





Université de Montréal

**Comportement des systèmes de référence quantiques pour le moment cinétique**

par  
Mychel Pineault

Département de Physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Avril

2012,

© Mychel Pineault,



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Comportement des systèmes de référence quantiques pour le moment cinétique**

présenté par:

Mychel Pineault

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manu B. Paranjape,	président-rapporteur
Richard MacKenzie,	directeur de recherche
Viktor Zacek,	membre du jury

Mémoire accepté le: .....



## RÉSUMÉ

Le domaine des systèmes de référence quantiques, dont les dernières avancées sont brièvement présentées au chapitre 1, est extrêmement pertinent à la compréhension de la dégradation des états quantiques et de l'évolution d'instruments de mesures quantiques. Toutefois, pour arriver à comprendre formellement ces avancées et à apporter une contribution originale au domaine, il faut s'approprier un certain nombre de concepts physiques et mathématiques, introduits au chapitre 2. La dégradation des états quantiques est très présente dans le contrôle d'états utiles à l'informatique quantique. Étant donné que ce dernier tente de contrôler des systèmes à deux états, le plus souvent des moments cinétiques, l'analyse des systèmes de référence quantiques qui les mesurent s'avère opportune. Puisque, parmi les plus petits moments cinétiques, le plus connu est de  $s = \frac{1}{2}$  et que son état le plus simple est l'état non polarisé, l'étude du comportement d'un système de référence mesurant successivement ce type de moments cinétiques constitue le premier pas à franchir. C'est dans le chapitre 3 qu'est fait ce premier pas et il aborde les questions les plus intéressantes, soit celles concernant l'efficacité du système de référence, sa longévité et leur maximum. La prochaine étape est de considérer des états de moments cinétiques polarisés et généraux, étape qui est abordée dans le chapitre 4. Cette fois, l'analyse de la dégradation du système de référence est un peu plus complexe et nous pouvons l'inspecter approximativement par l'évolution de certains paramètres pour une certaine classe d'états de système de référence. De plus, il existe une interaction entre le système de référence et le moment cinétique qui peut avoir un effet sur le système de référence tout à fait comparable à l'effet de la mesure. C'est cette même interaction qui est étudiée dans le chapitre 5, mais, cette fois, pour des moments cinétiques de  $s = 1$ . Après une comparaison avec la mesure, il devient manifeste que les ressemblances entre les deux processus sont beaucoup moins apparentes, voire inexistantes. Ainsi, cette ressemblance ne semble pas générale et semble accidentelle lorsqu'elle apparaît.

**Mots clés:** Système de référence quantique, informatique quantique, interaction entre moments cinétiques, transition quantique-classique.





## ABSTRACT

The field of quantum reference frames, which recent progress is briefly presented in chapter 1, is extremely relevant when it comes to understanding the deterioration of quantum states and the evolution of quantum measurement instruments. However, to fully understand these advances and to be able to bring an original contribution to this field, one must first understand a number of concepts in physics and mathematics. These concepts are explained in chapter 2. Since the deterioration of quantum states is very present when controlling useful states in quantum computing, and since quantum computing attempts to control two-states systems, often angular momenta, analyzing quantum reference frames proves to be relevant. Having  $s = \frac{1}{2}$  as the smallest known angular momentum, and since its simplest state is the unpolarized state, the study of a reference frame behavior that measures successively this type of angular momentums is the first step to be taken (chapter 3). The most interesting questions concern the efficiency of the reference frame, its longevity, and the optimization of these two quantities. The next step is to consider polarized and general angular momentum states (chapter 4). This time, analyzing the deterioration of the reference frame proves to be more complex, and can be examined in an approximate manner by looking at the evolution of certain parameters given for a certain class of states of reference frames. Furthermore, the existence of an interaction between the reference frame and the angular momentum can affect the reference frame approximatively as much as the measuring it does. It is this very interaction that is studied in chapter 5, but this time, for  $s = 1$  angular momenta. Comparing this interaction with the measurement shows very clearly that the similarities between the two processes are a lot less visible than with  $s = \frac{1}{2}$ , and even perhaps nonexistent. Therefore, the similarity does not seem to be general and appears to be accidental when it is significant.

**Keywords:** quantum reference frame, quantum computing, interaction between angular momentums, quantum to classical transition.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>LISTE DES SIGLES</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>NOTATION</b> . . . . .	<b>xix</b>
<b>DÉDICACE</b> . . . . .	<b>xxi</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>xxiii</b>
<b>CHAPITRE 1 : SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE QUANTIQUES : UN APERÇU</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 2 : INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Physique quantique et son formalisme . . . . .	5
2.2 Matrice densité . . . . .	8
2.2.1 Comportement de la matrice densité . . . . .	10
2.2.2 Manipulation de l'état sous forme matrice densité . . . . .	11
2.2.3 Produit direct d'états et trace partielle . . . . .	12
2.3 Systèmes de référence quantiques . . . . .	15
<b>CHAPITRE 3 : MESURE D'UN SPIN <math>\frac{1}{2}</math> NON POLARISÉ</b> . . . . .	<b>19</b>
3.1 Nature de l'observable mesuré et du système de référence . . . . .	19
3.1.1 Moments cinétiques quantiques . . . . .	19
3.1.2 Système de référence quantique pour moment cinétique . . . . .	21
3.2 Comportement du système pour une source non polarisée . . . . .	21
3.2.1 Relation de récurrence pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé . . . . .	23
3.2.2 Probabilité de réussite pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé . . . . .	24
3.3 Trajectoire optimale . . . . .	26

3.4	Limite des grands $l$ pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé . . . . .	27
<b>CHAPITRE 4 : MESURE D'UN SPIN <math>\frac{1}{2}</math> POLARISÉ . . . . .</b>		<b>31</b>
4.1	État polarisé d'un moment cinétique $\frac{1}{2}$ . . . . .	31
4.2	Comportement du système pour une source polarisée . . . . .	32
4.2.1	Équation de récurrence pour $s = \frac{1}{2}$ polarisé . . . . .	33
4.2.2	Tactiques de résolution . . . . .	33
4.3	Interaction énergétique spin-moment cinétique . . . . .	37
4.3.1	Calcul de l'interaction et équivalence avec la mesure . . . . .	37
4.4	Limite classique pour $s = \frac{1}{2}$ polarisé . . . . .	40
<b>CHAPITRE 5 : MESURE ET INTERACTION D'UN SPIN 1 . . . . .</b>		<b>41</b>
5.1	Moment cinétique $s = 1$ . . . . .	41
5.1.1	Addition de moments cinétiques $\frac{1}{2}$ . . . . .	41
5.1.2	Calcul de $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ pour un $l$ quelconque . . . . .	43
5.2	Récurrence attribuable à la mesure pour $s = 1$ . . . . .	43
5.2.1	Calcul des projecteurs . . . . .	43
5.2.2	Calcul de l'état total après la mesure . . . . .	44
5.3	Interaction pour $s = 1$ . . . . .	44
5.3.1	Calcul de l'évolution temporelle . . . . .	46
5.3.2	Calcul de l'état total après l'interaction . . . . .	46
5.4	Différence entre les systèmes de référence . . . . .	47
5.4.1	Calcul des traces partielles . . . . .	48
5.4.2	Forme explicite de la différence des systèmes de référence . . . . .	51
5.5	Différence entre les probabilités de succès . . . . .	51
5.5.1	Cas non cohérent . . . . .	51
5.5.2	Cas polarisé non général . . . . .	55
5.5.3	Cas général . . . . .	58
<b>CHAPITRE 6 : CONCLUSION . . . . .</b>		<b>65</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>67</b>

## **LISTE DES TABLEAUX**



## LISTE DES FIGURES

3.1	Efficacité et longévité pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé . . . . .	28
4.1	Choix des axes pour $s = \frac{1}{2}$ polarisé . . . . .	34
4.2	Rotation des axes pour $s = \frac{1}{2}$ polarisé . . . . .	35
5.1	Coefficients pour $l = 4$ et source non cohérente . . . . .	53
5.2	Coefficients pour $l = 4$ et source non cohérente agrandi . . . . .	53
5.3	Coefficients pour $l = 10$ et source non cohérente . . . . .	53
5.4	Coefficients pour $l = 10$ et source non cohérente agrandi . . . . .	54
5.5	Coefficients pour $l = 4$ et source non générale . . . . .	57
5.6	Coefficients pour $l = 4$ et source non générale agrandi . . . . .	57
5.7	Coefficients pour $l = 10$ et source non générale . . . . .	57
5.8	Coefficients pour $l = 10$ et source non générale agrandi . . . . .	58
5.9	Coefficients pour $l = 4$ et source générale . . . . .	62
5.10	Coefficients pour $l = 4$ et source générale agrandi . . . . .	62
5.11	Coefficients pour $l = 10$ et source générale . . . . .	62
5.12	Coefficients pour $l = 10$ et source générale agrandi . . . . .	63





## LISTE DES ANNEXES

<b>Annexe I :</b>	<b>Unicité des états à distribution déterministe . . . . .</b>	<b>xxv</b>
<b>Annexe II :</b>	<b>Décomposition équivalente de <math>\rho^{(n+1)}</math> . . . . .</b>	<b>xxvii</b>
<b>Annexe III :</b>	<b>Approximation des grands <math>l</math> et d'état semi classique . . . . .</b>	<b>xxix</b>
<b>Annexe IV :</b>	<b>Exemple de calculs de traces partielles . . . . .</b>	<b>xxxi</b>
<b>Annexe V :</b>	<b>Exemples de calcul de traces . . . . .</b>	<b>xxxiii</b>
<b>Annexe VI :</b>	<b>Système de référence stationnaire pour <math>s = \frac{1}{2}</math> . . . . .</b>	<b>xxxv</b>



## **LISTE DES SIGLES**

CRSNG	Conseil de recherche en sciences naturelles et génie
FQRNT	Fond québécois de recherche nature et technologie
INTRIQ	Institut transdisciplinaire de recherche en informatique quantique



## NOTATION

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$i$	Nombre complexe tel que, $i = \sqrt{-1}$
$ \alpha $	Norme du nombre complexe $\alpha$
$\alpha^*$	Conjugué complexe du nombre $\alpha$
$\mathcal{H}^A$	Espace d'Hilbert associé au système $A$



À nos chers Premiers ministres qui ont les valeurs

aux bonnes places.





## REMERCIEMENTS

Le fruit de ce travail n'aurait probablement jamais pris forme sans toute l'aide que j'ai pu recevoir de mon entourage durant les deux dernières années. Il est donc pour moi essentiel de remercier tous ces gens qui m'ont offert leur soutien. Premièrement, je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. Richard MacKenzie, sans qui j'aurais assurément pataugé encore plus lamentablement dans le si vaste et confondant monde de la recherche. Merci de m'avoir aiguillé, donné du grain à moudre et d'avoir été aussi patient.

Ensuite, je tiens à remercier deux collègues et amis qui m'ont aidé à utiliser l'infâme technologie afin de faire avancer mon projet et qui ont également réussi, par leur calme et leur humour, à me rassénérer : merci Jean-François Désilets et Jonathan Belletête. Merci également à Jason Éthier qui, avec sa myriade de questions et sa candeur, me détournait, à mon grand plaisir, d'occupations parfois ennuyeuses.

Je voudrais également remercier mes collègues au sein du département de physique qui m'ont insidieusement et habilement convaincu de m'impliquer dans le mouvement étudiant (Laurent Karim Béland, Xavier Fabian, Philippe Cambron, Olivier Paré-Labrosse, Delphine Bouilly et Simon Blackburn). Grâce à vos viles manoeuvres, j'ai pu occuper mon esprit avec une plus grande diversité d'idées et me divertir, ce qui, chaque jour, m'a permis de conserver un esprit sain et une plus grande motivation. De plus, j'aimerais remercier toute l'association étudiante de physique qui me rend fier quotidiennement et qui m'a irrémédiablement attaché au département de physique. Sans elle, je n'aurais peut-être pas entamé des études de cycles supérieurs en son sein.

Je suis également redevable de tout le soutien financier que j'ai eu la chance de recevoir afin de pouvoir m'investir pleinement dans mon projet. Merci aux deniers du département de physique, merci au CRSNG et au FQRNT de m'avoir fait confiance, merci à l'INTRIQ pour son soutien in extremis et merci à Richard MacKenzie pour ses efforts et sa contribution à mon financement, en espérant qu'ils ne le regrettent pas.

Enfin, un merci tout particulier à mes parents et amis d'avoir cru en moi. Merci aussi de ne rien comprendre à la physique : j'ai, en conséquence, pu pratiquer mes talents chancelants de vulgarisateur et vous avez pu me faire voir les merveilles du monde en dehors de la physique. Finalement, un gigantesque merci à ma copine Sophie Charbonneau-Saulnier, tout d'abord pour ta contribution de forme à ce mémoire et, ensuite, pour tout le reste : merci d'être toujours là pour moi, merci de ta foi inconditionnelle en moi, merci de ta bonne humeur et merci de tout ce que tu as pu faire pour me rendre heureux ces deux dernières années.



## CHAPITRE 1

### SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE QUANTIQUES : UN APERÇU

Tout système physique peut être décrit par certaines quantités observables (position, impulsion, moment cinétique, etc.) que nous devons pouvoir mesurer afin qu'il soit envisageable de dire que l'état du système physique est connu. Cependant, toute mesure est une comparaison avec quelque chose d'autre. Par exemple, il est impossible de mesurer la position d'un corps sans comparaison avec la position d'un autre système. En effet, il faut absolument se définir un système d'axes qui nous permet de mesurer la position de ce corps par rapport à l'origine de ce système d'axes. Ce système, qui nous permet la mesure grâce à la comparaison, se nomme *système de référence*. Ce dernier est, en somme, l'instrument de mesure<sup>1</sup>.

Classiquement, seul le choix du système de référence est un enjeu important, car, une fois ce choix judicieux effectué, ce système ne changera pas de manière aléatoire et ne changera que selon notre bon vouloir. Par exemple, si nous choisissons un système d'axes en rotation, il ne tournera que selon ce que nous avons décidé. Le système que l'on cherche à mesurer ne changera pas de nature par l'acte de la mesure (l'état du système est indépendant de l'observation) et le système de référence ne sera pas non plus affecté par la mesure. Ainsi, bien que le système mesuré le soit par rapport à un autre système, le concept physique attaché à ce dernier peut être évacué et le système de référence n'a pas besoin d'être partie intégrante d'un système total (système d'intérêt et système de référence).

Dans le cas d'un système d'intérêt (système mesuré) qui serait de nature quantique, la nature de la mesure change radicalement. En mécanique quantique, une observation provoque, chez le système observé, un effondrement qui change l'état du système quantique. Cependant, dans le cas classique comme dans le cas quantique, le système mesuré doit l'être par rapport à un système de référence. La majorité du temps, par souci de simplification, nous choisissons théoriquement un système de référence classique. En effet, généralement, le système de référence choisi est défini par rapport à un objet macroscopique (qui devrait, lui aussi être de nature quantique, car, la communauté scientifique d'aujourd'hui s'accorde pour accepter la nature quantique de l'Univers), qui ne ressent les effets quantiques que de façon négligeable. Ainsi, comme le système de référence peut être considéré comme étant classique à toute fin pratique, l'état du système de référence n'a pas besoin d'être considéré à chaque mesure, car il ne s'effondre pas et ne change pas de manière aléatoire. Ce cas de figure est le cas idéal, celui qui

---

<sup>1</sup>Quand j'utilise le mot « instruments », j'entends le concept abstrait, l'essence à la base de la conception des objets concrets que les expérimentateurs conçoivent avec tant d'ingéniosité, et non pas l'objet concret en tant que tel.

nous donne l'information exacte sur le système d'intérêt. Si nous voulions mesurer la position quantique d'un corps ou d'une particule, le système de référence parfait (ou classique) serait le système d'axes immobiles, fixé par rapport à un objet macroscopique qui nous fournira une position exacte à chaque mesure.

Cependant, il est possible d'imaginer des systèmes de référence d'une toute autre nature. En effet, si le système de référence est fixé par rapport à un objet très petit, les effets quantiques affecteront significativement cet objet, et donc également le système de référence (afin de comprendre l'utilité de tels systèmes de référence, consulter la section 2.3). Ainsi, nous aurons un système de référence quantique (toujours en gardant en tête que le système mesuré est également quantique), les caractéristiques immuables et de perfection du système de référence classique seront perdues. Comme le système de référence est quantique, il subira, lui aussi, l'effondrement lors de la mesure, ce qui altérera son état (le fera bouger) et induira une probabilité d'erreur sur la mesure<sup>2</sup>. De plus, même pour des cas idéaux, la mesure pourra admettre une probabilité d'erreur non nulle. La dégradation de ce système de référence quantique au fil des mesures peut être étudié.

Essayons maintenant de situer où s'inscrit le travail original du présent mémoire dans ce qui a déjà été accompli dans le cas des systèmes de référence quantiques mesurant le moment cinétique. Dans ce cas particulier, le système de référence quantique est un autre moment cinétique et la mesure consiste en une mesure conjointe du moment cinétique total. Ce processus permettra de connaître l'état du moment cinétique par rapport au système de référence quantique. Premièrement, pour une source infinie de moments cinétiques  $\frac{1}{2}$  non polarisés ([7]), le comportement du système de référence si nous mesurons de manière récurrente les moments cinétiques de la source a été trouvé. Les auteurs y ont également résolu les équations de récurrence pour une condition initiale donnée. De cette solution, les auteurs en déduisent la durée de vie utile du système de référence (i.e., la durée pendant laquelle la probabilité de réussite de la mesure est comparable à 1). Dans le présent mémoire (section 3.3), il sera démontré que la condition initiale choisie dans [7] est celle qui fournit la meilleure trajectoire du système de référence, c'est-à-dire qu'elle donne la meilleure probabilité de réussite et la plus longue durée de vie utile au système de référence.

Ensuite, pour une source infinie de moments cinétiques  $\frac{1}{2}$  généraux mesurés successivement, dans [22], on trouve l'équation de récurrence et on en déduit la thermalisation du système de référence (la forme de son état après une infinité de mesures). Il en ressort que le système de référence s'aligne, en moyenne, avec l'axe de la polarisation des états de la source. Ceci signifie que l'orientation moyenne du système de référence sera parallèle à la polarisation des

---

<sup>2</sup>Par probabilité d'erreur sur la mesure, nous entendons la probabilité d'obtenir un résultat en contradiction avec ce que le système de référence classique fournirait.

états de la source. De plus, dans une approximation semi classique et pour une grande longueur de système de référence, une équation pour l'un des paramètres du système de référence est déduite.

Par la suite, dans [18] et dans [1], on réussit à montrer qu'une interaction pendant un temps précis entre le système de référence et le moment cinétique  $\frac{1}{2}$  général mesuré est quasi équivalente à la mesure, en ce qui a trait à l'effet sur le système de référence. Dans [1], on utilise cette interaction à intermittence (à toutes les deux mesures) afin de contrer le mouvement défavorable du système de référence, ce qui permet d'allonger de manière substantielle la durée de vie utile de celui-ci. Cette même interaction ainsi que cette potentielle équivalence seront abordées dans le cas d'un moment cinétique 1 dans le présent mémoire (chapitre 5). Nous verrons que la quasi-équivalence est beaucoup moins convaincante et qu'elle semble un peu plus accidentelle. Ainsi, il semble très improbable de pouvoir allonger la durée de vie utile d'un système de référence dans le cas d'un moment cinétique d'une grandeur quelconque grâce à cette interaction.

Toujours dans [1], on s'intéresse au comportement du système de référence suite à une mesure d'un moment cinétique  $\frac{1}{2}$  dont le résultat est gardé en mémoire. Précédemment, étant donné la nature probabiliste de la mesure en mécanique quantique, on ne considèrerait que l'effondrement moyen ou l'effondrement de l'état dans le cas de l'oubli du résultat de la mesure. Cependant, dans [1], on s'intéresse aux différences des effets obtenus. Cette analyse est utile, car, expérimentalement, il est excessivement rare que le résultat de la mesure soit oublié. De plus, les auteurs y calculent explicitement l'effet de chaque possibilité d'effondrement sur une classe d'états du système de référence qu'on nomme états quadratiques.

Enfin, dans [18], on reprend les approximations faites dans [22] qui permettent, grâce à une ingénieuse méthode, de trouver une équation qui décrit l'évolution de chaque paramètre, et non plus un seul. Ces équations sont ensuite résolues analytiquement et numériquement pour certains cas particuliers. Aussi, les auteurs utilisent le modèle de [22] pour un type d'états du système de référence qui n'est plus quasi classique et qui n'est plus initialement maximalement aligné sur un axe unique. Dans ce cas, la dégradation du système de référence se fait sur une échelle beaucoup plus courte (c'est-à-dire qu'il évolue plus rapidement).

Évidemment, l'étude des systèmes de référence ne se limite pas au cas de la mesure de moments cinétiques. Par exemple, dans [2], on analyse en détail l'expérience des patrons d'interférence générés par deux fentes. On y discute des différences formelles entre une particule quantique (système mesuré) passant dans un système de fentes classiques (système de référence) et une particule classique passant dans un système de fentes quantiques. De plus, les auteurs de [7] ont aussi étudié le système de référence dans le cas de la mesure d'une phase d'états quantiques.

Dans le cas particulier de ce mémoire, seuls seront abordés les systèmes de référence utilisés pour la mesure de moments cinétiques quantiques. Plus particulièrement, il y sera prouvé que la condition initiale choisie dans [7] dans le cas d'une source infinie de moments cinétiques  $\frac{1}{2}$  non polarisés est celle qui fournit la meilleure trajectoire du système de référence : celle qui donne la meilleure longévité et la meilleure probabilité de succès à chaque mesure. Il sera également question de l'interaction hamiltonnienne entre le système de référence et un moment cinétique de  $s = 1$  afin de trouver un temps d'interaction qui aurait un effet quasi équivalent à l'effet de la mesure. On verra que cette quasi-équivalence est beaucoup moins apparente que dans le cas du moment cinétique  $\frac{1}{2}$ .

## CHAPITRE 2

### INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objectif, dans un premier temps, d'introduire la théorie et les principaux résultats ayant trait à la mécanique quantique et aux mathématiques, résultats essentiels à la compréhension du présent mémoire. Il est à noter qu'ils seront présentés de façon très succincte et que si le lecteur désire une introduction plus étoffée aux différents sujets abordés dans ce chapitre, il pourra se référer aux ouvrages cités. Dans un second temps, il sera question de l'utilité que peuvent avoir les systèmes de référence quantiques et du rôle que ceux-ci peuvent jouer dans divers domaines scientifiques.

#### 2.1 Physique quantique et son formalisme

En mécanique quantique, tout système d'intérêt s'exprime, à un temps donné, dans un état qui vit dans un espace appelé espace d'Hilbert. Cet état est défini par un *ket*  $|\psi(t_0)\rangle$ . L'espace d'Hilbert est un espace vectoriel complexe qui possède un produit scalaire bilinéaire bien défini  $\langle\phi|\theta\rangle$  où  $\langle\phi|$  (un *bra*) est le conjugué complexe transposé de  $|\phi\rangle$ . De plus, l'état du système est toujours normalisé, c'est-à-dire que pour un état  $|\psi(t_0)\rangle$ ,

$$\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = 1.$$

Toutefois, il se peut que ce postulat ne soit pas, *a priori*, respecté. En effet, il se peut également que l'état soit un mélange statistique de plusieurs kets qu'on appelle état mixte, par opposition aux états purs qui s'expriment par un seul ket. Nous considérerons ces aspects plus loin dans le présent chapitre.

Ensuite, à chaque quantité mesurable  $\mathcal{A}$  (position, vitesse, énergie, moment cinétique, etc.) est associée un opérateur  $A$ . Par exemple, à l'énergie est associée  $H$  l'hamiltonien. Les opérateurs d'observables sont toujours hermitiens, du moins dans le cas de systèmes à dimensions finies, ce qui sera toujours le cas dans le présent mémoire. Mathématiquement, ceci signifie que pour tout observable  $\mathcal{A}$ , son opérateur  $A$  possède la propriété suivante :

$$A = A^\dagger = A^{*T}.$$

Ce postulat nous assure que les valeurs propres de  $A$  sont réelles et que les vecteurs propres de  $A$  sont orthogonaux, deux éléments centraux de la mécanique quantique.

De plus, dans le cas où nous nous intéressons à l'observable  $\mathcal{A}$  d'un système, l'état du

système vivra dans l'espace d'Hilbert que nous pourrions décrire à l'aide de  $A$ . En effet, cet espace, que l'on peut noter  $\mathcal{H}^A$ , peut être généré par la base des vecteurs propres normalisés de  $A$ ,  $\{|v_i\rangle | A|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ . Comme les vecteurs propres normalisés de  $A$  forment une bonne base de  $\mathcal{H}^A$ , l'état peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ceux-ci (que nous appellerons aussi états propres).

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_{i=1}^n c_i(t_0)|v_i\rangle$$

où  $\sum_i c_i^*(t_0)c_i(t_0) = 1$ . La condition sur les coefficients découle directement du fait que  $\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = 1$  et du fait que les états propres sont orthonormés, c'est-à-dire que  $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$ .

Une autre caractéristique (probablement celle qui marque le plus l'imaginaire) de la mécanique quantique est le comportement du système lors de la mesure : l'effondrement de l'état. Lors d'une mesure, un observateur ne peut obtenir comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable mesurée. De plus, si nous savons que le système est dans l'un des états propres de l'observable, la mesure nous apprendra que la valeur de l'observable n'est autre que la valeur propre associée à l'état du système. Cependant, dans le cas où l'état du système est un mélange de plusieurs états propres associés à des valeurs propres distinctes, le fait d'obtenir un résultat unique à une mesure est impossible sans cet effondrement. Lorsqu'un tel cas de figure apparaît, la mesure impose au système un effondrement dans l'un des états propres de l'observable mesurée (selon une probabilité déterminée par la structure de l'état avant la mesure) et le résultat obtenu sera celui de la valeur propre associée à l'état dans lequel le système s'est effondré. Afin de mieux comprendre l'effet d'une mesure sur un système, j'introduirai un nouvel outil : les projecteurs.

