_{\leq_{D'}}(x, i), (y, j) & \text{si } (x, i), (y, j) \in D', \\ \min_{\leq_{U'}}(x, i), (y, j) & \text{si } (x, j), (y, j) \in U'. \end{cases}$$

Par définition, la fonction g est conservative, commutative et associative.

Soient $(x_1, i), (y_1, j) \in D'$ et $(x_2, k), (y_2, l) \in U'$ tels que :

$$((x_1, i), (x_2, k)), ((y_1, j), (y_2, l)) \in E(H \times K_2),$$

$$g((x_1, i), (y_1, j)) = (x_1, i) \text{ et}$$

$$g((x_2, k), (y_2, l)) = (y_2, l).$$

Puisque $(x_1, i) \leq_{D'} (y_1, j)$, $i < j$ ou $m(x_1, y_1) = x_1$. Puisque $(y_2, l) \leq_{U'} (x_2, k)$, alors $k < l$ ou $m(x_2, y_2) = y_2$.

– si $i < j$ et $k < l$, alors $i = k = 0$ et $j = l = 1$. Puisque $i = 0$ et $((x_1, i), (x_2, k)) \in E(H \times K_2)$, alors $k = 1$, ce qui est impossible ;

– si $i < j$, $k = l$ et $m(x_2, y_2) = y_2$, alors $i = 0$ et $j = 1$. Puisque $i = 0$ et $((x_1, i), (x_2, k)) \in E(H \times K_2)$, alors $k = 1$. Par conséquent, $l = 1$ et puisque $((y_1, j), (y_2, l)) \in E(H \times K_2)$, alors $j = 0$, ce qui est impossible ;

– si $i = j$, $m(x_1, y_1) = x_1$ et $k < l$, alors $k = 0$ et $l = 1$. Puisque $k = 0$ et $((x_1, i), (x_2, k)) \in E(H \times K_2)$, alors $i = 1$. Par conséquent, $j = 1$ et puisque $((y_1, j), (y_2, l)) \in E(H \times K_2)$, alors $l = 0$, ce qui est impossible ;

– si $i = j$, $k = l$, $m(x_1, y_1) = x_1$ et $m(x_2, y_2) = x_2$, alors puisque $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E(\mathbf{H})$ et que m est un polymorphisme de \mathbf{H} , alors $(m(x_1, y_1), m(x_2, y_2)) \in E(\mathbf{H})$.

Donc $(g((x_1, i), (y_1, j)), g((x_2, k), (y_2, l))) = ((m(x_1, y_1), i), (m(x_2, y_2), j)) \in$

$$E(H \times K_2).$$

La fonction g est donc un polymorphisme monochromatique semi-treillis conservatif de $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$. Le lemme 3.30 nous permet donc de conclure que \mathbf{H} admet polymorphisme conservatif presque-unanimité faible ((4) \Rightarrow (1)). \square

On veut maintenant prouver que, sous certaines conditions, si un graphe \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme binaire conservatif presque-unanimité faible, alors $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ n'en admet pas non plus. Il a été expliqué comment prouver qu'un graphe \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme binaire conservatif presque-unanimité faible : il suffit d'exhiber une paire inversible dans \mathbf{H} .

Supposons que a, b soit une paire inversible dans \mathbf{H} . Il existe alors des chemins $P_{\mathbf{H}} = u_0, \dots, u_n$, $Q_{\mathbf{H}} = v_0, \dots, v_n$, $P'_{\mathbf{H}} = s_0, \dots, s_m$, $Q'_{\mathbf{H}} = t_0, \dots, t_m$ tels que $a = u_0 = v_n = t_0 = t_m$, $b = v_0 = u_n = s_0 = t_m$, $P_{\mathbf{H}}$ évite $Q_{\mathbf{H}}$ et $P'_{\mathbf{H}}$ évite $Q'_{\mathbf{H}}$. Or, ces chemins sont transposables dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ de manière naturelle :

- $P_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (u_0, i_0), \dots, (u_n, i_n)$, où $i_x = x \pmod{2}$ pour tout $x \in \{0, \dots, n\}$;
- $Q_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (v_0, i_0), \dots, (v_n, i_n)$, où $i_x = x \pmod{2}$ pour tout $x \in \{0, \dots, n\}$;
- $P'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (s_0, j_0), \dots, (s_m, j_m)$, où $j_x = n+x \pmod{2}$ pour tout $x \in \{0, \dots, m\}$;
- $Q'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (t_0, j_0), \dots, (t_m, j_m)$, où $j_x = n+x \pmod{2}$.

Par construction, $P_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$ évite $Q_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$ et $P'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$ évite $Q'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$. Pour autant, rien ne garantit que $(a, 0), (b, 0)$ est une paire inversible. Pour que ceci soit vrai, il faudrait que $n \pmod{2} \equiv 0$ et que $(n+m) \pmod{2} \equiv 0$, c'est à dire que les chemins $P_{\mathbf{H}}$, $Q_{\mathbf{H}}$, $P'_{\mathbf{H}}$ et $Q'_{\mathbf{H}}$ soient de tailles paires. Si en plus $(u, 0)$ et $(v, 0)$ appartiennent nécessairement à la même classe de couleur, alors non seulement $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ n'admet pas de polymorphisme binaire presque-unanimité faible conservatif, mais il n'admet pas non plus de polymorphisme monochromatique binaire presque-unanimité faible conservatif.

Si un de ces chemins est de taille impaire, on va en fait le modifier de façon à conserver des chemins évitants tout en obtenant une longueur paire.

