

A1-1

9

913

Université de Montréal

Étude de l'information sur la volatilité contenue dans
les prix d'options

par

Abderrahim Taamouti

Centre de Documentation
Dép. de sciences économiques
Université de Montréal
C. P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Qué., Canada, H3C 3J7

Département de sciences économiques
Faculté des arts et des sciences

Rapport de recherche présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en sciences économiques

Septembre 2001

© Abderrahim Taamouti, 2001

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce rapport intitulé:

Étude de l'information sur la volatilité contenue dans
les prix d'options

présenté par

Abderrahim Taamouti

Sous la direction du professeur Nour Meddahi

Sommaire

Étant donné que les marchés financiers transigent quotidiennement des milliers d'options de tous genres et que ces derniers, en réalité, se négocient sur la base d'une mesure de la volatilité du sous-jacent, l'on comprend alors pourquoi il est important de s'intéresser aux aspects de modélisation, d'estimation et de prévision des volatilités. Ce rapport s'inscrit donc dans ce cadre, et il a ainsi pour objectif d'étudier le pouvoir prévisionnel de la volatilité implicite (VI) par rapport à la volatilité future. Il examine alors le contenu de cette volatilité implicite et il le compare avec les autres types de volatilités telles que la volatilité conditionnelle des modèles GARCH.

Contents

Sommaire	i
Remerciements	vi
Introduction	1
1 Importance de la volatilité pour l'évaluation des actifs dérivés:	3
1.1 Le Modèle de Black-Scholes et ses extensions :	3
1.1.1 Le Modèle de Black-Scholes:	3
1.1.2 Extension du modèle de Black et Scholes : modèle de Hull et White (1987)	5
1.2 Différentes mesures de volatilité :	7
1.2.1 Mesure de la volatilité en utilisant uniquement le stock de rendements :	7
1.2.2 Mesure de la volatilité en utilisant uniquement les prix d'options:	9
1.2.3 Mesure de la volatilité en utilisant le stock de rende- ments et les prix d'options :	10
2 Information sur la volatilité contenue dans les prix d'options: une revue de littérature	10
3 Les données et la méthodologie du travail:	14
3.1 Description des données:	14
3.2 La méthodologie du travail:	16
3.2.1 Les modèles d'évaluation du contenu de la volatilité implicite:	16
3.2.2 La comparaison des volatilités futures avec les prévi- sions des modèles <i>GARCH</i> :	19
4 Résultats et Analyse:	19
4.1 Les caractéristiques statistiques des données:	19
4.1.1 Les statistiques des rendements ¹ :	20

¹Cas d'options caractérisées par un $\text{moneyness}=0.94-0.97$ et un jour maturité=60-180.

4.1.2	Les statistiques des erreurs ² et des erreurs au carré du processus générant les rendements:	21
4.2	L'estimation et les tests hors échantillon pour les différents modèles <i>GARCH</i> :	24
4.2.1	Cas de rendements modélisés sous forme d'un <i>AR(1)</i> : .	24
4.2.2	Cas de rendements modélisés sous forme d'un <i>ARMA(5, 5)</i> : .	33
5	Conclusion:	45
6	Appendices:	46
7	Graphes:	49
8	Bibliographie:	53

²Il s'agit ici des $u_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$ avec; les ε_t représentent les résidus du modèle générant les rendements. Nous supposons que $\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$ et par conséquent $u_t \sim N(0, 1)$.

List of Tables

Table	Page
1 Le test de Box-Pierce dans le cas de rendements simples.....	17
2 Le test de Box-Pierce dans le cas de rendements excédentaires.....	18
3 Les statistiques de rendements.....	20
4 Les autocorrélations des résidus dans le cas de rendements excédentaires.....	21
5 Les autocorrélations des résidus dans le cas de rendements simples....	21
6 Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas de rendements simples ($R_{m,t} = ARMA(5, 5)$).....	22
7 Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas de rendements excédentaires ($R_{m,t} - R_{f,t} = ARMA(5, 5)$).....	22
8 Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas de rendements simples ($R_{m,t} = \mu + \varepsilon_t$).....	23
9 Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas de rendements excédentaires ($R_{m,t} - R_{f,t} = \mu + \varepsilon_t$).....	23
10 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2000.....	25
11 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2500.....	26
12 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2000.....	28
13 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2500.....	29
14 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2000.....	30
15 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2500.....	31
16 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH	

cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2000.....	32
17 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$ Taille de l'échantillon égale à 2500.....	33
18 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$. Taille de l'échantillon égale à 2000.....	35
19 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$. Taille de l'échantillon égale à 2500.....	36
20 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$. Taille de l'échantillon égale à 2000.....	39
21 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$. Taille de l'échantillon égale à 2500.....	40
22 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$ Taille de l'échantillon égale à 2000.....	42
23 L'estimation des différents modèles GARCH: cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$ Taille de l'échantillon égale à 2500.....	43
24 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$ Taille de l'échantillon égale à 2000.....	41
25 Le pouvoir prédictif des différents modèles GARCH cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $ARMA(5,5)$ Taille de l'échantillon égale à 2500.....	41

List of Figures

	Page
Graphe.....	Page
1 Les rendements simples de l'indice S&P500	
Cas du modèle $R_{m,t} = \mu + \varepsilon_t$	20-
21	
2 Les rendements excédentaires de l'indice S&P500	
Cas du modèle $R_{m,t} - R_{f,t} = \mu + \varepsilon_t$	20-
21	
3 Les erreurs, u_t , du processus des rendements excédentaires de l'indice S&P500.	
Cas du modèle $R_{m,t} - R_{f,t} = \mu + \varepsilon_t$	49
4 Les erreurs, u_t , du processus des rendements simples de l'indice S&P500.	
Cas du modèle $R_{m,t} = ARMA(5, 5)$	50
5 Les erreurs, u_t , du processus des rendements simples de l'indice S&P500.	
Cas du modèle $R_{m,t} = \mu + \varepsilon_t$	51
3 Les erreurs, u_t , du processus des rendements excédentaires de l'indice S&P500.	
Cas du modèle $R_{m,t} - R_{f,t} = ARMA(5, 5)$	52

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de recherche, Professeur Nour Meddahi pour l'aide dont j'ai bénéficié, mais aussi pour les conseils précieux qu'il m'a prodigués. Je le remercie pour sa patience et la pertinence de ses commentaires.

Une pensée également pour ceux et celles qui ont pris connaissance de mon rapport et qui m'ont fait part de leurs suggestions et commentaires particulièrement mon frère Mohamed pour ses conseils, mes amis: Samir Hareb, Annie Langelier, Philippe Lompo de m'avoir aider pour corriger les erreurs d'orthographe et sans oublier Anca Jurca qui m'a fourni la base de données sur les options.

Introduction

Depuis l'apparition des produits dérivés sur les marchés financiers, une multitude d'études sur l'évaluation et la prévision de leurs prix ont été publiées: Black-Scholes(1973), Merton(1973), Hull et White (1987)...

Le but premier de ces modèles était de donner une valeur monétaire à une option, étant donné les autres paramètres du modèle. Or, les intervenants sur le marché ont rapidement compris que la volatilité instantanée du rendement de l'actif sous-jacent est le paramètre le plus important influençant le prix du sous-jacent et qu'il est difficile de la quantifier car elle est inobservable sur le marché. Puisque le marché offre un prix d'échange de toute option, il est alors plus facile d'utiliser ce prix ainsi que le reste des paramètres du marché pour trouver l'unique inconnue qui est la variance des rendements du sous-jacent, que l'on appelle communément la volatilité implicite.

C'est pourquoi plusieurs chercheurs et praticiens s'intéressent de plus en plus aux volatilités, plus particulièrement à la volatilité implicite (VI) comme estimateur de la volatilité future.

Pendant, pour calculer la VI à partir des modèles d'évaluation tel que le modèle de Black et Scholes, on suppose qu'elle est constante, mais en réalité ce n'est pas le cas, d'où l'apparition des modèles d'évaluation d'option avec une volatilité Stochastique: le modèle de Hull et White(1987), Wiggins (1987), Melino et Turnbull (1992).

L'inconvénient de ces derniers modèles est qu'ils demandent de calculer des éléments plus difficiles à déterminer tels que la distribution de probabilité des rendements des actifs, des changements dans les volatilités, et le prix du risque de la volatilité du marché. C'est la raison pour laquelle les praticiens, utilisent souvent la VI, en la calculant une fois par jours. Certains auteurs utilisent une autre catégorie de modèles estimant la volatilité à savoir les modèles découlant de la famille $ARCH^1$ ($GARCH$, $EGARCH$...). Les premières tentatives pour prévoir les volatilités en utilisant ces modèles statistiques ont été faites par Day et Lewis (1992), Lamoureux et Lastrapes (1993)...

Une meilleure estimation de la VI pourrait donc constituer une base pour tracer l'évolution dans le futur des prix du sous-jacent et par conséquent un avantage pécuniaire pour les intervenants sur les marchés boursiers (cambistes, arbitragistes..). L'objectif principal de cette étude est donc de con-

¹Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.

struire un modèle efficace permettant de mesurer l'information contenue dans la VI afin d'examiner son pouvoir prévisionnel par rapport à la volatilité future.

Cette étude se divise en 5 sections. La première section a pour objectif l'étude de l'importance de la volatilité pour l'évaluation des actifs dérivés. La deuxième section concerne une revue de littérature relative aux études précédentes faites dans ce sujet. La troisième section sera consacrée à la méthodologie que nous allons adopter pour faire l'étude. Les autres sections qui restent, la quatrième et la cinquième, traiteront, respectivement, les résultats et leurs analyses ainsi qu'une conclusion générale.

1 Importance de la volatilité pour l'évaluation des actifs dérivés:

Généralement, la volatilité mesure l'amplitude de la variation du cours du support. C'est une donnée statistique qui permet de savoir, à partir d'un historique, si le cours du support a subi de fortes variations à la hausse ou à la baisse. Elle mesure en quelque sorte l'incertitude sur l'avenir du cours du sous-jacent. En effet, plus la volatilité augmente plus on a des chances de voir les cours du support subir une forte hausse ou une forte baisse.

Dans cette section, nous présenterons d'abord l'importance de la volatilité dans l'évaluation des actifs financiers à travers l'étude du modèle de Black et Scholes tel que décrit dans leur article paru en 1973. Ce modèle constituera la base théorique de notre recherche sur les options. Nous allons ensuite voir une extension du modèle qui permet de dépasser l'hypothèse d'une volatilité constante que suppose le modèle précédent. Nous entamerons enfin les différentes mesures de la volatilité à savoir la mesure de la volatilité à partir du stock de rendements uniquement, la mesure de la volatilité à partir des prix d'options uniquement et la mesure de la volatilité à partir des deux à la fois.

1.1 Le Modèle de Black-Scholes et ses extensions :

1.1.1 Le Modèle de Black-Scholes:

Le modèle de Black-Scholes (1973) constitue sans doute un modèle d'évaluation de base pour tous les marchés financiers de produits dérivés. Tous les modèles développés après; modèle de Merton (1973), modèle de Hull et White (1987),... ne sont qu'une variante de ce modèle de référence.

Black et Scholes dérivent un modèle qui tient compte de l'absence d'arbitrage et qui suppose un rendement équivalent au taux sans risque lorsqu'une position est protégée. Leur modèle repose, cependant, sur plusieurs hypothèses qui caractérisent un " marché parfait ". Ces hypothèses sont la chair du modèle et nous devons donc bâtir notre analyse et évaluer nos données en les respectant.

Ce modèle suppose que le taux d'intérêt à court terme est connu et constant dans le temps, que le prix de l'action sous-jacent suit un processus aléatoire² caractérisé par une variance proportionnelle à la racine carrée du

²Le processus de diffusion suit un brownien géométrique.

prix de l'action. Cette description correspond au processus de Wiener. La distribution des prix est donc lognormale et les auteurs supposent que la variance du prix de l'actif sous-jacent est constante dans le temps. L'équation³ caractérisant le processus des prix du sous-jacent est égale à:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dw_t \quad (1)$$

avec; μ la moyenne du processus générant les prix du sous-jacent, σ un paramètre de diffusion (la variance), dw_t la différentielle de Brownien décrivant la partie aléatoire du processus et $\mu_t dt$ représente la partie déterministe du processus.

En outre, les auteurs supposent; que l'action ne paie pas de dividendes, l'option est de type européenne: elle ne peut donc s'exercer avant son échéance. Ils supposent que les coûts de transaction sont nuls, qu'on peut emprunter et prêter des montants équivalents à des fractions de l'action au taux court terme sans risque et que la vente à découvert est permise, sans pénalités.

Définition d'une option: Il s'agit d'un droit qui permet au porteur d'acheter ou de vendre une action. Il existe principalement deux types d'options : les options d'achat (calls) qui donnent le droit d'acheter une action ou un indice à un certain cours d'ici à une certaine échéance et les options de vente (puts) qui donnent le droit de vendre une action ou un indice à un certain cours d'ici à une certaine échéance.

Une autre différence importante est la période d'exercice de l'option : une option de type américaine peut être exercée à n'importe quelle date jusqu'à la date d'échéance, or une option de type européenne ne peut être exercée qu'à la date d'échéance.

L'utilité d'une option: L'objectif premier d'une option est de servir de couverture au cas où les marchés se retourneraient. Un épargnant qui désire acheter des actions à un moment où la Bourse est déjà haute, peut se couvrir en achetant des Puts à des cours élevés. Ainsi, au cas où les cours des actions qu'il a acheté viendraient à baisser fortement, il pourrait exercer

³Il s'agit ici d'une équation qui décrit un mouvement Brownien géométrique.

les options Puts qu'il a acheté et vendre ses actions aux prix d'exercice de ces options.

Un autre objectif de l'option est la spéculation : les mouvements de cours sur une option sont beaucoup plus importants que ceux d'une action.

À l'aide de ces hypothèses, Black et Scholes partent d'une position longue de l'action, à découvert de l'option et à risque nul, pour dégager leur fameuse équation du prix d'une option d'achat européenne:

$$C_t(S_t, t) = S_t N(d_1) - K \exp(-r(T-t)) N(d_2) \quad (2)$$

$$d_1 = (\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)) / \sigma \sqrt{(T-t)} \quad (3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)} \quad (4)$$

avec; C le prix de l'option, S le prix de l'action sous-jacent; $(T-t)$ le temps avant la date d'expiration, K le prix d'exercice, σ^2 la variance de sous-jacent, r le rendement à court terme sans risque et $N(\cdot)$ représente la fonction de répartition de la distribution normale.