En mathématiques, un projecteur est un opérateur ou une transformation qui envoie des vecteurs vers d'autres vecteurs et qui est égal à son carré. Par exemple, pour un projecteur  $\Pi$  qui s'applique sur un ensemble de vecteurs  $v_i$  dans un espace donné :

$$\Pi^2 v_i = \Pi v_i.$$

Ceci signifie que l'application successive d'un projecteur est tout à fait égale à l'application unique de ce même projecteur :  $\Pi^2 = \Pi$ .

Plus particulièrement, en mécanique quantique, les projecteurs qui nous intéressent sont ceux qui sont associés à une observable et qui projettent vers les états propres de cette observable. Supposons que nous ayons une observable  $\mathcal{A}$  et que nous soyons intéressés par les états exprimés dans la base des états propres de cette observable (espace d'Hilbert  $\mathcal{H}^A$ ).  $A$  a donc  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$  et  $n$  états propres  $|v_i\rangle$  ( $1 \leq i \leq n$ ), lesquels posséderont tous un projecteur  $\Pi_i$



défini de cette manière :

$$\Pi_i |v_j\rangle = \begin{cases} |v_i\rangle & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire deux choses : premièrement, les projecteurs sont hermitiens, et deuxièmement, leur action sur un état quelconque  $|\psi\rangle$  est la suivante :

$$\Pi_i |\psi(t_0)\rangle = c_i(t_0) |v_i\rangle \quad \text{où} \quad |\psi(t_0)\rangle = \sum_{j=1}^n c_j(t_0) |v_j\rangle.$$

Ensuite, admettons que nous mesurons l'observable  $\mathcal{A}$  sur notre état quelconque  $|\psi(t_0)\rangle$ . Nous ne pouvons pas connaître quel sera le résultat de la mesure avec certitude avant celle-ci, mais nous pouvons connaître la probabilité de chaque possibilité grâce à nos projecteurs. En effet, la probabilité de mesurer  $\lambda_i$  est :

$$P(i) = \langle \psi(t_0) | \Pi_i | \psi(t_0) \rangle = c_i(t_0) c_i^*(t_0).$$

De plus, l'état s'effondrera dans l'état propre associé à la valeur mesurée. On peut l'écrire de la façon suivant à l'aide des projecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{P(i)}} \Pi_i |\psi(t_0)\rangle.$$

Pour davantage de détails sur les projecteurs en mécanique quantique, voir [17], [21] ou [20].

Il ne suffit pas de connaître l'état d'un système à un temps donné pour bien comprendre notre système, car cet état évoluera dans le temps. En effet, les états quantiques respectent une équation différentielle bien connue que l'on nomme l'équation de Shrödinger<sup>1</sup> :

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

Dans le cas où l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps et que nous connaissons l'état du système au temps  $t = 0$ , nous pouvons résoudre l'équation très facilement et obtenir la solution :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \quad \text{où} \quad e^{-iHt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iHt)^n}{n!}. \quad (2.2)$$

L'opérateur  $e^{-iHt}$  est appelé opérateur d'évolution temporelle. Pour des détails sur ce qui précède, voir [12], [23], [16] et [17].

---

<sup>1</sup>Cette équation n'est valide que dans le cas de systèmes non relativistes. Or, dans le présent mémoire, nous ne considérerons que des systèmes non relativistes.

## 2.2 Matrice densité

Jusqu'à maintenant, nous avons toujours supposé que le système étudié est dans un état unique  $|\psi\rangle$  qui est une superposition quantique. Nous disons de ce système qu'il est dans un état *pur*. Cependant, il ne s'agit que d'un cas idéal bien particulier. Le plus souvent, le système se trouve dans un état constitué d'un mélange statistique d'états purs que nous appelons état *mixte*. Imaginons, par exemple, qu'une boîte fermée contient un fabricant d'états quantiques. Supposons que ce fabricant ait la capacité de produire deux états quantiques différents :  $|\phi_1\rangle$  et  $|\phi_2\rangle$ . Supposons également qu'il décide de fabriquer l'un d'eux, qu'il dit à un observateur extérieur qu'il fabriquera  $|\phi_1\rangle$  avec probabilité  $p_1$  et qu'il fabriquera  $|\phi_2\rangle$  avec probabilité  $p_2 = 1 - p_1$ , qu'il le fasse et qu'il le donne à l'observateur par un petit trou. Pour l'observateur, l'état qu'il détient est un mélange statistique entre  $|\phi_1\rangle$  et  $|\phi_2\rangle$  avec une distribution statistique donnée par  $p_1$  et  $p_2$  et qui s'écrit comme suit :

$$\text{l'état total est } \{|\phi_1\rangle, p_1; |\phi_2\rangle, p_2\}.$$

Bien que le dernier exemple fournit une façon tout à fait acceptable de décrire un état mixte, il ne s'agit pas de l'outil de travail le plus adapté et efficace pour le calcul. Heureusement, il existe un moyen d'écrire les états mixtes qui soit efficace et qui contient toute l'information disponible sur un système. L'état est représenté par la *matrice densité*<sup>2</sup>. Pour un système dans l'état suivant,

$$\{|\phi_1\rangle, p_1; |\phi_2\rangle, p_2; \dots |\phi_n\rangle, p_n\} \quad \text{la matrice densité } \rho \text{ est } \rho = \sum_{i=1}^n p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$$

Étant donné la nature des états purs,  $\rho$  sera toujours 1) positive, 2) hermitienne et 3) de trace

---

<sup>2</sup>Pour une introduction détaillée aux matrices densité, voir [17], [21] ou [20]

égale à 1. En voici la preuve :

$$\begin{aligned} 1) \quad \langle \psi | \rho | \psi \rangle &= \sum_{i=1}^n p_i \langle \psi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \psi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n p_i |\langle \psi | \phi_i \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \rho^\dagger &= \sum_{i=1}^n p_i (|\phi_i\rangle \langle \phi_i|)^\dagger \\ &= \sum_{i=1}^n p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \\ &= \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{tr}(\rho) &= \sum_{i=1}^n p_i \text{tr}(|\phi_i\rangle \langle \phi_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \text{tr}(\langle \phi_i | \phi_i \rangle) \quad , \text{car } \text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \langle \phi_i | \phi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{aligned}$$

Ensuite, pour toute matrice  $\rho$  positive, hermitienne et de trace égale à 1, le théorème de décomposition spectrale ([17], [21], [20]) nous indique qu'il est possible de trouver une distribution statistique d'états purs qui la générera. Cependant, il se peut qu'il existe plus d'une distribution valide et qu'elles ne soient pas uniques (impossible dans le cas d'un état pur, bien entendu). En effet, des distributions statistiques complètement différentes peuvent donner la

même matrice densité. Par exemple,

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0,5; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0,5 \right\} \\ \text{donne ceci : } \rho &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{qu'on peut écrire : } & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0,5; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, 0,5 \right\} \end{aligned}$$

Nous pourrions donc être tentés de croire que la matrice densité n'est qu'une information partielle sur le système, mais ce n'est pas le cas. En effet, elle est l'unique information que nous pouvons posséder sur un système. Ceci signifie que toutes les distributions qui donnent la même matrice densité sont parfaitement indistinguables<sup>3</sup>. Ainsi, la matrice densité est l'outil idéal afin de décrire l'état quantique d'un système, car elle *est* l'état quantique.

### 2.2.1 Comportement de la matrice densité

Nous connaissons maintenant la meilleure façon d'écrire un état quantique général, mais nous ne savons pas comment cette nouvelle forme évoluera temporellement, ni comment s'écrit son effondrement. Cette sous-section aura donc pour objectif de caractériser le comportement d'une matrice densité soumise à une évolution temporelle et à une mesure.

Premièrement, supposons que nous ayons une matrice densité valide à un temps quelconque. Nous savons alors qu'il existe une distribution statistique d'états purs qui pourront la générer. Ainsi, l'équation (2.1) permet de déduire l'évolution temporelle de notre matrice

---

<sup>3</sup>Pour de plus amples détails et une démonstration satisfaisante de ces dernières affirmations, voir [17], [21] ou [20]

densité :

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) &= \sum_{j=1}^n p_j \left( i\frac{\partial}{\partial t}(|\phi_j(t)\rangle)\langle\phi_j(t)| + i|\phi_j(t)\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle\phi_j(t)|) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n p_j H(t)|\phi_j(t)\rangle\langle\phi_j(t)| - \sum_{j=1}^n p_j |\phi_j(t)\rangle\langle\phi_j(t)|H(t) \\
&= H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t) = [H(t), \rho(t)].
\end{aligned}$$

De plus, si  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, l'évolution temporelle  $e^{-iHt}$  affectera chaque état de la distribution et nous aurons :

$$\begin{aligned}
\rho(0) = \sum_{j=1}^n p_j |\phi_j(0)\rangle\langle\phi_j(0)| &\rightarrow \sum_{j=1}^n p_j e^{-iHt} |\phi_j(0)\rangle\langle\phi_j(0)| e^{iHt} \\
&= e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt} = \rho(t).
\end{aligned}$$

Il est enfin très facile de vérifier que cette évolution temporelle est juste en l'insérant dans l'équation différentielle précédente.

En second lieu, nous pouvons caractériser le comportement d'une matrice densité lors d'une mesure. Nous connaissons déjà l'effet d'une mesure sur un état pur exprimé comme un vecteur (il sera transformé par le projecteur associé au résultat de la mesure). Encore une fois, nous savons qu'il existe une distribution d'états purs qui généreront notre matrice densité  $\rho$ , et en nous appuyant sur ce fait, nous pouvons connaître l'effet de la mesure sur notre matrice densité si nous connaissons le résultat de la mesure. Supposons que nous obtenons  $\lambda_m$ , que l'état propre associé est  $|v_m\rangle$  et que nous avons  $P(\lambda_m|i)$  comme probabilité conditionnelle de l'obtenir si nous possédions  $|\phi_i\rangle$  et que la probabilité totale de le mesurer est  $P(\lambda_m)$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| &\rightarrow |v_m\rangle\langle v_m| \\
&= \frac{P(\lambda_m)}{P(\lambda_m)} |v_m\rangle\langle v_m| \\
&= \frac{1}{P(\lambda_m)} \sum_{i=1}^n p_i P(\lambda_m|i) |v_m\rangle\langle v_m| \\
&= \frac{1}{P(\lambda_m)} \sum_{i=1}^n p_i \Pi_{\lambda_m} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \Pi_{\lambda_m} \\
&= \frac{\Pi_{\lambda_m} \rho \Pi_{\lambda_m}}{P(\lambda_m)}.
\end{aligned}$$

## 2.2.2 Manipulation de l'état sous forme matrice densité

Maintenant que nous connaissons le comportement de la matrice densité, il nous faudra comprendre comment l'utiliser pour effectuer les calculs qui nous intéresseront tout au long de

ce mémoire. Tous ces calculs reposeront, comme nous le verrons, sur l'utilisation de la trace.

Lorsque nous possédons un système dans un état  $\rho$  quelconque d'une observable  $A$  (il est à noter que dorénavant, nous utiliserons le même caractère pour désigner l'observable et l'opérateur de l'observable), l'une des informations les plus utiles à extraire est la probabilité de mesure des valeurs possibles  $a_i$  de  $A$  ( $P(a_i)$ ). Le moyen le plus simple de bien saisir d'où viennent ces probabilités est, encore une fois, de travailler avec l'une des décompositions spectrales de notre matrice densité. Dans ce contexte, il est clair que ([17], [21], [20])

$$\begin{aligned}
P(a_i) &= \sum_{j=1}^n p_j P(a_i|j) \\
&= \sum_{j=1}^n p_j \langle \phi_j | \Pi_{a_i} | \phi_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n p_j \text{tr}(\langle \phi_j | \Pi_{a_i} | \phi_j \rangle) \\
&= \sum_{j=1}^n p_j \text{tr}(\Pi_{a_i} | \phi_j \rangle \langle \phi_j |) , \text{car } \text{tr}(BCD) = \text{tr}(DBC) \\
&= \text{tr}(\Pi_{a_i} \sum_{j=1}^n p_j | \phi_j \rangle \langle \phi_j |) \\
&= \text{tr}(\Pi_{a_i} \rho).
\end{aligned}$$

Toujours grâce à la même décomposition spectrale, nous pouvons également comprendre comment extraire la moyenne de  $A$  contenue dans notre état. Pour cela, il suffit de remarquer que pour un état pur  $|\psi\rangle$ , la moyenne de  $A$  est  $\langle \psi | A | \psi \rangle$ . Sachant ceci, il est évident que la moyenne de  $A$  sera ([17], [21], [20])

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \sum_{i=1}^n p_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n p_i \text{tr}(A | \phi_i \rangle \langle \phi_i |) \\
&= \text{tr}(A \sum_{i=1}^n p_i | \phi_i \rangle \langle \phi_i |) \\
&= \text{tr}(A \rho).
\end{aligned}$$

### 2.2.3 Produit direct d'états et trace partielle

Il arrive souvent, lorsque nous nous intéressons à un système, que ce dernier puisse ou doive être perçu d'une certaine manière. Par exemple, si nous décidons d'étudier l'observable  $A$  pour deux particules, l'état devra justement s'exprimer de cette façon particulière. Nous aurons l'observable  $A_1$  pour la première particule et l'observable  $A_2$  pour la seconde. En effet, l'état total

des deux particules s'exprimera dans l'espace formé par le produit direct des espaces d'Hilbert de chacune des observables :  $\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2}$ , c'est-à-dire que les états purs vivront dans l'espace engendré par cette base  $\{|a_i\rangle \otimes |a_j\rangle | 1 \leq i, j \leq n\}$  où les  $|a_i\rangle$  sont les états propres de  $A$ . Plus intuitivement, nous aurons un système qui pourra être observé et analysé pour deux particules (i.e., pour deux observables), ce qui signifie que notre état devra contenir un état de  $A_1$  et un état de  $A_2$ . Ainsi, nous constatons que l'espace  $\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2}$  est le bon espace.

Il ne s'agit pas du seul cas où les produits directs sont obligatoires. En effet, il se peut que l'état d'une particule s'exprime par le biais de deux observables  $A$  et  $B$  qui ne vivent pas dans le même espace (comme l'état d'un électron qui s'exprime par son état dans l'espace réel et son état de spin), c'est-à-dire que l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}^A$  ne peut pas être transformé de telle sorte qu'il puisse décrire l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}^B$ . Dans ce cas particulier, les états de la particule existeront dans  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Cela signifie que les états s'exprimeront dans la base formée par  $\{|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle | 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m\}$  où les  $|a_i\rangle$  et les  $|b_j\rangle$  sont respectivement les états propres de  $A$  et  $B$ .

Ces types d'état peuvent être généralisés à plus de deux particules et à plus de deux observables. Dans ces cas, l'espace dans lequel vivraient les états serait un produit direct multiple de divers espaces d'Hilbert.

La prochaine étape consiste à trouver un moyen d'isoler l'état de l'un des observables. Pour illustrer clairement les prochains développements, prenons l'exemple des observables  $A_1$  et  $A_2$  de deux particules et supposons que les espaces  $\mathcal{H}^{A_i}$  ont deux dimensions (les  $A_i$  ont deux états propres  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ ). Pour les états purs suivants,

$$\begin{aligned} &|0\rangle|0\rangle \\ &|0\rangle|1\rangle \\ &|1\rangle|0\rangle \\ &|1\rangle|1\rangle \\ &\frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \end{aligned}$$

l'état total nous fournit très visiblement l'état de chaque particule (pur pour chaque particule également). Ces états sous forme de produits directs peuvent aussi s'exprimer sous forme de

matrice densité :

$$\begin{aligned}
|0\rangle|1\rangle &\rightarrow |0\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 1| = |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \\
\frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) &\rightarrow \sum_{i,j,k,l=0}^1 \frac{1}{4} |i\rangle|j\rangle\langle k|\langle l| \\
&= \sum_{i,j,k,l=0}^1 \frac{1}{4} |i\rangle\langle k| \otimes |j\rangle\langle l| \\
&= \left( \sum_{i,k=0}^1 \frac{1}{2} |i\rangle\langle k| \right) \otimes \left( \sum_{j,l=0}^1 \frac{1}{2} |j\rangle\langle l| \right) \\
&= \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

où, encore une fois, l'état de chaque particule est pur et facilement identifiable.

Cependant, la factorisation de l'état n'est pas toujours possible, même dans le cas où l'état total est pur. Par exemple, aucune factorisation n'existe pour l'état  $\frac{|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$ , et ce même dans sa forme matrice densité  $(\frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|])$ . Nous disons de ces états qu'ils sont intriqués ou enchevêtrés.

Afin d'isoler de manière générale l'état de l'un des observables, il suffit de faire la trace de notre matrice densité sur la partie du système qui ne nous intéresse pas. Cette trace se nomme *trace partielle*. Voyons comment elle s'applique. Supposons que nous ayons le produit direct de deux matrices  $M_1$  et  $M_2$ . Alors, la trace partielle sur 2 nous permettra d'isoler  $M_1$  à une constante près :

$$tr_2(M_1 \otimes M_2) = M_1 tr(M_2).$$

Ainsi, dans le cas où les matrices sont, en fait, des matrices densité (cas où les états peuvent être factorisés), la trace partielle nous débarrassera complètement de l'un des deux états, car la trace des matrices densité est toujours 1. Il ne reste plus qu'à étendre linéairement la définition de la trace partielle (passage obligé, car ce ne serait pas une trace dans le cas contraire) pour avoir notre méthode d'isolement des états. Reprenons notre état non factorisable et tentons d'obtenir l'état de la première particule :

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= tr_2\left(\frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|]\right) \\
&= \frac{1}{2}[tr_2(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|) + tr_2(|0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0|) + tr_2(|1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1|) + tr_2(|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|)] \\
&= \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| tr(|1\rangle\langle 1|) + |0\rangle\langle 1| tr(|1\rangle\langle 0|) + |1\rangle\langle 0| tr(|0\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| tr(|0\rangle\langle 0|)] \\
&= \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| + 0 + 0 + |1\rangle\langle 1|] \\
&= \frac{1}{2}I_{2 \times 2}.
\end{aligned}$$



Remarquons d'abord que l'enchevêtrement de notre état total demeure inaltéré même si les deux particules sont spatialement éloignées. Conséquemment, les mesures sont donc encore parfaitement corrélées (en mesurant la deuxième particule, l'état de la première s'effondre également). Un constat similaire a permis à Einstein, Podolski et Rosen, en 1935, de questionner d'une manière très critique cette non-localité apparente de la mécanique quantique [14]. La seule explication qui permettait de tenir compte de l'adéquation expérimentale de la mécanique quantique et de rétablir la localité était de conclure que la mécanique quantique était incomplète, qu'il y avait des « variables cachées » qui déterminaient les systèmes avant d'être mesurés.

Cependant, environ 30 ans plus tard, John S. Bell réussissait à montrer qu'une théorie des variables cachées ne pouvait coexister de manière cohérente avec la mécanique quantique et devait nécessairement respecter certaines inégalités [9] ; inégalités qui, expérimentalement, ont été violées (voir [4], [5] et [3] pour les preuves expérimentales et voir [23] pour des explications plus accessibles). Ainsi, on admet communément aujourd'hui la nature non locale de la mécanique quantique.

Toutefois, même si elle est non locale, elle ne permet pas de communiquer instantanément. Pour bien comprendre cette dernière affirmation, reprenons notre état  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ . Supposons que les deux particules sont séparées et que le possesseur de la deuxième particule, après consultation avec le possesseur de la première particule, décide de mesurer sa particule tout en gardant secret le résultat qu'il a obtenu. S'il mesure 1 (avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ), la première particule sera dans l'état  $|0\rangle$  et s'il mesure 0 (avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ), la première particule sera dans l'état  $|1\rangle$ . Ainsi, pour le détenteur de la première particule, l'état de sa particule, après la mesure de la deuxième, sera exprimé par  $\{|0\rangle, \frac{1}{2}; |1\rangle, \frac{1}{2}\}$  qui donne, sous forme de matrice densité,  $\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I_{2 \times 2}$ . Cet état, pour la première particule, est exactement le même que l'état de cette même particule avant la mesure. Donc, même si le détenteur de la deuxième particule avait unilatéralement décidé de mesurer sa particule, le détenteur de la première particule n'aurait eu aucun moyen de le savoir. Bien que l'état ait bel et bien changé pour un observateur informé, pour un ignorant, l'état demeure exactement le même. Il faudra que l'on informe le détenteur de la première particule du résultat de la mesure de la deuxième (communication classique non instantanée) pour que son état, de son point de vue, s'effondre.

### 2.3 Systèmes de référence quantiques

Nous savons désormais comment s'articulent et comment se comportent les systèmes lors d'une mesure. Nous savons comment se calcule l'effondrement de l'état et nous pouvons calculer les probabilités d'obtention de chaque résultat envisageable. Nous pouvons désormais nous

interroger sur la nature des instruments de mesure, c'est-à-dire les systèmes de référence.

Jusqu'ici, dans le présent chapitre, le système de référence qui nous servait d'instrument de mesure n'a jamais été un facteur. Il n'interagissait pas avec le système et ne changeait jamais de nature. Par exemple, si notre observable d'intérêt était la position  $\hat{X}$ , notre système de référence était un système d'axes fixé par l'observateur et qui ne changeait en aucune circonstance tant et aussi longtemps que l'observateur le maintenait tel quel. Que nous mesurions la position d'un état, que l'état de position interagisse avec son milieu ou que l'état demeure inchangé, notre système d'axe ne bouge pas. C'est le système de référence classique. De plus, il est important de noter que les états propres des observables sont toujours définis par rapport à un système de référence classique. Par exemple, chaque état propre de position est défini par un système d'axe fixe et classique. Il en est ainsi, car il deviendrait très improductif de définir une base de notre espace d'Hilbert si cette base devait s'appuyer sur un système changeant. Il en ressort donc de la nature des états que la manière idéale et parfaite de mesurer se fait toujours à partir du système de référence classique.

Prenons maintenant un système de référence quantique, c'est-à-dire, que l'état du système de référence est quantique. Imaginons que nous ayons un état  $\rho$  d'un observable  $A$  quelconque et que nous n'ayons pas accès à notre habituel système de référence classique. Il nous faudra donc en trouver un qui pourra mesurer l'observable sur notre état avec une acuité comparable au système de référence classique, sinon ce système de référence nous sera complètement inutile. Or, un système de référence quantique peut remplir cette condition. Cependant, son comportement lors d'une mesure est bien particulier, car il implique que nous comparions deux systèmes quantiques l'un à l'autre. Il s'agit donc d'une mesure relative qui affectera non seulement le système étudié, mais aussi le système de référence. En effet, comme il s'agit d'une mesure relative à deux systèmes de nature quantique, l'effondrement touchera le système total, composé du système étudié *et* du système de référence.

Ce comportement changeant du système de référence aura donc pour effet de donner des résultats qui pourraient contredire l'information que nous aurait donnée un système de référence classique. Par exemple, dans un cas extrême, si, après moult utilisations, un système d'axes quantique finissait par effectuer, en moyenne, une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $z$  classique, les positions mesurées en  $x$  et en  $y$  avec le système de référence quantique pourraient différer d'un signe par rapport à celles mesurées avec le système de référence classique. Ainsi, si nous utilisons un système de référence quantique, il faut s'assurer de bien le calibrer au départ, afin qu'il nous soit utile le plus longtemps possible, et il faudra bien comprendre son comportement après chaque utilisation afin de calculer sa longévité<sup>4</sup>. Il faudra peut-être également trouver

---

<sup>4</sup>Par longévité, nous entendons le nombre d'utilisations possibles avant que le système ne donne, avec une probabilité assez grande, une réponse en conflit avec le résultat que nous donnerait le système de référence classique.

des moyens d'allonger la longévité à l'aide d'un Hamiltonien qui pourrait faire évoluer le système de référence dans le sens inverse de l'évolution qu'il subit lors des mesures. Tous ces sujets feront l'objet du présent mémoire, en l'occurrence, pour le cas de la mesure de moments cinétiques quantiques.

La prochaine question, et non la moindre, que nous pouvons nous poser est la suivante : en quoi ce sujet est-il intéressant, en quoi est-il utile ? Heureusement, il existe de multiples réponses pertinentes à cette question.

Dans un premier temps, il s'agit d'une considération tout à fait pragmatique. En effet, comme, en science, on admet de manière plutôt consensuelle que la réalité est quantique et que les conséquences de ce fait sont d'autant plus grandes à très petite échelle, n'est-il pas raisonnable de dire que l'appareillage de mesure d'un système quantique risque d'être très petit et, donc, d'une indéniable nature quantique ?

Dans un second temps, ce domaine de recherche permet aux physiciens de trouver comment s'articule la limite qui fait de notre système de référence quantique un système de référence classique. En effet, la mécanique quantique est supposée être un perfectionnement d'une théorie classique qui n'était qu'une approximation valide à l'échelle macroscopique. Ainsi, à l'échelle où les théories classiques déterministes s'appliquent, les effets quantiques ne sont pas supposés contredire les théories classiques. Nous pouvons donc, par le truchement des systèmes de références quantiques, trouver quel est le cas limite macroscopique et vérifier qu'il s'accorde avec le système de référence classique.

