Université de Montréal

Analyse de la production des biens publics avec motivations sociales

Par

Sylvain Noël

Département de sciences économiques

Faculté des arts et des sciences

Rapport de recherche présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître es sciences (M. Sc.)
en sciences économiques

Septembre 1997

SOMMAIRE

Dans le champ d'études de l'économie publique, deux résultats ayant trait à la production de biens publics dans une économie sont communément admis. Premièrement, les individus qui se comportent de manière rationnelle ont intérêt à resquiller; c'est-à-dire qu'ils ont intérêt à payer moins pour consommer un bien public lorsque les autres membres de la communauté augmentent leur paiement. Deuxièmement, l'équilibre de Nash (sur la quantité de biens publics produits dans une économie) qui résulte des décisions individuelles des agents est unique. Quand les individus recherchent à satisfaire leurs intérêts matériels, le recours à un modèle simple de production d'un bien public permet, sous des conditions très générales, de prédire ces résultats.

L'observation d'un grand nombre de phénomènes sociaux confirme ces prédictions théoriques. Malheureusement, il existe des situations d'exception dans lesquelles les agents ne se comportent pas en resquilleur et pour lesquelles, semble-t-il, plus d'un équilibre existe.

En ayant recours au concept de «motivations sociales» développé par Mancur Olson, nous démontrons, à l'aide d'un modèle économique simple, que les deux résultats énumérés ci-haut ne sont pas constamment observés quand on accepte l'idée que les individus peuvent être motivés à la fois par des considérations matérielles et morales lorsqu'ils prennent leurs décisions. Dans un tel cas, les individus n'ont pas toujours intérêt à resquiller et l'équilibre de Nash peut posséder la caractéristique d'être unique mais cela n'est pas nécessaire. En somme, un modèle de production d'un bien public avec motivations sociales chez les individus permet de réconcilier les faits d'exception avec la théorie.

REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche constitue l'aboutissement final d'une longue carrière étudiante. Après toutes ces années, une image me revient naturellement: celle de mes parents qui m'ont inlassablement encouragé, sans jamais me forcer, dans cette voie à poursuivre mes études. Ils furent mes deux plus grands supporteurs et m'ont toujours appuyé dans les décisions que j'ai prises. Je les en remercie profondément.

L'apprentissage est une chose qui est exigeante, difficile, parfois démoralisante et ennuyante. Néanmoins, les études nous permettent de nous dépasser et d'atteindre l'inatteignable. Elles nous permettent d'améliorer notre savoir, notre savoir-faire et, encore plus important, notre savoir-être.

Je désire remercier Jacques Robert qui a bien voulu accepter d'assumer la direction de mon rapport de recherche et qui m'a appuyé quand je lui ai soumis le thème général de mon sujet. Il a été excellent sur toute la ligne.

En outre, j'aimerais remercier le département de sciences économiques de l'Université de Montréal qui a accepté de m'accueillir dans son programme de maîtrise. Je désire aussi exprimer ma gratitude aux professeurs du département de science politique de l'Université Laval, excellents pour la plupart, qui m'ont aidé à développer mes habiletés et qui m'ont donné une excellente formation de généraliste au cours de mes études de premier cycle.

Pour terminer, je désire remercier tous ces professeurs et ces enseignants qui m'ont fait vibrer lorsqu'ils m'enseignaient. Ceux qui se sont avéré les meilleurs sont ceux qui ont montré la plus grande intensité, ceux qui étaient les plus disponibles, ceux qui remettaient continuellement leur méthode d'enseignement en question, ceux qui n'avaient pas peur d'innover et, enfin, ceux pour qui la compréhension était plus importante que le savoir.

En guise de conclusion, j'aimerais exprimer ma plus grande reconnaissance aux professeurs et enseignants qui m'ont le plus marqué et ceux qui ont eu la plus grande influence positive sur moi. Il s'agit de Jacques Robert et Michel Poitevin (Université de Montréal); Pierre-Gerlier Forest, Roger Barrette, Jean Mercier, Vincent Lemieux et Jean-Pierre Derriennic (Université Laval); Jean-François Berton (Collège de Limoilou); Marcel Hébert (Petit Séminaire de Québec) et Alain Légaré (École Le Rucher).

S.N.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES

Tableaux

Figures

INTRODUCTION

En sciences économiques, la fourniture d'un bien public dans une économie fait l'objet d'une attention toute spéciale depuis un long moment. Les caractéristiques particulières du bien public mènent à l'observation d'un ensemble de résultats qui lui sont propres. L'un d'eux est l'existence de resquillage de la part des membres d'une économie qui sont appelés à contribuer volontairement au financement d'un bien public. Par définition, nous disons qu'un individu resquille s'il décide de payer moins pour consommer un bien public quand les autres membres de la communauté choisissent en moyenne d'augmenter leur contribution. Lorsque tous les individus choisissent simultanément leur niveau de contribution au financement d'un bien public, un deuxième résultat bien connu est que l'équilibre de Nash sur les quantités de production du bien est unique.

Malheureusement, l'observation systématique d'événements de la vie de tous les jours ne nous autorise pas à déduire que ces deux résultats sont applicables à tous les phénomènes sociaux associés à la production de biens publics.

Dans ce travail, notre but est de concilier la théorie avec les faits d'exception que nous pouvons observer de temps à autre en matière de provision de biens publics et pour lesquels nous nous efforçons de donner quelques exemples dans le texte. En termes clairs, nous désirons proposer un modèle de provision d'un seul bien public qui, sous des conditions très générales, permet d'expliquer et de comprendre pourquoi les individus adoptent parfois des comportements stratégiques qui sont contraires aux résultats qui sont prédits par les modèles traditionnels. De ce point de vue, ce travail est intéressant car il pourrait apporter une modeste contribution à l'explication de phénomènes économiques dans un créneau qui n'a pas encore été complètement exploré semble-t-il.

Pour y parvenir, nous avons divisé notre exposé en deux parties. La première comporte trois chapitres et constitue un survol de la littérature sur le sujet d'étude. Dans le premier chapitre, nous définissons les notions de bien public et d'équilibre de Nash, ce dernier étant le concept d'équilibre que nous utiliserons. Par la suite, nous présentons le modèle simple de production d'un bien public et ses implications sur la nature des fonctions de réaction des individus et le nombre d'équilibres de Nash existants. Au troisième chapitre, nous discutons de l'une des contributions de Mancur Olson qui a analysé les motifs qui poussent les individus à vouloir participer ou non à une action collective.

Dans la seconde partie, nous étendons, au chapitre 4, le modèle de base du chapitre 2 en y introduisant le concept de motivations sociales développé par Olson. Ensuite, au chapitre suivant, nous nous proposons d'examiner si les résultats trouvés dans le modèle avec motivations sociales sont différents de celui du chapitre 2 et, dans l'affirmative, si le modèle du chapitre 4 permet d'expliquer les faits d'exception que les modèles traditionnels ne réussissent pas à justifier. Pour terminer, nous procédons à une simulation dans le chapitre 6 afin d'illustrer nos résultats.

- PREMIÈRE PARTIE -
REVUE DE LA LITTÉRATURE

La première partie de ce travail est divisée en trois chapitres. Dans le premier, nous définissons de manière formelle les biens publics, sujet de notre étude, et le concept d'équilibre de Nash. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un modèle de base simple de production d'un bien public. L'étude de ce modèle nous permet de comprendre pourquoi les individus ont intérêt à resquiller lorsqu'ils recherchent à satisfaire leurs intérêts matériels et pourquoi l'équilibre de Nash (sur le niveau de production d'un bien public dans une économie) est unique dans ce cas. Dans le dernier chapitre, nous discutons de l'une des contributions de Mancur Olson sur les limites de ce type de modèle quand nous essayons d'analyser les motifs qui poussent les individus à vouloir à participer à une action collective.

Chapitre 1 / Bien public et équilibre de Nash: définition

1.1 / Le concept de bien public

Le bien public est le thème central de notre analyse. C'est pourquoi, il importe de dire un mot ou deux à son sujet[1].

Le bien public est peut-être l'exemple le mieux connu d'externalité. Ce concept existe depuis fort longtemps. C'est toutefois à Paul A. Samuelson que revient l'honneur d'avoir su attirer l'attention de ses pairs sur l'importance de son étude. Il a été vraisemblablement le premier à étudier sur une base formelle d'analyse la notion du bien public. Dans deux de ses articles (Samuelson 1954, 1955), il a formulé un certain nombre de résultats et d'observations qui sont encore communément cités

---

[1] Dans le texte, nous utilisons indistinctement les termes «bien public» et «bien collectif» pour désigner le même concept.

aujourd'hui.

Deux caractéristiques permettent de différencier le bien public au sens de Samuelson du bien privé traditionnel.

(1) Si un bien public est produit dans une communauté, il n'existe aucun moyen d'empêcher quelqu'un, membre de cette communauté, désireux de consommer ce bien de le faire;

(2) Un individu qui consomme un bien public retire le même niveau de satisfaction, qu'il soit seul à le consommer ou qu'il y ait plusieurs individus qui le font simultanément avec lui.

La terminologie ayant consacré respectivement les termes «non-exclusivité» et «non-rivalité» aux deux traits que nous venons d'énoncer, ce sont ces deux expressions que nous emploierons dans le texte.

En résumé, la non-exclusivité signifie qu'on ne peut exclure personne de la consommation d'un bien. Deux bons exemples sont le feu d'artifice et l'oxygène. Si un feu d'artifice éclate subitement dans le ciel, il n'existe aucun moyen d'empêcher quelqu'un de regarder le spectacle s'il le désire. C'est la même chose pour l'oxygène produit par les végétaux. On ne peut empêcher l'oxygène de l'air d'être consommé par les individus qui respirent. Toutefois, une pièce de théâtre et une automobile ne sont pas des biens non-exclusifs. Il est possible d'empêcher une personne d'entrer dans une salle de théâtre pour visionner la pièce. D'ailleurs, on le fait systématiquement lorsqu'un individu n'a pas versé un droit d'entrée. De même, l'action de verrouiller les portières empêche les individus d'utiliser une automobile dont ils ne sont pas propriétaires[2].

Quant à la non-rivalité, c'est une propriété qu'ont les biens de pouvoir être consommés par plusieurs

[2] La non-exclusivité ne veut pas dire qu'il est techniquement impossible d'empêcher un individu de consommer un bien. Cela signifie qu'il est difficile de le faire sans débourser des coûts importants. Inversement, s'il est facile d'empêcher un individu de consommer un bien et que le coût, pour ce faire, est faible, nous considérons que le bien ne possède pas la propriété de la non-exclusivité.

personnes en même temps sans que cela ne nuise à qui que ce soit. Dit autrement, la non-rivalité implique que la décision d'une personne de consommer un tel bien ne réduit pas la quantité du bien que les autres personnes peuvent consommer. En utilisant les mêmes exemples que précédemment, l'oxygène et l'automobile ne sont pas des biens qui possèdent cette caractéristique. La molécule d'oxygène qui est consommée par une personne ne peut pas l'être par une autre. Également, lorsqu'un individu utilise son automobile, aucune autre personne ne peut la prendre au même moment pour aller à un autre endroit. Par contre, la pièce de théâtre et le feu d'artifice sont des biens qui possèdent la caractéristique de non-rivalité. Le visionnement d'une pièce de théâtre par un individu n'empêche pas une autre personne assise à côté de lui de visionner la même pièce. La même observation peut être faite dans le cas d'un feu d'artifice. Le tableau qui suit résume les exemples que nous venons de présenter.

Tableau 1.1 Caractéristiques des biens publics et exemples

Caractéristiques	Exclusivité	Non-exclusivité[a]
Rivalité	*Ex.: Automobile*	*Ex.: Oxygène*
Non-rivalité[a]	*Ex.: Pièce de théâtre*	*Ex.: Feu d'artifice*[b]

Légende: [a] Caractéristique d'un bien public
[b] Exemple d'un bien public

Le feu d'artifice n'est évidemment pas le seul exemple de biens publics qui existe. Sont aussi des exemples les lampadaires dans les rues; un phare pour les navires situés près des côtes; l'odeur agréable que dégage une fleur; l'ordre, la sécurité et la paix dans un État; les systèmes anti-pollution installés sur les automobiles; et la musique entendue dans les endroits publics tels que les centres commerciaux et les stations de métro.

Pour terminer, soulignons que l'une des implications de la définition des biens publics est que la quantité de biens publics qu'un individu peut consommer est la même pour tous les individus et est identique à la quantité totale de biens publics qui est disponible dans l'économie. Notons la différence avec les biens privés. Si X et Y sont respectivement les quantités totales de biens privés et de biens publics disponibles dans l'économie; X_i, la quantité de biens privés consommés par l'individu i; et Y_i, la quantité de biens publics consommés par l'individu i; alors nous avons les relations suivantes:

(1.A)	$\sum X_i = X$	▸ La somme des quantités de biens privés consommés par chaque individu est égale à la quantité totale de biens privés dans l'économie;
(1.B)	$Y_i = Y$	▸ La quantité de biens publics qu'un individu peut consommer est identique à la quantité totale de biens publics qui est disponible dans l'économie.
(2.A)	$X_i \neq X_j$ (en général)	▸ La quantité de biens privés consommés par un individu varie d'un individu à l'autre en général;
(2.B)	$Y_i = Y_j$	▸ La quantité de biens publics qu'un individu peut consommer est la même pour tous les individus.

1.2 / Le concept d'équilibre de Nash

De façon générale, un équilibre survient quand tous les individus ont optimisé leurs choix et que ceux-ci sont compatibles avec les décisions des autres. L'étude des équilibres est intéressante car ces derniers représentent les solutions des modèles économiques.

Différents concepts d'équilibre existent cependant. L'un d'entre eux est l'équilibre de Nash, du nom du mathématicien américain qui a formulé ce concept en 1951 dans un article qui l'a rendu célèbre (Nash 1951). Dans les lignes qui suivent, nous expliquons comment reconnaître les équilibres de Nash et justifions le choix de ce type d'équilibre comme solution de certaines catégories de problèmes.

Par définition, un équilibre de Nash est atteint lorsque les choix de tous les agents sont optimaux, compte tenu des choix faits par les autres. De manière plus rigoureuse, lorsqu'un individu, après avoir observé les actions effectuées par les autres, ne peut pas être en mesure de regretter la décision qu'il a prise et que cette situation est vraie pour tous les agents, nous disons que l'ensemble des décisions ainsi obtenues qui satisfont ces conditions constitue un équilibre de Nash.

Mathématiquement, si A^i est la décision ou l'action prise par l'individu i (i=1, 2, ..., N) et $U^i(A^1, A^2, ..., A^N)$, sa fonction d'utilité, alors l'ensemble $\{\hat{A}^1, \hat{A}^2, ..., \hat{A}^N\}$ est un équilibre de Nash si et seulement si

$$U^i(\hat{A}^1, \hat{A}^2, ..., \hat{A}^i, ..., \hat{A}^N) \geq U^i(\hat{A}^1, \hat{A}^2, ..., A^i, ..., \hat{A}^N) \qquad \text{pour tout } A^i \text{ possible, pour tout } i\ (i=1, 2, ..., N)$$

Au moment de faire un choix, quand personne ne sait à l'avance les actions que les autres feront et que personne ne dispose d'informations privilégiées sur l'environnement (ou, ce qui revient au même, sur les divers états de la nature), la théorie économique nous enseigne que l'équilibre de Nash est une bonne prédiction du résultat final de ce que les différents agents décideront de faire. Une justification derrière une telle prédiction provient du fait que les équilibres de Nash sont des conventions sociales stables. Ils sont les seuls résultats qui sont consistants lorsque les agents se comportent de manière rationnelle, lorsque ce comportement rationnel est de connaissance commune et, enfin, lorsque l'identité des équilibres de Nash est elle-même de connaisance commune. Illustrons cela à l'aide d'un exemple.

Supposons une économie composée de deux personnes, un homme H et une femme F, telle que, en utilisant la même notation que précédemment, l'ensemble $\{\hat{A}^H, \hat{A}^F\}$ constitue le seul équilibre de Nash.

Dans cette économie fictive, l'individu H doit choisir une activité à faire. Bien évidemment, comme son objectif est d'effectuer un choix qui lui permet d'obtenir le bien-être le plus élevé, il doit tenir compte, avant de prendre sa décision, de ce que F fera. En effet, rappelons que l'utilité de H est fonction de l'activité qu'il choisit et des activités que les autres choisissent: $U^H = U^H(A^H, A^F)$.

Bien qu'il soit vrai que H ne sait pas à l'avance ce que F va faire, il peut néanmoins essayer d'anticiper sa décision. En vérité, comme il sait que F se comportera tout comme lui de façon rationnelle[3], H

[3] En voulant définir ce qu'est un comportement rationnel en situation d'informations parfaites, Leif Johansen (1982: 432) propose quelques postulats. L'un d'eux est qu'en prenant une décision, un individu assume que les autres personnes sont rationnelles dans le même sens qu'il l'est.

sait que F fera un choix optimal qui dépendra de ce qu'elle pense qu'il fera. En d'autres mots, la décision optimale de H dépend de ce que H croit que F croit que H fera.