1.1.2 Extension du modèle de Black et Scholes : modèle de Hull et White (1987)

Un problème majeur du modèle de Black et Scholes est qu'il suppose une volatilité constante dans le temps, or en réalité ce n'est pas le cas. Par conséquent plusieurs auteurs ont pensé à la construction d'un modèle d'évaluation des actifs qui prend en considération une volatilité qui change dans le temps. Hull et White (1987), ont pu développer, à partir du modèle de Black et Scholes, un modèle qui suppose une volatilité non constante dans le temps.

Soit un produit dérivé dont le prix, C , dépend du prix du sous-jacent, S , et de sa variance instantanée $V_t = \sigma_t^2$, ces deux dernières variables suivent des processus stochastiques selon les équations⁴ suivantes:

$$d \ln(S_t) = \mu_1(V_t)dt + \sqrt{V_t}dw_t^{(1)} \quad (5)$$

⁴Dans leur article, Hull et White(1987) considèrent les équations suivantes:

$$\begin{aligned} dS_t &= \phi S_t dt + \sigma S_t dw_t \\ dV_t &= \mu V_t dt + \xi V_t dz_t \end{aligned}$$

$$V_t = f(z_t) \quad (6)$$

$$dz_t = \mu_2(z_t)dt + \sigma(z_t)dw_t^{(2)} \quad (7)$$

avec; μ_1 et μ_2 des paramètres qui dépendent respectivement de V_t et z_t . Les processus de Wiener $dw_t^{(1)}$ et $dw_t^{(2)}$ sont corrélés avec un coefficient de corrélation ρ .

L'équation (6) représente le processus générant les prix du sous-jacent et les équations (7) et (8) représentent le processus générant la variance de celui-la.

Notons que S et σ^2 sont les seules variables qui affectent le prix du produit dérivé, C . Le taux d'intérêt sans risque, r , est considéré constant ou à processus déterministe.

Exemples de la fonction $f(z_t)$:

Exemple1 : Wiggins (1987) a pris comme fonction $f(z_t) \exp(z_t)$:

$$f(z_t) = \exp(z_t)$$

$$\text{avec } dz_t = k(\theta - z_t)dt + \sigma dw_t^{(2)}.$$

Exemple2 : Heston (1993) considère que :

$$f(z_t) = z_t$$

et que

$$dz_t = k(\theta - z_t)dt + \sigma\sqrt{z_t}dw_t^{(2)}$$

Hull et White montrent que dans le cas d'une option d'achat européenne et sous l'hypothèse $\rho = 0$, le prix de cette dernière est donné par l'équation suivante:

$$C(S_t, \sigma_t^2, t) = \int [\exp(-r(T-t)) \int C(S_t)g(S_T/\bar{V})dS_t]h(\bar{V}/J_t)d\bar{V}. \quad (8)$$

avec; $\bar{V}_t = \frac{1}{T-t} \int_t^T V_i di$, $h(\bar{V}/J_t)$ la fonction de densité de \bar{V}_t conditionnelle à l'information J_t , T la date d'expiration d'option, $BS(\cdot)$ la formule de Black-Scholes du prix d'option et $J_t = \sigma(S_\tau, V_\tau, \tau \leq t)$ est l'information disponible à la date t .

Cette formule du prix d'option d'achat peut s'écrire aussi sous la forme suivante:

$$C(S_t, V_t, t) = E[BS(\bar{V}_t)/J_t] \quad (9)$$

Il apparaît que pour calculer le prix d'option à partir de cette formule, les participants du marché doivent calculer la fonction de densité subjective conditionnelle de \bar{V}_t .

Dans le cas d'existence d'un effet de Levier, la formule de Hull et White ne fonctionne pas. Heston (1993) a proposé, dans ce cas, une nouvelle formule pour l'évaluation des produits dérivés. Cette formule est calculée à partir de la fonction caractéristique de la probabilité risque-neutre et de l'inverse de la transformation de Fourier.

1.2 Différentes mesures de volatilité :

Il est utile de définir les différentes mesures de la volatilité, afin de pouvoir les distinguer entre elles et savoir laquelle constitue le meilleur estimateur de la volatilité future.

1.2.1 Mesure de la volatilité en utilisant uniquement le stock de rendements :

Définition de la volatilité historique: On définit la volatilité historique comme étant tout simplement l'écart-type de la distribution du logarithme des rendements d'un titre ou d'un indice durant les 20 à 60 dernières périodes. En fait, on peut la percevoir comme une mesure de la dispersion de ces rendements dans le passé.

En supposant que la volatilité est constante, la volatilité historique est donnée par la formule suivante:

soit le modèle : $y_t = m_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $m_{t-1} = E(y_t/I_{t-1})$ et $E(\varepsilon_t/I_{t-1}) = 0$, où y_t est le rendement de l'actif sous-jacent, m_{t-1} la moyenne de rendement de l'actif sous-jacent (plus loin, nous allons spécifier la formule de m_{t-1}) et I_{t-1} définit l'information disponible à la date $t - 1$.

On a :

$$h_t = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \varepsilon_{t-1-i}^2 \quad (10)$$

avec; k : le nombre de périodes sur les-quelles nous comptons estimer la volatilité.

Définition de la volatilité type ARCH: La volatilité conditionnelle est la volatilité estimée à partir des modèles de séries temporelles tel que le modèle ARCH, GARCH⁵ de Engle (1982) et de Bollerslev (1986):

Engle (1982), en constatant que les séries financières sont caractérisées par des périodes d'agitation suivies de périodes de "relative" accalmie, a proposé l'approche " AutoRegressive Conditionaly Heteroscedastic" (*ARCH*) pour modéliser ce phénomène financier. Le modèle *ARCH* de base s'écrit de la manière suivante:

$$y_t = m_{t-1} + \varepsilon_t \quad (11)$$

avec; $m_{t-1} = E(y_t/I_{t-1}), E(\varepsilon_t/I_{t-1}) = 0$
et

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \quad (12)$$

α_0 et $\alpha_1 > 0$ et u_t suit une $N(0, 1)$.

Bollerslev (1986) a proposé une extension de modèle *ARCH* de type *GARCH* . Le modèle *GARCH* est défini comme suivant:

$$y_t = m_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13)$$

avec $m_{t-1} = E(y_t/I_{t-1}), E(\varepsilon_t/I_{t-1}) = 0$
et

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t} \quad (14)$$

où;

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (15)$$

⁵Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la variance conditionnelle soit positive sont : ω , α et $\beta > 0$.

Ce modèle *GARCH* est une forme de modèle *ARMA* sur la variance. Il assure une dépendance sérielle des volatilités, c'est-à-dire la volatilité future dépend de la volatilité passée, ce qui permet de faire des prévisions sur la variance à venir des rendements.

Un autre type de modèles de series temporelles est appelé modèle *EGARCH*. Pour capter l'asymétrie, par rapport aux données passées, de la volatilité conditionnelle, Nelson (1991) a introduit des modifications sur le modèle *GARCH* en utilisant une transformation logarithmique connue sous le nom du modèle *EGARCH*.

L'équation de ce modèle⁶ est :

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \beta_1 \ln(h_{t-1}) + \alpha_1(\theta \psi_{t-1} + \gamma(|\psi_{t-1}| - (2/\pi)^{1/2})) \quad (16)$$

avec; $\psi_{t-1} = \varepsilon_{t-1}/h_{t-1}$ et $\psi_{t-1} \sim N(0, 1)$.

1.2.2 Mesure de la volatilité en utilisant uniquement les prix d'options:

Définition: La volatilité implicite est la volatilité calculée à partir de la formule de Black-Scholes en égalisant le prix théorique de l'option et celui observé sur le marché, étant donné les autres paramètres, la maturité, $T - t$, le taux sans risque, r , le prix d'exercice, K , et le prix courant du sous-jacent, S .

Généralement, cette volatilité implicite est perçue comme une mesure instantanée de la volatilité future sur un titre, renfermant toute l'information disponible à ce moment et donc pouvant être utilisée comme un estimateur de la volatilité future, du moins à court terme.

Le calcul de cette volatilité se fait en inversant la formule de Black-Scholes:

Pour une observation ($C_t, S_t, K_t, T - t$) la volatilité implicite σ^{imp} est donnée par l'équation suivante:

$$\sigma^{imp} = C_t^{-1}(C_t, S_t, K_t, T - t) \quad (17)$$

Si nous disposons de plusieurs options, la volatilité implicite sera donnée par la minimisation du terme suivant:

⁶Dans ce cas il n'y a pas de restrictions sur les paramètres du modèle.

$$\sum_{K=1}^{N_T} (\delta_{K,\tau} (C_{K,\tau} - C_K(\sigma_0(\tau))))^2 \quad (18)$$

Voir appendice 2.

Le problème qui se pose lorsqu'on évalue la volatilité implicite est qu'il n'est pas possible d'isoler simplement et directement la volatilité dans l'équation de Black-Scholes. Le calcul de cette volatilité est donc beaucoup plus complexe et se divise en deux grandes catégories: les solutions analytiques, provenant de simplifications découlant d'hypothèses ou de cas spécifiques, et les solutions numériques faites par itérations (Voir appendice 1).

1.2.3 Mesure de la volatilité en utilisant le stock de rendements et les prix d'options :

Les mesures mixtes de la volatilité se basent sur la volatilité conditionnelle et la volatilité implicite.

En considérant les mêmes modèles qu'en haut, on définit une volatilité mixte type GARCH comme suivant :

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \delta \sigma_{t-1}^2 \quad (19)$$

La volatilité mixte type EGARCH est donnée par l'équation suivant :

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \beta_1 \ln(h_{t-1}) + \alpha_1 (\theta \psi_{t-1} + \gamma (|\psi_{t-1}| - (2/\pi)^{1/2})) + \delta \ln(\sigma_{t-1}^2) \quad (20)$$

2 Information sur la volatilité contenue dans les prix d'options: une revue de littérature

Dans ce qui suit, nous allons faire un petit rappel sur les recherches relatives au pouvoir prévisionnel de la volatilité implicite. Ces recherches développées par des auteurs tels que Day et Lewis (1992), Canina et Figlewiski (1993) et Lamoureux et Lastapes (1993), se basent sur des modèles différents et elles mènent à des résultats diversifiés qui parfois convergent (voir le cas de Day-Lewis et Lamoureux-Lastapes) et d'autres fois divergent (voir le cas de Day-Lewis et Canina-Figlewiski).

Day et Lewis (1992): Dans leur article intitulé "stock market volatility and the information content of stock index options", Day et Lewis (1992) examinaient l'information contenue dans la volatilité implicite en faisant, d'abord, comparer cette dernière avec la volatilité conditionnelle estimée à partir des modèles *GARCH* et *EGARCH* et en mettant, ensuite, les deux volatilités ensemble dans un même modèle avec l'hypothèse que le rendement excédentaire du marché est une fonction linéaire de la volatilité conditionnelle :

$$R_{m,t} - R_{f,t} = \lambda_0 + \lambda_1 h_t + \varepsilon_t \quad (21)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$$

avec; R_m le rendement de portefeuille du marché *S&P100*, R_f le taux d'intérêt sans risque et h_t la variance de rendement de portefeuille du marché.

Les modèles *GARCH* et *EGARCH* utilisés par les auteurs sont mentionnés au niveau de la sous-section 1.2 (voir l'équation (15) et (16)). Les modèles où la volatilité conditionnelle et la VI interviennent ensemble sont donnés par les équations (19) et (20) de la même sous section .

Nous signalons que Day et Lewis ont estimé la VI en utilisant la formule de Black-Scholes ajustée à une option américaine et à la présence de dividendes qui sont payés durant la vie de l'option d'achat(voir appendice 2). Ils ont utilisé des données relatives aux prix d'options américaines sur l'indice *S&P100* qui vont du 11 Mars jusqu'au 31 Décembre 1989. Pour alléger le biais associé aux transactions non-synchronisées⁷, ils ont éliminé les options dont le volume des cotations journalières est inférieur à 100 contrats et/ou les options dont la valeur absolue de la différence entre le prix du sous-jacent et celui de l'exercice excède 15\$. Sont aussi exclues de l'échantillon d'étude toutes les options qui ne respectent pas la condition inférieure de l'option américaine d'achat.

Le coefficient δ dans les équations (19) et (20) peut être interprété comme étant une mesure de la contribution de la VI au changement de la variance conditionnelle de rendement à travers le temps.

En outre, Day et Lewis ont testé le pouvoir prévisionnel absolu et relatif de chacune des catégories de volatilités en utilisant des tests hors échantillon basés sur les équations suivantes:

⁷Le biais causé par la non-synchronisation entre l'option et le sous-jacent s'explique par les opportunités d'arbitrage -qui peuvent survenir et biaiser les resultats- duent à la différence de temps entre la cotation d'un sous-jacent et le prix de l'option.

$$V_{f_{t+1}} = b_0 + b_1 V_{f_t} + \xi_{t+1} \quad (22)$$

$$V_{f_{t+1}} = b_0 + b_1 VI_t + b_2 h_t + e_{t+1} \quad (23)$$

avec; V_{f_t} ⁸ une prévision de la volatilité à la fin de la période t , VI_t la volatilité implicite dans le prix d'option d'achat à la fin de la période t , h_t la prévision de la volatilité à partir du modèle *GARCH* ou *EGARCH*, ξ_{t+1} , e_{t+1} erreurs de prévision et $V_{f_{t+1}}$ désigne la volatilité future. Les auteurs considéraient deux mesures de volatilité hebdomadaire future, la première égale au carré du rendement hebdomadaire de l'indice S&P100 et la deuxième est obtenue en calculant la variance quotidienne, pour chaque semaine, dans l'échantillon prévu. Cette variance quotidienne est multipliée par le nombre de jours de transaction par semaine.

En se basant sur le R^2 de la régression des équations (22) et (23), les tests hors échantillon indiquent que la volatilité hebdomadaire est difficile à prévoir. Bien que les résultats soient consistents avec l'hypothèse que les prévisions de la VI et celles des modèles *GARCH* sont non biaisés, il est difficile d'avoir une opinion claire concernant l'information contenue dans ces deux volatilités. Mais, les conclusions générales de ces auteurs indiquaient que la VI de l'indice S&P100 contient de l'information supplémentaire par rapport aux modèles de type *GARCH*. En outre leurs résultats montrent que, dans certains cas, le modèle *GARCH* prévoit mieux que le modèle *EGARCH*.