Enfin, d'un point de vue un peu plus philosophique, les systèmes de référence quantiques nous permettent de mieux comprendre comment l'environnement agit sur les systèmes étudiés. Expérimentalement, dans tous les domaines où l'on cherche à construire un état quantique pur, le plus grand défi est de conserver l'état créé sans qu'il ne soit altéré et sans qu'il ne s'effondre. Le plus souvent, le principal responsable de l'altération d'un état quantique est l'environnement. Il est extrêmement difficile de maintenir un système de manière à ce qu'il soit complètement isolé d'un environnement (qui est, rappelons-le, également de nature quantique) qui peut interagir avec le système étudié. Cet environnement peut se greffer à notre système (le système total devient un produit direct de systèmes) et générer une interaction hamiltonienne et faire évoluer notre état par l'équation 2.1. La conséquence la plus catastrophique de ce phénomène est l'enchevêtrement de l'environnement avec le système étudié. Cet enchevêtrement change la nature pure d'un état créé en laboratoire en un état mixte. On appelle ceci la *décohérence*. L'environnement pourrait aussi agir comme un instrument de mesure accidentelle. En effet, l'environnement pourrait, encore une fois, se greffer au système étudié et agir comme un système de référence quantique en se « comparant » de manière fortuite avec notre état pur. La conséquence la plus probable d'un tel phénomène est aussi la décohérence de notre état pur.

Ainsi, en comprenant bien l'action d'un système de référence quantique sur un système, nous pouvons mieux comprendre la décohérence qui survient en laboratoire. Ultimement, espérons-le, cela pourrait devenir concrètement utile pour discriminer les types de décohérence et pour contrer celle-ci.

## CHAPITRE 3

### SYSTÈME DE RÉFÉRENCE QUANTIQUE DANS LE CAS D'UN SPIN $\frac{1}{2}$ NON POLARISÉ

Dans ce chapitre, nous entrerons dans le vif du sujet à l'aide d'un cas particulier. En effet, nous analyserons le comportement et la longévité du système de référence quantique utilisé dans le cas particulier de mesures successives de moments cinétiques  $\frac{1}{2}$  non polarisés. Cependant, avant de débiter cette analyse, il est important de comprendre la nature de l'observable étudié et de comprendre la nature du système de référence quantique dans ce contexte. Voilà pourquoi ces sujets feront l'objet de la première section du présent chapitre. Il est à noter que ce chapitre est, en grande partie, tiré de [7], mais qu'il contient également du contenu original identifié clairement dans le texte.

#### 3.1 Nature de l'observable mesuré et du système de référence

##### 3.1.1 Moments cinétiques quantiques

Il existe deux types de moments cinétiques quantiques : le moment cinétique orbital et le moment cinétique intrinsèque (spin). Le moment cinétique orbital est un observable  $\vec{L}$  qui a trois composantes ( $L_x, L_y, L_z$ ). Quantiquement comme classiquement, cet observable est donné par :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{où } \vec{r} \text{ est position et } \vec{p} \text{ impulsion.}$$

Cette définition ne peut s'appliquer aux moment cinétiques intrinsèques, car ils n'ont pas d'analogues classiques et ne sont le corollaire d'aucune autre quantité observable.

De plus, comme il s'agit de trois opérateurs, nous pouvons nous interroger sur la structure de leurs relations mutuelles. Ces relations s'articulent autour des relations de commutation. Dans le cas du moment cinétique orbital, nous pouvons aisément les démontrer, mais, dans le cas du moment cinétique intrinsèque, il faut supposer que ces relations sont les mêmes<sup>1</sup>.

$$L_i L_j - L_j L_i := [L_i, L_j] = i \varepsilon_{ijk} L_k \quad \text{où } L_1 = L_x, L_2 = L_y, L_3 = L_z \quad (3.1)$$

$$\text{et où } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \varepsilon_{123} \text{ et permutations paires des indices} \\ -1 & \text{pour } \varepsilon_{213} \text{ et permutations paires des indices} \\ 0 & \text{pour les autres possibilités} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Il est à noter qu'un indice répété signifie que nous effectuons la somme sur toutes les possibilités.

Il est à noter que ces relations définissent également l'algèbre du groupe  $SU(2)$ , le groupe des matrices unitaires spéciales deux par deux. Grâce à ces relations, il est également possible de montrer que :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}L_iL_j &= \varepsilon_{ijk}L_jL_i + \varepsilon_{ijk}[L_i, L_j] \\
&= -\varepsilon_{jik}L_jL_i + i\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ijk}L_m \quad \text{permutation impaire et équation (3.1)} \\
&= -\varepsilon_{ijk}L_iL_j + 2i\delta_{km}L_m \quad , \text{ car } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \text{ et } i \rightarrow j \text{ et } j \rightarrow i \\
&\Rightarrow \varepsilon_{ijk}L_iL_j = iL_k. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite définir un autre observable à partir des trois observables  $L_i$ . Bien entendu, cet observable est relié à la norme de  $\vec{L}$ . Il s'agit de  $L^2 = L_iL_i$ . Il est donc tout à fait aisé de montrer que :

$$[L^2, L_i] = 0.$$

Ceci signifie qu'il est possible de connaître simultanément la valeur de  $L^2$  et la valeur de l'une des composantes de  $\vec{L}$ . Cependant, il n'est pas possible de connaître les trois composantes de  $\vec{L}$  à la fois, car elles ne commutent pas. Ainsi, pour une grandeur de  $L^2$  donnée, l'espace d'Hilbert des composantes de  $\vec{L}$  sera défini par l'espace généré par les états propres d'une seule des composantes ( $L_z$ , par convention). Les états de base seront définis par deux nombres quantiques, un associé à la grandeur de  $L^2$  ( $l$ ) et un autre associé à la grandeur de  $L_z$  ( $m$ ). De plus, l'action de ces observables sur les états de base sont :

$$L^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle \tag{3.3}$$

$$L_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle \quad \text{où } -l \leq m \leq l. \tag{3.4}$$

Enfin, il est possible de définir des opérateurs  $L_{\pm} = L_1 \pm iL_2$ , qui sont utiles bien qu'ils ne soient pas associés à des observables (ils ne sont pas hermitiens). Voici leurs relations de commutation :

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}$$

$$[L_+, L_-] = 2L_z.$$

Grâce à ces dernières, nous pouvons déduire l'action de ces opérateurs sur un état de base  $|l, m\rangle$  :

$$L_{\pm}|l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle.$$

### 3.1.2 Système de référence quantique pour un moment cinétique

La prochaine question à laquelle nous devons répondre est : quelle est la nature du système de référence quantique dans le cas de la mesure d'un moment cinétique ? Comme nous mesurerons la composante  $z$  du moment cinétique, il faut que ce système de référence soit un analogue quantique de l'axe des  $z$  classique. Or, cet analogue s'incarne parfaitement dans un moment cinétique. Ainsi, l'instrument quantique de mesure d'un moment cinétique est un autre moment cinétique.

Pour arriver à mesurer la composante en  $z$  du moment cinétique le plus précisément possible, il faut faire une mesure relative de notre moment cinétique par rapport à un autre moment cinétique (système de référence) en espérant que ce dernier soit maximalelement aligné avec l'axe des  $z^2$ . Cette mesure devra donc s'articuler autour de la mesure de la norme du moment cinétique total (la somme du moment cinétique étudié  $\vec{S}$  et du moment cinétique du système de référence  $\vec{L}$ ). L'espace d'Hilbert associé à ce contexte est le produit direct des espaces des deux moments cinétiques. Nous mesurerons  $J^2 = (\vec{S} + \vec{L})^2$  qui a  $j$  pour nombre quantique. Ce dernier peut varier de  $(l + s)$  à  $(l - s)$  par bonds de un<sup>3</sup>. Toujours en espérant que le système de référence soit aussi semblable à l'axe des  $z$  que possible, le  $j = l + m$  mesuré nous indiquera un résultat que nous considérerons *a priori* comme la longueur de notre composante  $z$  du moment cinétique ( $m$ ). Il faudra donc comparer les probabilités des résultats  $m$  possibles dans le cas de la mesure relative avec les probabilités des résultats possibles dans le cas de la mesure parfaite. De plus, il faudra tenir compte de l'évolution du système de référence après chaque mesure conjointe afin de comparer les deux techniques de mesure dans le temps et de pouvoir calculer la longévité du système de référence quantique.

### 3.2 Comportement du système de référence dans le cas d'une source de moments cinétiques $s = \frac{1}{2}$ non polarisés

Admettons que nous ayons une source infinie de moments cinétiques dans l'état suivant :

$$\xi = \frac{1}{2}I_{2 \times 2}. \quad (3.5)$$

Il s'agit d'un état d'un moment cinétique  $s = \frac{1}{2}$  bien particulier

( $\xi = \frac{1}{2}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}, \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|$ ); il s'agit de l'état qui a une moyenne de  $\vec{S}$  nulle, l'état *non polarisé*. En effet,

$$tr(\xi\vec{S}) = tr(\frac{1}{2}I\vec{S}) = \frac{1}{2}tr(\vec{S}) = 0, \quad (3.6)$$

<sup>2</sup>Un moment cinétique maximalelement aligné avec l'axe des  $z$  est un état qui est  $|l, l\rangle$  ou le plus près possible de cet état.

<sup>3</sup>Nous supposons sans perte de généralité que  $l \geq s$ .

car la trace des opérateurs de moments cinétiques est toujours nulle (voir [17]).

Dans le cas du moment cinétique  $s = \frac{1}{2}$ , voici explicitement les matrices  $S_i$  exprimées dans la base des états propres de  $S_z$  :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ S_3 &= \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les  $\sigma_i$  sont appelées les matrices de Pauli. Ces dernières observent la propriété suivante :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (3.8)$$

Imaginons que nous possédons un système de référence quantique (un état d'un moment cinétique  $\vec{L}$ , noté  $\rho^{(n-1)}$ ) utilisé  $n - 1$  fois afin de mesurer le moment cinétique d'un des états de la source. Imaginons également que nous mesurons un autre état de la source à partir de ce  $\rho^{(n-1)}$  et que nous ne regardons pas le résultat de la mesure<sup>4</sup>. Alors, le nouvel état total serait un état mixte entre les deux possibilités d'effondrement (voir la définition de la matrice densité dans la section 2.2 et l'effondrement d'une matrice densité dans la sous-section 2.2.1) :

$$\begin{aligned} &P(j + \frac{1}{2}) \frac{\Pi_{j+\frac{1}{2}}(\rho^{(n-1)} \otimes \xi) \Pi_{j+\frac{1}{2}}}{P(j + \frac{1}{2})} + P(j - \frac{1}{2}) \frac{\Pi_{j-\frac{1}{2}}(\rho^{(n-1)} \otimes \xi) \Pi_{j-\frac{1}{2}}}{P(j - \frac{1}{2})} \\ &= \Pi_{j+\frac{1}{2}}(\rho^{(n-1)} \otimes \xi) \Pi_{j+\frac{1}{2}} + \Pi_{j-\frac{1}{2}}(\rho^{(n-1)} \otimes \xi) \Pi_{j-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dorénavant, nous désignerons  $j + \frac{1}{2}$  par  $+$  et  $j - \frac{1}{2}$  par  $-$ . De plus, par convention, nous supposons que  $+$  est une réponse de  $+\frac{1}{2}$  de  $S_3$  mesuré classiquement et que  $-$  est une réponse de  $-\frac{1}{2}$  de  $S_3$  mesuré classiquement.

Ensuite, ce qui nous intéresse est le système de référence. Ainsi, après la mesure, il faut se débarrasser de l'état mesuré. Pour ce faire, il suffit de calculer la trace partielle sur le système mesuré, que nous appellerons  $S$ . Le résultat obtenu est donc le système de référence après  $n$  mesures.

$$\rho^{(n)} = tr_S(\Pi_+ \rho^{(n-1)} \otimes \xi \Pi_+ + \Pi_- \rho^{(n-1)} \otimes \xi \Pi_-) \quad (3.10)$$

<sup>4</sup>Cette supposition est obligatoire étant donné la nature analytique de ce mémoire. Elle permettra d'obtenir un comportement moyen du système de référence.



### 3.2.1 Relation de récurrence pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé

Pour arriver à calculer explicitement (3.10), il faut connaître la forme explicite des projecteurs. Sachant qu'il s'agit des projecteurs associés à  $J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$  et que, pour l'action des projecteurs sur les états totaux  $|j, m\rangle$ , seul l'opérateur  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  est non trivial, on peut supposer que les projecteurs s'expriment comme ceci :

$$\Pi_{\pm} = a_{\pm} I_{2j+1 \times 2j+1} + b_{\pm} \vec{L} \cdot \vec{S}. \quad (3.11)$$

À l'aide de cette supposition et de la définition des projecteurs, il est possible de trouver les deux projecteurs de manière exacte ( $a_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2(2l+1)}$  et  $b_{\pm} = \pm \frac{2}{(2l+1)}$ ).

Ainsi, nous arrivons à exprimer l'état du système de référence (3.10) sous cette forme :

$$\begin{aligned} \rho^{(n)} &= \frac{(l+1)^2 + l^2}{(2l+1)^2} \rho^{(n-1)} + \frac{4}{(2l+1)^2} L_i \rho^{(n-1)} L_j \text{tr}(S_i S_j) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{(2l+1)^2} (L_i \rho^{(n-1)} + \rho^{(n-1)} L_i) \text{tr}(S_i)}_{=0, \text{ car } \text{tr}(S_i)=0} \\ &= \frac{(l+1)^2 + l^2}{(2l+1)^2} \rho^{(n-1)} + \frac{2}{(2l+1)^2} L_i \rho^{(n-1)} L_i \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} [(l+1)^2 + l^2] \rho^{(n-1)} + L_+ \rho^{(n-1)} L_- + L_- \rho^{(n-1)} L_+ \\ &+ 2L_z \rho^{(n-1)} L_z. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De plus, en prenant notre système de référence sous la forme suivante,

$\rho^{(m)} = \sum_{i,k=-l}^l \alpha_{ik}^{(m)} |l, i\rangle \langle l, k|$ , nous pouvons calculer une relation de récurrence très révélatrice à l'aide de l'action des opérateurs  $L_{\pm}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k,m=-l}^l \alpha_{km}^{(n)} |l, k\rangle \langle l, m| &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sum_{k,m} ([(l+1)^2 + l^2 + 2km] \alpha_{km}^{(n-1)} \\ &+ [(l(l+1) - k(k-1))(l(l+1) - m(m-1))]^{\frac{1}{2}} \alpha_{k-1m-1}^{(n-1)} \\ &+ [(l(l+1) - k(k+1))(l(l+1) - m(m+1))]^{\frac{1}{2}} \alpha_{k+1m+1}^{(n-1)}) |l, k\rangle \langle l, m| \\ \Rightarrow \alpha_{km}^{(n)} &= \frac{1}{(2l+1)^2} ([(l+1)^2 + l^2 + 2km] \alpha_{km}^{(n-1)} \\ &+ [(l(l+1) - k(k-1))(l(l+1) - m(m-1))]^{\frac{1}{2}} \alpha_{k-1m-1}^{(n-1)} \\ &+ [(l(l+1) - k(k+1))(l(l+1) - m(m+1))]^{\frac{1}{2}} \alpha_{k+1m+1}^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.2.2 Probabilité de réussite et longévité pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé

Il pourrait sembler essentiel de résoudre (3.13) afin de connaître parfaitement l'évolution du système de référence et d'en déduire ainsi les limites de son utilité. Cependant, ce calcul n'est pas nécessaire pour la suite des choses. En effet, nous pouvons nous concentrer sur un indicateur qui nous fournira les outils nécessaires au calcul de la longévité du système de référence. Cet indicateur est la probabilité de concordance entre la mesure parfaite et la mesure relative à partir du système de référence quantique (nous la nommons probabilité de réussite ou de succès).

Si nous supposons que la nature nous fournit un état  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  que nous noterons  $|0\rangle$ , dans ce cas, la probabilité de réussite ( $P_0^{(n)}(r) = P^{(n)}(+|0)$ ) sera la probabilité que le système de référence nous donne  $+$  sachant que nous possédons  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  ou  $|0\rangle$ .

$$P^{(n)}(+|0) = P_0^{(n)}(r) = \text{tr}(\rho^{(n)} \otimes |0\rangle\langle 0| \Pi_+)$$

Si la nature nous donne plutôt un état  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  que nous noterons  $|1\rangle$ , la probabilité de réussite ( $P_1^{(n)}(r) = P^{(n)}(-|1)$ ) sera :

$$P^{(n)}(-|1) = P_1^{(n)}(r) = \text{tr}(\rho^{(n)} \otimes |1\rangle\langle 1| \Pi_-).$$

Cependant, comme nous ne disposons dans notre expérience que d'une source d'états  $\xi$ , il faudrait penser à moyenner la probabilité de réussite sur la distribution donnée par  $\xi$  ( $p_0$  probabilité d'avoir  $|0\rangle\langle 0|$  et  $p_1$  probabilité d'avoir  $|1\rangle\langle 1|$ ).

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(n)}(r) &= p_0 P^{(n)}(+|0) + p_1 P^{(n)}(-|1) \\ &= \frac{1}{2} P_0^{(n)}(r) + \frac{1}{2} P_1^{(n)}(r) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\rho^{(n)} \otimes |0\rangle\langle 0| \Pi_+ + \rho^{(n)} \otimes |1\rangle\langle 1| \Pi_-) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\rho^{(n)} (\langle 0| \Pi_+ |0\rangle + \langle 1| \Pi_- |1\rangle)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ensuite, il nous est très facile de calculer  $\langle 0| \Pi_+ |0\rangle$  et  $\langle 1| \Pi_- |1\rangle$  en nous servant de (3.11) et en remplaçant respectivement  $L_x$  et  $L_y$  par  $\frac{L_+ + L_-}{2}$  et  $\frac{L_+ - L_-}{2i}$ .

Ainsi, avec ce dernier calcul et en utilisant la forme explicite de  $\rho^{(n)}$ , la probabilité de réussite devient ceci :

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(n)}(r) &= \frac{1}{2} \text{tr}_R \left[ \sum_{k,m} \alpha_{km}^{(n)} |l, k\rangle \langle l, m| \left( 1 + \frac{2L_z}{(2l+1)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(2l+1)} \sum_{k=-l}^l k \alpha_{kk}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nous pouvons, à partir de la dernière équation, remarquer que seuls les  $\alpha_{kk}^{(n)}$ , c'est-à-dire les composantes diagonales de  $\rho^{(n)}$ , influent sur la probabilité de réussite. Seule la distribution de probabilité de mesurer les différentes possibilités  $L_z$  de  $\rho^{(n)}$  a un effet, ce qui est, somme toute, assez peu surprenant. De plus, comme  $\sum_k \alpha_{kk}^{(n)} = 1$  et que  $\alpha_{kk}^{(n)} \geq 0$ , nous pouvons remarquer que les maxima et minima de probabilité de réussite sont atteints respectivement pour

$$\alpha_{kk}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha_{kk}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans ces cas, la probabilité de réussite est  $\bar{P}^{(n)}(r) = \frac{1}{2} \pm \frac{l}{(2l+1)}$ . Ainsi, la probabilité maximale n'est pas de 1 (il y aura toujours une probabilité d'erreur) et la probabilité minimale n'implique pas une erreur systématique (elle n'égale pas 0). De surcroît, sans surprise, les états  $|l, l\rangle$  et  $|l, -l\rangle$  donnent les probabilités maximales et minimales. De plus, ils sont les seuls états pouvant fournir les extrema des probabilités de succès, car ils sont les seuls qui puissent être dans un alignement maximal en  $z$ . En effet, un état dont la diagonale est nulle sauf pour une seule composante doit absolument avoir toutes ses composantes hors diagonales nulles, ce qui ne laisse toujours qu'une seule possibilité (voir Annexe A pour la démonstration).

De plus, comme nous connaissons l'équation de récurrence (3.13), nous pouvons trouver une récurrence spécifique à la probabilité de réussite<sup>5</sup>.

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(n)}(r) - \bar{P}^{(n-1)}(r) &= \frac{1}{(2l+1)} \sum_{k=-l}^l (k\alpha_{kk}^{(n)} - k\alpha_{kk}^{(n-1)}) \\ &= \frac{1}{(2l+1)^3} \left( \sum_k [((l+1)^2 + l^2 + 2k^2 - (2l+1)^2)k\alpha_{kk}^{(n-1)} \right. \\ &\quad \left. + (l(l+1) - k(k-1))k\alpha_{k-1k-1}^{(n-1)} + (l(l+1) - k(k+1))k\alpha_{k+1k+1}^{(n-1)} \right] \\ &= -\frac{2}{(2l+1)^3} \sum_{k=-l}^l k\alpha_{kk}^{(n-1)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-l}^l k\alpha_{kk}^{(n)} = \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right) \sum_{k=-l}^l k\alpha_{kk}^{(n-1)} \quad (3.17)$$

Cette nouvelle récurrence (3.13) nous fournit également une foule d'informations sur l'évolution du système de référence avant même de la résoudre. Par exemple, pour une somme  $\sum_k k\alpha_{kk}^{(n-1)}$  donnée, la même somme pour la  $n^{\text{ième}}$  mesure ne sera que multipliée par un facteur positif, car  $\left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right) \geq 0$ . Ainsi, le signe de la somme ne changera jamais au fil des mesures successives. Ceci signifie, par (3.15), que, dans le cas où  $\bar{P}^{(0)}(r)$  est supérieure à  $\frac{1}{2}$ , la probabilité de réussite demeurera toujours elle aussi supérieure à  $\frac{1}{2}$ , et inversement, si  $\bar{P}^{(0)}(r)$  est inférieure à  $\frac{1}{2}$ . De plus, ces informations nous permettent de rejeter tous les états initiaux tels

<sup>5</sup>Cette technique n'est pas utilisée dans [7], il s'agit de contenu original.

que  $\bar{P}^{(0)}(r) < \frac{1}{2}$ , car ils sont déjà et seront toujours moins utiles que la simple chance (qui nous donne une probabilité de réussite de  $\frac{1}{2}$ ). Ainsi, il nous faut trouver un  $\rho^{(0)}$  tel que  $\bar{P}^{(0)}(r) \geq \frac{1}{2}$  et tel que la probabilité de réussite demeure appréciablement supérieure à  $\frac{1}{2}$  pour le plus grand nombre de mesures possible.

### 3.3 Trajectoire optimale

La prochaine étape est évidemment de trouver le meilleur état initial<sup>6</sup>. Pour ce faire, nous devons tout d'abord supposer que  $\bar{P}^{(0)}(r) \geq \frac{1}{2}$ . Donc,  $\sum_k k\alpha_{kk}^{(0)} \geq 0$  ainsi que toutes les autres sommes à venir. Ensuite, remarquons que

$$\bar{P}^{(n)}(r) - \bar{P}^{(n-1)}(r) = -\frac{2}{(2l+1)^3} \sum_k k\alpha_{kk}^{(n-1)} \leq 0, \quad (3.18)$$

car  $\sum_k k\alpha_{kk}^{(n-1)} \geq 0$ . Nous savons désormais que la fonction de probabilité de réussite est forcément décroissante.

Par la suite, nous pourrions nous demander s'il est possible d'avoir une fonction qui n'est pas strictement décroissante, c'est-à-dire, s'il existe un  $m$  entier tel que

$$\bar{P}^{(n)}(r) - \bar{P}^{(n-1)}(r) = 0 \Rightarrow \sum_k k\alpha_{kk}^{(m-1)} = 0. \quad (3.19)$$

Par conséquent, étant donnée la récurrence (3.17), toutes les sommes précédentes devaient être nulles et, depuis le début, la probabilité de réussite est  $\frac{1}{2}$ . Notre système de référence était déjà inutile avant même d'être utilisé. De plus, toutes les sommes futures seront également nulles et le système de référence demeurera inutile. Sachant ceci, nous pouvons affirmer que, pour un système de référence utile, la fonction de probabilité de réussite est strictement décroissante.

Enfin, la dernière étape avant de découvrir quel est le choix de  $\rho^{(0)}$  qui maximise la longévité du système de référence implique d'abord de résoudre notre équation de récurrence pour les probabilités de réussite (3.17) :

$$\begin{aligned} \sum_k k\alpha_{kk}^{(n)} &= \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right) \sum_k k\alpha_{kk}^{(n-1)} \\ &= \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right) \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right) \sum_k k\alpha_{kk}^{(n-2)} \\ &= \dots \\ &= \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right)^n \sum_{k=-l}^l k\alpha_{kk}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

<sup>6</sup>Le contenu de la section qui suit est original.

Dans un second temps, nous devons vérifier si, pour deux trajectoires de probabilités différentes, il est possible que ces trajectoires se croisent. Il s'agit de se demander s'il est possible de sacrifier l'efficacité du système de référence pour quelques mesures afin d'en améliorer la longévité. La question se pose de la façon suivante :

Étant donnés  $\rho_1^{(0)}$  et  $\rho_2^{(0)}$  tels que  $\bar{P}_1^{(0)}(r) > \bar{P}_2^{(0)}(r)$ , est-ce possible qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $m \geq n$ ,  $\bar{P}_1^{(m)}(r) \leq \bar{P}_2^{(m)}(r)$  ? Supposons que la réponse est oui. Alors,

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^{(m)}(r) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(2l+1)} \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right)^m \sum_k k \alpha_{1kk}^{(0)} \leq \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{(2l+1)} \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right)^m \sum_k k \alpha_{2kk}^{(0)} = \bar{P}_2^{(m)}(r) \\ &\Rightarrow \sum_k k \alpha_{1kk}^{(0)} \leq \sum_k k \alpha_{2kk}^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Nous pouvons donc en déduire que pour deux systèmes de référence initiaux  $\rho_1^{(0)}$  et  $\rho_2^{(0)}$ , la longévité la plus grande sera associée au système de référence initial qui a la meilleure probabilité de réussite. Par exemple, si  $\bar{P}_1^{(0)}(r) > \bar{P}_2^{(0)}(r)$ , alors  $\bar{P}_1^{(n)}(r) > \bar{P}_2^{(n)}(r)$  pour tous les  $n$  naturels.