Par exemple, si H croit que F croit que H optera pour l'activité $\ddot{A}^H \neq \hat{A}^H$, alors H doit aussi croire que F choisira l'activité $\ddot{A}^F$ telle que $U^F(\ddot{A}^F, \ddot{A}^H) \geq U^F(A^F, \ddot{A}^H)$ pour tout A^F possible, puisque c'est la décision optimale que F peut prendre, compte tenu des croyances qu'elle a.

Puisque nous avons supposé que $\ddot{A}^H \neq \hat{A}^H$, il faut qu'il existe une certaine action $\mathring{A}^H \neq \ddot{A}^H$ telle que $U^H(\mathring{A}^H, \ddot{A}^F) > U^H(A^H, \ddot{A}^F)$ pour tout A^H. Dans ce cas, si H croit que F choisira l'action $\ddot{A}^F$, cela signifie aussi que la décision optimale de H est d'opter pour l'activité $\mathring{A}^H$. Mais alors, si H a intérêt à choisir l'activité $\mathring{A}^H$ lorsque F choisit l'activité $\ddot{A}^F$, H ne peut d'aucune façon être amené logiquement à croire (s'il est rationnel) que F pense que H choisira $\ddot{A}^H \neq \mathring{A}^H$ puisque, dans ce cas, F ferait une mauvaise anticipation. Étant donné, par hypothèse, que personne ne dispose d'informations privées sur les différents états de la nature, alors on sait que chacun est en mesure de bien anticiper les actions des autres[4] et, par conséquent, il est irrationnel pour H de croire que F peut faire de mauvaises anticipations. Ceci est inconsistant avec un comportement rationnel.

En fait, tant et aussi longtemps que H croit que F croit que H opte pour une action $\ddot{A}^H \neq \hat{A}^H$, le même processus de réflexion nous conduit à conclure que H adopte un comportement qui est irrationnel. Par contre, il en est autrement si H croit que F croit que H choisira $\hat{A}^H$. En effet, si H croit que F croit que H choisira $\hat{A}^H$, alors H doit aussi croire que F choisira $\hat{A}^F$ car, par hypothèse, $U^F(\hat{A}^F, \hat{A}^H) \geq U^F(A^F, \hat{A}^H)$ pour tout A^F. Mais, étant donné que H croit que F opte pour $\hat{A}^F$, H a intérêt à choisir l'activité $\hat{A}^H$ (puisque, par hypothèse, $U^H(\hat{A}^H, \hat{A}^F) \geq U^H(A^H, \hat{A}^F)$ pour tout A^H), ce qui est précisément ce que H croit que F avait anticipé qu'il fasse. La paire d'activités $\{\hat{A}^H, \hat{A}^F\}$ est donc la seule qui est consistante avec un comportement rationnel de la part des deux individus.

En outre, comme cet équilibre est de connaissance commune, alors nous avons, par définition, un

---

[4] Un autre postulat caractérisant un comportement rationnel émis par Johansen (1982: 433) se réfère à l'idée que si une décision est rationnelle pour un individu, alors cette décision peut être correctement prédite par les autres personnes.

équilibre de Nash. Dans ces conditions, il ne faut pas se surprendre de l'intérêt porté à ce type d'équilibre et des raisons poussant les économistes à considérer ceux-ci comme de bonnes prédictions des résultats finaux de ce que les agents décident de faire.

Bien que le concept d'équilibre de Nash soit intéressant d'un point du vue logique, il pose certains problèmes. Premièrement, il peut exister des situations où il y a plus d'un équilibre de Nash simultanément. Puisque le concept d'équilibre de Nash est utile pour faire des prédictions intelligentes, il s'ensuit que la présence de plusieurs équilibres de Nash soulève inévitablement des difficultés lorsque vient le temps d'énoncer des prédictions aussi précises que possible au sujet des comportements des individus. C'est manifestement le cas puisque la façon dont les individus choisissent parmi plusieurs équilibres de Nash possibles et se coordonnent entre eux demeure une question encore non résolue.

Deuxièmement, ce n'est pas parce que les équilibres de Nash peuvent posséder la propriété de pouvoir être déduits logiquement par les individus qui tentent de se comporter de façon rationnelle que cela fait d'eux les solutions des modèles économiques. La fatale réalisation des équilibres de Nash n'est pas incontournable du seul point de vue de la logique pure. Que les équilibres de Nash puissent ou non être déduits parfois par un raisonnement logique n'est pas vraiment important. Ce qui importe est de savoir si les individus sont effectivement rationnels et se comportent réellement dans la vraie vie de manière telle que leurs choix sont conformes aux résultats prédits par les équilibres de Nash[5].

Qui plus est, ceci est sans oublier les critiques qui ont pu être formulées à l'endroit des équilibres de Nash en tant que seules solutions des jeux non coopératifs. Rappelons que pour être en présence d'un équilibre de Nash, il faut que les individus adoptent un comportement qui est rationnel. Or, il est possible de démontrer que tout comportement rationnel ne converge pas nécessairement vers un

---

[5] En guise de réflexion, il est intéressant de rappeler ici au passage l'opinion émise par le réputé économiste James M. Buchanan qui a déjà dit au sujet de la rationalité des individus "Societies in the real world are not made up exclusively of reasonable men." (Buchanan 1959: 134).

équilibre de Nash[6]. Pour avoir un équilibre de Nash, il faut en plus que l'identité de ces équilibres soit de connaisance commune.

Troisièmement, rappelons-nous que nous faisons l'hypothèse d'une parfaite information par tous les individus, notamment les préférences des autres. Cette condition contraignante a peu d'équivalent dans le monde réel. Il se peut donc que les modèles faisant intervenir les équilibres de Nash comme nous l'avons fait aient moins d'applications qu'on ne le pense.

[6] Voir, par exemple, (Bernheim 1984). Dans cet article, l'auteur développe une argumentation pour justifier l'existence d'une catégorie de décisions "rationalisables" qui mènent à des équilibres différents de l'équilibre de Nash. Selon Bernheim, parce que l'analyse des comportements stratégiques nous oblige à tenir, implicitement ou explicitement, des hypothèses sur la psychologie des individus, aucune des décisions "rationalisables" ne peut être rejetée sur la seule base de la rationalité.

Chapitre 2 / Un modèle simple de production d'un seul bien public

Samuelson, avons-nous dit, a été le premier à étudier avec rigueur le concept du bien public. Au moment de ses premiers écrits sur le sujet (Samuelson 1954, 1955), il a été en mesure de formuler un certain nombre de résultats dont le plus connu est sans doute la condition qui porte son nom (la condition de Samuelson). Dans cette section, nous présentons un modèle de base simple afin de tenter de comprendre comment se comporte stratégiquement l'individu membre d'une communauté qui doit prendre une décision quant à son niveau de contribution personnel au financement des biens publics qui servent à toute la communauté. Notre objectif est de démontrer deux des résultats les mieux connus sur la provision des biens publics: l'existence de resquillage de la part de tous les membres d'une communauté quand vient le temps de contribuer à l'achat d'un bien public qui sert à toute la communauté et l'unicité de l'équilibre de Nash qui résulte des décisions individuelles.

Deux remarques sont à faire avant de débuter notre exposé. La première est que même si Samuelson semble avoir compris depuis le tout début que les individus ont un intérêt à vouloir resquiller (car, dit-il, c'est dans l'intérêt personnel de chaque individu «to pretend to have less interest in a given collective consumption activity than he really has» (Samuelson 1954: 388-389), ce dernier ne fait qu'énoncer ce point sans vraiment le démontrer formellement de façon convaincante. En conséquence, le traitement ci-dessous est assez dissemblable de celui fait par Samuelson dans ses articles. En revanche, sauf pour quelques passages, le développement qui suit est relativement conforme à celui figurant dans l'ouvrage <u>The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods</u> (Cornes et Sandler 1996: 143-159). En deuxième lieu, il est à noter que bien que le modèle présenté peut sembler relativement simple en comparaison de modèles plus généraux, les conclusions auxquelles nous parviendrons font néanmoins encore autorité et sont largement enseignées.

2.1 / La négativité de la pente de la fonction de réaction de tout individu

Considérons un individu qui a des préférences définies sur n+1 biens: n biens privés et un bien public. Sa fonction d'utilité est $U(\boldsymbol{x}, Y)$ où $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)'$ est un vecteur dont le $i^{\text{ème}}$ élément est la quantité consommée du $i^{ème}$ bien privé et Y, la quantité consommée du bien public. Nous supposerons que la fonction $U(\cdot)$ possède les caractéristiques désirables habituelles, en ce sens qu'elle est continue, quasi-concave, strictement croissante par rapport à ses $n+1$ arguments et partout deux fois dérivables par rapport à chacun de ses $n+1$ arguments[7].

Cet individu dispose d'une dotation (ou revenu) initiale $I \geq 0$ qu'il peut utiliser pour s'acheter des unités de biens privés ou se procurer des unités de biens publics. La quantité de biens publics que cet individu se procure est $y \geq 0$. Il est à noter que cette quantité peut être différente de Y, la quantité totale de biens publics qu'il consomme, puisque $Y = y + \hat{y}$ où $\hat{y} \geq 0$ est la quantité de biens publics achetés par tous les autres membres de sa communauté. En effet, rappelons qu'en raison de la non-exclusivité et la non-rivalité des biens publics, lorsqu'un membre se procure une unité du bien public, cette unité peut être consommée par tous les autres membres en même temps (c'est-à-dire que $y \leq Y \leq y + \hat{y}$). Mais comme $U(\cdot)$ est strictement croissante par rapport à tous ses arguments par hypothèse, nous savons alors que l'individu aura avantage à consommer le maximum de biens publics et que nécessairement nous avons l'égalité $Y = y + \hat{y}$.

Par ailleurs, nous ferons l'hypothèse que rien ou personne ne peut exercer une influence sur les prix et que chacun prend les actions des autres comme données.

Si $p_y \geq 0$ est le prix du bien public et $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n) \geq \mathbf{0}$[8], le vecteur de prix des n biens privés (p_i étant le prix du $i^{ème}$ bien privé), le problème de maximisation de l'utilité de l'individu est

$$\max_{\boldsymbol{x},\, y} \quad U(\boldsymbol{x}, Y) = U(\boldsymbol{x}, y+\hat{y}) \qquad \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \\ y \geq 0 \\ I \geq \boldsymbol{px} + p_y y. \end{array}$$

Les deux premières contraintes indiquent que l'individu ne peut consommer une quantité négative de biens. La dernière est simplement la contrainte budgétaire du consommateur.

---

[7] On peut se référer, entre autres, à (Varian 1994: 51-54) pour une justification de ces propriétés.

[8] Dans le reste de ce document, l'expression "$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$" signifie que le vecteur **A** est positif ou est égal au vecteur **0**.

Puisque $U(\cdot)$ est strictement croissante par rapport à au moins un de ses n+1 arguments, alors nous savons que l'utilité de l'individu sera maximisée uniquement lorsque la contrainte budgétaire sera satisfaite avec le signe d'égalité, c'est-à-dire lorsque

$$I = \boldsymbol{px} + p_y y. \tag{1}$$

Si nous définissons une nouvelle variable $\phi \equiv I + p_y\hat{y}$, alors la contrainte (1) peut s'écrire

$$\phi \equiv \boldsymbol{px} + p_y y + p_y\hat{y} = \boldsymbol{px} + p_y(y+\hat{y}).$$

Dans ce cas, le problème de maximisation devient

$$\underset{\boldsymbol{x},\, y}{\text{Max}} \quad U(\boldsymbol{x}, Y) = U(\boldsymbol{x}, y+\hat{y}) \qquad \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ y \geq 0 \\ \phi = \boldsymbol{px} + p_y(y+\hat{y}), \end{array}$$

lequel peut être réécrit de la manière suivante

$$\underset{\boldsymbol{x},\, Y}{\text{Max}} \quad U(\boldsymbol{x}, Y) \qquad \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ Y \geq \hat{y} \\ \phi = \boldsymbol{px} + p_y Y. \end{array}$$

Soit la fonction d'utilité transformée sans contrainte sur $\boldsymbol{x}$ et sur Y

$$F(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) \equiv \underset{\boldsymbol{x},\, Y}{\text{Max}} \; \{U(\boldsymbol{x}, Y) \mid \phi = \boldsymbol{px} + p_y Y\}.$$

Étant donné cette nouvelle fonction $F(\cdot)$, le niveau préféré de biens publics désiré par l'individu lorsque $\boldsymbol{x}$ et Y ne sont pas contraints est

$$G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) = \{\, Y \mid U(\boldsymbol{x}, Y) = F(\boldsymbol{p}, p_y, \phi),\ \phi = \boldsymbol{px} + p_y Y \,\}, \tag{2}$$

c'est-à-dire la quantité Y qui maximise la fonction $U(\boldsymbol{x}, Y)$ sous la contrainte $\phi = \boldsymbol{px} + p_y Y$.

Étant donné cette fonction $G(\cdot)$, nous pouvons vérifier que $\breve{G}$, le niveau de contribution préféré de l'individu au financement des biens publics, dépend de $\boldsymbol{p}$, p_y, ϕ et $\hat{y}$ de la manière suivante

$$\check{G}(\boldsymbol{p}, p_y, \phi, \hat{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) < \hat{y} \\ G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) - \hat{y} & \text{si } \hat{y} \leq G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) \leq I/p_y \\ \phi/p_y - \hat{y} & \text{si } G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) > I/p_y. \end{cases} \tag{3}$$

L'équation (3) se justifie comme suit. Si le niveau préféré de biens publics désiré par un individu est inférieur à la contribution du reste de la communauté au financement des biens publics, cet individu ne voudra faire aucune contribution pour accroître encore plus la quantité de biens publics disponible dans l'économie. En revanche, s'il est supérieur, l'individu voudra contribuer jusqu'à combler la différence, à moins que cette différence ne soit supérieure à la quantité maximale de biens publics que sa contrainte budgétaire lui permet d'acquérir; auquel cas, l'individu maximisera son utilité en se procurant la plus grande quantité possible de biens publics (cette quantité étant égale à $I/p_y = \phi/p_y - \hat{y}$).

De l'équation (2), nous avons, par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{dG}{d\hat{y}} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{d\boldsymbol{p}'}{d\hat{y}} + \frac{\partial G}{\partial p_y}\frac{dp_y}{d\hat{y}} + \frac{\partial G}{\partial \phi}\frac{d\phi}{d\hat{y}}. \tag{4}$$

Puisque, par hypothèse, personne ne peut influencer les prix par ses actions, alors

$d\boldsymbol{p}'/d\hat{y} = \mathbf{0}$,

$dp_y/d\hat{y} = 0$;

et la relation (4) se réduit, dans ce cas, à

$$\frac{dG}{d\hat{y}} = \frac{\partial G}{\partial \phi}\frac{d\phi}{d\hat{y}} = \frac{\partial G}{\partial \phi}\, p_y. \tag{4'}$$

Également, en différenciant chaque membre de l'égalité (2) par rapport à I, nous obtenons, par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{dG}{dI} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{d\boldsymbol{p}'}{dI} + \frac{\partial G}{\partial p_y}\frac{dp_y}{dI} + \frac{\partial G}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dI}. \tag{5}$$

Puisque, par hypothèse, rien n'influence les prix et que chacun prend les actions des autres comme données, alors

$d\boldsymbol{p}'/dI = \boldsymbol{0}$,

$dp_y/dI = 0$,

$d\hat{y}/dI = 0$;

et, par conséquent, l'équation (5) peut se réécrire

$$\frac{dG}{dI} = \frac{\partial G}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dI} = \frac{\partial G}{\partial \phi} \times 1 = \frac{\partial G}{\partial \phi}. \tag{5'}$$

Mais alors, en raison des équations (4') et (5'), et puisque $p_y \geq 0$, nous pouvons déduire que si le bien public et les biens privés sont des biens normaux

$$\begin{aligned} & 0 < dG/dI < 1/p_y \\ \Leftrightarrow\quad & 0 < \partial G/\partial\phi < 1/p_y \\ \Leftrightarrow\quad & 0 < p_y \times \partial G/\partial\phi < 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 < dG/d\hat{y} < 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Par ailleurs, nous savons également, par la relation (3), que

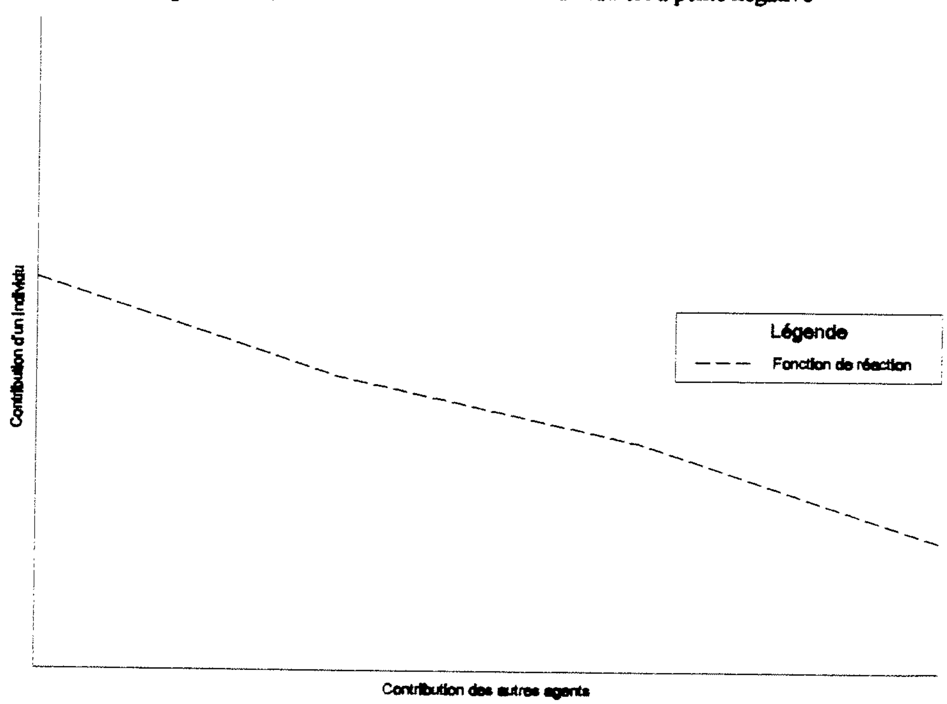
$$\frac{d\check{G}}{d\hat{y}} = \begin{cases} \dfrac{dG}{d\hat{y}} - \dfrac{d\hat{y}}{d\hat{y}} = \dfrac{dG}{d\hat{y}} - 1 & \text{si } \hat{y} \leq G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) \leq I/p_y \\ 0^9 & \text{si } G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) < \hat{y} \text{ ou si } G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) > I/p_y. \end{cases} \tag{7}$$

En conséquence, en insérant l'égalité (7) dans l'inéquation (6), nous obtenons

$$-1 < d\check{G}/d\hat{y} \leq 0 \tag{8}$$

Ainsi, une augmentation de $\hat{y}$, la contribution des autres agents à l'achat de biens publics, conduit en général à une diminution de $\check{G}$, le niveau de contribution préféré d'un individu au financement des biens publics (voir figure 2.1); d'où l'existence de resquillage. La seule exception est lorsque $d\check{G}/d\hat{y}$ = 0. Dans ce cas spécial, la courbe de réaction est horizontale et il n'y a pas de resquillage. Ces cas spéciaux surviennent toutefois uniquement lorsque $G<\hat{y}$ ou bien quand $G>\phi/p_y$.