Lamoureux et Lastrapes(1993): Si, pour Day et Lewis (1992), la volatilité implicite de l'indice S&P100 contient une information supplémentaire par rapport aux modèles de type *GARCH*, les tests de Lamoureux et Lastrapes (LL) rejettent la condition d'orthogonalité selon laquelle les prévisions issues des modèles *GARCH* pour des actions individuelles, n'apportent pas de l'information supplémentaire par rapport aux volatilités implicites. LL testaient l'importante implication des hypothèses⁹ jointes du marché stipulant que les prévisions des modèles de séries temporelles, *GARCH*, ne devraient

⁸Ici V_{f_t} peut être représenté soit par la VI soit par la prévision de la volatilité conditionnelle à partir du modèle *GARCH* ou *EGARCH*.

⁹Les marchés sont efficients et les prix d'options sont expliqués par un modèle particulier.

pas avoir de contenu prédictif étant donné que la prévision du marché est incorporée dans les prix d'options. Autrement dit, la prévision de la variance à partir des prix d'options explique mieux la variance actuelle que les modèles GARCH.

Ici, on considère que la variance prévue à partir des marchés d'options, représente l'espérance subjective de la variance du marché et l'erreur de prévision de cette dernière devrait être orthogonale à toute l'information disponible sur le marché.

Pour tester cette restriction d'orthogonalité, on suppose comme variance du marché celle calculée à partir de la formule de Hull et White (1987). Le calcul de l'espérance subjective de la variance du marché est fait par la simulation des processus des prix et des variances du sous-jacent mentionnés au niveau de la sous section 1.1.2 (voir appendice 3).

Le test d'orthogonalité de l'erreur de prévision subjective avec l'information disponible sur le marché exige le calcul de l'espérance conditionnelle de la variance du marché et puisque celle-ci n'est pas observable alors il faut utiliser la formule de Hull et White pour des options "at-the-money"¹⁰. Dans ce cas on a $E(BS(\bar{V}_t/I_t)) = BS(E(\bar{V}_t/I_t))$, c'est-à-dire que la VI représente l'espérance subjective de la variance du rendement de l'actif sur le marché.

Le test est basé sur une comparaison de la performance des prévisions de la VI (la variance subjective du marché) et des modèles de séries temporelles. Cette comparaison est faite par deux types de tests, les tests à l'intérieur de l'échantillon (voir Day et Lewis) et les tests hors échantillon qui permettent de comparer les performances des prévisions de la VI et des modèles de séries temporelles en utilisant l'erreur moyenne et des régressions comme celles faites par Day et Lewis (voir les équations (22) et (23)).

Les résultats de ces tests montrent qu'on peut rejeter l'implication des hypothèses du marché, c'est-à-dire, que les modèles GARCH peuvent apporter de l'information supplémentaire par rapport aux volatilités implicites.

Canina et Figlewski (CF) (1993): Ces auteurs contredit, aussi, la conclusion principale de Day et Lewis, ils montrent que pour des sous-échantillons caractérisées par des maturités et des prix d'exercices différents, la VI est pratiquement non corrélée avec la volatilité future et que la volatilité historique

¹⁰L'utilisation des options at-the-money se justifie par le fait que ce type d'options élimine le biais qu'on peut avoir entre la variance calculée à partir de la formule de Black-Scholes et celle calculée à partir de la formule de Hull et White.

du S&P100 conduit aux meilleurs performances prédictives de la volatilité récente observée.

Pour comparer le pouvoir prévisionnel des deux volatilités à savoir la volatilité historique et la volatilité implicite, CF ont utilisé les mêmes tests que Day-Lewis et Lamoureux-Lastrapes. Ils ont utilisé trois types d'équations de régressions : la première équation régresse la volatilité réalisée, V_f , sur la volatilité implicite, VI ; $V_{f_t}(T-t) = \alpha + \beta VI_t(i, j) + \xi_{t,i,j}$ ¹¹, la deuxième équation régresse la volatilité réalisée, V_f , sur la volatilité historique, $Vol60$;

$V_{f_t}(T-t) = \alpha + \beta Vol60_t(i, j) + u_{t,i,j}$ et la troisième régresse la volatilité réalisée, V_f , sur les deux volatilités: $V_{f_t}(T-t) = \alpha + \beta_1 VI_t(i, j) + \beta_2 Vol60_t(i, j) + \zeta_{t,i,j}$.

Contrairement à Day-Lewis et Lamoureux-Lastrapes, CF ont estimé la VI, utilisée comme variable explicative dans les équations précédentes, à partir d'un modèle binomiale ajusté aux dividendes payés par les actifs. Ce modèle est appliqué à des données tirées de l'ensemble des prix d'options d'achats sur l'indice S&P100. Concernant la volatilité réalisée et la volatilité historique; la première est calculée en utilisant la formule suivante:

$V_{f_t} = (\frac{260}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2)^{\frac{1}{2}}$ avec $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$, $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$. La deuxième représente l'écart-type annualisé des rendements de l'indice S&P100 à travers les 60 périodes qui précèdent la date de calcul de la VI.

Les résultats de ces tests montrent que presque pour tous les groupes d'options, la VI est non corrélée avec la volatilité future et contrairement, la volatilité historique reste un bon estimateur de la volatilité récente observée.

3 Les données et la méthodologie du travail:

Cette section expliquera, dans un premier temps, les données utilisées pour faire l'étude. Une justification du choix des données sera aussi indiquée au niveau de la partie relative à la description des données. Dans un deuxième temps, nous allons décrire la méthodologie adoptée pour réaliser ce travail; nous allons plus précisément définir les critères d'évaluation et présenter les modèles choisis ainsi que les tests permettant de vérifier les résultats trouvés au niveau des étapes antérieures.

¹¹Ici, l'indice " i " indique le group d'options a maturité i et l'indice " j " indique le group d'options ayant comme valeur intrinsèque j.

3.1 Description des données:

Pour pouvoir atteindre nos objectifs, nous allons utiliser des données relatives aux prix d'options d'achat sur l'indice boursier S&P500 (SPX) transigées à la bourse de Chicago (CBOE)¹², disponibles pour les différentes dates et pour plusieurs prix d'exercice. L'indice S&P500 représente une moyenne pondérée des valeurs boursières des 500 plus grandes entreprises américaines ce qui en fait une bonne approximation du portefeuille de marché et de l'état de la conjoncture.

Les options sur le S&P500 sont des options européennes (d'achat ou de vente). Notre choix de ce type d'options est justifié par le fait que les conditions d'application de la formule de Black-Scholes sont bien satisfaites sur le marché d'options et sur l'indice boursier S&P500.

Notre échantillon¹³ est constitué de données journalières relatives aux options disponibles sur le S&P500 et s'étalent du mois de Janvier 1987 au mois d'Août 1997. Pour chaque date d'observation, les données contiennent: le mois et le jour de maturité, le prix d'option, le type d'option (achat, vente), le prix d'exercice, le taux d'intérêt, la VI et le moneyness.

Le moneyness est une statistique permettant de classifier les options entre elles. La valeur de moneyness est calculée selon la formule suivante: $moneyness = (S_t/K)exp(-r(T-t))$ avec; S le niveau courant de l'indice S&P500, K le prix d'exercice, r le taux d'intérêt et $(T-t)$ représente la maturité de l'option sur l'indice S&P500.

Pour éviter de prendre des options trop peu liquides, ou hors-cours, qui peuvent signifier la présence d'arbitrage et biaiser les résultats, un filtrage de données est fait par l'élimination de la base de données toutes les options; ayant un prix inférieur à 3/8 U.S \$, celles dont la maturité inférieure à 7 jours ou supérieure à un ans (360 jours) et finalement celles dont le prix est inférieur à la valeur intrinsèque: $max(0, S_t - KB_t((T-t)))$, avec $B_t((T-t)) = exp(-r(T-t))$: une formule d'actualisation. $B_t((T-t))$ est toujours inférieur à 1. Cette relation implique que la valeur intrinsèque d'une option d'achat ne peut être supérieure à son prix sans quoi, une opportunité d'arbitrage se dessinerait.

¹²Chicago Board of Option Exchange, la première et aujourd'hui la plus grande bourse de produits dérivés au monde.

¹³Dans notre étude, nous allons utiliser des options d'achats caractérisées par un moneyness=(0,94-0,97) et par un jour maturité=(60-180).

Le prix de l'indice sous-jacent est calculé simultanément avec les prix d'options à la fermeture, ce qui diminue la possibilité de biais relié à la non-synchronisation. Le taux de rendement de l'indice utilisé est la différence logarithmique quotidienne du niveau de l'indice $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$.

3.2 La méthodologie du travail:

Cette sous-section a comme objectif d'expliquer la méthodologie suivie pour répondre à la question posée. Tous les critères d'évaluation et les tests qui sont utilisés dans ce rapport de recherche seront exposés clairement au niveau de cette sous-section.

La méthodologie que nous allons suivre est inspirée de celle de Day et Lewis (1992), avec des changements au niveau des modèles *GARCH* appliqués pour examiner le contenu de la VI ainsi qu'au niveau de la méthode utilisée pour estimer les VI.

3.2.1 Les modèles d'évaluation du contenu de la volatilité implicite:

Un des objectifs principaux de cette étude, est d'examiner l'information contenue dans la VI, en la comparant avec la volatilité conditionnelle des modèles *GARCH*. Nous supposons dans un premier temps que ces modèles *GARCH* peuvent être utilisés pour prévoir la volatilité future parce qu'ils constituent une structure plus générale pour évaluer l'information marginale contenue dans la VI. Par conséquent, cette hypothèse nous permet de tester l'hypothèse stipulant que la variance instantanée des rendements implicite dans le prix d'une option d'achat sur l'indice S&P500 peut être interprétée comme une prévision ex-ante de la volatilité moyenne du sous-jacent sur la période restant de la vie de l'option.

Ce test sera aussi effectué en introduisant la VI dans les modèles *GARCH*, comme une variable explicative exogène. En outre, nous allons introduire au niveau de ces modèles une variable z_t qui dépend de la VI.

Les modèles d'évaluation de l'information contenue dans la VI que nous allons utiliser peuvent être résumé dans le modèle suivant :

$$R_{m,t} - R_{f,t} = ARMA(5, 5) \quad (24)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (25)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (26)$$

Avec; h_{t-1} la variance conditionnelle des rendements à la période $t - 1$, $R_{m,t}$ le rendement du portefeuille du marché S&P500, $R_{f,t}$ le taux d'intérêt sans risque et ε_{t-1} représente le choc à la date $t - 1$ du processus générant les rendements. Nous supposons que $\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$

Nous allons étudier les cas suivants: cas1 $\phi = 0$ et $\theta \neq 0$, cas2 $\phi \neq 0$ et $\theta = 0$, cas3 $\phi \neq 0$ et $\theta \neq 0$ et cas4 $\alpha = 0, \beta = 0, \phi \neq 0$ et $\theta = 0$

Le modèle $ARMA(5, 5)$ dans l'équation (24) permet de filtrer la série des rendements en annulant la corrélation entre les résidus du processus générant ces rendements. Le choix d'un ordre (5,5) pour le modèle $ARMA$ a été fait en se basant sur les tests de Box-Pierce.

Les tableaux suivants illustrent les résultats des tests de Box-Pierce:

Table 1: Le test de Box-Pierce dans le cas de rendements simples

L'ordre de la statistique de Box-Pierce	Q	P-value
11	5.52	0.018
12	5.76	0.056
13	6.76	0.079
14	8.41	0.077
15	9.33	0.096
16	12.06	0.06
17	12.15	0.095
18	14.12	0.078
19	17.22	0.045
20	20.29	0.026
21	20.53	0.038

Table 2: Le test de Box-Pierce dans le cas de rendements excédentaires

L'ordre de la statistique de Box-Pierce	Q	P-value
11	4.42	0.035
12	4.48	0.106
13	5.48	0.139
14	6.29	0.178
15	7.13	0.21
16	8.36	0.212
17	8.43	0.295
18	13.6	0.092
19	16.09	0.064
20	16.21	0.093
21	16.22	0.132

Nous allons aussi estimer les modèles suivants :

$$R_{m,t} - R_{f,t} = \mu + \varepsilon_t \quad (27)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (28)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (29)$$

Nous considérons les mêmes cas que précédemment. Nous allons également appliquer ces modèles pour la série des rendements simples sans l'introduction de la dynamique du taux d'intérêt.

Notons que le choix d'un modèle $AR(1)$ et d'un modèle $ARMA(5,5)$ pour modéliser les rendements à pour but d'étudier le comportement des estimations des coefficients des modèles $GARCH$, dans le cas de données filtrées et non filtrées.

Pour estimer ces modèles $GARCH$, nous allons utiliser la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV)¹⁴ (Plus loin, nous allons faire un rappel détaillé sur cette méthode et les hypothèses de son application).

¹⁴L'utilisation de la méthode du QMV au lieu de la méthode du MV se justifie par le fait que les tests de normalité sur les $\varepsilon_t/\sqrt{h_t}$ montrent que ces derniers ne sont pas distribués selon une loi normale.

Ici, ε_t sont les résidus du processus générant les rendements.

Le coefficient ϕ dans l'équations (28), peut être interprété comme étant une mesure de la contribution de la VI au changement de la variance conditionnelle du rendement à travers le temps.

3.2.2 La comparaison des volatilités future avec les prévisions des modèles *GARCH* :

Pour faire cette comparaison, nous allons utiliser le test hors l'échantillon. Ce test se base sur l'équation de la régression suivante:

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 V_{f,t+1} + \xi_{t+1} \quad (30)$$

avec; VF_{t+1} représente la prévision des résidus du processus générant les rendements, $V_{f,t}$ est une prévision de la volatilité par rapport à l'information disponible à la date t et ξ_{t+1} est l'erreur de prévision.

Ce type de régression permet d'examiner et de comparer les pouvoirs prévisionnels de chacune des volatilités par rapport à la volatilité future représentée dans notre cas par les prévisions des résidus du processus générant les rendements.

4 Résultats et Analyse:

Cette section se divise en deux parties. Dans la première partie, nous faisons l'étude de la distribution des rendements en se basant sur certaines statistiques. Cette étude sera effectuée dans le cas de présence et de l'absence de la dynamique du taux d'intérêt. Au niveau de la deuxième partie, nous analysons les résultats de l'estimation des différents modèles mentionnés au niveau de la sous-section 3.2.1, et les résultats obtenus des tests hors l'échantillon.

4.1 Les caractéristiques statistiques des données:

Cette partie à pour objectif l'étude de la distribution des rendements. Autrement dit, nous allons voir si les rendements et les bruits des processus générant ces rendements suivent une loi normale.