Lemme 3.34. *Soit \mathbf{H} un graphe tel que le voisinage de tout sommet sans boucle est une clique réflexive. Si \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme binaire conservatif presque-unanimité faible, alors il existe des chemins $P = u_0, \dots, v_n$ de u à v , $Q = v_0, \dots, v_n$ de v à u , $P' = s_0, \dots, s_m$ de v à u et $Q' = t_0, \dots, t_m$ de u à v tels que :*

- P évite Q ;
- P' évite Q' ;
- n et m sont pairs.

Démonstration. Si \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme binaire conservatif presque unanimité faible, alors il existe une paire inversible a, b (théorème 3.23). Il existe donc dans \mathbf{H} des chemins $P = u_0, \dots, u_n$ de a à b , $Q = v_0, \dots, v_n$ de b à a , $P' = s_0, \dots, s_m$ de v à u et $Q' = t_0, \dots, t_m$ de u à v tels que P évite Q et P' évite Q' . On prouve qu'il est toujours possible de modifier P et Q en y insérant des chemins évitants de longueur 3, de sorte que P modifié évite encore Q modifié.

Posons $u_{n+1} = s_2$, $v_{n+1} = t_2$, $u_{-1} = s_{m-1}$ et $v_{-1} = t_{m-1}$. Le chemin u_{-1}, \dots, u_{n+1} évite le chemin v_{-1}, \dots, v_{n+1} .

Supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que u_i porte une boucle et v_i n'en porte pas. Par définition, $(v_i, v_{i+1}) \in E(\mathbf{H})$ et $(u_i, v_{i+1}) \notin E(\mathbf{H})$. Puisque $N(v_i)$ est une clique réflexive, alors on a $(u_i, v_i) \notin E(\mathbf{H})$. Par conséquent, le chemin u_i, u_i, u_i, u_i évite le chemin $v_i, v_{i+1}, v_{i+1}, v_i$. Si n est impair, on insère u_i, u_i, u_i, u_i dans P et $v_i, v_{i+1}, v_{i+1}, v_i$ dans Q de façon à obtenir des chemins évitants de longueur paire.

Supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que u_i ne porte pas de boucle et v_i en porte une. Par définition, $(u_{i-1}, u_i) \in E(\mathbf{H})$ et $(u_{i-1}, v_i) \notin E(\mathbf{H})$. Puisque $N(u_i)$ est une clique réflexive, alors on a $(u_i, v_i) \notin E(\mathbf{H})$. Par conséquent, le chemin $u_i, u_{i-1}, u_{i-1}, u_i$ évite le chemin v_i, v_i, v_i, v_i . Si n est impair, on insère $u_i, u_{i-1}, u_{i-1}, u_i$ dans P et v_i, v_i, v_i, v_i dans Q de façon à obtenir des chemins évitants de longueur paire.

Supposons qu'il n'existe pas $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que u_i porte une boucle et v_i non ou v_i porte une boucle et u_i non. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, u_i et v_i portent une boucle ou u_i et v_i ne portent pas de boucle.

Supposons alors qu'il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que u_i, u_{i+1}, v, v_{i+1} portent des boucles. Alors le chemin u_i, u_i, u_{i-1}, u_i évite le chemin $v_i, v_{i+1}, v_{i+1}, v_i$. Si n est impair, on insère u_i, u_i, u_{i-1}, u_i dans P et $v_i, v_{i+1}, v_{i+1}, v_i$ dans Q de façon à obtenir des chemins évitants de longueur paire.

Supposons finalement qu'il n'existe pas $i \in \{0, \dots, n\}$ tels que u_i, u_{i+1}, v, v_{i+1} portent des boucles. Puisque le voisinage d'un sommet sans boucle est une clique réflexive, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, les sommets u_i et v_i portent une boucle (respectivement ne portent pas de boucle) si et seulement si u_0 et v_0 portent une boucle (respectivement ne portent pas de boucle) et i est pair. Puisque $u_0 = v_n$, alors u_0 et v_0 portent ou ne portent pas une boucle, donc n doit être pair.

Par conséquent, il est toujours possible d'obtenir un chemin de u à v de longueur paire qui évite un chemin de v à u .

En utilisant le même raisonnement, on montre qu'il est également possible de modifier P' et Q' de façon à obtenir des chemins évitants de longueur paire. \square

Lemme 3.35. *Soit \mathbf{H} un graphe biparti. Si x, y est une paire inversible dans \mathbf{H} telle qu'il existe un chemin de longueur paire de x à y , alors \mathbf{H} n'admet pas de polymorphisme monochromatique binaire conservatif commutatif.*

Démonstration. Puisque x, y est une paire inversible, alors il existe des chemins $P = u_0, \dots, u_n$ de x à y , $Q = v_0, \dots, v_n$ de y à x , $P' = s_0, \dots, s_m$ de y à x et $Q' = t_0, \dots, t_m$ de x à y tels que P évite Q et P' évite Q' . Puisque x et y appartiennent nécessairement à la même classe de couleur, alors n et m sont pairs. . Supposons qu'il existe un polymorphisme monochromatique binaire conservatif commutatif f . On prouve par induction que si $f(x, y) = f(u_0, v_0) = u_0 = x$, alors $f(u_i, v_i) = u_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour $i = 0$, l'énoncé est trivialement vrai. Supposons que l'énoncé reste vrai pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. Prouvons qu'il l'est encore pour $k + 1$. Par définition de P et Q , $(u_k, u_{k+1}), (v_k, v_{k+1}) \in E(\mathbf{H})$ et $(u_k, v_{k+1}) \notin E(\mathbf{H})$. Puisque f est un homomorphisme, on a $(f(u_k, v_k), f(u_{k+1}, v_{k+1})) \in E(\mathbf{H})$. Par hypothèse d'induction, on a $f(u_k, v_k) = v_k$, par conséquent, on a nécessairement $f(u_{k+1}, v_{k+1}) = u_{k+1}$. Donc, $f(u_i, v_i) = u_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Si $f(x, y) = x$, alors $f(y, x) = f(u_n, v_n) = u_n = y$, ce qui est impossible puisque f commutative. Donc $f(x, y) \neq x$.