Figure 2.1 La fonction de réaction d'un individu est à pente négative



[9] Car $d0/d\hat{y} = 0$ (si $G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) < \hat{y}$) et $d(\phi/p_y - \hat{y})/d\hat{y} = (1/p_y)\, d\phi/d\hat{y} - d\hat{y}/d\hat{y} = (1/p_y)\, d(I+p_y\hat{y})/d\hat{y} - 1 = p_y/p_y - 1 = 0$ (si $G(\boldsymbol{p}, p_y, \phi) > I/p_y$).

L'interprétation de l'équation (8) n'est pas évidente mais est assez directe lorsqu'on y réfléchit bien. À chaque fois que le reste de la communauté décide d'augmenter sa contribution au financement des biens publics d'un montant $\Delta\hat{y}$, l'agent perçoit cette modification dans les actions des autres comme une augmentation exogène du niveau de biens publics qu'il peut consommer sans qu'il ne lui en coûte quoi que ce soit. Similaire au cas où un individu reçoit un bien gratuitement d'une tierce personne, cette variation exogène du niveau de bien public qu'il peut consommer sans coût additionnel provoque un déplacement de sa contrainte budgétaire, lequel est équivalent à un effet de revenu pur à 100%[10].

Ainsi, il est plus aisé de comprendre maintenant la raison pour laquelle nous avons défini la variable $\phi \equiv I + p_y\hat{y}$ et avons choisi de travailler avec celle-ci lors de notre développement mathématique. En réalité, excepté pour les cas où nous sommes en présence d'une solution de coin, une augmentation (diminution) de $\hat{y}$ a le même effet qualitativement parlant qu'une variation positive (négative) de I sur les choix de consommation de l'individu: les deux provoquent un effet de revenu positif (négatif). En distinguant bien cela, il est relativement aisé de comprendre le reste de ce qui suit. Nous savons qu'un effet de revenu positif (négatif) amène un individu à vouloir consommer davantage (moins) de tous les biens[11]. Par conséquent, une augmentation (diminution) de $\hat{y}$ induira l'individu à vouloir consommer plus (moins) de biens privés et plus (moins) du bien public. Toutefois, pour augmenter (diminuer) sa consommation en biens privés, l'individu devra absolument, par la même occasion, diminuer (augmenter) ses dépenses en biens publics afin de pouvoir respecter sa contrainte budgétaire (car bien que $\hat{y}$ varie, le revenu I demeure constant). C'est pourquoi $d\breve{G}/d\hat{y} < 0$. D'un autre côté, puisque l'effet de revenu doit conduire aussi à une augmentation (diminution) de la consommation des biens publics, l'individu doit s'assurer que l'augmentation (diminution) de $\hat{y}$ soit plus élevée que la diminution (augmentation) de ses propres achats de biens publics, d'où la raison pour laquelle $d\breve{G}/d\hat{y}' > -1$.

Le seul cas où $d\breve{G}/d\hat{y} = 0$ se produit (car n'oublions pas que nous prétendons que $d\hat{H}/d\hat{y} \leq 0$), c'est

[10] Il n'y a pas d'effet de substitution puisque les prix relatifs entre les biens privés et le bien public ainsi qu'entre les biens privés entre eux demeurent invariables.

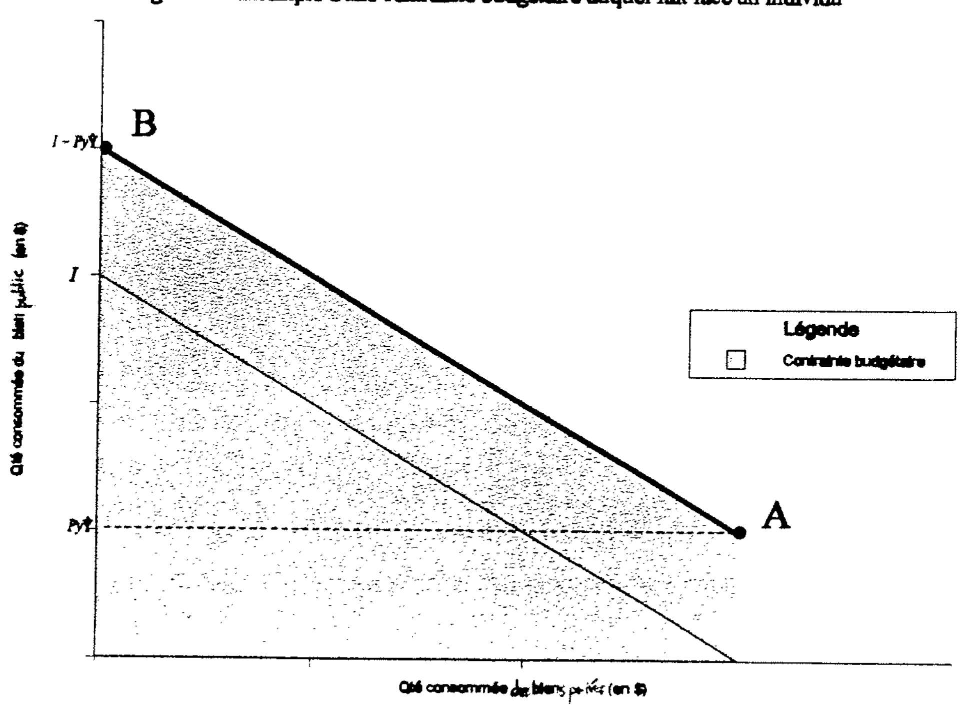
[11] Nous faisons l'hypothèse que tous les biens sont normaux.

lorsque l'individu n'achète aucun bien public et dépense tout son budget à l'achat de biens privés, ou, à l'inverse, lorsqu'il n'achète que des biens publics et aucun bien privé. Il s'agit d'une situation où l'on est en présence d'une solution de coin comme aux points A et B sur la figure 2.2.

Dans le cas d'une solution au point A, toute augmentation de $\hat{y}$, ne provoque aucune diminution de $\breve{G}$ car l'individu ne peut acheter une quantité négative de biens privés; $d\breve{G}/d\hat{y}$ est donc égal à 0. Si, au lieu d'augmenter, $\hat{y}$ décroît, deux possibilités subsistent. Ou bien le taux marginal de substitution entre les deux biens est égal à -1 (dans ce cas la pente de la fonction d'utilité au point A est tangente à la contrainte budgétaire) et $d\breve{G}/d\hat{y}$ est strictement négatif; ou bien le taux marginal de substitution entre les deux biens est inférieur à -1 (la fonction d'utilité au point A n'est alors pas tangente à la contrainte budgétaire) et $d\breve{G}/d\hat{y}$ est nul.

Quand la solution de coin se situe au point B, $d\breve{G}/d\hat{y}$ est inférieur à 0 seulement si le taux marginal de substitution entre les deux biens est égal à -1 (c'est-à-dire si la courbe d'indifférence au point B est tangente à la droite de budget) et si, en même temps $\hat{y}$ augmente. Dans les autres cas, $d\breve{G}/d\hat{y}$ est nul.

Figure 2.2 Exemple d'une contrainte budgétaire auquel fait face un individu



La figure 2.2 illustre l'ensemble des possibilités de consommation auquel est confronté un individu. Le trait gras continu est sa droite de budget tandis que la partie ombragée délimitée par la droite de budget est sa contrainte budgétaire (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des possibilités de consommation). Mentionnons que le trait fin continu indique quelle aurait été sa droite de budget si personne dans le reste de la communauté ne contribuait au financement des biens publics (c'est-à-dire si $\hat{y} = 0$). Le trait fin continu ainsi que la partie inclinée du trait gras continu sont parallèles et ont une pente de -1.

En résumé, si les biens sont normaux et si nous excluons les solutions de coin, tout individu ayant une fonction d'utilité qui possède les attributs désirables que nous avons définis précédemment fait face à une courbe de réaction à pente strictement négative, d'où l'existence de resquillage. La pente de cette courbe de réaction est cependant supérieure à -1.

2.3 / L'unicité de l'équilibre de Nash

Dans cette section, nous démontrons un autre résultat bien connu en matière de provision d'un seul bien public: les décisions des agents portant sur la quantité optimale de biens publics qu'ils doivent acheter engendrent un équilibre de Nash qui est unique.

Dans les prochains paragraphes, nous montrons la validité de l'énoncé dans le cas particulier d'une économie composée de deux personnes uniquement. Un peu plus loin, nous nous intéressons au cas plus général d'une économie composée d'un nombre quelconque fini de personnes. Il est à noter que, dans ce texte, nous nous intéressons uniquement aux équilibres en stratégies pures.

<u>- Cas d'une économie composée de deux personnes</u>

À la section précédente, nous avons démontré l'exactitude de l'équation (8)

$$-1 < d\breve{G}/d\hat{y} \leq 0. \tag{8}$$

Si nous posons y^i comme étant la quantité de biens publics que l'individu i (i=A, B) désire acheter, il est évident que *du point de vue* de l'individu A, le $\acute{G}$ de l'équation (8) est équivalent à y^A, son niveau de contribution préféré, tandis que le $\acute{y}$ de la même égalité est équivalent à y^B, le niveau de contribution de l'individu B. En effectuant le changement de variables approprié à la nouvelle notation, la fonction de réaction de l'individu A donnée par l'équation (8) est tout a fait équivalente, dans le cas d'une économie composée uniquement d'une personne A et d'une personne B, à

$$-1 < dy^A/dy^B \leq 0. \tag{9}$$

En prenant maintenant le *point de vue* de l'individu B et en utilisant la même notation, un raisonnement identique nous amène à conclure que la fonction de réaction de l'individu B donnée par l'équation (8) peut aussi être réécrite de la manière suivante

$$-1 < dy^B/dy^A \leq 0. \tag{10}$$

Or, l'équation (10) implique que

$$dy^A/dy^B < -1. \tag{11}$$

Puisque, dans un premier temps, la fonction de réaction de l'individu A (donnée par l'équation (9)) et celle de l'individu B (donnée par l'équation (11)) sont toutes les deux décroissantes et que, dans un deuxième temps, la pente de la première est toujours supérieure à celle de la seconde, il n'est pas possible que l'équilibre de Nash soit autrement qu'unique. Le lecteur muni d'un crayon et d'un papier devrait être capable de se convaincre facilement qu'il s'agit de conditions suffisantes pour empêcher la multiplicité d'équilibre ou encore l'inexistence d'équilibre.

De façon formelle, si y^A=$f(y^B)$ et y^A=$g(y^B)$ sont respectivement les fonctions de réaction de l'individu A et de l'individu B[12], alors les deux fonctions de réaction se croisent lorsque $h(y^B) \equiv f(y^B)-g(y^B)$ croise l'axe des abscisses. Or, étant donné que la pente de la fonction $f(y^B)$, soit $f'(y^B)$, $\in$ à l'intervalle

[12] Pour être rigoureux, y^A=$g(y^B)$ est en fait la *fonction réciproque* de la fonction de réaction de l'individu B y^B=$g^{-1}(y^A)$. Pour ne pas alourdir le texte, nous ignorons ce détail.

]-1,0] et que la pente de la fonction $g(y^B)$, soit $g'(y^B)$, $\in$ à l'intervalle $-\infty$,-1[, il faut nécessairement que $h'(y^B) = f'(y^B)-g'(y^B) \in$ à l'intervalle]0,∞. Ainsi, parce que $h'(y^B) \equiv f'(y^B)-g'(y^B)$ est partout strictement croissante, alors $h(y^B) = f(y^B)-g(y^B)$ ne peut croiser l'axe des abscisses qu'au maximum une fois, d'où la nécessité qu'il existe au plus un seul équilibre de Nash. De plus, par le théorème général d'existence d'un équilibre de Nash, qui confirme que tout jeu, dans lequel les joueurs ont un nombre infini de stratégies pures, possède au moins un équilibre de Nash[13], nous savons que $h(y^B) \equiv f(y^B)-g(y^B)$ croise l'axe des abscisses au moins une fois. Comme il existe au plus et au moins un équilibre de Nash, alors nous pouvons conclure que cet équilibre est nécessairement unique.

- Cas d'une économie composée d'un nombre quelconque de personnes

Afin de montrer que la proposition d'unicité est aussi vraie pour un nombre de personnes plus grand que deux, nous devons définir une nouvelle notation. Avant de le faire, soulignons que, dans les lignes qui vont suivre, nous nous bornerons à établir qu'il ne peut exister plus d'un équilibre de Nash étant donné que le théorème d'existence d'un équilibre de Nash nous assure qu'il existe toujours au moins un de ces équilibres.

Soient $\boldsymbol{x}^h=(x_1^h, x_2^h, \ldots, x_i^h, \ldots, x_n^h)'$ un vecteur dont le $i^{\text{ème}}$ élément est la quantité consommée du $i^{\text{ème}}$ bien privé par l'individu h; y^h la quantité de biens publics que l'individu h se procure; $\hat{y}^h$ la quantité de biens publics achetés par tous les autres membres de la communauté de l'individu h; $U^h(\boldsymbol{x}^h, y^h+\hat{y}^h)$ la fonction d'utilité de l'individu h, laquelle dépend de $\boldsymbol{x}^h$, y^h et $\hat{y}^h$; I^h le revenu initial de l'individu h; et enfin $\{(\boldsymbol{x}^{1*}, y^{1*}), (\boldsymbol{x}^{2*}, y^{2*}), \ldots, (\boldsymbol{x}^{N*}, y^{N*})\}$ un équilibre de Nash.

Puisque le problème de maximisation de l'individu h (h=1, 2, ..., N) est

$$\max_{\boldsymbol{x}^h, y^h} \; U^h(\boldsymbol{x}^h, y^h+\hat{y}^h) \qquad \text{s.c.} \quad \begin{aligned} &\boldsymbol{x}^h \geq \boldsymbol{0} \\ &y^h \geq 0 \\ &I^h = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^h + p_y y^h, \end{aligned}$$

[13] Voir (Glicksburg 1952) cité dans (Bierman et Fernandez 1993: 211). Notons que les conditions d'application du théorème sont respectées parce que la fonction $U(\boldsymbol{x}, y+\hat{y})$ est continue en $\hat{y}$ et est continue et quasi-concave en x_i et y.

alors, par définition, nous savons que $\{(x^{1}*, y^{1}*), (x^{2}*, y^{2}*), ..., (x^{N}*, y^{N}*)\}$ est un équilibre de Nash si et seulement si

$$U^h(\boldsymbol{x}^h*, y^h*+\tilde{y}^h*) \geq U^h(\boldsymbol{x}^h, y^h+\tilde{y}^h*) \qquad \text{pour tout } h\ (h=1, 2, ..., N)$$
$$\text{pour tout } \{(\boldsymbol{x}^h, y^h) \mid \boldsymbol{x}^h \geq \boldsymbol{0},\ y^h \geq 0 \text{ et } I^h = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^h + p_y y^h\}.$$

Pour prouver que $\{(x^{1}*, y^{1}*), (x^{2}*, y^{2}*), ..., (x^{N}*, y^{N}*)\}$ est le seul équilibre de Nash possible, nous allons supposer qu'il existe un autre équilibre de Nash $\{(x^{1\prime}, y^{1\prime}), (x^{2\prime}, y^{2\prime}), ..., (x^{N\prime}, y^{N\prime})\}$ et montrer qu'il est impossible qu'un tel équilibre existe.