4.1.1 Les statistiques des rendements¹⁵:

Table3: Les Statistiques des Rendements¹⁶ :

	Rendements Excédentaires	Rendements Simples
Observation	2692	2692
Moyenne	-5.38 %	0.048 %
Ecart-type	1.87 %	0.99%
Minimum	-29.75%	-22.82%
Maximum	2.86%	8.72%
Skewnes	-2.84 (-60.25)	-4.75 (-100.76)
Kurtosis	46.33 (459)	111.33 (1147.4)
J.B	9121209.1	1.24 10 ⁸
Q-Statistique ¹⁷	53704	123.2

Dans ce tableau nous avons présenté des statistiques sur les rendements excédentaires et les rendements simples. Nous remarquons que les données sont très variables. Cela se traduit par le fait que les coefficients d'aplatissements (Kurtosis)¹⁸ des deux séries sont élevés: on parle de distributions dite leptokurtique. En outre, les coefficients d'asymétries¹⁹ (Skewnes) des série de rendements sont différents de zéro, ce qui signifie que la distribution de ces derniers diffère de celle d'une la loi normale.

Les graphiques 1 et 2 permettent d'avoir une vue d'ensemble sur les observations. Les données semblent stationnaires, surtout dans le cas des rendements simples.

Les deux tableaux suivants illustrent les autocorrélations des résidus dans le cas d'un modèle *ARMA*(5, 5). Ils montrent qu'il y a une faible autocorrélation entre les résidus, et cela pour les deux séries de rendements à savoir

¹⁵Cas des options caractérisées par un moneyness=0.94-0.97 et un jour maturité=60-180.

¹⁶Les chiffres entre parenthèses correspondent à des tests de student (t-statistiques).

¹⁷Il s'agit ici de la statistique de Box-Pierce permettant de tester l'existence d'une autocorrélation entre les résidus.

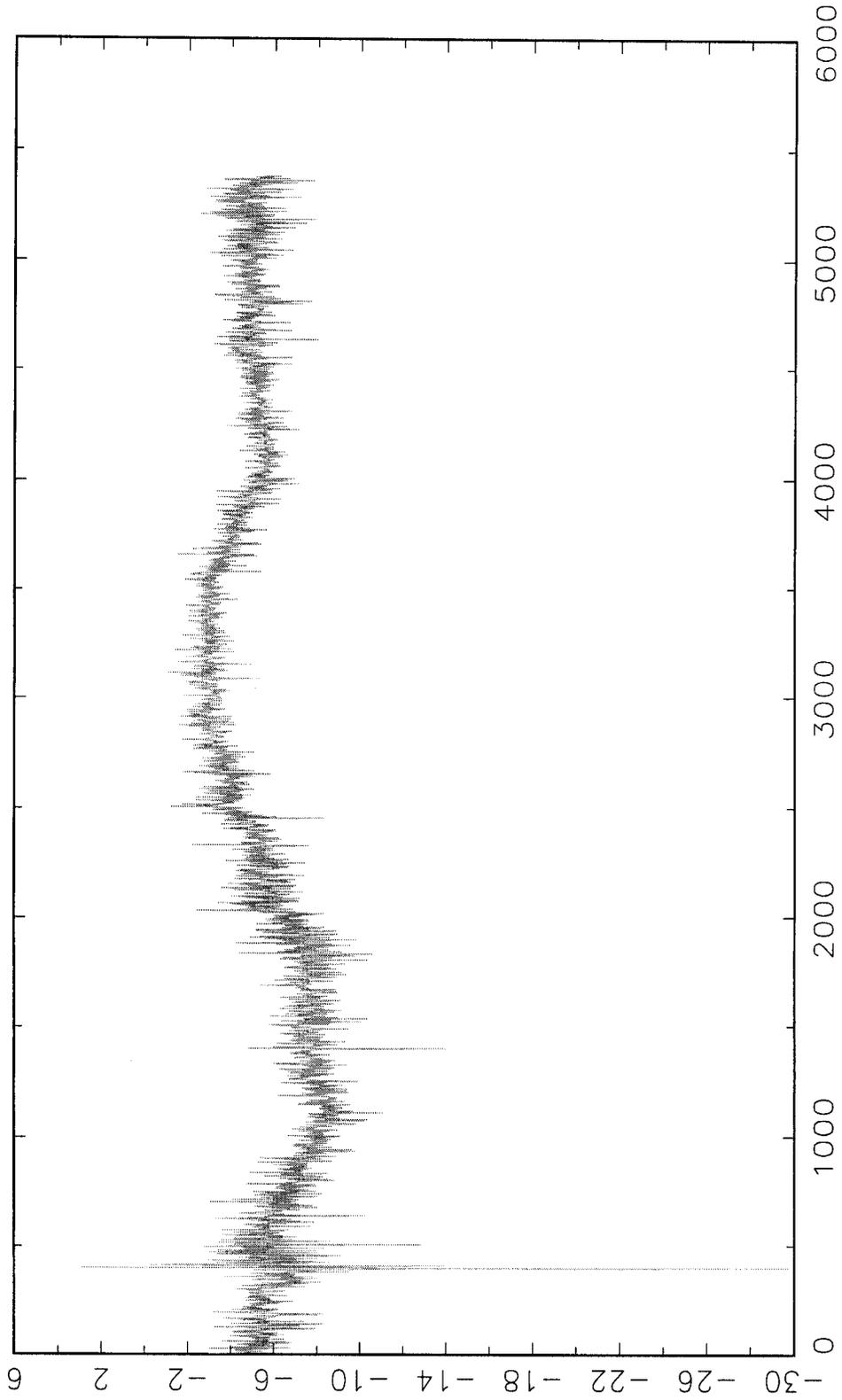
¹⁸L'aplatissement est le moment d'ordre 4 , il met en relation le nombre d'observations extrêmes face à la distribution théorique. Une variable distribuée selon une loi normale doit avoir un coefficient d'aplatissement proche de 0.

¹⁹L'asymétrie est le troisieme moment associé à la distribution d'une variable aléatoire, dans ce cas, il s'agit du rendement du sous-jacent. Ce moment met en relation la moyenne par rapport a la valeur médiane.

Graph 1:

GAUSS Sun Dec 30 13:34:37 2001

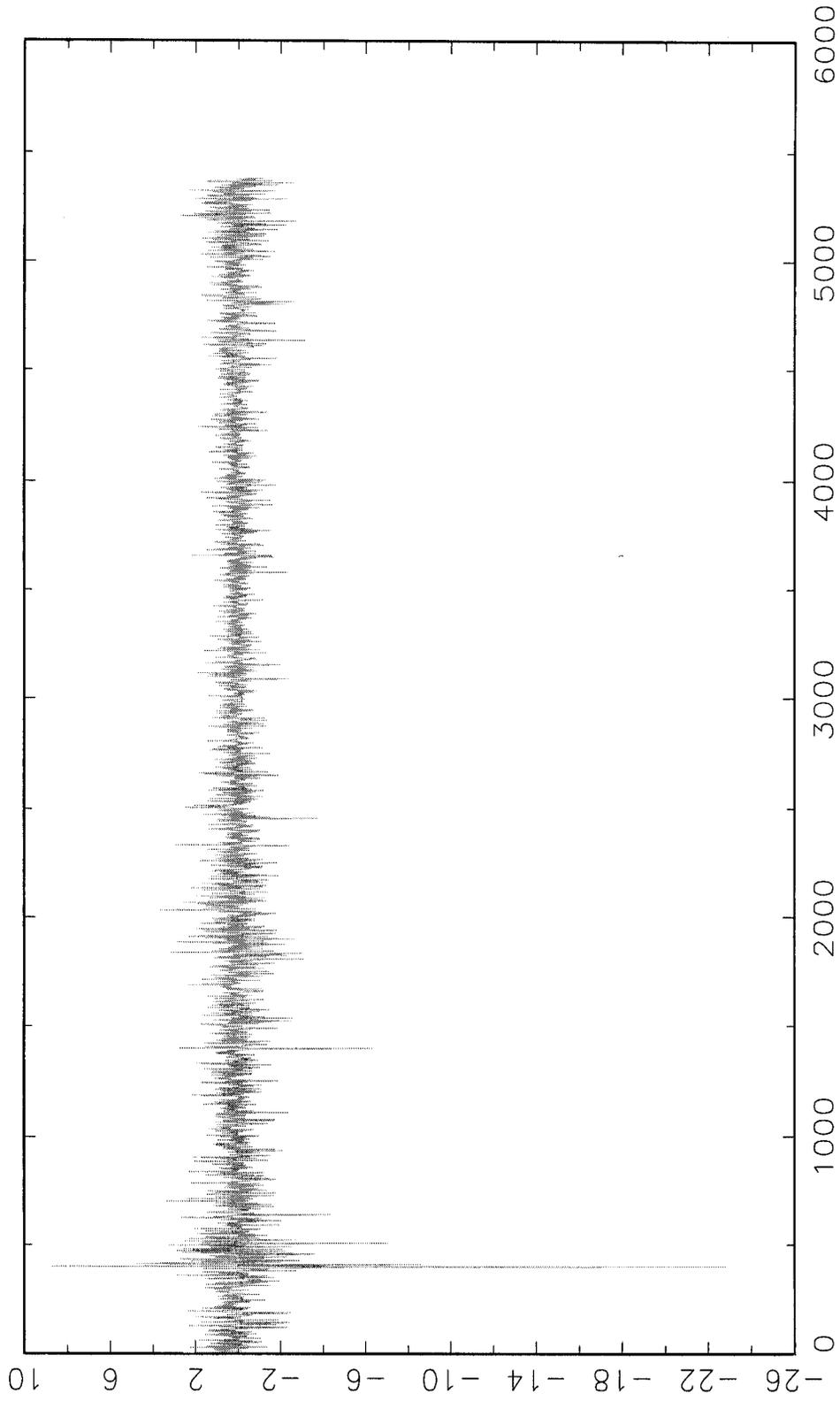
Les rendements excédentaires de l'indice S&P500



Graph 2

GAUSS Sun Dec 30 13:49:07 2001

Les rendements simples de l'indice S&P500



les rendements excédentaires et les rendements simples.

Table4: Les autocorrélations des résidus dans le cas de rendements excédentaires:

L'ordre	1	2	3	4
Les autocorrélations	-0.0016	-0.0053	0.0086	-0.0228
L'ordre	9	10	11	12
Les autocorrélations	-0.0028	-0.0297	0.0085	0.0094
L'ordre	5	6	7	8
Les autocorrélations	0.0081	-0.002	-0.018	0.007
L'ordre	13	14	15	16
Les autocorrélations	-0.0193	0.024	0.018	0.031

Table5: Les autocorrélations des résidus dans le cas de rendements simples:

L'ordre	1	2	3	4
Les autocorrélations	-0.0013	-0.0008	0.0015	-0.0084
L'ordre	9	10	11	12
Les autocorrélations	0.0046	-0.0292	0.0179	0.0046
L'ordre	5	6	7	8
Les autocorrélations	-0.0011	0.005	-0.017	0.005
L'ordre	13	14	15	16
Les autocorrélations	-0.0192	0.017	0.017	0.021

4.1.2 Les statistiques des erreurs²⁰ et des erreurs au carré du processus générant les rendements:

Le but de calculer les statistiques des erreurs est d'analyser leur distribution de probabilité. L'identification de la distribution des erreurs peut aider à choisir une méthode d'estimation des paramètres des modèles. Ainsi, il n'est pas efficace d'utiliser la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) si les erreurs ne sont pas Gaussiennes, et par conséquent on doit utiliser la Méthode de Quasi Maximum de Vraisemblance (QMV).

Cas de rendements modélisés sous forme d'un ARMA(5,5):

²⁰Il s'agit ici des $u_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$ avec; les ε_t représentent les résidus du modèle générant les rendements. Nous supposons que $\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$ et par conséquent $u_t \sim N(0, 1)$.

Table6: Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas des rendements simples
($R_{m,t} = ARMA(5, 5)$):

	Mean	Sta.Dev	Min	Max
u_t	0.0015	0.9664	-8.9507	4.2882
u_t^2	0.9336	2.6906	0	78.3203
	Skewns		Kurtosis	
u_t	-0.7407 (-15.6896 ²¹)		8.5587 (58.8717 ²²)	
u_t^2	-		-	

statistique de JB pour les $u_t = 19482.9948$

Q-statistique pour les $u_t = 72.4636$

Table7: Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas des rendements excédentaires ($R_{m,t} - R_{f,t} = ARMA(5, 5)$):

	Mean	Sta.Dev	Min	Max
u_t	-0.0213	0.9623	-8.3435	4.2074
u_t^2	0.9263	2.3865	0	69.6143
	Skewns		Kurtosis	
u_t	-0.5864 (-12.4206)		7.0199 (42.5740)	
u_t^2	-		-	

statistique de JB pour les $u_t = 7429.4400$

Q-statistique pour les $u_t = 78.786$

Dans les tableaux 6 et 7, nous présentons les statistiques des séries des erreurs, $u_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$, et des erreurs au carré, u_t^2 . Ces statistiques permettent de vérifier la forme de la distribution de probabilité des erreurs, ainsi que l'existence d'autocorrélations entre eux.

Rappelons que la statistique de Box-Pierce (1970) est utilisée pour savoir si les résidus sont "blanchis".

Soit $r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-k}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$ la fonction d'autocorrélation, avec $r_k = [r_1, \dots, r_K]$.

Sous l'hypothèse nulle que les résidus sont des bruits blanc, la statistique de Box-Pierce est la suivante: $Q_K = T \sum_{k=1}^K r_k^2$.

Sous cette hypothèse, Q_K suit asymptotiquement une $\chi^2(K - (p + q))$, où p est l'ordre de la partie autorégressif et q est l'ordre de la partie moyenne mobile. Cependant, cette statistique n'est pas valide lorsque les erreurs sont conditionnellement hétéroscédastiques.

²¹Il s'agit ici des t-statistiques calculées sous l'hypothèse nulle : $ske = 0$. La statistique utilisée pour faire le test est égale à $(ske - 0) / \sigma_{ske}$.

²²Il s'agit ici des t-statistiques calculées sous l'hypothèse nulle : $kur = 0$. La statistique utilisée pour le test est égale à $(kur - 0) / \sigma_{kur}$.

D'après les statistiques Skewns, Kurtosis et JB des erreurs u_t , nous remarquons que ces derniers ne sont pas Gaussiens. En outre, la statistique de Box-Pierce montre qu'il n'y a pas d'autocorrélation entre les u_t à un niveau de signification de 95%.