En raisonnant de la même manière sur les chemins P' et Q' , on peut conclure que $f(x, y) \neq y$.

Il n'est donc pas possible de définir un polymorphisme monochromatique conservatif et commutatif sur le couple (x, y) . Le graphe \mathbf{H} n'admet donc pas un tel polymorphisme. \square

Lemme 3.36. *Soit \mathbf{H} un graphe. S'il n'existe dans \mathbf{H} aucune arête (u, v) telle que u et v ne portent pas de boucle, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. \mathbf{H} admet un polymorphisme binaire conservatif presque'unanimité faible ;
2. $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme monochromatique binaire conservatif presque'unanimité faible.

Démonstration. (1 \Rightarrow 2) Soient $D = \{(x, 0) \mid x \in V(\mathbf{H})\}$ et $U = \{(x, 1) \mid x \in V(\mathbf{H})\}$ les classes de couleur de $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$. Supposons que \mathbf{H} admette un polymorphisme binaire conservatif presque'unanimité faible f . Soit la fonction $g : D^2 \cup U^2 \rightarrow V(\mathbf{H})$ définie par :

$$g((x, i), (y, i)) = (f(x, y), i).$$

Par définition, g est conservative et presque'unanime faible. Puisque g est obtenue par composition et projection à partir de f , alors g est un polymorphisme de \mathbf{H} .

(2 \rightarrow 1) Supposons que \mathbf{H} n'admette pas de polymorphisme binaire conservatif presque'unanimité faible. S'il existe un sommet v de \mathbf{H} tel que $N(v)$ n'est pas une clique réflexive, alors il existe des sommets u et w tels que $(u, v), (v, w), (u, u), (w, w) \in E(\mathbf{H})$ et $(u, w) \notin E(\mathbf{H})$. Considérons les chemins

$$P = (u, 0), (v, 1), (w, 0), (w, 1), (v, 0), (u, 1), (u, 0), (v, 1), (u, 0)$$

et

$$Q = (v, 0), (w, 1), (v, 0), (u, 1), (u, 0), (v, 1), (w, 0), (w, 1), (v, 0)$$

dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$. Le chemin P évite le chemin Q (figure 3.6). Par conséquent, il existe une paire inversible $(u, 0), (v, 0)$ dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ telle que u et v appartiennent nécessairement à la même classe de couleur.

Supposons donc que pour tout sommet v sans boucle, $N(v)$ est une clique réflexive. Les conditions du lemme 3.34 sont satisfaites, par conséquent il existe une paire inversible x, y et des chemins $P_{\mathbf{H}} = u_0, \dots, u_n$ de x à y , $Q_{\mathbf{H}} = v_0, \dots, v_n$ de y à x , $P'_{\mathbf{H}} = s_0, \dots, s_m$ de y à x et $Q'_{\mathbf{H}} = t_0, \dots, t_m$ de x à y tels que :

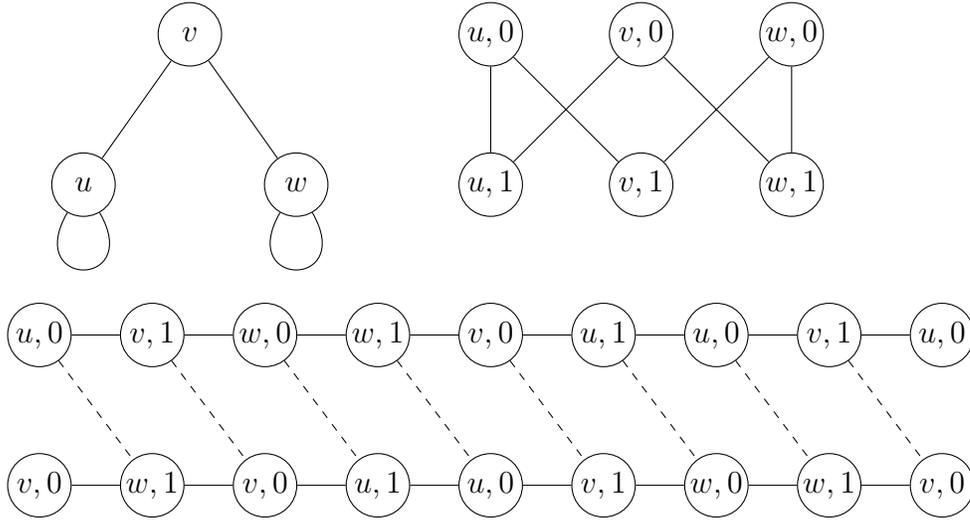
- $P_{\mathbf{H}}$ évite $Q_{\mathbf{H}}$;
- $P'_{\mathbf{H}}$ évite $Q'_{\mathbf{H}}$;
- n et m sont pairs.