Soient $Y^*= y^1*+ y^2*+...+y^N*$ et $Y'=y^{1\prime}+y^{2\prime}+...+y^{N\prime}$. Si $\{(x^{1\prime}, y^{1\prime}), (x^{2\prime}, y^{2\prime}), ..., (x^{N\prime}, y^{N\prime})\} \neq \{(x^{1}*, y^{1}*), (x^{2}*, y^{2}*), ..., (x^{N}*, y^{N}*)\}$, au moins un des trois cas suivants doit exister: (i) $Y'>Y^*$; (ii) $Y'=Y^*$; (iii) $Y'<Y^*$. Ci-dessous, nous traitons chaque cas individuellement et expliquons pourquoi aucun d'eux ne peut être possible, d'où l'inexistence d'un second équilibre différent du premier.

(i) Enfin, si $Y^*>Y'$, nécessairement il existe au moins un individu h tel que $y^{h\prime}-y^h*<0$. Mais pour qu'il existe un tel individu, il faut également que $\tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*>0$ (en raison de la pente négative de la fonction de réaction de l'individu h). Par conséquent, puisque la pente de la fonction de réaction est supérieure à -1, alors $\tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*>-(y^{h\prime}-y^h*) \Rightarrow \tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*>y^h*-y^{h\prime}$. Mais ceci est impossible car pour avoir $Y^*<Y'$, il est nécessaire que $y^h*+\tilde{y}^h*>y^{h\prime}+\tilde{y}^{h\prime} \Rightarrow \tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*<y^h*-y^{h\prime}$.

(ii) Si $Y^*=Y'$, nécessairement il existe au moins un individu h tel que $y^{h\prime}-y^h*<0$ pour que les deux équilibres de Nash soient différents. Mais pour qu'il existe un tel individu, il faut également que $\tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*>0$ (en raison de la pente négative de la fonction de réaction de l'individu h). Par conséquent, puisque la pente de la fonction de réaction est supérieure à -1, alors $\tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*>-(y^{h\prime}-y^h*) \Rightarrow \tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*>y^h*-y^{h\prime}$. Mais ceci est impossible car pour avoir $Y^*=Y'$, il est nécessaire que $y^h*+\tilde{y}^h*=y^{h\prime}+\tilde{y}^{h\prime} \Rightarrow \tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*=y^h*-y^{h\prime}$.

(iii) Enfin, si $Y^*<Y'$, nécessairement il existe au moins un individu h tel que $y^{h\prime}-y^h*>0$. Mais pour qu'il existe un tel individu, il faut également que $\tilde{y}^{h\prime}-\tilde{y}^h*<0$ (en raison de la pente négative de la fonction de réaction de l'individu h). Par conséquent, puisque la pente de la fonction de réaction est supérieure à -1, alors $y^{\tilde{h}\prime}$-$y^{\tilde{h}*}$<-($y^{h\prime}$-y^{h*}) $\Rightarrow$ $y^{\tilde{h}}$-$y^{\tilde{h}*}$<y^{h*}-$y^{h\prime}$. Mais ceci est impossible car pour avoir $Y^*<Y'$, il est nécessaire que $y^{h*}+y^{\tilde{h}*}<y^{h\prime}+y^{\tilde{h}\prime} \Rightarrow y^{\tilde{h}\prime}-y^{\tilde{h}*}>y^{h*}-y^{h\prime}$.

Chapitre 3 / Critiques et limites du modèle

3.1 / Critiques

Au plus, un modèle est acceptable aussi longtemps que ses prédictions correspondent à la réalité. Quand le produit de l'observation est confronté aux prédictions et qu'il y a inadéquation, tout modèle, aussi intéressant soit-il, doit être modifié ou carrément rejeté. C'est notre prétention que de croire que les prédictions du modèle présenté au chapitre précédent ne sont pas applicables à certains phénomènes sociaux associés à la production de biens publics (bien qu'elles le soient pour d'autres). Dans cette section, nous présentons des exemples et enchaînons avec quelques réflexions.

Lorsque les membres d'un groupe ont la possibilité d'entreprendre des actions en commun, il arrive que certains choisissent de réduire leur temps consacré à des activités personnelles ou de réduire leur budget consacré à l'achat de biens privés pour contribuer davantage à l'augmentation de la satisfaction des membres du groupe auquel ils appartiennent. Ce qui motive ces individus à agir de la sorte relève d'eux uniquement. Ce qui est intéressant par contre à observer à l'occasion est que les individus investissent rarement des énergies et de l'argent de la sorte dans ce but quand ils savent que jamais personne d'autres dans le groupe n'accepte de leur rendre la pareille. Dans plusieurs situations, un individu ne sera intéressé à donner une partie de son temps et/ou de ses ressources financières pour le groupe que si l'ensemble des autres individus font de même envers lui. Dit autrement, une personne contribuera parfois grandement à la production d'un bien public dans la mesure où les autres contribuent beaucoup également. À titre d'illustration, on observera en général qu'une personne à l'intérieur d'une cellule familiale acceptera de prendre régulièrement des initiatives (qui ne sont pas sans coûts) pour solidifier les liens familiaux (en invitant ses parents, ses soeurs, ses frères et les conjoints à une réception par exemple) à la condition que les autres membres de la parenté prennent également des initiatives similaires au moins occasionnellement. Également, un membre d'une association (étudiante, syndicale ou autre) voudra volontairement offrir son temps à organiser bénévolement des activités spéciales pour les membres de son association s'il y a d'autres personnes comme lui qui parfois prennent la relève et s'il n'est pas toujours seul à devoir tout préparer. Ensuite, une personne acceptera de faire la file pour entrer dans une salle de spectacle si l'ensemble des autres membres du groupe accepte également de faire de même. S'il n'y a pas de file ou si presque tout le monde essaie de dépasser, il serait assez surprenant que quatre ou cinq nouveaux arrivants choisissent tout bonnement de se placer les uns derrière les autres, comme probablement ils le feraient naturellement s'il y avait eu une file d'attente. Dernier exemple, une personne voudra volontiers utiliser son temps et dépenser de l'argent pour son transport afin de participer à une manifestation politique dans le but de protester contre l'adoption d'un projet de loi qu'elle désapprouve pour autant qu'elle s'attend à ce qu'elle ne soit pas seule à manifester.

Inviter la parenté à une réception, organiser des activités pour les autres, respecter la convention de faire une file et participer à une manifestation sont tous des biens publics au sens où nous l'avons défini. Le dénominateur commun de tous ces exemples traitant d'un bien public est que l'on observe que le niveau de contribution d'un individu à la production du bien varie dans le même sens que le niveau de contribution des autres membres de la collectivité. Plus les autres contribuent à la production du bien public, plus chacun accepte de faire de grandes contributions. Cette observation qui peut être faite occasionnellement lors de certaines situations réelles vient en contradiction directe avec l'intérêt des membres à resquiller dont nous faisions allusion au chapitre précédent.

Si le modèle du chapitre 2 prédisait correctement comment les gens se comportent, alors nous devrions observer que lorsque nous invitons plus souvent les membres de notre parenté, ceux-ci désirent nous inviter moins souvent. Or, ce n'est manifestement pas ce qui se produit en général dans la réalité. Avec ce modèle, nous devrions pouvoir observer également que plus une association est dynamique et plus les autres membres de cette association organisent des activités spéciales, moins il y a de chance qu'une personne donnée désire à son tour s'impliquer. Encore ici, c'est faux. En général, nous avons plus le goût de nous impliquer dans une association quand nous nous attendons à ce que le reste des membres va faire la même chose. Ensuite, si le modèle du chapitre 2 était exact, nous devrions remarquer aussi que plus les files d'attente sont longues, plus il y a de chance qu'une personne refuse de se mettre à son tour en file indienne et décide plutôt d'aller se placer tout juste le premier en avant de tout le monde qui attendait. Dans la réalité, on conviendra avec nous que ce genre de comportement est rare. Finalement, selon le même modèle, on devrait pouvoir constater que plus une manifestation est susceptible d'attirer du monde, moins on est intéressé à aller y participer. C'est inexact. En vérité, les organisateurs politiques savent que le recrutement d'une personne additionnelle pour venir grossir les rangs d'une manifestation pacifique est plus facile à faire quand la personne pense que la manifestation risque d'être très grosse que lorsqu'on s'attend à ce qu'elle ne regroupe qu'une poignée d'individus.

La présentation de ces quelques exemples a pour but de convaincre qu'il arrive parfois que les individus n'ont pas toujours intérêt à resquiller. En souhaitant que nous ayons réussi et en espérant que la robustesse de ces exemples ne soit pas trop facilement contestable aux yeux du lecteur averti, nous voulions attirer l'attention sur le fait que le modèle du chapitre 2 de production d'un bien public est excellent pour expliquer plusieurs phénomènes mais est incapable de tous les expliquer. Le modèle apparaissant inexact en partie, nous aimerions le reformuler et améliorer l'un de ses points faibles. Pour ce faire, il importe de lui identifier quelques limites.

3.1 / Limites

Le modèle économique que nous avons présenté au chapitre précédent est simple et peut constituer, à ce titre, un excellent point de départ à première vue. Cependant, ce modèle comporte au moins trois limites qui doivent être soulignées. En premier lieu, gardons à l'esprit que notre analyse s'applique à un modèle particulier de production d'un bien public dans lequel nous prenons pour acquis que les contributions des individus sont parfaitement substituts. Quand un agent augmente sa contribution d'une unité et qu'un autre diminue la sienne de la même quantité, cela n'affecte pas la quantité de biens publics que les autres individus peuvent consommer. La leçon à retenir est que si la fonction de production des biens publics est différente de $Y=\sum y^i$, rien ne nous autorise a priori à croire que les fonctions de réaction seront également à pente négative et que l'équilibre de Nash sera unique.

Deuxièmement, nous avons analysé le modèle comme s'il *ne* s'agissait *pas* d'un jeu répété pour les agents qui doivent identifier leur niveau de contribution préféré. Parce que nous vivons dans un monde où très souvent nous pouvons continuellement réviser nos décisions dans le temps, il est clair que le modèle fait abstraction d'un élément possiblement important de la réalité. Il faut en être conscient.

Enfin, il est utile de rappeler que le modèle a recours à des fonctions d'utilité qui ne dépendent que des quantités consommées de biens privés et de biens publics. Ainsi, quand les individus prennent des décisions économiques sur leur niveau de contribution au financement d'un bien public, ils ne seraient intéressés que par la maximisation de leurs gains matériels au détriment de tout autre chose. Il s'agit là bien sûr d'une simplification démesurée de la réalité que l'économiste Mancur Olson a même pris bien soin de souligner dans sa Logique de l'action collective.

Dans cet ouvrage, Olson défend la thèse qu'est fausse l'idée généralement prise pour acquise que «si les membres d'un groupe ont un objectif commun et si la réalisation de cet objectif est profitable à tous, il devrait s'ensuivre en bonne logique que, dans la mesure où ils sont raisonnables et attachés à leurs intérêts, ils agiront de manière à atteindre cet objectif» (Olson 1978: 22).

Pour y arriver, l'auteur développe une argumentation composée de plusieurs exemples. Sans utiliser beaucoup de mathématiques, Olson explique que la fausseté de l'énoncé provient du phénomène de ce que nous avons appelé antérieurement le "resquillage". En termes clairs, s'il existe une communauté de personnes ayant toutes un intérêt commun, consciente de cet intérêt et pouvant chacun contribuer à la réalisation de cet intérêt, Olson soutient qu'il est improbable qu'une ou plusieurs de ces personnes vont agir à la promotion de cet intérêt et donc participer à l'action collective. Pourquoi? Parce que dans un grand nombre de situations (et bien qu'il serait, notons-le, à l'avantage de chacun que tous participent à cette action collective), quand les agents cherchent à servir leurs propres intérêts personnels, il est profitable sur le plan individuel de ne pas participer pleinement à l'action collective en payant le prix correspondant, de laisser plutôt les autres le faire à sa place et de profiter des bénéfices des efforts et sacrifices effectués par les autres. Autrement dit, il est avantageux de pratiquer le resquillage sur le dos des autres membres de la collectivité. C'est exactement la proposition que nous avons défendue quand nous avons prétendu que les individus font face à une courbe de réaction à pente négative: plus la contribution des autres au financement des biens publics est importante, moins on a intérêt à contribuer!

En consignant de multiples observations, Olson va cependant plus loin dans son raisonnement car, comme il l'indique, sa théorie contient d'importantes limites et n'est pas applicable à toutes les situations. En ce sens, il se permet d'édicter certaines conditions qui peuvent, selon lui, réduire ou même annuler complètement le phénomène du resquillage. L'une des plus intéressante d'entre elles, selon nous, est ce qu'il appelle l'existence possible de «motivations sociales» chez les individus. À tort ou à raison, la notion de «motivations sociales» a fait l'objet de peu d'attention dans la littérature, peut-être en raison du fait qu'elle relève plus de la psychologie des individus que de la science économique.

Pour expliquer ce que sont les motivations sociales et justifier leur présence chez les individus, Olson affirme:

> «Les mobiles économiques ne sont évidemment pas les seuls qui existent; les individus sont souvent motivés par une soif de prestige, de respect, des amitiés et autres objectifs psychologiques. Bien que la formule "statut socio-économique" souvent utilisée dans les débats sur le statut laisse entendre qu'il doit y avoir une corrélation entre situation sociale et situation économique, il est hors de doute qu'il y a une différence entre les deux. On doit donc prendre en considération l'éventualité qu'un individu qui n'aurait pas un mobile d'ordre économique à contribuer à la défense des intérêts du groupe pourrait néanmoins avoir des mobiles sociaux[14]. Et il est bien évident que cette éventualité existe. Si un petit groupe de gens qui ont intérêt à acquérir un bien collectif se trouvent être en même temps des amis personnels ou appartiennent au même cercle, et que certains membres du groupe laissent aux autres la charge de l'obtention du bien collectif, il se peut que même, si cette conduite leur est avantageuse sur le plan financier, elle se solde par un déficit sur le plan social et que la perte sociale soit plus considérable que le gain économique[15]. Leurs amis sont en mesure d'exercer sur eux une "pression sociale" pour les inciter à participer à l'effort collectif, et de telles démarches peuvent être fructueuses car l'observation quotidienne nous révèle que la plupart des gens sont sensibles au jugement de leurs

[14] Souligné par nous.

[15] Souligné par nous.

amis et associés et attachent du prix au statut social, au prestige personnel et à l'estime de soi.» (Olson 1978: 83).

En quelque sorte, le point défendu par Olson est que les motivations sociales, si elles sont suffisamment fortes, peuvent être un inhibiteur chez les individus qui voudraient refuser de contribuer à l'effort collectif.

Certes, la présence potentielle de motivations sociales ne semble pas pouvoir être contestée par quiconque. Régulièrement, les aspects sociaux et moraux d'une décision sont pris en considération au même titre que les aspects financiers ou matériels.

Néanmoins, prenons garde de vouloir trop simplifier. Affirmer que les motivations sociales existent ne signifie pas que tous les individus en prenant leurs décisions sont affectés fortement et de la même façon par elles. En adoptant une approche économique à la question, il n'est pas absurde de considérer les motivations sociales comme des "biens" sur lesquelles les individus manifestent des préférences. La préférence pour les motivations sociales par rapport aux motivations matériels est donc une question de degré; et comme toute autre préférence, elle peut varier d'un individu à l'autre bien entendu.

Ainsi, le modèle du chapitre 2 peut être étendu dans au moins trois directions: l'utilisation de différentes fonctions de production du bien public, l'analyse du modèle en tant que jeu répété et l'introduction de «motivations sociales» chez les individus. Parmi ces trois avenues, nous avons choisi de privilégier la troisième.

Après que nous ayons tenté de nous convaincre que les motivations sociales peuvent exister dans la réalité, il serait intéressant de nous demander si la présence de ces motivations sociales modifie les comportements stratégiques des individus quant à leur niveau de contribution au financement d'un bien public. Si oui, alors de quelle façon les résultats du modèle de provision d'un seul bien public présenté au chapitre précédent (dans lequel, soit dit en passant, l'existence possible de motivations sociales a été ignorée) sont modifiés? Est-ce que ces modifications permettent d'expliquer pourquoi il appert, dans quelques situations, que les individus ne resquillent pas lorsqu'ils contribuent à la production d'un bien public? Les réponses à ce questionnement seront abordées dans la deuxième partie de cette étude.