Cas de rendements modélisés sous forme d'un $AR(1)$:

Table8: Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas de rendements simples ($R_{m,t} = \mu + \varepsilon_t$):

	Mean	Sta.Dev	Min	Max
u_t	-0.0012	0.9665	-8.9301	4.3078
u_t^2	0.9338	2.6769	$2.04 \cdot 10^{-7}$	79.7470
	Skewns		Kurtosis	
u_t	-0.7272 (-15.4046)		8.5976 (59.2844)	
u_t^2	-		-	

statistique de JB pour les $u_t = 19881.653$

Q-statistique pour les $u_t = 52.4778$

Table9: Les statistiques des u_t et u_t^2 dans le cas de rendements excédentaires ($R_{m,t} - R_{f,t} = \mu + \varepsilon_t$):

	Mean	Sta.Dev	Min	Max
u_t	-0.0158	0.9551	-5.6543	2.8650
u_t^2	0.9122	1.2930	$1.171 \cdot 10^{-6}$	31.9719
	Skewns		Kurtosis	
u_t	-0.2423 (-5.1329)		2.7270 (-2.8908)	
u_t^2	-		-	

statistique de JB pour les $u_t = 24.0302$

Q-statistique pour les $u_t = 32503, 8885$

À partir des tableaux 8 et 9, nous pouvons tirer les mêmes conclusions que dans le cas précédent (tableaux 6 et 7). La seule différence est que dans le cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$ la statistique de Box-Pierce reste significative à un niveau de signification de 95%, ce qui signifie l'existence d'une autocorrélation entre les u_t . Ainsi, nous ne pouvons pas utiliser la méthode du maximum de vraisemblance (MV) pour estimer les modèles $GARCH$, mais nous devons plutôt utiliser la méthode du QMV²³.

²³L'application de la méthode du MV dans le cas des u_t qui ne suivent pas la loi normale centrée réduite conduit à des estimations non biaisées, mais qui ont des variances fausses.

Rappelons que Pour estimer des modèles de type *ARCH*, *GARCH*, ..., on utilise l'estimateur du QMV basé sur l'hypothèse de la loi conditionnelle normale.

Supposons que $l_t(y_t, \theta / \underline{y}_{t-1})$ désigne la vraisemblance associé à y_t conditionnelle aux valeurs passé $\underline{y}_{t-1} = (y_s \text{ pour } s \leq t-1)$, alors la fonction de vraisemblance conditionnelle de Y_1, \dots, Y_T est: $L(y_1, \dots, y_T, \theta / Y) = l_0(y_0, \theta) \prod_{t=1}^T l_t(y_t, \theta / \underline{y}_{t-1})$. Par conséquent, on définit l'estimateur optimal θ comme suivant:

$$\hat{\theta}^{QMV} = \arg \max_{\theta} L(y_1, \dots, y_T, \theta / Y) \quad (31)$$

Cet estimateur est appelé estimateur du *QMV*, et il depend à la fois de la vraie distribution et de celle utilisée pour calculer la vraisemblance à savoir la distribution de la loi normale. Sous certaines conditions de régularité (voir Gouriéroux et Monfort, 1989), cet estimateur est convergent même si la véritable loi sous-jacent n'est pas conditionnellement normale. En outre, cet estimateur est asymptotiquement normale et sa matrice de covariance asymptotique robuste à l'hétéroscédasticité est :

$$V_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] = J^{-1} I J^{-1}$$

avec;

$$J = E_0 \left[- \frac{\partial^2 \log l_t(y, \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \text{ et}$$

$$I = E_0 \left[\frac{\partial \log l_t(y, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log l_t(y, \theta)}{\partial \theta'} \right]$$

4.2 L'estimation et les tests hors échantillon pour les différents modèles *GARCH* :

4.2.1 Cas de rendements modélisés sous forme d'un *AR*(1) :

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas où les rendements sur l'indice S&P500 sont modélisés sous la forme d'un *AR*(1). Les estimations et les tests hors échantillon des différents modèles *GARCH* seront effectués dans le cas de présence et de l'absence de la dynamique de taux d'intérêt.

Tableau #10: L'estimation des différents modèles GARCH:
(Cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un AR(1))

Taille de l'échantillon égale à 2000

$$R_{m,t} - R_{f,t} = \lambda + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	-5.25%	0.1	-49.8	-	-5.25%	0.1	-49.7	-
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.06	0.02	2.36	-	0.03	0.02	1.33	-
α	0.18	0.04	3.9	-	0.2	0.05	3.85	-
β	0.8	0.04	17.6	-	0.78	0.05	15	-
δ	-	-	-	-	2.84	2.32	1.22	5.11
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-4049.2				-4046.7			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	-5.25%	0.1	-50	-	-5.47%	0.07	-81.5	-
θ	-0.25	0.4	-0.63	2.23	-	-	-	-
ω	0.03	0.02	1.03	-	4.44	0.36	12	-
α	0.2	0.05	3.9	-	-	-	-	-
β	0.8	0.05	14.5	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	4.8	42.3	0.11	595.7
ϕ	4.83	3.6	1.34	7.35	-	-	-	-
LL	-4045.6				-4344.6			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

*Es=Estimation, σ =écart-type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

Tableau 11: L'estimation des différents modèles GARCH:
(Cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un AR(1))

Taille de l'échantillon égale à 2500

$$R_{m,t} - R_{f,t} = \lambda + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	-5.25%	0.04	-135.5	-	-5.25%	0.03	-138	-
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.02	0.008	2.17	-	0.008	0.008	1.1	-
α	0.15	0.03	4.47	-	0.17	0.04	4.2	-
β	0.84	0.03	24.4	-	0.82	0.037	21.8	-
δ	-	-	-	-	1.6	1.02	1.55	5.5
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-4557.5				-4554.7			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	-5.25%	0.04	-139.8	-	-5.4%	0.05	-112.2	-
θ	-0.45	0.46	-0.98	1.81	-	-	-	-
ω	0.008	0.007	1.05	-	3.35	0.27	12.23	-
α	0.17	0.4	4.2	-	-	-	-	-
β	0.82	0.039	20.6	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	25.6	34.4	0.75	1256
ϕ	2.8	1.8	1.55	7.30	-	-	-	-
LL	-4553.84				-5182.6			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

*Es=Estimation, σ =Ecart-Type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

Cas de rendements excédentaires: Pour un échantillon de 2000 observations, le tableau 10 montre les résultats de l'estimation des différents modèles que nous avons présenté au niveau de la sous section 3.2. Il contient les écart-types, le test de student des estimations ainsi que le test du rapport de vraisemblance permettant de comparer les modèles entre eux.

Nous constatons que l'estimation de la moyenne, λ , du processus $AR(1)$ générant les rendements excédentaires est négative, -5.25%, et significative avec une t-statistique égale à 50. Dans le cas des rendements hebdomadaires sur l'indice S&P100 modélisés sous forme d'un $M - GARCH$, Day et Lewis ont trouvé que ce coefficient est non significatif²⁴.

Nous remarquons aussi que les coefficients α et β reflétant, respectivement, la participation des résidus au carré passés du processus $AR(1)$ et des volatilités conditionnelles passées, à l'explication des volatilités conditionnelles actuelles, h_t , sont significatifs pour tous les modèles. Concernant l'estimation de la moyenne, ω , des modèles $GARCH$, celle-ci est significative dans le cas des modèles 1 et 4 et non-significative pour le reste.

Les estimations des coefficients δ et ϕ , respectivement de la VI et de la variable z_{t-1} , sont non significatives pour tous les modèles, malgré que leurs valeurs estimées sont assez élevées. La non signification de ces coefficients peut être expliqué, comme l'ont indiqué Day et Lewis, par des erreurs de mesure relatives à la date de maturité, mais aussi par des erreurs de mesure sur la VI.

Concernant la comparaison des modèles, les valeurs de la fonction de vraisemblance et les tests du rapport de vraisemblance indiquent que le modèle contenant la variable z_t reste le meilleur parmi les autres à expliquer les volatilités $GARCH$ conditionnelles présentes.

Pour un échantillon de 2500 observations, le tableau 11 montre qu'il n'y a pas de changements importants par rapport aux résultats trouvés pour un échantillon de 2000. La seule différence est que le test du rapport de vraisemblance testant le modèle 3 contre le modèle 2, montre que ce dernier est préférable au modèle avec la variable z_t .

La comparaison des modèles en se basant sur les tests hors échantillon : Cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un

²⁴Nous signalons que Day et Lewis ont calculé les t-statistiques à partir de la variance calculée en utilisant la procédure de l'inférence robuste développée par Bollerslev et Wooldridge (1988).

$AR(1)$: Cette comparaison sera basée sur le R^2 de la régression des volatilités ex-post sur les prévisions des volatilités des modèles définis au niveau de la sous-section 3.2.1. Nous allons considérer comme volatilité ex-post le carré des résidus du processus générant les rendements excédentaires.

Le tableau 12 montre les résultats de l'estimation des coefficients de l'équation régressant les volatilités ex-post sur les prévisions des modèles *GARCH*, et c'est pour un échantillon de 692 observations.

Table12: Le pouvoir prédictif des différents modèles²⁵

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 V_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.1814 (2.0221)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.1922 (2.4603)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.2026 (2.7044)
La volatilité implicite seulement	-16.3002 (-5.8028)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.4856 (5.3378)	0.04
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.4415 (6.2099)	0.053
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.4215 (0.0661)	0.0560
La volatilité implicite seulement	3.7675 (6.0618)	0.0510

Nous constatons que les estimations du coefficient b_1 sont dans la plupart des cas significatives, sauf pour le modèle *GARCH* avec la variable z_t . La comparaison des R^2 montre que le meilleur modèle, où la volatilité ex-post est mieux expliquée, reste le modèle *GARCH* contenant la variable z_t . Ce résultat peut être expliqué par le fait que la VI contient de l'information relative à la volatilité ex-post.

Pour un échantillon de 192 [Tableau 13], nous avons trouvé des R^2 qui sont nuls pour les modèles 2, 3 et 4. Le R^2 est non nul seulement dans le cas du modèle *GARCH*, mais il reste faible. Une autre remarque importante est que les estimations du coefficient b_1 sont dans tous les cas négatives et non significatives. Ceux-ci s'expliquent par l'insuffisance de la taille échantillonale.

Ce résultat constitue un cas particulier où nous préférons le modèle *GARCH* comme modèle permettant de prévoir la volatilité ex-poste. Les tests du rapport de vraisemblance et les valeurs de la fonction de vraisemblance [voir le tableau 11] confirment ce résultat.

²⁵ Les chiffres entre parenthèses correspondent à un test de student (t-statistique).

Table13: Le pouvoir prédictif des différents modèles

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 V_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	1.1201 (3.6111)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	1.0837 (3.2348)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	1.0592 (3.1316)
La volatilité implicite seulement	1.3310 (1.2471)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	-0.0821 (-0.3185)	0.001
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	-0.0412 (-0.1735)	0.000
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	-0.0224 (-0.0962)	0.000
La volatilité implicite seulement	-0.0483 (-0.1910)	0.000

Cas de rendements simples:

Tableau #14: L'estimation des différents modèles GARCH:
(Cas de rendements simples modélisés sous forme d'un AR(1))

Taille de l'échantillon égale à 2000

$$R_{m,t} = \lambda + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	0.05%	0.02	2.51	-	0.04%	0.02	2.13	-
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.04	0.03	1.2	-	0.04	0.06	0.76	-
α	0.12	0.08	1.56	-	0.13	0.11	1.17	-
β	0.84	0.09	8.92	-	0.7	0.23	0.96	-
δ	-	-	-	-	7	5.17	1.36	51.8
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-2534				-2508.2			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	0.05%	0.02	2.6	-	0.04%	0.02	1.83	-
θ	0.94	0.02	49.23	17.6	-	-	-	-
ω	0.03	0.03	0.92	-	0.67	0.11	6.05	-
α	0.15	0.1	1.47	-	-	-	-	-
β	0.6	0.24	2.47	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	26.72	13.5	1.98	704
ϕ	0.9	0.6	1.5	69.4	-	-	-	-
LL	-2499.36				-2860.2			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

*Es=Estimation, σ =écart-type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

Tableau #15: L'estimation des différents modèles GARCH:
 (Cas de rendements simples modélisés sous forme d'un AR(1))
 Taille de l'échantillon égale à 2500

$$R_{m,t} = \lambda + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	0.06%	0.01	4.05	-	0.06%	0.01	3.77	-
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.02	0.02	1.02	-	0.03	0.02	1	-
α	0.10	0.07	1.44	-	0.11	0.08	1.34	-
β	0.87	0.08	10.4	-	0.77	0.15	5.18	-
δ	-	-	-	-	4.78	3.02	1.6	45.9
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-2995.6				-2972.63			
	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
λ	0.07%	0.01	4.12	-	0.05%	0.01	2.95	-
θ	0.93	0.02	40	12.9	-	-	-	-
ω	0.01	0.01	1	-	0.6	0.09	8.43	-
α	0.13	0.08	1.55	-	-	-	-	-
β	0.7	0.18	3.7	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	24.5	11.3	2.16	835.4
ϕ	0.55	0.42	1.3	58.8	-	-	-	-
LL	-2966.1				-3390.4			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

*Es=Estimation, σ =Ecart-Type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

Pour un échantillon de 2000 observations, le tableau 14 illustre les résultats de l'estimation des différents modèles et les tests qui leurs correspondent. Ces résultats montrent que les estimations de la constante dans le modèle générant les rendements $AR(1)$, sont significatives pour presque tous les modèles sauf pour le modèle 4. Contrairement, les estimations de ω sont non significatives sauf dans le cas du modèle 4.

Les estimations du coefficient α sont non significatives ce qui implique que les résidus ne contiennent pas de l'information relative aux volatilités $GARCH$. Contrairement, le coefficient β est significatif, sauf pour le modèle 2. Par conséquent, nous pouvons dire que les volatilités conditionnelles passées, h_{t-1} , contribuent à expliquer les volatilités conditionnelles présentes.

Concernant les coefficients δ et ϕ , le premier à une valeur estimée égale à 7, qui est assez importante, et le deuxième à valeur estimée de 0.9, mais les deux restent non-significatifs.

Les valeurs de la fonction de vraisemblance et les tests du rapport de vraisemblance montrent que le meilleur modèle est celui qui contient la variable z_t [voir le tableau 14].