Il existe donc dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ les chemins :

- $P_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (u_0, p_0), \dots, (u_n, p_n)$ de $(x, 0)$ à $(y, 0)$, avec $p_i = i \pmod{2}$;
- $Q_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (v_0, p_0), \dots, (v_n, p_n)$ de $(y, 0)$ à $(x, 0)$, avec $p_i = i \pmod{2}$;
- $P'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (s_0, p_0), \dots, (s_m, p_m)$ de $(y, 0)$ à $(x, 0)$, avec $p_i = i \pmod{2}$;
- $Q'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2} = (t_0, p_0), \dots, (s_m, p_m)$ de $(x, 0)$ à $(y, 0)$, avec $p_i = i \pmod{2}$.

Le chemin $P_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$ évite le chemin $Q_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$ et le chemin $P'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$ évite le chemin $Q'_{\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2}$. Il existe donc une paire inversible $(x, 0), (y, 0)$ dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$. Puisqu'il existe un chemin de longueur paire de $(x, 0)$ à $(y, 0)$ dans le graphe biparti $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$, alors $(x, 0)$ et $(y, 0)$ appartiennent nécessairement à la même classe de couleur.

Dans tous les cas, il existe donc une paire inversible x, y dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ telle que x et y appartiennent à la même classe de couleur. Par conséquent $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ n'admet ni de polymorphisme binaire presque'unanimité faible conservatif ni de polymorphisme monochromatique binaire presque'unanimité faible (lemme 3.35). \square

Figure 3.6 – Existence de chemins évitants dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$.

Lemme 3.37. Soit \mathbf{H} un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. \mathbf{H} admet un polymorphisme binaire conservatif presque unanimité faible ;
2. \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif TSI d'arité k pour tout $k \geq 2$.

Démonstration. la proposition 2 implique trivialement la proposition 1.

Soit f un polymorphisme binaire conservatif presque unanimité de \mathbf{H} . Le lemme 3.30 garantit alors que le graphe $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme monochromatique semi-treillis conservatif g . À partir du polymorphisme g , on peut obtenir par composition de g des polymorphismes monochromatiques conservatif TSI d'arité quelconque. On définit :

$$g(x_1, \dots, x_k) = g(\dots (g(x_1, x_2), \dots), x_k).$$

On définit la fonction $\pi_{\mathbf{H}} : V(\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2) \rightarrow V(\mathbf{H})$ par

$$\pi_{\mathbf{H}}(x, 0) = x.$$

On définit la fonction $g_0 : V(\mathbf{H})^k \rightarrow V(\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2)$ par

$$g_0(x_1, \dots, x_k) = g((x_1, 0), \dots, (x_k, 0)).$$

On définit la fonction $g_1 : V(\mathbf{H})^k \rightarrow V(H \times K_2)$ par

$$g_1(x_1, \dots, x_k) = g((x_1, 1), \dots, (x_k, 1)).$$

Pour $k \geq 2$, on définit la fonction $h : V(\mathbf{H})^k \rightarrow V(\mathbf{H})$ par

$$h(x_1, \dots, x_k) = f(\pi_{\mathbf{H}}(g_0(x_1, \dots, x_k)), \pi_{\mathbf{H}}(g_1(x_1, \dots, x_k))).$$

Puisque g est totalement conservative, symétrique et idempotente, alors les fonction g_0 et g_1 le sont également. Par conséquent, h est conservative, totalement symétrique et idempotente.

On prouve finalement que h est un polymorphisme de \mathbf{H} . Considérons les sommets $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in V(\mathbf{H})$ tels que $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in E(\mathbf{H})$. Soient $u = g_0(x_1, \dots, x_k)$ et $v = g_0(y_1, \dots, y_k)$. Soient $u' = g_0(x_1, \dots, x_k)$ et $v' = g_1(y_1, \dots, y_k)$. Par définition de g_0 et g_1 , on a $(u, v), (u', v') \in E(H \times K_2)$. Par conséquent, on obtient $(\pi_{\mathbf{H}}(u), \pi_{\mathbf{H}}(v)), (\pi_{\mathbf{H}}(u'), \pi_{\mathbf{H}}(v')) \in E(\mathbf{H})$. Puisque f est polymorphisme de f , on a alors $(f(\pi_{\mathbf{H}}(u), \pi_{\mathbf{H}}(u')), f(\pi_{\mathbf{H}}(v), \pi_{\mathbf{H}}(v')))) \in E(\mathbf{H})$, d'où, par définition de h , $(h(x_1, \dots, x_k), h(y_1, \dots, y_k)) \in E(\mathbf{H})$. La fonction h est donc un polymorphisme de \mathbf{H} . \square

Théorème 3.38. *Soit \mathbf{H} un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *le problème $HOM(\mathbf{H}_L)$ est résoluble par cohérence d'arc ;*
2. *\mathbf{H} est un graphe bi-arc tel que pour tout arête $(u, v) \in E(\mathbf{H})$, u ou v porte une boucle ;*
3. *\mathbf{H} admet un polymorphisme binaire presque'unanimité faible conservatif.*
4. *\mathbf{H} admet une paire inversible.*

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) : si \mathbf{H} est résoluble par cohérence d'arc, alors il est tractable et le théorème 3.26 implique que \mathbf{H} est un graphe bi-arc. Par conséquent, le lemme 3.30 implique que \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif presque'unanimité faible. L'observation 3.5 implique alors qu'il n'existe pas d'arête sans boucle dans \mathbf{H} .

(2) \Rightarrow (3) : si \mathbf{H} est un graphe bi-arc tel que pour toute arête $(u, v) \in E(\mathbf{H})$, u ou v porte une boucle, alors le lemme 3.30 implique que $\mathbf{H} \times \mathbf{K}_2$ admet un polymorphisme monochromatique semi-treillis. Le lemme 3.36 implique alors que \mathbf{H} admet un polymorphisme binaire conservatif presque'unanimité faible.