En connaissant le maximum de probabilité, nous connaissons donc la trajectoire qui donne la meilleure longévité au système de référence. En effet, comme nous connaissons l'état qui maximise la probabilité, il suffit de préparer le système de référence initial dans cet état afin de s'assurer que le système demeure utilisable pour le plus grand nombre de mesures possible. Dans ce cas, nous pouvons calculer très aisément la probabilité de succès<sup>7</sup>.

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(n)}(r) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(2l+1)} \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right)^n \sum_k k \alpha_{kk}^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(2l+1)} \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right)^n \sum_k k \delta_{kl} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{l}{(2l+1)} \left(1 - \frac{2}{(2l+1)^2}\right)^n \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.4 Limite des grands $l$ pour $s = \frac{1}{2}$ non polarisé

Comme nous pouvons le constater, d'après (3.22), plus  $l$  est grand, plus le système de référence est fiable et plus il le demeure longtemps. Le graphique ci-dessous illustre parfaitement cette affirmation pour les cas de  $l = 10, 15, 20$  (voir figure 3.1).

Ainsi, pour s'assurer d'avoir un bon système de référence, il faut en préparer un à l'aide d'un grand  $l$  ( $l \gg 1$ ).

<sup>7</sup>Dans [7] les auteurs calculent ce qui suit en omettant de prouver qu'il s'agit la trajectoire de la longévité maximale.

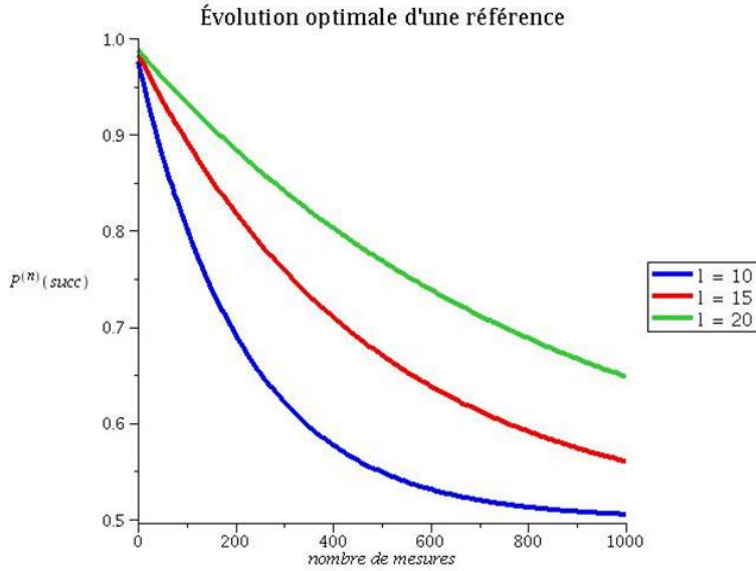


Figure 3.1 – Nous constatons d’un seul coup d’oeil que l’efficacité et la longévité croît avec  $l$ .

Dans le cas du grand  $l$ , regardons maintenant la décroissance de la probabilité de succès pour la trajectoire optimale.

$$\begin{aligned}
 \bar{P}^{(n)}(r) - \bar{P}^{(n-1)}(r) &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{l}{(2l+1)} \left( 1 - \frac{2}{(2l+1)^2} \right)^n \right] \\
 &\quad - \left[ \frac{1}{2} + \frac{l}{(2l+1)} \left( 1 - \frac{2}{(2l+1)^2} \right)^{n-1} \right] \\
 &\approx -\frac{2l}{(2l+1)^3} \\
 &\approx -\frac{1}{4l^2} \left( 1 - \frac{3}{2l} \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

La décroissance est donc proportionnelle à  $\frac{1}{l^2}$ . Par conséquent, comme la décroissance de la probabilité de succès s’amointrit d’autant que  $l^2$  augmente, il en est donc de même pour la longévité.

Bien que la longévité devient infinie au même rythme que  $l^2$ , nous ne savons rien encore de la probabilité de succès. Admet-elle encore une possibilité d’erreur dans la mesure pour de grands  $l$  ?

$$\begin{aligned}
 \bar{P}^{(n)}(r) &= \frac{1}{2} + \frac{l}{(2l+1)} \left( 1 - \frac{2}{(2l+1)^2} \right)^n \\
 &\approx \frac{1}{2} + \frac{l}{(2l+1)} - \frac{2nl}{(2l+1)^2} \\
 &\approx 1 - \frac{1}{4l} - \frac{n}{2l} \left( 1 - \frac{1}{l} \right)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Heureusement, la probabilité de succès se rapprochera de 1 aussi rapidement que  $\frac{1}{l}$  décroît. Sans

surprise, si le système de référence quantique a un  $l$  infini, sa probabilité de succès n'admettra aucune erreur et ne décroîtra jamais. Il s'agira d'un système de référence parfait : un système de référence classique.





## CHAPITRE 4

### SYSTÈME DE RÉFÉRENCE QUANTIQUE DANS LE CAS D'UN SPIN $\frac{1}{2}$ POLARISÉ

Dans le présent chapitre, nous élargirons le champ d'étude des mesures d'un spin  $\frac{1}{2}$  à partir d'un moment cinétique. En effet, nous ne nous restraignons plus au cas très spécifique d'une source non polarisée, nous considérerons un état général de moment cinétique  $\frac{1}{2}$ . Quelques manipulations et approximations permettront de calculer l'effet à moyen terme d'une mesure sur le système de référence ([22] et [18]). Enfin, il sera question d'une interaction énergétique entre le système de référence et le moment cinétique  $\frac{1}{2}$ , qui a un effet quasi équivalent à une mesure conjointe, et dont il est possible de se servir afin d'améliorer l'efficacité du système de référence ([18] et [1]).

#### 4.1 État polarisé d'un moment cinétique $\frac{1}{2}$

Lors du précédent chapitre, l'unique état envisagé pour une source de moments cinétiques était (3.5). En effet, tous les moments cinétiques étaient dans l'état dit non polarisé (de moyenne de  $\vec{L}$  nulle) :

$$\xi = \frac{1}{2}I.$$

Cependant, cet état n'est pas du tout général. Pour obtenir cet état général, nous devons faire respecter les propriétés d'un état le plus généralement possible.

Premièrement, la matrice densité doit être hermitienne. Or, une matrice  $2 \times 2$  hermitienne a quatre paramètres libres et, comme les  $\sigma_i$  et  $I_{2 \times 2}$  sont hermitiennes et linéairement indépendantes, nous savons que l'état général est de la forme suivante :

$$\xi = n_0I + n_i\sigma_i.$$

De plus,  $\xi$  doit avoir une trace de 1. Donc, comme  $tr(\sigma_i) = 0$  et  $tr(I) = 2$ , nous en déduisons que  $n_0 = \frac{1}{2}$ .

Ensuite,  $\xi$  doit être positive. Alors, pour tous les  $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ,

$$\begin{aligned} 0 < \langle \phi | \xi | \phi \rangle &= |\alpha|^2 \langle 0 | \xi | 0 \rangle + \alpha^* \beta \langle 0 | \xi | 1 \rangle + \alpha \beta^* \langle 1 | \xi | 0 \rangle + |\beta|^2 \langle 1 | \xi | 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} + n_3(|\alpha|^2 - |\beta|^2) + 2n_1|\alpha||\beta|\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \\ &\quad + 2n_2|\alpha||\beta|\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha), \quad \text{où } \theta_\alpha \text{ et } \theta_\beta \text{ sont les phases de } \alpha \text{ et } \beta. \end{aligned}$$

De cette inégalité, on peut déduire, en choisissant judicieusement les  $\alpha$  et  $\beta$ , que la norme du

vecteur  $\vec{n}$  respecte cette condition :

$$\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Étant donné ces informations tirées à propos des coefficients  $n_i$ , nous pouvons en conclure que  $\vec{n}$  est le vecteur qui caractérise l'état du moment cinétique de  $s = \frac{1}{2}$ . De plus, sachant que  $|\vec{n}| \leq \frac{1}{2}$ , nous pouvons donc associer chaque état à un point à l'intérieur de la sphère centrée à l'origine de rayon  $\frac{1}{2}$  de manière bijective, car le vecteur  $\vec{n}$  donne le point dans la sphère. Il s'agit de la sphère de Bloch (voir [17], [21] et [20]).

Enfin, grâce à la propriété de projecteur des états purs ( $(|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = |\psi\rangle\langle\psi|$ ), nous pouvons remarquer que les états purs sont exclusivement associés à  $|\vec{n}| = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire exclusivement les points de la surface de la sphère de Bloch.

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \left(\frac{1}{2}I + n_i\sigma_i\right)^2 = \frac{1}{4}I + n_i n_j \sigma_i \sigma_j + n_i \sigma_i \\ &= \frac{1}{4}I + n_i n_i I + n_i \sigma_i + i\varepsilon_{ijk} n_i n_j \sigma_k \quad \text{par (3.8)} \\ &= \frac{1}{4}I + |\vec{n}|^2 I + n_i \sigma_i = \xi \Leftrightarrow |\vec{n}| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le dernière chose à remarquer est que le vecteur  $\vec{n}$  nous donne directement la moyenne de  $\vec{S}$  sur  $\xi$ .

$$\begin{aligned} \langle S_j \rangle &= \text{tr}(\xi S_j) = \text{tr}\left[\left(\frac{1}{2}I + n_i \sigma_i\right) \frac{1}{2} \sigma_j\right] \\ &= n_j \quad \text{grâce à (3.8)} \\ &\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \vec{n} \end{aligned}$$

Pour la suite du chapitre, les moments cinétiques de  $s = \frac{1}{2}$  seront tous préparés dans le même état polarisé.

## 4.2 Comportement du système de référence dans le cas d'une source de moments cinétiques $\frac{1}{2}$ polarisés

Pour la suite du développement dans ce chapitre, nous choisirons un système d'axes classique précis qui facilitera les calculs sans perdre la généralité nécessaire à l'atteinte des objectifs visés. Tout d'abord, il faut choisir l'axe des  $z$ . Cet axe des  $z$  est fixé de telle sorte que  $\langle \vec{S} \rangle = n_3 \hat{z}$ . Ainsi, il faut aligner l'axe des  $z$  avec la polarisation moyenne des états de la source  $\xi$ . Ensuite, nous alignons les axes des  $x$  et des  $y$  afin que la moyenne de  $L_y$  pour le système de référence quantique ( $\rho$ ) soit nulle. Ainsi, la polarisation moyenne du système de référence est dans le

plan  $xz$  (voir figure).

$$\text{tr}(L_y \rho) = \langle L_y \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{S} \rangle = n_3 \hat{z} \quad (4.1)$$

#### 4.2.1 Équation de récurrence pour $s = \frac{1}{2}$ polarisé

Tout comme au chapitre précédent, l'état  $\rho^{(n)}$  est déterminé par l'équation (3.10). En insérant notre  $\xi = \frac{1}{2}I + n_3 \sigma_3$  dans (3.10), nous en arrivons à cette équation :

$$\begin{aligned} \rho^{(n+1)} &= \frac{1}{(2l+1)^2} [((l+1)^2 + l^2) \rho^{(n)} + L_+ \rho^{(n)} L_- + L_- \rho^{(n)} L_+ + 2L_z \rho^{(n)} L_z] \\ &\quad + \frac{2n_3}{(2l+1)^2} (L_z \rho^{(n)} + \rho^{(n)} L_z + L_+ \rho^{(n)} L_- - L_- \rho^{(n)} L_+) \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1-4n_3^2}{2(2l+1)^2} \right) \rho^{(n)} + \frac{2}{(2l+1)^2} (L_z + n_3) \rho^{(n)} (L_z + n_3) \\ &\quad + \frac{(1+2n_3)}{(2l+1)^2} L_+ \rho^{(n)} L_- + \frac{(1-2n_3)}{(2l+1)^2} L_- \rho^{(n)} L_+. \end{aligned} \quad (4.2)$$

À partir de cette équation de récurrence, il est possible de montrer la tendance générale de l'évolution à très long terme de notre système de référence [22]. Cette tendance se résume en une annihilation complète des composantes hors diagonales de  $\rho^{(\infty)}$ . Ainsi,  $\rho^{(\infty)}$  devient diagonale, ce qui signifie que le système de référence s'aligne avec les moments cinétiques  $\frac{1}{2}$ , bien qu'il ne s'aligne pas du tout maximalement. En fait,

$$\rho^{(\infty)} = \frac{1}{\text{tr}(e^{\beta L_z})} \sum_{m=-l}^l e^{\beta m} |l, m\rangle \langle l, m| \quad \text{où } \beta = \log \left( \frac{1+2n_3}{1-2n_3} \right),$$

ce qui n'est pas  $|l, l\rangle \langle l, l|$  (voir Annexe E pour plus de détails). Ceci signifie que les mesures suivantes donneront une possibilité de succès non négligeable si nous voulons mesurer  $\xi$  par rapport à un axe aligné avec  $\langle \vec{S} \rangle$ , mais que si l'axe classique ne correspond pas à  $\langle \vec{S} \rangle$ , le système de référence ne sera pas fiable.

#### 4.2.2 Tactiques et résolution approximative du comportement du système de référence

Cette section est tirée de [22] et de [18]. Pour réussir à caractériser le comportement du système de référence, nous utiliserons un nouveau système d'axes classique qui est à une rotation de  $\theta(n)$  (le  $n$  signifie que cet angle changera à chaque mesure) autour de l'axe des  $y$  près de

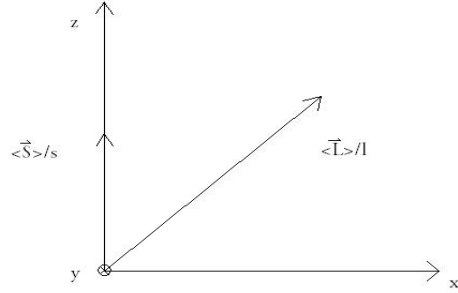


Figure 4.1 – Choix des axes dans le cas de la mesure d'un moment cinétique  $s = \frac{1}{2}$  polarisé

l'ancien système. Ainsi, les opérateurs  $L_x, L_y, L_z$  deviennent :

$$\begin{aligned} L_x^{\theta(n)} &= L_x \cos(\theta(n)) - L_z \sin(\theta(n)) \\ L_z^{\theta(n)} &= L_x \sin(\theta(n)) + L_z \cos(\theta(n)) \\ L_y^{\theta(n)} &= L_y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De plus, l'angle  $\theta(n)$  est choisi après chaque mesure afin que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho^{(n)} L_x^{\theta(n)}) &= \langle L_x^{\theta(n)} \rangle = 0 \\ \langle L_z^{\theta(n)} \rangle &= lr(n), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $0 \leq r(n) \leq 1$ . Donc, dans ce nouveau système d'axes,  $\rho^{(n)}$  est orienté, en moyenne, positivement avec l'axe des  $z$  (voir figure 4.2).

Nous pouvons ensuite exprimer  $\rho^{(n+1)}$  en termes de nos nouveaux  $L_i^{\theta(n)}$ . Le système de référence s'écrira  $\rho^{(n+1)} = \sum_{i=1}^4 E_i \rho^{(n)} E_i^\dagger$ , où les  $E_i$  sont :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}(2l+1)} ((2l+1)^2 + 1 - 4n_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{(2l+1)} i \sqrt{1 - 4n_3^2} L_y, \\ &\frac{\sqrt{2}}{(2l+1)} [L_z^{\theta(n)} + 2i \sin(\theta(n)) L_y + n_3 \cos(\theta(n))], \\ &\frac{\sqrt{2}}{(2l+1)} [L_x^{\theta(n)} + 2i \cos(\theta(n)) L_y - n_3 \cos(\theta(n))] \end{aligned} \quad (4.5)$$

(Voir Annexe B pour démonstration).

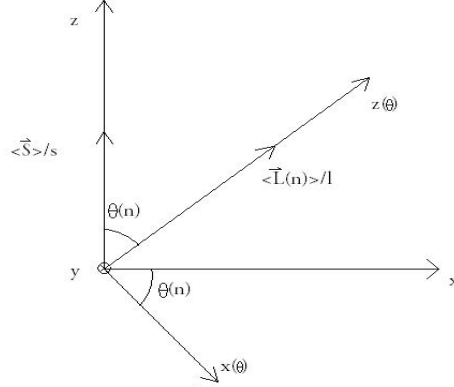


Figure 4.2 – Rotation des axes d’un angle  $\theta(n)$  afin que la moyenne de  $\vec{L}$  soit alignée avec l’axe des  $z(\theta)$  dans le cas de la mesure d’un moment cinétique  $s = \frac{1}{2}$  polarisé.

Évidemment, après avoir mis tout ceci en place, il faudra trouver l’évolution dans le temps (au fil des mesures) des paramètres  $r(n)$  et  $\theta(n)$ , qui représentent respectivement la grandeur moyenne du moment cinétique de référence <sup>1</sup> et l’orientation du moment cinétique de référence moyen. Dans [18], le moyen d’y arriver repose, en grande partie, sur la forme que prennent les  $tr(\rho^{(n+1)} L_i^{\theta(n)}) = \langle L_i^{\theta(n)}(n+1) \rangle$ . Ces moyennes représentent la moyenne des moments cinétiques de référence à la mesure  $n+1$  par rapport au système fixé après  $n$  mesures. Elles sont obtenues par un long calcul impliquant l’utilisation régulière de (3.1), (3.2) et de la cyclicité de la trace (voir [18] pour plus de détails).

$$\begin{aligned}
 \langle L_x^{\theta(n)}(n+1) \rangle &= -\frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \cos(\theta(n)) \langle (L_x^{\theta(n)} L_z^{\theta(n)})(n) \rangle \\
 &\quad - \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \sin(\theta(n)) (l(l+1) - \langle (L_x^{\theta(n)})^2(n) \rangle) \\
 \langle L_z^{\theta(n)}(n+1) \rangle &= \left( 1 + \frac{2}{(2l+1)^2} \right) \langle L_z^{\theta(n)}(n) \rangle \\
 &\quad + \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \sin(\theta(n)) \langle (L_x^{\theta(n)} L_z^{\theta(n)})(n) \rangle \\
 &\quad + \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \cos(\theta(n)) (l(l+1) - \langle (L_z^{\theta(n)})^2(n) \rangle) \\
 \langle L_y^{\theta(n)}(n+1) \rangle &= 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Comme les expressions utiles dans le calcul du comportement du système de référence sont plutôt lourdes, il faudra choisir de se placer dans un cas qui permettra certaines approximations.

<sup>1</sup>Par « grandeur » je n’entend pas  $\sqrt{\langle L^2 \rangle} = \sqrt{l(l+1)}$ , mais bien  $\sqrt{\langle L_i \rangle \langle L_i \rangle} = r(n)l$ .

Cette occasion se présente si  $\rho^{(n)}$  est dans un état semi classique et où  $l \gg 1$  (voir [18]). L'état semi classique nous dit que  $\rho^{(n)}$  est très près d'un état propre de  $L_z^{\theta(n)}$ . Donc,  $L_z^{\theta(n)}\rho^{(n)} \approx lr(n)\rho^{(n)}$ , ce qui implique directement que

$$\begin{aligned} \langle (L_x^{\theta(n)} L_z^{\theta(n)}) (n) \rangle &= tr(L_x^{\theta(n)} L_z^{\theta(n)} \rho^{(n)}) \\ &\approx lr(n) tr(L_x^{\theta(n)} \rho^{(n)}) \\ &= 0 \quad \text{par définition des } L_i^{\theta(n)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{et que } \langle (L_z^{\theta(n)})^2 (n) \rangle \approx l^2 r^2 (n). \quad (4.8)$$

Ensuite, il est convenable, sachant que  $l$  est grand, d'affirmer que  $\langle (L_x^{\theta(n)})^2 (n) \rangle = \langle (L_y^{\theta(n)})^2 (n) \rangle \approx \frac{1}{2}(l(l+1) - l^2 r^2 (n))$ , car il s'agit d'une approximation vérifiée numériquement dans [18].

Connaissant les conséquences du choix des grands  $l$  et du choix d'un  $\rho^{(n)}$  semi-classique, nous pouvons désormais simplifier les expressions de  $\langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle$  et de  $\langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle$  :

$$\langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle \approx -\frac{(1+r^2(n))}{2} n_3 \sin \theta(n) \quad (4.9)$$

$$\langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle \approx lr(n) + (1-r^2(n)) n_3 \cos \theta(n) \quad (4.10)$$

(voir Annexe C pour démonstration). Ensuite, comme

$$r^2(n+1) = \frac{1}{l^2} \langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle^2 + \frac{1}{l^2} \langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle^2, \text{ et comme}$$

$\langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle \gg \langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle$ , nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned} \Delta r^2 &= r^2(n+1) - r^2(n) = \frac{1}{l^2} \langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle^2 + \frac{1}{l^2} \langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle^2 - r^2(n) \\ \Delta \theta &= \arctan \left( \frac{\langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle}{\langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle} \right) \approx \frac{\langle L_x^{\theta(n)} (n+1) \rangle}{\langle L_z^{\theta(n)} (n+1) \rangle}. \end{aligned}$$

Ensuite, si nous considérons  $n \gg 1$ ,  $n+1 - n = 1$  pourrait être considéré comme infinitésimal, ce qui nous permettrait de remplacer  $\Delta \theta \rightarrow \dot{\theta}(n)$  et  $\Delta r^2 \rightarrow 2r(n)\dot{r}(n)$ . Avec toutes ces informations, nous en arrivons à ceci :

$$\dot{r}(n) = (1-r^2(n)) \frac{n_3}{l} \cos \theta(n) + o(1/l^2) \quad (4.11)$$

$$\dot{\theta}(n) = -\frac{(1+r^2(n)) n_3}{2r(n) l} \sin \theta(n) + o(1/l^2) \quad (4.12)$$

(voir Annexe C pour démonstration). Ces équations décrivent très bien le comportement du système de référence et sont conformes à l'analyse faite dans la section précédente (4.2.1). Cependant, (4.11), pour un  $r = 1$ , aura pour termes dominants des termes contenus dans le  $o(1/l^2)$ . Ces termes diminueront  $r$  et le terme dominant redeviendra le premier terme (toujours

dans l'approximation des grands  $l$ )<sup>2</sup>. Pour plus de détails sur les résolutions analytiques et numériques de ces équations, voir [18].

### 4.3 Interaction énergétique spin-moment cinétique

La présente section nous permettra de comprendre les similitudes entre l'action qu'a la mesure et l'action qu'a une interaction hamiltonienne sur notre système de référence.

L'interaction qui sera étudiée est une interaction entre le moment cinétique de référence ( $\rho^{(n)}$ ) et l'un des moments cinétiques issus de la source ( $\xi$ ). Cette interaction prend forme lorsqu'un hamiltonien bien spécifique vient faire évoluer le système total.

$$H = \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (4.13)$$

Comme cet hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, nous pouvons résoudre (2.1) afin d'obtenir l'opérateur d'évolution temporelle (2.2). Nous savons donc que le système, après un temps  $\tau$  d'interaction évoluera comme suit :

$$e^{-i\vec{L} \cdot \vec{S} \tau} \rho^{(n)} \otimes \xi e^{i\vec{L} \cdot \vec{S} \tau}. \quad (4.14)$$

#### 4.3.1 Calcul explicite de l'interaction et équivalence avec la mesure

Pour réussir à bien comprendre l'effet de l'interaction, il faudra calculer explicitement l'opérateur d'évolution temporelle. Pour ce faire, nous pouvons d'abord remarquer que

$$\begin{aligned} (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 &= L_i S_i L_j S_j = L_i L_j S_i S_j \\ &= L_i L_j \frac{1}{4} (\delta_{ij} + 2i \varepsilon_{ijk} S_k) \text{ par (3.8)} \\ &= \frac{1}{4} l(l+1) - \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{S} \text{ par (3.2)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sachant ceci, nous pouvons en déduire que toutes les puissances de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  peuvent s'écrire comme une combinaison de l'identité et de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ .

$$(\vec{L} \cdot \vec{S})^k = a_k I + b_k \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (4.16)$$

Ainsi, comme l'opérateur s'exprime comme une série de puissances de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ , nous pouvons également en déduire qu'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire de l'identité et de

---

<sup>2</sup>Pour calculer ces termes, il suffit de considérer les termes d'un plus petit ordre dans le calcul des équations (4.11) et (4.12).

$\vec{L} \cdot \vec{S}$ .

$$e^{-i\vec{L} \cdot \vec{S} \tau} = a(\tau)I + b(\tau)\vec{L} \cdot \vec{S} \quad (4.17)$$

Il ne reste plus qu'à trouver explicitement  $a(\tau)$  et  $b(\tau)$ . Pour ce faire, nous chercherons les équations différentielles qui les régissent<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\vec{L} \cdot \vec{S} \tau} &= i\dot{a}(\tau)I + i\dot{b}(\tau)\vec{L} \cdot \vec{S} \\ \vec{L} \cdot \vec{S} (a(\tau)I + b(\tau)\vec{L} \cdot \vec{S}) &= i\dot{a}(\tau)I + i\dot{b}(\tau)\vec{L} \cdot \vec{S} \\ \frac{l(l+1)}{4} b(\tau)I + \left( a(\tau) - \frac{b(\tau)}{2} \right) \vec{L} \cdot \vec{S} &= i\dot{a}(\tau)I + i\dot{b}(\tau)\vec{L} \cdot \vec{S} \\ \Rightarrow i\dot{a}(\tau) &= \frac{l(l+1)}{4} b(\tau) \text{ et } i\dot{b}(\tau) = \left( a(\tau) - \frac{b(\tau)}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

En remaniant ces équations différentielles, nous pouvons séparer les deux fonctions et obtenir une équation pour chacune des fonctions.

$$i\ddot{a} + \frac{1}{2}\dot{a} + \frac{i}{4}l(l+1)a = 0 \quad (4.19)$$

$$i\ddot{b} + \frac{1}{2}\dot{b} + \frac{i}{4}l(l+1)b = 0 \quad (4.20)$$

La solution générale sera la même pour les deux équations. Cependant, comme les conditions initiales des deux fonctions sont différentes ( $a(0) = 1$ ,  $b(0) = 0$ ,  $\dot{a}(0) = 0$  et  $\dot{b}(0) = -i$ ), nous arriverons à des solutions distinctes.