Pour un échantillon de 2500 observations, le tableau 15 ne montre pas de grands changements en le comparant avec le tableau 14. La seule différence est que l'estimation de la constante λ est significative pour tous les modèles et celle du coefficient β devient significative dans le cas du modèle 2.

Dans ce cas nous obtenons les mêmes conclusions relative à la comparaison des modèles en utilisant les valeurs de la fonction de vraisemblance et les tests du rapport de vraisemblance.

La comparaison des modèles en se basant sur les tests hors échantillon : Cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$

Table16: Le pouvoir prédictif des différents modèles

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 VF_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.1146 (1.3227)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.1036 (1.3863)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.1205 (1.6986)
La volatilité implicite seulement	-0.0806 (-0.6880)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.6407 (5.3523)	0.040
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.5628 (6.6269)	0.060
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.5288 (6.8258)	0.063
La volatilité implicite seulement	0.5502 (0.0994)	0.042

Le tableau 16 présente les résultats des tests hors échantillon pour une taille échantillonnale de 692 observations. D'après ce tableau nous remarquons que les estimations du coefficient b_1 sont significatives pour tous les modèles à l'exception du modèle contenant la VI seulement. Les valeurs de R^2 indiquent que le modèle avec la variable z_t explique mieux la volatilité ex-post. Pour une taille échantillonnale de 192 [tableau 17], nous constatons que les estimations de b_1 sont non-significatives, mais elles restent importantes dans le cas du modèle contenant la variable z_t . Les R^2 sont faible dans ce cas, mais ils permettent toujours d'avoir les même conclusions que pour un échantillon de 692. La non-signification du coefficient b_1 peut se justifie par l'insuffisance des données.

Table17: Le pouvoir prédictif des différents modèles

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 V_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.9102 (2.8703)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.7376 (2.0037)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.6232 (1.6706)
La volatilité implicite seulement	0.9252 (2.6589)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.0225 (0.0689)	0.000
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.1566 (0.5457)	0.002
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.2366 (0.8555)	0.004
La volatilité implicite seulement	0.0046 (0.0195)	0.000

4.2.2 Cas de rendements modélisés sous forme d'un $ARMA(5, 5)$:

Nous allons et pour ce qui reste de cette section, travailler sur un échantillon de rendements filtré, modélisé sous forme d'un $ARMA(5, 5)$. L'intérêt de ce modèle et qu'il permet de filtrer la série de rendements en annulant la corrélation entre les résidus.

Comme pour les rendements filtrés, nous allons appliquer cette étude à des rendements excédentaires et simples c'est-à-dire en présence et en absence

de la dynamique des taux d'intérêts. L'étude sera aussi appliquée pour deux tailles échantillonales de rendements: 2000 et 2500.

Cas de rendements excédentaires: À la différence des tableaux présentés en haut, le tableau 18 ne contient plus les estimations de la constante du processus générant les rendements ainsi que les tests de student qui leurs correspondent.

Tableau 18: L'estimation des différents modèles GARCH
(Cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un ARMA(5,5))

Taille de l'échantillon égale à 2000

$$R_{m,t} - R_{f,t} = ARMA(5,5) \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.05	0.03	1.71	-	0.09	0.08	1.02	-
α	0.15	0.06	2.50	-	0.18	0.11	1.60	-
β	0.80	0.07	11.7	-	0.55	0.28	2.00	-
δ	-	-	-	-	11.30	7.45	1.51	63.9
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-2611.9				-2579.93			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	0.94	0.02	56.6	17.58	-	-	-	-
ω	0.03	0.04	0.91	-	0.73	0.1	6.85	-
α	0.20	0.06	3.32	-	-	-	-	-
β	0.4	0.12	3.22	-	-	-	-	-
δ	1.29	-	-	-	28.21	13.1	2.15	699.9
ϕ	1.29	0.66	1.94	81.51	-	-	-	-
LL	-2571.14				-2929.87			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

* Es=Estimation, σ =écart-type, t-st=t-student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

.Tableau #19: L'estimation des différents modèles GARCH:
 (Cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un ARMA(5,5))

Taille de l'échantillon égale à 2500

$$R_{m,t} - R_{f,t} = ARMA(5,5) \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.03	0.02	1.77	-	0.03	0.03	1.31	-
α	0.13	0.05	2.62	-	0.13	0.07	1.8	-
β	0.83	0.06	15.1	-	0.72	0.13	5.68	-
δ	-	-	-	-	6.41	2.97	2.16	56.9
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-3086.6				-3058.1			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	0.95	0.023	40.5	13.8	-	-	-	-
ω	0.01	0.017	0.75	-	0.63	0.08	7.26	-
α	0.14	0.013	10.5	-	-	-	-	-
β	0.67	0.13	5.3	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	25.8	10.9	2.35	834.5
ϕ	0.54	0.32	1.7	70.8	-	-	-	-
LL	-3051.2				-3475.4			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

* Es=Estimation, σ =Ecart-Type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

Pour un échantillon de 2000 observations, nous constatons que les estimations de la moyenne, ω , sont souvent non significatives, ce qui signifie que nous sommes en présence de modèles *GARCH* sans tendance. Mêmes résultats sont obtenus par Day et Lewis pour des rendements hebdomadaire (chaque mercredi).

Les estimations du coefficient du lag des erreurs du processus générant les rendements, α , sont significatives dans le cas du modèle 1 et 3 sauf pour le modèle 2, mais elles restent faibles par rapport aux estimations du coefficient du lag de la volatilité conditionnelle, β , qui sont significatives pour tous les modèles.

Concernant les coefficients δ et ϕ , respectivement, de la VI et de la variable z_{t-1} , nous remarquons, comme pour Day et Lewis, que l'estimation du coefficient δ dans le modèle 2 est assez grande 11.3 avec un écart-type de 7.45, mais elle reste non significative. Pour des rendements hebdomadaires chaque mercredi, Day et Lewis ont trouvé que ce coefficient est significatif (0.318) avec une t-statistique égale à 3. Pour le modèle 4 l'estimation de ce coefficient (28.21) est significative avec un écart-type de 13.1, ce qui représente le contraire du cas des rendements non filtrés, ainsi on a la même conclusion que dans le cas de Day et Lewis.

La signification du coefficient δ dans le modèle 4 suggère que les prix d'options d'achat sur l'indice S&P500 contiennent de l'information relative à la volatilité conditionnelle *GARCH*, et par conséquent ils peuvent contenir de l'information relative à la volatilité future. L'estimation du coefficient ϕ dans le modèle 3 est égale à 1.29 avec un écart-type de 0.66. Ce coefficient est non significatif avec une t-statistique égale à 1.94.

Pour confirmer les résultats ci-dessus et pour comparer les quatre modèles que nous avons utilisé pour mesurer l'information contenue dans la VI, nous avons calculé la valeur de la fonction de vraisemblance pour les différents modèles et nous avons effectué des tests de rapport de vraisemblance.

En se basant sur les valeurs de la fonction de vraisemblance, nous pouvons dire que le meilleur modèle reste le modèle 3 contenant la variable z qui dépend de son côté de la VI [Voir tableau 18]. Les tests du rapport de vraisemblance, pour un niveau de signification de 95% , confirment ce résultat: dans le cas de l'hypothèse nulle $\delta = 0$, permettant de comparer le modèle *GARCH* avec le modèle *GARCH + VI*, la valeur de la fonction de vraisemblance est égale à 63.9, ce qui signifie que le modèle 2 est préférable au modèle 1, dans le cas de l'hypothèse nulle $\theta = 0$, permettant de comparer le modèle *GARCH + VI* avec le modèle *GARCH + Z(t)* , la valeur de la

fonction de vraisemblance est égale à 17.58, d'où le modèle 3 est préférable au modèle 2, dans le cas de l'hypothèse nulle $\phi = 0$, permettant de comparer le modèle *GARCH* avec le modèle *GARCH + Z(t)*, la valeur de la fonction de vraisemblance est égale à 81.51, ce qui signifie que le modèle 3 est préférable au modèle 1 et dans le cas de l'hypothèse nulle $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, permettant de comparer le modèle *GARCH + VI* avec le modèle contenant la VI seulement, la valeur de la fonction de vraisemblance est égale à 699.885 et par conséquent le modèle 2 est préférable au modèle 4.

À noter que puisque le modèle 4 est contenu dans le modèle 2 et que ce dernier est préférable par rapport au premier, alors cela signifie que la VI est insuffisante pour expliquer l'information que contient le modèle *GARCH*.

D'après Day et Lewis, pour des rendements hebdomadaire sur l'indice S&P100, l'insuffisance de la VI pour expliquer la volatilité conditionnelle *GARCH* s'explique par la présence des erreurs de mesure relative à la maturité et la variabilité des erreurs d'estimation.

Nous concluons que si l'estimation de la VI n'est pas biaisée et si le marché des options sur l'indice S&P500 est efficient, alors la VI reflète toute l'information contenue dans les séries des rendements passés.

Pour un échantillon de 2500 observations [voir tableau 19], nous constatons que les estimations de la moyenne, ω , sont souvent non significatives, sauf dans le cas du modèle 4. Par conséquent nous pouvons tirer la même conclusion que précédemment à savoir que nous sommes en présence de modèles *GARCH* sans tendance.

Les estimations du coefficient α du lag des erreurs du processus générant les rendements sont significatives dans le cas du modèle 1 et 3, sauf pour le modèle 2. Mais elles restent faibles par rapport aux estimations du coefficient β , du lag de la volatilité conditionnelle, qui sont significatives pour tous les modèles. Pour les autres coefficients, δ et ϕ , nous remarquons que l'estimation du coefficient δ dans le modèle 2 est assez grande et significative. De même, pour le modèle 4, l'estimation δ reste significative. Ce qui implique que la volatilité implicite peut expliquer la volatilité conditionnelle et par conséquent elle peut contenir de l'information relative à la volatilité future. L'estimation du coefficient ϕ est égale à 0.54, cette estimation est non significative avec une t-statistique égale à 1.7.

De la même façon que pour un échantillon de 2000 observations, les valeurs de la fonction de vraisemblance et les tests du rapport de vraisemblance nous indiquent le meilleur modèle que nous pouvons utiliser pour mesurer l'information contenue dans la volatilité implicite dans le but de

prévoir la volatilité future. En se basant sur les valeurs de la fonction de vraisemblance, nous pouvons dire que le meilleur modèle est celui qui contient la variable z_t . Les tests du rapport de vraisemblance confirment ce résultat.

La comparaison des modèles en se basant sur des tests hors échantillon : Cas de rendements excédentaires modélisés sous forme d'un $ARMA(5, 5)$ Le tableau 20 montre les résultats de l'estimation de l'équation régressant les volatilités ex-post sur les prévisions des modèles *GARCH*.

Table 20: Le pouvoir prédictif des différents modèles²⁶ :

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 VF_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.1138 (1.3311)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.1072 (1.4320)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.1314 (1.9010)
La volatilité implicite seulement	-0.0699 (-0.5907)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.6330 (5.7007)	0.045
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.5402 (6.8435)	0.064
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.5011 (7.1991)	0.07
La volatilité implicite seulement	0.5199 (5.5401)	0.043

D'après ce tableau, les estimations de b_1 sont dans tous les cas significativement différentes de 0, ceux-ci restent proche des résultats obtenus par Day et Lewis pour des rendements hebdomadaires. Nous constatons aussi que le modèle contenant la variable z_t est le meilleur avec un R^2 égal à 0.07, ensuite, on trouve le modèle *GARCH*+*VI* avec un R^2 égal à 0.064, en troisième position nous trouvons le modèle *GARCH* avec un R^2 de 0.045 et enfin il y a le modèle avec la *VI* seulement dont le R^2 égal à 0.043. Par conséquent, nous pouvons dire que les modèles *GARCH* contenant la volatilité implicite ou une variable qui dépend de celle-ci, sont les meilleurs à utiliser pour prévoir la volatilité future.

Pour un échantillon de 192 observations, le tableau ci-dessous [Tableau 21] montre que le R^2 est plus grand dans le cas de prévisions du modèle 3. Donc, nous pouvons tirer les mêmes conclusions que pour un échantillon de

²⁶Les chiffres entre les parenthèses correspondent à un test de student (t-statistique).

692 observations à savoir que le modèle contenant la variable z_t constitue le meilleur modèle à utiliser pour prévoir la volatilité future. Ceux-ci veulent dire que les prix des options peuvent contenir de l'information relative aux volatilités à venir.

Table 21: Le pouvoir prédictif des différents modèles

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1 V_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.8137 (2.8949)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.6376 (1.8491)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.4956 (1.3991)
La volatilité implicite seulement	0.9910 (2.8906)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.1492 (0.5394)	0.002
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.2441 (0.9621)	0.005
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.3343 (1.3508)	0.010
La volatilité implicite seulement	-0.0235 (-0.1060)	0.000

Cas de rendements simples: En comparant ce cas [Tableau 22] à celui où la dynamique des taux d'intérêt est présente au niveau des rendements, nous remarquons que, différemment de celui-là, l'estimation du coefficient α n'est pas significative pour le modèle 1. Sachant que α est le coefficient des résidus du processus générant les rendements, nous pouvons dire que les taux d'intérêts ont influencé ces estimations.

Concernant le reste des coefficients, le tableau indique qu'il n'y a pas de grands changements, c'est-à-dire que les résultats ressemblent à ceux trouvés au niveau de la partie précédente.

Pour le choix du meilleur modèle permettant de mesurer l'information contenue dans la VI, nous avons utilisé les mêmes outils que précédemment à savoir les valeurs de la fonction de vraisemblance et les tests du rapport de vraisemblance. En se basant sur ces statistiques, nous avons abouti aux mêmes conclusions qu'en haut, c'est-à-dire que le modèle 3 est le meilleur parmi les autres.

Pour un échantillon de 2500 observations, les résultats du tableau 23, montrent que les estimations de la constante ω sont non significatives pour tous les modèles. Le coefficient α est non-significatif, sauf dans le cas du modèle 3 contenant la variable z_t . Pour le coefficient β , nous remarquons qu'il est significatif pour tous les modèles.

Concernant les coefficients δ et ϕ , nous constatons que δ est significatif pour le modèle 4, ce qui implique que VI peut contenir de l'information relative à la volatilité future. Contrairement le coefficient ϕ est non significative.

Les valeurs de la fonction de vraisemblance et les tests du rapport de vraisemblance indiquent que le meilleur modèle est celui qui contient la variable z_t (modèle 3).