(3) \Rightarrow (1) : si \mathbf{H} admet un polymorphisme binaire conservatif presque'unanimité, alors le lemme 3.37 implique que pour tout $k \geq 2$, \mathbf{H} admet un polymorphisme conservatif TSI d'arité k . Le théorème 3.4 implique alors que $HOM(\mathbf{H}_L)$ est résoluble par cohérence d'arc.

(3) \Leftrightarrow (4) : cette équivalence est prouvée dans [30]. □

3.4.1 Détection

Le théorème 3.38 fournit un algorithme trivial pour décider si un graphe \mathbf{H} engendre un problème $HOM(\mathbf{H}_L)$ résoluble par cohérence d'arc : il suffit de tester s'il s'agit d'un graphe bi-arc puis de vérifier si au moins une des extrémités de chaque arête de \mathbf{H} porte une boucle. Ceci peut-être fait en temps linéaire [45].

3.5 Graphes pseudo-intervalles

Pour finir ce chapitre, on présente une famille de graphes \mathbf{G} ni réflexifs ni irreflexifs tels que $HOM(\mathbf{G}_L)$ est résoluble par cohérence d'arc. On peut ainsi facilement créer une infinité d'exemples non triviaux.

Définition 3.39. *Soit G un graphe d'intervalle. Soit G' un sous-graphe de G tel que $V(G) = V(G')$ et toute arête absente de G' et présente dans G est une boucle. On appelle G' un graphe pseudo-intervalle.*

Lemme 3.40. *Soit \mathbf{G} un graphe pseudo-intervalle tel que tout sommet sans boucle appartient au plus à une seule clique maximale. Il existe une famille d'intervalles sur la ligne des réels tels que :*

1. *chaque sommet u de \mathbf{G} est représenté par un intervalle I_u ;*
2. *pour toute paire de sommets u et v , avec $u \neq v$, l'intersection des intervalles I_u et I_v est non vide si et seulement si u et v sont voisins dans \mathbf{G} ;*
3. *pour chaque clique maximale A de \mathbf{G} , s'il existe un sommet u de A qui ne porte pas de boucle, alors l'origine de I_u est inférieure à l'origine de l'intervalle représentant tout autre sommet.*

Démonstration. Supposons que \mathbf{G} soit réflexif. Ce serait alors un graphe d'intervalle. Soient A_0, \dots, A_n les cliques maximales ordonnées en accord avec l'énoncé du théorème 3.12. Soit m le nombre maximal de sommets dans une clique maximale de \mathbf{G} .

(1) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Soit v_0, \dots, v_k les sommets de A_i tels que pour tout $j < i$, v_0, \dots, v_k n'appartiennent pas à A_j . S'il existe un sommet sans boucle parmi v_0, \dots, v_k , on suppose sans perte de généralité qu'il s'agit de v_k . Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on définit $I_{v_j} = [im + j, (l + 1)m]$, avec l tels que $v_j \in A_l$ et pour tout $x > l$, $v_j \notin v_p$.

(2) (\Leftarrow) Supposons que u et v soient différents et voisins dans \mathbf{G} , alors il existe une clique maximale A_i telle que $u, v \in A_i$. Par conséquent, les intervalles I_u et I_v contiennent tous deux $im + (m - 1)$.

(2) (\Rightarrow) Supposons que u et v soient différents et ne soient pas voisins dans \mathbf{G} . L'intervalle représentant u est de la forme $[im + j, (l + 1)m[$, avec A_i la première clique dans laquelle apparaît u , A_l la dernière clique dans laquelle apparaît u et $j \in \{0, \dots, m\}$. L'intervalle représentant v est de la forme $[i'm + j', (l' + 1)m[$, avec $A_{i'}$ la première clique dans laquelle apparaît v , $A_{l'}$ la dernière clique dans laquelle apparaît v et $j' \in \{0, \dots, m\}$. On a soit $l < i'$, soit $i < l'$, dans les deux cas

$$[im + j, (l + 1)m[\cap [i'm + j', (l' + 1)m[= \emptyset.$$

(3) Soit u un sommet sans boucle de \mathbf{G} . Il n'existe qu'une seule clique maximale A_i qui contient u . Soient v_1, \dots, v_k les sommets appartenant à A_i . Par définition, on a $u = v_k$. L'intervalle représentant u est $[im + k, (i + 1)m[$. Tout sommet v apparaissant pour la première fois dans A_j avec $j \leq i$ est représenté par un intervalle $[jm + x, (j + 1)m[$, avec $x \in \{0, \dots, m\}$. Par conséquent, on a $jm + x < im + k$. \square

Notons que si un sommet sans boucle appartenait à plusieurs cliques maximales, il ne serait pas possible de satisfaire l'énoncé (3).

Théoreme 3.41. *Soit \mathbf{H} un graphe pseudo-intervalle satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *tout sommet sans boucle de \mathbf{H} n'appartient qu'à une seule clique maximale distincte de \mathbf{H} ;*
2. *il n'existe pas d'arête sans boucle dans \mathbf{H} .*

Alors \mathbf{H}_L admet un ordonnancement minimal.

Démonstration. Le lemme 3.40 prouve l'existence d'une pseudo représentation par intervalle de \mathbf{G} . Comme dans la démonstration du lemme 3.13, on établit un ordre $\leq_{\mathbf{G}}$ sur les sommets de \mathbf{G} en les ordonnant par origine croissante de leurs intervalles de représentation. Notons que l'affirmation (1) de la preuve du lemme 3.13 est reproductible parce qu'il n'existe pas, dans le cas présent, d'arête sans boucle.