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{(l+1)}{(2l+1)} e^{-i\frac{l\tau}{2}} + \frac{l}{(2l+1)} e^{-i\frac{(l+1)\tau}{2}} \\ &= \left( \cos\left(\frac{(2l+1)\tau}{4}\right) - \frac{i}{(2l+1)} \sin\left(\frac{(2l+1)\tau}{4}\right) \right) e^{i\frac{\tau}{4}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} b(\tau) &= \frac{2}{(2l+1)} \left( e^{-i\frac{l\tau}{2}} - e^{i\frac{(l+1)\tau}{2}} \right) \\ &= -\frac{4i}{(2l+1)} \sin\left(\frac{(2l+1)\tau}{4}\right) e^{i\frac{(2l+1)\tau}{4}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Avec ceci, nous obtenons la forme explicite de l'opérateur d'évolution temporelle :

$$e^{-i\vec{L} \cdot \vec{S} \tau} = \left( \cos\left(\frac{d\tau}{4}\right) - \frac{i}{d} \sin\left(\frac{d\tau}{4}\right) \right) e^{i\frac{\tau}{4}I} - \frac{4i}{d} \sin\left(\frac{d\tau}{4}\right) e^{i\frac{d\tau}{4}} \vec{L} \cdot \vec{S}, \quad (4.23)$$

où  $d = 2l + 1$ .

La dernière étape du calcul explicite implique l'insertion de (4.23) dans (4.14) et le calcul de la trace partielle afin d'isoler l'état du système de référence après l'interaction. Ce calcul

<sup>3</sup>Il est à noter que l'utilisation du point au-dessus d'une fonction dépendant de  $\tau$  désigne une dérivée par rapport à  $\tau$ . S'il y a plus d'un point, le nombre de points détermine l'ordre de la dérivée par rapport à  $\tau$ .



est tout à fait similaire aux précédents calculs de traces partielles du chapitre 3 et du présent chapitre.

$$\begin{aligned} \rho^{(n)}(\tau) = & \left( \cos^2\left(\frac{d\tau}{4}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{d\tau}{4}\right)}{d^2} \right) \rho^{(n)} + \frac{4n_3}{d^2} \sin^2\left(\frac{d\tau}{4}\right) (L_z \rho^{(n)} + \rho^{(n)} L_z) \\ & + \frac{(2+4n_3)}{d^2} \sin^2\left(\frac{d\tau}{4}\right) L_+ \rho^{(n)} L_- + \frac{(2-4n_3)}{d^2} \sin^2\left(\frac{d\tau}{4}\right) L_- \rho^{(n)} L_+ \\ & + \frac{4}{d^2} \sin^2\left(\frac{d\tau}{4}\right) L_z \rho^{(n)} L_z + i \frac{2n_3}{d} \sin\left(\frac{d\tau}{2}\right) [\rho^{(n)}, L_z] \end{aligned} \quad (4.24)$$

De plus, si nous choisissons  $\tau = \frac{\pi}{d}$  comme temps d'interaction, nous obtenons ceci :

$$\begin{aligned} \rho^{(n)}\left(\frac{\pi}{d}\right) = & \left( \frac{1}{2} + \frac{1-4n_3^2}{2(2l+1)^2} \right) \rho^{(n)} + \frac{2}{(2l+1)^2} (L_z + n_3) \rho^{(n)} (L_z + n_3) \\ & + \frac{(1+2n_3)}{(2l+1)^2} L_+ \rho^{(n)} L_- + \frac{(1-2n_3)}{(2l+1)^2} L_- \rho^{(n)} L_+ + i \frac{2n_3}{d} [\rho^{(n)}, L_z]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Nous pouvons remarquer que cet état est, à un terme près ( $i \frac{2n_3}{d} [\rho^{(n)}, L_z]$ ), le même état que  $\rho^{(n+1)}$  de (4.2). Ce terme correspond à l'action, au premier ordre, d'une rotation autour de l'axe des  $z$  d'un angle de  $-\frac{2n_3}{d}$ . Or, comme la rotation aurait lieu seulement autour de l'axe privilégié du moment cinétique étudié, l'efficacité de mesure du système de référence  $\rho^{(n)}\left(\frac{\pi}{d}\right)$  ne devrait, en aucun cas, être différente de celle de  $\rho^{(n+1)}$ .

Nous pouvons vérifier cette dernière affirmation en reconsidérant les probabilités de réussite conditionnelles  $P(+|0)$  et  $P(-|1)$  de la mesure. Comme les probabilités conditionnelles sont données par

$$\begin{aligned} P_1(\pm|i) &= \text{tr}[(\rho^{(n+1)} \otimes |i\rangle\langle i|) \Pi_{\pm}] \quad \text{pour la mesure conjointe et par} \\ P_2(\pm|i) &= \text{tr}[(\rho^{(n)}\left(\frac{\pi}{d}\right) \otimes |i\rangle\langle i|) \Pi_{\pm}] \quad \text{pour l'interaction,} \end{aligned}$$

nous pouvons constater que la différence entre les probabilités des deux situations n'est donnée que par le dernier terme de (4.25). Voici donc la différence entre les probabilités de réussite :

$$\begin{aligned} \text{tr}[(i \frac{2n_3}{d} [\rho^{(n)}, L_z] \otimes |0\rangle\langle 0|) \Pi_+] &= i \frac{2n_3}{d} \text{tr}([\rho^{(n)}, L_z] \langle 0| \Pi_+ |0\rangle) \\ &= i \frac{2n_3}{d} [\text{Ctr}([\rho^{(n)}, L_z]) + \text{Dtr}([\rho^{(n)}, L_z] L_z)] \quad , \text{ car } \langle 0| \Pi_+ |0\rangle = C(l)I + D(l)L_z \\ &= 0 \quad \text{et} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{tr}[(i \frac{2n_3}{d} [\rho^{(n)}, L_z] \otimes |1\rangle\langle 1|) \Pi_-] = 0 \quad \text{de la même façon.} \quad (4.27)$$

Ainsi, nous voyons que l'efficacité du système de référence est exactement la même si nous décidons de faire interagir un état de la source avec ce dernier plutôt que de mesurer l'état

de la source, car les probabilités de réussite sont inchangées. Cependant, il est important de souligner que ce n'est valable que dans le cas où les états de la source ont une moyenne de  $L_x$  et  $L_y$  nulles. Si ce n'était pas le cas, la rotation se ferait autour de l'axe de polarisation, qui ne serait pas confondu avec l'axe des  $z$ , et les probabilités de réussite seraient changées. Heureusement, dans le cas de grands  $l$ , ce changement demeurerait petit et décroîtrait si  $l$  croissait.

De plus, si nous imaginons qu'il existe une autre source de moments cinétiques qui sont polarisés en sens inverse de  $\xi$  ( $\xi = \frac{1}{2}I - n_3\sigma_3$ ), alors il est possible d'utiliser cette source pour notre interaction durant un temps de  $\tau = \frac{\pi}{2d}$  afin d'allonger la durée de vie utile du système de référence. En effet, si, après deux mesures de la première source, nous utilisons un moment cinétique de la deuxième source pour l'interaction, l'efficacité du système de référence sera rétablie au niveau qu'il avait avant les deux mesures. Pour plus de détails, voir [1].

#### 4.4 Limite classique pour $s = \frac{1}{2}$ polarisé

Enfin, il est évident que si  $l$  est infini, le système de référence sera stationnaire et parfait dans le cas d'un état initial  $|l, l\rangle\langle l, l|$ . En effet, l'équation (4.2) se réduit comme suit :

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1-4n_3^2}{2d^2}\right)\rho^{(n)} + \frac{2}{d^2}(L_z + n_3)\rho^{(n)}(L_z + n_3) \\
&+ \frac{(1+2n_3)}{d^2}L_+\rho^{(n)}L_- + \frac{(1-2n_3)}{d^2}L_-\rho^{(n)}L_+ \\
&\rightarrow \frac{1}{2}\rho^{(n)} + \frac{2(l+n_3)^2}{d^2}\rho^{(n)} + 0 + \frac{(1-2n_3)}{d^2}2l\rho^{(n)} \\
&\rightarrow \frac{1}{2}\rho^{(n)} + \frac{2(l^2+2n_3l)}{4l^2}\left(1 + \frac{1}{l}\right)\rho^{(n)} \\
&\rightarrow \rho^{(n)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le système de référence devient immuable au moins aussi rapidement que  $\frac{1}{l}$  s'approche de 0. De plus, il est très aisé de vérifier que pour cet état initial, la probabilité de réussite sera parfaite. En effet, les probabilités conditionnelles de succès sont (dans le cas où l'axe de mesure est le même que l'axe des  $z$  que nous avons précédemment choisi) :

$$\begin{aligned}
P(+|0) &= \text{tr}[ (|l, l\rangle\langle l, l| \otimes |0\rangle\langle 0|) \Pi_+ ] \\
&= \langle l, l | \left( \frac{l+1}{d} + \frac{L_z}{d} \right) | l, l \rangle = 1 \\
P(-|1) &= \text{tr}[ (|l, l\rangle\langle l, l| \otimes |1\rangle\langle 1|) \Pi_- ] \\
&= \langle l, l | \left( \frac{l}{d} + \frac{L_z}{d} \right) | l, l \rangle = \frac{2l}{(2l+1)} \rightarrow 1.
\end{aligned}$$

## CHAPITRE 5

### SYSTÈME DE RÉFÉRENCE QUANTIQUE DANS LE CAS D'UN SPIN 1

Le présent chapitre aura pour principal objectif de comparer l'effet qu'a la mesure conjointe (avec un moment cinétique de  $s = 1$ ) à l'effet qu'a l'interaction hamiltonienne  $H = \vec{L} \cdot \vec{S}$  sur le système de référence. En effet, comme les deux effets sont quasi équivalents dans le cas de  $s = \frac{1}{2}$ , il est tout à fait légitime de vérifier si ce résultat est généralisable et, pour ce faire, la manière la plus naturelle de procéder est d'étudier le deuxième moment cinétique le plus petit. Le principal critère de comparaison sera la probabilité de succès, c'est-à-dire, que nous calculerons la différence entre les probabilités de succès après la mesure et les probabilités de succès après l'interaction. Il s'avère que la différence entre les probabilité est pour certains temps d'interaction, mais il semble *a priori* peu probable d'avoir une égalité des probabilités de succès. Il est à noter que le contenu de ce chapitre est entièrement original.

#### 5.1 Moment cinétique $s = 1$

Comme nous nous intéresserons, tout au long de ce chapitre, à des moments cinétiques de  $s = 1$ , il est impératif de connaître les opérateurs  $S_i$ . En se servant des relations de la section 3.1.1, il est possible d'écrire explicitement les opérateurs (dans la base des états propres de  $S_3$ ).

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ S_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

##### 5.1.1 Addition de moments cinétiques $\frac{1}{2}$ et sous-espace de $s = 1$

Imaginons que nous possédons deux moments cinétiques de  $\tilde{s} = \frac{1}{2}$ . Alors, les états totaux (les deux moments cinétiques) vivront, comme nous le savons, dans le produit direct des espaces d'Hilbert de chacun des moments cinétiques. La base de cet espace peut être choisie comme suit :

$$\left\{ |0,0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle), |1,1\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle) \right\}$$

où 0 représente  $\frac{1}{2}$  et 1 représente  $-\frac{1}{2}$ . Ce choix de notation a été fait afin d'alléger la lecture des états. Nous pouvons remarquer, grâce à la décomposition de l'addition des moments cinétiques, que les trois premiers vecteurs de cette base forment la base usuelle de l'espace d'Hilbert d'un moment cinétique de  $s = 1$ . Le premier représente l'état  $m = 1$ , le deuxième  $m = 0$  et le troisième  $m = -1$ . Le quatrième état, lui, représente un moment cinétique nul.

Ensuite, envisageons de calculer l'action de certains opérateurs sur l'espace du moment cinétique total. Cependant, comme nous ne sommes pas du tout intéressés par des états de moments cinétiques nuls, nous nous concentrons sur l'action de ces opérateurs sur le sous-espace de  $s = 1$ . Tout d'abord,

$$\begin{aligned}(\tilde{S}_z \otimes I + I \otimes \tilde{S}_z)|0,0\rangle &= |0,0\rangle \\(\tilde{S}_z \otimes I + I \otimes \tilde{S}_z)|1,1\rangle &= -|1,1\rangle \\(\tilde{S}_z \otimes I + I \otimes \tilde{S}_z)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) &= 0.\end{aligned}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}(\tilde{S}_x \otimes I + I \otimes \tilde{S}_x)|0,0\rangle &= \frac{1}{2}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \\(\tilde{S}_x \otimes I + I \otimes \tilde{S}_x)|1,1\rangle &= \frac{1}{2}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \\(\tilde{S}_x \otimes I + I \otimes \tilde{S}_x)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)\end{aligned}$$

et, enfin,

$$\begin{aligned}(\tilde{S}_y \otimes I + I \otimes \tilde{S}_y)|0,0\rangle &= i\frac{1}{2}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \\(\tilde{S}_y \otimes I + I \otimes \tilde{S}_y)|1,1\rangle &= -i\frac{1}{2}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \\(\tilde{S}_y \otimes I + I \otimes \tilde{S}_y)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|0,0\rangle + i|1,1\rangle).\end{aligned}$$

Connaissant l'action de ces trois opérateurs sur le sous-espace de moments cinétiques  $s = 1$ , nous pouvons en déduire, grâce à (5.1), que ces opérateurs restreints au sous-espace sont, en fait, les opérateurs  $S_i$  de moments cinétiques  $s = 1$ . Ainsi, nous pourrions dorénavant écrire ceci :

$$\tilde{S}_i \otimes I + I \otimes \tilde{S}_i = S_i \tag{5.2}$$

où  $\tilde{S}_i \otimes I + I \otimes \tilde{S}_i$  est restreint à notre sous-espace.

### 5.1.2 Calcul de $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ pour un $l$ quelconque

Étant donné que, dans le cas d'un  $s = \frac{1}{2}$ , le calcul de  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$  était central afin de connaître l'évolution temporelle du système de référence sous l'action de  $H = \vec{L} \cdot \vec{S}$ , nous pourrions vérifier si, dans le cas présent, ce calcul est aussi utile. Cependant, comme  $S_i S_j$  ne peut pas vraiment être calculée directement en termes des  $S_k$  dans le cas présent, nous nous servirons de (5.2).

$$\begin{aligned}
(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 &= L_i S_i L_j S_j = L_i L_j S_i S_j \\
&= L_i L_j (\tilde{S}_i \otimes I + I \otimes \tilde{S}_i) (\tilde{S}_j \otimes I + I \otimes \tilde{S}_j) \\
&= L_i L_j (\tilde{S}_i \tilde{S}_j \otimes I + I \otimes \tilde{S}_i \tilde{S}_j + \tilde{S}_i \otimes \tilde{S}_j + \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_i) \\
&= \frac{1}{2} (l(l+1) + i \varepsilon_{ijk} L_i L_j S_k) + L_i L_j (\tilde{S}_i \otimes \tilde{S}_j + \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_i) \\
&= \frac{1}{2} (l(l+1) - \vec{L} \cdot \vec{S}) + L_i L_j (\tilde{S}_i \otimes \tilde{S}_j + \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_i) \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Malheureusement, le dernier terme ne peut être exprimé en termes de l'identité et de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ , ce qui laisse présager que la technique de calcul de l'opérateur d'évolution temporelle due à l'interaction devra être modifiée. Laissons de côté ces soucis pour en revenir à la mesure.

## 5.2 Récurrence attribuable à la mesure pour $s = 1$

### 5.2.1 Calcul des projecteurs

Avant de pouvoir calculer explicitement, de quelque façon que ce soit, l'effet qu'a une mesure d'un moment cinétique de  $s = 1$  sur notre système de référence, il est important de connaître les projecteurs liés à cette mesure. Encore une fois, la mesure qui nous intéresse est une mesure conjointe du système total (système de référence  $\rho$  et moment cinétique  $\xi$ ). Il s'agit de la mesure de  $J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$  dont les résultats  $j$  possibles seront de  $j+1$ ,  $j$  et  $j-1$ . De plus, encore une fois, nous prendrons le  $m$  du résultat  $j+m$  comme la mesure de l'alignement du moment cinétique avec le système de référence.

Connaissant la nature de la mesure, nous pouvons désormais réussir à calculer les projecteurs  $\Pi_m$  explicitement. En s'inspirant de la technique utilisée précédemment pour trouver les projecteurs dans le cas de moments cinétiques  $\frac{1}{2}$  et sachant que  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$  est indépendant de  $I$  et

$\vec{L} \cdot \vec{S}$ , il est possible de trouver nos projecteurs (combinaison linéaire de puissances de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ ).

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{1}{(2l+1)}I + \frac{(l+2)}{(l+1)(2l+1)}\vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{1}{(l+1)(2l+1)}(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \\ \Pi_0 &= I - \frac{1}{l(l+1)}\vec{L} \cdot \vec{S} - \frac{1}{l(l+1)}(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \\ \Pi_{-1} &= -\frac{1}{(2l+1)}I - \frac{(l-1)}{l(2l+1)}\vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{1}{l(2l+1)}(\vec{L} \cdot \vec{S})^2\end{aligned}\quad (5.4)$$

### 5.2.2 Calcul de l'état total après la mesure

Dans ce chapitre, tout comme dans les chapitres précédents, nous ne considérerons que l'effondrement moyen de l'état total lors de la mesure, c'est-à-dire que nous ferons la supposition que le résultat de la mesure n'est pas gardé en mémoire. Ainsi, l'état total du système, après la mesure, est donnée par cette expression :

$$\Pi_1 \rho \otimes \xi \Pi_1 + \Pi_0 \rho \otimes \xi \Pi_0 + \Pi_{-1} \rho \otimes \xi \Pi_{-1}. \quad (5.5)$$

Grâce à (5.4), nous pouvons en déduire que l'état total est donné par cette expression, un peu plus explicite :

$$\begin{aligned}\sum_{i=-1}^1 \Pi_i \rho \otimes \xi \Pi_i &= \left( \frac{2}{(2l+1)^2} + 1 \right) \rho \otimes \xi \\ &+ \left( \frac{(l-1)}{l(2l+1)^2} - \frac{1}{l(l+1)} + \frac{(l+2)}{(l+1)(2l+1)^2} \right) \{ \vec{L} \cdot \vec{S}, \rho \otimes \xi \} \\ &+ \left( \frac{(l+2)^2}{(l+1)^2(2l+1)^2} + \frac{1}{l^2(l+1)^2} + \frac{(l-1)^2}{l^2(2l+1)^2} \right) \vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S} \\ &+ \left( \frac{1}{(l+1)^2(2l+1)^2} - \frac{1}{l(l+1)} - \frac{1}{l(2l+1)^2} \right) \{ (\vec{L} \cdot \vec{S})^2, \rho \otimes \xi \} \\ &+ \left( \frac{1}{l^2(l+1)^2} + \frac{(l+2)}{(l+1)^2(2l+1)^2} - \frac{(l-1)}{l^2(2l+1)^2} \right) \{ \vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S} \} \\ &+ \left( \frac{1}{(l+1)^2(2l+1)^2} + \frac{1}{l^2(l+1)^2} + \frac{1}{l^2(2l+1)^2} \right) (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Chacun de ces coefficients sera désigné, en ordre d'apparition dans l'expression précédente, par les symboles suivants :  $a_m^2$ ,  $ab_m$ ,  $b_m^2$ ,  $ac_m$ ,  $bc_m$  et  $c_m^2$ .

### 5.3 Interaction entre le système de référence et un moment cinétique $s = 1$

Comme l'objectif final de ce chapitre est de comparer l'action de l'interaction hamiltonienne de  $H = \vec{L} \cdot \vec{S}$  avec l'action de la mesure conjointe de  $J^2$ , il faut réussir à calculer explicitement l'action de cette interaction. Il semble donc inévitable de savoir développer  $e^{i\vec{L} \cdot \vec{S} \tau}$ , la matrice d'évolution temporelle. Malheureusement, malgré l'astuce du sous-espace  $s = 1$  pour

deux moments cinétiques  $\tilde{s} = \frac{1}{2}$ , il est impossible de simplifier  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ . Toutefois, étant donné la forme des projecteurs (incluant un terme en  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ ), il pourrait sembler probable que  $e^{i\vec{L} \cdot \vec{S}\tau}$  soit de la forme suivante :

$$e^{i\vec{L} \cdot \vec{S}\tau} = a(\tau)I + b(\tau)\vec{L} \cdot \vec{S} + c(\tau)(\vec{L} \cdot \vec{S})^2. \quad (5.7)$$

Afin de vérifier cette piste, il ne nous reste qu'à calculer  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^3$  afin de s'assurer qu'il est linéairement dépendant de  $I$ ,  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  et  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ . Si tel est le cas, toutes les puissances de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  s'expriment en termes de ces trois opérateurs et la forme (5.7) de l'évolution temporelle est valide. En se servant de l'astuce développée dans la première section du chapitre (5.2) et en utilisant les propriétés des matrices de Pauli (3.8) et des moments cinétiques généraux (3.1) et (3.2), on obtient ceci :

$$\begin{aligned} (\vec{L} \cdot \vec{S})^3 &= l(l+1)(\tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_j) + \frac{1}{4}(4l(l+1) - 1)\vec{L} \cdot \vec{S} - \frac{1}{2}(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \\ &\quad - \frac{3}{2}L_i L_m (\tilde{S}_i \otimes \tilde{S}_m + \tilde{S}_m \otimes \tilde{S}_i). \end{aligned} \quad (5.8)$$

À première vue, il pourrait sembler impossible de simplifier l'expression, notamment le premier et le dernier terme. Heureusement,  $\tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_j = \tilde{S}_1 \otimes \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 \otimes \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 \otimes \tilde{S}_3$  agit comme  $\frac{1}{4}I$  sur le sous-espace de  $s = 1$ .

$$\begin{aligned} \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_j |0,0\rangle &= \frac{1}{4}(|1,1\rangle - |1,1\rangle + |0,0\rangle) = \frac{1}{4}|0,0\rangle \\ \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_j |1,1\rangle &= \frac{1}{4}(|0,0\rangle - |0,0\rangle + |1,1\rangle) = \frac{1}{4}|1,1\rangle \\ \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_j \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(2|1,0\rangle - |0,1\rangle + 2|0,1\rangle - |1,0\rangle) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \\ \Rightarrow \tilde{S}_j \otimes \tilde{S}_j &= \frac{1}{4}I_{3 \times 3} \end{aligned}$$

De plus, le dernier terme de notre expression de  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^3$  apparaît également dans (5.3) et nous pouvons l'exprimer en termes de  $I$ ,  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  et  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$ . Ainsi, nous en arrivons effectivement à la conclusion que  $(\vec{L} \cdot \vec{S})^3$  est linéairement dépendant de nos puissances de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ .

$$(\vec{L} \cdot \vec{S})^3 = l(l+1)I + (l(l+1) - 1)\vec{L} \cdot \vec{S} - 2(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \quad (5.9)$$

Nous pouvons également remarquer que cette méthode peut se généraliser, par construction, à des moments cinétiques  $s$  de toutes les grandeurs. Par exemple, nous pouvons penser le moment cinétique  $s = \frac{3}{2}$  comme un sous-espace de la somme d'un moment cinétique 1 et d'un autre de

### 5.3.1 Calcul de l'évolution temporelle

En prenant (5.7) et en dérivant par rapport à  $\tau$  chaque membre de l'équation, nous pouvons réarranger les coefficients des puissances de  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  du membre de gauche en se servant de l'équation ci-dessus afin de les faire correspondre aux coefficients du membre de droite. Ces manipulations (tout à fait similaires à la méthode utilisée dans le cas du moment cinétique  $\frac{1}{2}$ ) nous permettent d'établir des équations différentielles pour les coefficients  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  et  $c(\tau)$ .

$$\begin{aligned} \dot{a}(\tau) &= il(l+1)c(\tau) \\ \dot{b}(\tau) &= i[a(\tau) + (l(l+1) - 1)c(\tau)] \\ \dot{c}(\tau) &= i[b(\tau) - 2c(\tau)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Avec ces trois équations, nous pouvons isoler une équation pour  $a(\tau)$ .

$$\frac{d\ddot{a}}{d\tau} - 2i\ddot{a} - (l(l+1) - 1)\dot{a} - ia = 0 \quad (5.11)$$

Comme il s'agit d'une équation différentielle homogène à coefficients constants, nous pouvons obtenir la solution, sachant que  $\dot{a}(0) = \ddot{a}(0) = 0$  et que  $a(0) = 1$ . Par la suite, connaissant  $a(\tau)$ , nous pouvons en déduire  $b(\tau)$  et  $c(\tau)$  à partir de (5.10).

$$\begin{aligned} a(\tau) &= e^{-i\tau} + \frac{1}{(2l+1)}e^{il\tau} - \frac{1}{(2l+1)}e^{-i(l+1)\tau} \\ b(\tau) &= -\frac{1}{l(l+1)}e^{-i\tau} + \frac{(l+2)}{(l+1)(2l+1)}e^{il\tau} - \frac{(l-1)}{l(2l+1)}e^{-i(l+1)\tau} \\ c(\tau) &= -\frac{1}{l(l+1)}e^{-i\tau} + \frac{1}{(l+1)(2l+1)}e^{il\tau} + \frac{1}{l(2l+1)}e^{-i(l+1)\tau} \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.3.2 Calcul de l'état total après l'interaction