- DEUXIÈME PARTIE -
MODÈLE DE PRODUCTION D'UN BIEN PUBLIC AVEC MOTIVATIONS SOCIALES

En présentant un modèle simple de production d'un bien collectif, nous nous sommes limité jusqu'ici à comprendre pourquoi les individus avaient tendance à pratiquer naturellement le resquillage. Nous avons constaté qu'ils avaient avantage à se comporter ainsi sur le plan personnel à cause de la pente négative de leur fonction de réaction. En outre, suivant le même modèle, nous avons été en mesure de vérifier que, lorsque les individus choisissent leur niveau de contribution sans connaître les décisions des autres, le niveau d'équilibre de production du bien public est unique et donc parfaitement prédictif. Pour ce faire, nous avons eu recours au concept de l'équilibre de Nash.

Malheureusement, ce modèle comporte certaines faiblesses. Principalement, il ne permet pas d'expliquer pourquoi, à l'occasion, les individus augmentant leur niveau de contribution lorsque le reste de la communauté accroît le sien adoptent un comportement qui est incompatible avec l'existence d'une fonction de réaction à pente partout négative.

Dans les trois prochains chapitres, nous proposerons et analyserons un nouveau modèle de production d'un bien public dans lequel les individus peuvent avoir des motivations sociales. Ce modèle ressemble beaucoup au modèle du chapitre 2, mais les résultat de l'analyse sont différentes. Nous ferons la démonstration que les motivations sociales au sens de Olson ne sont pas à négliger car à elles-seules elles sont capables d'expliquer pourquoi nous pouvons observer que les fonctions de réaction sont tantôt à pente négative, tantôt à pente positive ou tantôt les deux en même temps.

Dans cette seconde partie, nous étendons, au chapitre 4, le modèle de base du chapitre 2 en y introduisant le concept de motivations sociales. Par la suite, au chapitre suivant, nous nous proposons d'analyser les implications de ce nouveau modèle. Pour terminer, nous procédons à une simulation numérique dans le chapitre 6 afin d'illustrer les résultats que nous aurons obtenus.

Chapitre 4 / Reformulation du modèle théorique

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle économique simple de provision d'un seul bien public dans lequel les agents doivent choisir leur niveau de contribution au financement du bien public. Ce modèle se différencie du modèle développé au chapitre 2 uniquement par le fait que nous dotons les agents de ce modèle-ci de motivations sociales au sens de Olson en plus de leurs motivations matérielles habituelles[16].

Plus précisément, nous considérons que les agents ont une dotation initiale $I \geq 0$ et possèdent des préférences sur trois grandes catégories de biens: un bien (matériel) privé, un bien (matériel) public et un bien social[17]. Également, nous faisons l'hypothèse que le niveau de satisfaction d'un individu qui consomme les trois types de biens peut s'exprimer sous la forme traditionnelle d'une fonction d'utilité générale $U(x, Y, S)$ où x est la quantité consommée du bien privé; Y, la quantité consommée du bien public par tous les membres de la communauté et S, la quantité "consommée" du bien social par l'individu. De la même manière que nous l'avons fait au chapitre 2, nous supposons que la fonction $U(\cdot)$ possède les caractéristiques désirables habituelles; c'est-à-dire qu'elle est continue, quasi-concave, strictement croissante par rapport à tous ses arguments et partout deux fois dérivables par rapport à chacun de ses trois arguments. Enfin, nous faisons l'hypothèse que rien ni personne ne peut exercer une influence sur les prix et que chacun prend les actions des autres comme données.

De plus, il est à noter que nous devons établir des contraintes sur S. En effet, en suivant la logique de Olson, S n'est pas une donnée entièrement exogène. S se doit d'être une fonction qui dépend au

[16] Une autre différence existe. Pour simplifier la présentation, nous avons décidé d'utiliser un modèle comprenant un seul bien privé représenté par une variable unique plutôt que de faire intervenir un vecteur de biens privés représentant n biens privés.

[17] Il est vrai que l'utilisation de l'expression "biens sociaux" parait curieux à première vue. Néanmoins, il n'en demeure pas moins que l'amitié, l'estime de soi et le prestige (pour prendre les mêmes exemples que ceux de Olson) peuvent être vus comme des "biens" que l'on peut consommer. À preuve, prendre un repas au restaurant en compagnie d'un très bon ami ne procure pas le même niveau de satisfaction que le partage du même repas dans le même restaurant avec un étranger.

moins de y, le niveau de contribution de l'individu au financement des biens publics, et de $\hat{y} = Y - y$, le niveau de contribution du reste de la communauté au financement des biens publics. Voici pourquoi.

S doit dépendre de y car, logiquement, il est judicieux de penser que chez les individus, le bénéfice moral rattaché à une participation faible à l'action collective est petit. Ce bénéfice augmente par contre à mesure que les individus acquiescent à accroître leur propre participation parce qu'en même temps que celle-ci s'accroît, le prestige, l'estime de soi, la satisfaction de pouvoir contribuer à quelque chose et les autres valeurs psychologiques dont fait allusion Olson s'élèvent également. Mathématiquement, nous devons alors en principe avoir la propriété $\partial S / \partial y > 0$.

En outre, en suivant la logique de Olson, les individus possédant des motivations sociales doivent subir un bénéfice moral qui varie non seulement en fonction de y, leur propre niveau de contribution, mais également en fonction de $\hat{y}$, le niveau de contribution des autres membres de la collectivité à l'effort collectif. En effet, dans les groupes dont les membres participent peu à l'effort collectif, il est logique de croire que les pressions sociales et les jugements (pour employer les termes de Olson) qu'exercent les membres sur leurs collègues soient respectivement moins fortes (ou plus faibles) et moins négatifs (ou plus positifs) que lorsque l'ensemble des individus participent énormément à la production du bien collectif. Quand un individu augmente graduellement sa participation à l'effort collectif, il devient un peu plus exigeant envers les autres qui décident de maintenir constant leur niveau de contribution et il s'ensuit qu'une pression accrue s'exerce sur ces derniers. En conséquence, il faut s'attendre à ce que les motivations soient telles que les bénéfices moraux liés à la participation à l'action collective décroissent à mesure que la participation des autres membres de la collectivité à la production du bien public augmente. En somme, on doit pouvoir observer en principe la propriété mathématique suivante: $\partial S / \partial \hat{y} < 0$.

Chapitre 5 / Analyse du modèle théorique

Les observations et l'argumentation du dernier chapitre peuvent se résumer ainsi. Soit un modèle avec motivations sociales qui prend en considération un individu ayant la fonction d'utilité suivante:

$U(x, Y, S(y,\hat{y})) = U(x, y+\hat{y}, S(y,\hat{y}))$ où $U(\cdot)$ est continue, quasi-concave et deux fois dérivable

$$\partial U/\partial x \equiv U_x > 0 \quad (12)$$
$$\partial U/\partial Y \equiv U_Y > 0 \quad (13)$$
$$\partial U/\partial S \equiv U_S > 0 \quad (14)$$
$$\partial S/\partial y \equiv S_y > 0 \quad (15)$$
$$\partial S/\partial \hat{y} \equiv S_{\hat{y}} < 0. \quad (16)$$

Analysons ce modèle et tentons de répondre aux questions formulées à la fin du chapitre 3. Notre but est d'examiner si les conclusions auxquelles nous sommes parvenu après avoir analysé le modèle du chapitre 2 sont les mêmes que lorsque nous étudions le modèle avec motivations sociales du chapitre 4. Si les résultats sont différents, nous essaierons de vérifier si les modifications aux résultats permettent d'expliquer pourquoi, comme nous avons pu l'observer à l'aide de quelques exemples, les individus ne resquillent pas dans certaines situations alors qu'ils resquillent en d'autres occasions.

Dans la première section, nous essaierons d'évaluer la pente de le fonction réaction d'un individu faisant face à la fonction d'utilité et aux restrictions décrites ci-dessus. Dans la seconde, nous tenterons d'établir si le modèle du chapiter 4 avec motivations sociales engendre un équilibre de Nash qui est unique. Nous terminerons ce chapitre avec une dernière section regroupant un ensemble de remarques complémentaires sur les résultats que nous aurons trouvés.

5.1 / Calcul de la pente de la fonction de réaction

Un individu ayant la fonction d'utilité décrite ci-dessous fait face au problème de maximisation suivant.

$$\underset{x,\, y}{\text{Max}} \quad U(x, Y, S(y,\hat{y})) = U(x, y+\hat{y}, S(y,\hat{y})) \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ I \geq px + p_y y. \end{array}$$

Les deux premières contraintes signifient que l'individu ne peut consommer une quantité négative de biens. La troisième - dans laquelle p et p_y sont respectivement le prix du bien privé et le prix du bien public - représente la contrainte budgétaire de l'individu, cette dernière devant être satisfaite avec le signe d'égalité lorsque l'individu maximise son utilité.

À l'optimum, nous savons que l'égalité suivante doit être respectée si nous sommes en présence d'une solution intérieure

$$dU/dy = U_x\,(dx/dy) + U_Y\,(dY/dy) + U_S\,(dS/dy) = 0. \tag{17}$$

Comme

$$x = (I - p_y y)/p \Leftrightarrow dx/dy = -p_y/p,$$

$$dY/dy = d(y+\hat{y})/dy = dy/dy = 1^{18},$$

$$dS(\cdot)/\mathrm{d}y = S_y\,(dy/dy) + S_{\hat{y}}\,(d\hat{y}/dy) = S_y;$$

l'équation (17) devient tout simplement

$$dU/dy = U_x\,(-p_y/p) + U_Y + U_S\,S_y = 0. \tag{17'}$$

Si la solution n'est pas intérieure mais est plutôt une solution de coin[19], alors nous avons l'un ou l'autre des deux systèmes d'équations qui suit comme solution du problème de maximisation

$$\{x = 0 \text{ et } y = I/p_y\} \tag{18}$$

---

[18] $d\hat{y}/dy=0$ car nous avons mentionné que nous faisions l'hypothèse qu'aucun individu ne pouvait exercer une influence sur les choix faits par les autres membres de la collectivité.

[19] C'est-à-dire si le couple $\{(x,y) \mid dU/dy = U_x\,(-p_y/p) + U_Y + U_S\,S_y = 0\} \notin \{[0, I/p] \times [0, I/p_y]\}$

$\{x = I/p \text{ et } y=0\}$. (19)

Le choix entre les systèmes (18) et (19) s'effectue après avoir évalué lequel maximise la fonction d'utilité $U(x, y+\hat{y}, S(y,\hat{y}))$. Si $U(0, (I/p_y)+\hat{y}, S((I/p_y),\hat{y}) > U(I/p, \hat{y}, S(0,\hat{y}))$, la solution est donnée par le système d'équations (18), Si c'est l'inverse, la solution est alors donnée par le système d'équations (19).

Quand il s'agit d'une solution de coin, la pente de la courbe de réaction est facile à calculer. Que la solution du problème de maximisation soit donnée par le système d'équations (18) ou (19), y est une constante et, en conséquence,

$$dy/d\hat{y} = d(I/p_y)/d\hat{y} = d0/d\hat{y} = 0. \qquad (20)$$

Si la solution est intérieure, le travail pour déterminer la pente de la fonction de réaction est un peu plus long. Pour commencer, calculons la différentielle totale de chaque membre de l'égalité (17'). Cette différentiation donne

$$\begin{aligned} & d[U_x(-p_y/p) + U_Y + U_S S_y] = d0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-p_y/p)\,[\,U_{xx}\,dx + U_{xY}\,dY + U_{xS}\,dS] + (U_{Yx}\,dx + U_{YY}\,dY + U_{YS}\,dS) \\ & + (S_Y\,[\,U_{Sx}\,dx + U_{SY}\,dY + U_{SS}\,dS] + U_S\,[S_{yy}\,dy + S_{y\hat{y}}\,d\hat{y}] = 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Lorsque la relation (21) est vraie (c'est-à-dire quand la solution est intérieure), on en déduit que les deux équations suivantes sont vraies également

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (-p_y/p)\,[\,U_{xx}(dx/dy) + U_{xY}(dY/dy) + U_{xS}(dS/dy)\,] + [\,U_{Yx}(dx/dy) + U_{YY}(dY/dy) + U_{YS}\ (dS/dy)] \\ & + \{\ S_y\,[\,U_{Sx}(dx/dy) + U_{SY}(dY/dy) + U_{SS}(dS/dy)\,] + U_S\,[S_{yy}(dy/dy) + S_{y\hat{y}}(d\hat{y}/dy)\,]\ \} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & (-p_y/p)\,[\,U_{xx}(-p_y/p) + U_{xY}(dy/dy + d\hat{y}/dy) + U_{xS}(S_y(dy/dy) + S_{\hat{y}}(d\hat{y}/dy))\,] + [\,U_{Yx}(-p_y/p) + U_{YY} \\ & (dy/dy + d\hat{y}/dy) + U_{YS}\ (S_y(dy/dy) + S_{\hat{y}}(d\hat{y}/dy))\,] + \{\ S_y\,[\,U_{Sx}(-p_y/p) + U_{SY}(dy/dy + d\hat{y}/dy) + \\ & U_{SS}(S_y(dy/dy) + S_{\hat{y}}(d\hat{y}/dy))] + U_S\,[S_{yy}(dy/dy) + S_{y\hat{y}}(d\hat{y}/dy)\,]\ \} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & (-p_y/p)\,[\,U_{xx}(-p_y/p) + U_{xY}(1 + d\hat{y}/dy) + U_{xS}(S_y + S_{\hat{y}}(d\hat{y}/dy))\,] + [\,U_{Yx}(-p_y/p) \\ & + U_{YY}(1 + d\hat{y}/dy) + U_{YS}\ (S_y + S_{\hat{y}}(d\hat{y}/dy))\,] + \{\ S_y\,[\,U_{Sx}(-p_y/p) + U_{SY}(1 + d\hat{y}/dy) \\ & + U_{SS}(S_y\,1 + S_{\hat{y}}(d\hat{y}/dy))] + U_S\,[S_{yy} + S_{y\hat{y}}(d\hat{y}/dy)\,]\ \} = 0 \end{aligned} \qquad (21.1)$$

(ii) $(-p_y/p)\,[\,U_{xx}\,(dx/dI) + U_{xY}\,(dY/dI) + U_{xS}\,(dS/dI)\,] + [\,U_{Yx}\,(dx/dI) + U_{YY}\,(dY/dI) + U_{YS}\,(dS/dI)]$
$+ \{\, S_y\,[\,U_{Sx}\,(dx/dI) + U_{SY}\,(dY/dI) + U_{SS}\,(dS/dI)] + U_S\,[S_{yy}\,(dy/dI) + S_{y\hat{y}}\,(d\hat{y}/dI)\,]\,\} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-p_y/p)\,[\,U_{xx}\,(dx/dI) + U_{xY}\,(dy/dI + d\hat{y}/dI) + U_{xS}\,(S_y\,(dy/dI) + S_{\hat{y}}\,(d\hat{y}/dI))\,] + [\,U_{Yx}\,(dx/dI)$
$+ U_{YY}\,(dy/dI + d\hat{y}/dI) + U_{YS}\,\,(S_y\,(dy/dI) + S_{\hat{y}}\,(d\hat{y}/dI))\,] + \{\, S_y\,[\,U_{Sx}\,(dx/dI) + U_{SY}\,(dy/dI$
$+ d\hat{y}/dI) + U_{SS}\,(S_y\,(dy/dI) + S_{\hat{y}}\,(d\hat{y}/dI))] + U_S\,[S_{yy}\,(dy/dI) + S_{y\hat{y}}\,(d\hat{y}/dI)\,]\,\} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-p_y/p)\,[\,U_{xx}\,(dx/dI) + U_{xY}\,(dy/dI) + U_{xS}\,S_y\,(dy/dI)\,] + [\,U_{Yx}\,(dx/dI) + U_{YY}\,(dy/dI)$
$+ U_{YS}\,S_y\,(dy/dI)\,] + \{\, S_y\,[\,U_{Sx}\,(dx/dI) + U_{SY}\,(dy/dI) + U_{SS}\,(S_y\,(dy/dI)] + U_S\,S_{yy}\,(dy/dI)\,\} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-p_y/p)\,[\,U_{xx}\,(dx/dI) + U_{xY}(-p/p_y)\,(dx/dI) + U_{xS}\,S_y\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI)\,] + [\,U_{Yx}\,(dx/dI)$
$+ U_{YY}(-p/p_y)\,\,(dx/dI) + U_{YS}\,\,S_y\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI)\,\,] + \{\, S_y\,[\,U_{Sx}\,(dx/dI) + U_{SY}\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI)$
$+ U_{SS}\,S_y\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI)\,\,+ U_S\,S_{yy}(-p/p_y)\,(dy/dI)\,\,]\,\} = 0$

$\Leftrightarrow$ $[\,\,(-p_y/p)\,U_{xx}\,(dx/dI) + U_{xY}(dx/dI) + U_{xS}\,S_y\,(dx/dI)\,] + [\,U_{Yx}\,(dx/dI) + U_{YY}(-p/p_y)\,\,(dx/dI)$
$+ U_{YS}\,\,Sy\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI)\,\,] + \,\,S_y\,[\,U_{Sx}\,(dx/dI) + U_{SY}\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI) + U_{SS}\,S_y\,\,(-p/p_y)\,(dx/dI)$
$+ U_S\,S_{yy}(-p/p_y)\,(dy/dI)\,\,] \,= 0$ (21.2)

En réarrangeant les termes de l'équation (21.1), nous pouvons obtenir une expression pour la pente de la fonction d'utilité

$$\frac{dy}{d\hat{y}} = \frac{(p_y/p)\,U_{xY} - U_{YY} - S_y\,U_{SY} + (p_y/\mathrm{p})\,U_{xS}\,S_{\hat{y}} - U_{YS}\,S_{\hat{y}} - U_{SS}\,S_y\,S_{\hat{y}} - U_S\,S_{y\hat{y}}}{(p_y/p)^2\,U_{xx} - 2(p_y/p)\,U_{xY} - 2(p_y/p)\,U_{xS}\,S_y + U_{YY} + 2\,U_{YS}\,S_y + (S_y)^2\,U_{SS} + U_S\,S_{yy}}. \tag{22}$$

L'évaluation du signe de cette égalité n'est pas simple à déterminer. Heureusement, nous savons que le dénominateur de cette expression est négatif en raison de la convexité de la fonction d'utilité que nous avons établie par hypothèse.