La fonction \min_{\leq_G} est naturellement induite par \leq_G . En utilisant le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 3.13, on prouve que \min_{\leq_G} est un polymorphisme de G . \square

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie.

Exemple 3.42. Prenons un des sous-graphes interdits du théorème 3.12 et éliminons certaines de ses boucles. Ce graphe n'est pas un graphe pseudo-intervalle. Pourtant, il admet un ordonnancement minimal (figure 3.7).

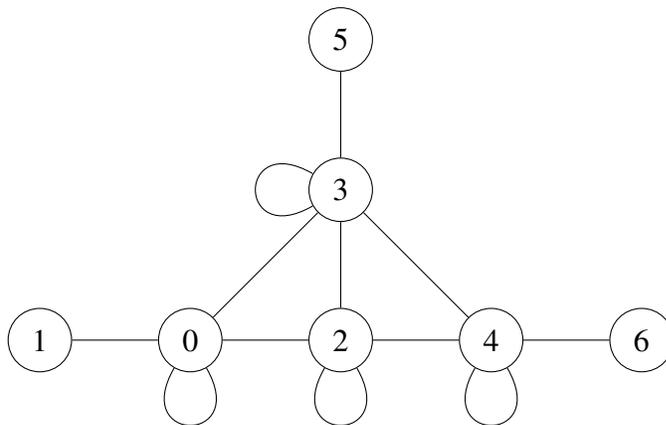


Figure 3.7 – Le graphe admet un ordonnancement minimal

CHAPITRE 4

CONCLUSION

En premier lieu, on a caractérisé les digraphes avec listes \mathbf{G}_L tels que $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO. Cette caractérisation ne fait appel qu'à l'observation de la structure des digraphes et consiste en une liste infinie de sous-graphes interdits. On a prouvé qu'une caractérisation par sous-graphes interdits de cette famille de digraphes ne peut être qu'infinie.

Ces observations sont en accord avec les résultats dans [20] et les conjectures émises dans [41] : si la variété associée à un digraphe avec listes \mathbf{G}_L admet uniquement le type 3, alors $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO (donc à L) et est résoluble en DATALOG symétrique ; si la si la variété associée à un digraphe avec listes \mathbf{G}_L omet les types 1,2 et 5, alors elle est résoluble en DATALOG linéaire et appartient à NL.

La reconnaissance de cette famille de digraphes est un problème qui appartient, au pire, à NL, mais on ne peut pour l'instant éliminer la possibilité qu'il soit plus simple.

Dans le cas très particulier des digraphes avec listes télescopiques, la classification est complète : $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO (donc à L) si \mathbf{G}_L contient un bicycle entravant ; sinon, $HOM(\mathbf{G}_L)$ est NL-complet. Cette classification vérifie les conjecture de [41] : si $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à FO, alors $\mathcal{V}(\mathbb{A}(\mathbf{G}_L)) = \{3\}$; si $HOM(\mathbf{G}_L)$ est NL-complet, alors $\mathcal{V}(\mathbb{A}(\mathbf{G}_L)) = \{3, 4\}$.

Les résultats obtenus s'appuient sur la caractérisation des structures relationnelles engendrant des problèmes d'homomorphisme dans FO proposée dans [39]. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nous cantonne à la classe FO. Pour caractériser les digraphes avec listes \mathbf{G}_L tels que $HOM(\mathbf{G}_L)$ appartient à L ou NL, il n'existe pas de méthode aussi agréable à mettre en oeuvre. En se laissant guider par les conjectures de [41], une approche pourrait consister à caractériser les digraphes avec listes engendrant des variétés de type $\{3\}$ et $\{3, 4\}$. Des critères en terme d'existence de polymorphisme existent déjà [31], il serait intéressant de voir s'il est possible de les traduire en terme de structure de graphe. Il resterait alors à vérifier que les conjectures liant complexité et types d'algèbre tiennent dans le cas des digraphes avec listes. L'objectif ultime serait évidemment de vérifier ces conjectures en général.

En second lieu, on a répondu à une question posée par Feder et Hell [24], la caractérisation des graphes avec listes \mathbf{G}_L tels que $HOM(\mathbf{G}_L)$ est résoluble par cohérence