La prochaine étape consiste à calculer l'effet de l'interaction sur un temps  $\tau$  sous la même forme que l'effet de la mesure calculé dans la section précédente. Nous savons que cette interaction agit de la façon suivante sur le système total :

$$\begin{aligned} e^{-i\vec{L} \cdot \vec{S}\tau} \rho \otimes \xi e^{i\vec{L} \cdot \vec{S}\tau} &= |a(\tau)|^2 \rho \otimes \xi + a^*(\tau)b(\tau) \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S} + a(\tau)b^*(\tau) \vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi \\ &+ |b(\tau)|^2 \vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S} + a^*(\tau)c(\tau) \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \\ &+ a(\tau)c^*(\tau) (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi + b^*(\tau)c(\tau) \vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \\ &+ b(\tau)c^*(\tau) (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S} + |c(\tau)|^2 (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$



Après le calcul de ces coefficients, dont nous pouvons séparer les parties indépendantes et dépendantes du temps, nous en concluons ceci :

$$\begin{aligned}
|a(\tau)|^2 &= a_m^2 + \frac{2}{(2l+1)} \cos[(l+1)\tau] - \frac{2}{(2l+1)} \cos(l\tau) \\
&\quad - \frac{2}{(2l+1)^2} \cos[(2l+1)\tau], \\
a(\tau)b^*(\tau) &= ab_m + \frac{(l+2)}{(l+1)(2l+1)} e^{-i(l+1)\tau} - \frac{(l-1)}{l(2l+1)} e^{il\tau} - \frac{(l-1)}{l(2l+1)^2} e^{i(2l+1)\tau} \\
&\quad - \frac{1}{l(l+1)(2l+1)} e^{i(l+1)\tau} + \frac{1}{l(l+1)(2l+1)} e^{-il\tau} \\
&\quad - \frac{(l+2)}{(l+1)(2l+1)^2} e^{-i(2l+1)\tau}, \\
|b(\tau)|^2 &= b_m^2 + \frac{2(l+2)}{l(l+1)^2(2l+1)} \cos[(l+1)\tau] - \frac{2(l-1)}{l^2(l+1)(2l+1)} \cos(l\tau) \\
&\quad - \frac{2(l+2)(l-1)}{l(l+1)(2l+1)^2} \cos[(2l+1)\tau], \\
a(\tau)c^*(\tau) &= ac_m + \frac{1}{(l+1)(2l+1)} e^{-i(l+1)\tau} + \frac{1}{l(2l+1)} e^{il\tau} + \frac{1}{l(2l+1)^2} e^{i(2l+1)\tau} \\
&\quad - \frac{1}{l(l+1)(2l+1)} e^{i(l+1)\tau} + \frac{1}{l(l+1)(2l+1)} e^{-il\tau} \\
&\quad - \frac{1}{(l+1)(2l+1)^2} e^{-i(2l+1)\tau}, \\
b(\tau)c^*(\tau) &= bc_m - \frac{1}{l(l+1)^2(2l+1)} e^{-i(l+1)\tau} - \frac{1}{l^2(l+1)(2l+1)} e^{il\tau} \\
&\quad - \frac{(l+2)}{l(l+1)(2l+1)^2} e^{i(2l+1)\tau} - \frac{(l+2)}{l(l+1)^2(2l+1)} e^{i(l+1)\tau} \\
&\quad + \frac{(l-1)}{l^2(l+1)(2l+1)} e^{-il\tau} - \frac{(l-1)}{l(l+1)(2l+1)^2} e^{-i(2l+1)\tau}, \\
|c(\tau)|^2 &= c_m^2 - \frac{2}{l(l+1)^2(2l+1)} \cos[(l+1)\tau] - \frac{2}{l^2(l+1)(2l+1)} \cos(l\tau) \\
&\quad + \frac{2}{l(l+1)(2l+1)^2} \cos[(2l+1)\tau] \tag{5.14}
\end{aligned}$$

où les termes indépendants du temps correspondent aux coefficients dans le cas de la mesure. Il est à noter que, dorénavant, seule la différence entre ces coefficients sera considérée. Cela signifie que toutes les manipulations ultérieures ne considéreront que les termes dépendants du temps dans (5.14). De plus, lorsqu'il sera fait mention de l'un des coefficients (exemple :  $|b(\tau)|^2$ ), en fait, cela ne désignera que sa partie dépendante du temps ( $|b(\tau)|^2 - b_m^2$ ).

#### 5.4 Différence entre les systèmes de référence

La prochaine étape consiste à comparer les systèmes de référence obtenus selon les deux processus qui nous intéressent. Cependant, avant d'y parvenir, il faut choisir une forme pratique

des moments cinétiques de la source d'états  $\xi$ . Comme il existe huit matrices  $\lambda_i$  sans trace, hermitiennes et indépendantes (matrices de Gell-Mann) et qu'une matrice hermitienne  $3 \times 3$  possède neuf paramètres, on pourrait considérer cette forme :

$$\xi = a_0 I + a_i \lambda_i \quad \text{où } 1 \leq i \leq 8.$$

Malheureusement, cette forme n'est pas la plus parlante, ni utile, car toutes les autres matrices de cet espace sont en termes des matrices  $S_i$ . C'est pourquoi il est préférable d'utiliser cette forme :

$$\xi = \frac{1}{3} I + R_i S_i + \frac{1}{2} T^{ij} \{S_i, S_j\} \quad (5.15)$$

où  $R_i$ ,  $T^{ij}$  sont éléments des réels,  $T^{ii} = 0$  (de trace nulle) et  $T^{ij} = T^{ji}$ . Tout d'abord, il est important de mentionner que le choix de ces coefficients a été effectué afin que  $\xi$  respecte les propriétés d'une matrice densité (voir section 2.2). Il s'agit, en excluant la dernière condition (symétrie  $T^{ij} = T^{ji}$ ), du choix le moins restrictif pour cette forme de matrice densité<sup>1</sup>. Toutefois, comme il semble *a priori* que  $\xi$  soit une combinaison linéaire de 13 matrices hermitiennes, il paraît improbable que tous ces opérateurs soient linéairement indépendants. Cependant, comme nous choisissons  $T^{ij}$  symétrique et que  $\{S_i, S_j\} = \{S_j, S_i\}$ , nous en arrivons à 10 matrices hermitiennes. De plus, en sachant que  $T^{ii} = 0$ , nous réduisons le nombre de matrices hermitiennes de base à 9 et celles-ci sont toutes linéairement indépendantes. Il est possible de démontrer cette dernière affirmation en exprimant ces matrices en termes des matrices  $I$  et  $\lambda_i$ .

#### 5.4.1 Calcul des traces partielles

Pour réussir à isoler le système de référence, il faudra calculer une trace partielle sur le système du moment cinétique de la source, comme nous l'avons fait précédemment. Pour arriver à nos fins, nous pouvons calculer terme à terme les traces partielles. Voici les traces à calculer :

$$(1) tr_S(\rho \otimes \xi) \qquad tr_S(\rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2) (6)$$

$$(2) tr_S(\vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi) \qquad tr_S((\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S}) (7)$$

$$(3) tr_S(\rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S}) \qquad tr_S(\vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2) (8)$$

$$(4) tr_S(\vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S}) \qquad tr_S((\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2) (9)$$

$$(5) tr_S((\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \rho \otimes \xi)$$

<sup>1</sup> Il est à noter qu'il faut également imposer une contrainte sur la grandeur des  $R_i$  et  $T^{ij}$  pour obtenir une matrice densité valide.

Pour chacune de ces traces, il y a trois termes (a), (b) et (c) respectivement donnés par les trois termes de  $\xi = \frac{1}{3}I + R_i S_i + \frac{1}{2}T^{ij}\{S_i, S_j\}$ .

Donc, pour (1), on a

$$tr_S(\rho \otimes \xi) = \rho. \quad (5.16)$$

Pour (2),

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{3}L_i \rho tr(S_i) &= 0 \\ (b) R_j L_i \rho tr(S_i S_j) &= 2\vec{R} \cdot \vec{L} \rho \\ (c) \frac{1}{2}T^{ij} L_k \rho tr(S_k \{S_i, S_j\}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Similairement, pour (3),

$$tr_S(\rho \otimes \xi \vec{L} \cdot \vec{S}) = 2\rho \vec{R} \cdot \vec{L}. \quad (5.18)$$

Pour (4),

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{3}L_i \rho L_j tr(S_i S_j) &= \frac{2}{3}L_i \rho L_i \\ (b) R_k L_i \rho L_j tr(S_i S_k S_j) &= i\epsilon_{ikj} R_k L_i \rho L_j \\ (c) \frac{1}{2}T^{kl} L_i \rho L_j tr(S_j \{S_k, S_l\} S_j) &= T^{ij} L_i \rho L_j. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pour (5),

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{3}L_i L_j \rho tr(S_i S_j) &= \frac{2}{3}l(l+1)\rho \\ (b) R_k L_i L_j \rho tr(S_i S_j S_k) &= -\vec{R} \cdot \vec{L} \rho \\ (c) \frac{1}{2}T^{kl} L_i L_j \rho tr(S_j S_j \{S_k, S_l\}) &= T^{ij} L_i L_j \rho. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Similairement, pour (6),

$$tr_S(\rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2) = \frac{2}{3}l(l+1)\rho - \rho \vec{R} \cdot \vec{L} + \rho T^{ij} L_i L_j. \quad (5.21)$$

Pour (7),

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{3}L_i L_j \rho L_k tr(S_i S_j S_k) &= -\frac{1}{3}L_i \rho L_i \\ (b) R_l L_i L_j \rho L_k tr(S_i S_j S_l S_k) &= l(l+1)\rho \vec{R} \cdot \vec{L} + L_i \vec{R} \cdot \vec{L} \rho L_i \\ (c) \frac{1}{2}T^{lm} L_i L_j \rho L_k tr(S_j S_j \{S_l, S_m\} S_k) &= -iT^{ij} \epsilon_{jkl} L_i L_k \rho L_l. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Similairement, pour (8),

$$\begin{aligned} tr_S(\vec{L} \cdot \vec{S} \rho \otimes \xi (\vec{L} \cdot \vec{S})^2) &= -\frac{1}{3} L_i \rho L_i + l(l+1) \vec{R} \cdot \vec{L} \rho \\ &+ L_i \rho \vec{R} \cdot \vec{L} L_i - iT^{ij} \varepsilon_{jkl} L_k \rho L_l L_i. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Enfin, pour (9),

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{3} L_i L_j \rho L_k L_l tr(S_i S_j S_k S_l) &= \frac{1}{3} l^2 (l+1)^2 \rho + \frac{1}{3} L_j L_i \rho L_i L_j \\ (b) R_m L_i L_j \rho L_k L_l tr(S_i S_j S_m S_l S_k) &= -l(l+1) \{ \rho, \vec{R} \cdot \vec{L} \} \\ &- i R_i \varepsilon_{ijk} L_j L_l \rho L_l L_k \\ (c) \frac{1}{2} T^{mn} L_i L_j \rho L_k L_l tr(S_j S_j \{ S_m, S_n \} S_k S_l) &= l(l+1) T^{ij} \{ L_i L_j, \rho \} \\ &- T^{ij} L_i L_k \rho L_k L_j. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Toutes ces traces ont été obtenues grâce à un calcul de trace dans le logiciel Mathematica et à des manipulations algébriques (voir Annexe D pour quelques exemples).

### 5.4.2 Forme explicite de la différence des systèmes de référence

En se servant de (5.13), de (5.14) et du calcul des traces partielles de la section précédente, on peut construire la différence explicite entre les systèmes de référence obtenus. La voici :

$$\begin{aligned}
tr_S(e^{-i\vec{L}\cdot\vec{S}\tau} \rho \otimes \xi e^{i\vec{L}\cdot\vec{S}\tau}) &= \left( |a(\tau)|^2 + \frac{2}{3}l(l+1)[a(\tau)c^*(\tau) + a^*(\tau)c(\tau)] \right. \\
&+ l^2(l+1)^2|c(\tau)|^2 \Big) \rho + \left( \frac{2}{3}|b(\tau)|^2 - \frac{1}{3}[b(\tau)c^*(\tau) + b^*(\tau)c(\tau)] \right) L_i \rho L_i \\
&+ \frac{1}{3}|c(\tau)|^2 L_j L_i \rho L_i L_j \\
&+ (2a(\tau)b^*(\tau) - a(\tau)c^*(\tau) + l(l+1)b^*(\tau)c(\tau) - l(l+1)|c(\tau)|^2) \vec{R} \cdot \vec{L} \rho \\
&+ (2a^*(\tau)b(\tau) - a^*(\tau)c(\tau) + l(l+1)b(\tau)c^*(\tau) - l(l+1)|c(\tau)|^2) \rho \vec{R} \cdot \vec{L} \\
&+ i\varepsilon_{ikj}|b(\tau)|^2 R_k L_i \rho L_j \\
&+ b^*(\tau)c(\tau) L_i \rho \vec{R} \cdot \vec{L} L_i + b(\tau)c^*(\tau) L_i \vec{R} \cdot \vec{L} \rho L_i \\
&- i|c(\tau)|^2 R_i \varepsilon_{ijk} L_j L_l \rho L_l L_k \\
&+ |b(\tau)|^2 T^{ij} L_i \rho L_j \\
&+ (a(\tau)c^*(\tau) + l(l+1)|c(\tau)|^2) T^{ij} L_i L_j \rho \\
&+ (a^*(\tau)c(\tau) + l(l+1)|c(\tau)|^2) T^{ij} \rho L_i L_j \\
&- ib(\tau)c^*(\tau) T^{ij} \varepsilon_{jkl} L_i L_k \rho L_l - ib^*(\tau)c(\tau) T^{ij} \varepsilon_{jkl} L_k \rho L_l L_i \\
&- |c(\tau)|^2 T^{ij} L_i L_k \rho L_k L_j.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

## 5.5 Différence entre les probabilités de succès

La dernière étape de notre raisonnement est de comparer les probabilités de succès des systèmes de référence obtenus par les deux différents processus. Pour y arriver, nous procéderons de manière à considérer la différence des états causés par chacun des trois termes de l'état  $\xi$  séparément. Ceci signifie que nous commencerons par considérer le  $\xi$  non cohérent, c'est-à-dire  $\xi = \frac{1}{3}I$ . Ensuite, nous considérerons des états de la forme  $\xi = \frac{1}{3}I + R_i S_i$  et, enfin, nous étudierons le cas général de  $\xi = \frac{1}{3}I + R_i S_i + \frac{1}{2}T^{ij}\{S_i, S_j\}$ .

### 5.5.1 Cas non cohérent

Si nous nous restreignons au cas où  $\xi = \frac{1}{3}I$ , nous saurons que  $R_i = T^{ij} = 0$ . Ainsi, la différence entre les états du système de référence se limitera aux termes en  $\rho$ , en  $L_i \rho L_i$  et en  $L_j L_i \rho L_i L_j$  de (5.25). Appelons respectivement chacun des trois coefficients de cette différence  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  et  $C(\tau)$ . La différence entre les probabilités de succès moyennes sera donc la sui-

vante :

$$\frac{1}{3}tr[(A(\tau)\rho + B(\tau)L_i\rho L_i + C(\tau)L_jL_i\rho L_iL_j)(\langle 1|\Pi_1|1\rangle + \langle 0|\Pi_0|0\rangle + \langle -1|\Pi_{-1}| - 1\rangle)]. \quad (5.26)$$

Comme  $\langle 1|\Pi_1|1\rangle = \frac{1}{2}\frac{(l+2)}{(2l+1)}I + \frac{(l+2)}{(l+1)(2l+1)}L_z + \frac{1}{2(l+1)(2l+1)}L_z^2$ ,  $\langle 0|\Pi_0|0\rangle = \frac{1}{l(l+1)}L_z^2$  et  $\langle -1|\Pi_{-1}| - 1\rangle = \frac{1}{2}\frac{(l-1)}{(2l+1)}I + \frac{(l-1)}{(l+1)(2l+1)}L_z + \frac{1}{2(l+1)(2l+1)}L_z^2$ , nous en arrivons à la conclusion que ce calcul nécessite de trouver les traces suivantes :

$$tr(\rho) = 1 \quad (5.27)$$

$$tr(\rho L_z) = \langle L_z \rangle \quad (5.28)$$

$$tr(\rho L_z^2) = \langle L_z^2 \rangle \quad (5.29)$$

$$tr(L_i\rho L_i) = l(l+1) \quad (5.30)$$

$$tr(L_i\rho L_i L_z) = (l(l+1) - 1)\langle L_z \rangle \quad (5.31)$$

$$tr(L_i\rho L_i L_z^2) = (l(l+1) - 3)\langle L_z^2 \rangle + l(l+1) \quad (5.32)$$

$$tr(L_jL_i\rho L_iL_j) = l^2(l+1)^2 \quad (5.33)$$

$$tr(L_jL_i\rho L_iL_jL_z) = (l(l+1) - 1)^2\langle L_z \rangle \quad (5.34)$$

$$tr(L_jL_i\rho L_iL_jL_z^2) = (l(l+1) - 3)^2\langle L_z^2 \rangle + l(l+1)(2l(l+1) - 3) \quad (5.35)$$

Il est à noter que la différence est nulle dans le cas des termes obtenus par les traces qui ne contiennent pas de  $L_z$  non sommé ( $L_z$  provenant des projecteurs), car ces termes seraient apparus aussi si nous avions voulu calculer la trace du système de référence obtenu après l'interaction. Or, comme la trace de la partie indépendante du temps donne déjà 1 (partie commune avec le système de référence obtenu par la mesure conjointe), il faut absolument que la trace sur la partie dépendante du temps soit nulle.

On peut organiser en trois termes la différence des probabilités de succès : (i) une constante, (ii) un terme en  $\langle L_z \rangle$  et (iii) un terme en  $\langle L_z^2 \rangle$ .

$$\begin{aligned} & (i) \frac{1}{2}l(l+1)B(\tau) + \frac{1}{2}l(l+1)(2l(l+1) - 3)C(\tau) \\ & (ii) \frac{2l^2 + 2l - 1}{l(l+1)(2l+1)}(A(\tau) + (l(l+1) - 1)B(\tau) + (l(l+1) - 1)^2C(\tau)) \\ & (iii) \frac{3}{2l(l+1)}(A(\tau) + (l(l+1) - 3)B(\tau) + (l(l+1) - 3)^2C(\tau)) \end{aligned}$$

Comme nous pouvons le remarquer, pour de grands  $l$ , ces trois fonctions du temps sont assez semblables.

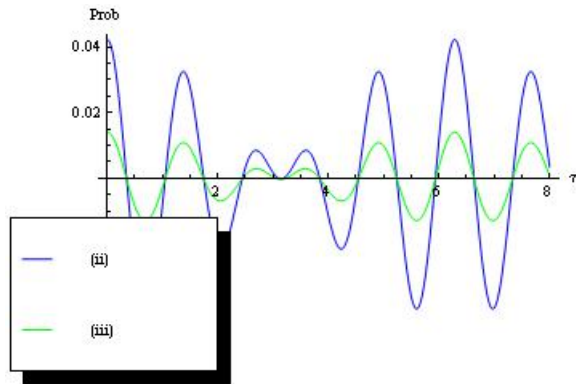


Figure 5.1 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non cohérent et avec  $l = 4$  en fonction du temps.

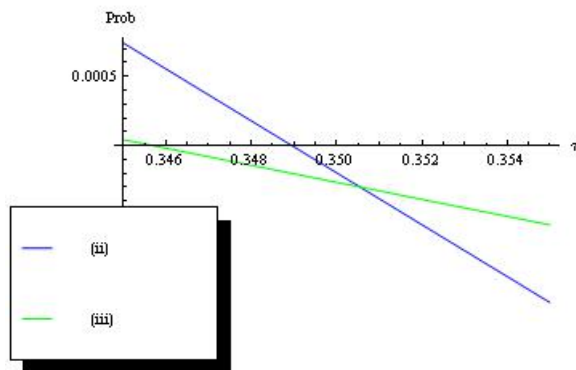


Figure 5.2 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non cohérent et avec  $l = 4$  en fonction du temps, agrandi autour d'une région d'un temps judicieux.

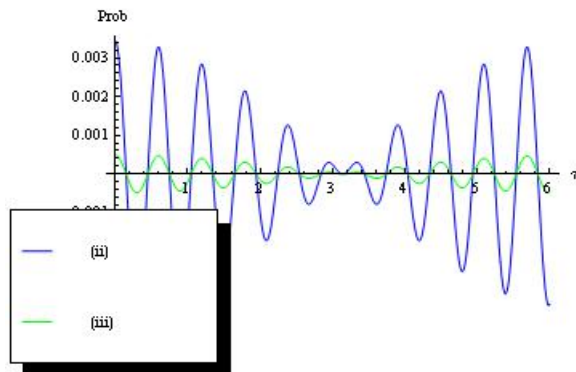


Figure 5.3 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non cohérent et avec  $l = 10$  en fonction du temps.

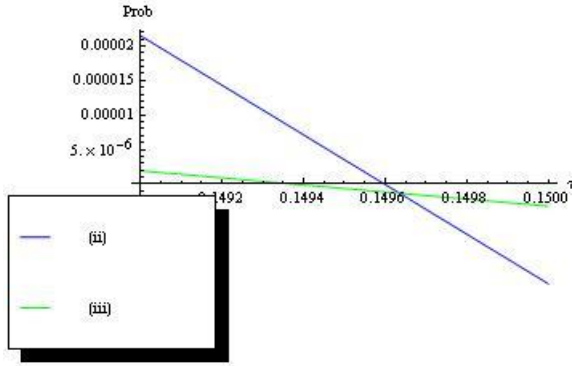


Figure 5.4 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non cohérent et avec  $l = 10$  en fonction du temps autour d'une région d'un temps judicieux.

Ainsi, en choisissant un temps d'interaction intelligent, ces trois coefficients peuvent être très près de 0. De plus, en regardant de plus près (i), nous nous apercevons qu'il s'agit de la même fonction que (iii) à une constante négative près ( $-\frac{2}{3}l(l+1)$ ). Elles auront donc exactement les mêmes racines, ce qui est suffisant pour qu'une analyse graphique de (ii) et (iii) nous fournissent le bon choix de temps d'interaction.

Dans les figures 5.2 et 5.4, nous pouvons constater qu'il est possible de choisir le temps d'interaction de telle sorte que les coefficients soient de l'ordre de  $10^{-4}$  pour  $l = 4$  et de l'ordre de  $10^{-6}$  pour  $l = 10$ . Afin de connaître l'ordre de grandeur de la différence de probabilités, il faudra multiplier ces coefficients par les bons facteurs. Pour (i), nous savons qu'il n'est le coefficient d'aucune moyenne, il suffit donc de multiplier l'ordre de grandeur de (iii) par  $l(l+1)$  pour connaître son effet sur la probabilité : si  $l = 4$ , son ordre de grandeur est de  $10^{-3}$  et si  $l = 10$ , son ordre de grandeur est de  $10^{-4}$ . De plus, nous savons que (ii) multiplie  $\langle L_z \rangle$  qui sera, aux extrema, égal à  $\pm l$ . Donc, si  $l = 4$ , nous aurons un terme de l'ordre de  $10^{-4}$  et si  $l = 10$ , un terme de l'ordre de  $10^{-5}$ . Aussi, sachant que (iii) multiplie  $\langle L_z^2 \rangle$  qui est, aux extrema, égal  $l^2$ , nous savons que nous aurons un terme de l'ordre de  $10^{-2}$  pour  $l = 4$  et de  $10^{-4}$  pour  $l = 10$ . Ainsi, la contribution dominante proviendra du terme multiplié par (iii) et la différence de probabilité sera de l'ordre  $10^{-2}$  pour  $l = 4$  et de  $10^{-4}$  pour  $l = 10$ . Ainsi, pour de petits  $l$ , on voit une différence de probabilité non négligeable, différence qui s'atténue pour de plus grands  $l$ .

De plus, si nous nous intéressons aux probabilités de succès individuelles (la probabilité de succès qui résulterait de la mesure d'un moment cinétique  $|i\rangle\langle i|$ ), nous aurions les mêmes trois fonctions à un facteur près (d'ordre  $l^0$ ), sauf pour  $|0\rangle\langle 0|$ , où nous n'aurions que la fonction (iii) à un facteur près (d'ordre  $l^0$ ), ce qui ne nous impose aucune nouvelle contrainte.

Enfin, nous pouvons déjà remarquer que dans le cas du moment cinétique  $\frac{1}{2}$  non polarisé, la différence des probabilités de succès est nulle pour un bon choix de temps d'interaction,



contrairement au cas présent. En fait, pour le temps d'interaction approprié, la différence entre les états du système de référence était déjà nulle (avant de calculer les probabilités de succès). Ceci nous donne de bonnes raisons de croire que la quasi-équivalence dans le cas du moment cinétique  $\frac{1}{2}$  n'est pas généralisable ou, du moins, qu'elle ne l'est pas facilement.

### 5.5.2 Cas polarisé non général

Dans cette sous-section, nous tiendrons compte des états  $\xi$  de la forme  $\frac{1}{3}I + R_i S_i$  pour le calcul de la différence des probabilités de succès. Pour la suite du développement, nous placerons l'axe des  $z$  dans la même direction que  $\vec{R}$ . Ainsi,  $\xi = \frac{1}{3}I + R_3 S_3$ . Ceci signifie que les états propres  $|-1\rangle$ ,  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  seront définis à partir de cet axe des  $z$ . Ce choix est effectué, car il est le seul qui permet une différence nulle des probabilités de succès dans le cas du moment cinétique  $\frac{1}{2}$ , ce qui est un bon indice de l'impossibilité d'une quasi-équivalence dans le cas présent sans ce choix d'axe.