Tableau #22: L'estimation des différents modèles GARCH:
 (Cas de rendements simples modélisés sous forme d'un ARMA(5,5))

Taille de l'échantillon égale à 2500

$$R_{m,t} = ARMA(5, 5) \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.02	0.01	1.26	-	0.02	0.01	1.11	-
α	0.1	0.06	1.68	-	0.1	0.07	1.46	-
β	0.88	0.05	15.6	-	0.8	0.12	6.58	-
δ	-	-	-	-	4.26	2.48	1.71	41.4
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-2999				-2978.31			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	0.93	0.03	33.8	8.1	-	-	-	-
ω	0.01	0.01	1.1	-	0.54	0.06	-	-
α	0.11	0.01	11.3	-	-	-	-	-
β	0.74	0.1	7.41	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	25.6	11	2.31	745.52
ϕ	0.44	0.24	1.78	49.5	-	-	-	-
LL	-2974.25				-3351			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

*Es=Estimation, σ =écart-type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

Tableau #23: L'estimation des différents modèles GARCH:
(Cas de rendements simples modélisés sous forme d'un ARMA(5,5))

Taille de l'échantillon égale à 2000

$$R_{m,t} = ARMA(5, 5) \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \phi z_{t-1} \quad (2)$$

$$z_{t-1} = \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-2} \quad (3)$$

	Model1				Model2			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	-	-	-	-	-	-	-	-
ω	0.03	0.02	1.31	-	0.03	0.04	0.86	-
α	0.11	0.07	1.69	-	0.12	0.09	1.28	-
β	0.85	0.08	10.8	-	0.73	0.17	4.09	-
δ	-	-	-	-	6.08	3.87	1.56	46.2
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-
LL	-2531.4				-2508.29			

	Model3				Model4			
	Es	σ	t-st	TLR	Es	σ	t-st	TLR
θ	0.93	0.02	45.9	13.4	-	-	-	-
ω	0.02	0.02	0.85	-	0.63	0.08	7.75	-
α	0.13	0.02	6.5	-	-	-	-	-
β	0.65	0.11	5.5	-	-	-	-	-
δ	-	-	-	-	28.01	13.2	2.12	843.16
ϕ	0.68	0.39	1.76	59.7	-	-	-	-
LL	-2501.5				-2929.87			

*Les estimations sont faites par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

NB:

*Es=Estimation, σ =écart-type, t-st=test student, TLR=Test Likelihood Ratio et LL=Log-Likelihood.

*Le modèle3 est le modèle (2) en haut du tableau.

-Le modèle1 est le modèle3 avec $\phi = 0$.

-Le modèle2 est le modèle3 avec $\theta = 0$.

-Le modèle4 est le modèle3 avec $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\theta = 0$.

La comparaison des modèles en se basant sur des tests hors échantillon : Cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $ARMA(5, 5)$

Table24: Le pouvoir prédictif des différents modèles

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1VF_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.1182 (1.3735)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.1057 (1.4213)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.1263 (1.7784)
La volatilité implicite seulement	-0.0275 (-0.2519)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.6463 (5.4192)	0.041
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.5696 (6.7011)	0.061
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.5354 (6.7925)	0.063
La volatilité implicite seulement	0.5198 (5.5122)	0.042

Table25: Le pouvoir prédictif des différents modèles.

$$VF_{t+1} = b_0 + b_1VF_{f,t+1} + \xi_{t+1}$$

V_f	b_0
<i>GARCH</i>	0.8648 (2.7507)
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.6756 (1.8337)
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.5968 (1.6324)
La volatilité implicite seulement	0.8921 (2.7442)

V_f	b_1	R^2
<i>GARCH</i>	0.0661 (0.2034)	0.000
<i>GARCH</i> avec la volatilité implicite	0.2028 (0.7028)	0.003
<i>GARCH</i> avec la variable $z(t)$	0.2577 (0.9321)	0.005
La volatilité implicite seulement	0.0241 (0.1081)	0.000

Les résultats des tableaux 24 et 25 ci-dessus ressemblent beaucoup à ceux obtenus dans le cas de rendements simples modélisés sous forme d'un $AR(1)$, par conséquent nous pouvons tirer les mêmes conclusions à savoir que le modèle contenant la variable z_t explique mieux la volatilité ex-post.

Puisque la variable z_t dépend de son côté de la VI, nous pouvons donc dire que cette dernière contient de l'information permettant d'expliquer et de prévoir la volatilité future.

5 Conclusion:

Sur la base des travaux recents de la litterature, nous avons réussi à construire un modèle qui permet de bien mesurer l'information contenue dans la VI et de voir si celle-ci est capable de prévoir la volatilité future. La superiorité de ce modèle, par rapport aux autres, a été vérifiée par des tests hors échantillon.

Nous avons estimé et testé 4 modèles, en se basant sur un même échantillon de rendements, mais utilisé de différentes manières. Dans un premier temps nous avons procédé à la modélisation des rendements sous la forme d'un modèle ARMA(5,5) et cela pour pouvoir éliminer l'impact que peut entraîner la corrélation des bruits du processus générant les rendements sur les estimations. Dans un deuxième temps, nous avons considéré le processus des rendements comme étant égal à un $AR(1)$. D'un autre côté, pour voir l'influence de la dynamique des taux d'intérêt sur les estimations, nous avons appliqué l'étude à des rendements simples et des rendements excédentaires.

En suivant la démarche précédente, nous avons abouti aux deux conclusions principales suivantes: la première est que le modèle contenant la variable z_t qui dépend de la VI, constitue le meilleur modèle permettant de mesurer l'information contenue dans la VI. La deuxième est que puisqu'il y a des modèles où les coefficients estimés de la VI, ou d'une variable z_t qui dépend de celle-ci, sont significatifs, alors la VI peut contribuer à prévoir la volatilité future. Les tests du rapport de vraisemblance et les tests hors échantillon confirment ces conclusions en testant l'importance d'un modèle contre les autres.

6 Appendices:

Appendice1: La méthode numérique pour le calcul de la VI à partir du modèle de Black et Scholes: Soit la formule de Black-Scholes suivante:

*Pour une option d'achat:

$$G(S_t, t) = C_t = S_t N(d_1) - K \exp(-r(T-t)) N(d_2)$$

avec;

$$d_1 = (\ln(S_t/K) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)) / \sigma \sqrt{(T-t)};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)};$$

*Pour une option de vente:

$$P_t = K \exp(-r(T-t)) N(d_2) - S_t N(-d_1) \quad (32)$$

Si on suppose qu'on connaît C_t (ou P_t) du marché et les autres paramètres de la formule de Black-Scholes, sauf la VI σ , alors on peut déduire cette dernière en solutionnant l'équation suivante:

$$g(\sigma) = C_t - G(S_t, t) = 0 \quad (33)$$

Nous pouvons utiliser la méthode de Newton-Raphsan²⁷ pour solutionner numériquement l'équation $g(\sigma)$. Nous commençons avec un point initial σ_0 et nous convergions vers la solution selon le processus suivant:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - g(\sigma_i) / g'(\sigma_i) \quad (34)$$

i : indique le nombre d'itérations.

On arrête la procédure une fois qu'on a : $|\sigma_{i+1} - \sigma_i| < \varepsilon$, où ε est le niveau de précision désiré.

Nous pouvons appliquer cette méthode pour les différentes options et durant tous les jours des observations.

²⁷Voir le livre de Hamilton (1994), page 138-139.

Appendice2: La deuxième méthode d'estimation de la volatilité utilisée par Day et Lewis: Pour estimer la VI, Day et Lewis ont utilisé la formule de Black-Scholes ajustée à une option américaine et à la présence de dividendes qui sont payés durant la vie de l'option d'achat. Cette formule est donnée par l'équation suivante:

$$C_t(K, (T - t)) = (I_t - PV_t(D((T - t))))N(d_1) - K \exp(-r(T - t))N(d_2) \quad (35)$$

où;

$$d_1 = \{\ln[(I_t - PV_t(D((T - t))))/K \exp(-r(T - t))] + 1/2\sigma^2(T - t)\} / \sigma \sqrt{(T - t)};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T - t)};$$

avec;

I_t : le niveau courant de l'indice;

$PV_t(D((T - t)))$: la valeur présente de tous les dividendes payés durant la vie de l'option;

$N(.)$: la fonction de répartition de la loi normale;

La procédure d'estimation de la VI suivie par Day et Lewis est celle de Whaley qui se base sur une approche de régression non-linéaire. En donnant une estimation initiale de la VI, $\sigma_0((T - t))$, l'estimateur de la volatilité présente, $\sigma((T - t))$, pour une date d'expiration $(T - t)$ est obtenue en minimisant la fonction suivante:

$$\sum_{K=1}^{N_T} (\delta_{K,(T-t)} (C_{K,(T-t)} - C_K(\sigma_0((T - t))))^2 \quad (36)$$

avec;

$\delta_{k,(T-t)}$: la proportion du volume des transactions sur les options dont la date d'expiration $(T - t)$ et le prix d'exercice K ;

N_T : le nombre de prix d'exercices pour une date d'expiration donnée $(T - t)$.

À chaque itération, l'estimateur de la VI présente est donné par:

$$\sigma((T - t)) = \sigma_0((T - t)) + [(\Omega X)'(\Omega X)]^{-1}(\Omega X)' \Omega Y \quad (37)$$

avec;

Ω : la matrice diagonale d'ordre $(N_{(T-t)}, N_{(T-t)})$ et dont les éléments diagonales sont égaux aux pourcentages des volumes de transactions des options d'achat dont la date d'expiration est égale à $(T - t)$;

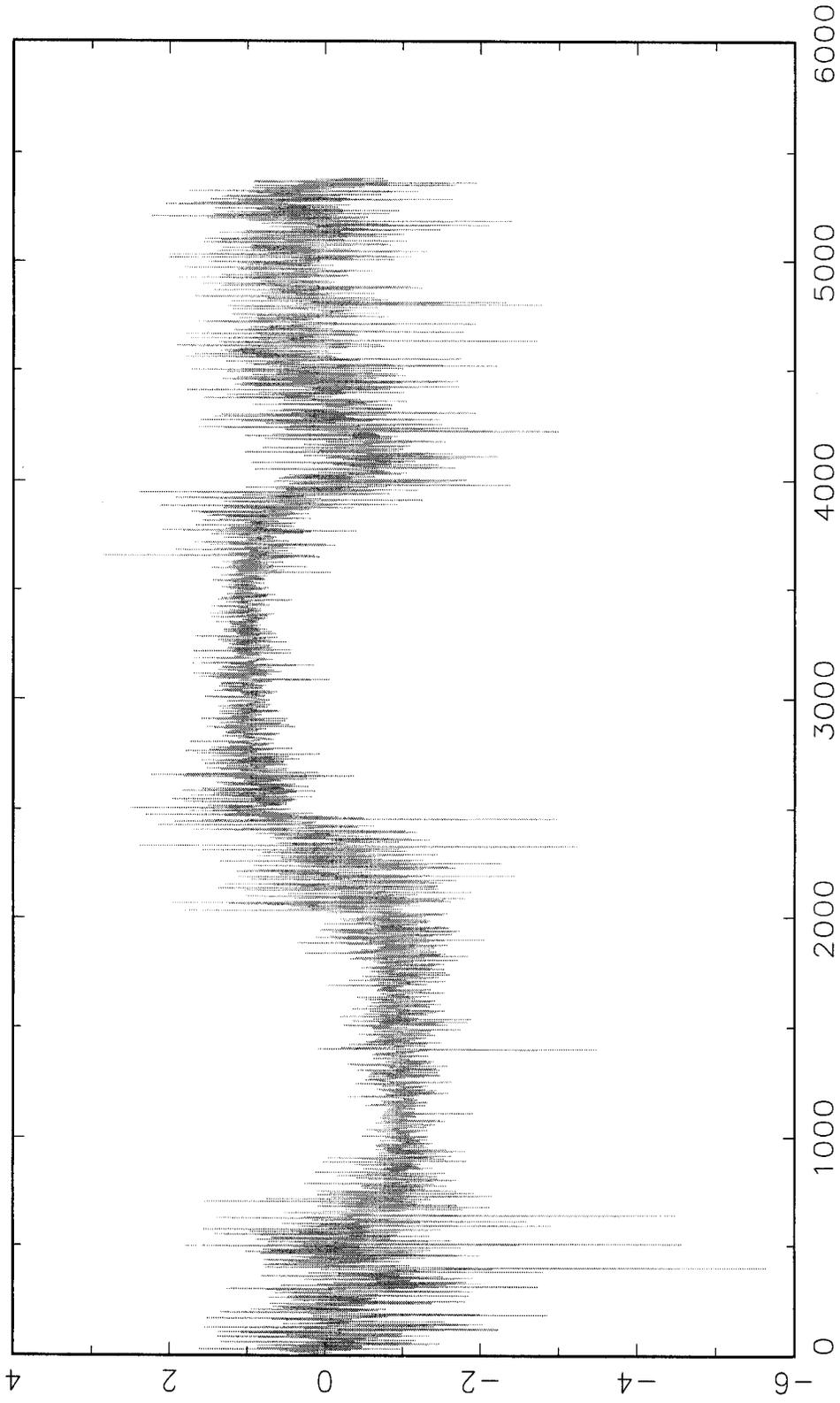
X : un vecteur d'ordre $(N_{(T-t)}, 1)$ composé des dérivés des prix des options, dont la date d'expiration est $(T - t)$, par rapport à la volatilité du sous-jacent. Ces dérivés sont évalués à la valeur initiale $\sigma_0((T - t))$.

Y : un vecteur d'ordre $(N_{(T-t)}, 1)$ composé des différences entre les prix présents réels et les prix théoriques des options $(c_{k,t} - c_k(\sigma_0((T - t))))$. Ces différences des prix sont évaluées pour $\sigma_0((T - t))$.

Nous choisissons $\sigma((T - t))$ qui répond au critère de précision que nous avons fixé à l'avance.