d'arc. Ici encore, la caractérisation ne prend en compte que la structure des graphes. On a introduit le concept de polymorphisme monochromatique qui nous permet d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes à la mise en oeuvre d'un algorithme décidant $HOM(\mathbf{G}_L)$ lorsque \mathbf{G} est biparti. Cet algorithme utilise la cohérence d'arc après un prétraitement de l'entrée en espace logarithmique. Cette méthode serait applicable à des graphes k -coloriables, mais le prétraitement nécessite de vérifier que l'entrée est k -coloriable. Lorsque $k \geq 3$, ce problème est NP-complet, ce qui grève l'intérêt de généraliser cette approche. Il serait intéressant de voir ce que peuvent apporter les polymorphismes monochromatiques à l'étude des homomorphismes avec listes sur les digraphes. En particulier, pourrait-on obtenir le même genre de résultats que ceux décrits dans le chapitre 3 dans le cas des homomorphismes avec listes sur les digraphes ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Allender, M. Bauland, N. Immerman, H. Schnoor et H. Vollmer. The complexity of satisfiability problems : Refining Schaefer's theorem. *Journal of Computer and System Sciences*, 75(4):245–254, 2009.
- [2] S. Arora et B. Barak. *Computational Complexity : a modern approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [3] L. Barto. The dichotomy for conservative constraint satisfaction problems revisited. Dans *Proceedings of the 26th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2011, June 21-24, 2011, Toronto, Ontario, Canada*, pages 301–310, 2011.
- [4] L. Barto et M. Kozik. Constraint satisfaction problems of bounded width. *Proceedings of the 2009 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 595–603, 2009.
- [5] C. Bessière. *Handbook of Constraint Programming*, chapitre Constraint propagation, pages 29–83. Elsevier, 2006.
- [6] A. Bulatov. A dichotomy theorem for constraints on a three-element set. *Proceedings on the 43rd Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 649–658, 2002.
- [7] A. Bulatov. Tractable conservation constraint satisfaction problems. *Proceedings on the 18th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 321–330, 2003.
- [8] A. Bulatov et P. Jeavons. Algebraic structures in combinatorial problems. Rapport technique MATH-AL-4-2001, Technische Universitat Dresden, 2001. URL <http://www.cs.sfu.ca/~abulatov/papers/varieties.ps>.
- [9] A. Bulatov, P. Jeavons et A. Krokhin. Constraint satisfaction problems and finite algebras. *Proceedings of the 27th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 272–282, 2000.

- [10] A. Bulatov et M. Valeriotte. Recent results on the algebraic approach to the csp. Dans *Complexity of Constraints : An Overview of Current Research Themes*, pages 68–92, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.
- [11] S. Burris. et H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Numéro 78 dans Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1981.
- [12] S. Ceri, G. Gottlob et L. Tanca. What you always wanted to know about datalog (and never dared to ask). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 1(1):146–166, 1989.
- [13] D. Cohen et P. Jeavons. The complexity of constraint languages. Dans *Handbook of constraint programming*, Amsterdam, 2006. Elsevier.
- [14] S. A. Cook et P. McKenzie. Problems complete for deterministic logarithmic space. *Journal of Algorithms*, 8(3):385–394, 1987.
- [15] V. Dalmau. Linear Datalog and bounded path duality of relational structures. *Logical Methods in Computer Science*, 29(1):1–32, 2005.
- [16] V. Dalmau et A. Krokhin. Majority constraints have bounded path duality. *European Journal of Combinatorics*, 29(4):821–837, 2006.
- [17] V. Dalmau et B. Larose. Maltsev + datalog \rightarrow symmetric datalog. *Proceedings of the 2008 23rd Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 297–306, 2008.
- [18] V. Dalmau et J. Pearson. Closure functions and width 1 problems. Dans *Principles and Practice of Constraint Programming - CP'99, 5th International Conference, Alexandria, Virginia, USA, October 11-14, 1999, Proceedings*, volume 1713 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 159–173. Springer, 1999.
- [19] R. Dechter. *Handbook of Constraint Programming*, chapitre Tractable structures for CSPs, pages 209–244. Elsevier, 2006.
- [20] L. Egri, A. Krokhin, B. Larose et P. Tesson. The complexity of the list homomorphism problem for graphs. Dans *27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2010)*, volume 5 de *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 335–346, Dagstuhl, Germany, 2010. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

- [21] L. Egri, B. Larose et P. Tesson. Symmetric datalog and constraint satisfaction problems in logspace. Dans *LICS'07*, pages 193–202, 2007.
- [22] R. Fagin. Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets. Dans R. M. Karp, éditeur, *Complexity of Computation*, volume 7 de *SIAM-AMS Proceedings*, pages 43–73. American Mathematical Society, 1974.
- [23] T. Feder et P. Hell. List homomorphisms to reflexive graphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 72(2):236–250, mars 1998.
- [24] T. Feder et P. Hell. Width one, bounded strict width, and chordal extensible graphs, 2011.
- [25] T. Feder, P. Hell et J. Huang. Bi-arc graphs and the complexity of list homomorphisms. *Journal of Graph Theory*, 42:61–80, 1999.
- [26] T. Feder et M. Y. Vardi. The computational structure of monotone monadic snp and constraint satisfaction : a study through datalog and group theory. *SIAM Journal of Computing*, 28:57–104, 1998.
- [27] P. C. Gilmore et A. J. Hoffman. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 16:539–548, 1964.
- [28] P. Hell, M. Mastrolilli, M. Nevisi et A. Rafiey. Approximation of minimum cost homomorphisms. preprint, 12 pages, 2012.
- [29] P. Hell et J. Nešetřil. On the complexity of h-coloring. *J. Combin Theory Ser. B*, 48:92–110, 1990.
- [30] P. Hell et A. Rafiey. The dichotomy of list homomorphisms for digraphs. *Proceedings of the Twenty-Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm*, pages 1703–1713, 2011.
- [31] D. Hobby et R. McKenzie. *The Structure of Finite Algebras*, volume 76 de *Contemporary Mathematics*. Providence, Rhode Island, 1988.
- [32] H. H. Hoos et E. Tsang. *Handbook of Constraint Programming*, chapitre Local search methods, pages 135–167. Elsevier, 2006.
- [33] J. Hopcroft, R. Motwani et J. Ullman. *Introduction to automata theory, languages, and computation, 3rd Edition*. Addison-Wesley, Boston, 2006.