En effet, si la fonction $U(\cdot)$ est quasi-concave, alors

$$d^2U/dy^2 < 0. \tag{23}$$

Mais, comme

$$\begin{aligned} d^2U/dy^2 &= d[dU/dy]/dy = d[U_x\,(-p_y/p) + U_Y + U_S\,S_y]/dy \\ &= (p_y/p)^2\,U_{xx} - 2(p_y/p)\,U_{xY} - 2(p_y/p)\,U_{xS}\,S_y + U_{YY} + 2\,U_{YS}\,S_y + (S_y)^2\,U_{SS} + U_S\,S_{yy} \end{aligned} \tag{24}$$

et que le dernier membre de l'égalité (24) est identique au dénominateur de l'équation (22), alors par l'inéquation (23), il en résulte que ce dénominateur doit être négatif.

Par conséquent, le signe de l'égalité (22) est donné par l'inverse du signe du numérateur de la même égalité, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \text{si } dy/d\hat{y} < 0 \leftrightarrow (p_y/p)\, U_{xY} - U_{YY} - S_y\, U_{SY} + (p_y/\mathrm{p})\, U_{xS}\, S_{\hat{y}} - U_{YS}\, S_{\hat{y}} - U_{SS}\, S_y\, S_{\hat{y}} - U_S\, S_{y\hat{y}} > 0 \\ \text{si } dy/d\hat{y} > 0 \leftrightarrow (p_y/p)\, U_{xY} - U_{YY} - S_y\, U_{SY} + (p_y/\mathrm{p})\, U_{xS}\, S_{\hat{y}} - U_{YS}\, S_{\hat{y}} - U_{SS}\, S_y\, S_{\hat{y}} - U_S\, S_{y\hat{y}} < 0 \\ \text{si } dy/d\hat{y} = 0 \leftrightarrow (p_y/p)\, U_{xY} - U_{YY} - S_y\, U_{SY} + (p_y/\mathrm{p})\, U_{xS}\, S_{\hat{y}} - U_{YS}\, S_{\hat{y}} - U_{SS}\, S_y\, S_{\hat{y}} - U_S\, S_{y\hat{y}} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Il est fort utile de remarquer que ce numérateur peut s'écrire sous la forme plus compacte suivante

$$\begin{aligned} &(p_y/p)\, U_{xY} - U_{YY} - S_y\, U_{SY} + (p_y/\mathrm{p})\, U_{xS}\, S_{\hat{y}} - U_{YS}\, S_{\hat{y}} - U_{SS}\, S_y\, S_{\hat{y}} - U_S\, S_{y\hat{y}} \\ &= -\ d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy\ -\ dU_Y/dy. \end{aligned} \quad (26)$$

Par conséquent, la proposition (25) peut aussi s'exprimer sous une forme plus simple à se souvenir et surtout plus facile à interpréter:

$$\begin{cases} \text{si } dy/d\hat{y} < 0 \leftrightarrow d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy + dU_Y/dy < 0 \\ \text{si } dy/d\hat{y} > 0 \leftrightarrow d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy + dU_Y/dy > 0 \\ \text{si } dy/d\hat{y} = 0 \leftrightarrow d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy + dU_Y/dy = 0. \end{cases} \quad (27)$$

La dernière inégalité apparaissant à la deuxième ligne de la proposition (27) est la condition suffisante et nécessaire pour avoir une fonction de réaction à pente positive. Dans le reste de ce texte, faute d'un nom plus original, nous utiliserons le vocable "condition (27)" lorsque nous voudrons faire référence à cette condition.

Quelle interprétation donner à la condition (27)? La réponse est cette question apparaît plus évidente pour le lecteur qui remarque que $d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy + dU_Y/dy = d[\partial U/\partial \hat{y}]dy$[20]. En remplaçant $d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy + dU_Y/dy$ par $d[\partial U/\partial \hat{y}]dy$ dans la condition (27), on remarque, en vérité, que la fonction de réaction a une pente positive dès lors que *l'utilité marginale de* ŷ *augmente quand* y *s'accroît.*

---

[20] En effet, $d[\partial U/\partial \hat{y}]dy = d[U_x\,(\partial x/\partial \hat{y}) + U_Y\,(\partial Y/\partial \hat{y}) + U_S\,(\partial S/\partial \hat{y})]/dy = d[U_x \times 0 + U_Y \times 1 + U_S\,(S_{\hat{y}})]/dy = d(U_s\, S_{\hat{y}})/dy + dU_y/dy$.

À bien y penser, ceci est assez logique. Si $\hat{y}$ augmente, un individu qui veut maximiser son utilité voudra accroître sa contribution y seulement si cela est profitable pour lui, c'est-à-dire quand l'augmentation de son utilité dû à l'accroissement de $\hat{y}$ est plus grande lorsque y augmente en même temps. Or, pour que l'augmentation de son utilité dû à l'accroissement de $\hat{y}$ (qui est mesurée par $\partial U/\partial \hat{y}$) soit plus grande lorsque y augmente en même temps, il faut que la dérivée de cette augmentation par rapport à y ($d[\partial U/\partial \hat{y}]dy$) soit positive. Si ce n'est pas le cas, son utilité n'augmentera pas plus et donc l'individu n'améliorera pas son sort en augmentant sa contribution y, d'où sa décision de ne pas augmenter y quand $d[\partial U/\partial \hat{y}]dy \ngtr 0$.

Un cas particulier est intéressant à étudier. Si un individu n'a pas de motivations sociales, alors le modèle devient identique à celui étudié au chapitre 2. Si l'utilité ne varie pas en fonction de S, alors U_S=0 et le membre de gauche de la condition (27) se ramène à

$$d(U_S\, S_{\hat{y}})/dy + dU_Y/dy = dU_Y/dy. \qquad (28)$$

Le membre droit de l'égalité (28) est forcément négatif si nous faisons l'hypothèse que le bien privé est normal, c'est-à-dire si $dx/dI>0$. Il est possible de vérifier cela puisqu'en réarrangeant les termes de l'équation (21.2), nous obtenons

$$\frac{dx}{dI} = \frac{-(1/p)\,U_{xY} - (1/p)\,U_{xS}\,S_y + (1/p_y)\,U_{YY} + (1/p_y)\,U_{YS}\,S_y + (1/p_y)\,(S_y)^2\,U_{SS} + (1/p_y)\,U_S\,S_{yy}}{(p_y/p)^2\,U_{xx} - 2(p_y/p)\,U_{xY} - 2(p_y/p)\,U_{xS}\,S_y + U_{YY} + 2\,U_{YS}\,S_y + (S_y)^2\,U_{SS} + U_S\,S_{yy}}$$

Si $dx/dI > 0$, alors le numérateur de cette expression doit être négatif étant donné que le dénominateur est obligatoirement négatif quand $U(\cdot)$ est quasi-concave[21].

Fort de ce résultat, en multipliant le numérateur par $p_y > 0$, nous complétons la démonstration:

$$dx/dI > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -(1/p)\,U_{xY} - (1/p)\,U_{xS}\,S_y + (1/p_y)\,U_{YY} + (1/p_y)\,U_{YS}\,S_y + (1/p_y)\,(S_y)^2\,U_{SS} + (1/p_y)\,U_S\,S_{yy} < 0$$

---

[21] Voir les équations (23) et (24).

$\Leftrightarrow \quad -(p_y/p)\, U_{xY} - (p_y/p)\, U_{xS}\, S_y + U_{YY} + U_{YS}\, S_y + (S_y)^2\, U_{SS} + U_S\, S_{yy} = d(U_s\, S_y)/dy + dU_y/dy < 0$

$\Leftrightarrow \quad dU_y/dy < 0 \qquad \text{si } U_S=0 \qquad (29)$

Par l'inéquation (29), nous savons que l'égalité (28) est inférieure à zéro si bien que, par le biais de la proposition (27), $dy/d\hat{y} < 0$. Il s'agit du même résultat trouvé à la section 2.1. En fait, cela n'est guère surprenant puisque le modèle du chapitre 2 est un cas particulier du présent modèle où U_S=0.

Avant de clore cette section, il est utile d'observer qu'une propriété intéressante de l'équation (22) est que cette dernière ne peut en aucun temps être inférieure à -1 si x et Y sont des biens normaux. Voyons pourquoi[22].

Soit

$$\rho \equiv \frac{-U_Y - U_S\, S_{\hat{y}}}{U_Y + U_S\, S_y}.$$

Si nous définissons une nouvelle variable $\xi \equiv I + p_y z$ où $z = -\int \rho\, d\hat{y}$, alors la contrainte budgétaire de l'individu peut s'écrire sous la forme

$$\xi \equiv I + p_y z = px + p_y y + p_y z.$$

Dans ce cas, le problème de maximisation de l'individu devient

$$\max_{x,\, y} \quad U(x, Y, S) = U(x, y+\hat{y}, S) \qquad \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \xi = px + p_y y + p_y z, \end{array}$$

lequel peut être réécrit de la manière suivante

[22] La démonstration qui suit est pratiquement identique à celle qui nous a servi à montrer à la section 2.1 que, dans le cas du modèle du chapitre 2, la fonction de réaction d'un individu est à pente négative.

$$\begin{array}{lll} \underset{x,\, Y}{\text{Max}} & U(x, Y, S) & \text{s.c.} \quad x \geq 0 \\ & & \qquad\quad Y \geq \hat{y} \\ & & \qquad\quad \xi = px + p_y y + p_y z \end{array}$$

Soit la fonction d'utilité transformée sans contrainte sur x et sur Y

$$F(p, p_y, \xi) \equiv \underset{x,\, Y}{\text{Max}} \; \{U(x, Y, S) \mid \xi = px + p_y y + p_y z\}$$

Étant donné cette nouvelle fonction $F(\cdot)$, le niveau préféré de biens publics désiré par l'individu lorsque x et Y ne sont pas contraints est

$$G(p, p_y, \xi) = \{ Y \mid U(x, Y, S) = F(p, p_y, \xi),\ \xi = px + p_y y + p_y z \} \tag{30}$$

c'est-à-dire la quantité Y qui maximise la fonction $U(x, Y, S)$ sous la contrainte $\xi = px + p_y y + p_y z$.

Étant donné cette fonction $G(\cdot)$, nous pouvons vérifier que $\check{G}$, le niveau de contribution préféré de l'individu au financement des biens publics, dépend de p, p_y, ξ et $\hat{y}$ de la manière suivante

$$\check{G}(p, p_y, \xi, \hat{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } G(p, p_y, \xi) < \hat{y} \\ G(p, p_y, \xi) - \hat{y} & \text{si } \hat{y} \leq G(p, p_y, \xi) \leq I/p_y \\ I/p_y & \text{si } G(p, p_y, \xi) > I/p_y \end{cases} \tag{31}$$

L'équation (31) se justifie comme suit. Si le niveau préféré de biens publics désiré par un individu est inférieur à la contribution du reste de la communauté au financement des biens publics, cet individu ne voudra faire aucune contribution pour accroître encore plus la quantité de biens publics disponibles dans l'économie. En revanche, s'il est supérieur, l'individu voudra contribuer jusqu'à combler la différence, à moins que cette différence ne soit supérieure à la quantité maximale de biens publics que sa contrainte budgétaire lui permet d'acquérir; auquel cas, l'individu maximisera son utilité en se procurant la plus grande quantité possible de biens publics.

De l'équation (30), nous avons, par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{dG}{d\hat{y}} = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{dp}{d\hat{y}} + \frac{\partial G}{\partial p_y}\frac{dp_y}{d\hat{y}} + \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\hat{y}} \tag{32}$$

Puisque, par hypothèse, personne ne peut influencer les prix par ses actions, alors

$dp/d\hat{y} = 0$

$dp_y/d\hat{y} = 0$

et la relation (4) se réduit, dans ce cas, à

$$\frac{dG}{d\hat{y}} = \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\hat{y}} = -\frac{\partial G}{\partial \xi} p_y \rho \tag{32'}$$

Également, en dérivant chaque membre de l'égalité (30) par rapport à I, nous obtenons, par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{dG}{dI} = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{dp}{dI} + \frac{\partial G}{\partial p_y}\frac{dp_y}{dI} + \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dI} \tag{33}$$

Puisque, par hypothèse, rien n'influence les prix et que chacun prend les actions des autres comme données, alors

$dp/dI = 0,$

$dp_y/dI = 0,$

$d\hat{y}/dI = 0;$

et, par conséquent, l'équation (33) peut se réécrire

$$\frac{dG}{dI} = \frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dI} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \times 1 = \frac{\partial G}{\partial \xi} \tag{33'}$$

Mais alors, en raison des équations (32') et (33'), et puisque $p_y \geq 0$, nous pouvons déduire que si le bien public et le bien privé sont des biens normaux

$$\begin{array}{lll}
 & 0 < dG/dI < 1/p_y & \\
\Leftrightarrow & 0 < \partial G/\partial \xi < 1/p_y & \\
\Leftrightarrow & 0 < p_y \times \partial G/\partial \xi < 1 & \\
\Leftrightarrow & 0 < -p_y\, \rho \times \partial G/\partial \xi > -\rho & \text{si } \rho < 0 \\
\Leftrightarrow & 0 < dG/d\hat{y} < -\rho & \qquad (34)
\end{array}$$

Puisque

$$\begin{array}{lll}
 & S_y > 0 > S_{\hat{y}} & \\
\Leftrightarrow & U_S\, S_y > 0 > U_S\, S_{\hat{y}} & \text{car } U_S > 0 \text{ par hypothèse} \\
\Leftrightarrow & U_Y + U_S\, S_y > 0 > U_Y + U_S\, S_{\hat{y}} & \\
\Leftrightarrow & (U_Y + U_S\, S_{\hat{y}}) + (U_Y + U_S\, S_y) < 1 & \\
\Leftrightarrow & -\rho = (U_Y + U_S\, S_{\hat{y}}) + (U_Y + U_S\, S_y) < 1 & \qquad (35)
\end{array}$$

alors, en insérant l'inéquation (34) dans l'inégalité (35), nous obtenons le résultat suivant

$$0 < dG/d\hat{y} < -\rho < 1 \tag{36}$$

Par ailleurs, nous savons également, par la relation (31), que

$$\frac{d\check{G}}{d\hat{y}} = \begin{cases} \dfrac{dG}{d\hat{y}} - \dfrac{d\hat{y}}{d\hat{y}} = \dfrac{dG}{d\hat{y}} - 1 & \text{si } \hat{y} \leq G(p, p_y, \xi) \leq I/p_y \\ 0 & \text{si } G(p, p_y, \xi) < \hat{y} \text{ ou si } G(p, p_y, \xi) > I/p_y \end{cases} \tag{37}$$

En conséquence, en insérant l'égalité (37) dans l'inéquation (36), nous obtenons

$$-1 < d\check{G}/d\hat{y} \tag{38}$$

qui est l'expression que nous voulions démontrer.

5.2 / Évaluation du nombre d'équilibres de Nash existants

Dans cette section, nous désirons déterminer si la propriété de l'unicité de l'équilibre de Nash qui était présent dans le modèle simple du chapitre 2 est encore observé dans le modèle un peu plus raffiné que nous venons de développer.

À la section précédente, nous en sommes venu à la conclusion que la pente de la fonction de réaction d'un individu pouvait être négative ou positive, selon la valeur de $d[\partial U/\partial y]dy$. Dans ces conditions, deux grands cas généraux peuvent se présenter. Soit qu'il existe au moins une personne dans l'économie considérée qui possède une fonction de réaction qui est partout à pente négative, soit que toutes les fonctions de réaction des individus membres de la collectivité sont à pente positive sur au moins un intervalle de leur domaine.