GAUSS Sun Dec 30 13:41:26 2001

Les erreurs, $u(t)$, du processus des rendements excédentaires de l'indice S&P5
(Cas du modèle $R_m(t) - R_f(t) = m + \text{eps}(t)$)

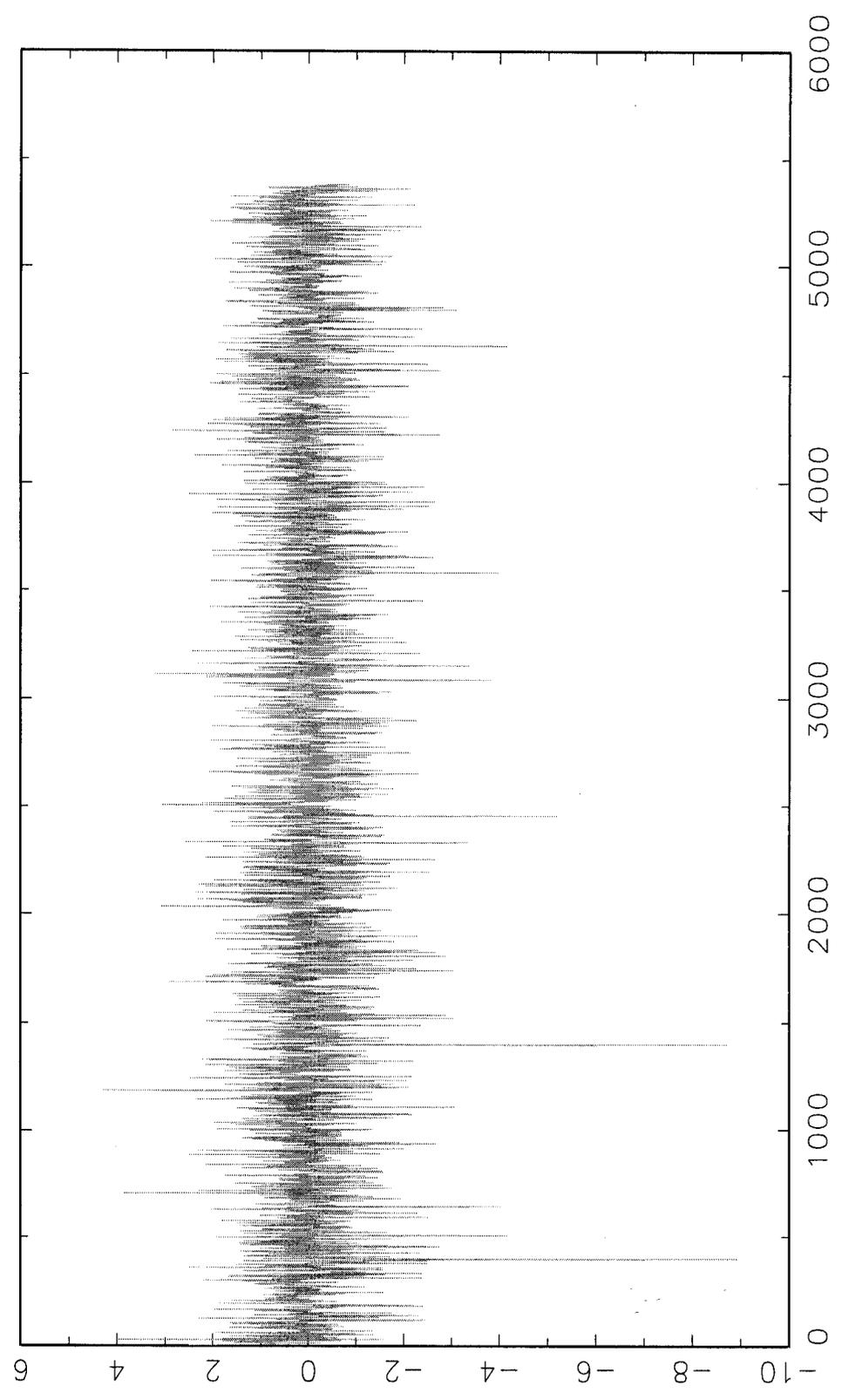


Graph no 3

Ciraphu 4

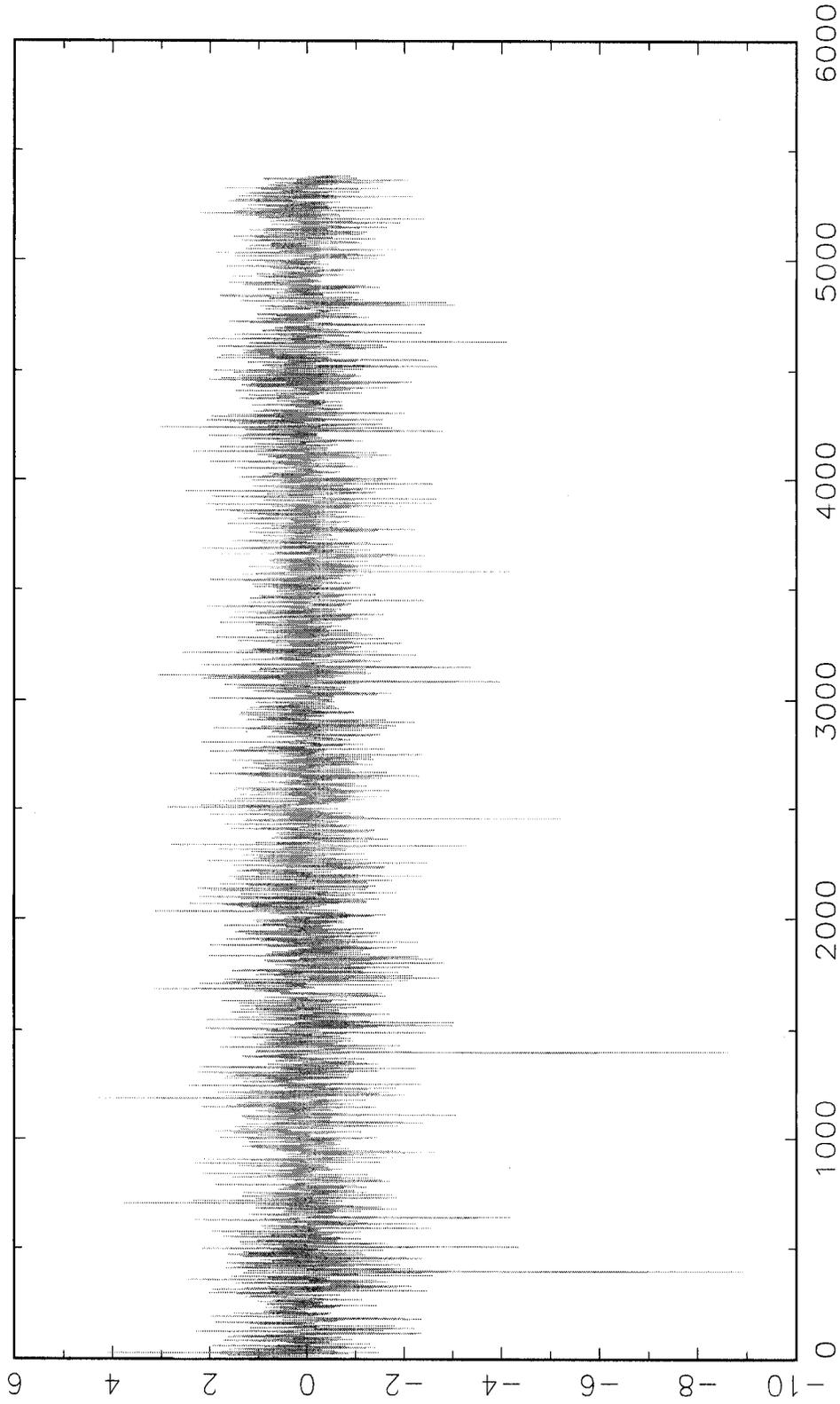
GAUSS Sun Dec 30 13:43:59 2001

Les erreurs, $u(t)$, du processus des rendements simples de l'indice S&P500
(Cas du modele $R_m(t) - R_f(t) = \text{ARMA}(5,5)$)



GAUSS Sun Dec 30 13:47:07 2001

Les erreurs, $u(t)$, du processus des rendements excédentaires de l'indice S&P5
(Cas du modèle $R_m(t) - R_f(t) = \text{ARMA}(5,5)$)



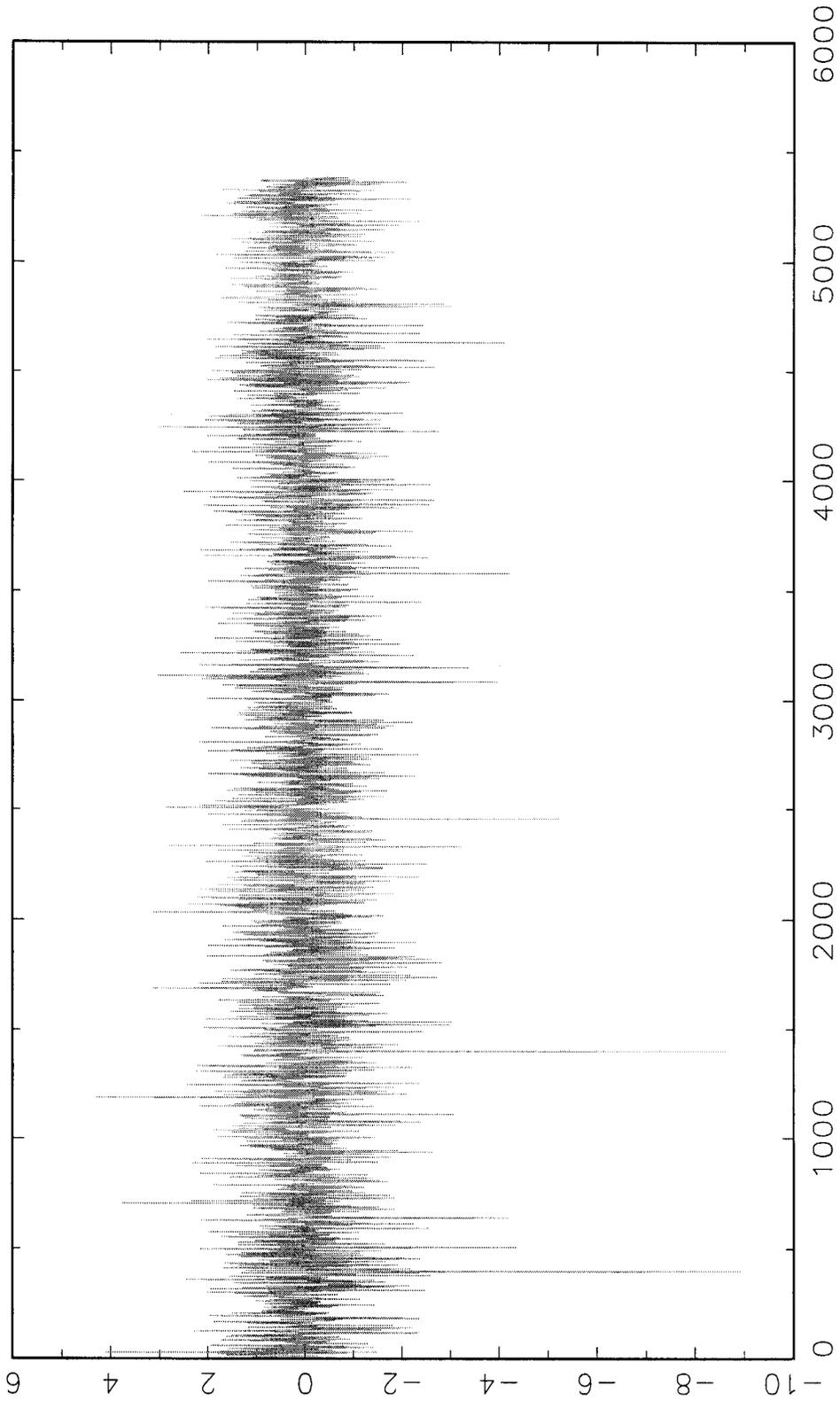
54

Graf 0.5

51/2

GAUSS Sun Dec 30 13:45:48 2001

Les erreurs, $u(t)$, du processus des rendements simples de l'indice S&P500
(Cas du modèle $R_m(t) - R_f(t) = m + \text{eps}(t)$)



52

Bibliographie:

- Beckers, Stan , 1981. Standard Deviations Implied In Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability, *Journal of Banking Finance*, 5, 363-381.
- Black, F., et Scholes, M., 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81 (1973) 637-654.
- Bollerslev, T., 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bollerslev, T., Robert F. Engle, and Jeffrey M. Wooldridge, 1988. A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances, *Journal of Political Economy* 96, 116-131.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W., Mackinlay, A.C., 1997. The Econometrics of Financial Markets , *Princeton University Press*.
- Canina, L., et Figlewski, S., 1993. The Informational Content of Implied Volatility, *The Review of Financial Studies* (1993) Volume 6, nombre 3, pp 293-326.
- Chiras, D. et Manaster, S., 1978. The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency, *Journal of Financial Economics*, 6, 213-234.
- Cox, J.C, and M. Rubinstein, 1985. Option Markets, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J
- Day, T. E., et Lewis, C. M. , 1992. Stock Market Volatility and The Information Content of Stock Index Options, *Journal of Econometrics* 52 (1992) 267-287.
- Engle, R., 1982. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of Variance of U.K Inflation, *Econometrica*, 50, 987-1007.
- Fleming, J., 1998. The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&p100 Index Option Prices, *Journal of Empirical Finance* 5 (1998) 317-345.
- Gouriéroux, C, Monfort, A, 1989. Statistiques et Modeles Econométriques, *Economica*, Tome2.
- Hamilton, J.D., 1994. Time Series Analysis, *Princeton University Press*.
- Heston, S., 1992. A Closed-Form Solution for Option with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.

- Heston, S., 1993. Invisible Parametre in option prices, *Journal of Finance*, 48, 933-948.
- Hull et White, 1987. The Pricing Of Options On Assets With Stochastic Volatilities, *The Journal Of Finance*, 2:281-300.
- Lamoureux, C. G., et Lastrapes, W. D., 1993. Forecasting Stock-Return Variance : Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities , *The Review of Financial Studies* (1993) Volume 6, nombre 2, pp 293-326.
- Latané, H. A., et Rendleman, R. J., 1976. Standard Deviations of Price Ratios Implied in Option Prices, *Journal of Finance* 31 (1976) 369-381.
- Melino, A., et S., Turnbull, 1991. The Pricing of Foreing Currency Options, *Canadian Journal of Econometrics*, 251-282.
- Merton, 1973. The Theory Of Rational Option Pricing, *Bell Journal Of Economics and Management Science*, 4:141-183.
- Nelson, D. B., 1991. Conditional Hétéroskedasticity in Asset Returns : A New Approach, *Econometrica*, vol.59, pp347-370.
- Noh, Engle et Kane, 1994. Forecasting Volatility and Options Prices of The S&P500 Index, *The Journal of Derivative*, page 17-30.
- Whaley, Robert E., 1982. Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks: Empirical Tests, *Journal of Financial Economics* 10, 29-58.
- Wiggins, J., 1987. Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, *Journal of Financial Economics* 19, 351-372.