- [34] N. Immerman. *Descriptive complexity*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [35] P. Jeavons. On the algebraic structure of combinatorial problems. *Theoretical Computer Science*, 200(1):185–204, 1998.
- [36] G. Kun. Constraints, mmsnp and expander relational structures, 2007. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0706.1701>.
- [37] R. Ladner. On the structure of polynomial time reducibility. *Journal of the ACM*, 22:155–171, 1975.
- [38] B. Larose et A. Lemaître. List-homomorphism problems on graphs and arc consistency. À paraître dans ISMVL 2012.
- [39] B. Larose, C. Loten et C. Tardif. A characterisation of first-order constraint satisfaction problems. *Proceedings of the 21st IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 201–210, 2006.
- [40] B. Larose et P. Tesson. Universal algebra and hardness results for constraint satisfaction problems. *Theoretical Computer Science*, 410:1629–1647, 2009.
- [41] B. Larose et L. Zádori. Taylor terms, constraint satisfaction and the complexity of polynomial equations over finite algebras. *International Journal of Algebra and Computation*, 16(3):563–581, 2006.
- [42] C. G. Lekkerkerker et J. Ch. Boland. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, 51:45–64, 1962.
- [43] H. R. Lewis et C. H. Papadimitriou. Symmetric space-bounded computation. *Theoretical Computer Science*, 19:161–187, 1982.
- [44] L. Libkin. *Elements of finite model theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [45] Ross M. McConnell. Linear-time recognition of circular-arc graphs. *Algorithmica*, 37(2):93–147, 2003.
- [46] R. N. McKenzie, G. F. McNulty et W. F. Taylor. *Algebra, Lattices, Varieties, volume I*. Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, 1987.

- [47] U. Montanari. Network of Constraints : Fundamental Properties and Applications to Picture Processing. *Information Science*, 7:97–132, 1974.
- [48] O. Reingold. Undirected ST-connectivity in logspace. *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 376–385, 2005.
- [49] T. J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. *Proceedings of the tenth annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 216–226, 1978.
- [50] M. Sipser. *Introduction to the theory of computation, 2nd Edition*. Thomson Course Technology, Boston, 2005.
- [51] J. Spinrad. Circular-arc graphs of clique covering number two. *J. Comb. Theory B*, 44(3):300–306, 1987.
- [52] Á. Szendrei. *Clones in universal algebra*. Séminaire de mathématiques supérieures. Presses de l'Université de Montréal, 1986.
- [53] J. D. Ullman. *Principles of Database and Knowledge-Base Systems, Volume I*. Computer Science Press, 1988.
- [54] M. Valeriote. A subalgebra intersection property for congruence distributive varieties. *Canadian Journal of Mathematics*, 61(2):451–464, 2009.
- [55] P. van Beek. *Handbook of Constraint Programming*, chapitre Backtracking search algorithms, pages 85–134. Elsevier, 2006.
- [56] M. Y. Vardi. Constraint satisfaction and database theory : a tutorial. Dans *Proceedings of the Nineteenth ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symposium on Principles of Database Systems, May 15-17, 2000, Dallas, Texas, USA*, pages 76–85. ACM, 2000.

Index

- $Aug_I(\mathbf{G})$, 75
- $E(\mathbf{G})$, 12
- K_n , 13
- N^+ , 13
- $V(\mathbf{A})$, 9
- $V(\mathbf{G})$, 12
- δ^+ , 13
- δ^- , 13
- \leq_l , 6
- \leq_p , 6
- \leq_{FO} , 6
- \mathbf{G}^+ , 68
- σ -structure, 9
- k -COL, 16
- algèbre
 - simple, 37
 - strictement simple, 37
- arcs séparés, 51
- bicycle entravant, 57
- clone, 32
- complément, 5
- conservative, 30
- CSP, 7
 - instance, 8
- digraphe spécial, 67
 - de type I, 71
 - de type II, 71
- graphe, 12
 - arête, 12
 - arc, 12
 - arc-circulaire, 110
 - augmenté, 75
 - avec constantes, 10
 - avec listes, 10
 - bi-arc, 110
 - biparti, 13
 - boucle, 12
 - clique, 13
 - clique réflexive, 13
 - complet, 13
 - conservatif, 10
 - d'intervalle, 102
 - degré, 13
 - degré entrant, 13
 - degré sortant, 13
 - digraphe, 12
 - idempotent, 10
 - irréflexif, 12
 - non orienté, 12
 - orienté, 12
 - réflexif, 12
 - représentation, 110
 - sommet, 12
 - télescopique, 52

- voisin, 12
- voisinage, 13
- voisinage entrant, 13
- voisinage sortant, 13
- homomorphisme
 - conservatif, 14
- idempotent, 30
- invariant, 33
- L, 6
- NL, 7
- noyau, 15
- NSPACE, 6
- NTIME, 5
- opération
 - de Mal'tsev, 36
 - majorité, 36
 - presqu'unanimité, 35
 - presqu'unanimité faible, 35
 - semi-treillis, 35
 - totalemt symétrique, 35
 - TSI, 35
- partie
 - basse, 58
 - haute, 58
- polymorphisme
 - monochromatique, 105
- polynôme, 30
- problème, 5
 - complet, 6
 - de satisfaction de contraintes, 7
 - difficile, 6
- réduction, 6
 - FO, 6
 - logarithmique, 6
 - polynomiale, 6
- relation, 9
 - arité, 9
- SL, 7
- sous-graphe, 12
 - induit, 12
- SPACE, 6
- structure relationnelle, 9
 - avec constantes, 10
 - avec listes, 9
 - carré, 11
 - conservative, 9
 - diagonale, 11
 - domination, 47
 - idempotente, 10
 - langage de contraintes, 9
 - produit, 11
 - similaire, 9
 - sous-structure, 10
 - univers, 9
- terme, 30
- TIME, 5
- variété
 - k -permutable, 58
- vocabulaire, 9