Dans le cas où il y a au moins une fonction de réaction qui est décroissante sur tout son domaine, il est facile de vérifier que l'équilibre est unique pourvu que les biens sont normaux. En effet, l'équation (38) trouvée à la section précédente nous permet d'appliquer le même raisonnement que celui que nous avons effectué à la section 2.1, raisonnement qui nous a servi, rappelons-le, à démontrer que toute économie, composée d'un nombre fini de personnes possédant chacune une fonction de réaction dont la pente appartient à l'intervalle]-1,0], possède un et un seul équilibre de Nash sur la quantité de biens publics produits. Exprimé de manière différente, cela revient à dire qu'une fonction de réaction F à pente négative ne peut être croisée plus d'une fois par les autres fonctions de réaction G^1, G^2, ..., G^N à partir du moment que les pentes de toutes les fonctions de réactions sont négatives mais supérieures à -1. Parce que cette dernière proposition demeure vraie même si on permet aux fonctions G^1, G^2, ..., G^N d'être croissantes, il en résulte que l'équation (38) nous assure qu'il n'est pas possible d'avoir des équilibres multiples s'il existe au moins une personne dans l'économie qui possède une fonction de réaction qui est partout à pente négative.

Graphiquement, l'équation (38) empêche que les fonctions de réaction aient la forme décrite aux figures 5.1 et 5.2 dans le cas d'un modèle avec motivations sociales. La pente de la fonction de réaction de l'individu B ne pouvant être inférieure à celle de l'individu A, il n'est pas possible que les deux fonctions de réaction puissent se croiser plus d'une fois.

Figure 5.1 Exemple de fonctions de réaction impossible

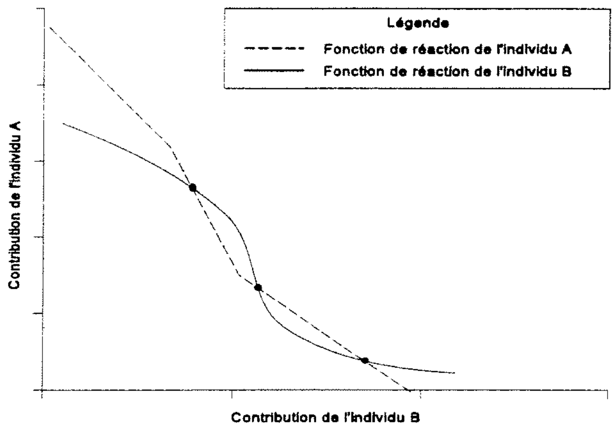
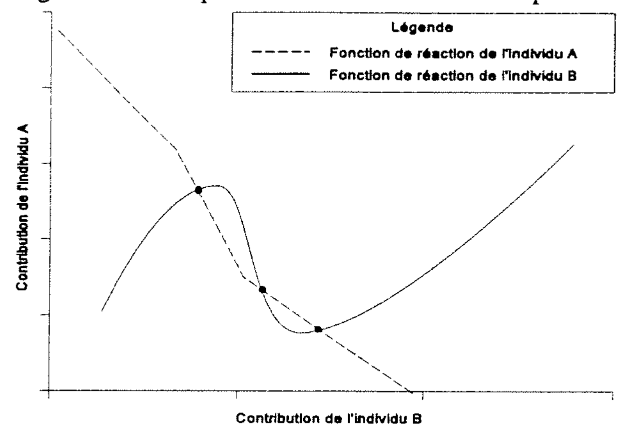


Figure 5.2 Exemple de fonctions de réaction impossible



Dans le cas où toutes les fonctions de réaction sont croissantes sur au moins un intervalle de leur domaine, la propriété de l'unicité de l'équilibre ne tient plus nécessairement car le nombre d'équilibres demeure indéterminé. Pour le démontrer, nous allons nous concentrer sur le cas particulier d'une économie composée de deux individus (l'individu A et l'individu B) qui sont identiques en tout point de vue (même dotation et mêmes préférences).

Soit y^i la contribution de l'individu i (i=A, B) au financement des biens publics et soit $y^i = F^i(y^j)$ la fonction de réaction de l'individu i (i=A, B)[23].

Pour qu'il y ait plus d'un équilibre de Nash, il faut que F^A et F^B se croisent à plus d'un endroit ou, ce qui revient au même, que $H(y^B) \equiv F^A(y^B) - F^B(y^B)$ croise l'axe des abscisses plus d'une fois (quand y^B est

[23] À proprement parlé, pour l'individu B, F^B est en fait la fonction réciproque de sa fonction de réaction. Nous ignorons ce détail puisque cela ne change rien à notre analyse.

mesuré en abscisse).

Puisque que $H(y^B) \equiv F^A(y^B) - F^B(y^B)$ est continue, une condition nécessaire pour que $H(y^B)$ croise l'axe des abscisses plus d'une fois est qu'il faut qu'elle possède au moins un extremum relatif. Quand $H(y^B)$ possède au moins un extremum relatif, la multiplicité des équilibres de Nash est *possible*.

Une condition nécessaire pour que $H(y^B)$ ait un extremum relatif est que $dH(y^B)/dy^B = 0$. Si, en plus, $d^2H(y^B)/dy^{B2} \neq 0$, alors la condition devient suffisante. Malheureusement, les valeurs de $dH(y^B)/dy^B$ et de $d^2H(y^B)/dy^{B2}$ dépendent respectivement des dérivés d'ordre 3 et d'ordre 4 des fonctions d'utilité. Comme nous n'avons pas fait d'hypothèses supplémentaires sur la nature de ces dérivés dans le modèle présenté, il nous est impossible d'exclure la possibilité qu'il y ait des équilibres de Nash multiples quand les fonctions de réaction peuvent être à pente positive. Dans le chapitre 6, nous illustrons ce résultat à l'aide d'une simulation numérique.

5.3 / Discussions complémentaires

Notre analyse s'est intéressée à l'existence de motivations sociales chez les individus. Nous avons observé que l'introduction de ces motivations modifie radicalement les résultats obtenus dans un modèle plus simple de fourniture d'un bien public sans motivations sociales. En ce sens qu'elles annulent parfois le resquillage en rendant positive les pentes des fonctions de réaction, ces motivations jouent le rôle, tel que décrit par Mancur Olson, d'être possiblement des inhibiteurs chez les individus qui voudraient refuser de contribuer à l'effort collectif. En fait, la présence de motivations sociales chez les individus permet à elles-seules d'expliquer pourquoi nous pouvons observer que, parfois dans la réalité, les individus ne resquillent pas lorsqu'ils contribuent à la production d'un bien public.

De même, en poussant un peu plus loin l'investigation, nous avons découvert que les équilibres de Nash sur le niveau de production du bien public ne sont plus nécessairement uniques dès lors qu'il existe des motivations sociales qui rendent les fonctions de réaction à pente positive. Sur le plan théorique, il s'ensuit en bonne logique que le niveau de production d'un même bien public pourrait éventuellement varier d'une communauté à l'autre non pas parce que les individus qui composent ces communautés sont intrinsèquement différents mais parce qu'ils ont des attentes différentes au sujet du niveau de contribution de leurs concitoyens. À titre d'exemple, l'existence de multiples équilibres pourrait expliquer un phénomène quotidien et qui est pour le moins fascinant aux yeux de l'auteur de ces lignes. Dans plusieurs villes, nous observons que tous les gens ou presque acceptent de se placer les uns derrière les autres en formant une file pendant qu'ils montent à l'intérieur des autobus ou attendent leur arrivée. Dans maintes autres villes, c'est tout différent. Il n'y a jamais de file. Les gens se regroupent en une masse compacte autour des portières et tout le monde essaie de grimper en même temps dans le véhicule de façon plus ou moins ordonnée. Il n'est pas rare de voir dans ces villes les gens se pousser hypocritement afin d'être sûr d'avoir une place dans l'autobus. Au Québec, les villes de Montréal et de Québec sont un bon exemple de cet état de fait. À Montréal, les passagers du transport en commun forment une ligne d'attente tandis qu'à Québec, les files sont inexistantes. Pourtant, dans les deux cas, il ne s'agit pas d'individus intrinsèquement bien différents les uns des autres. Bien au contraire, les similitudes pleuvent. Ce sont des individus qui vivent à la même époque, dans le même pays et la même province, partagent les mêmes valeurs, la même culture, les mêmes coutumes et le même environnement social, sont assujettis aux mêmes lois, ont sensiblement les mêmes préférences, bénéficient d'une qualité de vie relativement semblable et ont tous à peu près le même statut social. D'un certain point de vue, la création de files d'attente est un exemple de production d'un bien public. Les files d'attente sont une manifestation d'ordre, de sécurité et de paix dans les États. Il s'agit d'un bien non-exclusif et non-rival parce que tous les individus bénéficient pareillement de la présence des files et qu'il n'est pas possible d'empêcher quelqu'un de jouir des bienfaits de leur présence. Dans cet exemple-ci, l'existence d'équilibres différents pourrait s'expliquer par le fait que les individus ont des motivations sociales (les gens ne veulent pas dépasser s'ils sont seuls à le faire) et qu'ils ont des attentes différentes, selon la ville où ils sont situés, sur le niveau de contribution de leur concitoyens. À Québec, personne ne se met en file pour prendre l'autobus parce que personne ne s'attend que les autres le fassent. À Montréal, tout le monde accepte de faire la file car chacun sait que presque tout le monde respecte cette convention et que personne ne court le risque de se faire dépasser. Même un individu qui vient de Québec et qui a l'habitude de ne pas se mettre en ligne pour prendre l'autobus change sa manière de se comporter lorsqu'il prend l'autobus à Montréal parce qu'il s'attend à ce que les autres le fassent. Le contraire est aussi vrai.

Bien que notre approche à la compréhension des phénomènes de production d'un bien public dans une communauté puisse paraître originale, elle ne l'est pas en fait. Nous nous sommes rendu compte lors de la rédaction de ce travail que notre traitement s'approchait de celui fait par Cornes et Sandler (1984) sans que nous le sachions. Dans leur analyse, Cornes et Sandler n'utilisent pas les termes de "motivations sociales". Ils emploient l'expression plus générale de «production conjointe»[24]. Pour les auteurs, il y a production conjointe lorsque la consommation d'un des biens produit deux avantages en même temps: l'un étant qu'elle augmente la quantité de biens publics dans la communauté qui peut être consommée par chacun et l'autre étant qu'elle augmente la quantité d'un autre bien privé désirable. "Bien social" est le nom que nous avions donné à cet autre bien privé désirable dont parlent les auteurs.

En comparant notre analyse avec celle de Cornes et Sandler, nous observons des similitudes avec quelques différences importantes toutefois. Ci-après, nous nommons les plus importantes.

Sur le plan de la construction du modèle, probablement pour un souci de simplicité, il convient de remarquer que Cornes et Sandler font l'hypothèse que la quantité de biens sociaux qu'un individu consomme est proportionnelle au montant de sa contribution. De même, leur modèle ne permet pas au bien social de varier en fonction du niveau de la contribution des autres membres de la collectivité, contrairement à nous.

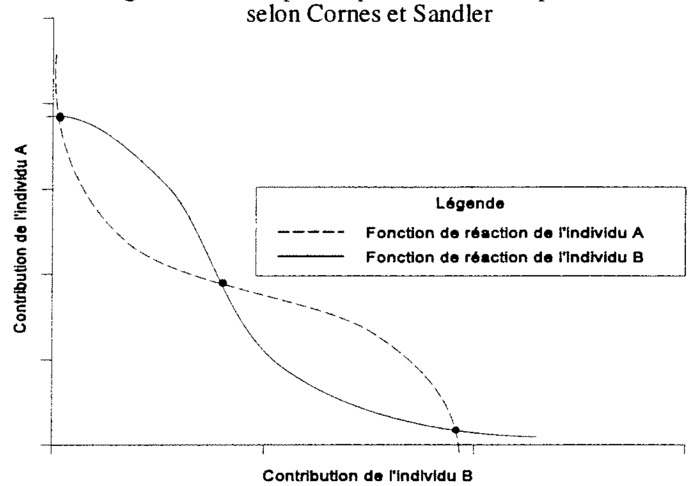
Au niveau des résultats découverts, comme nous, Cornes et Sandler notent que la pente des fonctions de réaction peut être positive quand il y a production jointe. Cependant, la condition mentionnée par les auteurs pour qu'une telle positivité soit observée n'est pas exprimée sous une forme algébrique

[24] *Joint production* étant l'expression que nous voulions traduire ici.

aussi simple que la condition (27)[25]. De même, leur interprétation économique de cette condition de positivité n'est pas aussi facile à comprendre - à notre humble avis - que celle que nous avons donnée de la condition (27).

Enfin, dans ce même article les auteurs affirment (sans le prouver!) qu'il est possible qu'une économie simple composée de deux individus identiques puisse avoir la propriété de posséder des équilibres de Nash asymétriques stables lorsque les deux personnes ont des fonctions d'utilité à pente partout négative (voir figure 5.3). Notre analyse effectuée dans les pages précédentes montre que de tels équilibres sont impossibles en raison de l'inégalité (38) qui empêche une fonction de réaction de venir couper plus d'une fois une seconde qui est partout à pente négative.

Figure 5.3 Exemple d'équilibres de Nash possibles selon Cornes et Sandler



Dans le prochain chapitre, nous présentons les résultat d'une simulation numérique que nous avons effectuée. Parce qu'une image vaut mille mots, nous avons cru qu'il s'avérerait judicieux d'ajouter un aspect visuel aux différents résultats algébriques qui ont jalonné cette étude.

[25] Voir (Cornes et Sandler 1984: 585).

Chapitre 6 / Simulation numérique

6.1 / Cadre opératoire

Dans ce chapitre, nous présentons une simulation numérique afin d'illustrer les résultats obtenus au dernier chapitre.

Pour nos besoins, nous avons décidé de considérer le cas simple d'une économie composée de deux individus identiques tant au niveau de leurs préférences que sur le plan de leur dotation initiale. Étant donné qu'il s'agit d'un exemple numérique, nous devons donner une forme fonctionnelle précises aux fonctions apparaissant dans notre modèle.

C'est ainsi que, pour la fonction d'utilité $U(x,Y,S)$ et la fonction de bénéfice social $S(y,\hat{y})$, nous avons choisi arbitrairement de leur donner les formes fonctionnelles suivantes:

$$U(x,Y,S) = x \times Y^{\alpha} \times S^{\gamma}$$

$$S(y,\hat{y}) = [(y/I) - 1] \times (\hat{y}/\hat{I}) + 1$$

La fonction d'utilité $U(\cdot)$ est simplement une fonction de type Cobb-Douglas dans lequel les paramètres $\alpha>0$ et $\gamma>0$ sont respectivement des mesures du degré de préférence du bien public et du bien social. Tout étant égal par ailleurs, plus le paramètre est élevé, plus l'individu désirera consommer une grande quantité du bien en question relativement aux deux autres.

Deux faits sont intéressants à noter en rapport avec cette fonction d'utilité. Premièrement, le lecteur peut remarquer que la fonction $U(\cdot)$ telle que définie respecte les restrictions (12) à (14) que nous nous étions fixées antérieurement. Deuxièmement, on peut vérifier que si $\gamma=0$, l'expression de la fonction d'utilité se réduit à $U(x,Y) = x \times Y^{\alpha}$ et ne dépend plus directement de S. Dans ce cas, le modèle devient identique au modèle du chapitre 2 sans motiivations sociales. En somme, le modèle du chapitre 2 peut être vus comme un cas particulier du modèle avec motivations sociales.

Quant à la fonction $S(\cdot)$, il s'agit d'une relation dont la forme fonctionnelle peut paraître étrange mais qui a la propriété de respecter les restrictions (15) et (16). Le premier terme de l'équation multiplie, à quelques contantes près, y et $\hat{y}$. La quantité entre les premiers crochets étant toujours négative, la restriction $S_{\hat{y}}<0$ est toujours vérifiée. De plus, la présence du deuxième terme de l'équation nous assure que la valeur S est positive et donc que la quantité S^{γ} est un nombre réel positif (qui appartient dans ce cas à l'intervalle $[0,1]$[26]). Notons pour terminer, au cas où on ne l'aurait pas deviné, que les variables I et $\hat{I}$ représentent respectivement le revenu initial de l'individu considéré et le revenu initial de l'autre membre restant dans l'économie.

6.2 / États des résultats

À l'aide d'un programme informatique que nous avons créé, nous avons calculé, selon différents scénarios, les fonctions de réaction de deux individus identiques possédant la fonction d'utilité Cobb-Douglas décrite ci-dessus.