Sachant que notre choix de  $\xi$  implique que  $T^{ij} = 0$ , nous savons que la différence des états du système de référence se limitera aux neuf premiers termes de (5.25) (les trois premiers considérés dans la sous-section précédente et six nouveaux termes). De ces six nouveaux termes, un est en  $R_3 L_z \rho$ , un autre en  $\rho R_3 L_z$ , un en  $\varepsilon_{i3j} R_3 L_i \rho L_j$ , un en  $L_i \rho R_3 L_z L_i$ , un autre en  $L_i R_3 L_z \rho L_i$  et un en  $R_3 \varepsilon_{ijk} L_j L_i \rho L_k L_z$ . Maintenant, appelons respectivement les coefficients de chacun de ces termes  $D(\tau)$ ,  $D^*(\tau)$ ,  $E(\tau)$ ,  $F(\tau)$ ,  $F^*(\tau)$  et  $G(\tau)$ . Voici, pour cette fois, les nouvelles traces à calculer. En sachant que la contribution des termes obtenus par les traces qui ne contiennent pas de  $L_z$  issus des projecteurs est nulle (par le même argument qu'à la sous-section précédente), voici les nouvelles traces à calculer :

$$R_3 \text{tr}(L_z \rho L_z) = R_3 \langle L_z^2 \rangle \quad (5.36)$$

$$R_3 \text{tr}(L_z \rho L_z^2) = R_3 \langle L_z^3 \rangle = R_3 \text{tr}(L_z^2 \rho L_z) \quad (5.37)$$

$$R_3 \varepsilon_{i3j} \text{tr}(L_i \rho L_j L_z) = 2i R_3 \langle L_z^2 \rangle - i R_3 l(l+1) \quad (5.38)$$

$$R_3 \varepsilon_{i3j} \text{tr}(L_i \rho L_j L_z^2) = 3i R_3 \langle L_z^3 \rangle - i(2l(l+1) - 1) R_3 \langle L_z \rangle \quad (5.39)$$

$$R_3 \text{tr}(L_i \rho L_z L_i L_z) = (l(l+1) - 1) R_3 \langle L_z^2 \rangle = R_3 \text{tr}(L_i L_z \rho L_i L_z) \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} R_3 \text{tr}(L_i \rho L_z L_i L_z^2) &= (l(l+1) - 3) R_3 \langle L_z^3 \rangle + R_3 l(l+1) \langle L_z \rangle \\ &= R_3 \text{tr}(L_i L_z \rho L_i L_z^2) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$R_3 \varepsilon_{ijk} \text{tr}(L_j L_i \rho L_k L_z) = il(l+1)(l(l+1) - 2) R_3 - 2i R_3 (l(l+1) - 3) \langle L_z^2 \rangle \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} R_3 \varepsilon_{ijk} \text{tr}(L_j L_i \rho L_k L_z^2) &= -3i(l(l+1) - 6) R_3 \langle L_z^3 \rangle + 2i(l^2(l+1))^2 \\ &\quad - 6l(l+1) + 2) R_3 \langle L_z \rangle. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ces calculs ont été effectués en utilisant la propriété cyclique des traces et en utilisant (3.1) et (3.2) (pour des exemples de calcul, voir Annexe E).

Nous pouvons organiser ces nouveaux termes qui contribuent à la différence des probabilités de succès de la façon suivante : (iv) un terme en  $R_3$ , (v) un terme en  $R_3\langle L_z^2 \rangle$ , (vi) un terme en  $R_3\langle L_z \rangle$  et (vii) un terme en  $R_3\langle L_z^3 \rangle$ .

$$\begin{aligned}
& \text{(iv)} \frac{(2l^2 + 2l - 1)}{l(l+1)(2l+1)} (-il(l+1)E + il(l+1)(l(l+1) - 2)G) \\
& \text{(v)} \frac{(2l^2 + 2l - 1)}{l(l+1)(2l+1)} (D + D^* + 2iE + i(l(l+1) - 1)(F + F^*) \\
& \quad - 2i(l(l+1) - 3)G) \\
& \text{(vi)} \frac{3}{2l(l+1)} (-i(2l(l+1) - 1)E + l(l+1)(F + F^*) + 2i(l^2(l+1)^2 \\
& \quad - 6l(l+1) + 2)G) \\
& \text{(vii)} \frac{3}{2l(l+1)} (D + D^* + 3iE + (l(l+1) - 3)(F + F^*) - 3i(l(l+1) - 6)G)
\end{aligned}$$

Encore une fois, nous pouvons constater qu'il existe des temps d'interaction judicieux qui permettent de rendre simultanément les différents coefficients de la différence des probabilités de succès assez près de 0 et ce, même en considérant les trois coefficients calculés dans la sous-section précédente.

En effet, dans le cas de  $l = 4$ , nous remarquons (figure 5.6) que les coefficients peuvent être choisis autour de  $10^{-3}$  et, dans le cas de  $l = 10$  (figure 5.8), les coefficients peuvent être choisis autour de  $10^{-4}$ .

Cependant, quand arrive le moment de considérer la probabilité totale, nous sommes contraints de remarquer que ce résultat encourageant n'est plus aussi convaincant. En effet, comme un terme est multiplié par  $\langle L_z \rangle$ , un autre par  $\langle L_z^2 \rangle$  et un troisième par  $\langle L_z^3 \rangle$ , nous sommes obligés de remarquer que la différence de probabilité pourra atteindre des ordres assez grands<sup>2</sup> : 0, 1 pour  $l = 4$  et  $10^{-2}$  pour  $l = 10$ . Cette différence est considérable et difficilement négligeable.

Ensuite, encore une fois, le fait de ne considérer que les probabilités de succès individuelles n'ajoute aucune nouvelle contrainte, car nous devons travailler avec les même quatre fonctions, à un facteur près.

Enfin, dans le cas du moment cinétique  $\frac{1}{2}$ , la différence des probabilités de succès est complètement annulée (pour un temps d'interaction judicieux) pour le même choix de l'axe des  $z$ , ce qui n'est, de toute évidence, pas vraiment le cas pour le moment cinétique  $s = 1$ .

<sup>2</sup>Il est à noter que nous considérons que  $R_3$  est d'ordre 1.

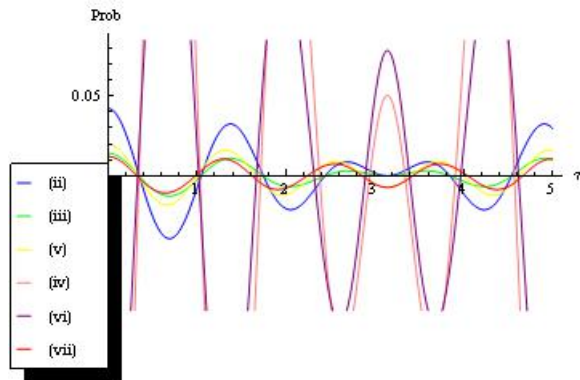


Figure 5.5 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non général et avec  $l = 4$  en fonction du temps.

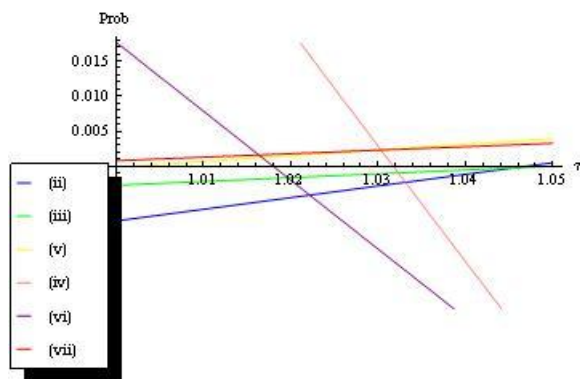


Figure 5.6 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non général et avec  $l = 4$  en fonction du temps, agrandi autour d'une région d'un temps judiciaire.

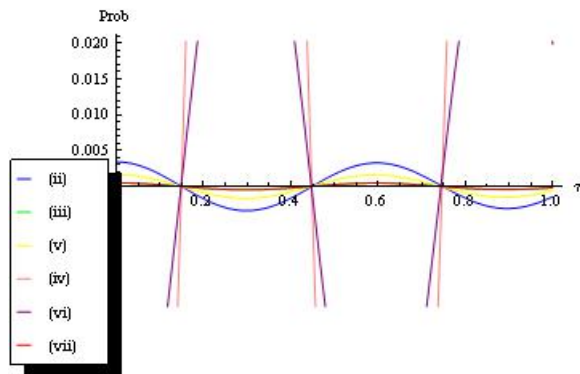


Figure 5.7 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non général et avec  $l = 10$  en fonction du temps.

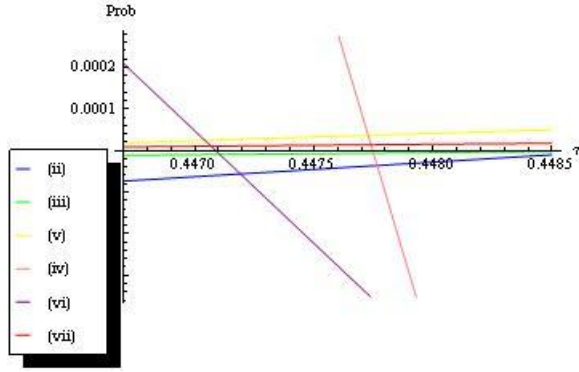


Figure 5.8 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas non général et avec  $l = 10$  en fonction du temps autour d’une région d’un temps judiciaire.

En fait, dans le cas présent, la possibilité d’un choix d’un temps d’interaction judiciaire permettant de minimiser la différence des probabilités semble accidentelle, même impossible. Ainsi, il pourrait s’avérer très difficile de généraliser à de plus grands moments cinétiques la quasi-équivalence des modèles.

### 5.5.3 Cas général

Cette fois, nous tiendrons compte d’états  $\xi$  complètement généraux :  $\xi = \frac{1}{3}I + R_i S_i + \frac{1}{2}T^{ij}\{S_i, S_j\}$ . Ainsi, nous devons considérer la différence générale des états du système de référence ((5.25) en entier). Cette considération générale nous conduit à l’analyse de six nouveaux termes : un en  $T^{ij}L_i\rho L_j$ , un en  $T^{ij}L_iL_j\rho$ , un autre en  $T^{ij}\rho L_iL_j$ , un en  $T^{ij}\varepsilon_{jkl}L_iL_k\rho L_l$ , un autre en  $T^{ij}\varepsilon_{jkl}L_k\rho L_lL_i$  et un en  $T^{ij}L_iL_k\rho L_kL_j$ . Nous attribuerons respectivement à chacun des coefficients de ces termes les étiquettes suivantes :  $H(\tau)$ ,  $K(\tau)$ ,  $K^*(\tau)$ ,  $iM(\tau)$ ,  $iM^*(\tau)$  et  $N(\tau)$ . Voici, pour ces six termes, les traces à calculer (toujours en tenant compte du fait que la

contribution totale des traces ne contenant pas de  $L_z$  issus des projecteurs est nulle) :

$$T^{ij}tr(L_i\rho L_j L_z) = T^{ij}\langle L_j L_z L_i \rangle = T^{ij}\langle L_i L_z L_j \rangle \quad (5.44)$$

$$T^{ij}tr(L_i\rho L_j L_z^2) = T^{ij}\langle L_j L_z^2 L_i \rangle = T^{ij}\langle L_i L_z^2 L_j \rangle \quad (5.45)$$

$$T^{ij}tr(\rho L_i L_j L_z) = T^{ij}\langle L_i L_j L_z \rangle \quad (5.46)$$

$$T^{ij}tr(\rho L_i L_j L_z^2) = T^{ij}\langle L_i L_j L_z^2 \rangle \quad (5.47)$$

$$T^{ij}tr(L_i L_j \rho L_z) = T^{ij}\langle L_z L_i L_j \rangle \quad (5.48)$$

$$T^{ij}tr(L_i L_j \rho L_z^2) = T^{ij}\langle L_z^2 L_i L_j \rangle \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}\varepsilon_{jkl}tr(L_i L_k \rho L_l L_z) &= iT^{i3}(l(l+1)-1)\langle L_i \rangle - 2iT^{ij}\langle L_z L_i L_j \rangle \\ &\quad - iT^{ij}\langle L_i L_j L_z \rangle \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}\varepsilon_{jkl}tr(L_i L_k \rho L_l L_z^2) &= iT^{i3}(2l(l+1)-1)\langle L_z L_i \rangle - 2iT^{ij}\langle L_i L_z^2 L_j \rangle \\ &\quad - iT^{ij}\langle L_z^2 L_i L_j \rangle - iT^{ij}\langle L_z L_i L_z L_j \rangle \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}\varepsilon_{jkl}tr(L_k \rho L_l L_i L_z) &= iT^{i3}(l(l+1)-1)\langle L_i \rangle - 2iT^{ij}\langle L_i L_j L_z \rangle \\ &\quad - iT^{ij}\langle L_z L_i L_j \rangle \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}\varepsilon_{jkl}tr(L_k \rho L_l L_i L_z^2) &= iT^{i3}(2l(l+1)-1)\langle L_i L_z \rangle - 2iT^{ij}\langle L_i L_z^2 L_j \rangle \\ &\quad - iT^{ij}\langle L_i L_j L_z^2 \rangle - iT^{ij}\langle L_i L_z L_j L_z \rangle \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}tr(L_i L_k \rho L_k L_j L_z) &= T^{i3}(2l(l+1)-1)\langle L_i \rangle + T^{ij}(l(l+1)-2)\langle L_i L_z L_j \rangle \\ &\quad - 2T^{ij}\langle \{L_z, L_i L_j\} \rangle \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}tr(L_i L_k \rho L_k L_j L_z^2) &= T^{ij}l(l+1)\langle L_i L_j \rangle + T^{i3}(2l(l+1)-1)\langle \{L_i, L_z\} \rangle \\ &\quad + T^{ij}(l(l+1)-6)\langle L_i L_z^2 L_j \rangle - T^{ij}\langle \{L_z^2, L_i L_j\} \rangle - T^{ij}\langle L_i L_z L_j L_z \rangle \\ &\quad - T^{ij}\langle L_z L_i L_z L_j \rangle \end{aligned} \quad (5.55)$$

Ces traces ont été obtenues grâce à la propriété cyclique de la trace et grâce aux équations (3.1) et (3.2) (pour un exemple, voir Annexe E).

On peut maintenant organiser ces nouveaux termes qui contribuent à la différences des probabilités de succès de la façon suivante : (viii) un terme en  $T^{i3}\langle L_i \rangle$ , (ix) un terme en  $T^{ij}\langle L_i L_z L_j \rangle$ , (x) un terme en  $T^{ij}\langle L_i L_j L_z \rangle$ , (xi) un terme en  $T^{ij}\langle L_z L_i L_j \rangle$ , (xii) un terme en  $T^{ij}\langle L_i L_j \rangle$ , (xiii) un terme en  $T^{i3}\langle L_i L_z \rangle$ , (xiv) un terme en  $T^{i3}\langle L_z L_i \rangle$ , (xv) un terme en  $T^{ij}\langle L_i L_z^2 L_j \rangle$ , (xvi) un terme en  $T^{ij}\langle L_i L_j L_z^2 \rangle$ , (xvii) un terme en  $T^{ij}\langle L_z^2 L_i L_j \rangle$ , (xviii) un terme en  $T^{ij}\langle L_i L_z L_j L_z \rangle$  et (xix) un

terme en  $T^{ij}\langle L_z L_i L_z L_j \rangle$ .

$$\begin{aligned}
& \text{(viii)} \frac{(2l^2 + 2l - 1)}{l(l+1)(2l+1)} (i(l(l+1) - 1)(iM + iM^*) + (2l(l+1) - 1)N) \\
& \text{(ix)} \frac{(2l^2 + 2l - 1)}{l(l+1)(2l+1)} (H + (l(l+1) - 2)N) \\
& \text{(x)} \frac{(2l^2 + 2l - 1)}{l(l+1)(2l+1)} (K^* - i(iM + 2iM^*) - 2N) \\
& \text{(xi)} \frac{(2l^2 + 2l - 1)}{l(l+1)(2l+1)} (K + i(2iM + iM^*) - 2N) \\
& \text{(xii)} \frac{3}{2}N \\
& \text{(xiii)} \frac{3}{2l(l+1)} (i(2l(l+1) - 1)iM + (2l(l+1) - 1)N) \\
& \text{(xiv)} \frac{3}{2l(l+1)} (i(2l(l+1) - 1)iM^* + (2l(l+1) - 1)N) \\
& \text{(xv)} \frac{3}{2l(l+1)} (H - 2i(iM + iM^*) + (l(l+1) - 6)N) \\
& \text{(xvi)} \frac{3}{2l(l+1)} (K^* + M^* - N) \\
& \text{(xvii)} \frac{3}{2l(l+1)} (K + M - N) \\
& \text{(xviii)} \frac{3}{2l(l+1)} (M^* - N) \\
& \text{(xix)} \frac{3}{2l(l+1)} (M - N)
\end{aligned}$$

À première vue, il pourrait sembler aberrant d'avoir certains coefficients qui soient complexes, car la différence de probabilités doit absolument être réelle. Cependant, chaque coefficient complexe ((x), (xi), (xiii), (xiv), (xvi), (xvii), (xviii) et (xix)) multiplie une moyenne complexe. De plus, ces termes complets (coefficient et moyenne), lorsqu'ils sont additionnés, perdent leur partie imaginaire, car chaque terme est ajouté à son conjugué complexe. Par exemple, le terme relié à (xiii) est le conjugué complexe du terme relié à (xix) :

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2l(l+1)} (M^* - N) T^{ij} \langle L_i L_z L_j L_z \rangle + \frac{3}{2l(l+1)} (M - N) T^{ij} \langle L_z L_i L_z L_j \rangle \\
& = \frac{3}{2l(l+1)} ((M - N)^* T^{ij} \langle L_i L_z L_j L_z \rangle + (M - N) T^{ij} \langle L_j L_z L_i L_z \rangle^*) \\
& = \frac{3}{2l(l+1)} ((M - N)^* T^{ij} \langle L_i L_z L_j L_z \rangle + (M - N) T^{ji} \langle L_j L_z L_i L_z \rangle^*) \\
& = \frac{3}{2l(l+1)} T^{ij} ((M - N)^* \langle L_i L_z L_j L_z \rangle + (M - N) \langle L_i L_z L_j L_z \rangle^*) \\
& = \frac{3}{2l(l+1)} T^{ij} 2\Re((M - N)^* \langle L_i L_z L_j L_z \rangle).
\end{aligned}$$

Ainsi, il devient apparent que l'analyse des coefficients ne devra s'intéresser qu'à la norme. Ceci nous libère de quatre des nouveaux coefficients. De plus, il est à noter que les coefficients (xiii) et (xiv) sont à un facteur près

$(2l(l+1) - 1)$  les mêmes que les coefficients (xiii) et (xix), ce qui nous épargne l'analyse d'un cinquième coefficient.

Cette fois, nous pouvons remarquer qu'il est plus difficile de concilier tous les coefficients afin qu'ils soient tous très près de 0 pour un temps d'interaction donné. En effet, la norme du coefficient (viii) est décalée dans le temps par rapport aux autres et ne permet pas un choix aussi judicieux que pour les deux sous-sections précédentes.

Cette fois, dès le premier coup d'oeil aux figures 5.10 et 5.12, nous nous apercevons que les coefficients ne peuvent être choisis suffisamment près de 0. En effet, pour  $l = 4$ , les meilleurs choix fixent les coefficients autour de  $10^{-2}$  et autour de  $10^{-3}$  pour  $l = 10$ . Ainsi, en tenant compte de moyennes qui multiplient ces coefficients, nous obtenons une différence de probabilité significative. Cependant, il existe peut-être un choix des  $T^{ij}$  qui permettrait de trouver une différence de probabilité plus petite, mais considérant le fait que la quasi-équivalence semble déjà très improbable dès l'analyse de la sous-section précédente, ce choix n'est peut-être pas nécessaire pour les fins de ce mémoire.

Après l'obtention de ces résultats, il devient manifeste que le cas de  $s = 1$  n'est pas du tout aussi favorable que le cas de  $s = \frac{1}{2}$ , car il n'existe pas de choix d'axes qui permettent à la différence des probabilités de s'annuler, contrairement au cas de  $s = \frac{1}{2}$ . Ceci nous permet de conclure que la quasi-équivalence entre la mesure conjointe et l'interaction n'est pas généralisable pour un moment cinétique  $s$  plus grand que  $\frac{1}{2}$ , du moins, pas par rapport aux probabilités de succès.

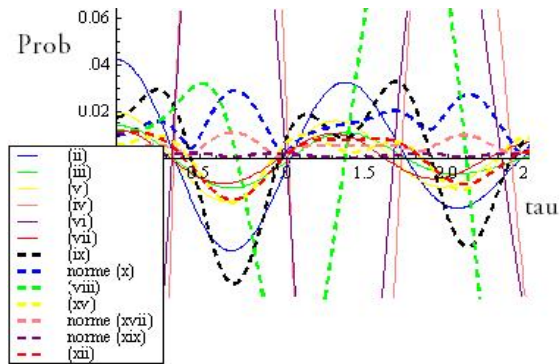


Figure 5.9 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas général et avec  $l = 4$  en fonction du temps.

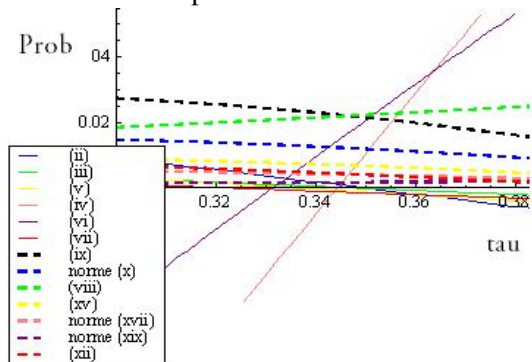


Figure 5.10 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas général et avec  $l = 4$  en fonction du temps, agrandi autour d'une région d'un temps judiciaire.

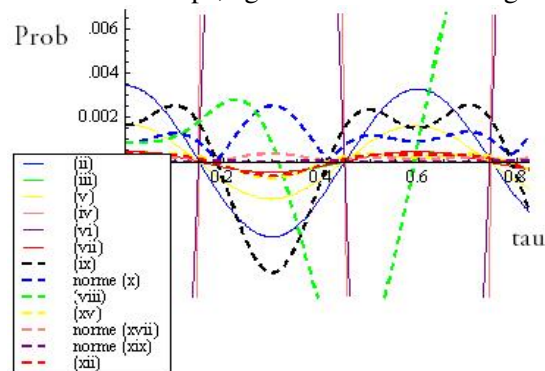


Figure 5.11 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas général et avec  $l = 10$  en fonction du temps.



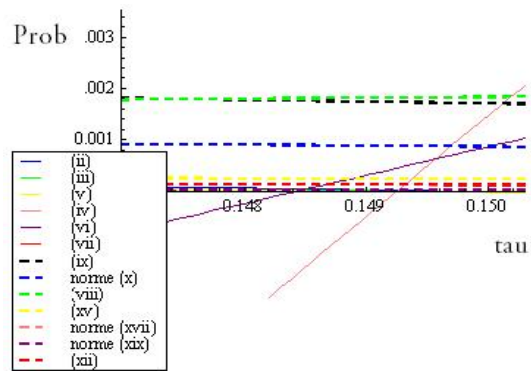


Figure 5.12 – Coefficients de la différence de probabilité pour le cas général et avec  $l = 10$  en fonction du temps autour d'une région d'un temps judiciaire.



## CHAPITRE 6

### CONCLUSION

Le principal objectif du travail sous-jacent au présent mémoire était d'approfondir la compréhension que nous avons des systèmes de référence quantiques impliqués dans la mesure de moments cinétiques quantiques. Pour ce faire, il fallait, tout d'abord, établir le contexte dans lequel s'inscrirait le travail de recherche, c'est-à-dire comprendre où la communauté scientifique en est arrivée dans ce domaine à ce jour. Ce portrait a été dressé dans le chapitre 1. Ensuite, pour être en mesure de comprendre les différents résultats antécédents à notre travail de recherche et pour nous habiliter à développer une contribution originale, il fallait recenser et comprendre une multitude de concepts physiques et mathématiques, présentés dans le chapitre 2. L'étape suivante était d'analyser les différents résultats antérieurs concernant la mesure du moment cinétique de  $s = \frac{1}{2}$ . D'une part, l'analyse du comportement du système de référence quantique lors de mesures successives de moments cinétiques de  $s = \frac{1}{2}$  non polarisés (chapitre 3) nous a permis de bien intégrer les outils et indicateurs de longévité et d'efficacité. D'autre part, l'étude du même système de référence quantique dans le même contexte de mesures successives, mais, cette fois, pour des moments cinétiques de  $s = \frac{1}{2}$  généraux (chapitre 4), nous a permis de comprendre un phénomène un peu plus général et nous a donné une piste intéressante à explorer. Cette piste est celle de la comparaison entre l'interaction hamiltonienne entre le système de référence et le moment cinétique et la mesure du moment cinétique pour le cas d'un moment cinétique plus grand.