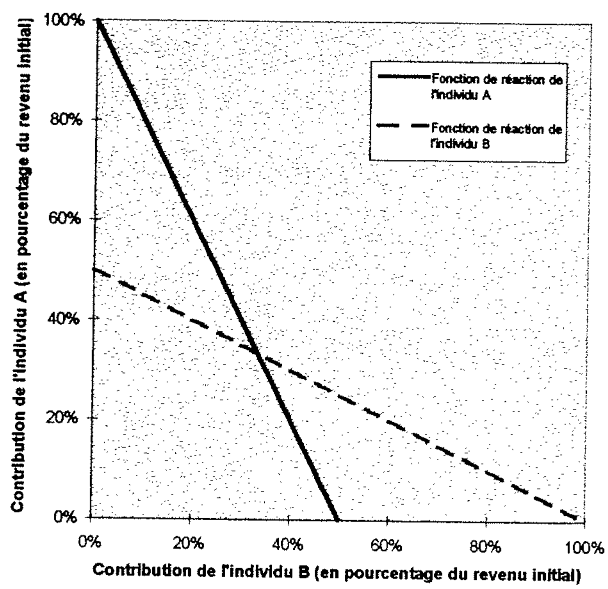
La figure 6.1 illustre la forme des fonctions de réaction d'un individu A et d'un individu B, lorsque $\alpha=1$ et $\gamma=0$. Comme les individus sont identiques en tout point de vue, la courbe de réaction de l'individu B est la réflexion de celle de l'individu A par rapport à la droite à 45° passant par l'origine. Comme nous pouvions nous y attendre, dans ce cas particulier, les fonctions de réaction sont à pente

[26] Il est utile de rappeler que la grandeur de cet intervalle n'a pas intrinsèquement d'effet sur la forme des courbes d'indifférence puisque toute fonction d'utilité $U(x,Y,\tilde{S}) = x \times Y^{\alpha} \times \tilde{S}^{\gamma}$ (où $\tilde{S}=kS$, $k>0$) dans lequel $\tilde{S}^{\gamma} \in [0,k^{\gamma}]$ peut se ramener à la fonction $U(x,Y,S) = x \times Y^{\alpha} \times S^{\gamma}$ (dans lequel $S^{\gamma} \in [0,1]$au moyen d'une transformation monotone croissante.

négative sur tout leur domaine. Quand γ=0, nous sommes en présence d'un modèle sans motivations sociales comme celui présenté au chapitre 2. Sur le graphique, nous pouvons constater l'existence d'un seul équilibre de Nash puisque les deux courbes de réaction s'intersectent en un seul point.

Sur tous les graphiques, les nombres sur les axes indiquent le montant de la contribution de l'individu au financement des biens publics. Ce montant est exprimé en pourcentage du revenu initial.

Figure 6.1 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=1 et gamma=0



Sur la figure 6.2, nous avons augmenté légèrement la valeur du coefficient γ à 0,001. On peut remarquer que le graphique est très similaire au précédent. La différence perceptible se situe à l'extrémité des courbes de réactions. Nous pouvons remarquer qu'à cet endroit, la courbe n'est plus parfaitement droite. La courbe fléchit légèrement vers l'intérieur.

Figure 6.2 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=1 et gamma=0,001

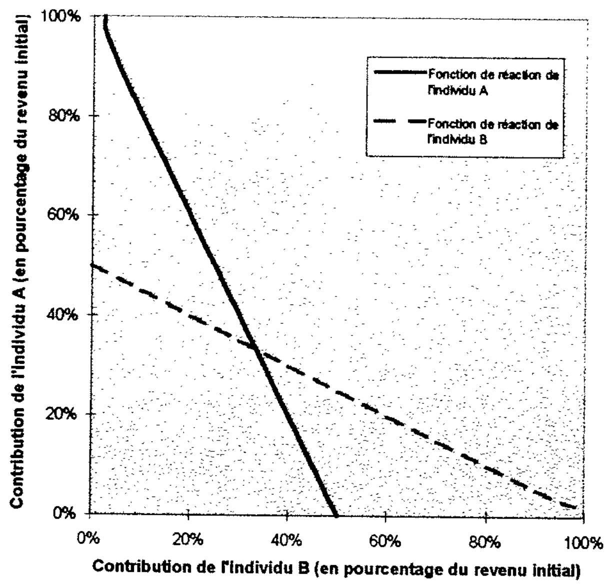
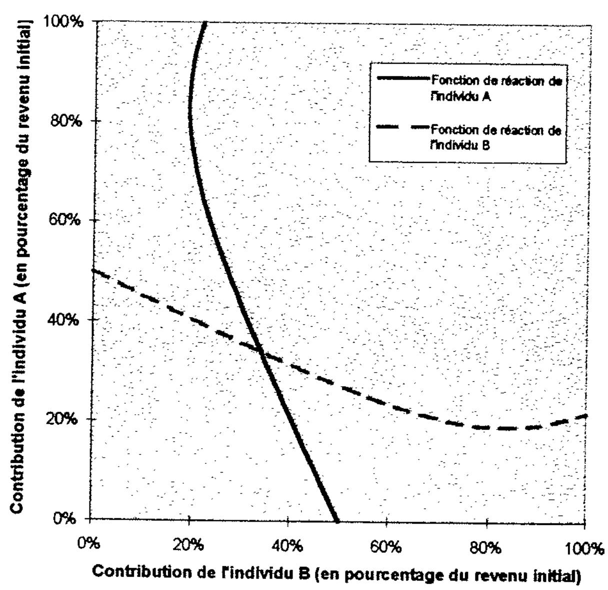


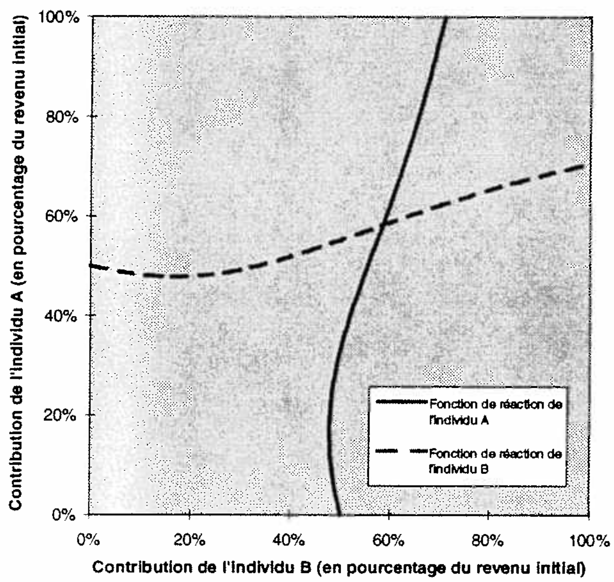
Figure 6.3 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=1 et gamma=0,1



Sur la figure 6.3, γ est égale à 0,1. La courbure dans les fonctions de réaction est encore plus prononcée que précédemment. En outre, un élément nouveau apparaît. Les fonctions de réaction sont au début décroissantes, puis deviennent croissantes vers la fin. L'équilibre de Nash est encore unique.

La valeur du paramètre γ vaut 2 sur la figure 6.4. L'équilibre est encore unique mais l'intervalle sur lequel les fonctions de réaction sont monotones croissantes est plus grand que précédemment.

Figure 6.4 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=1 et gamma=2



À la figure suivante, nous avons maintenu constant la valeur du coefficient γ et avons réduit la valeur du paramètres α à 1/8. Cette modification apporte peu d'éléments nouveaux au graphique si ce n'est que l'intersection survient à un niveau de contribution plus petit. Pour le reste des autres graphiques, α demeurera à sa nouvelle valeur 1/8.

Figure 6.5 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=0,125 et gamma=2

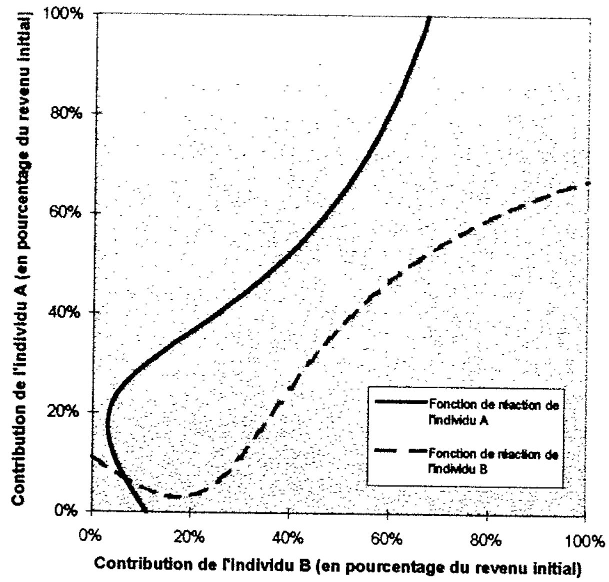
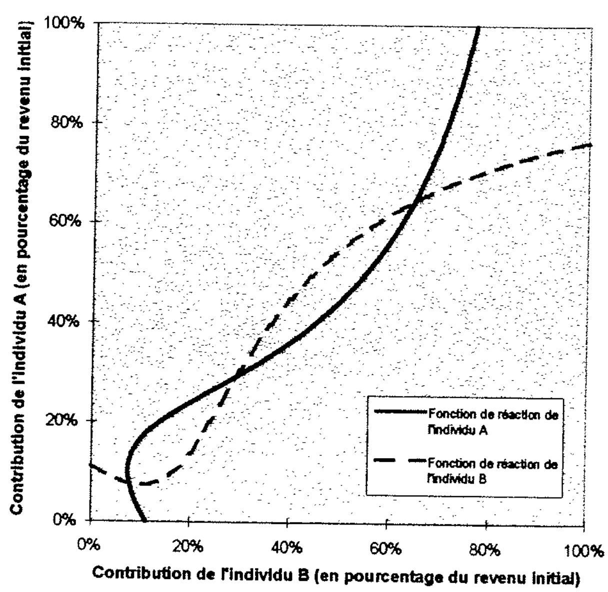


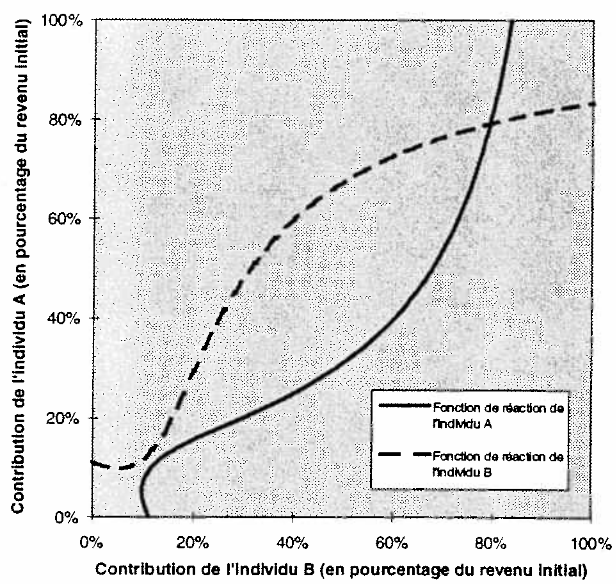
Figure 6.6 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=0,125 et gamma=3,25



Sur la figure 6.6, la valeur de γ est fixé à 3,25 alors que α est demeuré constant. Il s'agit d'un cas où il y a des équilibres multiples. Sur le graphique, on peut compter l'existence de trois équilibres de Nash distincts. Il est facile de vérifier que celui situé le plus au centre n'est pas un équilibre stable, tandis que les deux autres le sont.

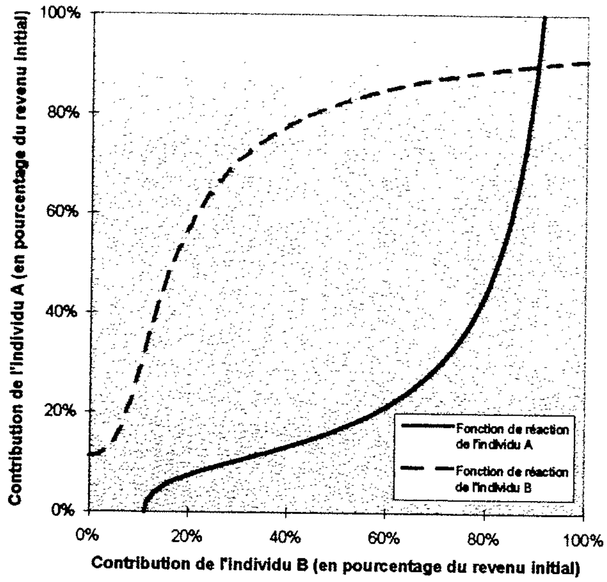
L'avant-dernier graphique montre la forme des fonctions de réaction lorsque γ est égale à 5. Fait intéressant à noter, l'équilibre est redevenu unique mais celui-ci est situé à un niveau beaucoup plus élevé que celui apparaissant à la figure 6.5. En fait, en comparant avec la figure 6.6, nous nous apercevons que l'équilibre qui s'est "maintenu" est celui qui produisait la plus grande quantité de biens publics.

Figure 6.7 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=0,125 et gamma=5



Pour terminer, la figure 6.8 expose deux courbes de réaction à pente strictement positive. Dans ce cas, la valeur du paramètre γ a été établi à 10 unités. Nous pouvons remarquer l'existence d'un seul équilibre de Nash.

Figure 6.8 Fonctions de réaction et équilibre de Nash dans une économie de deux personnes, avec alpha=0,125 et gamma=10



CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons discuté de deux résultats qui sont communément admis en matière de production d'un bien public: l'existence de resquillage de la part des membres d'une économie qui sont appelés à contribuer volontairement au financement d'un bien public et l'unicité de l'équilibre de Nash. Ces deux résultats sont les prédictions naturelles des modèles classiques de production d'un bien public.

L'observation d'un grand nombre de phénomènes sociaux confirme ces prédictions théoriques. Malheureusement, il existe des situations d'exception dans lesquelles les agents ne se comportent pas en resquilleur et pour lesquelles, semble-t-il, plus d'un équilibre existe.

Dans ce travail, notre but était de concilier la théorie avec les faits d'exception que nous pouvons observer de temps à autres en matière de provision d'un bien public et pour lesquels nous nous sommes efforcé de donner quelques exemples en espérant qu'ils ne soient pas trop boiteux aux yeux du lecteur.

Après avoir présenté un modèle simple de production d'un bien public suivi de ses prédictions, nous nous sommes attardé quelques instant à identifier quelques-unes des limites du modèle. Nous avons proposé trois avenues différentes qui pourraient améliorer le réalisme du modèle. Parmi celles-ci, nous avons privilégié celle qui permet aux individus d'être dotés de motivations sociales, cette idée ayant été développée auparavant par Mancur Olson. Les motivations sociales peuvent être vues comme des avantages personnels non financiers que les individus reçoivent lorsqu'ils décident de participer à une action collective.

En procédant ainsi, nous avons été à même de constater que la simple introduction de motivations sociales dans la fonction d'utilité des individus modifie de façon importante les prédictions qui sont habituellement faites avec les modèles traditionnels. Lorsque nous avons étendu très légèrement le modèle de base de fourniture d'un bien public pour tenir compte des motivations sociales que les individus ont potentiellement, nous avons constaté qu'il n'est pas impossible, comme l'observation de la réalité nous le suggère à l'occasion, que les individus ne puissent avoir aucun intérêt à resquiller étant donné que la pente de leur fonction de réaction peut être positive. Nous avons dérivé la condition pour qu'une telle éventualité existe. De plus, nous avons constaté que cette positivité dans la pente de la fonction de réaction crée de l'incertitude sur le nombre d'équilibres de Nash existant, d'où la possibilité que les équilibres de Nash sur le niveau de production du bien public soient multiples.

La force de notre modèle, s'il en est une, est non seulement qu'il permet d'expliquer les phénomènes que les autres modèles ne peuvent justifier, mais en plus il demeure très simple dans sa forme, étant à peine plus raffiné que les modèles les plus simples que l'on puisse rencontrer.

BIBLIOGRAPHIE

BERNHEIM, Douglas. "Rationalizable Strategic Behavior". Econometrica. Vol. 52, n° 4. 1984. pp. 1007-1028.

BIERMAN, H. Scott et Luis FERNANDEZ. Game Theory with Economic Applications. Addison-Wesley: Reading. 1993.

BUCHANAN, James M. "Positive Economics, Welfare Economics, and Political, Economy". Journal of Laws and Economics. Vol. 2. 1959. pp. 124-138.

CORNES, Richard et Todd SANDLER. The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods. Second Edition. New York: Cambridge University Press. 1996.

CORNES, Richard et Todd SANDLE. "Easy Riders, Joint Production, and Public Goods". Economic Journal. Vol. 94. 1984. pp. 367-379.

GLICKSBURG, Irving. "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points". Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 3, n° 1. 1952. pp. 170-174.

JOHANSEN, Leif. "On the Status of the Nash Type of Noncooperative Equilibrium Theory". Scandinavian Journal of Economics. Vol. 84. 1982. pp. 421-441.

NASH, John. "Non-Cooperative Games". Annals of Mathematics. Volume 51. 1951. pp. 286-295.

OLSON, Mancur. Logique de l'action collective. Préface de Raymond Boudon. Traduit de l'américain par Mario Levy. Collection "Sociologies". Paris: Presses Universitaires de France. 1978.

SAMUELSON, Paul A. "The Pure Theory of Public Expenditure". Review of Economics and Statistics. Vol. 36. 1954. pp. 387-389.

SAMUELSON, Paul A. "A Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure". Review of Economics and Statistics. Vol. 37. 1955. pp. 350-356.

VARIAN, Hal R. Introduction à la microéconomie. Troisième édition. Traduit de l'anglais par Bernard Thiry. Bruxelles: De Boeck. 1994.