La contribution originale présentée dans ce mémoire apparaît dans le chapitre 3 et dans le chapitre 5. Premièrement, dans le chapitre 3, une démonstration formelle et complète de l'état initial idéal du système de référence est présentée. Cet état initial permet d'obtenir des résultats de mesure le plus près possible de ce que le système de référence classique fournirait et ce, pour le plus grand nombre de mesures possibles. Ensuite, dans le chapitre 5, un calcul particulier de l'interaction entre le système de référence et le moment cinétique de  $s = 1$  est présenté. Il y est également question de la comparaison des effets qu'ont la mesure du moment cinétique de  $s = 1$  et cette interaction sur le système de référence. Cette comparaison s'articule autour de la concordance des systèmes de référence quantiques (l'un ayant subi l'interaction et l'autre la mesure) avec un système de référence classique. Malheureusement, cette comparaison nous conduit à la conclusion que, contrairement au cas du moment cinétique de  $s = \frac{1}{2}$ , les effets des deux processus sont relativement différents. Ainsi, il serait surprenant, ou semblerait accidentel, que cette ressemblance apparaisse pour de plus grands moments cinétiques.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Amhadi, D. Jennings et T. Rudolph : Dynamics of a quantum reference frame undergoing selective measurements and coherent interactions. *arXiv :1005.0798v1 [quant-ph]*, May 2010.
- [2] R. M. Angelo, N. Brunner, S. Popescu, A. J. Short et P. Skrzypczyk : Physics within a quantum reference frame. *arXiv :1007.2292v1 [quant-ph]*, July 2010.
- [3] A. Aspect, J. Dalibard et G. Roger : Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Review Letters*, 49 : 1804-1807, 1982.
- [4] A. Aspect, P. Grangier et G. Roger : Experimental test of realistic local theories via Bell's theorem. *Phys. Review Letters*, 47 : 460-463, 1981.
- [5] A. Aspect, P. Grangier et G. Roger : Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment : A new violation of Bell's inequalities. *Phys. Review Letters*, 49 : 91-94, 1982.
- [6] S. D. Bartlett, T. Rudolph et R. W. Spekkens : Reference frames, superselection rules, and quantum information. *arXiv :quant-ph/0610030v2*, April 2007.
- [7] S. D. Bartlett, T. Rudolph, R. W. Spekkens et P. S. Turner : Degradation of a quantum reference frame. *New J. Phys.*, 8(4) : 58, 2006.
- [8] J. S. Bell : On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1 : 195-200, 1964.
- [9] J. S. Bell : On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38(3) : 447-452, 1966.
- [10] C. H. Bennett et G. Brassard : Quantum cryptography : public key distribution and coin tossing. *International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, December 1984.
- [11] N. Bohr : Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Rev.*, 48 : 696-702, October 1935.
- [12] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë : *Mécanique Quantique*. Hermann, 1977.
- [13] D. Deutsch : Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 400 : 97-117, 1985.

- [14] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen : Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Rev.*, 47(10) : 777-780, May 1935.
- [15] R. P. Feynman : Simulating Physics with Computers. *International J. of Theoretical Phys.*, 21(6/7) : 467-488, 1982.
- [16] S. Gasiorowicz : *Quantum Physics*. Jonh Wiley and Sons, Inc., 2003.
- [17] P. Kaye, R. Laflamme et M. Mosca : *An Introduction to Quantum Computing*. Oxford University press, 2007.
- [18] O. Landon-Cardinal et R. MacKenzie : Decoherence suppression via environment preparation. *Phys. Rev. A*, 022333 : 85, 2012.
- [19] R. MacKenzie, M. Pineault, L. Renaud-Desjardins : Optimizing adiabaticity in quantum mechanics. *Canadian J. Phys.*, 187 : 90, 2012.
- [20] N. D. Mermin : *Quantum Computer Science : An Introduction*. Cambrige University Press, 2007.
- [21] M. A. Nielsen et I. L. Chuang : *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [22] D. Poulin et J. Yard : Dynamics of a quantum reference frame. *New J. Phys.*, 9(5) : 156, 2007.
- [23] J. J. Sakurai : *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [24] W. Wootters et W. Zurek : A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299, 1982.

## Annexe I

### Unicité des états à distribution déterministe

Est-ce possible d'avoir un état à diagonale nulle sauf pour une composante qui n'ait pas toutes ses composantes hors diagonales nulles ? Pour la démarche suivante, nous supposons, sans perte de généralité, que nous avons un état aligné positivement avec l'axe des  $z$ , c'est-à-dire qu'il possède un 1 à la position  $ll$  et que toutes les autres entrées diagonales sont nulles.

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{k,j=-l}^l \alpha_{kj} |l,k\rangle \langle l,j| \\ &= |l,l\rangle \langle l,l| + \sum_{k \neq j} \alpha_{kj} |l,k\rangle \langle l,j|\end{aligned}$$

Comme  $\rho$  est déjà de trace un et comme il suffit que  $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}^*$  pour que  $\rho$  soit hermitien, il ne faut vérifier que la propriété positive de  $\rho$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | \rho | \psi \rangle &= \sum_{m,i=-l}^l \beta_m \beta_i^* \langle l,i | \rho | l,m \rangle \quad \text{où } |\psi\rangle = \sum_m \beta_m |l,m\rangle \\ &= |\beta_l|^2 + \sum_{m,i,k \neq j} \alpha_{kj} \beta_m \beta_i^* \delta_{ki} \delta_{jm} \\ &= |\beta_l|^2 + \sum_{k \neq j} \alpha_{kj} \beta_j \beta_k^* \\ &= |\beta_l|^2 + 2 \sum_{k > j} \Re e(\alpha_{kj} \beta_j \beta_k^*) \\ &= |\beta_l|^2 + 2 \sum_{k > j} |\alpha_{kj}| |\beta_j| |\beta_k| \cos(\theta_{kj} + \theta_j - \theta_k)\end{aligned}$$

où  $\theta_{kj}$  et  $\theta_j$  sont respectivement les phases complexes de  $\alpha_{kj}$  et  $\beta_j$ . De plus, si nous supposons qu'il existe au moins un  $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}^*$  non nul et que, sans perte de généralité, il s'agit de  $\alpha_{-l,l-1}$ , il faudra que cet état soit un état positif pour tous les  $|\psi\rangle$ . Choisissons

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } j = -l \\ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} & \text{si } j = l-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors,  $\langle \psi | \rho | \psi \rangle = |\alpha_{-l,l-1}| \cos(\theta_{-l,l-1} + \theta)$  il suffira de choisir un  $\theta$  tel que  $\langle \psi | \rho | \psi \rangle < 0$ . Ainsi, pour un état maximalement aligné, toutes les composantes hors diagonales doivent être nulles pour respecter la propriété positive des états. Alors, les états maximalement alignés sont uniques.





## Annexe II

### Décomposition équivalente de $\rho^{(n+1)}$

Vérifions que  $\rho^{(n+1)}$  en termes des  $E_i$  de (4.5) est le même  $\rho^{(n+1)}$  que celui de (4.2).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 E_i \rho^{(n)} E_i^\dagger &= \frac{1}{2(2l+1)^2} ((2l+1)^2 + 1 - 4n_3^2) \rho^{(n)} + \frac{2}{(2l+1)^2} (1 - 4n_3^2) L_y \rho^{(n)} L_y \\
&+ \frac{2}{(2l+1)^2} (L_z^\theta + 2in_3 \sin \theta L_y + n_3 \cos \theta) \rho^{(n)} (L_z^\theta - 2in_3 \sin \theta L_y + n_3 \cos \theta) \\
&+ \frac{2}{(2l+1)^2} (L_x^\theta + 2in_3 \cos \theta L_y - n_3 \sin \theta) \rho^{(n)} (L_x^\theta - 2in_3 \cos \theta L_y - n_3 \sin \theta) \\
&= \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - 4n_3^2}{2(2l+1)^2} \right) \rho^{(n)} + \frac{2}{(2l+1)^2} (1 - 4n_3^2) L_y \rho^{(n)} L_y \\
&+ \frac{2}{(2l+1)^2} [L_z^\theta \rho^{(n)} L_z^\theta + L_x^\theta \rho^{(n)} L_x^\theta + 4n_3^2 L_y \rho^{(n)} L_y + n_3^2 \rho^{(n)} \\
&+ 2in_3 \sin \theta (L_y \rho^{(n)} L_z^\theta - L_z^\theta \rho^{(n)} L_y) + n_3 \cos \theta (L_z^\theta \rho^{(n)} + \rho^{(n)} L_z^\theta) \\
&+ 2in_3 \cos \theta (L_y \rho^{(n)} L_x^\theta - L_x^\theta \rho^{(n)} L_y) - n_3 \sin \theta (L_x^\theta \rho^{(n)} + \rho^{(n)} L_x^\theta) \\
&= \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - 4n_3^2}{2(2l+1)^2} \right) \rho^{(n)} + \frac{2}{(2l+1)^2} L_z \rho^{(n)} L_z + \frac{2n_3^2}{(2l+1)^2} \rho^{(n)} \\
&+ \frac{1}{(2l+1)^2} (L_+ \rho^{(n)} L_- + L_- \rho^{(n)} L_+) \\
&+ \frac{2}{(2l+1)^2} [2i \sin \theta (L_y \rho^{(n)} (\sin \theta L_x + \cos \theta L_z) - (\sin \theta L_x + \cos \theta L_z) \rho^{(n)} L_y) \\
&+ 2in_3 \cos \theta (L_y \rho^{(n)} (\cos \theta L_x - \sin \theta L_z) - (\cos \theta L_x + \sin \theta L_z) \rho^{(n)} L_y) \\
&+ n_3 \cos \theta (\rho^{(n)} (\sin \theta L_x + \cos \theta L_z) + (\sin \theta L_x + \cos \theta L_z) \rho^{(n)}) \\
&- n_3 \sin \theta (\rho^{(n)} (\cos \theta L_x - \sin \theta L_z) + (\cos \theta L_x + \sin \theta L_z) \rho^{(n)}) \\
&= \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - 4n_3^2}{2(2l+1)^2} \right) \rho^{(n)} + \frac{2}{(2l+1)^2} (L_z + n_3) \rho^{(n)} (L_z + n_3) \\
&+ \frac{1 + 2n_3}{(2l+1)^2} L_+ \rho^{(n)} L_- + \frac{1 - 2n_3}{(2l+1)^2} L_- \rho^{(n)} L_+ = \rho^{(n+1)}
\end{aligned}$$



## Annexe III

### Approximation des grands $l$ et d'état semi classique

Voyons comment se réduit  $\langle L_x^{\theta(n)}(n+1) \rangle$  et  $\langle L_z^{\theta(n)}(n+1) \rangle$  si  $l \gg 1$  et que  $L_z^{\theta(n)} \rho^{(n)} \approx lr(n) \rho^{(n)}$ . Commençons par  $\langle L_x^{\theta(n)}(n+1) \rangle$ .

$$\begin{aligned}
 \langle L_x^{\theta}(n+1) \rangle &= -\frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \cos \theta \overbrace{\langle L_x^{\theta} L_z^{\theta} \rangle}^{\approx 0} - \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \sin \theta (l(l+1) - \langle (L_x^{\theta})^2 \rangle) \\
 &\approx \frac{4n_3}{(2l+1)^2} \sin \theta (l(l+1) - \frac{1}{2}(l(l+1) - l^2 r^2)) \\
 &= -\frac{n_3}{2(1+1/2l^2)} \sin \theta (1 + \frac{1}{l} + r^2) \\
 &\approx -\frac{(1+r^2)}{2} n_3 \sin \theta
 \end{aligned}$$

Faisons la même chose pour  $\langle L_z^{\theta(n)}(n+1) \rangle$ .

$$\begin{aligned}
 \langle L_z^{\theta(n)}(n+1) \rangle &= \overbrace{\left(1 + \frac{2}{(2l+1)^2}\right)}^{\approx 1} \langle L_z^{\theta} + \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \sin \theta \overbrace{\langle L_x^{\theta} L_z^{\theta} \rangle}^{\approx 0} \rangle \\
 &\quad + \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \cos \theta (l(l+1) - \langle (L_z^{\theta})^2 \rangle) \\
 &\approx rl + \frac{4}{(2l+1)^2} n_3 \cos \theta (l(l+1) - r^2 l^2) \\
 &= rl + \frac{n_3}{(1+1/2l^2)} \cos \theta (1 + \frac{1}{l} - r^2) \\
 &\approx rl + (1-r^2) n_3 \cos \theta
 \end{aligned}$$

Maintenant, voyons comment ces nouvelles expressions simplifieront le calcul de  $\dot{\theta}(n)$  et de  $\dot{r}(n)$ . Commençons par  $\dot{\theta}(n)$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &\approx \frac{\langle L_x^{\theta(n)}(n+1) \rangle}{\langle L_z^{\theta(n)}(n+1) \rangle} \approx -\frac{\frac{(1+r^2)}{2} n_3 \sin \theta}{rl + (1-r^2) n_3 \cos \theta} \\
 &\approx -\frac{(1+r^2)}{2rl} n_3 \sin \theta \left(1 - \frac{(1-r^2) n_2 \cos \theta}{rl}\right) \\
 &\approx -\frac{n_3 (1+r^2)}{l} \frac{\sin \theta}{2r}
 \end{aligned}$$

Faisons la même chose pour  $\dot{r}(n)$ .

$$\begin{aligned} 2r\dot{r} &= \frac{(1+r^2)^2 n_3^2}{4l^2} \sin^2 \theta + \frac{(rl + (1-r^2)n_3 \cos \theta)^2}{l^2} - r^2 \\ &\approx \frac{n_3}{l} 2r(1-r^2) \cos \theta \end{aligned}$$

## Annexe IV

### Exemple de calculs de traces partielles

Voici comment a été calculée la trace partielle (4)(c) de la section 5.4.1 du chapitre 5 (il est à noter que le calcul de Mathematica considèrerait déjà  $T^{ij}$  symétrique et de trace nulle).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}T^{kl}L_i\rho L_j tr(S_i\{S_k, S_l\}S_j) &= T^{11}(L_x\rho L_x - L_z\rho L_z) + T^{22}(L_y\rho L_y - L_z\rho L_z) \\
 &+ T^{12}(L_x\rho L_y + L_y\rho L_x) + T^{13}(L_x\rho L_z + L_z\rho L_x) \\
 &+ T^{23}(L_y\rho L_z + L_z\rho L_y) \text{ obtenu par Mathematica} \\
 &= T^{ij}L_i\rho L_j, \text{ car } T^{33} = -T^{11} - T^{22} \text{ et, car } T^{ij} = T^{ji}
 \end{aligned}$$

Voici comment a été calculée la trace partielle (9)(b) de la section 5.4.1 du chapitre 5. Pour  $R_m L_i L_j \rho L_k L_l tr(S_i S_j S_m S_k S_l)$ , nous ne travaillerons qu'avec la partie en  $R_1$ , car les manipulations pour  $R_2$  et  $R_3$  sont exactement les mêmes.

$$\begin{aligned}
 &iR_1(L_x L_x \rho [L_y, L_z] - L_y L_x \rho L_x L_z - L_y L_y \rho L_z L_y + [L_y, L_z] \rho L_x L_x + L_y L_z \rho L_y L_y \\
 &+ L_z L_x \rho L_x L_y - L_z L_y \rho L_z L_z + L_z L_z \rho L_y L_z) \text{ par Mathematica} \\
 &= iR_1(iL_x L_x \rho L_x - L_y L_x \rho L_x L_z - L_y L_y \rho L_y L_z + iL_x \rho L_x L_x + L_z L_y \rho L_y L_y \\
 &+ L_z L_x \rho L_x L_y - L_y L_z \rho L_z L_z + L_z L_z \rho L_z L_y + [L_y, L_z] \rho L_y L_y - L_y L_y \rho [L_z, L_y] \\
 &- [L_z, L_y] \rho L_z L_z + L_z L_z \rho [L_y, L_z]) \\
 &= -l(l+1)\{\rho, R_1 L_x\} - R_1 \varepsilon_{1jk} L_j L_l \rho L_l L_k \\
 &\Rightarrow R_m L_i L_j \rho L_k L_l tr(S_i S_j S_m S_k S_l) = -l(l+1)\{\rho, \vec{R} \cdot \vec{L}\} - R_i \varepsilon_{ijk} L_j L_l \rho L_l L_k
 \end{aligned}$$

Voici comment a été calculée la trace partielle (9)(c) de la section 5.4.1 du chapitre 5 (à noter que le calcul de Mathematica considèrerait déjà  $T^{ij}$  symétrique). De plus, nous ne travaillerons qu'avec la partie en  $T^{11}$  et en  $T^{12}$ , car les manipulations pour les autres coefficients sont exactement les mêmes. Pour  $T^{11}$ , nous avons

$$T^{11}(l(l+1)\{\rho, L_x L_x\} + L_y L_i \rho L_i L_y + L_z L_i \rho L_i L_z) \text{ par Mathematica.}$$

Aussi, sachant que  $T^{22}$  et  $T^{33}$  sont de la même forme et sachant que leur somme avec  $T^{11}$  est nulle, nous pouvons réécrire la somme des trois termes de telle sorte que nous pouvons en

déduire un nouveau coefficient pour  $T^{11}$ .

$$T^{11}(l(l+1)\{L_x L_x, \rho\} - L_x L_i \rho L_i L_x)$$

Pour  $T^{12}$ , nous avons

$$\begin{aligned} & T^{12}(L_x L_y \rho L_x L_x + L_x L_y \rho L_z L_z + L_y L_y \rho L_x L_y + L_z L_z \rho L_x L_y \\ & - L_x L_z \rho L_z L_y + L_x L_x \rho L_y L_x + L_z L_z \rho L_y L_x + L_y L_x \rho L_y L_y + L_y L_x \rho L_z L_z \\ & - L_y L_z \rho L_z L_x) \text{ par Mathematica} \\ & = T^{12}(l(l+1)L_x L_y \rho - L_x L_y \rho L_y L_y + l(l+1)\rho L_x L_y - L_x L_x \rho L_x L_y - L_x L_z \rho L_z L_y) \\ & + T^{21}(l(l+1)\{L_y L_x, \rho\} - L_y L_i \rho L_i L_x), \text{ car } T^{12} = T^{21}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors déduire de ceci que (9)(c) donne ceci :

$$l(l+1)T^{ij}\{L_i L_j, \rho\} - T^{ij}L_i L_k \rho L_k L_j$$

## Annexe V

### Exemples de calcul de traces

Dans la présente annexe, nous fournirons quelques exemples de traces intervenant dans le calcul de la différence des probabilités de succès du chapitre 5. En voici un qui intervient à la section 5.5.2.

$$\begin{aligned}
 R_k \varepsilon_{ikj} \text{tr}(L_i \rho L_j L_z) &= R_k \varepsilon_{ikj} \text{tr}(\rho L_j L_z L_i) \quad \text{par cyclicité de la trace} \\
 &= R_k \varepsilon_{ikj} \text{tr}(\rho L_j L_i L_z) + i R_k \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{3il} \text{tr}(\rho L_j L_l) \quad \text{par (3.1)} \\
 &= i R_k \text{tr}(\rho L_k L_z) + i R_k (\delta_{kl} \delta_{j3} - \delta_{k3} \delta_{jl}) \text{tr}(\rho L_j L_l) \quad \text{par (3.2)} \\
 &= i \langle \vec{R} \cdot \vec{L} L_z \rangle + i \langle L_z \vec{R} \cdot \vec{L} \rangle - i R_3 l(l+1) \\
 &= 2i R_3 \langle L_z^2 \rangle - i R_3 l(l+1) \quad , \text{ car } \vec{R} = (0, 0, R_3)
 \end{aligned}$$

En voici un second de la même section.

$$\begin{aligned}
 R_j \text{tr}(L_i \rho L_j L_i L_z^2) &= R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_z^2 L_i) \quad \text{par cyclicité de la trace} \\
 &= R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_z L_i L_z) + i \varepsilon_{3ik} R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_z L_k) \quad \text{par (3.1)} \\
 &= l(l+1) \langle \vec{R} \cdot \vec{L} L_z^2 \rangle + i \varepsilon_{3ik} R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_k L_z) + i \varepsilon_{3ik} R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_k L_z) \\
 &\quad - \varepsilon_{3ik} \varepsilon_{3kl} R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_l) \quad \text{par (3.1)} \\
 &= l(l+1) \langle \vec{R} \cdot \vec{L} L_z^2 \rangle - 2 \langle \vec{R} \cdot \vec{L} L_z^2 \rangle - (\delta_{l3} \delta_{i3} - \delta_{il}) R_j \text{tr}(\rho L_j L_i L_l) \quad \text{par (3.2)} \\
 &= (l(l+1) - 3) \langle \vec{R} \cdot \vec{L} L_z^2 \rangle + l(l+1) \langle \vec{R} \cdot \vec{L} \rangle \\
 &= (l(l+1) - 3) R_3 \langle L_z^3 \rangle + l(l+1) R_3 \langle L_z \rangle \quad , \text{ car } \vec{R} = (0, 0, R_3)
 \end{aligned}$$

Voici maintenant un exemple de calcul qui survient dans la section 5.5.3.

$$\begin{aligned}
T^{ij}\varepsilon_{jkl}\text{tr}(L_iL_k\rho L_lL_z) &= T^{ij}\varepsilon_{jkl}\text{tr}(\rho L_lL_zL_iL_k) \quad \text{par cyclicité de la trace} \\
&= T^{ij}\varepsilon_{jkl}\text{tr}(\rho L_zL_lL_iL_k) + iT^{ij}\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{l3m}\text{tr}(\rho L_mL_iL_k) \quad \text{par (3.1)} \\
&= T^{ij}\varepsilon_{jkl}\text{tr}(\rho L_zL_lL_kL_i) + iT^{ij}\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{ikm}\text{tr}(\rho L_zL_lL_m) + iT^{i3}\text{tr}(\rho L_kL_iL_k) \\
&\quad - iT^{ij}\text{tr}(\rho L_jL_iL_z) \quad \text{par (3.1)} \\
&= -iT^{ij}\langle L_zL_jL_i \rangle + i \overbrace{T^{ii}}^{=0} \text{tr}(\rho L_zL_mL_m) - iT^{ij}\text{tr}(\rho L_zL_iL_j) + il(l+1)T^{i3} \\
&\quad - T^{i3}\varepsilon_{ikl}\text{tr}(\rho L_kL_l) - T^{ij}\langle L_jL_iL_z \rangle \quad \text{par (3.1) et par (3.2)} \\
&= -iT^{ij}\langle L_zL_jL_i \rangle - iT^{ij}\langle L_zL_iL_j \rangle - iT^{ij}\langle L_jL_iL_z \rangle \\
&\quad + i(l(l+1) - 1)T^{i3}\langle L_i \rangle \quad \text{par (3.2)} \\
&= -iT^{ji}\langle L_zL_jL_i \rangle - iT^{ij}\langle L_zL_iL_j \rangle - iT^{ji}\langle L_jL_iL_z \rangle \\
&\quad + i(l(l+1) - 1)T^{i3}\langle L_i \rangle \quad , \text{ car } T^{ij} = T^{ji} \\
&= i(l(l+1) - 1)T^{i3}\langle L_i \rangle - 2iT^{ij}\langle L_zL_iL_j \rangle - iT^{ij}\langle L_iL_jL_z \rangle
\end{aligned}$$



## Annexe VI

### Système de référence stationnaire pour $s = \frac{1}{2}$

Cette annexe nous servira à trouver l'état dans lequel le système de référence se retrouve après une infinité de mesures de moments cinétiques de  $s = \frac{1}{2}$ . Pour ce faire, nous pouvons regarder de plus près l'équation (4.2) pour constater que l'action de la mesure sur des états du type  $|m\rangle\langle m'|$  est la suivante :

$$|m\rangle\langle m'| \rightarrow \sum_{a=-1}^1 P_{(m+a, m'+a)|(m, m')} |m+a\rangle\langle m'+a|$$

où les  $P_{(m+a, m'+a)|(m, m')} \geq 0$ . De plus, il est possible de montrer que

$$\sum_{a=-1}^1 P_{(m+a, m'+a)|(m, m')} \leq 1.$$

Il est également possible de montrer que l'égalité ne survient que si  $m = m'$ . Sachant cela, nous pouvons en déduire que toutes les composantes hors diagonales de l'état de notre système de référence finiront par s'approcher asymptotiquement de 0 au fil des mesures, car elles ne feront qu'être multipliées par des facteurs plus petits que 1. Ainsi, après une infinité de mesures, seule la diagonale subsistera.

Ensuite, pour les termes diagonaux, nous devons calculer les

$$P_{(m+a, m+a)|(m, m)} = P_{m+a|m}.$$

$$P_{m\pm 1|m} = \frac{1 \pm 2n_3}{(2l+1)^2} (l(l+1) - m(m\pm 1)),$$

$$P_{m|m} = 1 - P_{m+1|m} - P_{m-1|m}$$

Par la suite, si nous voulons connaître l'état asymptotique du système de référence (après une infinité de mesures), il faudra trouver l'état dit stationnaire, c'est-à-dire l'état qui ne changera pas lors d'une mesure. Tout d'abord, nous savons qu'il est de cette forme :

$$\rho^{(\infty)} = \sum_{m=-l}^l P_m |m\rangle\langle m|$$

et que  $\rho^{(\infty+1)} = \rho^{(\infty)}$ . Ceci signifie que

$$\begin{aligned}
\rho^{(\infty+1)} &= \sum_{m=-l}^l P_m (1 - P_{m+1|m} - P_{m-1|m}) |m\rangle \langle m| \\
&+ \sum_{m=-l}^l P_m P_{m+1|m} |m+1\rangle \langle m+1| + \sum_{m=-l}^l P_m P_{m-1|m} |m-1\rangle \langle m-1| \\
&= \sum_{m=-l}^l (P_m - P_m P_{m+1|m} - P_m P_{m-1|m} + P_{m-1} P_m |_{m-1} \\
&+ P_{m+1} P_m |_{m+1}) |m\rangle \langle m| \\
&= \sum_{m=-l}^l P_m |m\rangle \langle m| = \rho^{(\infty)} \\
&\Leftrightarrow P_m P_{m+1|m} = P_{m+1} P_m |_{m+1} \\
&\Leftrightarrow P_{m+1} = P_m \frac{1 + 2n_3}{1 - 2n_3} \\
&\Leftrightarrow P_m = K \left( \frac{1 + 2n_3}{1 - 2n_3} \right)^m = K e^{\beta m}
\end{aligned}$$

où  $K$  est une constante à déterminer.

Ainsi, nous savons que

$$\begin{aligned}
\rho^\infty &= K \sum_{m=-l}^l e^{\beta m} |m\rangle \langle m| \\
&= \frac{1}{\text{tr}(e^{\beta L_z})} \sum_{m=-l}^l e^{\beta m} |m\rangle \langle m|
\end{aligned}$$

où  $K$  a été choisie afin que notre état soit un état quantique valide (normalisé). Il est à noter que cette démonstration est fortement inspirée de [22].

